ISSN 0393-0998

Luglio 2003
Supplemento al n. 7

Period. mensile spedizione in A.P.
art. 2, C. 20/B, L. 662/96
Filiale di Bologna

Anno XXX

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

XXIII CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«L'INSEGNANTE DI MATEMATICA NELLA SCUOLA D'OGGI: FORMAZIONE E PRATICA PROFESSIONALE»

LOANO (SV), 3-4-5 OTTOBRE 2002
a cura di Giuseppe Anichini

Direttore Responsabile:
ALBERTO CONTE

Comitato di Redazione:
GIUSEPPE ANICHINI (Vicedirettore)
MASSIMO FERRI
PIERLUIGI PAPINI
ELISABETTA VELABRI
MILENA TANSINI PAGANI

Ufficio di Presidenza dell'UMI (2003-2006):

Presidente	Carlo Sbordone
Vice Presidente	Salvatore Coen
Segretario	Giuseppe Anichini
Segretario Aggiunto	Vittorio Coti Zelati
Amministratore-Tesoriere	Barbara Lazzari

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

INDICE

GRUPPI DI LAVORO:

LABORATORI:

XXIII CONVEGNO UMI-CIIM

L'INSEGNANTE DI MATEMATICA NELLA SCUOLA D'OGGI: FORMAZIONE E PRATICA PROFESSIONALI

Loano, 3-5 ottobre 2002

Programma

Giovedì 3 ottobre

- Iscrizioni al Convegno
- Saluto delle autorità
- *Stili d'insegnamento: lezioni di matematica al microscopio,* Vinicio Villani, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
- *Dal compasso al computer: formazione e pratica professionale dell'insegnante*, Mariolina Bartolini Bussi, Dipartimento di Matematica, Università di Modena-Reggio Emilia
- Presentazione del Pirelli International Award, Massimo Armeni, Pirelli International Award Manager
- Comunicazioni
- Gruppi di lavoro
- Proiezione del film A Beautiful Mind

Venerdì 4 ottobre

- *Valutazione e professionalità dei docenti: problemi attuali,* Cristina Coggi, Dipartimento di Scienze dell'Educazione, Università di Torino
- *Calcolo numerico e calcolo simbolico: nuove prospettive per il curriculum di matematica*, Michele Impedovo, Liceo Scientifico G. Ferraris (Varese)
- *La discussione matematica: formazione e pratica professionale dell'insegnante*, Maria Alessandra Mariotti, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
- Dibattito sul tema "Quale matematica nella Scuola Secondaria?" Presiede Ferdinando Arzarello, coordinatore della Commissione UMI-CIIM per i nuovi Curricoli di Matematica
- Laboratori
- *La teoria dei giochi: una via matematica alla composizione dei conflitti,* Marco Li Calzi, Dipartimento di Matematica applicata, Università Ca' Foscari, Venezia (commento matematico al film A Beautiful Mind)

Sabato 5 ottobre

- *L. Cremona, G. Vailati e C. Segre: tre diversi approcci al problema dell'insegnamento della matematica fra '800 e '900*, Livia Giacardi, Dipartimento di Matematica, Università di Torino
- Rapporto sui lavori dei gruppi. Coordina: Lucia Ciarrapico, Ispettrice Miur
- Presentazione di Cabri Géometrè II plus e Cabri 3D Eric Baiville, Società Cabrilog
- La riffa matematica, a cura di Mario Barra, Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"
- *Il problema degli n-corpi: storia e risultati recenti,* Vittorio Coti Zelati, Dipartimento di Matematica, Università di Napoli
- Termine lavori

PRESENTAZIONE

Il 23° convegno UMI-CIIM, svoltosi nei giorni 3, 4, 5 ottobre 2002 a Loano (SV) sul tema "L'insegnante di matematica nella scuola d'oggi: formazione e pratica professionali", si proponeva di fare il punto sulla delicata funzione che il professore di matematica della secondaria (ma anche il maestro delle elementari) viene ad assumere nel quadro dei progetti di riforma della scuola, visto il ruolo cruciale che le conoscenze matematiche giocano (e giocheranno sempre più) per la formazione dei futuri cittadini a tutti i livelli professionali.

Da un lato occorre pensare a percorsi di insegnamento moderni nei contenuti e che rendano appetibile la disciplina agli allievi, dall'altro occorre definire rispetto alla continua ristrutturazione dei saperi e al ruolo delle nuove tecnologie il tipo di formazione, iniziale e in servizio, che si rende opportuna per gli insegnanti di matematica.

Il Convegno ha ampiamente centrato i suoi obiettivi: sia le conferenze degli esperti su invito (di cui pubblichiamo il testo integrale) che le comunicazioni (delle quali pubblichiamo una sintesi) offrono un'interessante panoramica su tali problemi.

In particolare risulta analizzato e descritto scientificamente il complesso lavoro che l'insegnante fa in classe: la micro-analisi dettagliata dei suoi interventi in una lezione così come la macro-analisi di suoi interventi nel medio e lungo termine (possibili grazie all'organizzazione della scuola in Italia) offrono potenti strumenti per riflettere sulla propria professionalità e sul ruolo che si gioca in classe per costruire situazioni di apprendimento.

Un punto a parte in questo discorso meritano gli strumenti tecnologici (dai più poveri ai più sofisticati): occorre sfatare il pregiudizio che il loro inserimento produca effetti miracolosi per se. Senza l'opportuna e vigile mediazione dell'insegnante in realtà non si ottiene un bel nulla. Alcune relazioni offrono strumenti di analisi e riflessioni anche su questo punto, oggi cruciale nell'insegnamento della matematica.

Il Convegno si è svolto in un periodo particolarmente delicato nella nostra scuola: il Ministero sta elaborando nuovi modelli e nuove proposte curricolari. I matematici, in particolare l'UMI, sono vigili come sempre a quanto sta succedendo, ai fini di favorire un migliore apprendimento della disciplina. Il precedente 22° Convegno di Ischia ha illustrato le proposte curricolari dell'UMI per la scuola elementare e media (espresse dal volume Matematica 2001, del quale è in corso di ristampa la seconda edizione, reperibile anche al sito dell'UMI). L'UMI è ora al lavoro per il curricolo della secondaria, che sviluppa in verticale le proposte precedenti. Le linee fondamentali del progetto sono ormai più che definite. Anche di questo si è parlato a Loano in una tavola rotonda e in animati lavori di gruppo. L'obiettivo è di produrre un volume Matematica 2003 per la scuola secondaria, mettendolo a disposizione di tutti gli insegnanti.

Come sempre, il Convegno ha avuto anche una parte di approfondimento culturale: i temi scelti quest'anno riguardano alcune importanti applicazioni della matematica all'economia e all'astronomia. In particolare, di grande successo è stata la visione e il commento matematico al film *A Beautiful Mind*, che ha offerto l'occasione per diffondere a un pubblico più vasto (hanno partecipato anche molti cittadini non addetti ai lavori) un esempio interessante e rigoroso di divulgazione matematica.

Termino questa breve presentazione ringraziando l'amministrazione comunale di Loano per la generosa ospitalità e sponsorizzazione che ci ha offerto, il CNR e il

Dipartimento di Matematica di Genova per il supporto offertoci in persone e risorse, tutti i colleghi della CIIM che hanno contribuito alla brillante riuscita dell'iniziativa, in particolare Gianpaolo Chiappini, indefesso e instancabile organizzatore, senza il cui generoso e intelligente lavoro questo Convegno non si sarebbe potuto tenere.

Bologna, 7 giugno 2003

Il Presidente della CIIM
(Ferdinando Arzarello)

RELAZIONI

STILI DI INSEGNAMENTO: LEZIONI DI MATEMATICA AL MICROSCOPIO

Vinicio Villani
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

Nei corsi di didattica della matematica che ho tenuto per vari anni a Pisa (corso di laurea e SSIS) ero solito proporre ai miei studenti vari temi di riflessione metodologica oltre che contenutistica, da approfondire individualmente come "compito per casa" e da discutere poi collegialmente in una lezione successiva.

Uno di questi temi era formulato più o meno così:
Come imposterei la mia prima lezione di geometria in una prima classe di scuola secondaria superiore[1]*?*

Ai corsisti veniva esplicitamente richiesto di inquadrare la loro proposta didattica specifica di quella ipotetica lezione nel contesto di una visione complessiva dell'insegnamento della matematica all'inizio della scuola secondaria superiore, precisando le proprie scelte su alcuni aspetti di carattere generale, quali ad esempio: differenziazione o meno dell'impostazione didattica a seconda del tipo di scuola secondaria nella quale immaginavano di dover insegnare, collocazione temporale dell'argomento "geometria" nel complesso dei temi previsti dai programmi ministeriali, obiettivi di fondo ritenuti particolarmente rilevanti da raggiungere entro la fine dell'anno, sussidi didattici da utilizzare, ecc.

Dalle proposte dei corsisti e dalla successiva discussione è emersa una grande varietà di possibili impostazioni. Eccone, in estrema sintesi, un elenco (certo non esaustivo):

1. Approccio mediante un **test**, che può essere:
2. *generico* (su geometria, aritmetica, logica, probabilità...)
3. oppure
4. *mirato* (sulle sole nozioni di geometria di cui si prevede l'utilizzo nelle lezioni immediatamente successive).
5. Approccio **autoritario**, di frattura con la scolarità precedente: "Dimenticate tutto quello che avete imparato alle medie; ora si ricomincia daccapo..." Dopodiché l'insegnante introduce alcuni termini specifici del linguaggio matematico, quali postulato, definizione, teorema, ipotesi, tesi, dimostrazione,...
6. Approccio **dialogato**, di continuità con la scolarità precedente: "Cosa ricordate, di geometria, dalle medie?" Dopodiché ogni singolo allievo viene sollecitato a proporre qualche definizione, o qualche formula, o l'enunciato di qualche teorema. Seguono commenti da parte di tutta la classe e infine l'insegnante

---

[1] Solo per una maggiore concretezza, in questa esposizione mi riferirò unicamente al primo biennio della scuola secondaria superiore, ma tutte le considerazioni di carattere metodologico-didattico potranno essere facilmente adattate ad ogni altro livello scolare

focalizza l'attenzione sui punti salienti dai quali prenderà le mosse il lavoro successivo.

7. Approccio **inquisitorio**: L'insegnante chiama alla lavagna il "Pierino" di turno e lo interroga. Il resto della classe fa da spettatore.
8. Approccio **calcolativo**: "Calcolate il volume del solido generato dalla rotazione del triangolo rettangolo di cateti 3 cm, 4 cm intorno all'ipotenusa".
9. Approccio **grafico--tecnologico**: L'insegnante chiede agli alunni di utilizzare riga e compasso per disegnare un triangolo a piacere e per tracciarne le mediane, le altezze, le bisettrici, gli assi dei lati, ecc. Ciò anche nella prospettiva di riprendere in seguito l'argomento, facendo realizzare al calcolatore le medesime costruzioni con l'ausilio di apposito software geometrico (per esempio Cabri).
10. Approccio **culturale**: L'insegnante illustra gli aspetti storico-filosofici che stanno alla base della geometria greca.
11. Approccio di **ricerca-scoperta**: l'insegnante propone un tema specifico, preferibilmente non affrontato in precedenza dagli allievi, e li invita ad esplorare la situazione (individualmente o a gruppi). Per esempio: "determinare la somma degli angoli interni di un quadrilatero, poi di un pentagono, di un esagono, e così via, specificando il tipo di procedimento seguito" oppure "individuare tutti i possibili sviluppi piani di un cubo (o di un parallelepipedo rettangolo)".

*****

Naturalmente qualcuna di queste proposte può apparire preferibile ad altre, ma credo che nessuno abbia la presunzione di stabilire univocamente quale sia "la migliore". È invece opportuno che ogni (futuro) docente sia consapevole dell'esistenza di una pluralità di approcci possibili, tra i quali egli sceglierà quello (o quelli) che ritiene più congeniali per il suo insegnamento, tenendo conto della specifica realtà scolastica, anzi addirittura delle specificità delle singole classi nelle quali si troverà ad operare. L'utilizzo di differenti stili d'insegnamento può risultare particolarmente utile per le attività di recupero, visto che sarebbe del tutto inutile ripetere nello stesso modo gli argomenti non ben compresi in precedenza.

È anche opportuno che ogni (futuro) docente si renda conto dei diversi ruoli degli "attori" in gioco e dei diversi tipi di interazione che si possono instaurare tra insegnante e allievi, e degli allievi tra loro, in base all'impostazione didattica prescelta (Chi tiene le fila del discorso? C'è cooperazione o conflittualità? C'è partecipazione di tutta la classe o prevale un atteggiamento passivo?...).

Quanto alle motivazioni che i miei corsisti hanno addotto a giustificazione delle loro scelte, prevalgono quelle che si rifanno alla tradizione scolastica:

"Perché così si comportava la mia professoressa di liceo".

"Perché questa è l'impostazione del primo capitolo del libro di testo che ho consultato".

"Per adeguarmi alla prassi corrente delle scuole che conosco più da vicino".

Scarseggiano invece motivazioni che fanno riferimento ad autentiche scelte culturali. Lasciano anche a desiderare i legami che i miei corsisti sono stati in grado di esplicitare, fra questa ipotetica prima lezione ed i loro propositi per lo sviluppo complessivo del programma di matematica.
Mi riferisco in particolare alla strutturazione dei contenuti curricolari in moduli e unità didattiche, con indicazioni specifiche su obiettivi, metodi, mezzi, tempi, modalità di valutazione, ...). Sono poi completamente trascurati i legami con una programmazione complessiva di classe, dove le varie discipline dovrebbero concorrere al raggiungimento degli obiettivi trasversali.

Avendo constato questa carenza progettuale, ho sollecitato i miei corsisti ad un ulteriore approfondimento sui diversi possibili stili di insegnamento, rivolgendo loro domande del tipo:

Nelle vostre intenzioni:

A) Quanta e quale parte del vostro insegnamento dovrebbe essere **sistematica-espositiva**, seguendo un percorso prestabilito?

B) Quanta e quale parte del vostro insegnamento dovrebbe essere dedicata ad **attività di scoperta guidata**?

C) In quali occasioni e con quali finalità contate di utilizzare (o di vietare) i **sussidi tecnologici**? Per favorire la comprensione dei concetti? Per facilitare le visualizzazioni di figure geometriche? Per l'esecuzione dei calcoli? ...

Naturalmente ciascuna di queste tre impostazioni didattiche ha pregi e limiti. In breve:

A)
Pregi. Sistematicità dell'esposizione e chiarezza nel contratto didattico (gli studenti sanno con precisione quali argomenti sono stati svolti a lezione e di conseguenza sanno cosa l'insegnante richiede da loro).
Limiti. Rischio di generare passività e favorire la memorizzazione a scapito della comprensione.

B)
Pregi. Coinvolgimento attivo e cooperativo, specie se le attività sono organizzate sotto forma di lavori di gruppo; allenamento all'uso di un linguaggio chiaro e univoco per presentare i risultati ottenuti agli altri compagni di classe.
Limiti. Occorre molto tempo; le attività rischiano di essere dispersive, per cui gli allievi possono avere difficoltà a cogliere l'essenza dei punti realmente importanti.

C)
Pregi. L'interesse destato dalla "novità" dell'impostazione. L'acquisizione di una buona padronanza nell'uso di tecnologie informatiche, che potrà rivelarsi utile anche in altri contesti, matematici e non.

Limiti. Rischio che gli aspetti informatici e tecnologici prendano il sopravvento, relegando in secondo piano gli aspetti matematici più concettuali (per es. il ruolo delle dimostrazioni, ...).

A seguito di questa esperienza di **lezioni simulate** è nata l'idea di documentare dal vivo alcune **lezioni reali** mediante videoregistrazioni, come mezzo per dare a chi le visionerà l'opportunità di analizzarne con calma le singole sequenze, identificando in ciascuna di esse i punti di forza e le eventuali carenze. Il progetto, dal titolo "**La Matematica a Scuola - Un'analisi al microscopio**' è stato reso possibile grazie ad un (modesto) finanziamento del Ministero della P.I. e ha consentito la realizzazione di un pacchetto multimediale formato dalle videoregistrazioni di tre lezioni, accompagnate da altrettanti CD (contenenti le trascrizioni dei dialoghi, numerosi esempi di elaborati scritti degli allievi, una documentazione fornita dagli stessi docenti sulla loro programmazione didattica complessiva entro la quale la specifica lezione videoregistrata andava inquadrata, proposte per una lettura critica dei filmati come stimolo per abituarsi a "saper vedere" e "interpretare" le dinamiche che si realizzano nella realtà durante i processi di insegnamento-apprendimento, riferimenti bibliografici, ecc.).

Essendomi dilungato all'inizio di questa esposizione sull'insegnamento-apprendimento della geometria, ora potrà sembrare paradossale che la scelta dell'argomento intorno al quale ruotano i tre filmati e i corrispondenti CD, sia caduta sull'**algebra**. Ma c'è un motivo forte a favore di questa scelta, maturata nell'ambito del nucleo di ricerca didattica dell'Università di Pisa che comprendeva, oltre a me stesso, i proff. Favilli, Mariotti, Zan, nonché numerosi docenti di scuola secondaria e alcuni specializzandi e dottorandi: l'algebra è generalmente considerata il settore dell'insegnamento secondario nel quale non si avverte l'esigenza, e forse non si immagina neppure la possibilità, di trattazioni alternative a quelle tradizionali. Ciò può essere parzialmente vero quanto ai contenuti essenziali, ma è certamente falso quanto alle possibili metodologie del suo insegnamento. Quindi il tema "algebra" ci è sembrato l'esempio più appropriato per fare sì che l'attenzione dei destinatari dei pacchetti multimediali si concentrasse prevalentemente sugli aspetti metodologici e didattici anziché sui contenuti.

La realizzazione del progetto è stata possibile grazie alla disponibilità dei colleghi e amici prof. Gino Carignani (ITI "E. Fermi" di Lucca), prof.ssa Donata Foà (Liceo Scientifico "F. Buonarroti" di Pisa) e prof.ssa Maria Pia Galli (Ginnasio-Liceo Classico "G. Carducci" di Viareggio) che con l'occasione voglio pubblicamente ringraziare ancora una volta.

Desidero sottolineare che la documentazione è del tutto autentica, nel senso che si tratta di vere lezioni riprese dal vivo, senza alcuna preparazione preliminare e senza successive manipolazioni per "fare bella figura" (come viceversa accade per la maggior parte dei prodotti similari, manipolazioni delle quali gli spettatori sono tenuti all'oscuro).

Nei CD, che fanno parte integrante del materiale multimediale del progetto, sono proposte numerose "chiavi di lettura" delle complesse dinamiche del processo di insegnamento-apprendimento che si sviluppano in classe. Si tratta di domande (o, se preferite, di "provocazioni") ciascuna delle quali è a sua volta suddivisa in tre parti:

- Una riflessione su qualche aspetto specifico, strettamente correlato alla lezione videoregistrata;
- Una riflessione proposta a ciascun utilizzatore del pacchetto multimediale sul proprio lavoro, riflessione auspicabilmente stimolata dalla lezione videoregistrata;
- Una riflessione di carattere generale e di approfondimento sul "fare lezione", sempre prendendo spunto dagli episodi videoregistrat[2]i.

Si parte dall'osservazione della disposizione dei banchi e della cattedra in funzione delle diverse modalità di interazione tra insegnanti e allievi, per affrontare poi aspetti più importanti e delicati, come:

1. *L'atteggiamento dell'insegnante rispetto alle conoscenze e alle competenze pregresse degli allievi.*
Esempio
1.1. Che comportamento ha l'insegnante del filmato riguardo al fatto che gli allievi possiedono già determinate conoscenze acquisite alla scuola media?
1.2. Tu come ti comporti nel momento di approfondire argomenti che gli allievi hanno già affrontato in anni precedenti (cominci verificando le loro conoscenze, richiami tu gli aspetti che dovrebbero già conoscere, tratti l'argomento come se fosse la prima volta che lo incontrano, ecc.)?
1.3. Quali tra i comportamenti elencati al punto precedente ritieni preferibili nel momento di approfondire argomenti che gli allievi hanno già affrontato in anni precedenti? Perché?

2. *La tipologia delle domande e delle rispettive risposte tra insegnante e allievo, tra allievo e insegnante, degli allievi tra loro.*
Esempio
2.1. Nella lezione filmata, quante volte gli studenti intervengono rispondendo a domande del docente? Quante volte in modo autonomo facendo essi stessi domande, commentando la risposta di un compagno, esprimendo un loro parere? Quanti e quali sono i momenti della lezione in cui si svolgono dialoghi fra l'insegnante e un allievo e quanti quelli in cui si svolge un dialogo fra due o più allievi, senza il diretto intervento del docente?
2.2. In genere, nelle tue lezioni gli studenti intervengono solo se interpellati direttamente con una domanda, magari dopo essere stati esplicitamente chiamati per nome? Si verificano dialoghi allievo-allievo? Con quale frequenza? In quali situazioni?
2.3. Ritieni necessario/utile/fondamentale che le parole dell'insegnante facciano da "guida" allo svolgimento della lezione? Quali vantaggi/svantaggi può comportare la

---

[2] A questo punto l'esposizione è stata integrata con la proiezione di brevissime video-clip. Nel pomeriggio dello stesso giorno gli interessati hanno potuto partecipare al gruppo di lavoro dal titolo "Una visita guidata in classe 'navigando' fra tre lezioni di matematica" coordinato dal prof. Carlo Romanelli che ha curato la realizzazione dei CD del progetto. La relazione su questo gruppo di lavoro, dove sono stati approfonditi ulteriori aspetti del progetto, è pubblicata in questo stesso volume degli atti del convegno di Loano.

presenza di momenti durante i quali l'insegnante non parla e gli allievi discutono tra loro? La nascita di tali situazioni va favorita? Se sì, perché? Come?

3. *Il ruolo del linguaggio*
3.1. Cosa pensi del linguaggio utilizzato nella lezione videoregistrata dall'insegnante e dagli studenti?
3.2. Quale ruolo ha nella tua lezione il linguaggio? Preferisci un linguaggio più formale e tecnico o più spontaneo e colloquiale?
3.3. In una lezione di matematica, quanto può essere facilitata oppure ostacolata la trasmissione di concetti e nozioni dalla scelta di un determinato stile linguistico?

4. *La qualità degli appunti e degli elaborati degli allievi, anche in vista della successiva fruibilità di tale materiale da parte degli stessi allievi.*
4.1. Gli allievi del filmato prendono appunti? Quando? Perché?
4.2. Durante le tue lezioni gli studenti prendono appunti? Cerchi di favorire in qualche modo questo comportamento? O preferisci far studiare l'argomento sul libro di testo? Perché?
4.3. Ritieni utile/opportuno che gli allievi prendano appunti durante la lezione? Perché?

5. *Le modalità di accertamento delle conoscenze e competenze, e i criteri di valutazione.*
Esempio:
5.1. L'insegnante [di uno dei filmati] ha fatto fare agli allievi relazioni conclusive di un ciclo di lezioni. Quali ne possono essere i vantaggi/svantaggi?
5.2. Tu assegni relazioni da fare a casa? Ai singoli allievi? A gruppi di allievi? Come valuti gli elaborati presentati? Come operi per socializzare le conoscenze?
5.3. I criteri di verifica e valutazione delle conoscenze condizionano le modalità di apprendimento degli allievi. Quindi è importante che le fasi di verifica e valutazione siano coerenti con gli obiettivi che l'insegnante si propone di raggiungere. Quale peso andrebbe dato ad interrogazioni orali, test rapidi, compiti scritti, redazione di relazioni scritte a consuntivo di cicli di lezioni?

La gestione del progetto descritto in questa relazione è affidata al Liceo Scientifico Statale "Vallisneri" di Lucca che ne curerà la diffusione entro il corrente anno 2002 con l'invio di copie del pacchetto multimediale alle SSIS, nonché ad un centinaio di 'Scuole di Riferimento' distribuite su tutto il territorio nazionale, le quali a loro volta potranno far duplicare il materiale e metterlo a disposizione dei docenti interessati, per uso scientifico e didattico.

Ulteriori informazioni saranno disponibili sul sito web:
http://www.liceo-vallisneri.lu.it

DALL'ABACO AL COMPUTER: FORMAZIONE E PRATICA PROFESSIONALE DELL'INSEGNANTE[3]

Maria G. Bartolini Bussi
Dipartimento di Matematica
Università di Modena e Reggio Emilia

1. Introduzione.

Nell'esperienza matematica e nella tradizione dell'insegnamento sono sempre stati presenti artefatti di varia natura, ad esempio:

1) i materiali strutturati, pensati per la didattica (es. blocchi logici, multibase, geopiani) che hanno goduto (e godono) di molta fortuna nella scuola elementare, a partire dalla fine degli anni '60;
2) gli strumenti matematici ereditati dalla tradizione culturale più antica (es. righe, abaci, compassi, tracciatori di curve, prospettografi), che hanno accompagnato, seguito o anticipato lo sviluppo teorico della disciplina;
3) gli oggetti tecnologici presi dalla vita di tutti i giorni (es. righelli, cordelle metriche, calibri, bilance, ingranaggi, monete), che incorporano, nel loro funzionamento, conoscenze disciplinari raffinate;
4) i softwares delle nuove tecnologie (per il calcolo simbolico, per la geometria dinamica, per il rilevamento e l'acquisizione di dati sperimentali, ecc.), che consentono l'approccio e la soluzione di problemi complessi in tempi molto brevi.

Il primo e l'ultimo caso sono espressivi: i materiali strutturati nel passato e i softwares delle nuove tecnologie in questi anni sono stati spesso presentati come strumenti utili per motivare gli allievi e potenti ed efficaci per la soluzione di diversi problemi dell'insegnamento della matematica. Queste attese sono state spesso frustrate. La ricerca in didattica della matematica, in particolare, ha mostrato che
un artefatto culturale diviene efficace e trasparente, attraverso il suo utilizzo nel contesto di tipi specifici di interazioni sociali e in relazione alle trasformazioni che esso subisce nelle mani di chi lo usa (Meira, 1995, p. 110).
In altre parole, le potenzialità dello strumento per la didattica della matematica non coincidono con le proprietà intrinseche del materiale ma dipendono dall'interazione realizzata in classe, sotto la guida dell'insegnante, per mezzo di particolari consegne e all'interno di pratiche sociali.
Questi risultati inducono ad attribuire una grande responsabilità all'insegnante, che, non solo è responsabile della scelta dei materiali e degli strumenti da proporre, ma anche dei modi in cui organizzare l'attività degli studenti e in cui interagire con loro nel corso dell'attività. Questa responsabilità genera quindi richieste precise sulla professionalità docente. Nel passato, non solo in Italia, il modello tipico della formazione in servizio è stato quello a cascata, con progressiva espansione (almeno auspicata) delle innovazioni nella scuola. Più recentemente (nel periodo 2000/02) due progetti finanziati dal MIUR Istruzione hanno aperto una via un po' diversa, quella del coinvolgimento diretto delle

---

[3] Ringrazio l'insegnante - ricercatore Mara Boni che ha consentito l'uso estensivo dei risultati della sua ricerca.

scuole e degli insegnanti nella produzione di materiali didattici innovativi, in collaborazione con le università. Si tratta del progetto SeT (http://www.bdp.it/set/area1_esperienzescuole/cm131/5.htm) realizzato sulla base della circolare n. 131 del 2000 e del Progetto Collaborativo di ricerca affidato dal MIUR (MPI) a dieci centri universitari (Dipartimenti di Matematica o centri di ricerca) in dieci diverse regioni. Dalle ricerche sviluppate in questi progetti sono tratti gli esempi discussi in questo lavoro.

Tali esempi riguardano due casi di strumenti matematici, di origine molto antica e molto comuni ancora oggi nelle classi della scuola elementare (il compasso e l'abaco). Negli esperimenti si è pianificata ed osservata la transizione dallo strumento 'concreto' allo strumento 'mentale'. Gli esperimenti sono stati realizzati nella scuola elementare e sottolineano la necessità e la possibilità di un avvio precoce alla dimensione teorica della matematica.

2. Dal compasso 'concreto' al compasso 'mentale'.

In un esperimento svolto in quinta elementare (Bartolini Bussi, 2001a), è stata studiata la transizione dall'uso del compasso come strumento concreto all'uso del compasso come strumento per esperimenti mentali. In questo lavoro ci limitiamo a riassumere brevemente l'esperimento, rinviando al lavoro già pubblicato per i dettagli.

Il compasso era concretamente usato nel disegno dei cerchi, fino dalla seconda elementare. In questo uso, orientato all'esterno (produzione di figure), gli allievi si erano impadroniti della manualità collegata al funzionamento e inventato anche strumenti originali alternativi.

La transizione al compasso come strumento 'mentale' si evidenzia nella capacità di utilizzarlo, in modo cosciente, per risolvere un problema diverso, non legato alla produzione di forme, ma piuttosto alla determinazione di punti con proprietà assegnata (*punti aventi distanza data da uno o due punti dati*). La transizione è osservabile nel corso di una discussione, che segue la soluzione individuale del problema seguente:

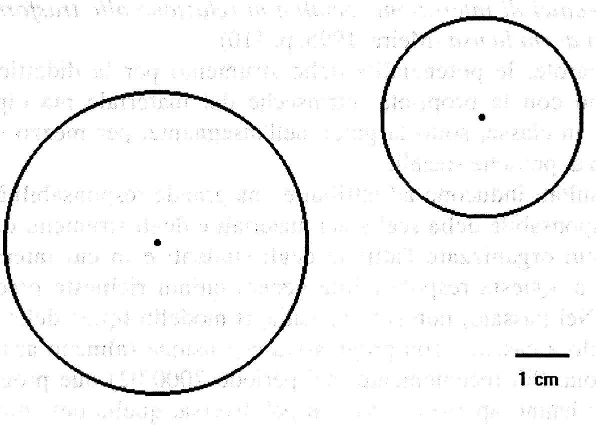


Fig. 1

Disegna un cerchio di raggio 4 cm tangente ai cerchi dati. Spiega in modo chiaro il metodo usato in modo che possa essere utilizzato da altri. Spiega bene perché il metodo che hai utilizzato funziona.
Nell'originale, i cerchi disegnati hanno raggi di 3 cm e 2 cm e la distanza dei loro centri è di 7 cm.
Nella soluzione geometrica del problema il compasso viene usato in due modi distinti (e con finalità distinte):
1) trovare il centro del cerchio tangente (almeno uno).
2) disegnare il cerchio tangente
Vale la pena di osservare che nelle soluzioni inizialmente date dagli allievi, poiché il punto 1 è sostituito da una determinazione empirica del centro (per prove ed errori), il compasso si usa solo per disegnare il cerchio; invece, nella soluzione geometrica, la ricerca del centro precede il disegno del cerchio. Il modo esterno di usare il compasso, cioè il modo di impugnarlo e di fare tracciare il segno, può apparire, lo stesso nei due usi, ma il senso dato a tale gesto e al prodotto di tale gesto è profondamente diverso. In particolare la ricerca del centro si realizza in modo da controllare, dall'esterno, il processo di soluzione di un problema, con la produzione di una strategia che:
- può essere usata in ogni situazione (generalità);
- può dare e giustificare le condizioni sotto cui il problema è risolubile (possibilità);
- può essere sostenuta e argomentata con il riferimento alla teoria (validità).

Il compasso geometrico, incarnato dal piccolo strumento di metallo contenuto nell'astuccio degli allievi, non è più, a questo punto, solo un oggetto materiale: diviene un oggetto mentale, il cui uso può essere sostituito o evocato da un gesto compiuto con una parte del corpo (la rotazione delle dita o delle braccia) o anche dal prodotto di tale gesto, un cerchio tracciato nell'aria o sul foglio. Anche se il legame con l'esperienza del corpo non è tagliato (è piuttosto sottolineato), la perdita di materialità consente di prendere le distanze dall'esperienza, trasformando l'evidenza empirica data dal disegno (qualunque sia il modo di produrlo) nella rappresentazione esterna di un processo mentale.
Per gli allievi, il cerchio non è ottenuto, secondo la tradizione, per astrazione dagli oggetti di forma circolare, ma è la ricostruzione, nella memoria, di una varietà di atti di esperienza spaziale (una 'biblioteca' di traiettorie e di gesti, Longo, 1997). Si realizza così l'integrazione delle concezioni meccanica / dinamica / procedurale di cerchio con quella geometrica / statica / relazionale. La prima è, nella storia, rappresentata dalla voce di Erone:
Un cerchio è la figura descritta quando una linea retta, sempre rimanendo nello stesso piano, gira intorno ad uno dei suoi estremi mantenuto fisso fino a ritornare nella posizione iniziale.
La seconda è rappresentata dalla voce di Euclide:
Un cerchio è la figura piana racchiusa da una linea tale che tutti i segmenti che sono tracciati ad essa da un punto interno alla figura sono uguali tra loro.
Anche se l'andamento della discussione nell'esperimento realizzato (Bartolini Bussi, 2001) è naturale e fluido, il processo non è per nulla spontaneo: richiede la cura dell'insegnante nella scelta dei problemi e dei modi di gestione della discussione,

nell'incoraggiamento continuo all'uso di gesti, nella valorizzazione di quegli interventi che consentono una più efficace esplicitazione dei processi mentali.

3. Dall'abaco 'concreto' all'abaco 'mentale'.

Dopo questa breve rivisitazione del compasso, illustreremo un secondo esperimento riguardante l'abaco in seconda elementare. Se il compasso consente di introdurre l'esperienza del continuo, l'abaco può essere usato per introdurre la rappresentazione polinomiale dei numeri naturali. E', in un certo senso, una foratura storica, poiché l'abaco per molti secoli fu usato per contare, per eseguire operazioni, ma non per rappresentare i numeri secondo la convenzione della notazione posizionale. Presentiamo un esperimento condotto nell'ambito del progetto collaborativo MIUR (MPI) -Università.
L'abaco era stato introdotto alla fine della prima elementare per contare ed eseguire semplici operazioni. L'abaco era stato manipolato dai bambini sotto la guida dell'insegnante. Gli allievi avevano anche iniziato ad usare lo schema tipico dell'abaco grafico, presente in molti loro testi, con il disegno delle aste per le palline e i simboli usuali (u, da, h, k) per unità, decine, centinaia e migliaia. In seconda si avvia la costruzione, con materiale povero (stecchi da spiedini, perle di legno e una base di polistirolo), di abaci personali, in modo che ogni allievo possa disporre di un esemplare.
Lo schema dell'esperimento avviato dall'insegnante è il seguente:

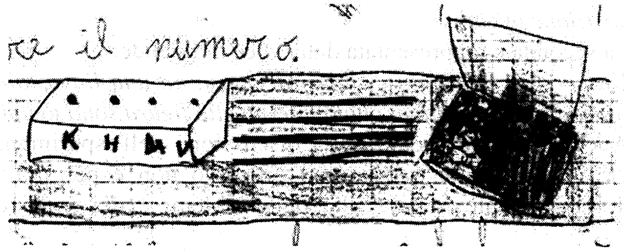
1) problema individuale;
2) discussione collettiva di bilancio (Bartolini Bussi et al. 1995);
3) metadiscussione (Bartolini Bussi et al. 1995) con consegne individuali;
4) problema individuale.

3.1. Il problema individuale iniziale.

Viene assegnato il seguente problema individuale:
In classe stiamo costruendo il nostro abaco personale. Un bambino ci ha visti al lavoro e ha chiesto: "Che cos'è l'abaco? A cosa serve? Come si usa?"
Prova a rispondere a queste domande.

Tutti gli allievi sono in grado di rispondere alle domande. Anna (il nome è stato modificato) risponde, tra l'altro:
L'abaco è una scatola con 4 asticciole e a anche delle palline per decifrare il numero
Accompagna il suo testo con un disegno, nel quale è enfatizzata la concretezza dello strumento, appoggiato su un tavolo ben visibile e pronto per essere montato.

Fig. 2



3. 2. La discussione collettiva.

Nel protocollo di Anna, l'insegnante è stata colpita dal contrasto tra la descrizione molto concreta dell'oggetto, che allude alle regole di costruzione, e alla descrizione molto astratta e generale dello scopo (*decifrare il numero*). L'insegnante sceglie questo protocollo per avviare la discussione. Lo scopo è quello di portare gli alunni a riflettere sulle convenzioni della notazione posizionale, attraverso l'interpretazione della locuzione insolita usata da Anna.

1. INS. - *Oggi vorrei parlare con voi di una cosa interessante. Nel lavoro che avete fatto sull'abaco, quando avete spiegato che cos'è l'abaco e a cosa serve, avete detto che è una cosa, uno strumento, un oggetto che serve per fare le operazioni e per fare il cambio. Tutti quanti lo avete detto. Alcuni hanno anche scritto che serve per contare. Una bambina, Anna, ha detto:* "L'abaco ha delle palline per decifrare il numero". *Ha usato questa parola "decifrare". Cos'ha voluto dire Anna?"*

Anna si mette subito in gioco cercando di esplicitare il senso personale attribuito alla relazione tra abaco e notazione numerica e mostrandosi capace di formulare un discorso di tipo generale.

2. ANNA - *Volevo dire che una pallina sull'abaco serve per decifrare come va scritto il numero.*

3. INS. *E' vero quello che ha detto Anna?*

4. VOCI - *Io non capisco...*

5. Anna - *Usando le palline riusciamo a decifrare a modo il numero, cioè nel senso che le palline le mettiamo perché il numero si capisca a modo, e allora ci serve per decifrare le palline e il numero lo riusciamo a scrivere.* Sono gli unici interventi dell'allieva nella discussione.

Partendo da questa affermazione la classe costruisce un esempio pertinente (la rappresentazione numerica posizionale per mezzo dell'abaco e la scrittura in cifre del numero 18). Poi il discorso si sposta sull'uso delle cifre e sulla (già nota) possibilità di rappresentare con questi segni infiniti numeri.

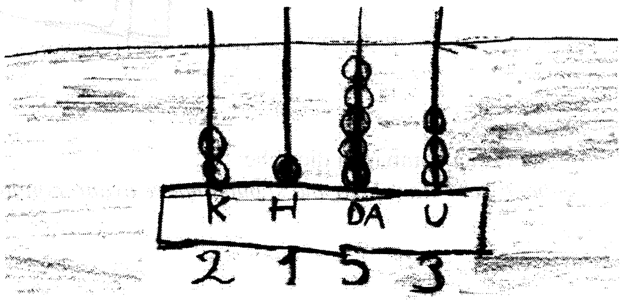
La discussione prosegue per 53 interventi, ma Anna non aggiunge nulla di nuovo.

3.3. La metadiscussione

L'insegnante introduce un'altra forma di discussione. La trascrizione completa della discussione viene riprodotta per ciascun allievo, lasciando uno spazio al termine di ogni episodio significativo. Lo spazio è destinato a disegni e commenti individuali. Il testo della discussione è letto di nuovo. Questa attività ha lo scopo di favorire la costruzione dei sensi personali degli allievi.

Nel seguito mostreremo solo alcuni dei disegni e dei commenti di Anna, utili ad illustrare il suo personale percorso dall'abaco concreto all'abaco mentale. Una documentazione più completa è data da Boni (2002).

Fig. 3



Questo è disegno prodotto da Anna all'inizio della metadiscussione, nello spazio lasciato dopo l'intervento 5, per spiegare il significato di *decifrare.* L'abaco è montato: è ancora la rappresentazione di un oggetto concreto, con una base ingombrante e il piano di appoggio (banco) ben visibile e colorato in modo realistico. La rappresentazione è statica, senza riferimento a gesti o spostamenti. L'attenzione è sulla decifrazione del numero con la trascrizione delle cifre nelle posizioni corrette. Dopo qualche intervento, Anna rappresenta il numero 18.

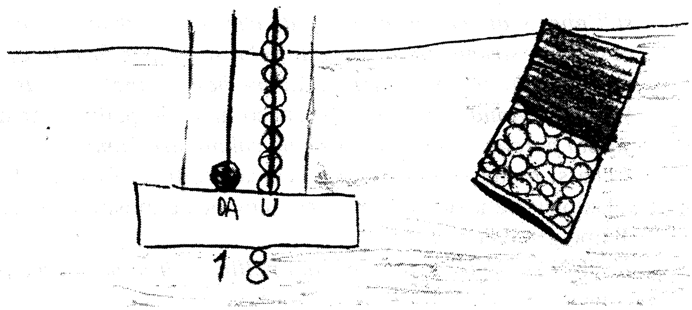


Fig. 4

C'è ancora il banco, l'oggetto concreto e la scatola delle palline, che consente la rappresentazione. Anna mostra di saper utilizzare l'artefatto con sicurezza e flessibilità: rappresenta in modo inusuale il numero sulle aste centrali e "sfila", cancellandole, la prima e l'ultima che non servono. Il disegno è una copia fedele del processo reale, in cui un'asta in più può venire evocata o sfilata.

Un po' più tardi, la discussione si sposta sull'infinità dei numeri naturali. Anna introduce un'altra rappresentazione personale efficace: il calendario a fogli. Il suo commento mostra la capacità di gestire (con l'aiuto di questa metafora) il conflitto tra la diminuzione della quantità (i fogli che vengono *perduti*) e l'aumento del numero rappresentato, potenzialmente fino all'infinito. Non c'è nessun riferimento all'abaco.

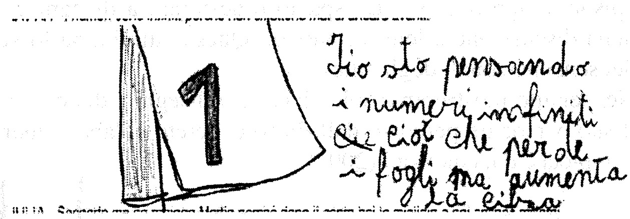


Fig. 5

Più tardi una compagna dice che:
L'abaco ha 4 stanghette ma si può andare avanti con la mente!

Anna disegna un fumetto, con tanti abaci 'pensati' e disposti in serie. Gli abaci sono stilizzati, ma la base è ancora molto visibile ed ingombrante..

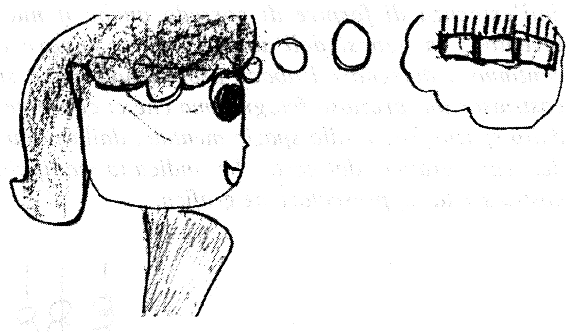


Fig. 6

La possibilità, suggerita da un compagno, di usare un solo abaco, aggiungendo tante asticciole suggerisce ad Anna un'altra rappresentazione. L'oggetto concreto è trasformato. Diverse paia di mani sono rappresentate per 'stirare' l'abaco o per infilare e sfilare asticciole e palline. Il processo è virtualmente iterato dalla freccia sulla sinistra del disegno.

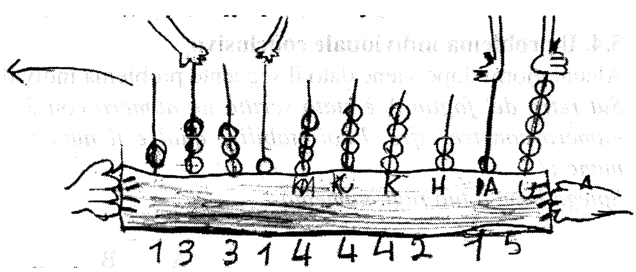


Fig. 7

Il disegno prodotto da Anna al termine della discussione è molto significativo (Fig. 8). Leggiamo dal commento dell'insegnante (Boni, 2002):

L'abaco che Anna sta costruendo nella mente ha ancora la pesantezza dell'oggetto fisico, è lei a dichiararlo, ma è diverso dall'oggetto rappresentato nella precedente illustrazione perché:

- scompare il gesto che esplicita il tentativo di forzare la rigidità del supporto dello strumento tirandolo a destra e a sinistra: non serve più. A destra due mani sostengono l'abaco (nella mente non c'è il tavolo) e lo tengono fermo (il foglio su cui è rappresentato un disegno va tenuto fermo!).

- i gesti che nel disegno precedente evocano la costruzione dell'oggetto concreto, non sono più presenti; è la mano di Anna a tracciare il segno che sta trasformando

l'oggetto reale in abaco grafico, mentalmente rappresentato, e "sempre più lungo e ancora di più fino all'infinito".
La memoria dell'oggetto concreto è sottolineata dalla mancata perdita del peso e dall'esigenza di fornire di corredo anche il nuovo strumento " e le palline me le invento"; la genesi dell'abaco grafico appare enfatizzata dall'enorme matita che continua a disegnare l'abaco procedendo verso sinistra. Con questa metafora Anna costruisce un prezioso fotogramma che ci consente di cogliere il passaggio dell'abaco dallo spazio fisico allo spazio mentale, dalla pesantezza della materia alla leggerezza del segno grafico, dal gesto che indica la manipolazione dell'oggetto al gesto che ne costruisce la rappresentazione grafica.

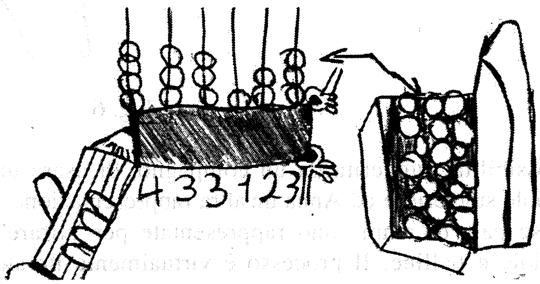


Fig. 8

3.4. Il problema individuale conclusivo
Alcuni giorni dopo viene dato il seguente problema individuale:
Sul retro del foglio A è stato scritto un numero con 2 cifre e sul retro del foglio B un numero con tre cifre. Puoi stabilire qual è il numero maggiore senza leggere questi numeri?
Spiega bene il tuo ragionamento.

A B

Fig. 9

Anna è in grado di controllare molto bene la situazione. Ecco un estratto del suo protocollo:
Forse sul retro del foglio A il numero potrebbe essere 20 e nel foglio B 122

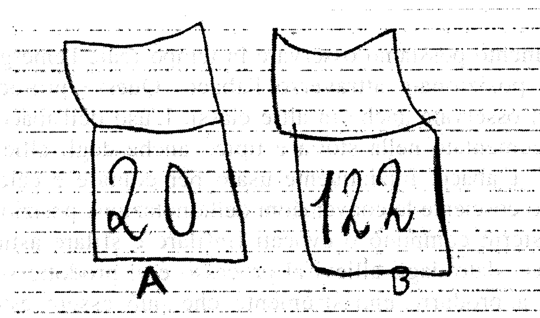


Fig. 10

Il maggiore è 122 cioé la B perché la B a 3 cifre e la A 2.

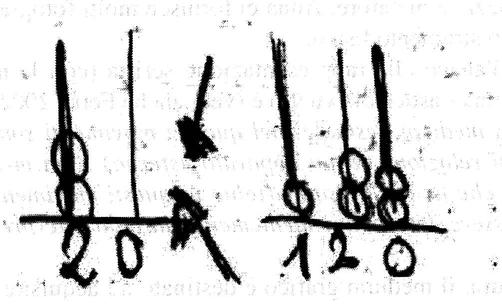


Fig. 11

Ma nel 20 manca una posizione e cosi cioè il centinaio ma così sarebbe ugua(le) e così sarebbero uguali B è maggiore della A. Finche le decine non saranno a 99 ci sarà la differenza [...].

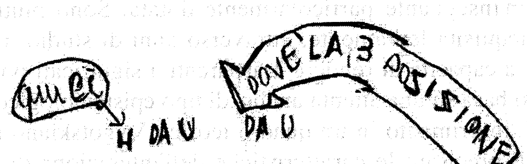


Fig. 12

Attraverso l'uso di tre differenti rappresentazioni, si passa dal micromondo dell'abaco fisico al micromondo dei numeri, di cui è implicitamente evocata anche l'infinità (calendario).

3.5. Commenti

In questo esperimento possiamo osservare in tempo reale l'emergenza della padronanza della notazione posizionale attraverso l'abaco. Questo protocollo rappresenta una situazione tipica, osservate anche in altre classi. L'uso dell'abaco è più ricco di quello inizialmente documentato nella storia e tipico anche degli allievi all'inizio della loro storia scolastica. L'abaco, inizialmente usato per contare e calcolare viene usato per costruire in modo cosciente le convenzioni della notazione posizionale (vedi anche Ferri, 2002). I gesti esterni compiuto o evocati (infilare e sfilare asticciole o palline) sono simili, ma il senso dato dagli allievi al processo e al prodotto sono molto diversi. Gli allievi riescono a produrre uno strumento che può essere esteso oltre l'esperienza empirica.

L'abaco, all'inizio pensato e rappresentato come una scatola pesante e ingombrante, piena di palline e asticciole, diviene un oggetto mentale, all'inizio ancora molto legato alla fisicità, ma via via sostituibile con una semplice rappresentazione scritta dei numeri. Il legame con l'esperienza corporea non è in questo caso tagliato. Anzi l'insegnante incoraggia e valorizza le metafore. Anna ci fornisce molti fotogrammi del suo processo di affrancamento dallo strumento fisico.

La transizione dall'abaco alla rappresentazione scritta (con la necessità di introdurre il segno 0 per la colonna - asticciola vuota) è (vedi anche Ferri, 2002)

il passaggio da un medium gestuale (nel quale i movimenti sono dati ostensivamente e istantaneamente in relazione ad un apparato esterno) a un medium grafico (nel quale segni permanenti, che hanno la loro origine in questi movimenti, sono soggetti ad una sintassi che può essere data indipendentemente da ogni interpretazione fisica. (Rotman, 1987).

Per questa sua natura, il medium grafico è destinato ad acquisire autonomia. Potrà essere usato dagli allievi senza più alcun riferimento all'abaco fisico nella soluzione di problemi aritmetici. Potrà essere usato anche nella fase di attacco o di controllo e diventerà uno strumento applicabile in modo esteso.

4. Un quadro di riferimento.

I due esempi qui illustrati non sono semplicemente il prodotto di una innata capacità di un'insegnante particolarmente dotata. Sono piuttosto il prodotto di una professionalità acquisita lentamente, attraverso anni di studio, riflessione e partecipazione alla ricerca. La capacità di rendere 'trasparenti' i significati potenzialmente incorporati negli strumenti si basa su una attenta analisi di tipo epistemologico, cognitivo e didattico.

L'inserimento in un quadro teorico Vygotskiano (Vygotskij, 1974, 1987, 1992) consente di precisare le caratteristiche dell'interazione di classe (compiti individuali e collettivi, discussioni orchestrate dall'insegnante), realizzata sotto la guida dell'insegnante per incoraggiare la costruzione di significati matematici. Uno strumento può, nell'interazione sociale a scuola, mediare significati relativi ai saperi che vi sono potenzialmente incorporati. In questo paragrafo mi limiterò ad una breve sintesi centrata su tre concetti fondamentali della scuola Vygotskiana:

- zona di sviluppo prossimale
- internalizzazione o interiorizzazione
- mediazione semiotica.

La *zona di sviluppo prossimale* è una zona metaforica dove si svolge un'attività di problem solving in collaborazione tra un soggetto (allievo) e un adulto (insegnante) o un pari più competente. Attraverso l'aiuto offerto il soggetto è in grado di risolvere problemi che non sarebbe in grado di risolvere da solo. L'aiuto può essere fornito in modi diversi, durante una attività svolta insieme, agendo e parlando, con l'introduzione di uno strumento (es. compasso, abaco), con l'introduzione di un sistema di segni (gesti, linguaggio verbale, linguaggio scritto, sistemi di rappresentazione convenzionali), eccetera. Nell'esempio dell'abaco, l'esplorazione della zona di sviluppo prossimale è particolarmente evidente nella metadiscussione.
Gli strumenti o i sistemi di segni hanno alcune caratteristiche fondamentali:

- sono il prodotto raffinato di una attività sociale della specie umana;
- non si limitano ad agire sul mondo esterno ma inducono trasformazioni all'interno;
- incorporano (ma in modo opaco) elementi importanti del sapere matematico.

Questa ultima caratteristica è quella che entra in gioco nel processo di *mediazione semiotica*. In un problema (ad esempio, la ricerca di un punto a distanza data da un punto dato; la interpretazione della scrittura di un numero) l'adulto può 'trascinare' (il termine è Vygotskiano) uno strumento (il compasso; l'abaco) e inibire in questo modo una risposta basata su conoscenze o automatismi precedenti. La presenza di questo strumento crea una situazione nuova, tanto più ricca quanto più profonda e accurata è l'esplorazione dello strumento e del sapere in esso incorporato. L'attività svolta insieme dall'insegnante e dall'allievo (voglio qui privilegiare questo caso rispetto all'interazione tra l'allievo e il pari più competente) porta l'allievo ad *imitare* l'azione dell'adulto. Tuttavia questa imitazione di azioni complesse richiede una certa comprensione dell'azione dell'altro, favorita dall'intenso scambio verbale che la accompagna.
L' *internalizzazione* (o *interiorizzazione*) è il meccanismo essenziale attraverso il quale un processo di interazione esterno (interpsicologico) diviene interno (intrapsicologico), con una trasformazione importante della struttura. Un'azione esterna compiuta con l'aiuto di un adulto, quando è trasferita all'interno, non solo può essere evocata (o 'trascinata' nella soluzione di un problema) attivamente dall'allievo da solo, ma può essere gestita dall'allievo con maggiore libertà; si possono evocare oggetti non presenti nel campo visivo, trasformarli (la lunghezza delle aste dell'abaco), duplicarli un numero qualsiasi di volte, modificarne le dimensioni, inserirli in esperimenti 'impossibili' (la divisione infinita sul righello). Il linguaggio naturale e il linguaggio scientifico (che si apprende nel corso dell'interazione con l'adulto) aiutano e sostengono questo processo. Il sapere potenzialmente incorporato nello strumento, attraverso lo stimolo fornito dall'adulto, può emergere superando l'opacità della rappresentazione, essere esplicitato attraverso il linguaggio, la gestualità, diverse forme di rappresentazione, per essere poi internalizzato dall'allievo.

5 . Osservazioni conclusive

In questo lavoro, abbiamo presentato e discusso due esempi provocatori, nei quali l'attività su strumenti concreti è il supporto per esperimenti mentali, con le caratteristiche di astrazione e generalità tipiche della natura teorica del pensiero matematico. Noi sosteniamo che l'avvio alla dimensione teorica della matematica è un processo lento e lungo, che deve essere iniziato molto presto, per evitare il consolidarsi di atteggiamenti solo empirici, che saranno ostacolo agli sviluppi successivi. Tuttavia, come abbiamo visto, l'avvio al pensiero teorico non taglia i legami con l'esperienza concreta e corporea, piuttosto dà ad essa un senso nuovo e diverso.

Dal punto di vista della ricerca, lo sviluppo di questi esperimenti apre diverse questioni importanti. Per esempio, lo studio degli strumenti disponibili nella scuola, come strumenti di mediazione semiotica, nel senso precisato nel paragrafo precedente. In questo momento vi sono in Italia molti studi al riguardo (Bartolini Bussi, 2001a; 2001b; Bartolini Bussi et. al, 2002; vedi anche l'articolo di M. A. Mariotti in questo volume) che si propongono l'obiettivo di sviluppare un quadro teorico che consenta di pianificare e interpretare esperimenti finalizzati all'avvio al pensiero teorico fino dai primi anni di scuola.

6. Bibliografia

Bartolini Bussi M. G. (2001a), La matematica come disciplina teorica: referenti concreti ed esperimenti mentali, in Bazzini L. (ed.), *Matematica e scuola: Facciamo il punto*, 40-53, Milano: Franco Angeli.

Bartolini Bussi M. G. (2001b), Strumenti reali ed esperimenti mentali nella didattica della matematica, in D'Amore B. (ed.), *Didattica della Matematica e Rinnovamento Curricolare*, 17-26, Bologna: Pitagora editrice.

Bartolini Bussi M. G. Boni M. & Ferri M. (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Modena: Centro Documentazione Educativa.

Bartolini Bussi M., Boni, M., Ferri, F. & Garuti, R. (2002), La costruzione del pensiero teorico in geometria: una ricerca sugli ingranaggi nella scuola elementare, *Scuola e Città*, vol. LII (4), 16-36.

Boni M. (2002), *Abaco e notazione posizionale: genesi dello strumento*, relazione prodotta nell'ambito del progetto collaborativo MIUR (MPI) - Università.

Ferri F. (2002), *L'abaco e lo zero* , in stampa (atti dell'internuclei diMonticelli, Parma).

Longo G. (1999) (http://www.dmi.ens.fr/users/longo/geocogni.html)

Rotman B. (1987), *Signifying nothing. The Semiotics of Zero*, Stanford University Press

Vygotskij, L. S. (1974), *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti.* Firenze. Giunti

Vygotskij, L. S. (1987), *Il processo cognitivo.* Torino. Boringhieri.

Vygotskij, L. S. (1992), *Pensiero e linguaggio.* Bari. Laterza Editore

VALUTAZIONE E PROFESSINALITÀ: PROBLEMI ATTUALI

Cristina Coggi
Dipartimento di Scienze dell'Educazione
Università di Torino

L'attività valutativa ha subito negli ultimi anni una notevole estensione: uscita dalla sfera educativa e scolastica, la pratica è andata affermandosi progressivamente in ambito socio-professionale investendo il "pilotaggio" interno delle strutture formative e più in generale i sistemi scolastici. La *valutazione degli studenti* resta comunque un tema ineludibile, con il quale il docente è chiamato quotidianamente a confrontarsi. Ci occuperemo di questo limitandoci a trattare dell'*insegnare e valutare "per competenze"*.

La nostra scelta vuol tener così conto del crescente interesse che si manifesta verso lo studio delle *dimensioni cognitive* nel processo di valutazione degli alunni. A questi apporti si stanno connettendo le ricerche sugli aspetti non-cognitivi coinvolti nel processo. È un altro tema importante e un'integrazione dovuta, rispetto all'aspetto precedente (quello cognitivo). Ci dobbiamo però limitare a una segnalazione.

Concluderemo il nostro discorso sottolineando i problemi che l'*innovazione* pone alla *professionalità degli insegnanti* evidenziando sempre più la necessità di pensare ai docenti come innovatori, come a ricercatori impegnati nella costruzione di conoscenze individuali e collettive.

1. Dagli obiettivi alla competenza

Nella valutazione sia scolastica che istituzionale è importante avere un *quadro di riferimento* cioè aver chiaro un modello, dei valori, le mete che si vogliono raggiungere: G. Figari, C. Hadji e altri denominano questo gruppo di attese "réferentiel"[4].

Oggi assistiamo ad un cambiamento rilevante rispetto a questo *riferimento* nella letteratura sulla valutazione dell'apprendimento: studi recenti introducono la valutazione delle competenze in contrapposizione alla valutazione per obiettivi.
Richiamiamo rapidamente il modello che si ritiene superato per rendere più evidente, più chiaro quello che cambia.

La valutazione degli obiettivi è nata e si è sviluppata molto nell'ambito della corrente dell'*Evaluation*, che ha avuto come esponente di spicco R. Tyler. L'introduzione degli obiettivi nella progettazione didattica e nella verifica dei risultati ha avuto il vantaggio di indurre i docenti a precisare e articolare i traguardi da raggiungere e di facilitarne la comunicazione ai colleghi, agli alunni, alle famiglie.

La valutazione "per obiettivi" presenta però alcuni limiti intrinseci. Si chiede che gli obiettivi siano controllabili, osservabili. In un clima di behaviorismo prevalente questo ha implicato che si individuassero indicatori comportamentali, condotte specifiche che lo studente dovrebbe manifestare specie al termine dell'azione didattica[5].

Questa modalità di formulazione da un lato precisa i traguardi dell'apprendimento, ma dall'altro li impoverisce, li schematizza, li frantuma. Le

[4] FIGARI G., *Evaluer: quel re fe rentiel?*, Bruxelles, De Boeck, 1994 e HADJI C., *L'evaluation des actions éducatives*, Paris, P.U.F., 1992.

[5] Si veda per es. MAGER R., *Gli obiettivi didattici,* Teramo, Lisciani-Giunti, 1972.

acquisizioni del ragazzo vengono colte negli aspetti estrinseci prescindendo da intenzioni, motivazioni, particolarità individuali, anche se fortemente legate all'apprendere.

Gli obiettivi inoltre puntualizzano e assegnano dei traguardi progressivi in maniera riduttiva puntando soprattutto alla conoscenza di chi apprende.
Rappresentano guide povere per il progresso individuale[6].

La diffusione delle prove oggettive o test standardizzati di profitto, specie all'estero, ha centrato la didattica sui risultati dell'apprendimento e le decisioni da prendere, in un'ottica di valutazione sommativa, certificativa, diagnostica, più che "prognostica".

Sotto la spinta anche del cognitivismo, l'interesse è andato invece spostandosi dalla valutazione degli esiti (obiettivi raggiunti o meno) a quella dei processi di costruzione delle conoscenze, alle operazioni mentali: la valutazione bada di più alla loro analisi e regolazione. Si è passati così alla valutazione delle competenze " in cui l'attenzione non è più centrata sulle *performances*, ma si trova sollecitata dalle attività mentali che esse sottendono"[7].

2. Dibattito sulla competenza e sua valutazione

Prima di affrontare i problemi posti dalla valutazione delle competenze occorre intendersi su che cos'è competenza: è un concetto che ha avuto molti contributi, in pedagogia e in didattica, specie negli ultimi tempi[8].

Non c'è però un accordo netto sul significato del termine.
Possiamo partire anzitutto da un significato generico, poi precisarlo alla luce della letteratura, per individuarne le componenti da tener presenti nell'apprendimento e, quindi, nella valutazione.

Quando si parla di una persona competente, nel linguaggio corrente si designa un esperto che conosce e sa risolvere i problemi che si presentano in un dato settore (di cui è competente, appunto) trovando o ideando e attuando rapidamente le strategie più adatte.

Il competente, dopo la sua formazione, continua ad apprendere in un dato contesto, sulla base della riflessione personale e dell'esperienza, sviluppando strategie e piani di risoluzione originali e potenti, acquisendo sicurezza e familiarità nel loro uso e adattandoli man mano alle particolarità delle situazioni.

Questo è il concetto di competenza "esperta", desunto da indagini e dall'osservazione di prassi nell'ambito della istruzione professionale. Come si può estendere il concetto agli altri ordini di scuola? Che cosa resta di questo concetto se intendiamo applicarlo fino dalla scuola di base?

La competenza, nel dibattito che si è sviluppato tra un gruppo di autori prevalentemente francofoni (canadesi, francesi, belgi), è stata definita progressivamente insistendo su di una serie di elementi caratterizzanti, diversamente accentuati.

---

[6] Cfr. REBOUL O., *La philosophie de l'e ducation*, Paris, P.U.F., 1989 (trad. Italiana presso Avio, Roma).

[7] FIGARI G., ACOUCHE M., *L'activité valuative r interrog e,* Bruxelles, De Boeck, 2001.

[8] Specie dagli anni 70 in poi. Si veda *l'e nigme de la competence en éducation*, numero monografico di *Raisons éducatives*, a cura di DOLZ J., OLLAGNIER E., De Boeck, 1999.

Ci ancoreremo al concetto che raccoglie l'essenza del dibattito ancora in corso. Autori come Le Boterf, Perrrenoud, Gillet[9], Allal, hanno cercato di racchiudere il concetto in una descrizione rapida come la seguente:

La competenza è un sistema di conoscenze[10], organizzato, anche attraverso la metacognizione, in schemi operativi (o reti o piani) finalizzati a identificare e risolvere con rapidità e sicurezza e con parziali adattamenti una famiglia di problemi (cioè problemi simili, ma variamente strutturati) con un'azione efficace.

Partiremo da questo concetto per analizzarne le componenti fondamentali in vista dell'aspetto valutativo.

a) La *competenza* suppone *conoscenze* coerenti tra loro e interrelate, che devono essere costruite e organizzate in modo da poter essere utilizzate e gestite nel trovare la soluzione nelle condizioni prima indicate. Si devono dunque cambiare i programmi (come del resto sta avvenendo in diverse nazioni europee) e le forme della didattica, perché gli alunni imparino e si esercitino nell'uso di piani di soluzione analoghi.

Le *conoscenze* vanno ridotte perché parte del tempo va impiegato per organizzare un contesto di apprendimento basato sulla soluzione di problemi simili e perché si esercitino in modo da poterli utilizzare con sicurezza e speditamente.

Nella *valutazione* delle competenze sarà utile indagare sulla *selezione* che gli studenti sono in grado di fare dei concetti rilevanti, sulla loro gerarchizzazione, sui loro collegamenti possibili e sulla padronanza acquisita nell'utilizzarli in situazioni particolarmente diverse.

Il confronto, la discussione di *mappe concettuali* può consentire di rappresentare i concetti e la loro evoluzione e quindi di valutare i progressi degli studenti nella costruzione delle conoscenze. La letteratura riporta in proposito norme d'uso ed esemplificazioni[11].

b) La competenza oltre al sapere implica il saper *gestire le conoscenze* per trovare, rapidamente e in modo esatto la *soluzione dei problemi*. Per promuoverla nell'insegnamento e valutarla si può quindi ricorrere alle acquisizione maturate e proposte ai docenti a proposito del "problem-solving". Sul tema, com'è noto, la letteratura è molto ampia. Comprende i contributi della psicologia, che hanno messo in luce le attività cognitive nella soluzione dei problemi, e le ricerche specifiche in ambito matematico. Ricordiamo gli studi di base della Gestalt sul ruolo della struttura dei problemi, l'analisi di processi di scoperta sviluppata da Polya, gli apporti del cognitivismo sul ruolo fondamentale del sistema di controllo esecutivo e di pianificazione euristica (Schonenfeld)[12]. Seguendo

---

[9] GILLET E., *Construire la formation,* Paris, ESF, 1991.

[10] Più di un autore distingue le conoscenze in dichiarative o concettuali e in procedurali e contestuali o condizionali.

[11] Si veda NOVACK J.D.-GOWIN D.B., *Imparando ad imparare,* Torino, SEI, 1989. NOVACK J.D., *L'apprendimento significativo,* Trento, Erickson, 2001. COCKBURN A.D., NARDI E., *Proceedings of 26th Annual conference,* Norwick, 2002 (vol. II, pp. 124-125).

[12] Una trattazione sintetica degli studi si ritrova in DECORTE E., GREER B., VERSCHAFFEL L., *Mathematics teaching and learning,* in AA.VV., *Handbook of Educational Psychology,* New York, Mcmillan, 1996.

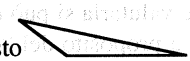
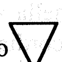
Polya[13] potremmo dire che chi sa risolvere un problema sa comprenderne le caratteristiche, definire un piano di soluzione, metterlo in atto e verificarlo. Ma il possesso di strategie cognitive non basta a definire il competente. Questo deve avere anche fiducia in sé, sicurezza, capacità di porsi degli obiettivi, iniziativa, responsabilità, perseveranza nell'impegno. Queste caratteristiche non sono solo di tipo cognitivo, non riguardano l'azione intellettuale, ma comprendono anche atteggiamenti di personalità. Dunque non dovrà esserci solo una valutazione sul modo di risolvere i problemi, ma una valutazione "incoraggiante"[14], che dà fiducia al ragazzo, ne cresce l'autostima, attraverso la percezione di competenza, lo coinvolge nel processo di ricerca di soluzioni, in quanto consapevole dell'efficacia della proprie azioni, quindi gli dà motivazione.

c) *Flessibilità per superare estensioni e diversa strutturazione dei problemi*

Non sempre il possesso di conoscenze ne garantisce l'attivazione per la soluzione di una famiglia di problemi. La valutazione deve essere condotta in modo da vedere la situazione di ogni alunno. Occorrono perciò *strumenti diagnostici* finalizzati a controllare se l'alunno a partire da conoscenze date è in grado di costruire schemi di soluzione in modo *flessibile*, secondo il contesto.

Nell'uso dei piani si può così scoprire che la didattica corrente può essere a rischio di illusioni sui risultati effettivi che ottiene.

Riferiamo, a titolo di esempio, una ricerca di J. Cardinet[15].

DOMANDE	RISULTATI
1.Si chiede la formula del calcolo dell'area del triangolo	85% di riuscite
2. Si dà la base e l'h di un triangolo e si domanda di calcolare l'area	70% di riuscite
1. Si dà un triangolo isoscele così collocato:  e si domanda di prendere le misure per calcolare l'area	46% di riuscite
2. Si dà un triangolo ottusangolo così disposto  e si chiede di prendere le misure necessarie e di calcolare l'area	20% di riuscite
3. si dà un triangolo isoscele capovolto  e si domanda di prendere le misure necessarie per calcolarne l'area.	10% di riuscite

Esempio analogo, a proposito dell'area del trapezio, è riferito da M. Wertheimer (*Il pensiero produttivo*, trad. it., Firenze, Giunti-Barbera,1965).

È bastato far ruotare la figura per creare una seria difficoltà agli alunni: il che denuncia la scarsa flessibilità degli alunni.

---

[13] POLYA G., *How to solve it?,* Princeton, University of Princeton Press, 1945.

[14] FRANTA H., COLASANTI R., *L'arte dell' incoraggiamento,* Roma, NIS, 1992.

[15] Cit. in: GREGOIRE J., *Que peut apporter la psychologie cognitive à l 'e valuation formative et à l' e valuation diagnostique,* in DEPOVER C.-N EL B., *L' e valuation des compe tences et des processus cognitifs,* Bruxelles, De Boeck, 1999, p. 29.

Una ulteriore caratteristica della competenza andrà sviluppata con la didattica e controllata con la valutazione.

È interessante a proposito un esempio di G. Vergnaud sulle operazioni. I bambini (tra i 3 e i 7 anni) sostiene lo studioso, si formano un concetto di addizione a partire da due tipi di situazione "problema":

- La riunione di due parti in un tutto (es. Paolo ha 2 cani e 1 gatto. Quanti animali ha Paolo?).
- L'aumento di una quantità iniziale data (es. Anna ha 2 pesci e ne riceve 5 per l'onomastico. Quanti pesci ha in tutto Anna?).

Poiché per la sottrazione esiste una sola soluzione "prototipo", cioè la diminuzione di una quantità iniziale data (es.avevo 10 figurine, ne ho regalate 3, quante me ne rimangono?) la sottrazione sarà più facile per i bambini che rientrano nella seconda categoria.

Inoltre, osserva il matematico, si chiede spesso agli alunni di estendere le operazioni attivando schemi di soluzioni in situazioni che non corrispondono ai prototipi, come nel problema: Anna ha regalato 2 Barbie; ora ne ha 3. Quante ne aveva prima?[16]

Questa estensione non graduata può generare nella valutazione insuccessi frustranti.

Il competente costruisce schemi di soluzione, con un lavoro di riflessione, di ricerca (metacognitiva) e impara a usare questi piani in modo automatizzato e flessibile estendendoli a problemi in parte simili e in parte diversi a quelli già noti (che formano tra loro una "famiglia" dal punto di vista conoscitivo).

Nell'*insegnamento* il docente accerterà:

- se l'alunno è in grado di risolvere con *esattezza* e *rapidità* i problemi proposti;
- se l'alunno ha una strategia di soluzione per ogni famiglia di problemi importante;
- se si rende conto che le soluzioni possono valere per *famiglie* di problemi (nel senso che ci sono "invarianti e particolarità").

Il docente dovrà accertare inoltre se il ragazzo sa costruirsi più strategie di soluzione, se ne cerca di originali, e se si esercita a modificarle per adeguarsi alle differenze che il problema presenta.

L'estensione degli schemi deve essere curata nella didattica e graduata nella valutazione. Il docente dovrà disporre di un *sistema* adeguato di problemi per far emergere i diversi piani di soluzione. Negli schemi che costruiranno gli alunni metteranno in gioco non solo le loro conoscenze esplicite, ma anche quelle implicite, che potranno spiegare le difficoltà incontrate nell'invertire uno schema o nel destrutturarlo.

L'insegnante non dovrà correre il rischio di sottovalutare queste difficoltà e di trascurare un congruo esercizio, e una valutazione puntuale della flessibilità degli alunni nel saper risolvere i problemi, anche se posti in contesti diversi.

d) Per controllare la crescita della competenza l'insegnante dovrà valutare il progresso dell'alunno nello *sviluppare piani di soluzione*. Le caratteristiche di piani o strategie di soluzione da valutare sono:
   - la potenza;

---

[16] VERGNAUD G., *Apprentissages et didactiques: o est-on?*, Paris, Hachette, 1994.

- l'originalità (l'andare per strade nuove e più efficaci);
- la rapidità (o automatizzazione delle soluzioni acquisite con esperienza ed esercizio);
- la flessibilità nell'adattarsi alle particolarità delle situazioni problematiche.

Occorre quindi disporre di strumenti che mettano in evidenza tali capacità.
Si dovrà anche controllare il *lavoro metacognitivo* svolto dal ragazzo per poter diventare sempre più consapevole delle strategie da adottare.
L'automatizzazione riguarda problemi simili e può essere progressivamente estesa a problemi diversi. Da parte di qualcuno in questo caso si parla di *capacità* come di competenza in vari settori affini.

3. Nuova professionalità nel valutare

a) Se si intende passare alla valutazione delle competenze bisogna introdurre un cambiamento considerevole nell'organizzazione e nel *clima della scuola.* Bisogna anzitutto farne un ambiente di vita, come da tempo vari pedagogisti hanno auspicato. Per sviluppare, per esempio, competenze di problem-solving trasferibili nella vita, l'insegnamento non dovrà essere avulso dal contesto quotidiano. Se si formano gli studenti non per la scuola ma per la vita, anche professionale, bisogna sviluppare una didattica, e una valutazione connessa, che parta da problemi autentici, nelle condizioni della vita corrente, cioè come si pongono in un contesto reale.

L'insegnamento tradizionale stima le soluzioni imitative, mentre la didattica per lo sviluppo di competenze favorisce l'autonomia nell'affrontare i problemi in un contesto autentico per adattarsi a situazioni successive (Resnik parla in questo senso di trans contestualizzazione).

b) Gli *strumenti* per la valutazione autentica sono diversi. Il *portfolio* raccoglie lavori svolti dai ragazzi, applicandosi a problemi reali, e consente di mettere in luce lo sviluppo delle competenze sul tema e favorisce, se adeguatamente strutturato, processi autovalutativi e metacognitivi.

Naturalmente suppone una valutazione adeguata dei prodotti, per la quale vale il contributo accumulato da molti studi docimologici.
La valutazione dei processi di soluzione può avvenire invece con l'impiego della *riflessione verbalizzata o pensiero ad alta voce*, che può essere fatto individualmente o in gruppo insistendo sull'interazione attiva. Questa tecnica consente di seguire i processi di soluzione mentre si svolgono; il problema deve offrire difficoltà appropriate e dosate, deve essere posto e affrontato idealmente con lo spirito e nei modi con cui l'affronta l'esperto: con fiducia in sé, con la ricerca di strade proprie (originali, economiche) usando esperienze ed esercizio, con sicurezza e controllo regolativi (sviluppo metacognitivo).
Il *controllo metacognitivo* potrà essere stimolato con questionari o interviste semistrutturate. Di questo aspetto si tratterà più diffusamente nel prossimo paragrafo.

Si può fare una valutazione del problem-solving seguendo un profilo che indichi gli aspetti su cui raccogliere elementi di giudizio nei compiti e nelle interrogazioni: si possono aiutare gli studenti a raccogliere elementi anche con apposite prove.

4. Valutazione della metacognizione

a) Metacognizione: è un concetto preconizzato da J. Dewey[17] (che contrapponeva il "pensiero riflessivo", cioè un modo di pensare *consapevole* delle sue cause e delle sue conseguenze, un metapensiero a quello spontaneo). Il concetto è stato ripreso e affinato specialmente dagli studi e dalle ricerche sul pensiero critico (si veda per es. J.P. Guilford).

Secondo J.H. Flavell (1978)[18] la "metacognizione" si riferisce alla conoscenza che ognuno ha dei propri processi cognitivi e dell'impiego di tali conoscenze per gestire i processi mentali. Ulteriori contributi di J.H. Flavell e l'apporto di A.L. Brown (1987) e A. Pinard (1989) hanno consentito di analizzare meglio questa capacità di controllare il proprio processo cognitivo, distinguendo le conoscenze metacognitive dall'autoregolazione.

Le *conoscenze metacognitive* si riferiscono al "che cosa il soggetto conosce dei suoi processi cognitivi".

L'*autoregolazione metacognitiva*, prevede secondo alcuni autori la pianificazione delle attività necessarie per il controllo sulla fase esecutiva e per la verifica dei risultati (Allal, 1992).

Secondo un modello più recente (Lafortune, 1998) l'*autoregolazione* nasce dall'*attenzione metacognitiva*, cioè dalla presa di coscienza delle proprie azioni cognitive (come la ricerca di legami, di relazioni); dalla consapevolezza delle proprie reazioni (ansia, prosecuzione dell'attività, ecc.) di fronte ad un compito; dalla capacità di "guidance" metacognitiva[19] e dalla capacità di *regolare*: i processi cognitivi (valutare l'efficacia delle proprie azioni, identificare e adottare strategie alternative).

b) La risoluzione dei problemi e la metacognizione

Come è stato dimostrato dalle ricerche, la metacognizione è un momento nella costruzione della competenza per la soluzione dei problemi: chi ha buone conoscenze metacognitive, attiva strategie per ricordare le informazioni presenti nel problema, mobilita conoscenze per strutturare uno schema di risoluzione, monitora il processo di soluzione, controlla le strategie adottate e le corregge eventualmente, ottenendo così prestazioni migliori.

Quindi il docente interessato a sviluppare le abilità di "problem-solving" in matematica e a verificare il processo (con una valutazione appropriata), terrà presente tutto questo. Il seguente modello proposto da Montague, può aiutare nell'individuazione delle possibili dimensioni da controllare.

---

[17] DEWEY J., *How we think*, Boston, Heath and Company, 1910, (Trad.it 1933).

[18] FLAVELL J.H., Metacognition and cognitive monitoring, *American Psychologist*, 34 (10), 1978, pp. 906-911.

[19] Sta per determinare gli obiettivi da raggiungere le attività da effettuare, e la loro concatenazione (pianificare), orientare e scegliere metodi di azione (L. Lafortune, 1998)

Fig. 1 –Problem-solving e metacognizione in matematica[20]

STRATEGIE E PROCESI COGNITIVI NEL PROBLEM-SOLVING	STRATEGIE METACOGNITIVE (Consapevolezza e autoregolazione delle strategie cognitive)
Lettura (comprensione)	Autoistruzione (conoscenza delle caratteristiche e utilità delle strategie e suggerimenti per il loro utilizzo).
Parafrasi (traduzione)	Autointerrogazione (microverifica continua sul corretto utilizzo delle strategie)
Visualizzazione (trasformazione)	Automonitoraggio (controllo generale sulle strategie).
Formulazione di ipotesi (pianificazione delle operazioni da fare)	
Stima (previsione dei risultati)	
Computo (calcoli)	
Controllo (valutazione)	

L'uso dei due gruppi di criteri dà luogo ad un "profilo" analitico delle capacità dell'alunno. Per le necessità pratiche può bastare segnare per ogni voce se è acquisita o no. Specie nel caso di una ricerca si potrà aggiungere accanto alle voci del profilo indicazioni sul livello di acquisizione raggiunto in ognuna.

c) Valutare la metacognizione

Diversi strumenti sono stati predisposti per misurare la metacognizione.
Si tratta di solito di scale autodescrittive come quelle di R. Likert (adattate per i diversi livelli scolastici) predisposte appositamente. Sono noti per esempio il QSA di Pellerey (che ha 1 sub-scala per gli aspetti metacognitivi) e altri strumenti più specifici per la matematica (come il questionario semistrutturato di Lucangeli e Cornoldi per la scuola elementare)[21].
Strumenti analoghi sono stati validati in altri paesi. Ricordiamo per esempio la scala di Mongeau-Lafortune-Pallascio-Allaire[22] per misurare l'autoregolazione metacognitiva nel problem-solving in matematica (a livello di scuola superiore o inizio università).
In quest'ultima appaiono domande formulate nella forma seguente:
"Per ogni enunciato indicate se manifesta questo comportamento, quando dovete risolvere un problema di matematica usando una delle notazioni seguenti:

---

[20] LUCANGELI D., PASSOLUNGHI M.C., *Psicologia dell' apprendimento matematico,* Torino, UTET, 1995.

[21] LUCANGELI D., CORNOLDI C., *Metacognizione e matematica,* in ALBANESE O., DOUDIN P.A., MARTIN D. (eds), *Metacognizione ed educazione*, Milano, Franco Angeli, 1995.

[22] LAFORTUNE L., MONGEAU P., PALLASCIO R., *M etacognition et comp etences reflexives,* Qu bec, Ed. Logiques, 1998, p. 258.

1=quasi mai; 2=poco sovente; 3=sovente; 4=molto sovente; 5=quasi sempre.
Le prime domande della scala da compilare sono:

1.	So se il lavoro proposto mi piace	1	2	3	4	5
2.	Sono attento al mio livello di concentrazione	1	2	3	4	5
3.	Sono attento alle mie reazioni di fronte al compito	1	2	3	4	5
4.	Mi creo esempi miei per comprendere meglio	1	2	3	4	5
5.	Mi preoccupo dei passaggi da svolgere	1	2	3	4	5
6.	So come fare in funzione del tempo disponibile	1	2	3	4	5

Altrove sono riportate invece interviste semistrutturate per l'osservazione dei processi metacognitivi[23].
Queste indicazioni sono date a titolo indicativo, per aiutare nella valutazione del costrutto.

Conclusione
Vari paesi, tra cui l'Italia, stanno riscrivendo i loro programmi scolastici in funzione dell'acquisizione di *competenze*. Questa trasformazione è stata preceduta e accompagnata da una fioritura di ricerche e di scritti, che hanno cercato di precisare il concetto di competenza e di studiarne l'inserimento coerente nell'organizzazione scolastica e nella didattica.
Questa nuova impostazione dell'apprendimento-insegnamento ha *finalità* da approfondire, effetti da esplorare.
In altri termini, l'innovazione esige una valutazione adeguata per controllarne l'autenticità e l'efficacia. Punti da tenere presenti nel realizzarle sono: a) partire da una precisazione del *costrutto* affidabile ed efficace, che diventi patrimonio della professionalità degli insegnanti; b) predisporre e verificare una serie di procedimenti e di strumenti che aiutino tutti a realizzare in maniera autentica e produttiva le proposte connesse con il costrutto; c) utilizzare in modo adeguato i risultati delle ricerche.
La vita professionale del docente suppone una preparazione adeguata, entusiasmo maturato nell'esercizio quotidiano dell'attività, senso critico nel riesaminare e ripensare i successi o insuccessi.
L'insegnante deve introdurre accanto alla competenza professionale una costante tendenza al miglioramento. La ricerca, intesa nel senso più completo, dovrebbe accompagnare questo dinamismo professionale.
La ricerca suppone un *clima* quotidiano che comporti attrattive verso la crescita, verso l'*expertise culturale* (come matematici) ed educativa (come docenti).
La formulazione di *proposte* innovative esige creatività autentica, meditata fiducia nella vita professionale propria e degli altri, rigore e perspicacia nel rivivere le esperienze.
L' *ipotesi* esige verifica dell'impianto e dei risultati, visti anche a lunga scadenza e privilegiando la loro qualità.
L'innovazione richiede *comunicazione* sistematica, capillare coinvolgente per un'adeguata ricaduta dei risultati.

---

[23] MASON L., *Valutare a scuola,* Padova, Cleup,1997.

Bisogna insomma cercare di mantenere nella scuola un clima costante di ricerca che badi al progresso nei contenuti, nella didattica, nell'incisività della verifica.

Bibliografia

COGGI C., "Le competenze in matematica alla fine della scuola media: una prova", *Scuola e Didattica*, XLIII, 1997, 6, 2-24.

DEPOVER C.-NÖEL B., *Approches plurielles de l'évaluation des compétences et des processus cognitifs,* UMH-FUCAM, 1999.

DEPOVER C.-NÖEL B., *L'évaluation des compétences et des processus cognitifs,* Brucelle, De Boeck, 1999.

FIGARI G., ACOUCHE M., *L'activité évaluative réinterrogée,* Bruxelles, De Boeck, 2001.

LAFORTUNE L., MONGEAU P., PALLASCIO R., *Métacognition et compétences réflexives,* Québec, Ed. Logiques, 1998.

NOVACK J.D., *L'apprendimento significativo,* Trento, Erickson, 2001.

CALCOLO NUMERICO E CALCOLO SIMBOLICO: NUOVE PROSPETTIVE PER IL CURRICULUM DI MATEMATICA

Michele Impedovo
www.matematica.it/impedovo/
impedovo@tin.it

Se per esempio si vuole risolvere $x^2+4x-3=0$ si arriva a $-2 \pm \sqrt{7}$
Abbiamo progredito? Bisogna risolvere $x^2-7=0$.
Non è perché lo si chiami $\sqrt{7}$ che lo si sa calcolare.
Tutto ciò che si è fatto è stato di ricondurre
un'equazione di secondo grado ad un'altra.
Questo non significa "risolvere" l'equazione e se ci si ferma qui
si dà agli allievi un'idea sbagliata di che cos'è la matematica
e di che cosa ci si può aspettare da essa.
Ivar Ekeland, Il caos

L'insegnamento attuale della matematica in Italia privilegia il calcolo simbolico: lo testimoniano la storica ed eccessiva abbondanza di calcolo letterale a partire dalla scuola media, la moltitudine di espedienti per la fattorizzazione dei polinomi (a coefficienti in **Z**? in **Q**? in **R**? mah?!) , i metodi artificiosi per risolvere equazioni particolarissime, gli innumerevoli "schemi" per le disequazioni, la "regola" di Ruffini, le "formule" di trigonometria e la "riduzione al primo quadrante", le regole di derivazione e soprattutto di integrazione e chissà quant'altro. Può capitare di seguire un intero corso di trigonometria senza vedere l'approssimazione in radianti di un solo angolo; può capitare di seguire un intero corso di analisi senza vedere un numero decimale.

Ricette di cucina

Questo tentativo di *esaurire* le potenzialità del calcolo simbolico ha innanzitutto condotto a un tipico errore didattico: privilegiare l'aspetto sintattico degli oggetti matematici trascurando il loro significato. Tale errore si è consolidato a tutti i livelli scolastici fino all'Università ma ha certamente prodotto i guasti maggiori nella scuola dell'obbligo, in cui molti insegnanti (tipicamente i non laureati in matematica) hanno scambiato l'insegnamento della matematica per un prontuario di "regole" e "formule" (le famigerate "ricette" del buon Croce). A queste tecniche di calcolo si aggrappano soprattutto gli alunni più deboli i quali, in assenza di significati riconosciuti, si accontentano di apprendere sequenze finite e ordinate di istruzioni. La scarsa spendibilità culturale di queste conoscenze è ben nota.
A testimonianza di quanto vado dicendo esiste un'esperienza di valutazione dell'apprendimento matematico in un certo senso unica in Italia: si tratta del *Progetto Prometeo*, realizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione in collaborazione con l'IRRSAE Marche (l'ultimo rapporto è stato pubblicato nel 2000). Questo progetto ha visto coinvolti dai 10000 ai 14000 studenti in ingresso e in uscita dal biennio delle scuole superiori, con test di valutazione in tutte le materie. I risultati del test di Matematica sono

sconfortanti. In particolare colpiscono i tre item a risposta multipla seguenti, di cui riporto le percentuali di ciascuna risposta (si noterà la presenza di *distrattori*).

Test in ingresso

4. Il doppio di 3/4 è

A. 3/8	5%
B. 6/8	69%
C. 5/4	2%
D. 3/2	24%

7. Qual è il risultato della seguente espressione?

$$3 \cdot [-2 - (-5 + 3)]$$

A. −12	22%
B. +3	28%
C. +1	4%
D. 0	45%

Test in uscita (A= 4 ore settimanali di matematica, B= 5 ore settimanali di matematica)

13. Se a è un qualunque numero reale diverso da 0, quale tra le seguenti proposizioni è vera?

	A	B
A. a^2 è un numero negativo	37%	25%
B. $-a^2$ è un numero negativo	22%	39%
C. $-a$ è un numero negativo	8%	10%
D. $6a$ è un maggiore di a	29%	24%

Di fronte a risultati come questi, che provocano addirittura incredulità, non possiamo che sentirci tutti coinvolti e tutti responsabili. Ecco il *peccato mortale* dell'insegnante: tollerare che un solo studente sia convinto che il doppio di 3/4 sia 6/8. E invece, ahimè, il 69% della popolazione intervistata si rifugia nella sintattica, nell'applicazione di regole: è ovvio che se una "regola" è vuota di significato allora può essere sostituita da qualunque altra regola altrettanto priva di significato. Nessuno, dico nessuno, è in cuor suo convinto che il doppio di 3/4 d'ora siano 6/8 d'ora; tutti sanno che il doppio di 3/4 d'ora è un'ora e mezza. Perché allora la scuola produce questi risultati? Non diamo così fiato alle trombe di chi vorrebbe abolire l'insegnamento della matematica?
Si osservino anche le vistose percentuali di errore che riguardano la corretta applicazione del segno "–". Anche qui la colpa è nostra; nell'espressione

$$3 \cdot [-2 - (-5 + 3)]$$

il primo (e il terzo) "–" ha significato del tutto differente dal secondo. Il primo è il simbolo unario di "opposto di", il secondo è il simbolo binario di sottrazione. La comprensione non è certo agevolata da questa confusione simbolica; alcuni autori hanno proposto più di 10 anni fa di utilizzare scritture come le seguenti:

$$^{-}2 - 5 \qquad ^{-}2 \cdot {}^{-}5 \qquad ^{-}2 - {}^{-}5$$

tali notazioni, utilizzando due simboli diversi, evidenziano le differenze semantiche, sono più semplici da scrivere e non esigono parentesi. Inspiegabilmente le proposte in tal senso sono rimaste lettera morta.

Le equazioni non si risolvono: si guardano

In secondo luogo in questa esasperata attenzione alle relazioni simboliche (si pensi alla abusata consegna di "semplificare" un'espressione) sono spesso mancate le visioni **di struttura** degli oggetti matematici; è cioè mancata la capacità di semplificare, strutturare, ridurre ad uno stesso schema cognitivo oggetti diversi. Per esempio tutto il calcolo letterale si può ridurre alle proprietà di *campo* (di **Q** per esempio) e quindi in definitiva alle proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, ma negli indici dei libro di testo questo non appare: si parte con la somma di monomi per arrivare minuziosamente alla divisione di polinomi. È davvero inammissibile che su molti libri di testo sia ancora scritto che "un polinomio è la somma algebrica di più monomi non simili", lasciando così intendere che x non sia un polinomio. Proviamo a chiederci quanti matematici hanno mai utilizzato il mistico concetto di "monomi simili" e chiediamoci se verrà mai più utilizzato dallo studente negli studi successivi di matematica. Analoghe perplessità dovrebbero essere nutrite nei confronti dei cosiddetti "principi di equivalenza", inutili e anzi dannosi; non occorre alcun principio per risolvere le equazioni e i sistemi lineari a coefficienti in un campo. Occorrono solo le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione.
Un altro esempio di mancanza di struttura riguarda le equazioni (algebriche, esponenziali, trigonometriche, ...), alla cui risoluzione si sacrifica solitamente una parte corposa del curriculum; gran parte di esse hanno coefficienti ad hoc, scelti apposta perché le soluzioni siano razionali, o comunque esprimibili in forma simbolica. Mettiamoci ancora gli occhiali *strutturali*: dato che di norma non si lavora nel campo dei numeri complessi (e ci mancherebbe altro!) tutto ciò che "si sa" risolvere, nel senso che le soluzioni appartengono sempre al campo dei coefficienti, sono le equazioni e i sistemi lineari. Stop.
Già con le equazioni di secondo grado inizia la confusione; se non si approssimano le soluzioni, con la formula risolutiva non si fa altro che ricondurre un'equazione di secondo grado ad un'altra equazione di secondo grado. Questa è una tentazione irresistibile dell'insegnamento matematico in Italia: ricondurre una soluzione simbolica ad un'altra soluzione simbolica. È quanto si fa, per citare un solo esempio, con le regole di derivazione e di integrazione: davanti all'espressione simbolica

$$\int x ln(x) dx$$

la tacita consegna è che l'alunno restituisca qualcosa come

$$\frac{x^2 ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

e spesso tutto finisce lì. Ma esprimere oggetti matematici esclusivamente in forma simbolica, come in questo caso, non aggiunge nulla in termini di conoscenza; aumentano invece le possibilità che l'allievo (in particolare l'allievo debole) accetti acriticamente di rifugiarsi nella sintassi, nelle "regole", nelle tecniche di calcolo.

Inoltre può sorgere l'equivoco del "non si può risolvere"; un'equazione di 5° grado ammette almeno una soluzione reale, che in generale non si può esprimere per radicali; ciò non significa affatto che non si possa "risolvere", o almeno non più di quanto non si sappia risolvere

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

La soluzione simbolica di quest'ultima equazione richiede l'utilizzo di $\sqrt{5}$, che è altrettanto ignoto, in linea di principio, di simboli solo apparentemente più complessi. Per esempio le soluzioni di un'equazione generica di quinto grado possono essere espresse in forma simbolica mediante la funzione θ di Jacobi.
Analogamente sostenere, come appare in molti testi scolastici, che "i valori dell'integrale definito

$$\int_a^b e^{-x^2} dx$$

non si possono esplicitare" è fuorviante e in definitiva obsoleto. Se si intende che "non si possono esplicitare" in forma simbolica, allora è falso: la (una) forma simbolica è proprio quella appena scritta. Se si intende che non si possono calcolare allora è falso quanto dire che non si può calcolare radice di 2.
In termini più semplici: risolvere un'equazione come

$$2^x = 100$$

limitandosi a fornire la soluzione tautologica

$$x = log_2(100)$$

è davvero troppo poco; è necessario che ogni studente sia in grado di dare qualche approssimazione di tale numero. Lo slogan potrebbe essere:

LE EQUAZIONI SI RISOLVONO PER TENTATIVI

Ogni studente deve sapere al volo che la soluzione dell'equazione precedente è un numero irrazionale compreso tra 6 e 7. E per conoscerne la prima cifra decimale non resta che fare qualche tentativo con la calcolatrice. Ora sì che ha senso porsi il problema della definizione di potenze come $2^{6.6}$.
Se non si dà base empirica alla ricerca di equazioni non lineari si salta una fase fondamentale dell'apprendimento, non si costringe l'allievo ad osservare la grande ed affascinante danza dei numeri, dalla quale sarà poi possibile astrarre; quando infine si dirà "$log_2(100)$" questo simbolo potrà appoggiare la propria validità semantica sul piedistallo dell'approccio numerico.
L'approccio per tentativi possiede una sorta di validità generale, è applicabile in generale, non costringe a conoscere regole ad hoc per ciascun tipo di equazione, ma costringe a comprendere il significato di "soluzione" di un'equazione. Nell'accezione che abbiamo dato, risolvere un'equazione per tentativi è *strutturale*.

Figurato n al tasso i?

Un terzo aspetto del calcolo simbolico su cui dovremmo riflettere riguarda le **notazioni**.
È del tutto ovvio che le notazioni matematiche non sono state scelte per scopi didattici; anzi, in qualche modo i matematici si sono sempre compiaciuti di essere un po'

incomprensibili, conservando nel tempo simboli e notazioni che hanno il vezzo di rivolgersi esclusivamente agli addetti ai lavori (un mio amico dice: "perché fare una lezione difficile quando con un piccolo sforzo si può essere veramente incomprensibili?"); anche su questo terreno è mancata una visione strutturale. In fondo, si può obiettare, i simboli sono convenzioni di scrittura sulle quali possiamo accordarci. Inoltre la ricchezza di simboli è in qualche modo ricchezza storica e ricchezza intellettuale. Giusto. Tuttavia una buona notazione veicola i concetti in modo più semplice e facilita l'apprendimento; e nella sterminata proliferazione di simboli manca una visione strutturale che forse aiuterebbe gli studenti a vedere oggetti diversi come riconducibili allo stesso processo mentale.

Mi spiego con un esempio: quando scriviamo

$$\binom{n}{i}$$

intendiamo il coefficiente binomiale "*n* su *i*" cioè il rapporto $\frac{n!}{i!(n-i)!}$; quando scriviamo

$$a_{\overline{n|}i}$$

intendiamo "*a* figurato *n* al tasso *i*" cioè la sommatoria $\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t}$. Ciascuno di essi utilizza altri simboli, e così via, lungo la faticosa catena dell'apprendimento. Quei simboli sono molto sintetici e rappresentano due esempi significativi di "calcolo simbolico": entrambi hanno alle spalle un lungo percorso semantico e arrivare ad essi significa stringere in pugno, con un solo segno, un faticoso processo di apprendimento. Questa è, in definitiva, la ricchezza del "calcolo simbolico".

Ma quando usiamo simboli come $\binom{n}{i}$ e $a_{\overline{n|}i}$ non riusciamo a trasmettere che si tratta, in entrambi i casi, di funzioni: uno stesso processo mentale sovrintende alla costruzione di entrambi. Sono semplicemente funzioni a due argomenti; se le indicassimo, che so, con `cb(n,i)` e `A(n,i)` non toglieremmo nulla al valore informativo di quei simboli e forse agevoleremmo la comprensione dei concetti.

La **scrittura in linea** di un'espressione matematica può diventare non solo un modo per utilizzare consapevolmente gli strumenti informatici e i software di calcolo simbolico, ma può anche essere uno strumento didattico per semplificare un processo mentale, per strutturare le conoscenze, per sfruttare gli aspetti algoritmici della matematica come inesauribili risorse di insegnamento-apprendimento.

È curioso che la scrittura elettronica non sia ancora riuscita a intaccare le notazioni matematiche, che ancora abbiamo difficoltà a scrivere la radice quadrata di 2. Continuiamo ad utilizzare simboli come

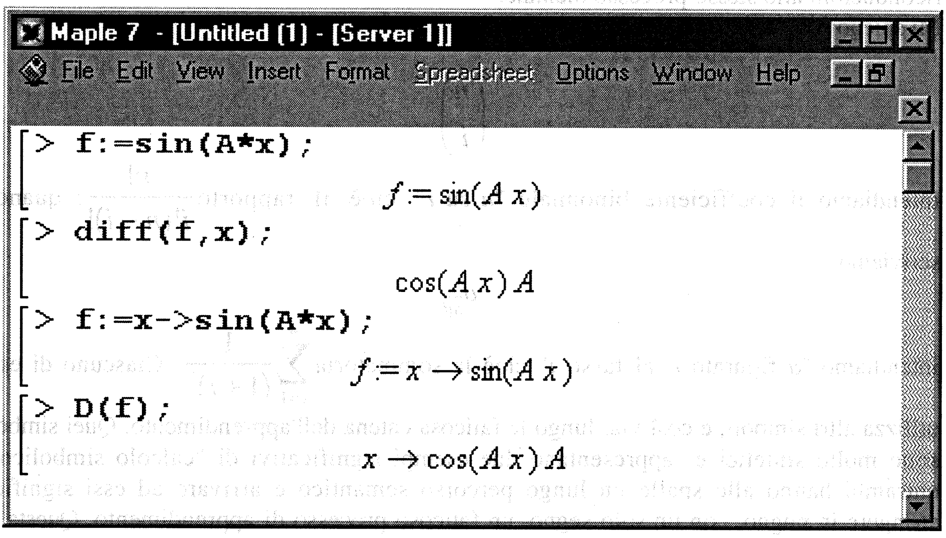
$$\frac{df}{dx}, \int (x)dx$$

che sono inadatti a veicolare i concetti che si propongono di indicare, che sono inutilmente complicati (se non addirittura fuori luogo). Perché non sostituirli con notazioni più strutturate, come

$$D(f, x) \text{ e } P(f, x),$$

dove f è un' espressione e x una variabile? In fondo D e P sono anch'esse due funzioni a due argomenti.

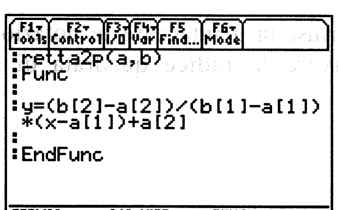
L'implementazione della computer algebra ha costretto a strutturare gli oggetti matematici: perché non imparare da quel percorso? Per esempio in MAPLE esistono addirittura due operatori di derivazione: `diff` e `D`.

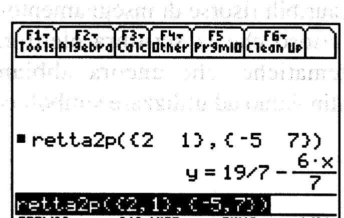


Il primo prende in ingresso un'espressione e una variabile e restituisce un'espressione.

Il secondo prende in ingresso una <u>funzione</u> (che in MAPLE si definisce nella forma x→f(x)) e restituisce una funzione. In questo caso non occorre specificare la variabile, perché questa è implicitamente contenuta nella funzione stessa. Noi solitamente non distinguiamo tra espressione e funzione; la distinzione invece diventa indispensabile quando l'una o l'altra diventano argomenti di nuove funzioni. Allora la sintassi (il vero "rigore") diventa ineludibile.

Mi è capitato più volte nel lavoro in classe di costruire con gli studenti funzioni (poi implementate sulle calcolatrici simboliche) per ottenere rapidamente un certo risultato. Un esempio tra i più semplici è l'equazione di una retta (non verticale) per due punti:





Un'attività di questo tipo costringe a strutturare il concetto di funzione attraverso

- il **numero** degli argomenti;
- l'**ordine** degli argomenti;
- la **struttura-dati** degli argomenti (abbiamo scelto di dare in input due argomenti: le liste $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ delle coordinate dei due punti).

Inoltre definire e implementare una funzione costringe a inventare nuove notazioni: il nome `retta2p` diventa un nuovo strumento di comunicazione in classe. L'abbreviazione del linguaggio diventa rapidità del pensiero.

Approssimazione, che passione

Proviamo a definire anche la **approssimazione** come una funzione: $f(x)$ prende in ingresso un numero reale x e fornisce in uscita l'approssimazione di x alla prima (per esempio) cifra decimale.
Tale funzione non conserva la somma, nel senso che in generale

$$f(a+b) \neq f(a)+f(b).$$

Per esempio

$$f(0.23+0.44) = f(0.67) = 0.7$$
$$f(0.23) + f(0.44) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

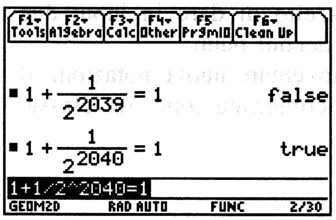
Questo fatto è una delle cause di diffidenza degli insegnanti nei confronti delle approssimazioni. D'altra parte perché mai l'approssimazione dovrebbe conservare una proprietà che è tipica delle funzioni lineari?

Se si lavora con un foglio elettronico si possono ottenere risultati drammaticamente errati. Ø celebre l esempio della successione ricorsiva
$a_0 := 1/3$
$a_{n+1} := 4a_n - 1$
che è la successione costante di valore 1/3, ma che secondo Excel diverge a $-\infty$.

n	a_n
0	0.333333333333
1	0.333333333333
2	0.333333333333
3	0.333333333333
4	0.333333333333
5	0.333333333333
6	0.333333333333
7	0.333333333333
8	0.333333333332

Infatti all'ottava iterazione l'errore prodotto dall'inevitabile troncamento di 1/3 risale fino alla 12ª cifra decimale, e da quel punto in poi si ha un rapido divergere a $-\infty$.
Il calcolo simbolico è immune dalla propagazione dell'errore, ma poiché ogni sistema di calcolo simbolico possiede un limite superiore ai numeri che può trattare (e un limite inferiore ai numeri positivi) le sorprese sono sempre dietro l'angolo. Ecco come la calcolatrice simbolica valuta, al variare di *n*, l'uguaglianza

$$1+\frac{1}{2^n}=1$$



Dagli esempi svolti risulta evidente che la diffidenza degli insegnanti nei confronti del calcolo numerico è in un certo senso comprensibile. L'insegnante deve possedere nuove competenze e deve essere in grado di padroneggiare gli eventuali errori prodotti dal calcolo automatico. Non possiamo tuttavia dimenticare che l'approssimazione è stata, da sempre, uno dei motori della storia della matematica.

Simbolico e numerico

Una delle difficoltà riconosciute nell'apprendimento della matematica è la "generalizzazione precoce": si cerca prematuramente un livello di astrazione al quale l'allievo non è preparato. Il calcolo letterale ne rappresenta in un certo senso l'esempio per eccellenza. Dire che "le lettere stanno al posto di numeri qualsiasi" non è sufficiente a consolidare la padronanza dei significati in gioco. Conosco un buon numero di studenti (ma anche di adulti) che sanno ripetere la formula del quadrato del binomio, ma dichiarano di non sapere assolutamente che cosa essa possa significare. È questo il nostro scopo? No, evidentemente. Eppure ci sono, si può dire, infiniti modi di riempire di significato una relazione simbolica.
Nell'esempio in questione: qual è la probabilità che lanciando 2 volte una moneta equa esca una volta TESTA (T) e una volta CROCE (C), non importa in che ordine?
Posti davanti a questo problema senza alcuna trattazione preliminare molti studenti rispondono 1/3, perché possono accadere 3 eventi diversi (2T, 1T 1C, 2C). Se si fa notare loro che 1T 1C si può ottenere in due modi diversi arrivano rapidamente ad una soluzione corretta; si accorgono anche che le combinazioni con cui si possono ottenere i diversi eventi sono nell'ordine 1, 2, 1. L'analogia con il quadrato del binomio è evidente: $(T+C)^2 = T^2+TC+CT+C^2 = T^2+2TC+C^2$; anche qui, dei quattro prodotti di $(T+C)\cdot(T+C)$ i termini TT e CC si possono ottenere in un solo modo, il termine TC in due modi diversi. Un passo avanti: qual è la probabilità che lanciando 3 volte una moneta esca due volte T e una volta C? Lo sviluppo

$$(T+C)^3 = T^3 + 3T^2C + 3TC^2 + C^3$$

conduce subito alla risposta, perché il prodotto $(T+C)\cdot(T+C)\cdot(T+C)$, il cui sviluppo prevede otto addendi, "conta" il numero di combinazioni di ciascun evento. La risposta è 3/8. Ma si può andare oltre: si può pensare più in generale ad un evento che accada o non accada con probabilità rispettive *a, b*, con $a+b=1$. Allora lo sviluppo di $(a+b)^n$

rappresenta esattamente la distribuzione di probabilità che l'evento accada 0, 1, 2, ..., *n* volte su *n* prove indipendenti.
Potrebbe essere interessante testare il grado di intuizione degli allievi: un giocatore di pallacanestro, che fa centro nel tiro libero 7 volte su 10, tira tre volte; con quale probabilità otterrà 0, 1, 2, 3 centri? Le risposte sono date dagli addendi dello sviluppo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

dove a=0.3 e b=0.7:

k	0	1	2	3
p(k)	0.027	0.189	0.441	0.343

Sembrerà strano, ma il fatto che la somma delle probabilità dia 1 è per molti studenti sorprendente e confortante: il cubo di un binomio ha delle implicazioni semantiche che possiamo controllare.
Un'altra attività collegabile alla precedente è quella della **simulazione**. Possiamo simulare con un calcolatore un grande numero di prove e registrare i risultati sperimentali.
Siamo in una situazione privilegiata per l'apprendimento: lo studente può confrontare il risultato atteso dalla propria intuizione con il modello sperimentale e con il modello teorico; la corrispondenza o meno tra i diversi livelli costituisce elemento di forte partecipazione emotiva e intellettiva.

Numerico e simbolico

L'esagerata attenzione al calcolo simbolico ha fatto sì che l'approccio numerico a concetti matematici importanti fosse trascurato. È invece opinione diffusa che l'approccio numerico costituisca un valido supporto all'apprendimento e alla costruzione dei concetti; attività di esplorazione, di simulazione, la ricerca di un modello funzionale per i dati, la formulazione di congetture fondate sull'analisi empirica di dati numerici (in geometria, nell'interpretazioni dei dati, nel calcolo infinitesimale, in calcolo delle probabilità) possono aiutare a rendere solide le conoscenze matematiche e contribuiscono ad affinare l'astrazione.
In particolare è condivisa l'idea che l'approccio numerico ai concetti del calcolo infinitesimale sia efficace dal punto di vista dell'apprendimento. L'idea chiave è che, a parte le eccezioni del caso, una funzione può essere "linearizzata" vicino ad ogni punto: pur di ingrandire il grafico vicino a quel punto ci appare una retta. La pendenza di questa retta è l'oggetto dei nostri desideri. In altri termini, una funzione $f(x)$ può essere approssimata "vicino" ad un punto x_0 da una funzione lineare su un intervallo $[x_0-h, x_0+h]$ di pendenza

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

La pendenza su un intervallo simmetrico rispetto a x_0 sembra più naturale del solito rapporto *incrementale* (che brutta espressione!)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e fornisce un'approssimazione migliore. Il problema della definizione di $f'(x_0)$ è di là da venire, per ora ipotizziamo tacitamente che le funzioni che trattiamo siano derivabili in x_0.

Un possibile percorso, scandito da lavori di gruppo, potrebbe essere il seguente.

- Sia data la funzione $f(x):= x^3$. Approssimare la pendenza in $x_0:=2$, con h = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001. A quale valore sembra tendere la pendenza?
  COMMENTO. È bene non iniziare con una funzione quadratica, perché la pendenza media, qualunque sia h, è esattamente la pendenza istantanea nel punto. Gli studenti dovrebbero osservare il progressivo avvicinarsi delle diverse approssimazioni ad un numero intero (12), fino a congetturare che tale numero possa essere il valore simbolico della pendenza istantanea in 2. La verifica di tale congettura è lo scopo del lavoro di gruppo successivo.
- Qual è la funzione lineare $g(x)$ di pendenza 12 passante per $(2,f(2))$? Verificare che i grafici di $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno in $x_0=2$ <u>due</u> intersezioni coincidenti.
- Approssimare la pendenza di $f(x):=x^3$, con h=0.01, nei punti x_0=1, 2, 3, 4, 5. Come varia la pendenza? Quali osservazioni si possono svolgere?
  COMMENTO. Gli studenti si accorgono della regolarità; congetturano che il "limite" a cui tendono le diverse approssimazioni sia $m(x_0)= 3x_0^2$. È bene ora controllare la congettura su altri valori (anche non interi) di x_0. Inizia a nascere l'idea *funzionale*: la pendenza istantanea varia al variare di x secondo una precisa legge, è una funzione di x, <u>derivata</u> dalla legge $f(x)$. Quale?
- Approssimare la pendenza di $f(x):=x^4$, con h=0.01, nei punti x_0=1, 2, 3, 4, 5. Quale potrebbe essere la funzione *derivata*? Idem con $f(x):=x^5$. Idem con x^6.
  COMMENTO. Dovrebbe sorgere la congettura secondo cui la derivata di x^n è nx^{n-1}.
- Verificare la congettura secondo cui la derivata di x^n è nx^{n-1} con $n= 2$, $n= -1$, $n=1/2$.
- Sia $f(x):= \sqrt{x}$. Sappiamo che $f(9)= \sqrt{9} =3$. Quanto può valere circa $\sqrt{10}$?
  COMMENTO. Si tratta di un lavoro fondamentale per cogliere il significato più profondo di "linearizzazione". Ci si aiuti con il grafico di $f(x)$ e della retta tangente in $x_0=3$. Il calcolo infinitesimale ha avuto come motore fondamentale dei suoi successi l'obiettivo di approssimare i valori delle funzioni.

Le cosiddette "regole di derivazione" sono non solo indigeste, ma inutili e dannose. Lasciamole come dessert, a coloro che proseguiranno con studi scientifici.

Una competenza essenziale del futuro cittadino potrebbe essere quella di riconoscere in una tabella di dati una crescita o una decrescita lineare $(ax+b)$, oppure di tipo potenza (ax^b), oppure di tipo esponenziale (ab^x), o altre ancora. Gli esempi sono innumerevoli, limitati solo dalla fantasia dell'insegnante (e dello studente). Ecco alcuni esempi:

- Voti d'esame confrontati con i la media dei voti in pagella al II quadrimestre per la classe di maturità.
- Distanza media dal Sole e tempo medio di rivoluzione dei pianeti del Sistema Solare (III legge di Keplero).
- Raffreddamento di un bicchiere d'acqua bollente a temperatura ambiente: temperatura dell'acqua rispetto al tempo (si possono utilizzare i sensori collegati ad una calcolatrice).

- Intensità luminosa di una lampadina alimentata dalla rete a 220 Volt, 100 campionamenti ogni millesimo di secondo (sempre con i sensori): si "vede" la corrente alternata comporre una sinusoide.
- Posizione di uno studente (distanza dal sensore di moto) rispetto al tempo.
- Popolazione italiana nei diversi censimenti.
- Record mondiali di atletica (velocità e mezzofondo) sulle varie distanze: 100 m, 200 m, 400 m, 800 m, 5000 m, 10000 m.
- Record mondiale sui 100 m dal 1912 a oggi.
- PIL (Prodotto Interno Lordo) dell'Italia negli ultimi anni.
- Tempo di calcolo con una calcolatrice del determinante di una matrice n×n in funzione di n.
- Lunghezza della corda vibrante di un pianoforte in funzione della frequenza della nota emessa.
- ...

I dati si possono cercare in rete.
Il tema della regressione (lineare, potenza, esponenziale) è centrale in un curriculum che valorizzi le competenze legate all'analisi e alla modellizzazione dei dati: si tratta di attività che consolidano i concetti, che avvicinano la matematica alla sensibilità dell'allievo, ma soprattutto che rafforzano (non è un paradosso) la capacità di astrazione.

Molti problemi di modellizzazione si possono ricavare dalla matematica stessa. Ecco qualche esempio.

- Quanto vale la somma dei primi n numeri naturali? Quanto vale la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali? Quanto vale la somma dei cubi?
- Consideriamo la somma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}$. Pur di sommare un numero opportuno di addendi, possiamo raggiungere qualunque numero positivo M? Quanti addendi occorre sommare per raggiungere 3, 4, 5, 8, 10? Che tipo di crescita è?
- Quante sono le equazioni di secondo grado a coefficienti interi compresi tra $-n$ e n che hanno soluzioni razionali (quindi il discriminante è un quadrato perfetto)?
- Se approssimiamo $f'(x_0)$ con la pendenza media di $f(x)$ in $[x_0-h, x_0+h]$

  $$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

  come varia l'errore in funzione di h?
- Se approssimiamo l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ mediante la somma

  $$\sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x$$

  dove $\Delta x:=(b-a)/n$, che errore commettiamo al crescere di n?
- ...

Chi è il futuro insegnante di matematica?

Penso al futuro insegnante di matematica come ad un insegnante che abbia una certa consapevolezza critica nei confronti dei tabù della nostra disciplina, che sia anche capace di inventare nuovi simboli, capace di guardare alla matematica senza reverenza e senza sudditanza, capace di piegare le tecnologie alla propria fantasia e alla fantasia degli studenti. Penso ad un insegnante curioso e aggiornato, che legge le riviste di didattica della matematica, che non si affida ciecamente al libro di testo, che studia e propone le applicazioni della matematica in altre discipline, che sa mostrare ai propri studenti la matematica all'opera, nei fatti. Penso ad un insegnante capace di comporre un proprio curriculum che abbia una struttura, un senso e una coerenza rispetto ai contenuti previsti. Penso ad un insegnante di matematica padrone del proprio destino.

IL COMPUTER IN CLASSE NUOVE STRATEGIE DI INTERVENTO: SPUNTI E RIFLESSIONI PER LA FORMAZIONE E LA PRATICA PROFESSIONALE DELL'INSEGNANTE

Maria Alessandra Mariotti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

1. Introduzione: I cambiamenti indotti dalle nuove technologie

È largamente riconosciuto il potenziale di cambiamento legato all'uso di nuove tecnologie ed in particolare all'uso del Computer in classe. Noss (2001) parla di una generica potenzialità del computer nel campo dell'apprendimento, che lo differenzia da altri tipi di materiale didattico, ad esempio il materiale strutturato più o meno diffuso a livello di scuola elementare. Un aspetto fondamentale, sottolineato da Noss (op.cit.), sta proprio nella plasmabilità del materiale offerto dalle NT che può essere trasformato ed adattato variamente.

"... its potential for such transformative change stems in no small part from its ability to be reconstructed by teachers and learners themselves. This is what Seymour Papert referred to as 'protean' quality of the computer: like Proteus, it can be changed (even change itself) into any number of forms.[24]"

(Noss, 2001, p.22).

In questo senso la presenza di NT arricchisce l'ambiente nel quale allievi ed insegnanti interagiscono ampliando le possibilità di esperienze significative dal punto di vista dell'apprendimento. Tutto questo offre un'opportunità nuova di ripensare l'azione didattica. È su questo aspetto di stimolo alla riflessione offerto dalle Nuove Tecnologie che desideriamo soffermarci nel seguito.

2. Il computer e i contenuti matematici

Molti studi sono stati dedicati al rapporto tra nuovi strumenti e contenuti matematici: si è cercato di individuare le potenzialità dei diversi prodotti disponibili in termini di obiettivi curriculari. Non intendo soffermarmi su questo punto, ma mi sembra in realtà doveroso ricordare, come osservato da Paola (2001), che le ottimistiche previsioni di qualche decennio fa non sembrano essersi avverate. Molte possono essere le cause all'origine di questo mancato sviluppo delle potenzialità inrenti le NT; io vorrei discutere un aspetto che ritengo abbia avuto e continui ad avere un ruolo centrale e che penso meriti di essere adeguatamente approfondito: l'impatto che i nuovi strumenti possono avere sulla gestione della classe ed in particolare sul tipo di interazione tra insegnante e allievi.

Come sembra essere largamente riconosciuto (Bottino & Furinghetti, 1996), l'uso delle nuove tecnologie porta a dei cambiamenti in termini metodologici. Basti

---

[24] gran parte del suo potere di trasformarsi sta nella possibilità di essere ricostruito dall' insegnante e degli allievi stessi. Seymour Papert chiamava questa la qualità proteiforme del computer: come Proteo, può essere cambiato (e cambiarsi esso stesso) in innumerevoli forme.

pensare al fatto che in labortorio la lezione frontale è si solito sostituita dal lavoro a gruppi. In questo caso si tratta spesso di un effetto banale, dovuto al numero dei computer disponibili che quasi mai è sufficiente a permettere un uso individuale. Ma si possono avere cambiamenti più sostanziali, seppure forse meno evidenti.

A questo proposito, possiamo citatare alcuni dati interessanti tratti da uno studio recente di Ruthven & Hennessy (2002) compiuto su un campione consistente di insegnanti del Regno Unito. L'analisi svolta dagli autori descrive un quadro di idee condivise dagli insegnanti riguardo ad un uso efficace di risorse informatiche come supporto all'insegnamento. Naturalmente, i risultati mostrano grandi differenze tra scuole, per quanto riguarda la disponibilità di attrezzature ed in generale l'organizzazione dei laboratori, ma è possibile individuare alcuni elementi ricorrenti che vengono ritenuti alla base del successo nell'utilizzazione delle NT.

In alcuni casi sono emersi, tra gli altri, aspetti più specificamente pedagogici che sottolineano le possibilità offerte da ambienti informatici; da un lato, le nuove tecnologie sono viste come promotrici di attività di esplorazione e dall'altro come aiuto per attività di pratica e rinforzo. È interessante notare come le potenzialità legate alle attività di esplorazione siano viste spesso in relazione alla possibilità offerta dal computer di evitare l'esecuzione di compiti di routine, o lungaggini relative alla scrittura.

Lo studio citato non si limita ad elencare i possibili cambiamenti osservati, ma descrive un'evoluzione nell'uso delle NT da parte degli insegnanti. All'inizio, l'uso di NT sembra essere visto dagli insegnanti attraverso la lente della propria pratica corrente. In altri termini, quando se ne decide l'uso, si tende ad adattarlo a quanto si è sempre fatto. Ma anche in questo primo stadio, è possibile osservare dei cambiamenti nella metodologia didattica; principalmente, e questo è chiaramente suggerito da alcuni insegnanti, i mutamenti avvengono in relazione all'aiuto che si riceve per creare condizioni di classe ritenute favorevoli ad ottenere i propri obiettivi didattici. È questo il caso del supporto dato per promuovere situazioni di esplorazione e ricerca, ma anche per situazioni in cui compiti di routine abbiano funzione di consolidamento. In questo senso, le NT vengono accettate ed introdotte in quanto supportano e consolidano forme di pratica già ben stabilizzate, ma contemporaneamente possono dar luogo a fenomeni inattesi. Ad esempio, come conseguenza di attività di bricolage degli allievi, l'insegnante può essere indotto a prendere coscienza di particolari comportamenti degli allievi e di conseguenza a ripensare certi aspetti della propria pratica, e se non a cambiarli, almeno a problematizzarli. La metafora usata dagli autori è quella "della leva e del fulcro'; le NT possono fungere sia da leva, ovvero rendere più efficienti pratiche già consolidate, sia da fulcro, ovvero riorientare la pratica, sviluppando nuove concezioni pedagogiche (op.cit.,p. 85).

Molto spesso, dunque, la presenza e l'uso di nuovi strumenti sembrano suggerire la reilaborazione di strategie didattiche, che tengano conto delle potenzialità offerte, mantenendo ben in vista gli obiettivi educativi e domandandosi se ne emergano di nuovi, fino ad ora non presi inconsiderazione.

Naturalmente, l'indagine si riferisce ad un campione di insegnanti di un altro paese e che comunque considerano efficace l'uso di NT. Mancano dati analoghi relativi al nostro paese, e soprattutto mancano dati relativi a coloro che invece ritengono inutile o perfino dannoso l'uso di strumenti tecnologici nelle proprie classi.

3. *Quale modello pedagogico*

Come mostra lo studio di Ruthven & Hennesy (op. cit.) l'introduzione in classe e l'uso di un nuovo strumento tecnologico può presentari e svilupparsi in modo assai diverso e tale diversità si osserva in relazione al sistema di pratiche e di concezioni di ciascun insegnante. Il fatto non è così sorprendente: diversi modelli pedagogici prevedono rapporti profondamente diversi tra gli elementi del sistema didattico (allievi, insegnante, sapere). In parrticolare, passando da un modello all'altro, cambia il ruolo e l'azione dell'insegnante in rapporto all'uso che fa dello strumento tecnologico, ma cambiano anche i ruoli e le azioni degli allievi.

4. *L'uso degli strumenti in modelli pedagogici diversi*

Non è possibile, nello spazio di una presentazione, descrivere i diversi scenari che possono darsi a seconda dei diversi modelli pedagogici che soggiacciono all'intervento didattico. Tanto meno è possibile addentrarsi in una discussione sulle potenzialità e i limiti di ciascun modello. Ci limiteremo per semplicità a considerare tre possibili tipologie di modelli; per i primi due daremo qualche esempio, mentre, sulla base delle esperienze fatte in questi anni dal nostro gruppo di ricerca, approfondiremo le potenzialità del terzo modello.

4.1 Il modello della trasmissione

Consideriamo il modello pedagogico più tradizionale, lo chiameremo Modello della Trasmissione. Secondo tale modello, il processo di insegnamento/apprendimento si articola in due fasi fondamentali, nelle quali le responsabilità sono rigidamente distribuite tra insegnante e allievi; la prima fase, la spiegazione, compete all'insegnante, mentre la seconda, l'applicazione, compete all'allievo. La spiegazione consiste generalmente in un lungo monologo, mediante il quale l'insegnante introduce idee e procedure che l'allievo dovrà memorizzare. Per quanto riguarda invece l'applicazione, una volta memorizzate le informazioni avute nella fase precedente, l'allievo deve reinvestirle rispondendo adeguatamente a determinate consegne.

Nella prima fase, il modo più naturale di inserire un nuovo "strumento tecnologico" sembra essere quello di aggiungerlo ai supporti già utilizzati; in particolare, si passerà ad un nuovo strumento quando quest'ultimo appare come potenziamento degli strumenti classici, già utilizzati dall'insegnante nella spiegazione.

Ad esempio, consideriamo lo strumento più classico : la lavagna. L'introduzione del computer si può facilmente inserire in quanto si configurerà come una **lavagna potenziata**.

Lavagna dotata di movimento, come nel caso del software Cabri: ovvero, una lavagna sulla quale si fanno disegni più precisi o geometricamente corretti, ma soprattutto in movimento.

Es. Una volta trattato il teorema X se ne **mostra** una esemplificazione in Cabri.

Lavagna sulla quale si eseguono automaticamente calcoli numerici o simbolici, ovvero sulla quale appaiono i risulatati dell'esecuzione di comandi, attivati premendo una succesione di tasti.

Es. Manipolazione simbolica attraverso l'uso di Derive o calcolo di un limite con Derive

Combinazione dei due tipi precedenti di lavagna: è il caso ad esempio delle calcolatrici grafiche come la TI92.

Es. Si calcolano tabelle numeriche, si tracciano grafici ... e in questo modo si illustra agli allievi alcuni aspetti di quanto è stato trattato a lezione.

Le capacità illustrative sono enormemente potenziate, sia in termini di velocità che di precisione. Il tracciamento del grafico di una funzione è immediato, con in più la possibilità di osservare come variano le carateristiche del grafico al variare di determinati parametri. Anche per quanto riguarda la geometria, la possibilità per l'insegnante di mostrare una ricca collezione di esempi, in un tempo relativamente breve, costituisce la caratteristica più saliente del "potenziamento" rispetto alla lavagna tradizionale.

Se l'integrazione dello strumento nella pratica dell'insegnate è possibile, e senza particolari adattamenti metodologici, non altrettanto può dirsi per quanto riguarda la pratica dell'allievo; nel modello della trasmissione, non sembra esserci molto spazio per l'uso dello strumento da parte dell'allievo, in particolare nella fase di applicazione delle informazioni apprese. In effetti, raramente viene lasciata libera iniziativa agli studenti nell'utilizazione di un software ed ancor meno nella scelta del software da usare. Coerentemente, tenuto conto che gran parte delle consegne classiche risultano banalizzate dall'uso di strumenti tecnologici, quali una calcolatrice grafica, tali strumenti sono di solito esclusi dalle prove di valutazione (Bottino & Furinghetti, 1996).

I cambiamenti che uno strumento tecnologico può portare nel quadro del modello tradizionale della trasmissione, risultano abbastanza limitati e sembrano non affrontare in modo diretto le difficoltà degli allievi. Osserviamo, solo di passaggio, che il problema del rapporto tra immagini e concetti, così drammatico in geometria (Mariotti, 1992,1995) non svanisce nell'uso di un software di geometria dinamica. Anzi, il problema può risultare amplificato, vista la complessità maggiore del sistema di rappresentazione, che richiede una interpretazione non del tutto spontanea del movimento in termini di relazioni logiche in geometria.

4.2 Il modello costruttivista

Consideriamo il Modello Costruttivista, secondo il quale l'apprendimento ha come elemento centrale l'attività del soggetto che, attraverso l'interazione con l'ambiente e nella soluzione di situazioni problematiche, costruisce le proprie conoscenze. In questo caso, l'introduzione delle nuove tecnologie coincide con la loro integrazione nel contesto, come elementi chiave delle situazioni problematiche. Uno strumento tecnologico contribuirà a mettere a punto situazioni didattiche nelle quali l'allievo possa costruire conoscenze nuove. In altri termini, un nuovo strumento può divenire elemento generatore di situazioni problematiche, nelle quali nuovi schemi risolutivi divengono la base per la costruzione di nuove conoscenze; naturalmente, tali schemi sono imperniati sull'uso efficace del particolare apparato tecnico, ad esempio del sistema di comandi disponibili.

Secondo questo modello pedagogico, la nozione chiave è quella di micromondo (Papert, 1980; Noss & Hoyles, 1997, Balacheff & Kaput, 1996).

La letteratura corrente in didattica della matematica ha descritto molti esempi di uso di micromondi; esempi significativi sono descritti a proposito di Excell (Lemut, 2001). L'uso del foglio elettronico è descritto per avviare all'algebra, in particolare in riferimento alle difficoltà che si incontrano nella messa in formule di un problemao nella comprensione dell'idea di soluzione di un'equazione. Esempi classici sono diventati quelli riferiti a Cabri: situazioni di esplorazione e soluzione di problemi geometrici come introduzione a concetti o procedure (Laborde & Capponi, 1994) .

Non di meno, se usciamo dall'ambito della ricerca e ci spostiamo nella realtà della pratica scolastica, questo modello trova un impiego molto più raro e questo corrisponde a difficoltà intrinseche del modello stesso.

In realtà, i processi di astrazione e generalizzazione, che emergono dalle attività svolte all'interno di un micromondo non sempre risultano soddisfacenti rispetto alle attese. I problemi maggiori sembrano essere legati al fenomeno solitamente definito come astrazione in situazione ("situated abstraction" Noss & Hoyles, 1997). Una soluzione e il processo ad essa connesso, che pur avrebbero valenza generale, vengono ad essere strettamente legati al problema posto, ma soprattuto all'ambiente particolare (ad esempio l'ambiente di lavoro di una calcolatrice grafica) nel quale l'attività didattica ha avuto luogo. In questo modo, attraverso le attività svolte all'interno dei micromondi, è possibile trovarsi di fronte a notevoli discrepanze se si confrontano gli obiettivi didattici curriculari con le conoscenze costruite effettivamente dagli allievi.

Difficoltà particolari si incontrano quando si considera ambienti complessi, come ad esempio quelli offerti da una calcolatrice grafica. L'azione e l'interazione in questi mondi artificiali risulatano molto complessi, soprattutto risulta difficile prescindere da una fase di familiarizzazione con il funzionamento di base dello strumento e da una fase di acquisizione di adeguati schemi d'uso necessari per ottenere i prodotti voluti[25]. Inoltre, la sofisticazione matematica soggiacente a tale funzionamento può dar luogo ad un circolo vizioso che rende impossibile l'emergere di conoscenze significative (Lagrange, 2000).

In ogni caso il punto cruciale resta il seguente. È possibile, e se è possibile come, coordinare le due tendenze, spesso in conflitto: da un lato, l'autonomia dello studente nel costruire il proprio sapere a partire dalle esperienze vissute nell'interazione con il micromondo, dall'altra, l'autorità del sapere matematico, inteso come prodotto culturale e quindi difficilmente negoziabile.

4.3 Modello storico culturale

Consideriamo infine Modello Storico Culturale, basato sull'ipotesi che l'insegnamento e l'apprendimanto siano processi inscindibili e che educare, inteso come costruzione sociale della conoscenza, significhi appropriazione di **processi/prodotti** storicamente determinati. In questo caso le NT sono intese come artefatti/strumenti in senso lato e come tali sono interpetate in accordo con l'idea Vygotskiana di mediazione semiotica. In altri termini, secondo la prospettiva storico culturale si tratterà di modellare il processo di insegnamento/apprendimento centrandolo sull'uso delle nuove tecnologie, intese come particolari artefatti prodotti della cultura e come tali potenziali mediatori di significati cuturalmente rilevanti.

La sezione seguente è dedicata ad approfondire questa prospettiva, in particolare cercheremo di elaborare l'idea di strumento come strumento di mediazione semiotica in riferimento al sapere matematico.

---

[25] Lo studio di Rabardel su questi aspetti risulta molto interessante (Rabardel, 1995).

5. *Il computer come strumento di mediazione semiotica*

Il quadro di riferimento della teoria di Vygotsky risulta particolarmente utile per l'analisi cognitiva della funzione di uno strumento, ed in particolare di uno strumento tecnologico, nella costruzione di conoscenze. Tale analisi può essere condotta elaborando l'idea chiave di "mediazione semiotica (Vygotskij, 1978).

Secondo tale teoria, il fatto che uno strumento incorpori un sapere, lo rende utilizzabile secondo una doppia funzione: da un lato l'uso dello strumento permette di portare a termine un particolare compito di carattere pratico, dall'altro uno strumento offre a chi lo usa una via di accesso proprio a quel sapere che in esso è stato incorporato e ne determina l'efficacia.

In virtù di questa duplice funzione, l'uso di uno strumento può rivelarsi di estrema utilità in ambito educativo; al di là del suo impiego nella soluzione di problemi pratici, esso può fornire un utile supporto nella costruzione di significati, in particolare significati pertinenti rispetto agli obiettivi didattici e disciplinari che l'insegnante si pone.

Esempi di questa funzione sono discussi anche nella conferenza di Bartolini Bussi, intendiamo qui presentare il caso particolare di strumenti tecnologici quali il computer, o meglio particolari micromondi. In effetti, per ogni strumento, si rende necessaria un'analisi particolare, per definire in modo chiaro le sue potenzialità educative e per costruire una ingegneria didattica conseguente (Mariotti, 2002a).

6. *Un approccio strumentale ai micromondi*.

Un software didattico costruito come un "micromondo" (Noss & Hoyles, 1997) costituisce un esempio molto particolare di strumento. In questo caso un sapere è stato incorporato nello strumento, ma tale sapere è direttamente legato ad una particolare disciplina; inoltre, l'interazione tra allievo e strumento avviene nel quadro delle attività scolastiche.

Il rapporto tra lo strumento e il sapere di riferimento deve essere considerato nel quadro educativo in quanto utilizzato dall'insegnante secondo i propri fini educativi; il sapere è da intendersi in quanto materia scolastica (ad esempio la matematica da insegnare) e l'uso è da intendersi come il sistema di modalità con le quali lo strumento può essere integrato nella pratica scolastica. La figura 1 offre una possibile sintesi del processo educativo.

Ogni strumento tecnico è stato costruito secondo una conoscenza specifica, che assicura la realizzazione di certi obiettivi , in questo senso può essere usato da un allievo secondo schemi di utilizzazione propri, al fine di ottenere uno specifico risulatato.

L'approccio Vygotskiano offre un elemento in più a questa analisi. Un artefatto/strumento può, nell'interazione sociale a scuola e sotto la guida dell'insegnante, assumere un'altra funzione, collegata con l'intenzione di insegnare: *esso può mediare significati matematici relativi alla conoscenza che vi è incorporata.* Ad esempio, se consideriamo uno strumento complesso come Cabri possiamo considerare certe conoscenze relative alle proprietà geometriche delle figure, come conoscenze incorporate nello strumento. Tali conoscenze, da un lato permettono a chi usa lo strumento Cabri di ottenere determinati prodotti (ad esempio una collezione molto ampia di disegni precisi, o un'immagine dinamica che illustra un teorema famoso), dall'altro tali conoscenze possono essere richiamate ed esplicitate facendo riferimento all'uso del software o semplicemente a taluni dei suoi comandi. Ad esempio, il comando "perpendicolare" non solo permette di costruire una retta perpendicolare ad una retta data, ma evoca la proprietà di perpendicolarità e la sua definizione all'interno della geometria.

Gli elementi di conoscenza incorporati non necessariamente vengono identificati da chi utilizza un artefatto. Come si usa dire, lo strumento in sé può risultare *opaco* per questi saperi, ma l'attività che si svolge con esso risulta fondamentale, perché esso divenga *trasparente*. Usando un dato strumento certamente si costruiscono significati legati ad esso ed ai segni che ne derivano, ma la transizione ai significati matematici che rappresentatno l'obiettivo didattico necessita di un'ulteriore fase, nella quale l'insegnante interviene e usa lo stumento come mediatore semiotico secondo i propri fini didattici.

L'analisi didattica di un artefatto/strumento, in accordo con il costrutto teorico della mediazione semiotica, non può quindi prescindere dalla analisi del ruolo dell'insegnante[26] che "forza" la ricostruzione consapevole degli elementi di conoscenza in esso incorporati.

Infattti, i due piani, quello del soggetto e quello della società /cultura non sono in comunicazione diretta; in fig. 1, la freccia che rappresenta il passaggio dal piano culturale al piano individuale, non corrisponde in genere ad un canale di comunicazione sempre attivo e 'immediatamente' disponibile per l'allievo. Il rapporto tra i due piani è in genere mediato dall'interazione con altri, come sostiene Vygotsky, lo sviluppo cognitivo si attua nel passaggio dal piano interpersonale al piano intrapersonale.

---

[26] La funzione dell' insegnante si esplica attraverso scelte a priori (es. scelta dell' artefatto e pianificazione delle consegne) o scelte in situazione (es. modalità di interazione con gli allievi).

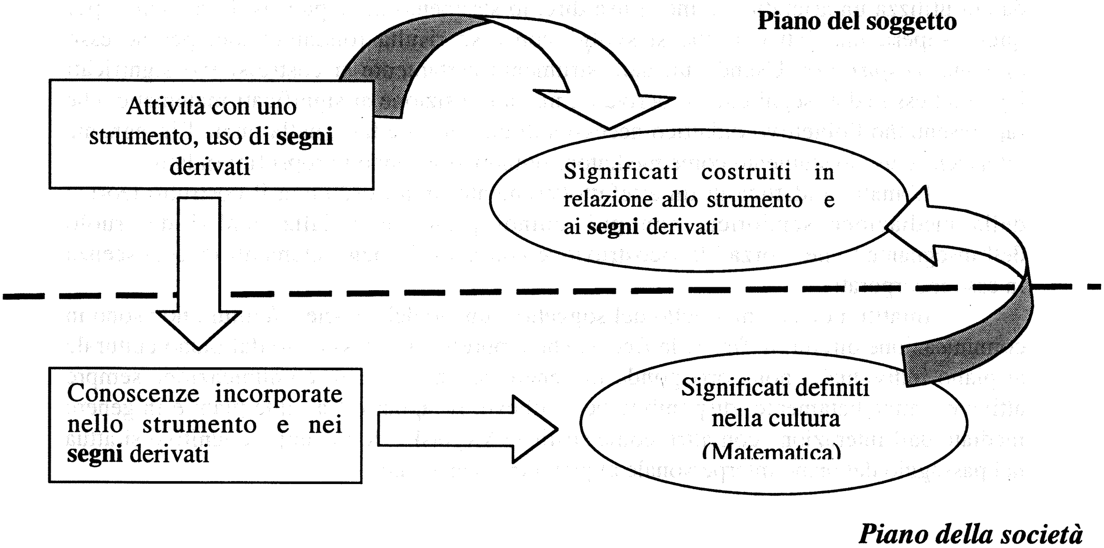


Figura 1 Modello del processo educativo mediato da artefatti

E' in questo passagio che uno strumento assume ruoli diversi, mentre il suo funzionamento viene finalilzzato a scopi diversi a seconda di chi ne fa uso. Lo stesso artefatto può allora assumere il ruolo di *strumento* se usato dall'allievo nella propria attività di soluzione di problemi, ma anche assumere il ruolo di *strumento di mediazione semiotica*, se usato dall'insegnante per introdurre un significato matematico. In particolare, quando l'insegnante ne diventa l'utilizzatore, l'obiettivo dell'azione mediata dallo strumento si sposta .

Quando il soggetto usa uno strumento o ne parla, il processo di costruzione di significati e concetti relativi è 'spontaneo', ma secondario, ovvero non costituisce l'obiettivo dell'attività.

In particolare, il riferimento esplicito a conoscenze matematiche non è l'obiettivo dell'attività, le azioni sono piuttosto certate sull'uso dello strumento come mezzo per risolvere un determinato problema, ovvero ottenere un determinato prodotto.

Quando l'insegnante usa lo strumento (o i segni derivati, parole, gesti o disegni) come strumento di mediazione semiotica, l'obiettivo dell'attività si sposta e diventa proprio il riferimento esplicito a conoscenze matematiche. Inizia così un'attività che ha come obiettivo il mettere in relazione significati e concetti costruiti nell'attività di soluzione di problemi, con significati e concetti matematicamente accettabili, in altri termini rendere esplicito il rapporto con un sapere matematico culturalmente definito.

6. Cabri e la Geometria

Da alcuni anni è stata sviluppata una sperimentazione, coerente con il modello appena delineato (Mariotti, 1996; 1998; 2001;2002). Nella sperimentazione sono state coinvolte alcune classi del primo biennio dalla scuola superiore, in particolare del Liceo Scientifico e del Liceo Classico.

L'obiettivo didattico generale è quello di introdurre gli allievi alla dimostrazione e l'ipotesi di fondo riguarda l'uso del micromondo Cabri – géomètre come "strumento di mediazione semiotica". In particolare, determinati elementi del micromondo funzionano come segni esterni che rimandano a significati specifici, relativi all'idea di Teorema (enunciato, dimostrazione, teoria)

La teoria geometrica, soggiacente al micromondo Cabri, è evocata dai fenomeni osservabili (nell'azione del soggetto e nella retroazione del software), così come dai diversi comandi. Questi elementi dunque possono essere considerati segni che si riferiscono alla teoria Geometrica[27], e in virtù di queste loro proprietà divengono potenziali strumenti di mediazione semiotica, disponibili all'insegnante nella pratica didattica con l'obiettivo di introdurre gli allievi al pensiero teorico.

Le Figure di Cabri che realizzano figure geometriche;

I Comandi di Cabri (primitive e macro), che realizzazno le relazioni geometriche che caratterizzano le figure;

La funzione trascinamento che fornisce un controllo percettivo della correttezza di una costruzione, controllo percettivo che corrisponde al controllo teorico coerente con la teoria geometrica.

Il processo educativo centrato sull'uso di un artefatto e sulle potenzialità di tale artefatto in termini di mediazione semiotica, comporta una notevole complessità e si articola in un sistema di attività tra loro interrelate, tra le quali ha un ruolo chiave l'attività di Discussione Matematica , introdotta da Bartolini Bussi (1991).

Non è possibile sviluppare questo esempio, rimandiamo per questo ai riferimenti già dati all'inizio di questa sezione.

Conclusioni

Come già accennato, lo studio di Ruthven & Hennesy (2002) sottolinea l'importanza del sistema di pratiche e di concezioni che ciascun insegnante ha, rispetto all'introduzione di nuovi strumenti; in altri termini, come più volte osservato il sistema di convinzioni (Zan, 2000) dell'insegnante, sia rispetto alla matematica che al modo di insegnarla, sembra funzionare da 'filtro' per l'utilizzazione della NT in classe. E in questo senso, l'uso in classe delle NT può fonire una via di accesso alle convizioni degli insegnanti riguardo alla matematica ed al suo insegnamento, per usare la metafora di Noss & Hoyles (1997), il computer può fornire una interessante 'finestra' sull'insegnante.

---

[27] In letteratura corrente tali elementi sono indicati come Evocative Computational Objects (Hoyles & Noss, 1996, p. 68) e sono caratterizzati dalla loro natura computazionale a del loro potere evocativo in rapporto al sapere matematico

Ma quello che sembra interessante è il fatto che la presenza e la necessità di integrare un elemento nuovo nella pratica didattica può funzionare da catalizzatore, innescando proficui processi di riflessione sul proprio intervento, sui propri modelli pedagogici impliciti e sulla disciplina stessa. La complessità dei nuovi strumenti in rapporto alla disciplina, la ricchezza di potenzialità offerte, impone una riflessione attenta da parte dell'insegnante che non può non coinvolgere in modo globale le sue convizioni in senso ampio.

In altri termini, la presenza di un nuovo strumento in classe, induce l'insegnante a trasformazioni che hanno ripercussioni non solo sul piano dell'azione, ma anche sul piano della consapevolezza del proprio operato.

Un'indagine approfondita su questo tema sembra non essere ancora disponibile, ci promettiamo di intraprenderla riconoscendo che potrebbe essere di grande interessante per fornire strumenti utili alla progettazione di interventi formativi.

Bibliografia

Balacheff, N., & Kaput, J.J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics In Bishop, A.J. et al., *International Handbook of mathematics education* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Accademic Publishers

Bartolini Bussi M. G. (1991), Social Interaction and Mathematical Knowledge, in Furinghetti F. (ed.) *Proc. of the XV PME Int. Conf.*, vol. 1, pp. 1-16, Assisi, Italia.

Bartolini Bussi M. G. (1996), Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 31 (1-2), 11-41.

Bottino, R. & Furinghetti, F. (1996) The emerging of teachers' conceptions of new subjects inserted in mathematics programs: the case of informatics, *Educational Studies in Mathematics,* pp. 109- 134

Engeström, Y. (1990) *Learning, working and imagining*, Helsinki

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un mileu puor l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactiques des mathematiques,* 14, (1.2), 165-210.

Lagrange, J.B. (2000) L'integration d'instruments informatiques dans l'ensegnement: une approche par le techniques, *Educational studies in mathematics*, 43, 1, pp. 1-30.

Lemut, E. (2001) La tecnologia nell'approccio all'algebra tra i 12 e i 15 anni, *Atti del convegno TED*, Genova, pp. 244-51.

Mariotti M. A. (2002a) Influence of technologies advances on students' math learning, in English L., Bartolini Bussi M. G., Jones G., Lesh R., & Tirosh D. (eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education,* Lawrence Erbaum Associates.

Mariotti M.A. (1998) Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore, in corso di pubblicazione su *L'ins. della mat. e delle Sci. int.* 21B, pp. 209-252

Mariotti M.A. (2001) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics* 44, 1&2, pp. 25 – 53.

Mariotti, M. A. (2002b) Justifying and prooving in the Cabri environment, *International Journal of Computers for mathematical learning*

Mariotti, M.A. (1992), Immagini e concetti in geometria, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, **15**, n. 9, pp. 863 -885.

Mariotti, M.A. (1995), Le rappresentazioni grafiche e l'apprendimento della geometria in B. D'Amore, *Insegnare ad apprendere la matematica in Aula: situazioni e prospettive,* Bologna, Pitagora, pp. 47 -58.

Mariotti, M.A.(1996) Costruzioni in geometria, su *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 19B, n.3, pp. 261 - 88.

Noss R. & Hoyles C. (1997) *Windows on mathematical meanings (learning cultures and computers).* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Noss, R., 2001, For a learnable mathematics in the digital culture, in *ESM*, 48, n. 1, pp. 21-46.

Paola, D. (2001) Nuove tecnologie e innovazione curriculare. Uno sguardo al passato peer cercare di delineare le prospettive. *Atti Convegno TED*, Genova, pp. 251 – 256.

Papert S. (1980) *Mindstorms. Children, computers, and powerful ideas.* New York: Basic Books.

Pontecorvo, C. , Aiello, A.M.& Zucchermaglio, C. (1991) *Discutenado di impara*, La Nuova Italia. Roma

Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: A. Colin,.

Ruthven, K. & Hennessy, S. (2002) A practitioner model of the use of copmuter-based tools and resurces to support mathematics teaching and learning, *Educational Studies in Mathematics,* 49, pp. 47-88.

Vygotsky L.S. (1987) *Il processo cognitivo*. Boringhieri, Torino.

Zan, R. (2000) 'L'insegnante come solutore di problemi', *La matematica e la sua didattica*, n.1, p. 48-71.

L. Cremona, G. Vailati e C. Segre
Tre diversi approcci al problema dell'insegnamento della matematica fra '800 e '900

Livia Giacardi
Dipartimento di Matematica - Università di Torino

1. L'Ottocento, secolo straordinario per gli sviluppi della matematica, vede anche il diffondersi in tutta Europa di una forte presa di coscienza dei problemi connessi con l'insegnamento, problemi che diventano oggetto di dibattito sistematico a livelli differenti e in più settori. Innanzitutto si elabora una legislazione scolastica che non solo regoli l'organizzazione della scuola, ma fornisca anche indicazioni di metodo sull'insegnamento delle singole discipline. Inoltre, la ricerca sui fondamenti della matematica crea a fine Ottocento un fronte comune tra matematica elementare e ricerca avanzata. Alcuni dei matematici più attivi nei vari settori della ricerca si impegnano in prima persona nella politica culturale, nell'elaborazione di una legislazione scolastica adeguata, nella formazione degli insegnanti e nella preparazione dei manuali per la scuola. In Italia, come pure in ambito internazionale, si assiste a un fecondo interscambio tra scuola secondaria e università: spesso i docenti universitari iniziano la loro carriera come professori di scuola secondaria (per es. Cremona, Betti, D'Ovidio, De Paolis) e viceversa i migliori docenti di scuola secondaria svolgono corsi all'università (per es. Lazzeri, Faifofer, Bettazzi, Vailati) portando così nel loro lavoro quotidiano di insegnamento l'esperienza acquisita nei due differenti livelli.

Gli effetti non tardano a farsi sentire. Nasce una trattatistica prettamente italiana, si creano le Scuole di Magistero (1875) per la formazione del corpo docente e fioriscono riviste specializzate dedicate espressamente all'insegnamento della matematica. Fanno inoltre la loro comparsa le prime associazioni di insegnanti: nel 1895-96 Rodolfo Bettazzi fonda a Torino la *Mathesis* con lo scopo preciso di realizzare «il miglioramento della scuola ed il perfezionamento degli insegnanti sotto il punto di vista scientifico e didattico» e nel 1908 durante il IV Congresso internazionale dei matematici, si costituisce a Roma la Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico.

Fra i matematici che nella seconda metà dell'Ottocento e nei primi anni del Novecento si occupano dei problemi dell'insegnamento, Cremona, Vailati e Segre possono essere in certa misura considerati esemplari di tre diversi approcci.

Luigi Cremona (Pavia 1830-Roma 1903), principale artefice del rifiorire degli studi geometrici in Italia, si impegna in prima persona nella riforma dei programmi di matematica, preoccupandosi anche di fornire indicazioni di carattere metodologico. È infatti Cremona l'ispiratore del decreto Coppino del 10 ottobre 1867 che ripristina gli *Elementi* di Euclide come libro di testo nei ginnasi e nei licei. Il suo obiettivo è, da un lato, quello di impedire il proliferare di testi scadenti e di dare l'avvio a una trattatistica di buon livello prettamente italiana e, dall'altro, quello di preparare in modo adeguato sia i giovani che si dedicheranno alla ricerca scientifica, sia la futura classe dirigente.

Anche Giovanni Vailati (Crema 1863 - Roma 1909), prendendo parte ai lavori della Commissione Reale per la riforma della scuola secondaria (1905-1909), si occupa di legislazione scolastica, ma il suo interesse per i problemi della scuola, e dell'insegnamento della matematica in particolare, presenta caratteri assai diversi rispetto a Cremona. Risente della sua complessa e variegata formazione culturale, della collaborazione con Giuseppe Peano, degli stimoli che gli vengono dalle amicizie con gli intellettuali torinesi di fine secolo e dell'adesione al pragmatismo. Diversa quindi la sua formazione e diversa la sua esperienza di insegnamento - incomincia a insegnare all'università e poi si rivolge alla scuola secondaria - e diverse le motivazioni che lo guidano. A Vailati non importa tanto di formare il futuro ricercatore, quanto di formare l'uomo.

Corrado Segre (Saluzzo 1863 - Torino 1924), ricercatore puro e fondatore della scuola italiana di geometria algebrica, pur non avendo esperienza di insegnamento secondario, ritiene tuttavia importante dedicare parte delle sue energie alla formazione degli insegnanti. Nei 19 anni di insegnamento alla Scuola di Magistero annessa alla Facoltà di Scienze matematiche fisiche e naturali di Torino, egli non si limita, come molti suoi colleghi, a sviluppare temi di matematiche elementari da un punto di vista superiore, ma fornisce ai futuri insegnanti anche indicazioni metodologiche e didattiche che, se da un lato scaturiscono dall'esperienza personale e sono legate al suo modo peculiare di fare ricerca, dall'altro sono il frutto di un'attenta disamina dei più recenti orientamenti didattici e delle problematiche che andavano dibattendosi all'epoca nei vari paesi europei.

Se Cremona, pur con evidenti pecche e esagerazioni, ha il merito di sbloccare la situazione di inerzia in cui languiva la scuola italiana, Segre, con il tacito lavoro di anni forma generazioni di insegnanti infondendo in loro il gusto dell'insegnamento e la coscienza dell'importanza della propria disciplina, e Vailati, con le sue riflessioni che coinvolgono epistemologia, metodologia e psicologia, apre la strada a un modo scientifico di affrontare i problemi della didattica della matematica. Tutti e tre, pur partendo da presupposti diversificati e percorrendo strade differenti, sono accomunati da un forte e appassionato spirito di servizio nei confronti della Scuola e offrono un esempio che, oggi più che mai, può costituire un monito e uno stimolo per tutti coloro che, a vari livelli si dedicano alla formazione dei giovani.

2. *Luigi Cremona e l'«operazione Euclide»*

Prima di ottenere nel 1860 la cattedra di Geometria superiore a Bologna, Cremona aveva insegnato per alcuni anni nei ginnasi e nei licei e questa esperienza gli aveva permesso di rendersi conto delle carenze e delle lacune nella preparazione dei giovani che accedevano all'università. È soprattutto a questa situazione che egli intende porre rimedio quando il ministro Michele Coppino nel 1867 lo invita a far parte della commissione per l'elaborazione dei nuovi programmi per la scuola secondaria. Sia nel redigere il programma di matematica, sia nel preparare le indicazioni di tipo metodologico che lo accompagnano, Cremona è guidato dalla convinzione che lo studio della matematica debba essere «un mezzo di coltura generale, una ginnastica del pensiero diretta a svolgere la facoltà del raziocinio e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza». Di qui trae origine la sua scelta di ritornare a insegnare la geometria con il metodo euclideo e di ripristinare come libro di testo nei ginnasi e nei licei gli *Elementi* di Euclide «che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore». Infatti:

«Insegnata col metodo degli antichi - egli scrive - la geometria è più facile e più attraente che non la scienza astratta dei numeri. ... Si raccomanda al docente che si attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio. Soprattutto non intorbidi la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete ... le loro misure»[28].

Trascorso appena un anno dall'entrata in vigore della riforma Coppino, vede la luce il volume *Gli Elementi d'Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi* (1868). Per quanto fra i curatori non figuri Cremona, è lui il vero artefice dell'opera, coadiuvato da un professore di Pavia, Giacomo Platner, come risulta dalla ricca corrispondenza con Betti che costituisce un documento prezioso per ricostruire i retroscena e la genesi di quest'opera e il ruolo preminente giocatovi da Cremona[29]. Lo scopo che si erano prefissi gli autori era quello di fornire agli insegnanti un testo conforme ai nuovi programmi e metodi, di fare un libro elementare prettamente italiano e di «sbandire innumerevoli libercoli, compilati per pura speculazione, che infestavano appunto quelle scuole dove è maggiore pei libri di testo il bisogno del rigore scientifico e della bontà del metodo»[30]. Già alcuni anni prima, in una lunga memoria dedicata alla storia della geometria, Cremona scriveva:

«Ora che il giogo straniero non ci sta più sul collo a imporci gli scelleratissimi testi di MOZNIK, TOFFOLI, ecc., che per più anni hanno inondate le nostre scuole, e le avrebbero del tutto imbarbarite se tutt'i maestri fossero stati docili a servire gl'interessi della ditta GEROLD - ora sarebbe omai tempo di gettare al fuoco anche certi libracci di matematica. ... Diciamolo francamente: *noi* non abbiamo buoni libri elementari che siano originali italiani»[31].

Inoltre Cremona e i suoi collaboratori intendevano combattere l'impostazione metodologica degli *Éléments de Géométrie* di Adrien Marie Legendre (1752-1833) e, in particolare, l'uso dichiarato che egli fa dell'aritmetica e dell'algebra nella trattazione geometrica, aspetto questo che viene esasperato da A. Blanchet nella sua edizione ampliata degli *Éléments* e dai vari traduttori e imitatori italiani:

«Perciò dobbiamo lamentare - scrivono Betti e Brioschi nella prefazione al volume - che quell'inimitabile modello di logica e di chiarezza lasciatoci dai Greci negli Elementi d'Euclide sia stato pressoché abbandonato dalle nostre scuole, e siansi invece introdotti e raccomandati libri, nei quali esagerandosi il metodo di Legendre, al rigore del

---

[28] Cfr. *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, 24 ottobre 1867. Per una trattazione più ampia sul decreto Coppino e sul dibattito che seguì, cfr. L. Giacardi, *Gli Elementi di Euclide come libro di testo. Il dibattito di metà Ottocento in Italia,* in *Conferenze e seminari, 1994-1995*, Associazione Mathesis e Seminario T. Viola, Torino, 1995, pp. 175-188.

[29] R. Gatto, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in M. Menghini (a cura di), *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, vol. 3, Quaderni PRISTEM 9, Palermo 1996, pp. 7-90.

[30] F. Brioschi, L. Cremona, *Al signor Direttore del Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, Napoli* , Giornale di Matematiche, 7, 1869, p. 53.

[31] L. Cremona, *Considerazioni di storia della geometria, in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato a Firenze*, Il Politecnico, 9, 1860, p. 323; *Opere* I, p. 207.

ragionamento si è sostituito il meccanismo del processo aritmetico. La *suprema accuratezza d'Euclide* non è più apprezzata nelle nostre scuole» (p. VI).

Il *Betti-Brioschi* nasce pertanto in contrapposizione a questa impostazione, con lo scopo di educare i giovani al «gusto delle nozioni nettamente determinate» e «all'abitudine del rigore del raziocinio». Gli autori si basano sostanzialmente sull'edizione italiana degli *Elementi* di Euclide di V. Viviani (1690), pur introducendo «modifiche di forma e sostanza» ispirate a altre edizioni, in particolare a quella inglese di R. Simson (1863).

Il testo ripropone, in traduzione italiana, gli *Elementi* di Euclide senza una reale e seria opera di mediazione didattica, né dal punto di vista del linguaggio, né da quello del contenuto. Il linguaggio è quello prettamente euclideo senza nessuna concessione al simbolismo algebrico e talvolta neppure alla chiarezza. I due autori, per esempio, continuano ad usare il termine *retta* per indicare un segmento, o ancora mantengono l'aggettivo euclideo *uguale*anche quando ha significato di equivalente. Per quanto riguarda il contenuto, l'intervento più significativo consiste nella scelta di non inserire i cosiddetti libri aritmetici, il VII, l'VIII e il IX e neppure il X, che contiene la classificazione degli irrazionali. Al momento di affrontare nel libro XII quegli argomenti che comportano l'intervento dell'infinito, i due autori sono pertanto costretti a introdurre come lemma la proposizione euclidea X, 1 indispensabile per utilizzare il metodo di esaustione. A complemento del testo euclideo, inoltre, viene aggiunta un'appendice sulla misura delle figure rettilinee, della circonferenza, del cerchio, dei poliedri e, da ultimo, del cilindro, del cono e della sfera. Per rendere più facile e più agile la trattazione si adottano in questo caso «i metodi, il linguaggio e le notazioni che si trovano adoperate nei libri moderni» (p. 387). I trattati di riferimento sono quelli di aritmetica e di algebra di J.Bertrand e gli *Elemente der Mathematik* di R. Baltzer, di cui Cremona stesso aveva appena pubblicato una traduzione italiana. Al termine di ogni libro Betti e Brioschi offrono un'ampia scelta di problemi e di proposizioni, la cui dimostrazione è lasciata agli allievi come esercizio.

È abbastanza naturale che al suo apparire questo testo abbia provocato molte reazioni: non piaceva agli insegnanti perché troppo ostico nel linguaggio e poco accattivante nella presentazione, non piaceva ai matematici perché vi vedevano un ritorno al passato e dunque una chiusura verso le nuove scoperte nel campo della geometria. Del resto lo stesso Cremona era consapevole, almeno in parte, dei difetti del libro:

«Io sono convinto - scriveva infatti a Betti - che i metodi moderni, specialmente di Steiner e Staudt sono destinati a rinnovare tutto lo scibile geometrico, sin dagli elementi; con quei metodi, anche le cose più elementari possono essere trattate in modo più semplice, più originale, più fecondo. Ma tali metodi non si potranno introdurre nelle scuole sinché non esista un libro elementare, scritto appositamente ... Fino al giorno ancor lontano in cui tale riforma radicale potrà essere attuata, credo che l'Euclide rimarrà sempre la miglior guida per l'insegnamento della geometria nelle Scuole *classiche*. Dicasi quel che si vuole: ma l'Euclide è ancora il sistema più logico, più rigoroso che abbiamo: tutti sistemi posteriori sono ibridi, impuri ... e soprattutto cessano d'essere veri sistemi geometrici. Serva d'esempio il Legendre, che è pure il più rispettabile fra i riformisti della geometria elementare. Ma se poi si pensa ai libri che correvano per le nostre scuole avanti al 1867 e che vi rifluirebbero di nuovo, se si mutassero i programmi, chi oserebbe negare che l'introduzione del metodo Euclideo sia stato un immenso beneficio per la nostra scuola?» (Cremona a Betti, Paderno d'Adda 8 settembre 1869).

Il dibattito suscitato dalla pubblicazione del *Betti-Brioschi* diventa più ampio e aperto quando Giuseppe Battaglini, uno dei principali promotori della diffusione delle geometrie non euclidee in Italia, pubblica sulla sua rivista, il *Giornale di matematiche*, la traduzione di un articolo dell'inglese J. M. Wilson[32], che, contrariamente alla posizione dominante in Inghilterra, critica aspramente gli *Elementi* di Euclide come libro di testo.

Wilson esordisce dicendo che per scrivere un trattato elementare occorre non solo conoscere profondamente la materia, ma conoscerne anche l'evoluzione storica, avere una buona esperienza nell'insegnamento e una conoscenza psicologica dell'allievo. Successivamente egli passa a evidenziare le carenze degli *Elementi* sia dal punto di vista scientifico, sia da quello didattico. Le critiche di tipo scientifico non presentano sostanziale originalità o novità e sono le seguenti: Euclide rifiuta le «costruzioni ipotetiche», trascura l'uso del movimento e separa la geometria dall'aritmetica, inoltre, la teoria delle parallele è difettosa e quella delle proporzioni è cosa «morta». Dal punto di vista didattico Wilson osserva che il linguaggio è oscuro e complicato, che la trattazione non favorisce la scoperta, che escludere ogni applicazione aritmetica è un grave limite e, soprattutto, che «un libro d'istituzione scritto tanto tempo addietro» non può essere «un'introduzione atta alla scienza pel tempo nostro». A seguito di queste osservazioni conclude in modo perentorio: «Euclide è *antiquato, artifizioso, illogico e inadatto* come libro d'istituzione».

La replica di Cremona e Brioschi non si fa attendere e appare sotto forma di lettera al direttore sul *Giornale di matematiche* del 1869. In primo luogo essi affermano che gli argomenti presentati da Wilson contro il metodo euclideo non hanno nulla di nuovo e che sono gli stessi che, «anche ne' secoli addietro furono riprodotti più volte da coloro i quali andavano in cerca della *via regia* per apprendere gli elementi». Passano poi a esaminare le varie critiche di Wilson al testo euclideo, ma non riescono, con le loro argomentazioni, a essere veramente convincenti. In particolare la risposta ai rilievi di carattere didattico è piuttosto esile e assume toni a tratti sarcastici:

«Il sig. Wilson afferma che Euclide è *unsuggestive*. Ciò si capisce nelle scuole inglesi ..., dove si studiano i libri degli *Elementi*, parola per parola, materialmente a memoria ... Nelle nostre scuole secondarie, un testo non è mai altro che una *guida* pel maestro e pei discenti: il governo vuole, e noi ne lodiamo, che s'insegni geometria *secondo Euclide* non già che si reciti l'Euclide come una sacra bibbia»[33].

Alla fine Cremona e Brioschi devono, però, riconoscere i difetti degli *Elementi* e ammettono «che in varii punti è desiderabile che siano emendati e semplificati», purché non travisati e «purché si faccia della geometria vera, non già dell'aritmetica».

---

[32] J. M. Wilson, *Euclid as a text-book of elementary geometry*, Educational Times, 1868, pp.125-128, tradotto da R. Rubini con il titolo *Euclide come testo di geometria elementare*, Giornale di matematiche, 6, 1868, pp. 361-368.

[33] Brioschi, Cremona 1869, *Al signor Direttore* p. 53.

Sul *Giornale di matematiche* compariranno altri interventi a favore o contro gli *Elementi* di Euclide come libro di testo e il dibattito continuerà a interessare per alcuni anni tanto il mondo accademico, quanto quello degli insegnanti. Per rendersene conto basta scorrere le corrispondenze edite e inedite dei matematici italiani dell'epoca (Battaglini, Beltrami, Cremona, Forti, Genocchi, Bellavitis, ecc.) come pure le prefazioni ai trattati di geometria elementare che escono numerosi nella seconda metà dell'Ottocento.

Dettata da motivazioni interne alla disciplina, ma connesse con ideali tipicamente risorgimentali - impedire il proliferare di testi scadenti, dare l'avvio a una trattatistica di buon livello prettamente italiana, formare la futura classe dirigente, preparare i giovani alla ricerca - l'*operazione Euclide* svolge una funzione catalizzatrice per sbloccare la situazione di ristagno in cui versava la scuola secondaria italiana. Come scrissero Enrico D'Ovidio e A. Sannia «fu come un'operazione chirurgica: fece gridare, ma giovò»[34].

In particolare il dibattito permette di focalizzare le seguenti quattro questioni fondamentali per l'insegnamento della geometria: l'esigenza di una approfondita analisi dei fondamenti, il ruolo che devono avere i movimenti nello studio dei problemi geometrici, l'indipendenza o meno della trattazione geometrica da una precedente teoria dei numeri reali e, infine, il rapporto fra un'impostazione ipotetico-deduttiva e l'intuizione. Inoltre, l'esigenza di dare una risposta ai problemi emersi dal dibattito e la necessità di confrontare le proprie idee con il maggior numero di persone, favoriscono lo svilupparsi di una stampa specializzata. Da un lato vengono create le prime riviste dedicate ai problemi dell'insegnamento della matematica[35] e, dall'altro, fiorisce una manualistica di alto livello che vede il contributo di alcuni dei maggiori matematici italiani dell'epoca[36].

3. *Giovanni Vailati e il progetto di riforma della scuola secondaria*

L'interesse di Vailati per i problemi dell'insegnamento risale agli anni torinesi e lo accompagnerà per tutta la vita concretizzandosi nell'impegno all'interno dell'Associazione Mathesis e della Federazione Nazionale Insegnanti delle Scuole Medie (FNISM) e soprattutto nella partecipazione ai lavori della Commissione Reale per la riforma della scuola secondaria.

Decisiva per la sua formazione e per le scelte future è l'influenza di Peano, di cui è assistente dal 1892 al 1895, ma altrettanto importanti sono i contatti con Vito Volterra - venuto a Torino nel 1893 per ricoprire la cattedra di Meccanica razionale - che lo incarica di tenere delle lezioni di Storia della meccanica a integrazione del suo corso. Anche le numerose relazioni di amicizia che intreccia con alcuni dei più brillanti esponenti della cultura torinese di fine secolo quali Vilfredo Pareto, Cesare Lombroso, e Luigi Einaudi, contribuiscono a formare quella concezione ampia e unitaria della cultura che informa tutta la sua opera.

---

[34] A. Sannia, E. D Ovidio, *Elementi di geometria*, Napoli, Pellerano, IX ed. 1895, p. V.

[35] Cfr. F. Furinghetti, A. Somaglia, *Giornalismo matematico a carattere elementare nella seconda metà dell'ottocento*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 15, 1992, pp. 816-852.

[36] Cfr. W. Maraschini, M. Menghini, *Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria*, L'educazione matematica, 3, 1992, pp. 161-181 e C. Mammana, *I Grundlagen der Geometrie e i libri di testo di geometria in Italia*, Le Matematiche, Supplemento 1, 55, 2000, pp. 225-251.

Nella visione vailatiana della matematica e del suo insegnamento confluiscono e si intrecciano motivi e istanze diverse. Dalla frequentazione di Peano e della sua scuola gli derivano la salda padronanza della logica matematica, l'idea del rigore, deduttivo e sistematico, la riflessione sul linguaggio congiunti a un profondo interesse per la didattica e per la storia della matematica e a una sentita esigenza di democratizzazione del sapere, fattori questi che saranno il fondamento di tutta la sua opera. Un'influenza importante svolge il pragmatismo di Sanders Peirce che da Vailati è inteso come uno strumento di lotta contro i problemi privi di senso e contro la metafisica; in particolare, è il criterio operativo e funzionale per attribuire significato agli enunciati che egli fa proprio. Al pragmatimo si intrecciano istanze positivistiche: realizzare una humanitas scientifica, valorizzare gli aspetti applicativi del sapere, fondare la didattica su una conoscenza positiva dell'uomo (biologia, psicologia) avendo sempre presente che il processo conoscitivo procede dai fatti alle astrazioni. E alla base di tutto c'è l'assunto herbartiano per cui scopo dell'insegnamento è la formazione del carattere.

Questa fitta trama di motivi e di istanze di vario tipo si traduce in una particolare visione epistemologica della matematica che ruota principalmente intorno ai seguenti punti: il ruolo dei postulati, considerati proposizioni «come tutte le altre, la cui scelta può essere diversa a seconda degli scopi» (S I, p. 68)[37]; la deduzione intesa non solo come mezzo di prova, ma anche come strumento di ricerca; le riflessioni sul linguaggio; e l'importanza del metodo storico per preservare l'unità del sapere[38].

Il punto di partenza di Vailati per affrontare i problemi connessi con l'insegnamento secondario sono le critiche all'organizzazione scolastica del tempo che si possono sintetizzare sostanzialmente in quattro punti. Il verbalismo e l'apprendimento passivo, rendono la scuola «una palestra mnemonica» (S III, p. 261) dove l'insegnante è un conferenziere e l'allievo un semplice spettatore e uditore. La scarsa interazione fra cultura umanistica e scientifica porta a una visione settoriale delle singole discipline e ne diminuisce così il valore formativo. L'eccessivo affollamento delle classi e l'elevato numero di ore che i ragazzi anni trascorrono «inchiodati» ai banchi di scuola, hanno troppo spesso come effetto quello «di far nascere in tutti gli alunni, e spesso nei più intelligenti, una tale ripugnanza a tutto ciò che sa di scuola ... da far quasi ritenere una fortuna che nei programmi scolastici si dia tanta parte a ciò che non val la pena di essere saputo» (S III, p. 293). A tutto questo si aggiunge da un lato la carenza di strutture a supporto dell'attività didattica, quali biblioteche e laboratori, e, dall'altro, la mancanza di buoni manuali scolastici, di dizionari, di enciclopedie e di opere di divulgazione.

Queste considerazioni sulla scuola, congiuntamente alla lucida visione epistemologica e alla profonda convinzione del valore formativo della matematica si traducono, con una originale sintesi, nelle riflessioni metodologiche che accompagnano i nuovi programmi per la matematica proposti da Vailati nell'ambito dei lavori della Commissione Reale. Istituita nel 1905 dal ministro della pubblica istruzione Leonardo Bianchi col compito di formulare una proposta organica di riforma nell'ordinamento, nei programmi e nei metodi

---

[37] Con la sigla S si fa riferimento all' edizione degli scritti di Vailati cura di M. Quaranta, *Giovanni Vailati, Scritti*, 3 voll., Forni, Bologna, 1987.

[38] Una trattazione più approfondita sul progetto di riforma di Vailati e sulle sue basi epistemologiche si può trovare in L. Giacardi, *Matematica e humanitas scientifica: Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, sezione A, 1999 (2001), pp. 317-352.

della scuola secondaria, la Commissione, nonostante difficoltà e contrasti anche interni, presenta nel febbraio 1908 lo schema di un disegno di legge. L'innovazione principale consiste nell'introduzione della media triennale unica, senza latino, con accesso a tre rami del liceo, scientifico, classico e moderno. La *Relazione* sui lavori è pubblicata in due volumi l'anno seguente, ma la riforma non verrà mai varata. Rimandata agli anni venti, la riorganizzazione della scuola media secondaria si attuerà in altri termini; la cultura positivistica e liberal-democratica sarà sconfitta dalle nuove correnti politiche e dall'idealismo trionfante.

Quella che Vailati propone è una scuola laboratorio, non nel senso riduttivo di laboratorio per esperienze scientifiche ma «luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a *misurarsi* e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa» (S III, p. 292).

In particolare, l'insegnamento della matematica deve seguire un'impostazione sperimentale e operativa e, poiché il processo dell'apprendimento va dal concreto all'astratto gli allievi non devono essere costretti a «imparare delle teorie prima di conoscere i fatti a cui esse si riferiscono», ma devono dimostrare di *saper fare*, non solo di *saper dire.* Il tipo di lezione più adeguato a raggiungere questo scopo è la lezione maieutica che meglio consente all'insegnante di guidare l'allievo a scoprire da solo le verità matematiche e che, pertanto, stimola interrogativi e riflessioni. In una scuola laboratorio occorre, inoltre, valorizzare nel processo dell'apprendimento il momento ludico che, ben lontano dallo «sminuire la dignità della scienza matematica» (S III, p. 261), ne accresce anzi l'attrattiva. Il lavoro manuale, opportunamente indirizzato, può servire a «esercitare le varie facoltà di osservazione, di discriminazione, di attenzione, di giudizio» e costituisce «un ottimo antidoto contro l'illusione diffusa di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso certe parole» (S III, p. 265).

L'utilità di un percorso didattico che proceda dal concreto all'astratto si percepisce particolarmente nell'insegnamento della geometria.

Alla denominazione di *metodo intuitivo*, comunemente usata per indicare il metodo da seguire nella prima fase dell'insegnamento, Vailati preferisce quella di *geometria sperimentale o operativa* perché più atta a esprimere la differenza con la geometria razionale che deve essere sviluppata nel ciclo superiore di studi. Egli afferma, infatti, che fra le verità geometriche di cui è possibile e opportuno far acquisire la conoscenza all'alunno nella prima fase di studio, poche possono considerarsi come intuitivamente evidenti; non si tratta quindi di far *contemplare passivamente* supposte verità intuitive, ma piuttosto di indurre l'allievo a *operare* attraverso esercitazioni grafiche, costruzioni, misure etc.

La deduzione, inoltre, deve essere usata «non già a dimostrare proposizioni che agli alunni appaiano già abbastanza evidenti ... ma piuttosto a ricavare, appunto da queste ultime, altre proposizioni che essi ancora non conoscano». Così si presenterà loro come un modo per «economizzare» le esperienze e per giungere senza di esse a «prevedere» il risultato, e dunque anche come mezzo di scoperta[39].

---

[39] G. Vailati, *Sugli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane*, Atti del IV Congresso Internazionale dei matematici, 6-11 aprile 1908, Tip. Accademia dei Lincei, Roma, 1909, p. 485.

L'opinione diffusasi a seguito del Decreto Coppino, che «il ricorrere alle notazioni dell'algebra per esprimere fatti o relazioni geometriche costituisca quasi una contaminazione o un attentato alla purezza della trattazione di Euclide»[40] ha fatto sì che le applicazioni dell'algebra alla geometria siano presentate a scuola quando ormai l'intera trattazione della geometria e la maggior parte dell'algebra sono state svolte. Secondo Vailati, invece, «si deve parlare il più presto possibile non solo di applicazioni dell'algebra alla geometria, ma anche, viceversa di applicazioni della geometria all'algebra» [41], allo scopo di far percepire subito agli allievi l'unità profonda delle matematiche e di abituarli ad affrontare uno stesso problema con vari metodi e a scegliere, di volta in volta, quello più conveniente.

Per quanto riguarda poi il rigore nell'insegnamento della matematica, Vailati osserva come l'applicazione alla didattica delle nuove ricerche sui fondamenti della geometria elementare abbia messo in evidenza che «la correttezza logica di una dimostrazione non è qualche cosa che dipenda dal numero o dalla qualità dei presupposti, o delle ammissioni, di cui in essa si faccia uso, ma dipende piuttosto dal modo in cui queste vi si trovano impiegate». Ciò che è importante è che «ogni ipotesi, o ammissione a cui ... si faccia appello, sia chiaramente riconosciuta, e formulata in modo esplicito» (S III, pp. 305-306) e l'unico requisito indispensabile per il rigore delle dimostrazioni è che i postulati siano fra loro compatibili. Lontano dallo scoraggiare l'intuizione geometrica, il bravo insegnante deve «disciplinarla ed educarla» al fine di evitare gli errori cui può dare origine «la fiducia inconsiderata e istintiva in essa» (S III, pp. 268).

Il dialogo fra cultura scientifica e cultura umanistica che sta tanto a cuore a Vailati, può essere realizzato attraverso l'uso della storia della matematica, che, oltre a far percepire ai giovani l'unità del sapere, può contribuire anche a «spedantizzare» l'esposizione e a «rendere l'insegnamento più proficuo ... più efficace e insieme più attraente» (S II, p. 10). Nello stesso tempo, mostrando l'origine e lo sviluppo dei concetti e delle teorie scientifiche, il metodo storico assume il valore di antidoto contro ogni forma di dogmatismo.

Vailati si chiede anche fino a che punto il metodo e i contenuti nei tre licei, scientifico, classico, moderno, debbano essere differenti dovendo il primo indirizzo fornire quegli strumenti utili a proseguire gli studi scientifici e gli altri due mirare a sviluppare la facoltà di ragionare con precisione e con rigore. Convinto che fra questi due tipi di finalità non vi sia contrasto, egli propone per i licei classico e moderno un programma di matematica con un'estensione maggiore rispetto a quella prevista dai programmi vigenti all'epoca per il liceo.

Infatti per coloro che scelgono questi due tipi di liceo «le nozioni di matematica apprese nella scuola media rappresenteranno, in certo qual modo, le colonne d'Ercole della loro cultura scientifica; mentre, al contrario, per gli alunni dell'altro ramo del liceo [scientifico], più specialmente destinato a preparare i giovani alle Facoltà di scienze o ai Politecnici, non saranno che la via per acquistare cognizioni maggiori»[42]. Inoltre, richiamandosi a Felix Klein, Vailati osserva che la distinzione fra matematiche

---

[40] Vailati 1909, p. 487.

[41] G. Vailati, *L' insegnamento della Matematica nel nuovo ginnasio riformato e nei tre tipi di licei*, Il Bollettino di Matematica, Anno IX, 1910, p. 57.

[42] Vailati 1910, p. 53.

elementari e superiori è spesso dovuta a ragioni di indole storica e non corrisponde ad alcun criterio di convenienza didattica. In particolare introduce in tutti tre i tipi di liceo il concetto di derivata per la grande importanza che riveste nelle applicazioni alle altre scienze. Nel liceo moderno, in cui hanno particolare rilievo insegnamenti quali la geografia statistica, l'economia e il diritto, si dovrà dare spazio maggiore all'uso dell'algebra nelle questioni di statistica, di economia, di amministrazione e di finanza. Nel liceo classico, invece, si privilegerà lo studio dei procedimenti dimostrativi propri alla geometria antica, accompagnandolo con letture di passi delle opere dei grandi geometri antichi, allo scopo di offrire un quadro più completo della civiltà classica, non limitato alla letteratura e all'arte.

4. *Corrado Segre e la formazione degli insegnanti*

Che un matematico come Segre impegnato soprattutto ad avviare i giovani alla ricerca originale e attento alla formazione di una scuola, si sia dedicato per 19 anni alla preparazione dei futuri insegnanti presso la Scuola di Magistero di Torino, non deve troppo stupire. Innanzitutto, l'ambiente torinese era ricco di stimoli grazie alla presenza dell'Associazione Mathesis, che mantiene la sua sede a Torino fino al 1910, e alla scuola di Peano particolarmente attenta ai problemi degli insegnanti. In secondo luogo hanno sicuramente avuto un peso l'esempio del maestro Enrico D'Ovidio - autore di un fortunato manuale di geometria per le scuole secondarie - e l'amicizia con Gino Loria, portavoce all'estero dei problemi della scuola italiana. È però soprattutto decisiva l'influenza di Klein, influenza che si percepisce oltre che nella scelta dei metodi e dei filoni di ricerca, anche nel modo di concepire l'insegnamento secondario della matematica e l'organizzazione degli studi. Segre era in corrispondenza con Klein fin dal 1883[43] e aveva avuto modo di incontrarlo e di apprezzarne l'impegno per la scuola durante la permanenza a Göttingen nell'estate del 1891.

Le Scuole di Magistero erano state istituite dal ministro Ruggero Bonghi nel 1875[44] per rispondere all'esigenza di formare i futuri insegnanti e sopravviveranno con successive modifiche fino al 1920 quando ne sarà decretata la soppressione. Fra i numerosi decreti ministeriali che le riguardano è da segnalare quello del 1891 firmato da Pasquale Villari.

Dettato dalla consapevolezza che diverso deve essere l'insegnamento impartito al futuro ricercatore da quello per il futuro insegnante, questo decreto apporta innovazioni importanti, anche se perlopiù disattese, quali l'introduzione di conferenze di didattica generale e di esercitazioni pratiche, strutturate come saggi di lezioni, e il tirocinio nella scuola.

A questo decreto Segre si atterrà fedelmente nell'organizzare il suo insegnamento presso la Scuola di Magistero come è ampiamente testimoniato dai documenti (registri, relazioni, ecc.) dell'Archivio Storico dell'Università di Torino e dai due quaderni manoscritti *Vedute superiori sulla geometria elementare (1916-17)* e *[Appunti relativi*

[43] La corrispondenza fra Segre e Klein, ancora inedita, consta di 49 lettere (1883-1923) ed è molto intensa negli anni 1883 e 1884 con una media di due lettere al mese (*Nachlass Klein* Nieders chsische Staats-und Universit tsbibliothek, G ttingen).

[44] Cfr. il *Regolamento per la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali approvato con R. Decreto dell' 11 ottobre 1875*, in *Bollettino Ufficiale del Ministero della Pubblica Istruzione*, v. II, gennaio 1876, p. 31.

alle lezioni tenute per la Scuola di Magistero][45]. Il primo di essi è in realtà relativo al corso di geometria superiore del 1916-17, ma come afferma Segre stesso nell'introduzione e in vari punti del quaderno, è strettamente collegato con le lezioni di Magistero e affronta temi di geometria elementare che possono rivestire un particolare interesse per il futuro insegnante. Il secondo, invece, è dedicato soprattutto a questioni epistemologiche e metodologiche. I temi affrontati sono i seguenti: *La Matematica e l'esperienza; La Matematica in relazione colle applicazioni; La Matematica come scienza esclusivamente logica; Scopo dell'insegnamento matematico nelle scuole secondarie; L'intuizione e i postulati; Il rigore; Sul metodo; Sugli esercizi.* La trattazione è completata da un'ampia bibliografia ragionata, in cui Segre non solo offre un quadro assai articolato sulla letteratura relativa ai problemi dell'insegnamento della matematica, sui manuali in uso, sui libri di esercizi, sui testi di matematica dilettevole o di storia della matematica, ma si mostra anche attento alla legislazione scolastica dei vari paesi, agli scritti sui fondamenti e a quelli pedagogici[46].

I due quaderni citati e i documenti d'archivio mostrano chiaramente come le lezioni di Segre alla Scuola di Magistero si svolgessero secondo tre modalità, teorica, metodologica e pratica. Da un lato egli riprendeva quei temi di matematica elementare studiati nelle scuole secondarie evidenziando di volta in volta le connessioni con le matematiche superiori, dall'altro affrontava questioni di tipo metodologico e didattico. Nelle lezioni-laboratorio, inoltre, gli studenti venivano preparati a tenere una lezione «chiara, documentata e stimolante» e invitati a leggere e a commentare i manuali scolastici più diffusi.

Il punto di vista di Segre sull'insegnamento della matematica appare chiaro fin dalle prime pagine del quaderno relativo alle lezioni alla Scuola di Magistero. Fra i due possibili modi di accostarsi alla matematica, o considerarla in relazione alle sue applicazioni, oppure dal punto di vista logico, è al primo che vanno le sue preferenze. Segre illustra ai suoi allievi la differenza fra i due approcci osservando, per esempio, che «nel 1° indirizzo il numero *irrazionale* trova la sua origine ad es. in Geometria, grazie alla continuità della retta, o a costruzioni di ipotenuse, ecc.; nel 2° si deve ricorrere a separazione dei numeri razionali, o a limite superiore di una classe di razionali, ecc.» (p. 13); e commenta così:

«Diciamo subito che questo 2° indirizzo ha una grande importanza, anche filosofica. Esso ha messo bene in evidenza che cosa è la matematica pura; ed ha contribuito molto a porre il rigore *in varie parti della matematica. Ma, collo staccarsi dalla* realtà, *vi è il pericolo di finire con costruzioni, che pur essendo logiche, hanno troppa artificiosità, non possono avere importanza scientifica duratura» (pp. 13-14).*

Lo scopo della matematica è, per Segre, quello di insegnare «a ragionar bene; a non contentarsi di parole vacue; a trarre conseguenze dalle premesse, a riflettere e scoprire da

---

[45] I 40 quaderni manoscritti delle lezioni universitarie di Segre sono conservati presso la Biblioteca G. Peano del Dipartimento di Matematica dell' Università di Torino e sono riprodotti in L. Giacardi (a cura di) *I Quaderni di Corrado Segre,* CD-ROM, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 2002.

[46] Un esame più approfondito del quaderno e un suo inquadramento storico si può trovare in L. GIACARDI, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero,* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, sezione A, s. 8, 2003, pp. 141-164.

sé; ... a parlare con precisione» (p. 42), ma nell'insegnamento secondario non va considerata come fine a se stessa, «deve nascere dal mondo esterno e poi a quello applicarsi» (p. 15). Il primo approccio alla matematica deve essere, pertanto, sperimentale e intuitivo, così l'allievo imparerà «non solo a *dimostrare* le verità già note, ma anche a fare le *scoperte*, a risolvere da sé i *problemi*» (p. 15).

Scopo precipuo dell'insegnamento è dunque quello di sviluppare tanto le capacità di ragionamento, quanto l'intuizione e non a caso, per quanto riguarda il metodo da seguire, le preferenze di Segre vanno a quello *euristico* nell'esposizione della materia, a quello *analitico* nelle dimostrazioni, a quello *genetico* nello svolgimento delle teorie. Il primo, il metodo socratico, permette all'allievo di scoprire da solo le verità matematiche, il secondo gli consente di entrare nell'officina matematica e di capire il perché di ogni passo di una dimostrazione, il terzo, sviluppando una teoria seguendo il modo in cui è venuta formandosi, costituisce un buon avviamento alla ricerca scientifica. Tuttavia Segre non manca di sottolineare l'importanza di variare i metodi e soprattutto di sceglierli in base «all'argomento, la scolaresca e il tempo disponibile» (p. 44).

L'insegnante deve inoltre saper trovare un giusto equilibrio fra rigore e intuizione. I postulati su cui si basa la trattazione di una teoria devono essere tutti intuitivi e non è peccare contro il rigore non esigere che siano indipendenti; non bisogna dimostrare proposizioni che sono intuitivamente evidenti; è utile talvolta, avvertendo però gli studenti, dare abbozzi di dimostrazioni, piuttosto che dimostrazioni rigorose, ma lunghe e pesanti. D'altro canto occorre anche mettere in evidenza l'insufficienza dell'intuizione per concepire taluni enti quali, per esempio, una curva senza tangenti.

Per quanto riguarda la geometria, in particolare, Segre accoglie il punto di vista di Vailati, proponendo un insegnamento di tipo sperimentale operativo che utilizzi come sussidi didattici, la carta millimetrata, il disegno o ancora modelli di figure geometriche per «vedere certe proprietà che con il solo ragionamento deduttivo non si sanno ottenere». Come Vailati, inoltre, Segre pone l'accento sull'utilità di stabilire collegamenti fra l'algebra e la geometria e fra queste discipline e le altre scienze al fine eccitare la curiosità dei ragazzi e di coordinare l'insegnamento delle varie materie.

Sono soprattutto gli assunti pedagogici di Klein che Segre fa propri: colmare la frattura fra insegnamento secondario e universitario, valorizzare le applicazioni della matematica a tutte le scienze naturali, introdurre precocemente i concetti di funzione e di trasformazione, avvalersi dell'aspetto storico della disciplina, catturare l'interesse dell'allievo presentandogli la materia in modo intuitivo e, soprattutto, dare risalto, nell'insegnamento rivolto ai futuri professori di scuola secondaria, alle matematiche elementari da un punto di vista superiore.

Accanto alle considerazioni di tipo metodologico, Segre non esita a offrire qua e là ai futuri insegnanti vari consigli pratici che mostrano quanto fosse attento agli errori, alle cattive abitudini, ai punti deboli e alle idiosincrasie degli allievi. Eccone alcuni:

«I dati dovranno dunque essere verosimili, affinché verosimili siano i risultati ... I calcoli non sian troppo lunghi, non essendovi scopo a stancare la pazienza dei giovanetti ... Si varino le notazioni e le figure. Non accada che il giovane non sappia risolvere un'equaz. solo perché l'incognita non si chiama x» (pp. 31-33). «Bisogna evitar di annojare! ... Si cerchi di stimolare l'attività di mente dello scolaro, piuttosto che la passività ... Si soddisfi qualche volta la domanda di una dimostraz. che non si sarebbe data, ma che un giovane più intelligente possa capire ... Preparazione perfetta alla lezione ... Non dettare: usare un libro di testo ... Pazienza con gli scolari; ripetere se non hanno capito; non scandalizzarsi per errori; cercare di persuadere gli scolari ... che non occorre un'inclinazione speciale» (pp. 24-28, 42).

Le considerazioni metodologiche di Segre per molti aspetti si inscrivono nel dibattito particolarmente vivo all'epoca in Europa sul ruolo dell'intuizione del rigore nell'insegnamento secondario. Basta scorrere le riviste del tempo per vedere come il tema appassionasse i matematici: si propongono inchieste sul tema, vi sono decine di articoli sull'intuizione e sull'invenzione e non c'è recensione di libro di testo che non vi faccia cenno.

Non mancano le polemiche a volte molto accese fra i matematici. In Italia la più celebre è sicuramente quella fra Segre stesso e Peano (1891) che pone a confronto diversi punti di vista sul problema del metodo di lavoro nella ricerca scientifica, sul rapporto fra intuizione e rigore e, ancora, sul modo migliore di avviare i giovani alla ricerca. Meno noti, ma più direttamente legati ai problemi dell'insegnamento secondario sono il dibattito (1907) fra Vailati e Beppo Levi su metodo sperimentale e metodo intuitivo nell'insegnamento della geometria e quello (1913) fra Sebastiano Catania e Guido Castelnuovo sui manuali di algebra per la scuola secondaria ispirati ai principi della logica matematica. È proprio il testo di Catania *Trattato di Aritmetica ed Algebra* (1910) che Segre cita nelle lezioni di magistero (p. 41) volendo evidenziare la differenza fra l'approccio intuitivo e quello logico: egli pone a confronto il modo con cui è lì presentata la proprietà commutativa del prodotto di due numeri e quello utilizzato da Émile Borel nel suo manuale *Arithmétique* (1907). Catania la dimostra per induzione, mentre Borel la illustra su un esempio sfruttando la definizione di prodotto come somma.

Il contributo di Segre alla didattica della matematica rimane limitato alle lezioni presso la Scuola di Magistero, ma, con il suo insegnamento, egli forma generazioni di insegnanti fornendo loro un metodo e soprattutto quella capacità di guardare le matematiche elementari da un punto di vista più ampio che sola consente di rendere più chiaro e stimolante l'insegnamento secondario. D'altro canto Segre trasmette il suo interesse per i problemi della scuola e la sua visione metodologica agli allievi più diretti Castelnuovo e Severi che, pur essendo entrambi matematici attivi nella ricerca più avanzata, dedicheranno grandi energie ai problemi dell'insegnamento secondario e, come Segre, sosterranno con forza l'importanza di evitare, nell'insegnamento elementare, gli acrobatismi intellettuali a favore di un approccio intuitivo che stimoli la creatività e la scoperta.

IL PROBLEMA DEGLI N-CORPI

VITTORIO COTI ZELATI

1. Introduzione

Lo studio, la descrizione e la comprensione del moto dei corpi celesti è strettamente collegato con la storia del progresso dell'umanità e può essere riguardato da molti punti di vista: quello storico, quello filosofico, quello epistemologico, quello fisico e quello matematico. Centrerò questo mio intervento principalmente sugli aspetti matematici, anche se cercherò di accennare ad alcuni degli altri aspetti affascinanti di tale problema.

Dal punto di vista della matematica, il problema del moto degli astri è stato ed è tuttora una fonte inesauribile di problemi di ricerca. Per descrivere tali moti sono stati proposti vari modelli, modelli che poi sono stati confrontati con i dati sperimentali, modificati per addattarli alle osservazioni, ed eventualmente abbandonati per essere soppiantati da modelli ritenuti migliori dalla comunità scientifica.

2. La descrizione del moto degli astri e l'universo Tolemaico

Fin dall'antichità l'uomo ha osservato e cercato di descrivere e di prevedere il moto dei corpi celesti.

Mentre l'esistenza umana ha un'inizio ed una fine, il moto dei corpi celesti sembra eterno ed immutabile.

Tale sensazione ha una solida base scientifica, e cioè il fatto che i moti del sole, della luna e delle stelle sono periodici e che le loro traiettorie sono delle circonferenze (almeno almeno in prima approssimazione).

Il primo modello di descrizione di tale moto è quello tolemaico, che si sviluppa a partire da Aristotele e che poneva la terra al centro dell'universo e i corpi celesti fissi su sfere concentriche centrate nella terra. Ormai consideriamo tale modello come un modello solo qualitativo e superato: persino i bambini ormai sanno che "*è la terra che gira intorno al sole, e non viceversa*". Riteniamo giustamente che tale affermazione sia una delle grandi conquiste scientifiche dell'umanità e un segno del fatto che la cultura scientifica è molto più diffusa che ai tempi che hanno preceduto Copernico. Pur non negando che i risultati della scienza siano più diffusi che nel passato, sono però sicuro che pochi sanno rispondere alle obiezioni che Aristotele stesso faceva a chi proponeva un modello in cui la terra ruotava su se stessa o intorno al sole, ad esempio:

come è possibile che non ci accorgiamo di viaggiare ad una velocità, che, per quanto riguarda la rotazione della terra intorno al proprio asse è, alla nostra latitudine, dell'ordine di 1000 km/h?

In realtà il modello tolemaico è un modello scientifico, estremamente raffinato, basato su accurate osservazioni sperimentale e capace di descrivere e predirre i fenomeni celesti. Tale modello si è anche evoluto nel tempo per includere le nuove osservazioni.

Il primo modello tolemaico prevede semplicemente una volta celeste ruotante attorno alla terra su cui sono fissate le stelle, il sole, la luna e i pianeti.

Da un'osservazione attenta del cielo ci si accorse però che il sole, la luna e i pianeti non mantengono una posizione fissa rispetto alle stelle. Sorse quindi il problema di descrivere il moto di tali corpi celesti rispetto alla volta celeste (cioè rispetto alle stelle). In particolare si osserva che il sole descrive un cerchio massimo, chiamato l'eclittica. Pure i pianeti descrivono una traiettoria rispetto alla volta celeste che non si discosta troppo dall'eclittica, ma con un periodo diverso da quello del sole. Per spiegare tali fenomeni il modello si arricchisce (o si complica) postulando che il sole, la luna e ciascuno dei pianeti noti sia fissato su una sfera, concentrica a quella della volta celeste, che ruota anch'essa intorno alla terra (trascinata dal moto della volta celeste). Questo permette di spiegare (o descrivere) con molta maggior accuratezza le osservazioni.

Sulla base di tale modello è possibile effettuare misure più accurate tese a verificare quali siano le disposizioni e le velocità di rotazione di tali sfere.

Queste osservazioni più accurate mettono in luce un ulteriore fenomeno: quello del moto retrogrado dei pianeti, ovvero il fatto che il moto dei pianeti relativo alla volta celeste, diversamente da quello del sole, non procede sempre nella stessa direzione e non descrive esattamente un cerchio massimo: succede che a volte il moto lungo l'eclittica si arresta e il pianeta inverte la direzione del moto, descrivendo un piccolo cappio. Questo accadrà per esempio a marte nei mesi di agosto e settembre 2003.

La teoria tolemaica riesce a spiegare anche questo fenomeno introducendo ulteriori complicazioni nel modello. Si suppone cioè che i pianeti si muovano su di una sfera rotante il cui centro ruota rispetto alla terra. Si veda la figura 1.

3. La rivoluzione Copernicana e le leggi di Keplero

Copernico (1473-1543) cambia il punto di vista e pone il sole al centro dell'universo. Tale punto di vista semplifica enormemente il modello e rende semplice la descrizione del moto dei pianeti (anche se non è semplice passare dalla descrizione del moto nel sistema eliocentrico alla

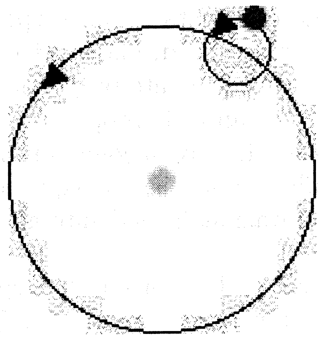


FIGURA 1. Gli epicicli

descrizione del movimento degli astri sulla volta celeste e dalle osservazioni sulla posizione dei pianeti sulla volta alle posizioni degli stessi nel sistema eliocentrico). Osserviamo però che tale modello fu proposto basandosi sulle stesse osservazioni che potevano essere spiegate anche all'interno del modello Tolemaico. Si afferma quindi grazie alla sua semplicità e non in base a nuove osservazioni non spieegabili all'interno della teoria tolemaica. Osserviamo anche che tale affermazione non sarebbe stato possibile senza lo sviluppo della fisica, che era riuscita a spiegare come fosse possibile moversi a grande velocità senza avvertire gli effetti del moto, fatto questo inspiegabile all'interno della fisica Aristotelica.

Utilizzando le osservazioni fatte da Tycho Brahe, Keplero (1571-1630) formula le sue famose leggi sul moto dei corpi celesti:

(1) Le orbite sono delle ellissi, di cui il sole occupa uno dei fuochi;
(2) Il moto dei pianeti sulle orbite è tale che la velocità areolare (cioè l'area spazzata nell'unità di tempo dal segmento congiungente il pianeta e il sole) rimane costante;
(3) Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita.

La deduzione di tali leggi è sorprendente se pensiamo che tutte lo osservazioni utilizzate da Keplero per formulare le sue leggi furono fatte ad occhio nudo e che le orbite di tutti i pianeti allora conosciute si discostano molto poco da orbite circolari.

4. LA LEGGE DI NEWTON E LA FORZA DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

L'introduzione della legge di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

chiarisce il fatto che l'accelerazione (e non la velocità, come postulato dalla meccanica aristotelica) di un corpo è proporzionale alla forza applicata. La legge di gravitazione universale afferma che la forza di attrazione gravitazionale esercitata su un corpo di massa m a causa della prezenza di una altro corpo di massa M è proporzionale al prodotto mM delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei corpi. La costante di proporzionalità, indicata con G, viene chiamata la costante di gravitazione universale. Queste due leggi permettono di formulare e studiare le equazioni del moto di corpi soggetti a tali forze gravitazionali mediante gli strumenti dell'analisi matematica.

Per descrivere le equazioni del moto di N-corpi di massa rispettivamente $m_1, m_2, \dots, m_N$ e di posizione $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ conviene introdurre l'energia potenziale gravitazionale

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) = -\sum_{i<j}^{N} G\frac{m_i m_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}.$$

Allora il moto dei corpi sotto la mutua azione delle forze gravitazionali è regolato dal seguente sistema di $3N$ equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} G\frac{m_i m_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}(\vec{x}_i - \vec{x}_j). \tag{1}$$

Introducendo la Lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i|\dot{\vec{x}}_i|^2 - V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$$

tali equazioni si possono dedurre mediante le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}_i} = 0. \tag{2}$$

È ben noto che per le soluzioni di tale sistema si conservano l'energia, la quantità di moto e il momento angolare totale, ovvero le quantità

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i|\dot{\vec{x}}_i|^2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{x}}_i \qquad \vec{J} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{x}_i \wedge \dot{\vec{x}}_i.$$

Un'altra proprietà di natura generale che utilizzeremo nel seguito è il fatto che le equazioni del moto sono variazionali, cioè che la traiettoria $t \mapsto (\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_N(t))$ descritta dal sistema minimizza (se $t_2 - t_1 > 0$ è sufficientemente piccolo) l'integrale d'azione

$$\mathcal{A} = \int_a^b \mathcal{L}(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_N(t))\, dt$$

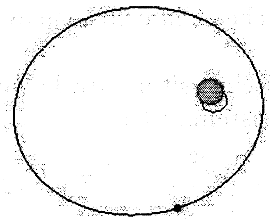


FIGURA 2. Soluzione del problema dei 2 corpi

nell'insieme di tutte le traiettorie (non necessariamente soluzioni) che congiungono $\vec{x}_1(a), \vec{x}_2(a), \ldots, \vec{x}_N(a)$ con $\vec{x}_1(b), \vec{x}_2(b), \ldots, \vec{x}_N(b)$.

5. Le soluzioni del problema dei due corpi

Le equazioni del moto (1) si possono risolvere esattamente per il problema dei due corpi. Innanzi tutto, utilizzando la conservazione dellà quantità di moto totale il sistema di 6 equazioni può essere ridotto ad un sistema di solo tre equazioni definito dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\dot{\vec{r}}|^2 + G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|},$$

ove $\vec{r}$ rappresenta il vettore $\vec{q}_2 - \vec{q}_1$. Sfruttando poi la conservazione del momento angolare si deduce che il moto è piano e che la velocità areolare è costante (la seconda legge di Keplero). Quindi, scegliendo opportunamente le unità di misura e il sistema di riferimento, lo studio del moto nel problema dei due corpi si riduce allo studio del seguente sistema di due equazioni

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \qquad \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \tag{3}$$

Se identifichiamo $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ con $r \in \mathbb{C}$ tale sistema si può scrivere

$$\ddot{r} = -\frac{r}{|r|^3} \qquad r \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Si dimostra poi che tutte le soluzioni di tale sistema con energia totale $E < 0$ e momento angolare non nullo sono periodiche. In tal caso $r(t)$ descrive un ellisse di eccentricità e. Tornando al problema dei due corpi, si trova che ciasuno dei corpi descrive un'ellisse attorno al comune centro di massa, di stessa eccentricità e di semiasse maggiore proporzionale alla massa del corpo stesso. Si veda la figura 2. Si deduce quindi la validità della prima legge di Keplero per il moto di soli due corpi. Si osservi anche che il sole non occupa uno dei fuochi dell'ellisse, ma anch'esso descrive un'orbita ellittica, anche se di semiasse maggiore molto minore di quello dell'orbita del pianeta. Infine la soluzione di momento angolare nullo corrisponde ad una collisione dei due corpi. In tal caso è possibile vedere che se la collisione avviene all'istante $t = 0$, allora $r(t) \approx t^{2/3}$ per $t \approx 0$.

Ricordiamo qui i legami che esitono fra le varie caratteristiche dell'orbita e del moto (per il sistema (3)):

$$a = -\frac{1}{2E} = \frac{J^2}{1-e^2}, \qquad T^2 = (2\pi)^2 a^3,$$

ove a rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita, e la sua eccentricità, T il periodo, $E = \frac{1}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{1}{|\vec{r}|} < 0$ l'energia totale, $J = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{r}$ il momento angolare. Si possono verificare facilmente tali relazioni per l'orbita circolare $r(t) = Re^{i2\pi t/T}$.

6. Configurazioni centrali e le soluzioni d'Eulero e di Lagrange

Abbiamo visto nella sezione precedente che il problema dei due corpi può essere risolto esattamante. Questo non è più vero per il problema degli N-corpi quando $N \geq 3$. Si possono però trovare facilmente alcune soluzioni particolati del problema degli N-corpi planare. Utilizzando notazioni complesse, indichiamo con $r_1, \dots, r_N \in \mathbb{C}$ le posizioni degli N-corpi e cerchiamo soluzioni del sistema (1) della forma $r_1(t) = \xi_1 r(t), \dots, r_N(t) = \xi_N r(t)$ ove $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{C}$ sono punti da determinare in $\mathbb{C}$ e $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione incognita.

L'equazione (1) diviene

$$m_i \xi_i \ddot{r} = -\frac{r}{|r|^3} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} G m_i m_j \frac{\xi_i - \xi_j}{|\xi_i - \xi_j|^3}.$$

Quindi se r è una soluzione dell'equazione (4) e $\xi_1, \dots, \xi_N$ sono tali che

$$m_i \xi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} G m_i m_j \frac{\xi_i - \xi_j}{|\xi_i - \xi_j|^3}, \tag{5}$$

otteniamo subito una soluzione del problema piano degli N-corpi. Le soluzioni del sistema (5) si chiamano configurazioni centrali. Tali soluzioni sono punti critici della funzione energia potenziale

$$V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} G \frac{m_i m_j}{|\xi_i - \xi_j|}$$

a momento d'inerzia fissato:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i |\xi_i|^2 = \lambda.$$

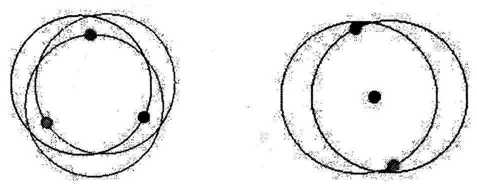


FIGURA 3. La soluzione triangolare di Lagrange e quella collineare di Eulero nel caso di masse uguali

Alcune delle soluzioni del sistema (5) possono essere calcolate esplicitamente.

Ad esempio, per il problema dei 3 corpi planare, le sole soluzioni sono date dalla soluzione triangolare di Lagrange (in cui i tre corpi sono disposti sui vertici di un triangolo equilatero disposto nel piano in modo che il centro di massa coincida con l'origine) e le soluzione collineare di Eulero (in cui i tre corpi sono allineati). In corrispondenza a tali soluzioni otteniamo soluzioni del problema dei tre corpi semplicemente scegliendo una qualunque soluzione $r(t)$ del problema dei due corpi (4), ad esempio una soluzioni ellittica di tale problema. Allora la soluzione del problema dei tre corpi è data da

$$(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = (r(t)\xi_1, r(t)\xi_2, r(t)\xi_3).$$

Si veda la figura 3.

Per quanto rigurada il problema degli N corpi planare con $N > 3$, nel caso di masse tutte uguali è facile mostrare che una soluzione del sistema (5) è quella in cui tutti i corpi sono posizionati sui vertici di un poligono regolare di N lati. Il problema generale della determinazione di tutte le configurazioni centrali è tutt'altro che risolto.

7. La soluzione di Chenciner e Montgomery del problema dei tre corpi

In un lavoro recente Chenciner e Montgomery hanno dimostrato l'esistenza di una soluzione periodica planare del problema dei 3 corpi (tutti di massa uguale) che non è una configurazione centrale. Tutti e tre i corpi si muovono su di una stessa traiettoria, a forma di otto, all'istante iniziale sono allineati, dopo un dodicesimo del periodo si dispongono sui vertici di un triangolo equilatero, dopo un altro dodicesimo di periodo si ritrovano nuovamente allineati (in un ordine diverso dall'iniziale), e così via fino a ritornare alla posizione iniziale. Si veda la figura 4. Per spiegare un poco come sia stata dimostrata l'esistenza di quest'orbita, dobbiamo ritornare alla caratterizzazione variazionale delle orbite del sistema (3). Abbiamo detto nella sezione 4 che le orbite del sistema degli N-corpi sono minimi dell'azione. Lo stesso può

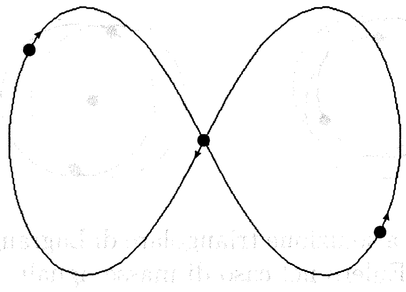


FIGURA 4. L'orbita ad otto di Chenciner e Montgomery

dirsi delle orbite periodiche: le soluzioni T-periodiche del problema degli N-corpi sono minimi (o più in generale punti critici) del funzionale d'azione

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^T \mathcal{L}(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_N(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i \int_0^T |\dot{\vec{x}}_i|^2\, dt + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^N G m_i m_j \int_0^T \frac{dt}{|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t)|}\end{aligned}$$

su di un opportuno insieme di funzioni T-periodiche. Quindi il problema della ricerca delle soluzioni periodiche per il problema degli N-corpi si riduce al problema della determinazione dei punti critici di una funzione definita su di un insieme di funzioni, spazio vettoriale infinito dimensionale. Osserviamo che per il problema dei 2-corpi tale funzione diviene

$$\mathcal{A}(\vec{r}) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 + \frac{1}{|\vec{r}|}\, dt.$$

Si noti immediatamente che tale funzione è sempre positiva, cioè $\mathcal{A}(\vec{r}) > 0$ qualunque sia la funzione (periodica) $\vec{r}$. È però immediato mostrare che tale funzione non ammette minimo: si consideri la funzione $\vec{r}_a(t) = (a, 0)$. Il valore di $\mathcal{A}(\vec{r}_a) = T/a \to 0$ per $a \to +\infty$. Quindi la funzione $\mathcal{A}(\vec{r})$, come la funzione reale di variabile reale $f(x) = 1/x$, è inferiormente limitata ma non ammette minimo.

Un altro problema da affrontare è quello relativo alle orbite di collisione. Come abbiamo visto il problema dei due corpi (e così quello degli N-corpi) ammette anche soluzioni di collisione. Poichè $|\vec{r}(t)| \approx t^{2/3}$ per $t \approx 0$, non è difficile vedere che $\mathcal{A}(\vec{r})$ è finito anche sulle soluzioni di collisione. Anzi, si può mostrare che il valore di $\mathcal{A}(\vec{r})$ sulla soluzione di collisione è uguale al valore di $\mathcal{A}(\vec{r})$ sulla soluzione circolare.

Per ovviare a questi problemi è possibile restringere il dominio di definizione di $\mathcal{A}$ ad una classe più ristretta di funzioni. In particolare ci si può restringere alla classe di funzioni $\vec{r}$ T-periodiche e tali che $\vec{r}(t + T/2) = -\vec{r}(t)$. È allora facile mostrare che la funzione $\mathcal{A}(q)$

ammette minimo in tale insieme. Tale minimo è la soluzione circolare del problema dei due corpi (si noti che le soluzioni ellittiche non godono della proprietà di simmetria $\vec{r}(t+T/2) = -\vec{r}(t)$), ed è una soluzione di non collisione.

Per quanto riguarda il problema dei 3-corpi planare, è possibile procedere nello stesso modo, cioè minimizzando $\mathcal{A}$ sulla classe di funzioni T-periodiche e tali che $(\vec{q}_1(t + T/2), \vec{q}_2(t + T/2), \vec{q}_3(t + T/2)) = (-\vec{q}_1(t), -\vec{q}_2(t), -\vec{q}_3(t))$. Operando in tal modo si trova la soluzione di Lagrange del problema dei 3-corpi.

L'esistenza dell'orbita di Chenciner e Montgomery è stata dimostrata in modo analogo, minimizzando l'azione su una classe di funzioni che godono di opportune proprietà di simmetria.

Successivamente al lavoro citato di Chenciner e Montgomery sono state trovate molte altre soluzioni del problema degli N-corpi utilizzando procedimenti di minimizzazione su classi di funzioni con assegnata simmetria.

8. Riferimenti bibliografici

Un testo molto bello sulle teoria Tolemaica e sull'affermarsi del modello copernicano è quello di Khun, *La rivoluzione copernicana*, Einaudi, Torino, 1972. Per altri informazioni di tipo storico sulla legge di gravitazione universale si veda anche il libro di Arnold, *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*, Bollati Boringhieri, Torino, 1996.

Per una trattazione esauriente del problema dei due corpi, si veda il testo classico di Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1992.

Una descrizione e varie animazioni che descrivono il risultato di Chenciner e Montgomery (A. Chenciner e R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. (2) **152** 2000) si possono trovare sul sito web dell'Americam Mathematical Society all'indirizzo `http://www.ams.org/new-in-math/cover/orbits1.html` e sul sito di Simò (che ha studiato il problema numericamente) all'indirizzo `http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html`.

COMUNICAZIONI

SISTEMI DI ASSIOMI E GEOMETRIA SULLA SFERA

di Miranda Mosca
Supervisore di tirocinio presso S.I.S. Scuola Interateneo di Specializzazione per la Formazione degli Insegnanti di Scuola Secondaria - Torino

La presente proposta è stata sperimentata, con alcuni adattamenti e variazioni, in alcune classi Terze di Istituti Tecnici Industriali, di varie specializzazioni. Essa ha origine in un tirocinio svolto in questo tipo di scuola, nell'ambito della SIS Piemonte, dalla specializzanda Barbara Ardizzoia.

Gli attuali programmi di diversi tipi di scuola prevedono nel triennio lo svolgimento di elementi di geometria dello spazio, un cenno ai sistemi di assiomi e alle geometrie non euclidee. Questi temi a volte vengono tralasciati, perché considerati "difficili", non interessanti e non facilmente collegabili ad altri temi. La nostra esperienza sembra smentire, almeno in parte, tali opinioni.

Il tempo di svolgimento è di una decina di ore, oltre alla prova di controllo e la sua restituzione.

In tutte le classi considerate le conoscenze di geometria erano modeste: per la geometria dello spazio limitate a quanto appreso nella scuola media; per la geometria del piano: angoli formati da rette parallele tagliate da una trasversale; congruenza dei triangoli; cenni sulla similitudine.

I principali obiettivi perseguiti si possono così sintetizzare:

- sapere che cos'è un sistema assiomatico
- conoscere i cinque postulati di Euclide
- sapere dimostrare un teorema
- saper formulare congetture e motivarle
- riconoscere e descrivere alcune proprietà sul piano e sulla sfera
- avere la consapevolezza dell' evoluzione storica della matematica.

Le attività in classe sono state prevalentemente a carattere collettivo. Per esporre i principali contenuti sono state preparate diapositive per lavagna luminosa. Si è fatto uso di materiali concreti: cartoncini,arance,mappamondo, elastici, spilli.

PERCORSO DIDATTICO

- Il sistema di Euclide: assiomi, postulati in versione originaria
- Consultazione di dizionari di italiano e di matematica per analizzare e confrontare i significati di alcuni termini nei due ambiti.
- Proprietà di un sistema di assiomi; costruzione di sistemi contraddittori
- Gli assiomi della geometria euclidea contemporanea
- Il teorema degli angoli interni di un triangolo.
- Il percorso più breve nel piano.
- Esperimenti di percorsi sulla sfera
- La retta e le circonferenze massime come linee di percorso minimo nei sistemi di assiomi del piano e della sfera.

Si è iniziato con un approccio storico, presentando gli *Elementi*, sia come opera originale, sia come opera di sistemazione logica delle conoscenze matematiche dell'epoca. Un volume degli *Elementi* (Euclide, *Elementi,* a cura di A.Frajese, Torino, UTET.) è stato portato in aula. Riporto qui la parte del sistema di Euclide che è stata presentata, poiché a questa modalità si è costantemente fatto riferimento; infatti la forma logico- linguistica del postulato, più che quella dichiarativa degli assiomi contemporanei, è utile a mostrare che le proprietà iniziali sono richieste di chi definisce la teoria, pertanto modificabili, e non proprietà (verità) assolute.

1. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da qualsiasi punto a un altro punto.

2. E che una retta terminata [1] si possa prolungare continuamente in linea retta.

3. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza [2].

4. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.

5. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti [3], le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui gli angoli sono minori di due retti [3].

[1] un segmento

[2] qualsiasi raggio

[3] tali che la loro somma sia minore di due retti

Per le proprietà dei sistemi di assiomi ci si è limitati a qualche idea generale, illustrando i concetti anche in ambiti esterni alla matematica, ad esempio: le leggi di una nazione si possono considerare un sistema di assiomi; a volte però una legge viene dichiarata incostituzionale: la sua presenza renderebbe contraddittorio il sistema.

Per avviare l'attenzione sui percorsi minimi si sono compiute prove sperimentali: tracciato un segmento su un cartoncino, si è verificato che un elastico teso ai suoi estremi si disponeva esattamente sul segmento.

Passando alla sfera si è posta la domanda se si potesse ancora parlare di triangoli: le prime proposte intuitive, iniziate con disegni sulle arance, si sono trasformate in descrizioni verbali e tentativi di definizioni. Sono state rilevanti le discussioni e le richieste: "anche sulla sfera, come nel piano, per disegnare un triangolo bisogna andare dritto". Pervenuti al concetto di circolo massimo e ad una sua definizione; la ripetizione dell'esperimento dell'elastico, fissato ora con due spilli su una arancia, ha condotto a concludere che i circoli massimi soddisfano alla proprietà di minimo percorso e pertanto questo fatto sperimentale può dare luogo ad un assioma di geometria della sfera.

Alcune domande poste nella prova scritta di controllo:

n.8 Lavora sul mappamondo: considera due città, ad esempio Parigi e Vancouver. Tendi fra di esse un elastico: dove passa?

n.9 In generale, se segni due punti A e B sullo stesso parallelo, qual è il percorso minimo compiuto per andare da A a B? Spiega

.n.14 Enuncia qualche teorema che vale nella geometria euclidea del piano ma non vale sulla sfera. Spiega.

ESITI

IMMEDIATI: Gli studenti si sono divertiti, soprattutto nelle manipolazioni. Hanno mostrato meraviglia per le novità conquistateLa memorizzazione è stata buona

A DISTANZA: Nelle settimane successive gli studenti hanno posto domande quali:*Ma in algebra non ci sono gli assiomi?E i teoremi?Che cosa succederebbe se negassimo l'assioma della biiezione tra i punti di una retta e l'insieme dei numeri reali?*

Segni di una accresciuta sensibilità per gli aspetti logici e di capacità di analisi.

ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA MATEMATICA APPRESA ALLA FINE DEL PRIMO BIENNIO DELLA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

Margherita Motteran[47], Stefano Antoniazzi[48], Paolo Baccan[49], Maria Angela Chimetto[50], Anna Maria. Pastorelli[51], Francesca Spilimbergo[52]

Quali sono e come differiscono le competenze matematiche degli studenti alla conclusione del primo biennio della scuola secondaria superiore? Si notano variazioni rispetto alla fine della scuola media? Quali sono gli errori più frequenti?

A queste domande si è tentato di dare qualche risposta, attraverso lo studio degli esiti di una prova oggettiva di profitto somministrata, nel mese di maggio 2002, ad un campione composto da 444 allievi, che stavano concludendo il primo biennio in 22 istituti, rappresentativi, per tipologia e dislocazione territoriale, della realtà scolastica di cinque province del Veneto.

La prova si compone di 38 quesiti (35 con risposta a scelta multipla, 3 a risposta aperta) e si propone di verificare il possesso di competenze, soprattutto di base, di aritmetica e algebra (19 quesiti a risposta chiusa), di geometria (9 quesiti a risposta chiusa, 2 a risposta aperta), di statistica, uso del linguaggio, teoria degli insiemi (7 quesiti a risposta chiusa, 1 a risposta aperta).[2]

La percentuale di risposte esatte ai quesiti a risposta chiusa è risultata piuttosto bassa (nel complesso: 49%; licei scientifici: 68%; istituti tecnici: 50%; istituti professionali: 34%) e solo il 30% degli allievi ha fornito risposte corrette ad almeno il 60% delle domande; tra gli studenti di istituti magistrali la percentuale di risposte esatte è stata solo del 36%. Analizzando i dati per classe, l'intervallo di variabilità dei risultati appare relativamente ridotto tra le classi dei licei scientifici (73% ÷ 65%), ma piuttosto ampio fra quelle degli istituti tecnici (64% ÷43%) o professionali (43% ÷29%).

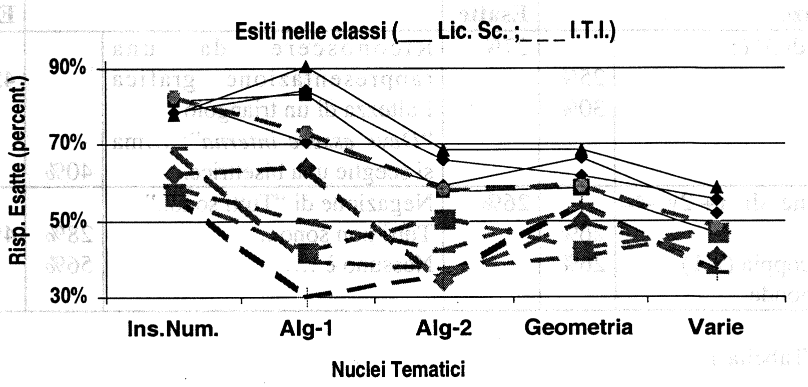
Il tasso più alto di risposte corrette si è avuto nei quesiti di aritmetica (62%), mentre risultati inferiori sono stati raggiunti in quelli di algebra (48%), di geometria (46%) o relativi agli altri argomenti coinvolti nella prova (43%).

Osservando gli esiti delle singole classi, si nota che gli andamenti dei risultati sono abbastanza simili tra gli allievi dei licei scientifici ma molto disomogenei nelle classi degli altri tre raggruppamenti (Fig. 1).Quanto gioca in questa somiglianza di andamenti la tradizione di preparare gli allievi ad affrontare nell'esame di stato una seconda prova scritta fino ad oggi uguale per tutti?

---

47 IRRE Veneto
48 ITIS "Planck", Villorba (TV)
49 ITCG "De Amicis", Rovigo
50 Lic. Scient. "Quadri", Vicenza
51 IPSIA, Rovigo
52 ITCG "Sansovino", Oderzo (TV)

Figura 1



Nove dei quesiti assegnati in questa prova, sono stati scelti fra quelli somministrati in un'analoga indagine svolta alla fine di maggio 2001 su allievi di terza media [1]. Nel complesso, si rileva un miglioramento perché il tasso di risposte esatte passa dal 41% al 58%; risultato, tuttavia, non molto soddisfacente giacché si tratta di domande pensate per ragazzi di quattordici anni. Si nota anche che gli errori commessi con maggiore frequenza nelle risposte fornite alla fine della scuola secondaria di primo grado e alla conclusione del primo biennio di quella superiore sono generalmente gli stessi, come, ad esempio, la risposta "*A*" nel quesito: **"In quale tra le seguenti figure è rappresentata l'altezza di un triangolo?** (Fig. 2)

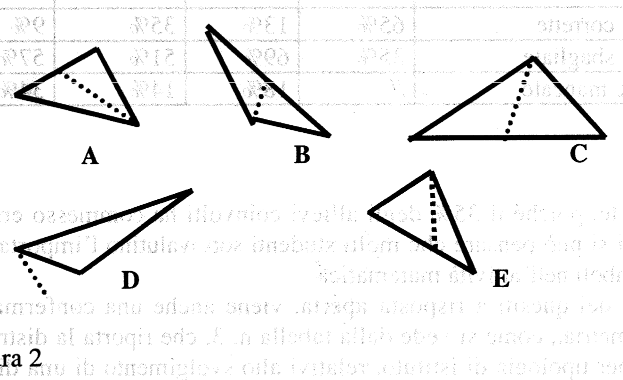


Figura 2

Nella seguente tabella sono sintetizzati gli errori commessi con maggiore frequenza nella prova di fine biennio. Alcuni di essi sono ricorsi con una frequenza piuttosto alta, rispetto alla percentuale delle risposte sbagliate ai quesiti corrispondenti

ERRORI e rispettive frequenze		Risp. Esatte	ERRORI e rispettive frequenze		Risp. Esatte
Il triplo di 3^5 è: 3^{15} 8^{15}	 25% 30%	27%	Riconoscere da una rappresentazione grafica l'altezza di un triangolo "*Deve essere interna*": ...ma si sceglie una bisettrice.	40%	45%
Soluzione di $x+2y$_-4=0: Solo la coppia (2,1) Non risponde	26% 26%	26%	Negazione di "Tutti sono.." Tutti non sono .. Nessuno è	 28% 56%	4%

Tabella 1

L'uso corretto e consapevole del linguaggio, sia per l'interpretazione delle richieste che come linguaggio specifico per la matematica, costituisce un punto critico rilevante, come confermato dagli esiti dei quesiti a risposta aperta (Tabella 2).

	L.S.	I Mag.	I.T.	I.P
Def. di triangolo isoscele				
Perc. Risposte corrette	90%	60%	69%	25%
Perc. Risposte sbagliate	7%	33%	28%	36%
Perc. Risposte mancate	3%	7%	3%	39%
Def. di rombo				
Perc Risposte corrette	65%	13%	35%	9%
Perc Risposte sbagliate	35%	69%	51%	57%
Perc. Risposte mancate	//	18%	14%	34%

Tabella 2

D'altra parte, poiché il 35% degli allievi coinvolti ha commesso errori nell'uso dei termini specifici si può pensare che molti studenti sottovalutino l'importanza rivestita dai termini e dai simboli nell'attività matematica.

Dagli esiti dei quesiti a risposta aperta, viene anche una conferma della poca competenza in geometria., come si vede dalla tabella n. 3, che riporta la distribuzione dei risultati, suddivisi per tipologia di istituto, relativi allo svolgimento di una dimostrazione geometrica piuttosto facile.

Raggruppamento	**Percentuale di Risposte Esatte**
Licei scientifici	57%
Istituti dell'Istruzione classica diversi dai LS	22%
Istituti tecnici	10%
Istituti professionali	1%

Tabella 3

La ricerca degli errori di calcolo ha mostrato che essi sembrano aver influito assai poco sulla corretta soluzione dei problemi assegnati. (percentuale di errori < 2%)

Qualche riflessione

Non c'è dubbio: se si escludono i licei scientifici e qualche istituto tecnico, alla fine del primo biennio la preparazione matematica è in generale poco consistente. Le maggiori preoccupazioni vengono, tuttavia, dalle grandi differenze riscontrate anche tra classi di analogo indirizzo, differenze che non sono immaginabili leggendo le valutazioni di fine anno. Sarebbe opportuno, pertanto, che le indicazioni dei piani di studio nazionali, oltre a specificare i contenuti fondamentali e quelli di approfondimento, contenessero allegati esplicativi dettagliati sulla valutazione delle competenze.

Nel complesso, si osserva che molti errori sembrano riguardare soprattutto

- la comprensione di definizioni
- la conoscenza di proprietà
- l'uso di definizioni e proprietà in contesti diversi.

Sarebbe importante che gli insegnanti stimolassero gli allievi a comprendere, immaginare e argomentare, piuttosto che a eseguire; l'allievo che pensa e sa argomentare il suo pensiero migliora il suo profitto e personalizza la sua formazione.

La solitudine in cui opera la maggior parte dei docenti favorisce l'autoreferenzialità e l'immutabilità delle scelte metodologiche, spesso a scapito dell'apertura al dialogo e alle innovazioni, che possono rendere più efficace e gratificante l'attività didattica. A indicazioni nazionali leggibili ed attuabili si dovrebbero, quindi, affiancare momenti di confronto e formazione mirata. Molti insegnanti di matematica aspettano di essere aiutati a lavorare meglio.

Riferimenti bibliografici

[1] Motteran M., Baccan P., Contiero L, Fontana M., Pastorelli A. M., *Uno studio sulla competenza matematica alla fine della terza media,* L'insegnamento della matematica e della scienze integrate, n.2, C.R.D. "U. Morin", Paderno (TV), 2003

[2] Motteran M., Antoniazzi, S., Baccan P., Chimetto M. A., Pastorelli A. M., Spilimbergo F., *Uno studio sulla competenza matematica alla fine del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado,* L'insegnamento della matematica e della scienze integrate, n.3, C.R.D. "U. Morin", Paderno (TV), 2003

Come insegnare matematica nella scuola media? Mutamenti di concezione dopo la formazione S.S.I.S.: storia di un caso

Massimo Cerchiari
Diplomato S.S.I.S. dell'Università di Modena & Reggio E.

Il mio bagaglio professionale prima della Scuola Media e la mia prima esperienza di insegnamento

Nonostante la preparazione scientifica acquisita attraverso la laurea in Scienze naturali, la preparazione pedagogica acquisita attraverso il Diploma Universitario di Educatore Professionale e l'esperienza professionale maturata in campo educativo in un programma terapeutico per tossicodipendenti, le lezioni che proponevo all'inizio della mia carriera di insegnante non mi soddisfacevano in quanto si risolvevano in una sorta di lotta tra me e gli studenti in cui io cercavo di proporre loro i contenuti previsti mentre loro cercavano di fare il meno possibile.

Ripensando alla mia esperienza scolastica mi sono reso conto che anche io, alla loro età, mi comportavo nello stesso modo soprattutto quando non mi sentivo coinvolto dall'insegnante. Ciò mi ha reso consapevole del fatto che, da un lato l'atteggiamento dei miei alunni non aveva nulla di personale nei miei confronti, dall'altro che la preparazione scientifica e pedagogica non erano sufficienti ma che occorreva anche una preparazione didattica generale e disciplinare che permettesse un maggiore coinvolgimento degli alunni nel raggiungimento degli obiettivi didattici.

Ho rispolverato alcuni capitoli di psicologia dell'apprendimento e di pedagogia cognitiva studiati durante il corso per educatore trovando concetti molto interessanti, tra cui: lo sviluppo del curricolo «a spirale» di Bruner e il concetto di «Area di sviluppo prossimale» e la «Legge dello sviluppo culturale» di Vigotsky. Alla luce dell'esperienza di conduttore di gruppo, soprattutto attraverso la riflessione sulla «Legge dello sviluppo culturale», mi sono reso conto che era possibile concepire una metodologia didattica che puntasse su una relazione d'insegnamento-apprendimento basata tra ruoli conplementari e non contrapposti, anche se non ero ancora in grado di tradurre queste idee in azioni didattiche concrete.

L'influenza del corso di "Didattica della Matematica e Laboratorio" della S.S.I.S.

Contemporaneamente al lavoro di insegnante ho dovuto frequentare il Corso S.S.I.S. per ottenere le abilitazioni necessarie e poter accedere agli incarichi annuali. Molti dei corsi frequentati si sono rivelati una riedizione dei corsi universitari, inutili da un punto di vista didattico; per altri, come quello di 'Didattica della Matematica e Laboratorio' il mio scetticismo è stato smentito. Abbiamo iniziato questo corso, con un brainstorming su quello che pensavamo fossero gli elementi chiave dell'insegnamento matematico nella scuola media, poi abbiamo letto e discusso i programmi mettendo a fuoco gli elementi di novità rispetto alle concezioni da noi espresse. Già il modo di discutere i Programmi mi aveva spiazzato perchè la docente ci aveva coinvolto direttamente invitandoci a valorizzare e a riflettere sulla nostra esperienza d'insegnamento.

La metodologia di laboratorio proposta durante il corso è stata quella del problem solving (individuale o a piccoli gruppi) abbinata alla discussione collettiva: a partire da opportune situazioni problematiche, la docente, ci invitava a discutere e a condividere le nostre percezioni e le nostre soluzioni limitandosi a coordinare la discussione e a rilanciarla nei momenti morti verso il raggiungimento degli obiettivi previsti per quella lezione.

Mi rendevo conto che la docente ci stava facendo sperimentare dal vivo la metodologia proposta per il nostro insegnamento ma, pur trovando le lezioni interessanti, nutrivo molti dubbi circa il fatto che questa metodologia potesse essere riproposta in classi con alunni problematici, handicappati e extracomunitari.

Mi sono ricreduto a seguito di un laboratorio tenuto dalla prof.ssa Gherpelli, insegnante ricercatrice che ci ha fatto toccare con mano come, attraverso la metodologia della discussione collettiva, era riuscita a far costruire agli allievi la definizione delle operazioni di addizione e moltiplicazione e dell'ordinamento nei razionali. Dalla osservazione dei suoi comportamenti come insegnante nella classe, mi sono reso conto del perchè a molti dei miei alunni degli anni precedenti non ero riuscito a far piacere la matematica. L'immagine della materia che usciva dal mio insegnamento era quello di una disciplina molto rigida, in cui gli alunni si dovevano addestrare all'uso delle tecniche e dei procedimenti da applicare a seconda del tipo di problema. Attraverso la discussione collettiva, invece, gli alunni vengono educati alla conquista dei concetti matematici nel rispetto delle percezioni di ciascuno favorendo l' apprendimento attraverso il confronto e la coordinazione degli interventi degli allievi. Gli alunni da soggetto passivo diventano qundi i protagonisti del loro apprendimento.

Sempre durante il corso la docente ci aveva mostrato diverse riviste specializzate di didattica della matematica invitandoci a considerarle come strumenti di lavoro per migliorare la nostra preparazione professionale. Sfogliandone alcune mi hanno colpito due articoli di Bartolini Bussi: «La discussione collettiva nell' apprendimento della matematica» (1989) e «Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica, un approccio Vigotskiano» (1995). Da questi articoli emerge l'analisi sia teorica sia pratica dell' applicazione delle teorie psico-pedagogiche che avevo usavo in comunità e che, per altri scopi, avevo ritrovato applicate anche durante il corso. Mi sono reso conto del fatto che il ruolo di coordinatore della discussione didattica, in un qualche modo, poteva essere ricondotto a quello di conduttore di un gruppo terapeutico. Occorreva però un contratto didattico con regole adeguate che mi permettessero di accendere e di alimentare la discussione coinvolgendo tutta la classe. Tra queste regole segnalo: l' astensione dal fare commenti giudicanti in modo che ciascun alunno possa essere libero di intervenire senza paura di essere preso in giro e l'invito agli alunni a intervenire motivando le opinioni espresse. La mia convinzione era che, con l'applicazione di queste regole, gli alunni sarebbero riusciti ad educare la loro naturale istintività attraverso la ricerca di una base razionale alle proprie intuizioni ed anche a sviluppare la capacità critica circa le opinioni dei compagni.

La prima sperimentazione di un insegnamento costruttivo, i primi problemi e i primi riscontri

Nella speranza di rendere le mie lezioni più stimolanti e più coinvolgenti per gli alunni e sulla base delle riflessioni fatte, ho deciso di iniziare a considerare in modo più realistico il modello di insegnamento proposto. Tuttavia, dovendo frequentare anche le lezioni della S.S.I.S., la preparazione delle mie lezioni si riduceva prevalentemente alla definizione dell'obiettivo didattico da raggiungere. L'iniziale mancanza di precisione nella sua definizione mi ha creato molte difficoltà nel gestire la discussione perchè non ero in grado di valutare in che misura gli interventi degli alunni potevano essere pertinenti per il raggiungimento dell'obiettivo previsto.

La successiva definizione di obiettivi più circoscritti e concreti mi ha consentito di coordinare in modo più adeguato gli interventi degli alunni.

Riflettendo sui miei tentativi di migliorare la concretizzazione della metodologia mi sono reso conto che, durante le lezioni, utilizzavo la competenza maturata con l'esperienza professionale di conduttore di gruppo, ossia l'analisi dei messaggi verbali e non verbali inviati dagli alunni in relazione al contesto, alla luce dei loro bisogni cognitivi ed educativi, e degli obiettivi didattici da raggiungere nel corso della lezione.

I primi riscontri di questa mia sperimentazione li ho avuti direttamente dagli alunni. Luca, per esempio, nel vedermi proporre l'ennesimo problema senza dare un aiuto iniziale, è intervenuto domandando: «*Ma se facciamo tutto noi, ma lei per che cosa la pagano*?». Questa battuta ha rappresentato per me un feed-back importante in quanto evidenziava la percezione da parte di Luca di un modello di insegnamento diverso rispetto a quelli ricevuti fino ad allora e la maggiore fatica che questo implicava nel lavoro personale e di classe.

Oltre agli obiettivi di carattere didattico, questa metodologia, mi ha permesso di perseguire anche importanti obiettivi educativi, quali: il seguire le procedure concordate per prendere la parola; il rispetto dei tempi degli interventi; il superamento delle paure nell' esprimere le proprie idee; questi hanno permesso a Giuseppe, un alunno con deficit psichico e cognitivo, di integrarsi nella classe intervenendo durante le lezioni secondo le sue possibilità ben tollerato dai suoi compagni e raggiungendo in modo adeguato gli obiettivi cognitivi previsti.

Il tirocinio

Nella fase di progettazione dell'intervento didattico, l'insegnante della classe osservata ha fissato i contenuti e gli obiettivi che avrei dovuto perseguire nel mio intervento e mi ha lasciato libero circa la metodologia da seguire. Ho deciso allora di sfruttare questa occasione per verificare fino a che punto era possibile sviluppare un intervento didattico con la metodologia della discussione collettiva in una classe in cui il docente titolare usava la metodologia della lezione frontale. Nell'analizzare questo problema mi sono reso conto che il presupposto di questo intervento era la chiarezza del contratto didattico da stabilire con gli studenti. Fin dall'inizio ho chiarito con loro che nello svolgomento delle lezioni saremmo partiti da una situazione problematica e sarebbe stato fondamentale che loro si esprimessero perché i concetti sarebbero stati costruiti attraverso i loro interventi. Gli alunni, dapprima sopresi, hanno apprezzato via via questa metodologia intervenendo nelle discussioni e raggiungendo in modo adeguato gli obiettivi previsti (per dettagli si veda Cerchiari 2002).

Considerazioni conclusive

L'uso della metodologia della discussione collettiva ha rappresentato per me una svolta professionale, in quanto gli alunni (sia della classe osservata che i miei) hanno mostrato di gradire maggiormente le lezioni rispetto agli anni precedenti e anche i risultati didattici si sono rivelati migliori.

In questa prima sperimentazione il problema maggiore che ho riscontrato è stata la difficoltà nel prevedere i tempi necessari al raggiungimento degli obiettivi didattici. Ritengo che ciò sia dovuto da un lato, al grande numero di variabili da controllare contemporaneamente durante la discussione e, dall'altro, alla mia mancanza di esperienza nel costruire il relativo canovaccio con la previsione dei possibili interventi degli allievi.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G.: 1989a, La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 12 (1), 6 - 49

Bartolini Bussi, M. G.: 1995, Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vyigotskiano, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 18A, n.3, 222 - 262

Cerchiari, M.: 2002, *La discussione didattica guidata: esempio di interazione didattica nell'approccio ai poliedri,* tesi di diploma di specializzazione per la Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, Università di Modena e Reggio Emilia, relatore prof. N.A. Malara

Cobb, P.: 1997, Descrizione dell'apprendimento matematico nel contesto sociale della classe, *L'educazione Matematica*, anno XVIII, Serie V, parte I vol. 2, n.2, 66 - 81 e parte II vol. 3, 270-281.

Malara, N.A.: 1996, L'insegnamento della Geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico metodologiche, in *L'insegnamento della Geometria: seminario di formazione per docenti della istruzione secondaria di primo grado,* Quaderno n.19/1 del Ministero della Pubblica Istruzione, 13-76.

Malara, N.A.: 1997, Problemi nel passaggio Aritmetica-Algebra, *La matematica e la sua Didattica,* vol. 2, 176-186.

Malara, N.A.: 1999, Un progetto di avvio al pensiero algebrico: esperienze, risultati, problemi, *Rivista di Matematica dell'Università di Parma* (6), 3*, 153-181.

Pesci, A.: 2001, Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe, *collana «Il Battente»*, Pitagora, Bologna

Vygotsky, L. : 1990, *Pensiero e Linguaggio,* Laterza, Bari

Zan, R.: 2000, L'insegnante come solutore di problemi, *La matematica e la sua Didattica*, n. 1, 48-71

QUALE FORMAZIONE DELL'INSEGNANTE DI MATEMATICA PER INTERVENIRE SULLE DIFFICOLTÀ DEGLI ALLIEVI?

Paola Bruno Longo
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Torino

Problemi generali

Il recupero più problematico é quello di allievi con gravi difficoltà concettuali che non presentano una patologia specifica e non sono supportati da un insegnante di sostegno. Spesso la loro difficoltà non è legata solo al contenuto matematico, ma anche al modo di usare il pensiero ed al modo di gestire la propria persona. Il loro disagio non può essere superato se non li si aiuta a ritrovare la possibilità di imparare con soddisfazione (Foletto, 2002). Per attuare il recupero in matematica, occorre dunque affrontare contemporaneamente anche la loro situazione psicologica ed affettiva. Da essa infatti dipendono la capacità di ascolto e di attenzione, il desiderio di apprendere e la capacità di implicarsi con la realtà, dal livello generale fino a quello scolastico. Un'esperienza di recupero in matematica nel primo anno di scuola superiore ha posto il problema cruciale: variare il metodo didattico, senza modificare i contenuti (Longo, Di Carlo, Ambrosione, 1995).

Condizione essenziale è la qualità della <u>relazione</u> dell'insegnante con l'allievo (Foletto, 2002): attraverso questa l'allievo può riappropriarsi della coscienza e del controllo di sé, dell'uso dell'attenzione, dell'ascolto e della volontà. Instaurare tale relazione é compito specifico e personale dell'insegnante, nessuno può sostituirsi a lui. L'allievo può riprendere ad imparare proprio grazie a tale relazione educativa: è un processo ben evidenziato da Bowlby quando parla di "base sicura" (Bowlby, 1989).

L'insegnante può essere aiutato nel compito non facile di favorire la ricostruzione della personalità di un allievo non solo dall'aiuto di "esperti", ma soprattutto da una formazione specifica, che vertendo sulle problematiche educative generali, mostri con esemplificazioni significative come gli interventi educativi possano avvenire attraverso il piano disciplinare. Ad esempio, un insegnante di matematica può incrementare il senso di responsabilità di un allievo avviandolo all'autocorrezione. Oppure, può incrementare la motivazione favorendo nell'allievo la constatazione che può imparare, producendo così una convinzione di autoefficacia. Occorre che il compito proposto non sia né banale né di livello troppo elevato rispetto alle sue capacità e cioè situato al "livello alto", secondo la terminologia di Piaget (Furth-Wachs,1977). Si tratta di un compito proposto proprio a lui, dentro una classe in cui probabilmente molti sono più abili di lui e ciò esige una particolare competenza dell'insegnante per differenziare compiti e tempi, fatto non banale, che può avere molte ricadute sulla valutazione.

Il recupero sulla matematica

Quando gli errori in matematica sono sistematici ed hanno radici profonde, non serve ripetere le spiegazioni già fatte, aumentare il numero di esercizi dello stesso tipo, puntando solo sull'addestramento, o insistere con i richiami alla buona volontà ed all'impegno. L'analisi di questi errori evidenzia spesso la rinuncia a ragionare e la mancanza di metodo. Manca l'identificazione dello scopo del lavoro e degli strumenti adeguati ad esso, del significato dei segni e delle proprietà su cui tutto si regge. Per provocare il ragionamento, il punto di leva è riattivare il pensiero, come atto creativo e libero della persona, senza passi troppo veloci, ma proporzionati alla capacità e maturità di ciascuno. Tale processo si basa sul risveglio della domanda, intesa come curiosità del soggetto, quando si pone in atto di fronte alla realtà: le domande dell'insegnante devono risvegliare quelle dell'allievo per provocarne l'adesione al compito e generare in lui un'attività di ricerca di risposte e di procedimenti per ottenerle. Inoltre occorre ridare senso al pensiero attivando i suoi legami naturali con la sensorialità e con l'affettività.

Competenze necessarie all'insegnante.

Il punto di partenza per un recupero efficace è che l'errore non sia mai giudicato come una colpa: esso può costituire anzi una vera risorsa didattica, a patto di saperlo usare per fare un'analisi critica della concettualizzazione in fieri (Longo, Avataneo,1998). Occorre risalire alle radici dell'errore, anche se lontane nel tempo. Strumenti utili per l' indagine sono le rappresentazioni grafiche (Longo 1998) e la descrizione, scritta o orale, dei passi compiuti per portare a termine il compito.

L'analisi degli errori richiede all'insegnante padronanza dei significati e delle dinamiche costruttive che esistono dietro gli aspetti formali della matematica: su questo non si può improvvisare ed occorre una formazione specifica. L'insegnante può allora vivere e comunicare la convinzione che l'esito positivo è frutto di un lavoro lungo e paziente, contrastando posizioni ingenue degli allievi.

In seguito, è necessario che l'insegnante, facendo tesoro della ricerca didattica, abbia chiara la successione dei passaggi necessari all'apprendimento e possa così pianificare un'attività di recupero in cui l'allievo compia esplicitamente tutti i passi necessari alla concettualizzazione.

Utilizzare coscientemente un percorso didattico a lunga scadenza permette di far emergere legami nascosti tra i vari argomenti e questo facilita la comprensione perché, rendendo evidenti i collegamenti, avvicina al significato. E' un avvertenza utile per ottenere risultati stabili.

L'insegnante deve avere chiaro che i tempi di apprendimento sono personali e deve tenerne conto almeno per gli allievi più deboli. Ciò richiede di usare con effettiva competenza la valutazione formativa.

Vergnaud descrivere un concetto matematico, dal punto di vista genetico, come una terna di insiemi: quello degli invarianti operazionali e relazionali, quello delle situazioni che danno significato e quello dei simboli linguistici (Fischbein, Vergnaud, 1992). Questa descrizione è assai ricca di suggerimenti per le scelte didattiche e per l'analisi degli errori.

L'esperienza operata sul concreto non produce automaticamente pensiero astratto: Fischbein suggerisce la necessità che le operazioni concrete costituiscano "modelli generativi", cioè capaci di provocare le domande e l'immaginazione dell'allievo portandolo a risposte personali (Fischbein,1992). Anche questo punto di vista offre un criterio produttivo per l'analisi degli errori e per il loro recupero.

Il passaggio dalla lingua comune al linguaggio matematico comporta una variazione di significato nell'uso dei termini. Ciò rende possibile il rischio di interferenze, che occorre imparare a riconoscere, prevenire e correggere. L'attenzione al lessico va introdotta fin dall'inizio della scuola elementare, e mai abbandonata (Maier,1998).

E' necessario conoscere i passi con cui si forma il pensiero astratto e saper valutare il livello di capacità di astrazione di ciascun allievo, per poter intervenire con ciascuno al suo livello. Ciò permette all'insegnante di giudicare anche l'astrazione del proprio linguaggio, e dunque la sua compresibilità.

In quanto al testo, anche se la lingua usata è in genere troppo astratta, occorre avviare gli allievi a saperlo utilizzare per ricercare le informazioni di cui hanno bisogno. Questo è un modo per avviarli all'autonomia nell'uso del pensiero, e quindi è parte integrante del recupero.

La formazione sulla natura e funzione del simbolo riguarda sia la sua origine (azione umana di simbolizzare) sia il suo uso nei diversi campi dell'espressività umana e in matematica (Freudenthal,1994, Longo,1999).Questo "a fondo" può mettere in evidenza la positività dell'esigenza propria della matematica di irrigidire il significato dei termini (tendendo all'univocità) attraverso l'uso di convenzioni. Tale rigidità si riflette su tutto il linguaggio matematico (esclusione di polisemie e di sinonimi).

Una funzione caratteristica della parola e del linguaggio é di portare il soggetto alla consapevolezza dei propri processi interiori(Vergnaud, 2000), ed anche questo fa parte del recupero. Ciò avviene in matematica attraverso la narrazione fatta dagli allievi del lavoro personale e collettivo ed attraverso la discussione nella classe di ipotesi interpretative e di esperienze (Bartolini Bussi,1995). Non può sfuggire dunque la necessità di formare gli insegnanti ad essere mediatori della discussione senza voler dare precocemente la propria risposta, ma lasciando spazio adeguato al cammino di approssimazioni successive e di chiarificazione reciproca che gli allievi compiono correggendosi uno con l'altro.

Sul piano della comunicazione del senso della matematica, l'insegnante deve essere adeguatamente formato per poter individuare gli aspetti salienti del pensiero matematico e per farli emergere con "fatti" più che con parole. Ad esempio, è un "fatto" l'uso del contro/esempio per correggere un errore.

La natura del pensiero matematico pone la necessità di lasciare spazio all'attività creativa di ciascun allievo, in particolare di quelli che hanno maggiori difficoltà, senza cedere al desiderio di sostituirsi ad essi per evitare errori. Se si riflette anzitutto sul proprio modo di fare matematica, ci si accorge che le formule sono solo un iceberg visibile della concettualizzazione, generato da un'attività complessa, in cui il metodo per tentativi e la verifica hanno una funzione privilegiata (Vergnaud, 1994).

Conclusione

E' auspicabile che queste problematiche trovino spazio negli studi universitari dei futuri insegnanti di matematica

Bibliografia di riferimento

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F., Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, Centro Documentazione Educativa, Modena, 1995

Bowlby J. , La base sicura, Cortina, Milano,1989

Fischbein E., Concreto ed astratto nell'insegnamento della matematica elementare, in "Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare" a cura di G. Prodi, la Scuola, Brescia, 1992

Fischbein E., Vergnaud G., Matematica a scuola: teoria ed esperienze, Pitagora, Bologna, 1992

Foletto A., A scuola con soddisfazione, ITACAlibri, Castel Bolognese, 2002

Furth G., Wachs H., Il pensiero va a scuola. Come si educa il pensiero applicando Piaget, Giunti Barbera, Firenze, 1977

Longo P., Di Carlo A., Ambrosione M., Didattica della Matematica contro la dispersione scolastica: esperienze di recupero nell'insegnamento ad allievi in prima superiore, in "Ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia", Pitagora, Bologna 1995

Longo P., Il processo di simbolizzazione: formazione e difficoltà, Atti del convegno "Nuclei di ricerca sulla didattica della matematica", Napoli, 1999

Longo P. Uso di rappresentazioni grafiche per facilitare l'astrazione e la simbolizzazione in matematica. In: Difficoltà di apprendimento, anno 4, n.1, Trieste, Erikson, 1998

Longo P., Avataneo G., Errore, correzione, motivazione, In "Matematica e affettività" - Pitagora, Bologna, 1998

Maier H., Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi, Pitagora, Bologna, 1998

Vergnaud G., Lev Vigotski, pedagogue et penseur de notre temps, Hachette Livre, Paris 2000

LA FORMAZIONE MATEMATICA DELL'INSEGNANTE SPECIALIZZATO NEL SOSTEGNO

Michele Pertichino
Dipartimento di Matematica Internuversitario di Bari
Brunetto Piochi
Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze

Ormai nella maggior parte delle SSIS sono in corso attività specifiche per il conseguimento della specializzazione relativa alle attività di sostegno[53]. È perciò indispensabile riflettere sulla formazione matematica da offrire a persone che abbiano già conseguito l'abilitazione per l'insegnamento nella scuola secondaria in una determinata classe e vogliano "*acquisire quei contenuti formativi in base ai quali il diploma di specializzazione abilita all'attività didattica di sostegno*" (D.M. 26/05/98 art. 4).

Secondo quanto deliberato dalla Co.Di.SSIS (Conferenza dei Direttori delle SSIS), accanto a competenze specifiche di carattere medico, psicologico, pedagogico e sociologico, il corso dovrebbe offrire al futuro insegnante specializzato anche la conoscenza di strategie didattiche integrate e di metodologie e materiali specifici. Il percorso formativo dovrà prevedere contenuti che permettano all'insegnante un passaggio dall'apprendimento scolastico alla costruzione di un progetto di vita e di un percorso verso l'autonomia e l'introduzione di un raccordo tra teoria ed aspetti pratici.

La consapevolezza che solo a partire dall'approccio disciplinare si può promuovere efficacemente un processo di integrazione e apprendimento, ha portato alla scelta di dedicare parte del monte-ore alla presentazione di alcuni contenuti caratterizzanti le discipline. Nella maggioranza dei casi l'area della didattica disciplinare comprende alcune ore dedicate all'area Linguistica ed altre dedicate all'area Matematica. Tuttavia ci sembrano da sottolineare alcuni problemi specifici che riguardano la matematica.

Se consideriamo l'intervento su un alunno il cui deficit non ha conseguenze sul piano intellettivo, questo sarà soprattutto un intervento di vicarianza per sopperire a difficoltà operative nell'apprendimento della materia. Esistono ad esempio strumenti in grado di disegnare "in rilievo"; ma la loro conoscenza non significa che l'insegnante di sostegno debba necessariamente essere un esperto di diagrammi, di tracciamento di grafici o di studio di funzioni: la compresenza con l'insegnante curricolare aiuta a sopperire alle inevitabili lacune. In casi del genere la competenza specifica dell'insegnante specializzato richiede di essere al corrente, per esempio, di quali supporti informatici esistono per una vicarianza reale del deficit

Diversa è invece la situazione qualora si lavori con un alunno che presenta un deficit cognitivo. Spesso in questi casi la matematica appare a molti uno scoglio insuperabile, e si ritiene estremamente difficile o inutile, se non addirittura impossibile, proporre a questi soggetti un itinerario di apprendimento in ambito matematico. Senza

---

[53] Riprendiamo qui, con una maggior quantità di esempi e proposte didattiche specifiche, le riflessioni esposte in Contardi A., Pertichino M. e Piochi B., 2002, *Formazione matematica dell'insegnante specializzato per il sostegno*, in AA.VV., *Università e Formazione degli insegnanti: non si parte da zero*, Forum, Udine, pagg. 203-208

negare o minimizzare gli ostacoli, e prescindendo in questa sede dai diffusi pregiudizi nei confronti della materia, bisogna sottolineare con forza come la matematica (almeno un certo livello di abilità di tipo matematico) abbia un ruolo essenziale per la comprensione e la gestione di gran parte delle situazioni della vita quotidiana. Dunque una significativa educazione matematica è necessaria per una migliore qualità della vita e la conquista dell'autonomia[54], obiettivo fondamentale per la crescita e per l'inserimento sociale, in particolare di chi è in situazione di handicap[55].

Inoltre, come è noto, in Italia è stata fatta la scelta in favore di una piena integrazione degli alunni in difficoltà. Con il termine *integrazione* si intende riferirsi sia ad una caratteristica di contesto: 'sono integrato in quanto sono presente nel contesto della classe di tutti', sia ad una caratteristica di processo di apprendimento: 'sono integrato in quanto imparo insieme agli altri'. Va tenuto comunque sempre presente che 'imparare con gli altri' non significa imparare le stesse cose negli stessi momenti, ma percorrere ognuno (disabile o meno) una strada individuale di apprendimento, all'interno di un curriculum generale integrato[56]. Parlare di integrazione ha dunque una pluralità di implicazioni:

- Nei confronti dell'alunno disabile, significa poter pensare ad un apprendimento che segue una progettazione individuale, ma che al tempo stesso utilizza il confronto con gli altri per acquisire modelli di comportamento.
- Nei confronti della classe, significa poter utilizzare la provocazione data dalla presenza dell'alunno in difficoltà per la realizzazione di una didattica più attenta alle piccole diversità di tutti e che, nel rafforzamento per quell'alunno di concetti teoricamente già acquisiti dalla classe, offre occasioni di consolidamento e recupero per tutti.
- Nei confronti dell'insegnante, significa poter scoprire altri contenuti della professionalità docente, richiedendo di costruire un progetto individualizzato

---

54 Si rimanda, per approfondire tali affermazioni, agli atti del Workshop n. 7 del 3° Convegno Internazionale "La Qualità dell'integrazione nella scuola e nella società", Rimini, novembre 2001 o agli articoli raccolti nel volume A. Contardi e B.Piochi (a cura di), 2002, *Difficoltà di apprendimento in Matematica,* Erickson, Trento. Una notevole quantità di esempi concreti si possono inoltre trovare nei diversi volumi degli Atti dei Convegni annuali "Matematica e Difficoltà"; per un elenco completo e ragionato del materiale presentato in questi Convegni si veda: Pellegrino C. e Piochi B, 2002, *Il GRIMED e i convegni 'Matematica & Difficoltà' (1991-2001). Facciamo il punto guardando al futuro,* Pitagora, Bologna

55 La legge quadro per l'assistenza, l'integrazione sociale e i diritti delle persone handicappate, Legge 5/2/92 n. 104, ribadisce all'art. 12 che *"l'integrazione scolastica ha come obiettivo lo sviluppo delle potenzialità della persona handicappata nell'apprendimento, nella comunicazione, nelle relazioni e nella socializzazione".*

56 "Integrare, educativamente parlando, non è tenere insieme in un'unica classe alunni diversi senza applicare a ciascuno di loro i contenuti e il metodo di cui hanno bisogno. [...] La realtà mostra due variabili importanti: le enorme differenze che esistono fra i diversi tipi di difficoltà, cosicché quello che è valido per uno non lo è per un altro, e il cambiamento progressivo di situazioni, necessità e capacità, provocato dalla crescita dell'alunno" (Flòrez J., Troncoso M.V., 1988, *Luces y sombras de la integraciòn escolar de la personas con discapicacidad en España,* Sìndrome de Down, 15 (3), n. 57, sept. 1998, pagg. 78-87).

senza doversi riferire acriticamente a un libro di testo pre-costituito, promuovendo così un modo di far scuola che stimola strategie in un continuo confronto fra realtà e teoria.

Ciò rende naturale la scelta di educare alla matematica attraverso obiettivi e attività che abbiano una diretta ricaduta in termini di intervento sulla realtà e di acquisizione di autonomia. D'altra parte i concetti matematici "passano" anche in attività generalmente non ritenute di tipo matematico e hanno valenza anche al di là dell'area strettamente riferita alla matematica. Bisogna però, per poter cogliere tali valenze, che l'insegnante abbia una formazione matematica di base e sia guidato a rileggere la materia in questa ottica. In altre parole, occorre una cultura specializzata, non una cultura matematica specialistica, per riuscire a progettare un intervento, individuando la possibile "zona di sviluppo prossimale" degli alunni all'interno delle proposte di programma della scuola in cui si opera..

La scelta degli obiettivi e delle attività da proporre in funzione di essi ad alunni disabili richiede innanzitutto una scelta di priorità: l'individuazione cioè di quali siano gli obiettivi "importanti" e indispensabili e quali no, e ancora quali abilità non possedute possano esser aggirate nella salvaguardia del risultato complessivo. D'altra parte non è detto che un concetto matematico complesso non coinvolga competenze o non intervenga in situazioni di vita anche elementari. Per essere più espliciti, proponiamo alcuni esempi di attività relative all'autonomia associabili a due obiettivi matematici "alti"[57]:

Relazioni e corrispondenze

- *saper recepire e mettere in corrispondenza elementari messaggi visivi e sonori (campanello, telefono, interruttori, ...)*
- *saper "gestire" alcune regole sociali (giocare, vestirsi, ...)*
- *capire l'uso di sequenze temporali (mattina, pomeriggio, sera)*
- *organizzazione di una giornata-tipo*
- *uso del telefono e dell'elenco telefonico*

Trasformazioni geometriche

- *osservare e comprendere alcuni fenomeni naturali*
- *padroneggiare il proprio corpo*
- *"guardare" con interesse il mondo dell'arte*
- *uso delle specchio e riconoscimento delle "taglie" dei vestiti*
- *saper usare una fotocopiatrice*

Partendo da attività di questo tipo si può lavorare sui concetti matematici, e viceversa. Ci pare importante che l'insegnante abbia coscienza della valenza matematica

---

[57] Un lavoro sul rapporto fra questi concetti "alti" e le applicazioni della matematica si rivela fondamentale ad esempio per tracciare un programma di intervento in Istituti Professionali. Si veda per questo la nota di Contardi, Pertichino e Piochi in Bruno Longo P., Davoli A. e Sandri P. (a cura di), 2003, *Osservare, valutare, orientare gli alunni in difficoltà*, Pitagora ed., Bologna.

di tali attività, anche se, come è naturale, all'alunno disabile sarà spesso sufficiente una conoscenza pratica dei concetti in questione, legata al loro uso "in atto" e non si richiederà una conoscenza teorica esplicita. Le attività sopra richiamate sono evidentemente legate all'autonomia di vita personale; sta all'insegnante capire a quale livello di apprendimento si situa il singolo studente ed a quale può tendere, nella sua individualità. Una tale ricognizione contribuisce a fornire il quadro di riferimento essenziale per la costruzione di un Progetto Educativo, con una programmazione non legata alla ripartizione in cicli o classi, ma ad un progetto globale di crescita del soggetto.

Tenendo presente quel che abbiamo detto fino qui, come organizzare allora la formazione matematica degli insegnanti specializzati ? Naturalmente il piccolo numero di ore generalmente dedicate alla disciplina nei Corsi abilitanti impedisce di trattare in maniera esauriente tutti i singoli argomenti. Occorre però che sia offerto agli specializzandi un metodo di lavoro, con opportune esemplificazioni, che consenta loro di proseguire la propria formazione in una dialettica efficace con l'insegnante curricolare. Se riusciremo a proporre un tale metodo di lavoro, diventa relativamente poco significativo se ci si concentrerà più su concetti aritmetici o geometrici o di tipo logico[58], visti nell'ottica del loro impiego per la vita quotidiana e lo sviluppo dell'autonomia.

All'insegnante andranno anche forniti strumenti per progettare e realizzare il percorso individuale di apprendimento all'interno del, e insieme al, gruppo-classe intero. Anche se per certe attività infatti può diventare necessario operare nel rapporto uno a uno, l'apprendimento matematico proposto può essere motivato in relazione alla crescita personale del ragazzo in un'ottica di autonomia, ma va comunque realizzato cercando di affiancare all'alunno i suoi compagni di classe, migliorandone l'inserimento, anziché isolandolo con proposte "più adatte perché più facili". Fra l'altro, l'operare all'interno della classe abilita l'insegnante di sostegno come risorsa per l'intera classe, con ricaduta vantaggiosa per tutti i ragazzi, per gli insegnanti curricolari e anche per lo stesso insegnante di sostegno, in particolare nei suoi rapporti con le diverse materie[59].

Va invece chiarito che, per rendere davvero efficace l'insegnamento impartito ai futuri insegnanti specializzati, andranno adottate delle opportune metodologie didattiche per adulti. In particolare suggeriamo le seguenti attività e attenzioni che hanno dato buoni risultati e un alto grado di apprezzamento quando sono stati adottati in contesti analoghi:

---

[58] Si potrebbero ad esempio esaminare i concetti di base legati agli Insiemi e alle Funzioni, ai Numeri, allo Spazio e alla Misura (cfr. anche Manara C.F., 1993, *La matematica di base per insegnanti di sostegno*, Milano); inoltre a nostro parere il tema dell'insegnamento per problemi e quello dell'uso di software didattico per la matematica dovrebbero comunque trovare spazio all'interno della proposta. Su questi temi si può vedere, degli stessi Autori, gli articoli *Apprendimento della matematica: insegnamento per problemi e alunni con handicap*, Psicologia e Scuola, 71 (XV), 1994, pagg. 3-8 e *Ausili software per disabili*, Sindrome Down Notizie, XV (2/3),1996, pagg. 10-18

[59] Si vedano anche le considerazioni e gli esempi in: Mangiaracina E., 2001, *La didattica speciale per un curricolo di classe*, Scuola e Didattica, n. 4, XLVII, pagg. 92-98.

- individuare alcuni concetti base sui quali operare concretamene, in modo da aiutare gli allievi a costruire la *metodologia di intervento*[60];
- riflettere su esperienze di vita comune (ad esempio "come si misura");
- confrontarsi su esperienze di didattica della matematica per tutti (tratti ad esempio da studi e riviste non specifici per l'handicap) e tentarne una "traduzione" per alunni disabili all'interno del gruppo classe;
- promuovere nelle esperienze di tirocinio e rileggere insieme agli specializzandi il rapporto tra insegnante specializzato e insegnante curricolare di matematica.

Non si esaurirà certo così la formazione dell'insegnante specializzato; lo stile di lavoro acquisito nella formazione SSIS potrà costituire però la chiave di approccio per la progettazione di ulteriori momenti formativi.

---

[60] A titolo di esempio citiamo la costruzione di alcune unità didattiche sulla concretizzazione di concetti nell'ottica dell'autonomia: classificazioni e insiemi operate all'interno di un supermercato; successioni numeriche operate in contesti di numerazione stradale; operazioni in contesti di compra-vendita; forme geometriche in segnali stradali o insegne; direzioni e percorsi in situazioni di spostamenti o gite della classe,...

STORIA DELLE SCIENZE PER LA DIDATTICA
UNA "CONTROVERSIA" TRA IL XVII E IL XVIII SECOLO

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica,
Università di Roma "La Sapienza"

1. "Esistono" i logaritmi dei numeri negativi?

La questione della natura dei logaritmi dei numeri negativi fu sollevata da una lettera di Leibniz a Giovanni Bernoulli del 16 marzo 1712 (Leibniz, 1856); a tale riguardo, gli studiosi del tempo erano divisi in due schieramenti: molti sostenevano l'opinione di Leibniz, poi ripresa da Euler, Walmesley e in Italia, tra gli altri, da Fontana e da Franceschinis (Franceschinis, 1787), secondo la quale i logaritmi dei negativi avrebbero dovuto essere interpretati come quantità immaginarie (Naux, 1971; Bagni, 1994). Contrario a quest'opinione era un gruppo di matematici guidato da Giovanni Bernoulli, il quale proponeva di considerare reali tali logaritmi e di porre $\log(-x) = \log x$ in base alla:

$$2\cdot\log(-1) = \log(-1)^2 = \log(+1)^2 = 2\cdot\log(+1)$$

Dal punto di vista moderno, sarà Leonhard Euler nel 1747 a chiarire la questione applicando la celebre formula: $e^{i\omega} = \cos\omega + i\cdot\sin\omega$. Ponendo $\omega = \pi$, infatti, si ottiene $e^{i\pi} = -1$ da cui $\log_e(-1) = i\pi$. Euler proverà anche che ciascun numero ammette, in ambito complesso, infiniti logaritmi; infatti dalla $e^{i\omega} = \cos\omega + i\cdot\sin\omega$, con $k \in \mathbf{Z}$ segue: $\log_e a = b \Rightarrow \log_e a = b + 2k\pi\cdot i$ (Euler, 1749; Langer, 1935).

Osserviamo che la posizione bernoulliana secondo la quale risulta $\log(-x) = \log x$ porta ad una considerazione della curva logaritmica costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse delle ordinate; ciò è indicato da molti sostenitori della realtà dei logaritmi dei numeri negativi. tra i quali Vincenzo e Giordano Riccati. Giordano Riccati afferma:

«La vera equazione della Logistica [...] ha due rami affatto simili, e dall'assintoto equidistanti, onde ci sono forniti i logaritmi di' numeri negativi eguali a quelli de' numeri postivi» ((Riccati, G., 1778a; inoltre: Riccati, G. 1778b; Riccati, V. 1767 e 1789).

Un brillante allievo di Vincenzo Riccati nello studio bolognese fu il trentino Giovanni Francesco G. Malfatti (1731-1807): anch'egli contestò, seppur velatamente, la posizione riccatiana sulla realtà dei logaritmi dei numeri negativi. Malfatti assunse però una posizione di mediazione, forse per confermare il rispetto e la gratitudine nei confronti del proprio maestro (Giusti, 1982); in sostanza, Malfatti sottolinea che la curva logaritmica di equazione $y = \log x$ non può essere considerata coincidente con la curva di equazione $2y = \log x^2$ essendo questa seconda equazione esprimibile da $y = \log|x|$. I due rami della curva logaritmica risultano quindi propri soltanto del grafico di $y = \log|x|$, non di quello di $y = \log x$.

2. Un'esperienza didattica

Le considerazioni storiche esposte sono state applicate in una ricerca didattica sperimentale in cui sono state coinvolte due classi di IV e due classi di V liceo scientifico (per un totale di 92 allievi; le prove sono state effettuate a Treviso nel 1999). Gli allievi di tali classi conoscevano i logaritmi, la funzione valore assoluto, i numeri complessi (ma non la "formula di Eulero").

È stata inizialmente fornita a ciascun allievo la scheda seguente:

Scheda A
In un libro del Settecento che si occupa di logaritmi abbiamo trovato:
Sappiamo che: $\log_2 64 = 6$ **allora:** $\log_2 8^2 = 6$
e anche: $\log_2(-8)^2 = 6$ **ma allora è:** $2\log_2(-8) = 6$
Dunque concludiamo: $\log_2(-8) = 3$
Sei d'accordo con l'autore del libro? Giustifica la tua risposta.

Si osservi che, in questa fase, abbiamo ritenuto non opportuno segnalare esplicitamente la conseguenza $\log_2(-8) = 3 \Rightarrow 2^3 = -8$. Riportiamo i risultati nella seguente tabella:

Scheda A
(92 allievi: 48 di IV liceo scientifico, 44 di V liceo scientifico)

	IV liceo	V liceo	Totale
D'accordo con l'autore del libro	13	7	20 (22%)
Non d'accordo con l'autore del libro	27	26	53 (57%)
Altre risp. o nessuna risp.	8	11	19 (21%)

Notiamo innanzitutto che la differenza di comportamento tra gli allievi delle IV e delle V classi non appare rilevante (anticipiamo che la stessa osservazione potrà essere ripetuta anche per le risposte date dagli allievi alle schede che saranno presentate nel seguito di questo paragrafo).

Per quanto riguarda le giustificazioni degli allievi, alcune affermazioni sono interessanti; tra chi ha rifiutato l'affermazione riportata nella scheda A troviamo:

"Il dominio è costituito dai soli reali positivi" (Isabella, classe IV).

"La proprietà si applica solo se tutti i logaritmi coinvolti esistono reali, altrimenti non si può lavorare su cose che non ci sono" (Maurizio, classe V).

Un allievo osserva che l'esempio proposto coinvolge un quadrato, 8^2, (e finirà quindi per negarne una validità generale):

"64 è un quadrato perfetto, cioè un caso particolare" (Aldo, classe IV).

Alcuni allievi, pur rifiutando infine il procedimento indicato, ritengono di dover comunque esprimere qualche perplessità:

"Il procedimento sembrerebbe giusto ma contrasta con le condizioni" (Carlo, classe V).

Altri invece accettano il procedimento osservando semplicemente che:

"L'autore del libro ha applicato la proprietà" (Giuseppe, classe IV).

Allo stesso gruppo di allievi abbiamo quindi proposto la seguente scheda:

Scheda B.: Nel 1795, il matematico Giovanni Francesco Malfatti (1731-1807) ha osservato che:
la curva logaritmica di equazione $y = \log x$
non può essere considerata coincidente con la curva di equazione: $2y = \log x^2$
in quanto questa seconda equazione può essere scritta nella forma:
$y = \log|x|$
Sei d'accordo con Malfatti?

Riportiamo i risultati nella seguente tabella:

Scheda B **(92 allievi: 48 di IV liceo scientifico, 44 di V liceo scientifico)**			
	IV liceo	V liceo	Totale
D'accordo con Malfatti	43	39	82 (89%)
Non d'accordo con Malfatti	4	2	6 (7%)
Altre risp. o nessuna risp.	1	3	4 (4%)

Abbiamo infine chiesto agli allievi di riconsiderare la risposta data al quesito della scheda A, con la possibilità, dunque, di confermare o di cambiare liberamente la risposta precedentemente data.

Riportiamo i risultati nella seguente tabella:

Scheda A (seconda considerazione) **(92 allievi: 48 di IV liceo scientifico, 44 di V liceo scientifico)**			
	IV liceo	V liceo	Totale
D'accordo con l'autore del libro	3	2	5 (5%)
Non d'accordo con l'autore del libro	37	39	76 (83%)
Altre risp. o nessuna risposta	8	3	11 (12%)

Dunque un non trascurabile numero di allievi orienta diversamente la propria opinione: se prima della considerazione della nota di Malfatti il 57% dichiarava di optare per la risposta corretta, dopo l'esame della posizione malfattiana (accettata dall'89% degli allievi) tale percentuale è salita all'83%.

Concludiamo osservando che il presente lavoro intende segnalare la possibilità di introdurre un esempio storico in grado di stimolare ed orientare utilmente gli allievi (molti lavori si occupano dell'applicazione della storia della matematica nella didattica; senza alcuna pretesa di completezza indichiamo: Pepe, 1990; Furinghetti, 1993; Swetz, 1995; Furinghetti & Somaglia, 1997; Pizzamiglio, 2002): sulla questione molti altri test potrebbero essere ideati e somministrati agli studenti. Inoltre osserviamo che una ricerca didattica completa potrebbe essere corredata da una più profonda e dettagliata analisi delle caratteristiche originali dell'insegnamento degli argomenti trattati (ad esempio della nozione di logaritmo) e da interviste sistematiche: prima di trarre conclusioni definitive si dovrebbe ad esempio chiarire quale sia stata l'effettiva comprensione da parte degli allievi del collegamento tra l'osservazione di Malfatti e l'esempio proposto.

Bibliografia

Bagni, G.T. (1994), Una «controversia» della matematica del Settecento: i logaritmi dei numeri negativi, *Periodico di Matematiche*, VII, 2, 2/3, 95-106.

Euler, L. (1749), De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et immaginaires, *Mem. Acad. des Sciences de Berlin*, 5.

Franceschinis, F.M. (1787), *Opuscoli matematici*, Remondini, Bassano.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.

Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.

Giusti, E. (1982), Problemi e metodi di analisi matematica nell'opera di Gianfrancesco Malfatti, *Atti del Convegno su G. Malfatti*, Ferrara, 23-24 X 1981, 37-56, Bologna.

Langer, R.E. (1935), The life of Leonhard Euler, *Scripta mathematica*, 3.

Leibniz, G.W. (1856), *Mathematischen Schriften*, Gerhardt, C.I. (a cura di) III, II, *Briefwechsel zwiscen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli*, 887, 895, 899, Halle 1856 (ristampa anastatica: Georg Olms Verlagsbuchhandlung 1962).

Malfatti, G.F. (1795), Pensieri sulla famosa questione dei logaritmi dei numeri negativi, *Memorie della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Mantova*, 3-54.

Naux, C. (1971), *Histoire des logarithmes de Neper a Euler*, Blanchard, Paris.

Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33.

Pizzamiglio, P. (2002), *Matematica e storia*, La Scuola, Brescia.

Riccati, G. (1778a), Lettera al Signore Iacopo Ab. Pellizzari sopra i logaritmi de' numeri negativi, *Continuazione del Nuovo Giornale de' Letterati di Modena*, XVI.

Riccati, G. (1778b), Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale, *Memorie della Società Italiana*, IV, 116.

Riccati, V. (1767), Dieci lettere del P. Vincenzo Riccati all'ab. Jacopo Pellizzari sulla questione della Logistica. Prima raccolta di lettere sopra la questione: Se la Logistica abbia un doppio ramo, *Commercio Epistolare del Conte Giordano Riccati*, XXI, Biblioteca Civica di Udine.

Riccati, V. (1789), *Sopra i logaritmi dei numeri negativi*, Società Tipografica, Modena.

Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.

UN LABORATORIO DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA NELLA SSIS: STORIA DELLA MATEMATICA COME STRUMENTO DI MEDIAZIONE DIDATTICA

Annamaria Somaglia
asomagl@tin.it
Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova & SSIS Liguria

Integrando l'esperienza di insegnante di scuola secondaria che ha operato in ricerca in didattica e in storia, con quella di supervisore di tirocinio, documentandomi sulla formazione iniziale per insegnanti all'estero, usando letteratura (Elbaz,1983), partecipando a forum di discussione, ho elaborato un percorso nel laboratorio di didattica della matematica che collega teoria e pratica di insegnamento. Nel laboratorio del primo anno della SSIS qui presentato si prevede -analisi di prescrizioni (programmi scolastici)- analisi di strumenti di mediazione didattica (storia della matematica) - progettazione di un percorso didattico con uso di materiale didattico e di ricerca. Ho condotto la attività (28 ore) con discussioni guidate, lavoro a gruppi, con valutazione formativa in itinere, e sommativa in relazione al materiale prodotto. All'inizio è stata fornita una scheda strutturata per l'analisi dei programmi dalla scuola elementare al liceo; la ricerca per nuclei tematici e di processo (Umi-Ciim 2001,Syllabus UMI) induce a guardare alla strategia a spirale dei programmi e all'apprendimento degli studenti come processo continuo. Per introdurre all'attività di analisi di concetti ho presentato la ricerca (Furinghetti, Somaglia, 1996): uno studio sulla funzione che ricostruisce una mappa dei concetti che stanno dietro al concetto di funzione. Gli specializzandi ne hanno applicato la metodologia all'analisi dei concetti/processi che stanno dietro al "pensare algebricamente" La presentazione che ho fatto in laboratorio del percorso storico dell'algebra come emergere del pensiero "per analisi" (Somaglia, 97) ha permesso di vederla nel suo processo genetico (Brousseau, 1983; Radford, 1997). La discussione sui modi di guardare ai concetti fondamentali dietro al "pensiero algebrico", alla luce del percorso storico, ha orientato e condotto ad una opinione condivisa. Nella ipotesi di percorso didattico, limitata al passaggio incognita/ variabile, basata su attività per problemi, la analisi critica delle proposte di Radford-Guerette e di Rojano T.-Sutherland sostenuta nel corso di Didattica della Matematica, ha orientato gli studenti verso la geometria del "taglia e cuci", e la soluzione di problemi "per analisi" con uno schema utile anche all'uso del foglio elettronico. (È previsto in laboratorio l'uso di Excel e Cabri) In sede d'esame gli specializzandi si sono mostrati consapevoli del percorso seguito e della sua riproducibilità su argomenti diversi.

Mentre il laboratorio procedeva, come supervisore, proponevo lo stesso tema nel gruppo operativo del progetto di tirocinio e nel gruppo "supervisore/ tirocinanti/ insegnante" che preparava le schede di lavoro da portare in classe (dove la attività è condotta attraverso le tre fasi della teoria della Sfard). L'insegnante di classe, che seguiva didattica e storia della matematica nella SSIS, consapevole e motivata, rifletteva ricomponendo teoria appresa e pratica osservata sulle tirocinanti.

La attività coordinata di andata/ritorno tra teoria, costruzione in collaborazione di materiale di lavoro e pratica osservata sembra essere formativa non solo per le tirocinanti, ma anche per l'insegnante che ha seguito un progetto didattico legato alla ricerca.

Concludendo, mi è sembrato interessante che:- gli specializzandi abbiano legato strettamente laboratorio e ricerca didattica - la storia sia stata usata per fornire materiali per costruire il percorso didattico e far individuare i concetti/processi chiave, orientando anche il modo di guardare a tali concetti- il laboratorio abbia avuto sviluppi nel tirocinio e connessioni con la formazione in servizio.

Bibliografia

Arzarello F.: 1996, 'Tendenze attuali della ricerca Italiana in Didattica della Matematica', *Notiziario dell'UMI,* 23, n.1-2, 68-78.

Brousseau, G.: 1983, 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en didactique des mathématiques*, v.4, 165-198.

Elbaz, F.,1983, *Teacher Thinking :A Study of Practical Knowledge*, London

Furinghetti, F., Somaglia, A.: 1996, 'Functions in algebraic and graphical environments', in A. Antibi (ed), *Proceedings of CIEAEM 46* (Toulouse, 1994), t.I, 248-255.

Furinghetti, F., Somaglia, A.: 2001,'The method of analysis as a common thread in the History of algebra: reflections for teaching", *Proceedings of ICMI 12, The future of the teaching and learning of algebra* (Melbourne) 2001,v.1, 265-272.

Radford, L.: 1997, 'On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics', *For the learning of mathematics*, v.17, n.1, 26-33.

Radford, L.,Guerette, G.,1996, 'Quadratic equations: reinventing the formula. A teaching sequence based on the historical development of Algebra'in Logarto, M. J., Vieira, A., Veloso, E. (ed), *Proceedings of the2-nd European summer university on 'History and epistemology in mathematics education'* (Braga,), v.II,301-308.

Rojano,T.,Sutherland, R.,2001,"Arithmetic world-Algebra world" in Chick,H. Stacey,K., Vincent,J. ,Vincent,J. (ed) *.Proceedings of ICMI 12 "The future of the teaching and learning of algebra"*, (Melbourne),2001, v.2, 515-522.

Somaglia, A., 1998, "Analisi-sintesi: un resoconto di esperienze didattiche" in *Conferenze e Seminari Mathesis '97-98(E.Gallo, L.Giacardi,S.Roero)* 16-27.

Somaglia, A. 97"Storia dell'algebra" Conferenza al Corso di aggiornamento per insegnanti, Trento

UMI, 1999, "Syllabus di matematica" in *Notiziario della UMI*, a. XXVI, n°8.

UMI-CIIM, 2001,"Matematica 2001" XXII Convegno UMI-CIIM, Ischia 2001

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

http://www.icponline.org

http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/people/RBallHist.html

www.istruzione.it

Logica dell'incerto e insegnamento della matematica

Giordano Bruno
Università di Roma "La Sapienza"

Il trattamento dell'*incertezza* è uno degli argomenti che maggiormente viene studiato nell'ambito della ricerca internazionale in Matematica e in Informatica. Nelle applicazioni è un aspetto fondamentale, si pensi alla trasmissione dei segnali, alle previsioni economiche, ai sistemi esperti, solo per fare qualche esempio. Non altrettanta rilevanza e diffusione assume, a mio parere, nell'insegnamento scolastico ed universitario nel nostro paese. Ritengo che questa sia una grave lacuna da colmare al più presto. Non è difficile trarre dalla realtà esempi che facciano comprendere come sia necessario fornire ad ogni individuo gli strumenti concettuali e culturali che gli permettano di imparare a trattare l'incertezza.

Ciò va fatto costruendo e sviluppando l'insegnamento di una *logica dell'incerto*. Nelle nostre scuole al più viene insegnata un po' di *probabilità*, vista quasi sempre o come *rapporto dei casi favorevoli su quelli possibili* o come *frequenza relativa di successo*. Se ne insegna, cioè, il calcolo. Ma lo studio della struttura concettuale atta a descrivere l'incertezza, cioè appunto la **logica dell'incerto**, è molto più ampio, più significativo e più istruttivo di quanto non venga comunemente proposto. Qui riporterò in breve quegli argomenti e concetti che ritengo ne costituiscano le basi. Mi soffermerò soprattutto su cosa è bene sviluppare e come farlo nella scuola primaria; avendo a supporto le ultime ricerche psico-pedagogiche, dovute in particolare a E. Fishbein (si veda [1]) che sottolinea come fin da piccoli siamo in grado di **effettuare stime intuitive e soggettive di probabilità**.

Nella scuola primaria solo dopo aver fatto prendere confidenza con *parole chiave* quali **possibile, certo, impossibile** (suggerisco di seguire questo ordine), e con il concetto di **evento**, si potrà passare a trattare la misura dell'incertezza. Introducendo una *misura qualitativa*, un **ordinamento** fra *eventi* : questo è *più possibile* di quello e di quell'altro ancora e così via. Far stilare ai ragazzi la classifica finale del campionato di calcio di serie A è un buon esempio in questo senso. In generale, invece si comincia a parlare subito di probabilità relative a giochi, ove sono presenti *simmetrie*. Facendo avvertire così la probabilità come una misura *oggettiva*, cosa che non è, perché essa dipende sempre dall'*informazione* che possediamo. Dopo si passerà alle *operazioni logiche* tra eventi (che sono diverse da quelle insiemistiche!, e non si deve fare confusione con quest'ultime) e successivamente alla valutazione **quantitativa** di probabilità di eventi, introducendo il concetto di *scommessa coerente* e definendo la probabilità di un evento come la quota di scommessa che un individuo è disposto a pagare per ricevere l'intera somma pattuita nel caso in cui l'evento si verifichi, quando **nessuna delle due parti, scommettitore e banco, può essere certa a priori di ottenere un guadagno**. Infine si potrà affrontare il problema dell'*inferenza* probabilistica, facendo vedere come si debba (e quando) mutare le proprie valutazioni, al cambiare delle *informazioni* possedute: ad esempio, valutare la probabilità che ci siano meno incidenti d'auto in un anno nel nostro paese, supposto di sapere che almeno l'80% dei veicoli rispettino i limiti di velocità.

Per molte altre considerazioni e aspetti critici si rimanda a un lavoro più generale [2] e a [3].

Bibliografia

[1] M.P. Perelli: "*Apprendimento della probabilità e ricerche psicologiche: sintesi e riflessioni*", L'ins. della mat. e delle sc. int., vol. 19° n.1, 1996.

[2] G. Bruno, *Logica dell'incerto e insegnamento della probabilità*, preprint

[3] G. Bruno, *L'insegnamento di probabilità e statistica nella formazione di base*, Atti del Convegno Nazionale Mathesis, Mantova, 2001.

UMORISMO E MATEMATICA

Paolo Maroscia
Università di Roma "La Sapienza"

Vari legami tra la matematica e l'umorismo sono stati studiati finora da alcuni autori, tra i quali: J.A. PAULOS (in "Mathematics and Humour", The University of Chicago Press, Chicago, 1980) e G. LOLLI (in "Il riso di Talete - Matematica e umorismo", Bollati Boringhieri, 1998).

In particolare, Paulos, che è stato forse il primo a segnalare e a esaminare alcune "somiglianze" tra la matematica e l'umorismo, ha sviluppato una teoria matematica dell'umorismo, costruendo un modello formale, basato sulla teoria delle catastrofi.

Invece, Lolli ha analizzato soprattutto la matematica come "oggetto di umorismo" e i matematici come "produttori di umorismo", sviluppando poi un'ampia trattazione dedicata ai paradossi.

Lo scopo di questa comunicazione è innanzitutto quello di sottolineare che l'umorismo e la matematica sono in realtà "naturalmente" collegati tra loro, poiché hanno in comune alcune caratteristiche e procedimenti importanti.

In tal senso, si può parlare allora della presenza e del ruolo dell'umorismo "all'interno della matematica", naturalmente con sfumature e accentuazioni diverse, da caso a caso. Tutto ciò può essere verificato, come si accennerà più avanti, esaminando la struttura di formule, enunciati, procedimenti, anche a livello elementare, al di là dei giochi e dei paradossi.

A mio avviso, le principali caratteristiche "comuni" sono:

§ la concisione
§ l'incongruità
§ la leggerezza
§ la consistenza
§ la sorpresa

mentre i procedimenti fondamentali "comuni" sono:

- l'inversione
- l'iterazione

Senza addentrarmi in un'analisi dettagliata delle singole voci appena riportate, mi limito (per esigenze di spazio) a segnalare che qui l'incongruità è intesa in senso lato, ossia non solo con riferimento alla struttura interna della situazione in esame, ma anche in rapporto al contesto generale in cui essa è inserita. Un esempio illuminante, in proposito, è la celebre "definizione" della matematica data da B. RUSSELL: "La Matematica è l'unica scienza esatta, dove non si sa di cosa si parla, né se ciò di cui si parla è vero".

Con riferimento ai legami tra matematica e umorismo sopra analizzati, un primo elenco di situazioni matematiche "espressive" (a parte i paradossi) può essere il seguente:

- il ruolo del resto nella divisione...
- il ruolo dei denominatori nelle frazioni...
- il ruolo dello zero...
- il ruolo della diagonale...
- il calcolo "alla Gauss" della somma dei numeri da 1 a 100
- l'invarianza, in un triangolo, del prodotto di un lato per l'altezza corrispondente
- il teorema di Pitagora
- la dimostrazione per assurdo
- l'uso (o abuso?) del "se, e soltanto se"
- le proprietà dell'"inversa" di un'applicazione tra insiemi
- la definizione di limite...
- il teorema del valor medio
- il teorema fondamentale del calcolo integrale
- la nozione di autovettore
- il teorema di Cayley-Hamilton
- il teorema del punto fisso
- il teorema di Pick

Quanto sopra esposto verrà trattato ampiamente e in dettaglio in un prossimo lavoro.

Per finire, aggiungo soltanto che l'umorismo può:

- fornire, per così dire, una nuova chiave di lettura della matematica, nel suo complesso;
- stimolare l'interesse e la curiosità degli studenti, oltre che facilitare l'apprendimento della matematica, in classe;
- arricchire culturalmente l'insegnamento della matematica, offrendo spunti vari e collegamenti con altre discipline (letteratura, filosofia, psicologia, linguistica, arte, religione,...), anche alla luce dei contributi significativi dati, tra gli altri, da G. LICHTENBERG, T. LIPPS, S. FREUD, H. BERGSON, L. PIRANDELLO, G. BATESON.

LA COPERTA DI PENELOPE: UN APPROCCIO AL CONCETTO DI FUNZIONE NELLA SCUOLA ELEMENTARE

Emilia Bulgarelli e Silvia Ghirardi
N.R.D. Dipartimento di Matematica - Università di Torino

L'attività è stata proposta a due classi quarte dei Plessi "G. Leopardi" e "G. Gianelli" dell'I.C. "D.M.Turoldo" (TO) , a due classi quinte della Scuola Elementare "B. Fenoglio" dell'I.C. Costigliole Saluzzo (CN) e alla classe quarta dell'I.C. Gavi (AL) .
Il progetto prevede la risoluzione di una situazione problema, calata nel contesto narrativo della storia di Ulisse e Penelope, nella quale le grandezze variabili in gioco sono lo **spazio**, inteso come la lunghezza della coperta, e il **tempo**. Ecco il testo del problema presentato ai bambini:

LA COPERTA DI PENELOPE

...Nell'isola di Itaca, Penelope attendeva da ormai dieci anni il ritorno dalla guerra del marito Ulisse. A Itaca, però, molti uomini volevano prendere il posto di Ulisse e sposare Penelope. Un giorno la dea Minerva disse a Penelope che Ulisse stava tornando e la sua nave avrebbe impiegato 50 giorni per arrivare ad Itaca. [...]
Penelope radunò subito i pretendenti e disse loro:
"Ho deciso, sceglierò tra voi il mio sposo e le nozze si celebreranno quando avrò finito di tessere una nuova coperta per il letto matrimoniale. Incomincerò oggi e prometto di tessere ogni due giorni; quando avrò finito, la coperta sarà la mia dote di sposa".
I pretendenti accettarono. La coperta doveva essere lunga 15 spanne.
Penelope iniziò subito il lavoro, ma un giorno tesseva una spanna di coperta, mentre il giorno dopo, di nascosto, ne disfaceva la metà....

(Liberamente tratto da "Odissea" di Omero)

Penelope avrà dovuto scegliere un altro sposo? Perché?

Il compito che ci siamo proposte, come insegnanti – ricercatrici nell'ambito del progetto Collaborativo MIUR – Dipartimento di Matematica, è stato quello di accostare gli aspetti didattici (progettazione didattica dell'attività, metodologia di lavoro, predisposizione del contesto), agli aspetti di ricerca, attraverso l'analisi delle strategie risolutive messe in atto dai bambini. La scansione didattica dell'attività può essere riassunta nelle seguenti fasi: lettura e prima analisi del testo, risoluzione a gruppi, discussione delle soluzioni, rappresentazione del problema in una tabella, lettura, interpretazione e realizzazione di grafici che "raccontano" la storia. La metodologia di lavoro si basa sulla discussione delle ipotesi formulate dai bambini e sul ruolo fondamentale dell'insegnante come mediatore. Per quanto riguarda gli aspetti di ricerca, alcune domande che ci siamo poste ci hanno fornito una guida per l'analisi dei prodotti dei bambini: *alunni, che non conoscono l'algebra, riescono a mettere in atto processi risolutivi, che implicano concetti e strumenti assimilabili a quelli di variabile e di dipendenza tra variabili? Come gli alunni percepiscono le grandezze in gioco, lo spazio e il tempo? Come instaurano su di esse ragionamenti di tipo matematico? Attraverso quale percorso essi possono giungere ad una qualche forma di modellizzazione della sua risoluzione?*

Abbiamo quindi individuato alcuni parametri per osservare e tenere sotto controllo il passaggio dalla percezione alla formalizzazione. La loro analisi ha consentito, almeno in parte, di cogliere l'evoluzione che porta al concetto di funzione, partendo dall'intuizione spontanea. Tra i diversi parametri scelti (la funzione dei gesti, i nuclei concettuali, gli ostacoli epistemologici e/o i pivot cognitivi, le metafore concettuali, le strategie risolutive, l'interazione con gli strumenti, la costruzione sociale del sapere), la funzione del linguaggio naturale ha assunto un ruolo sostanziale nel precedere, accompagnare, supportare il linguaggio formalizzato della matematica. Durante le discussioni in classe, l'espressione verbale ha permesso di comunicare le soluzioni prodotte, di spiegarle, di esplicitare difficoltà, ragionamenti e procedure risolutive seguite, di argomentarle, di giustificarle, di validarle o di confutarle. In questo processo di comunicazione all'interno del gruppo, il linguaggio utilizzato, sia quello degli allievi sia quello dell'insegnante, ha reso possibile il collegamento tra gli aspetti semantici e quelli formali delle conoscenze in via di costruzione. Il linguaggio naturale, insieme alla gestualità, ha favorito inoltre negli alunni il controllo del significato durante tutto il processo risolutivo, ed ha evitato il più possibile il rischio di cadere in puri formalismi, in particolare nel delicato momento della rappresentazione con modelli matematici, come la tabella e il piano cartesiano.
Anche il contesto della situazione problema ha esercitato un potere coinvolgente ed ha così consentito di mantenere forte il legame tra il significato e il formalismo matematico.
Il problema aperto infatti, liberando gli alunni dalla fedeltà agli schemi risolutivi, ha permesso loro di recuperare il piacere del fare matematica e, nello stesso tempo, li ha condotti a passare da un livello locale di soluzione ad un livello generale, familiarizzando con il concetto di variabile ben prima di definirlo formalmente.
La relazione spazio-tempo, sperimentata con gli alunni di scuola elementare, ha avviato un cammino di costruzione di modelli matematici come oggetto di riflessione, di astrazione e di sistemazione.
In conclusione possiamo così riassumere gli aspetti che hanno caratterizzato l'approccio al concetto di funzione nell'ambito dell'esperienza descritta:

- interiorizzazione di concetti a partire dall'esperienza: parole, disegni, gesti;
- modellizzazione: tabelle e grafici cartesiani;
- individuazione delle relazioni tra variabili: crescenza e decrescenza;
- scoperta del significato di relazione costante.

Bibliografia:

- Bartolini Bussi M.G., Boni M., Ferri F.: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica,* Rapporto tecnico N°21, Università di Modena
- Lakoff G.and Nuñez R.: 2000, *Where mathematics comes from: how the embodied mind creates mathematics*, New York: Basic Books
- Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 2000, Approaching theoretical thinking within a dynamic geometry environment, *Experiential Learning Monographs*, n.1.
- Omero, *Odissea.*
- Pontecorvo C., Aiello A. M., Zucchermaglio C.:*Discutendo si impara.* La Nuova Italia Scientifica

• Radford L., 2001, Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics*

Si ringraziano le insegnanti Claudia Giunipero, Paola Pecchiura e Agnese Spoladore, dell'I.C. "D. M. Turoldo", e le insegnanti Bruna Bollino e Marisa Rinaudo dell'I.C. di Costigliole Saluzzo per la preziosa collaborazione.

RIFLESSIONI SUI PROBLEMI ATTUALI DELLA FORMAZIONE DELL'INSEGNANTE DI MATEMATICA E L'UTILIZZO DELLE NUOVE TECNOLOGIE NELL'INSEGNAMENTO

Luigi Tomasi
Liceo Scientifico Galilei Adria (Ro)
S.S.I.S. Emilia Romagna Universit di Ferrara
luigi.tomasi@libero.it

Situazione attuale dell'insegnamento della matematica

L'insegnamento attuale della matematica e la formazione degli insegnanti presentano i seguenti aspetti negativi riscontrati da tutti, in particolare da quei docenti che riescono a riflettere sulla loro pratica didattica:

1. nell'insegnamento prevale l'"addestramento formale...";
2. nella pratica didattica è raro che si proponga la matematizzazione di situazioni reali; questo è anche una conseguenza della formazione che il futuro insegnante riceve durante il corso di laurea e le Scuole di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario: la matematica è presentata quasi sempre in modo "separato", i collegamenti con fisica, economia, statistica,ß informatica,... sono troppo limitati e impostati in un modo prevalentemente astratto. I libri di testo, inoltre, non aiutano a stabilire collegamenti tra matematica e altri campi del sapere.
3. non adeguata preparazione sugli aspetti che collegano strettamente la matematica con l'informatica: algoritmi, calcolo numerico, programmazione,...
4. scarsa abitudine al calcolo approssimato e all'uso degli strumenti di calcolo nella didattica, dalla semplice calcolatrice con le quattro operazioni a quelle di tipo simbolico grafico;
5. riproposizione a scuola dell'insegnamento ricevuto anche nelle sue forme troppo astratte e formali (sia nella scuola superiore che all'università);
6. mancanza di riferimenti tra matematica e aspetti culturali, storici, al mondo reale,...;
7. uso non sistematico o "artigianale", quando presente, delle nuove tecnologie (le SSIS - Scuole di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario costituiscono invece, relativamente a questi aspetti, un dato positivo);
8. non c'è un'azione sistematica di formazione e aggiornamento permanenti degli insegnanti di matematica: quasi tutto viene lasciato alla disponibilità e alla volontà individuali;
9. mancano docenti della scuola secondaria che siano riconosciuti come esperti dell'insegnamento della matematica e che possano fare un lavoro di consulenza e di supporto alla didattica in classe (possono essere gli attuali docenti di scuola secondaria - supervisori di tirocinio in servizio alle SSIS?)
10. formazione iniziale dell'insegnante di matematica finora carente (anche qui le SSIS costituiscono un'inversione di tendenza e un dato positivo);
11. mancanza di adeguata preparazione, in particolare, sulla statistica, la probabilità e la relativa didattica (su questo tema, forse, le SSIS non sono state altrettanto innovative in tutte le sedi).

12. Gli esiti sono evidenti a tutti:
13. conoscenze matematiche come "castello di carte", che "non servono a nulla", che crollano non appena uno finisce la scuola; scarsa permanenza della preparazione matematica ricevuta a scuola; non rimane quasi nulla delle idee fondamentali; resta solo il ricordo di una quantità esagerata di esercizi fine a se stessi, che non hanno prodotto vera formazione;
14. gli allievi si allontanano dalla matematica;
15. pochi studenti si iscrivono alle facoltà scientifiche e in particolare al corso di laurea in matematica, preferendo lauree come ingegneria, informatica, economia...
16. difficoltà a coinvolgere la maggioranza degli insegnanti in progetti di rinnovamento dell'insegnamento della matematica, anche se si devono ricordare alcune esperienze innovative come quella del PNI - Piano Nazionale per l'Informatica, che più di un decennio fa ha coinvolto tutti i docenti di matematica della scuola secondaria superiore.

La formazione iniziale dell'insegnante di matematica: il corso di laurea e la SSIS

Come deve essere progettata la formazione iniziale di un insegnante di matematica? E' ovvio che non ci può essere un rinnovamento della didattica della matematica senza una profonda formazione culturale dell'insegnante. Si deve ripensare l'insegnamento della matematica e per questo è necessario rivedere alcuni aspetti della formazione degli insegnanti. Riguardo a tale questione ci si deve chiedere se il corso di laurea in matematica si pone, almeno per quanto riguarda la formazione, il problema di fornire adeguati strumenti culturali per chi vorrà fare l'insegnante. Da quanto emerge negli studenti specializzandi che frequentano la SSIS sembra a volte che ci siano carenze nella formazione di base. Troppo spesso il corso di laurea incorre in quei difetti che sono stati elencati in precedenza: eccesso di astrattezza, "separatezza" della matematica, assenza di attività di "matematizzazione",.... Rispetto al corso di laurea in matematica, le Scuole di Specializzazione, pur essendo un luogo dove si fornisce una buona preparazione didattica, non sempre riescono a recuperare gli argomenti disciplinari "mal digeriti" o addirittura non svolti nel corso di laurea.

La formazione permanente e l'aggiornamento

Dopo la Scuola di Specializzazione quale pratica professionale deve avere un insegnante di matematica? Come si può fare in modo che l'insegnante arrivi a produrre una "buona pratica" professionale e, soprattutto, questo processo deve avvenire in modo individuale, per autoapprendimento, o si può pensare a un "tutoring" sistematico da qualche altro docente di matematica? Sappiamo che su questo tema le SSIS, attraverso le attività di tirocinio, hanno dato un notevole contributo per la formazione iniziale dei docenti. Tuttavia la formazione dell'insegnante, iniziata nella SSIS, non può bastare e occorre che in tutto l'iter professionale del docente vi sia un'azione di formazione e di aggiornamento continua. Finora, occorre ammetterlo, la formazione e l'aggiornamento in servizio dei docenti di matematica è passata attraverso una miriade di iniziative episodiche e saltuarie che, pur avendo interessato molti docenti, sono risultate globalmente poco efficaci.

Nei corsi di aggiornamento esiste sempre il problema di arrivare a tutti in modo sistematico. Molte esperienze di aggiornamento sono fallite o hanno dati scarsi risultati a causa della scarsa diffusione che hanno avuto corsi pensati per un numero limitato di docenti. Occorre ricordare che agli insegnanti questa attività non è riconosciuta come fondamentale e non viene certificata; nel migliore dei casi si rilasciano degli attestati di frequenza che non servono quasi a nulla. Le attuali SSIS, o l'organismo che le sostituirà in futuro, dovrebbero pertanto occuparsi anche di questi aspetti della formazione dell'insegnante in servizio e dell'aggiornamento, legandoli allo sviluppo professionale degli insegnanti.

Le nuove tecnologie e l'aggiornamento: l'esperienza del "Progetto Eccellenza" (IRRE Emilia Romagna e IRRE Lazio)

Un'esperienza positiva di formazione e aggiornamento degli insegnanti di matematica si è svolta negli anni dal 1997 al 2002, presso gli IRRE Emilia Romagna e Lazio, riguardante l'introduzione delle nuove tecnologie nell'insegnamento tramite la risoluzione di problemi. In questa attività di formazione e aggiornamento i problemi sono stati scelti perché si prestavano particolarmente ad essere risolti con l'aiuto del software matematico (*Cabri Géomètre*, *Derive*, *Mathematica*, *Maple*, le calcolatrici simbolico-grafiche,...). Queste esperienze di aggiornamento, organizzate a "macchia d'olio", più che in forma centralizzata, hanno coinvolto un buon numero di docenti, mediante la condivisione di problemi da proporre in classe e un approfondimento critico delle metodologie da usare, in particolare per quanto riguarda l'uso delle nuove tecnologie nell'insegnamento della matematica. Questa forma di aggiornamento può sembrare episodica, ma è una delle possibili risposte a forme centralizzate di organizzazione dell'aggiornamento degli insegnanti. E' risultato infatti molto difficile monitorare azioni di aggiornamento organizzate centralmente perché sappiamo che non basta far frequentare a tutti un corso di aggiornamento per ottenere, in seguito, che gli insegnanti lavorino in classe in forma innovativa. Di solito le pratiche didattiche - molto più che i contenuti - hanno una forte inerzia ed è difficile realizzare dei cambiamenti in questo senso.

Conclusioni

L'insegnante di matematica deve ricevere una formazione meno "separata"; occorre quindi introdurre nel corso di laurea e nelle Scuole di Specializzazione più insegnamenti di statistica, di calcolo delle probabilità, di modellizzazione matematica, di informatica orientata al calcolo numerico e agli algoritmi,.... Occorre inoltre avere una conoscenza delle nuove tecnologie per la didattica, ma anche competenze per impostare in forma di laboratorio l'insegnamento della matematica. Quest'ultima, ovviamente, è un'attività complessa e probabilmente non potrà essere mai fornita in modo completo dal corso di laurea e dalla scuola di specializzazione. E' quindi necessario che oltre al corso di laurea e alla Scuola di Specializzazione vengano costruite delle strutture adatte che si occupino di aggiornare e di migliorare progressivamente questa competenza metodologico-didattica, in modo che il rinnovamento introdotto con in nuovi curricoli di matematica non sia puramente legato ai contenuti, come è successo fino a non molto tempo fa anche per i programmi più innovativi. Tendenzialmente è quindi necessario costruire la figura di un insegnante che conosca in modo approfondito la matematica, ma anche molte sue applicazioni, e che sia in grado di impostare il proprio lavoro in classe come un laboratorio. Le tecnologie, in particolare quelle informatiche e della comunicazione, offrono oggi strumenti formidabili per lavorare in tal senso e per rinnovare la formazione dei docenti e, con essa, l'insegnamento della matematica.

Bibliografia

- AA.VV., *Problem solving e calcolatore*, a cura di G. Accascina, G. Margotta, G. Olivieri, Franco Angeli, Milano 2001.
- M. Artigue, *L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica a livello universitario. Questioni cruciali per la ricerca contemporanea in didattica*, Bollettino dell'UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, serie VII, Vol. III-A, Bologna, Aprile 2000.
- M. Dedò, *Più matematica per chi insegna matematica*, Bollettino dell'UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, serie VIII, Vol. IV-A, Bologna, Agosto 2001, p. 247-275.
- J.-P. Kahane (a cura di), , *L'enseignement des Sciences Mathématiques* (Rapport au Ministre de l'éducation nationale, Commission de réflexion sur l'einsegnement des mathématiques), Jacob, Paris 2002.
- V. Villani, *Matematica, didattica della matematica, ricerche in didattica della matematica,* Bollettino dell'UMI, La Matematica nella Società e nella Cultura, serie VIII, Vol. IV-A, Bologna, Aprile 2002.

GRUPPI DI LAVORO

UNA VISITA GUIDATA IN CLASSE "NAVIGANDO" FRA TRE LEZIONI DI MATEMATICA

Carlo Romanelli
N.R.D. Università di Pisa

La documentazione video registrata di lezioni di matematica "reali", fatte cioè senza "nulla di appositamente costruito", può permettere di osservare con particolare attenzione alcune delle complesse dinamiche relative all'azione di insegnamento – apprendimento, che si sviluppano all'interno di una classe. Questo tipo di registrazioni, raccolte nel progetto *La Matematica a Scuola* (promosso dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Pisa[61]), unite agli appunti degli alunni, alla programmazione didattica dell'insegnante, ad interviste realizzate prima e dopo la lezione, sono proposte in un pacchetto multimediale del quale fanno parte tre CD interattivi.

Le nuove tecnologie offrono possibilità inaspettate: la "navigazione" attraverso una o più lezioni consente di osservare "dal vero" diversi modi con i quali docenti di scuola secondaria propongono matematica ai loro studenti ed analizzare (anche passo – passo) alcuni fra gli aspetti più significativi di quello che accade, o potrebbe accadere, durante una lezione. Diversamente dalla realtà, nella quale spesso si è costretti a prendere decisioni immediate, è possibile soffermarsi a riflettere o consultare materiale bibliografico, trascrivere le proprie idee su un taccuino virtuale, discutere di uno stesso episodio con altri. Quanto proposto può quindi risultare un'occasione per attività di studio, di aggiornamento, di confronto o anche di prima formazione per i futuri insegnanti.

Nei CD del progetto una particolare attenzione è stata rivolta alla tipologia delle domande e delle rispettive risposte tra insegnante ed allievo, tra allievo ed insegnante o degli allievi tra loro; sono stati presi in esame i tempi in cui qualcuno parla ed i tempi di silenzio, il tipo di consegne per il lavoro in classe e/o a casa, la disposizione della /e aula /e in funzione dell'approccio didattico prescelto senza dimenticare che persino ogni gesto, ogni semplice espressione tanto degli alunni quanto dell'insegnante sono manifestazione della complessità e della problematicità dell'azione didattica...

Scopo di questo gruppo di lavoro che segue come approfondimento la relazione del Prof. Vinicio Villani[62] (*Stili di insegnamento: lezioni di matematica al microscopio*) è stato quello di proporre, pur nei limiti temporali imposti (ogni CD prevederebbe diverse ore di attività), uno sguardo ed allo stesso tempo un esempio di utilizzo del materiale multimediale prodotto. Articolate chiavi di lettura accessibili dagli *Itinerari* presenti nei CD vogliono invitare alla riflessione cercando di aiutare a saper vedere, a saper leggere una lezione anche al di là di quello che appare in "prima lettura". Con l'aiuto delle numerose video clip ci si può soffermare, di volta in volta, su importanti aspetti del fare lezione come:

---

[61] Per maggiori informazioni sul progetto si veda la relazione del Prof. Vinicio Villani *Stili di insegnamento: lezioni di matematica al microscopio* pubblicata in questo stesso fascicolo.

[62] Nel suo intervento il Prof. Villani (vedi anche nota 1) proponeva all' attenzione dei partecipanti un rapido sguardo ai tre CD soffermandosi su alcuni temi suscitati dalla visione di video clip. La discussione era rimandata ai gruppi di lavoro del pomeriggio.

1. I tempi in cui qualcuno parla ed i tempi di silenzio in genere troppo brevi per permettere di pensare.

* Quanto tempo dai ai tuoi studenti per riflettere, dopo che hai fatto una domanda? Dopo una domanda c'è un momento di silenzio? Quando questo accade come lo interpreti (come segnale di disinteresse, di disorientamento, come pausa di riflessione, come attesa di un suggerimento dell'insegnante ecc..)? Come ti comporti?

* In generale quanto tempo ritieni si possa concedere agli allievi prima di rispondere? Sono opportuni dei momenti di silenzio durante la lezione? In quale occasione e con quali scopi?

* Individua vantaggi e svantaggi nel prefissare un tempo massimo, nell'aspettare che tutti abbiano finito o che tutti abbiano fatto almeno qualche tentativo.

2. Le interazioni degli allievi con l'insegnante, dell'insegnante con gli allievi e degli allievi tra loro.

* Tu favorisci in genere le interazioni fra gli allievi? Perché?

* In generale, che valore e funzione possono avere le interazioni fra allievi all'interno dell'attività matematica?

* Che tipo di domande ti rivolgono i tuoi allievi? E tu che tipo di domande rivolgi loro? Nella tue classi, cerchi di favorire un buon livello di interazione? Ritieni di ottenerlo?

* Quali strategie si possono adottare per invitare gli studenti a partecipare attivamente ed in particolare a porre domande?

3: I differenti ruoli che nel corso di una o eventualmente più lezioni un insegnante può assumere (spiega, dà certezze, ascolta, chiarisce dubbi, suscita la discussione, fa domande, evidenzia difficoltà e problemi, crea conflitti, ecc.).

* Nelle tue lezioni quali ruoli assumi? C'è un ruolo che assumi più spesso? Cosa ti porta ad assumere ciascun ruolo?

* Ritieni che un insegnante debba principalmente assumere un solo ruolo?

L'esempio di attività si è concretizzato con una discussione collettiva sulla base delle questioni sopra proposte[63] stimolata dalla visione di alcune video clip scelte dai tre

---

[63] È opportuno precisare che queste domande non si ritrovano, almeno in quella esatta forma, in nessuno dei tre CD. Negli **Itinerari** le differenti problematiche sono affrontate allargando sempre più il punto di vista e riservando ad esse tre differenti tipologie di domande; si passa, infatti, da quesiti strettamente correlati alla lezione videoregistrata, ad inviti ad una riflessione sul proprio lavoro, per finire con riflessioni più generali sul fare lezione. E chiaro che, in questo contesto esemplificativo, avrebbe poco senso rispondere a domande del tipo *Ci sono nel filmato interazioni allievo-allievo? Di che tipo? Come sono gestite dall'insegnante? Quale ruolo hanno nell'attività in questione?* troppo specificamente legate ad una singola lezione. Per rispondere sarebbe necessario svolgere per intero le attività di ciascun pacchetto attenendosi scrupolosamente alle istruzioni per l' uso dove tra l' altro si legge:
Fase 1 - *Visionare l'intero filmato. Sia nell'eventualità di una visione individuale che nel caso di un'attività di gruppo, ogni partecipante dovrebbe annotare scrupolosamente, per proprio conto e per iscritto:*

CD. Al gruppo di lavoro hanno partecipato insegnanti di differenti ordini di scuole e gruppi di ricerca didattica di università italiane; questa eterogeneità ed i numerosi contributi personali hanno indubbiamente arricchito la discussione. In particolare si è sottolineato come, per migliorare l'efficacia dell'azione di insegnamento, si debba tenere conto (oltre che dei particolari argomenti da trattare) delle specificità di ogni classe. In questa ottica le questioni affrontate (come la gestione dei tempi, la gestione delle interazioni, i differenti ruoli assunti da un insegnante), non sembra possano avere una risposta unica e definitiva pur evidenziando che, in molti casi, il tempo lasciato agli alunni per riflettere è troppo poco. E' stata pure rimarcata la particolare importanza delle interazioni tra alunni anche in attività diverse dal lavoro di gruppo.

Negli stessi CD, proprio per l'impossibilità di dare soluzioni definitive, volutamente le domande non sono seguite da risposte ma da spazi bianchi, da taccuini che l'utilizzatore potrà riempire annotando di volta in volta le proprie risposte sia di carattere specifico che più generali sul "fare lezione"[64]. Neppure si è voluto privilegiare una impostazione didattica (o un particolare tipo di Istituto Scolastico); più semplicemente si sono presentate tre lezioni molto diverse tra loro che, anche a detta degli stessi insegnanti video registrati, non rappresentano il loro unico modo di fare lezione. Gli stessi partecipanti al gruppo di lavoro hanno evidenziato come differenti argomenti previsti dalla programmazione didattica si prestino meglio all'una o all'altra metodologia di insegnamento.

Nella discussione collettiva si è anche rimarcato come per ogni insegnante, indipendentemente dall'ordine di scuola, per affinare il proprio stile di insegnamento sia sempre importante porsi domande, riflettere sulla sua azione all'interno di una classe, sul ruolo o sui differenti ruoli che può assumere consapevolmente o inconsapevolmente. E' anche utile il confronto con altri docenti della stessa e persino di altre discipline, cosa che l'utilizzo collettivo di questo materiale, può indubbiamente stimolare. Una riflessione sui differenti stili di insegnamento può essere importante anche in ragione della continuità didattica: in molte situazioni si osserva una brusca discontinuità nel modo di presentare matematica passando da un ordine di scuola all'altro.

Infine il gruppo di lavoro ha evidenziato l'importanza di questo tipo di materiale nella formazione dei nuovi insegnanti perché, soprattutto per loro, è quanto mai importante imparare a saper vedere, a saper porsi domande che vadano oltre le semplici nozioni e gli aspetti tecnici propri della disciplina. Quanto proposto può essere una prima finestra su un mondo che talvolta è del tutto nuovo.

- quali momenti e quali aspetti lo hanno colpito di più; / - per quali motivi; / - eventuali punti di dissenso rispetto alle scelte dell'insegnante; / - eventuali punti di consenso; / - l'eventuale esigenza di acquisire ulteriori informazioni.

Sarà utile per questo rivedere più volte almeno alcuni punti del filmato.

Fase 2 - *Integrare le informazioni tratte dal video, consultando la documentazione disponibile su CD (vedi* ***Documentazione****). Si consiglia per di rinviare ad un momento successivo la consultazione del punto denominato* ***Itinerari****.*

[64] Un aiuto per rispondere alle domande di carattere generale può essere la consultazione della bibliografia di riferimento presente nei CD, ma può anche essere utile riflettere su episodi analoghi presenti nei tre pacchetti soffermandosi sulle diverse soluzioni adottate dai tre insegnanti video registrati.

Il progetto 'ArAl- S&T 'Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico': quale il ruolo dell'insegnante nella classe?

Nicolina A. Malara, Giancarlo Navarra
GREM, Dipartimento di Matematica
Università di Modena/Reggio Emilia.

Il Progetto speciale per l'Educazione scientifica e tecnologica 'ArAl' entra nell'a.s. 2002/03 nel suo quinto anno di attività; coinvolge attualmente 80 classi, quasi 1600 alunni e una sessantina di docenti sperimentatori di scuola elementare e media delle provincie di Belluno e di Modena. Fa parte dei 27 progetti finanziati dal Progetto nazionale SeT; il sito è inserito nel portale dell'Indire (ex BDP) all'indirizzo www.bdp.it.

Il progetto si colloca all'interno di quella cornice teorica denominata *early algebra*: in essa si sostiene che i principali ostacoli cognitivi nell'apprendimento dell'algebra nascono in modi spesso insospettabili *in contesti aritmetici* e possono porre ostacoli concettuali anche insormontabili allo sviluppo del pensiero algebrico a causa soprattutto di un controllo concettuale debole sui *significati* degli oggetti e dei processi matematici.

Fra le ipotesi che la ricerca internazionale elabora per affrontare le difficoltà degli studenti in questo senso assume crescente importanza l'approccio *linguistico*, impostata sulla concezione *dell'algebra come linguaggio*.

L'ipotesi del progetto ArAl è che vi sia un'*analogia* fra le modalità dell'apprendimento del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico. Il bambino conquista il linguaggio, attraverso un atteggiamento sperimentale, appropriandosi *poco alla volta* dei suoi significati e delle regole che lo supportano, che svilupperà in età scolare attraverso l'apprendimento della lettura e la riflessione sugli aspetti *grammaticali* e *sintattici* della lingua. In modi simili, i modelli mentali propri del pensiero e del linguaggio algebrico dovrebbero essere costruiti ancora in un ambiente aritmetico sin dai primi anni della scuola elementare, attraverso forme iniziali di *balbettio algebrico*, insegnando al bambino a *pensare l'aritmetica algebricamente*, costruendo in lui il pensiero algebrico progressivamente come strumento e oggetto di pensiero, in un fitto *intreccio con l'aritmetica*, partendo dai suoi *significati*.

L'obiettivo di fondo del progetto ArAl è quindi quello di verificare se *la prospettiva linguistica associata ad un approccio anticipato al pensiero algebrico* – e quindi la costruzione *progressiva* di un pensiero algebrico *parallelo* all'aritmetica e *non* successivo ad essa - possano ridurre le difficoltà nello studio dell'algebra. Tale obiettivo presuppone la costruizione di un ambiente che stimoli in modo informale l'elaborazione autonoma del balbettio algebrico e che assecondi quindi l'appropriazione sperimentale di un nuovo linguaggio nel quale le regole possano trovare la loro collocazione gradualmente, all'interno di un contratto didattico *tollerante* verso momenti iniziali sintatticamente *promiscui*. Nel progetto ArAl tale ambiente viene configurandosi attraverso delle Unità didattiche (al momento attuale quelle pubblicate nel sito sono 6).

Il ruolo dell'insegnante nella gestione in classe delle Unità – ma anche più in generale per tutte le attività legate all'innovazione didattica nel campo dell'educazione matematica - è molto delicato perché la quasi totalità dei docenti sia della scuola elementare che di quella media non possiede una formazione universitaria in questo senso. Questa situazione determina forse l'aspetto più delicato di un progetto innovativo come ArAl, perché comporta la produzione di *materiali* gestibili anche all'esterno del gruppo che li definisce e li verifica nella loro fase sperimentale. Ciò significa organizzare percorsi che orientino verso prospettive chiare di lavoro e, allo stesso tempo, offrire *supporti* (commenti, esempi di risposte fornite dagli alunni, stralci di diari di discussioni nelle classi) che aiutino gli insegnanti a collocare tali percorsi in un contesto culturale ed educativo stimolandoli ad una rilettura del proprio background culturale matematico: conoscenze, convinzioni, stereotipi, abitudini, misconcetti.

Nel laboratorio sono stati proposti ai partecipanti alcuni episodi (dalla prima elementare alla terza media) che favoriscono una riflessione sui temi generali, sugli aspetti specifici del progetto ArAl ed in particolare sul ruolo dell'insegnante nella sua gestione di classe, e mostrano come quella del *balbettio algebrico* sia un'ipotesi *forte* che consente anche ad alunni di seconda elementare – opportunamente guidati lungo percorsi organicamente inseriti nella normale programmazione didattica – di avvicinarsi ad un uso *precoce* delle lettere in ambiente matematico.

Sono state illustrate le principali caratteristiche 'al contorno' di tali percorsi:

- un contratto didattico tollerante verso l'acquisizione inizialmente *ingenua, 'sporca', creativa* di un nuovo linguaggio;
- l'attivazione di situazioni di *discussione* che comportino la pratica costante della *verbalizzazione*, dell'*argomentazione* e del *confronto* con l'obiettivo di una *costruzione socialmente condivisa* delle conoscenze; queste situazioni favoriscono lo sviluppo di competenze *metacognitive* e *metalinguistiche*;
- l'introduzione graduale dei simboli che conduca ad una concezione della matematica come *linguaggio*, dotato di una sua *semantica* di una sua *sintassi*, che favorisca il passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico come processo di *traduzione* fra linguaggi diversi (in questo senso svolge un ruolo di grande importanza il ricorso a Brioshi[65]);
- un trasferimento dell'attenzione (da parte di insegnanti e alunni) dalla ricerca della soluzione, cioè di un *risultato* (ricerca del *prodotto*: punto di vista *procedurale*), alla ricerca di una *rappresentazione* della situazione problematica, al fine di una sua modellizzazione (ricerca del *processo*: punto di vista *relazionale*);
- l'introduzione di opportuni *mediatori didattici* come provvisori strumenti pedagogici al fine di stabilire dei collegamenti semantici fra conoscenze preesistenti e informazioni nuove.

La partecipazione degli insegnanti è stata interessata, vivace e produttiva.

---

[65] Brioshi è un alunno giapponese immaginario (di età variabile a seconda dei suoi interlocutori) e costituisce un supporto molto potente all'interno del progetto ArAl. È stato introdotto per avvicinare gli alunni fra i 7 e i 14 anni ad un concetto difficile da far comprendere: la necessità del *rispetto delle regole* nell'uso di un linguaggio, necessità ancora più forte nel caso in cui si incontri un linguaggio formalizzato, e questo in ragione dell'estrema sinteticità dei simboli usati. Brioshi sa comunicare solo attraverso un uso corretto del linguaggio matematico e si diverte a scambiare problemi e soluzioni con classi di altre nazioni servendosi dei mezzi più diversi, dai messaggi su fogli di carta a più sofisticati scambi attraverso un apposito software (Net meeting).

Bibliografia

Malara N.A., Navarra G., 2000, Percorsi esplorativi di avvio al pensiero algebrico attraverso problemi, *L'Educazione Matematica*, anno XXVI, serie VI, n.1, vol.2, 7-21

Malara N.A.: 2001, Aspetti relazionali dell'aritmetica e avvio al pensiero algebrico, in Bazzini L. (a cura di) *"Scuola a che punto siamo?"* 21-31

Malara N.A., Navarra G., G., 2001, "Brioshi" e altri strumenti di mediazione per un insegnamento relazionale dell'aritmetica per un avvio all'algebra come linguaggio, in Malara N.A. & Altri (a cura di), *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice, 211-222

Malara N.A., Navarra G.: 2002, Esperienze e prospettive di innovazione nella scuola dell'obbligo per un approccio precoce all'Algebra come linguaggio, *Scuola e Città*, 83-95

Navarra, G. 2001, Percorsi esplorativi di avvio al pensiero algebrico: osservazione e rilevazione di difficoltà in insegnanti e allievi, in Tortora, R. & Altri (a cura di), *Valutazione dei processi di apprendimento con particolare riferimento alle difficoltà*, Università di Napoli, Napoli, 55-60

Il progetto SeT: Elementi di Statistica e Probabilità con l'ausilio delle calcolatrici grafiche[66]

Aurelia Orlandoni
IRRE Emilia Romagna
aurelia.orlandoni@libero.it

Nel corso del Laboratorio è stato presentato il progetto SeT che nasce dalla constatazione che non esiste ancora una prassi didattica consolidata dell'insegnamento della Statistica e della Probabilità, sia perché molti insegnanti non si sentono *adeguatamente preparati* per affrontare questi temi sia perché svolgere attività significative implica una grande mole di calcoli.

Le calcolatrici grafico-simboliche possono essere di aiuto in quanto:

- eseguono rapidamente noiosi e complessi calcoli,
- consentono di esplorare situazioni,
- costituiscono un supporto per la costruzione e/o comprensione dei concetti.

Un gruppo di insegnanti di cinque scuole superiori[67], coordinati dal prof. G. C. Barozzi dell'Università di Bologna e dalla sottoscritta ha lavorato per un anno allo scopo di produrre, sperimentare in classe e revisionare "unità di lavoro" in cui fossero utilizzate le calcolatrici TI89 e TI92 e che potessero essere proposte per un utilizzo diretto in classe. Alcuni docenti avevano già operato all'interno del progetto nazionale *Labclass*, e quindi conoscevano e usavano le calcolatrici grafico-simboliche della Texas nell'attività didattica, gli altri conoscevano le calcolatrici e le loro potenzialità, pur non avendole mai utilizzate in classe.

Tutti eravamo convinti che avere a disposizione questi strumenti nell'attività quotidiana costituisse un valore aggiunto rispetto all'utilizzo del laboratorio di informatica, a cui si può accedere per una parte, spesso esigua, delle ore di Matematica.

Poiché il gruppo era formato da insegnanti di scuole geograficamente lontane era necessario individuare uno strumento che consentisse una collaborazione via rete. A questo scopo è stato creato un gruppo di discussione *chiuso* [68] che, oltre a consentire una facile modalità di scambio di messaggi, mette a disposizione un'area file in cui depositare/prelevare i materiali in via di elaborazione. Questa strumento si è rivelato molto efficace non solo per lo scambio, ma anche per la costruzione di materiali omogenei; infatti sono stati sufficienti quattro incontri di una giornata per programmare e realizzare l'intero progetto.

Gli obiettivi principali dichiarati già nella presentazione del progetto sono:

- utilizzare le calcolatrici per spostare l'attenzione dai calcoli ai concetti;

---

[66] Il progetto SeT (Educazione Scientifica e Tecnologica) presentato qui è uno dei 27 progetti finanziati a livello nazionale dal MIUR attraverso la C.M. 131 del 28/04/2000.

[67] ITCS G. Salvemini di Casalecchio di Reno (BO), ITCS E. Mattei e ITIS E. Majorana di San Lazzaro di Savena (BO), L.S. G. Ricci Curbastro di Lugo (RA), ITT G. Mazzotti di Treviso.

[68] E stato utilizzato un prodotto free http://it.groups.yahoo.com

• costruire un percorso duttile, adattabile e validato in classe utilizzabile da altri insegnanti nella loro attività in classe.

La metodologia scelta fa riferimento all'idea di *Laboratorio* inteso come costruzione di concetti a partire dall'analisi di situazioni reali e non semplicemente come un ambiente chiuso e attrezzato, in cui è possibile svolgere un certo numero di esperimenti e dimostrazioni. Infatti nelle indicazioni ministeriali del progetto SeT, il *Laboratorio* è inteso come *"l'insieme di tutte le opportunità, interne ed esterne alla scuola, utili per dare un contesto pratico all'osservazione, la sperimentazione, il progetto e la valutazione della rilevanza sociale della scienza e della tecnologia"*.

Gli argomenti che il gruppo ha scelto di trattare, sono stati suddivisi in sette "unità di lavoro" della durata massima di 20 ore (lavoro in classe):

1. Analisi di dati: codifica, rappresentazioni grafiche e indici
2. La regressione lineare
3. La regressione "non lineare"
4. Giochiamo con la probabilità e la statistica
5. Probabilità: simulazione
6. Distribuzioni di probabilità
7. L'inferenza statistica.

Ogni unità è costituita da:

• una presentazione in cui sono indicati prerequisiti, obiettivi e metodi,

• schede di lavoro per gli studenti con la proposta di una situazione problematica e indicazioni sull'utilizzo della calcolatrice,

• schede-guida per i docenti in cui vengono fornite indicazioni metodologiche, riferimenti bibliografici e riflessioni legate alla sperimentazione in classe.

Riguardo a quest'ultimo punto è bene ricordare che, nei limiti del possibile, le unità sono state sperimentate almeno in due classi e poi revisionate, prima dagli autori, poi dal responsabile scientifico.

Tutto il materiale prodotto è stato alla fine organizzato in forma ipertestuale in modo che fosse consultabile in rete e che le schede di lavoro fossero facilmente scaricabili.

Dal mese di giugno il prodotto finale è presente nel sito dell'INDIRE all'indirizzo: http://www.bdp.it/set/area1 esperienzescuole/cm131/5.htm

La discussione che ha seguito alla presentazione è stata vivace ed interessante e ha sottolineato e ribadito alcuni punti già emersi nella presentazione:

• gli insegnanti di matematica attualmente in servizio, nel corso della loro formazione universitaria, non hanno mai (salvo rarissime eccezioni) affrontato temi di Statistica e Probabilità e avvertono un grosso disagio nel loro insegnamento. Soprattutto la Statistica è assimilabile più alle Scienze Sperimentali e quindi epistemologicamente diversa dalla formazione di un laureato in Matematica;

• esiste una tendenza, che appare evidente anche in molti libri di testo a sottolineare gli aspetti "teorici" e di "calcolo" a scapito di una riflessione sia sui dati di partenza sia sui risultati ottenuti. In sintesi, come sottolineava qualcuno, l'insegnante di matematica quando affronta la Statistica tende a fare della "Statistica Matematica" e non della vera e propria Statistica;

- un altro punto emerso è la scarsa, per non dire nulla, conoscenza nelle scuole dell'esistenza dei materiali dei Progetti SeT presenti sul sito INDIRE in quanto è, probabilmente, mancata una fase di informazione e pubblicizzazione presso le scuole.

In conclusione la maggior parte dei partecipanti ha ritenuto interessanti i materiali presentati, anche se riteneva necessaria un'analisi più approfondita, e ha sottolineato la necessità di una seria formazione degli insegnanti di Matematica sui temi di Statistica e Probabilità.

DALLA RICERCA IN DIDATTICA ALLE PROPOSTE DIDATTICHE IN RETE: IL CASO DEL PROGETTO SET

Paolo Boero
Università di Genova

Rossella Garuti
IRRE- Emilia Romagna

Introduzione

Con questa comunicazione ci proponiamo di presentare e di discutere alcuni criteri che sono stati elaborati e usati per selezionare materiale per la formazione degli insegnanti da diffondere attraverso Internet. Nel 2000 il MIUR ha promosso un'iniziativa nell'ambito del Progetto SeT (Progetto speciale per l'educazione scientifica e tecnologica) nota col nome di C.M. 131 (Materiali per l'educazione scientifica e tecnologica). Reti di Istituzioni scolastiche in collaborazione con Enti pubblici o privati interessati alla didattica e alla divulgazione scientifica potevano presentare progetti finalizzati alla produzione di materiali per l'educazione scientifica e tecnologica e richiedere un finanziamento per la loro realizzazione. Su 562 progetti presentati ne sono stati selezionati e finanziati 27[69]. Diversi Nuclei di Ricerca in Didattica della Matematica (Genova, Modena, Napoli, Pavia, Torino) sono stati coinvolti nella preparazione di questi progetti. Questa iniziativa ha rappresentato un'occasione per passare dalla "ricerca per l'innovazione"[cfr. Arzarello & Bartolini Bussi, 1998 e Bartolini Bussi, 2001] ad una diffusione su larga scala di risultati di ricerca in termini di materiali utili per l'insegnamento e la formazione iniziale e in servizio degli insegnanti.

In questa comunicazione tratteremo alcuni aspetti dei Progetti SeT elaborati congiuntamente nei Nuclei di Ricerca Didattica di Genova, Modena e Pisa:

- *I linguaggi della matematica e delle scienze e la razionalizzazione di fenomeni ed esperienze comuni* (13 Unità di lavoro indirizzate soprattutto alla scuola elementare);
- *Modellizzazione matematica elementare e approccio alle teorie in campo matematico e scientifico* (14 Unità di lavoro rivolte principalmente alla scuola media e al primo biennio delle scuole secondarie di secondo grado).
-

Per gli insegnanti e i ricercatori dei Nuclei di Ricerca coinvolti il Progetto SeT ha rappresentato una sfida che può essere espressa nel seguente modo:

a) Come comunicare all'esterno alcuni dei risultati della ricerca in didattica della matematica?

b) Come rendere fruibili questi risultati ad insegnanti che non hanno partecipato alla ricerca?

c) Come utilizzare per questo scopo Internet?

---

[69] I 27 Progetti SeT si possono vedere nel sito dell INDIRE http://www.bdp.it/set/area1_esperienzescuole/cm131/5.htm

Quali risultati di ricerca diffondere attraverso la rete?

La scelta di fondo, in accordo con precedenti ricerche nazionali ed internazionali [cfr. Boero, Parenti & Dapueto, 1996; Clements, 2002; Ruthven, 2002] è stata quella di selezionare esperienze didattiche innovative e ampiamente sperimentate accompagnate dall'analisi dei fenomeni osservati riguardanti i comportamenti degli insegnanti e degli allievi. In altre parole bisognava tentare di integrare senza confonderli due elementi fondamentali: *la pratica e la teoria*.

In termini concreti questa scelta si è tradotta in macro-criteri per organizzare i materiali.

Ogni Unità di lavoro presenta due tipi di informazioni:

I) Un *percorso didattico* (corrispondente a circa 20 ore di lavoro in classe) diviso in situazioni didattiche. Per ogni situazione didattica sono previste indicazioni *per l'insegnante* riguardanti la gestione dell'attività (lo scopo, quali elementi tenere sotto controllo, quali elementi osservare, etc.) ed esempi di protocolli commentati prodotti *dai ragazzi* (strategie di soluzione, stralci di discussione, ipotesi prodotte, etc.).

II) Motivazioni generali e obiettivi dell'Unità di lavoro: riferimenti ai programmi vigenti (*per programmare*), prerequisiti richiesti (*per realizzare*), scelte didattiche generali (*quali scelte*) e aspetti teorici cruciali relativi all'Unità di lavoro (*parole chiave*).

Nella home page di ognuno dei due Progetti SeT sono messe in evidenza:

I) Le scelte culturali e didattiche generali, esplicitate dal punto di vista teorico (*parole chiave*);

II) Una sorta di "palestra" (*esercitazioni*) dove si illustrano in modo interattivo le scelte e gli strumenti più importanti (ad esempio le possibili interpretazioni di un elaborato dei ragazzi o le possibili conduzioni di una discussione matematica collettiva).

Come sfruttare le opportunità offerte da Internet e sfuggire alle relative limitazioni?

È ben noto che Internet offre molte opportunità, ma anche severe limitazioni rispetto al modo tradizionale (libri, articoli, conferenze, etc.) di comunicare informazioni. Internet permette agli insegnanti di ottenere informazioni a basso costo e in modo abbastanza facile, e di selezionare le informazioni utili in breve tempo; tuttavia leggere e capire lunghi documenti può essere molto più faticoso che sulla carta e spesso si perde di vista la visione complessiva delle informazioni. Tenuto conto di queste opportunità e vincoli sono state fatte le seguenti scelte:

I) La possibilità di approcci diversi sia attraverso una organizzazione gerarchica delle sequenze didattiche, sia attraverso la possibilità di accedere agli strumenti teorici (*parole-chiave*) da più punti.

II) La possibilità di differenti livelli di dettaglio: dal titolo al contenuto didattico.

III) La presenza in ogni Unità di lavoro di una *sintesi*, utile per avere una visione complessiva dell'Unità in esame senza dover entrare troppo in dettaglio, e di un *grappolo* che esplicita i collegamenti con altre Unità di lavoro presenti nei due progetti. Questo può essere utile agli insegnanti per costruire un percorso verticale di continuità dalla scuola elementare alla scuola media o al primo biennio delle superiori.

IV) La possibilità di scaricare (*download*) sia l'intera Unità sia parti di essa (ad esempio le schede di lavoro o di verifica per gli studenti).

Per garantire un supporto agli insegnanti fruitori e per avere un ritorno per gli insegnanti e i ricercatori coinvolti sono previsti due tipi di *forum* di discussione: uno per ogni progetto generale e uno per ogni unità di lavoro.

Alcuni risultati

E' ancora troppo presto per valutare l'impatto dei Progetti su scala nazionale: sono stati definitivamente messi in rete sul sito dell'INDIRE nell'estate 2002 e sono ancora poco noti agli insegnanti. Emergono tuttavia alcune indicazioni interessanti sul versante degli insegnanti autori: le competenze informatiche di questi sono in tutti i casi aumentate e si è passati dalla preparazione di rapporti di ricerca interni ai Nuclei alla produzione autonoma di percorsi da mettere in rete strutturati secondo le esigenze di Internet (dalla sequenzialità di una comunicazione scritta od orale alla struttura ad albero tipica della rete). Un altro elemento che sta emergendo è il seguente: nelle realtà dove i materiali sono stati diffusi (ad esempio in Emilia Romagna) si sono formati nelle scuole diversi gruppi di insegnanti impegnati in auto-aggiornamento su questi materiali confermando almeno in parte la fruibilità di essi per la formazione in servizio degli insegnanti.

Bibliografia

Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M.G.: 1998, 'Italian Trends of Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective', in J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity, (pp. 243-262), Kluwer A. P., Dordrecht

Bartolini Bussi, M. G.: 2001, 'Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani', Bollettino UMI- serieVIII, Vol.IV-A, Aprile 2001.

Boero, P.; Dapueto, C. & Parenti, L.: 1996, Didactics of Mathematics and the Professional Knowledge of Teachers, in A. J. Bishop & al. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, pp. 1097-1122, Kluwer A. P., Dordrecht.

Clements, D. H.: 2002 'Linking Research and Curriculum Development', in L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, pp. 599-630, Lawrence Erlbaum Associates, Mahvah, N. J.

Ruthven, K.: 2002, Linking Researching with Teaching: Towards Synergy of Scholarly and Craft Knowledge, in L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, pp. 581-598, Lawrence Erlbaum Associates, Mahvah, N. J.

SERVE IL LIBRO DI TESTO?

gruppo di lavoro coordinato da
Carlo Dapueto
Università di Genova

L'introduzione svolta dal coordinatore ha illustrato diverse problematiche relative all'uso dei libri di testo:

- la corrispondenza di essi alle indicazioni fornite dai programmi scolastici;
- la presenza di molti errori;
- l'esistenza di una correlazione positiva fra tasso d'errore e numero di adozioni;
- i modi e i criteri con cui vengono esaminati e scelti dagli insegnanti o dalle scuole;
- le conseguenti difficoltà di sopravvivenza sul mercato dei libri "buoni".

E ha proposto (ed esemplificato) la discussione di alcune alternative per non piegarsi ai vincoli imposti dal "mercato", e per sfruttare spazi e opportunità che per altri aspetti il mercato stesso offre:

- l'uso di manuali od altri libri non "scolastici";
- la possibilità di "costruirsi" libri di testo;
- l'utilità, come fonte di materiali di consultazione e di materiali didattici, e come strumento per la raccolta, l'integrazione e la presentazione di essi, che possono avere Internet e le presentazioni ipertestuali;
- il ruolo che in questo contesto può svolgere il software di tipo matematico (come contenitore, elaboratore e stimolatore di conoscenze, esercizi, attività, ...).

mettendo in luce, comunque:

- l'opportunità di educare all'uso critico di più fonti e più forme di documentazione;
- l'opportunità di usare più forme di documentazione ed elaborazione al fine di valorizzare meglio le potenzialità e gli stili cognitivi dei vari studenti;
- le collaborazioni che si possono/devono instaurare fra insegnanti per condividere elaborazioni di materiali, esperienze, riflessioni critiche, ..., e integrare i diversi tipi di contributi dei singoli (culturali, organizzativi, tecnologici, creativi, riflessivi, ...).

È seguita una discussione in cui sono emersi punti di vista diversi sul ruolo dei libri di testo e delle possibili alternative presentate nell'introduzione, e in cui vari insegnanti hanno illustrato le loro esperienze:

- casi in cui insegnanti e alunni hanno costruito insieme il loro libro di testo;
- casi in cui ciò è stato realizzato in parte elettronicamente, utilizzando software matematico e pocket computer;
- casi in cui si sono usati più libri di testo;
- casi in cui si è tentato un approccio alternativo al libro di testo, privilegiando una costruzione condivisa delle conoscenze matematiche, ma ci si è resi conto che in questo modo si è allargata la "forbice" all'interno della classe.

Da varie persone sono stati sottolineati il rischio che gli approcci alternativi favoriscano un insegnamento frammentario o approcci troppo soggettivi alla disciplina, e l'opportunità di ritentare, nonostante i fallimenti e le difficoltà, la preparazione e la diffusione di nuovi libri di testo. Altri hanno sottolineato, invece, l'opportunità di diffondere (e confrontare) attraverso Internet materiali con impostazioni alternative rispetto ai libri di testo più diffusi. Tutti hanno, comunque, sottolineato l'importanza di educare, anche per quanto riguarda la matematica, ad un uso critico di "Internet".

Un resoconto più esteso della introduzione e della discussione si può trovare all'indirizzo: http://macosa.dima.unige.it/UMI/2002.

PROBABILITÀ E STATISTICA: QUESTIONI DIDATTICHE

Mario Barra
Università di Roma "La Sapienza"

Nel gruppo di lavoro in oggetto è stata sollecitata la riflessione degli insegnanti attraverso il questionario che segue (distribuito il giorno precedente a quello dell'incontro):

- Indicare alcune peculiarità e difficoltà dell'insegnamento e dell'apprendimento della probabilità e della statistica.
- Vi è capitato di affrontare il problema della mancata standardizzazione dei termini che si usano in questi insegnamenti?
- Quali rischi comporta la non neutralità dei termini usati (valenza didattica dei linguaggi specialistici ed interferenza con il linguaggio comune)?
- Quali rischi comporta la non neutralità delle rappresentazioni usate?
- Come gestire la simultaneità delle difficoltà che s'incontrano nell'apprendimento?
- Quale rapporto con la storia?
- Quale rapporto con il calcolo combinatorio?
- Come definire la successione degli argomenti da trattare?
- Iniziare con la statistica o con la probabilità?
- Quali definizioni di probabilità usare?
- E' opportuno impostare l'insegnamento a partire da assiomi?
- E' opportuno insegnare a valutare qualitativamente (più o meno probabile) la probabilità
- Possono essere utili i collegamenti con la geometria, la fisica (es. termodinamica), ... e fra discreto e continuo?
- Quale spazio assegnare alla visualizzazione?
- Quando collocare la simulazione e quale ruolo può avere?
- È "meglio" iniziare dalla probabilità dell'intersezione o dalla probabilità subordinata?
- Come introdurre la formula della probabilità subordinata?
- E' opportuno parlare della somma di variabili aleatorie?
- Conviene considerare un evento come una variabile aleatoria?
- Può essere utile utilizzare la distribuzione doppia di frequenze, dapprima assolute, poi relative?
- Può il concetto di distribuzione statistica di frequenze aiutare a cogliere il concetto di variabile aleatoria?
- Quale rapporto fra la "legge dei grandi numeri" e il "teorema del limite centrale"?
- Conviene accennare al problema della statistica Bayesiana?
- Come educare all'uso critico dei modelli matematici?
- Statistica e realtà fenomenica, in quale relazione si pongono rispetto alla matematica?
- Più acquisizione di tecniche o più sviluppo di processi e atteggiamenti utili rispetto ad alcune esigenze che si manifestano anche al di fuori della scuola?
- Quale spazio dedicare alla storia dei concetti e al "problem solving"?
- Come conciliare la vastità dei programmi rispetto al tempo disponibile a scuola.

Dopo un dialogo con gli insegnanti si è cercato di proporre alcune risposte alle domande seguendo le indicazioni fornite in alcuni convegni dedicati ai temi trattati (a partire dal convegno XXVI CIEAEM (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), L'enseignement des Probabilités et des Statistiques, 1974), da numerose sperimentazioni condotte e da alcuni grandi matematici che si sono occupati della didattica degli argomenti in questione. Di tutto ciò, in questa pubblicazione, è possibile soltanto indicare una trattazione specifica in una breve bibliografia[70].

---

70 Barra M.: 2002, Teorema del limite centrale a scuola a partire dall' esperienza e con il problem solving. Somma di alcuni numeri aleatori e Metodo di Montecarlo, *L' insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 25 A-B, n. 6, 591-627.
Barra M.: 2002, Calcolo delle probabilità. Approfondimenti e collegamenti, *L' insegnamento della °matematica e delle scienze integrate*, v. 25 A-B, n. 6, 657-686.
Barra M.: 2002, Galileo Galilei e la probabilità , in Montesinos J., Solis C. (Eds), *Largo Campo°di Filosofare; Atti dell'Eurosymposium: Galileo 2001*, 101-118.
Barra M.: di prossima pubblicazione, Difficoltà nascoste nella didattica dei primi elementi di calcolo °delle probabilità . Compatibilità fra insegnamento iniziale e approfondimenti successivi. Diagrammi di °Venn strutturati . Indipendenza logica e stocastica. Formula di Bayes, *Progetto Alice,* N. 10, Vol. 4, °Ed.°Pagine.

PROBLEMI DI MISURA CON LE CALCOLATRICI: APPROCCIO AGLI INTEGRALI

Ornella Robutti e Cristina Sabena
Università di Torino

Alcuni riferimenti dalla ricerca didattica

L'argomento integrale viene spesso affrontato nella scuola secondaria, a conclusione del corso di analisi matematica, secondo una scansione (ispirata ai programmi tradizionali) che pone prima la trattazione dell'integrale indefinito e quindi quella dell'integrale definito, seguita dal teorema fondamentale e dall'interpretazione geometrica[71]. Ciò che si perde, è la parte essenziale e centrale dell'argomento: il *significato*, che, in questo caso, va ricercato nella teoria della misura. Il contesto della misura risulta infatti quello appropriato sia dal punto di vista dello sviluppo storico dell'analisi, sia dal punto di vista cognitivo: D. Tall nei suoi studi sulla didattica dell'analisi ha individuato per essa alcune radici cognitive, tra cui l'area sotto il grafico di una funzione come base per l'apprendimento del concetto di integrale (Tall et al., 2000). Come sottolinea lo stesso Tall, essa può svolgere proficuamente il ruolo di radice cognitiva, per il fatto di essere *embodied*, ovvero strettamente legata al corpo, alla percezione e all'esperienza quotidiana (Lakoff & Nùñez, 2000).

Costruire tale radice cognitiva negli allievi con approccio embodied significa far svolgere loro attività in cui sono coinvolti funzioni e loro grafici, utilizzando per esempio software CAS (es. Derive o quelli delle calcolatrici grafico-simboliche, o *Graphic calculus* dello stesso Tall[72]). Come ampiamente segnalato in letteratura, la tecnologia da sola non è sufficiente per l'apprendimento, sia perché un oggetto di per sé può non avere per l'allievo alcun valore strumentale, essere cioè un mero artefatto[73], sia perché anche nel caso in cui essa riesca a veicolare dei significati, non è affatto assicurato che questi risultino matematicamente consistenti. L'analisi del ruolo dell'insegnante in rapporto all'apprendimento con le tecnologie in un contesto di costruzione sociale della conoscenza (Mariotti 2002) costituisce pertanto un elemento centrale di questa ricerca.

Tenendo presente questi riferimenti (ed altri, ved. ad es. Robutti & Sabena (in stampa)), ci si chiede come può avvenire la costruzione di significato dell'integrale, negli studenti di scuola secondaria, a partire da problemi di misura (aree e lunghezze), sia in ambiente tradizionale (carta e matita), sia informatico (calcolatrici Texas TI-89).

---

[71] Diverso è il caso dei programmi P.N.I., che considerano il tema dell' analisi infinitesimale in tutto il triennio, e che presentano per quanto riguarda l' integrale: problema della misura, integrale definito, funzione primitiva e integrale indefinito, teorema fondamentale del calcolo integrale e integrazione numerica. I programmi ministeriali possono essere consultati al sito http://www.matmedia.ing.unina.it/.

[72] Il programma è scaricabile dal sito di Tall, all' indirizzo http://www.davidtall.com/.

[73] Si deve a P. Rabardel (1995) la distinzione tra *artefatto* (un oggetto) e *strumento* (l' oggetto considerato insieme agli schemi di utilizzo che il soggetto possiede per esso). M. A. Mariotti (2002) ha ampliato l' analisi di Rabardel, introducendo il concetto di *strumento di mediazione semiotica* (in grado, all' interno di una costruzione sociale della conoscenza gestita dall' insegnante, di veicolare significati matematici, secondo la teoria di Vygotskij).

Dal punto di vista didattico, intervengono i seguenti nodi concettuali: funzione, discreto e continuo, rappresentazioni nel piano cartesiano, variabili dipendenti e indipendenti, misura di grandezze, coinvolgendo essenzialmente i nuclei fondanti (Arzarello & Robutti, 2002) della Misura e delle Relazioni e sviluppando competenze che riguardano non solo la matematica, ma anche le scienze sperimentali.

Il progetto didattico e la sperimentazione

La sperimentazione, un teaching experiment all'interno delle regolari lezioni di una classe di Liceo Scientifico di tipo tradizionale, si è sviluppata in due parti: la prima riguarda le attività in ambiente carta e matita in classe terza, la seconda le attività col supporto della tecnologia, nella stessa classe in quarta.

La prima parte verte sulla concettualizzazione del *processo*[74] di integrazione a partire da problemi di determinazione di aree e di lunghezze[75], con i seguenti obiettivi di ricerca: quali metodologie vengono messe in atto spontaneamente dagli studenti? Quali di queste metodologie possono costituire, in un contesto funzionale, le procedure sulle quali fondare il processo di integrazione? Come intervengono gli aspetti percettivi (pensiero embodied)? Quali tipi di ragionamento vengono attivati?

Nella seconda parte, in continuità con il percorso dell'anno precedente, ci si è concentrati (questa volta con l'utilizzo delle calcolatrici TI-89) sul passaggio dal *processo* di integrazione all'*oggetto* integrale, con la scoperta di alcune sue più importanti proprietà[76]. L'analisi si è concentrata sul ruolo della tecnologia non solo in termini di supporto all'attività esplorativa, ma anche come mediatore che può favorire un'*unità cognitiva* laddove sono presenti discontinuità epistemologiche, come nel calcolo di un'area con strumenti infinitesimali; sul passaggio dal discreto al continuo; sul ruolo dell'insegnante nel gestire la mediazione semiotica dello strumento.

Nel workshop sono stati presentati e discussi alcuni protocolli tratti dalle attività della seconda parte, in riferimento al quadro teorico delineato.

---

[74] Alcune ricerche (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991) hanno infatti mostrato che i concetti matematici (in quanto *oggetti*) vengono costruiti dall' individuo a partire dai *processi* che li hanno generati.

[75] Esempi di attività consistevano nella determinazione di aree di sagome ritagliate su cartoncino, di lunghezze di curve disegnate su carta, di aree sottese da funzioni tracciate sul piano cartesiano (rette, parabole).

[76] A partire dai metodi individuati dagli allievi nelle attività precedenti, sono stati presentati e discussi alcuni programmi sulle calcolatrici, per determinare valori approssimati dell'area sottesa da una funzione positiva. Essi sono risultati fondamentali nel passaggio da misure sempre meglio approssimate alla misura esatta (e quindi all'integrale). Le attività successive hanno permesso di introdurre le proprietà fondamentali dell'integrale, come il segno e l'additività. Infine, è stata introdotta l'integrale come funzione di un estremo dell'intervallo.

Bibliografia

Arzarello, F. & Robutti, O. (2002). Matematica. *Collana: Professione Docente, La Scuola, Brescia.*

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.): Advanced Mathematical Thinking, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 95-123.*

Lakoff, G. & Nùñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. *New York: Basic Books.*

Mariotti, M. A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students' Math Learning, in: L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (eds), Handbook of International Research in Mathematics Education. *USA: LEA.*

Rabardel, P. (1995). Les hommes & le tecnologies: Approche cognitive des instruments contemporains, *A. Colin, Paris.*

Robutti, O. & Sabena, C. (in stampa). La costruzione del significato di integrale, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, *1-36.*

Tall, D., McGowen, M. & DeMarois, P. (2000). The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept, Proceedings of PME-NA, *1, 247-254.*

UNA ESPERIENZA DI LAVORO COOPERATIVO NELLA SECONDARIA SUPERIORE: QUALE FORMAZIONE PROFESSIONALE PER L'INSEGNANTE?

Anna Baldrighi
Istituto Tecnico Industriale Statale "G. Cardano", Pavia

Angela Pesci
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Il *Cooperative Learning* è una modalità di insegnamento-apprendimento centrata essenzialmente sulle risorse del gruppo classe, opportunamente sollecitate e sviluppate da parte dell'insegnante. Diffuso in Italia a partire dagli anni ottanta circa, non ha ancora trovato, a nostro parere, la diffusione adeguata, tuttavia negli ultimi anni l'interesse verso questa promettente modalità didattica sembra diventare più consistente.

I testi citati in bibliografia ne descrivono ampiamente le caratteristiche, mettendo anche in risalto le differenti interpretazioni che sono state attuate da ricercatori e insegnanti in diversi paesi. Può essere interessante citare anche i due seguenti siti, entrambi dedicati all'apprendimento cooperativo: www.scintille.it, una "Rivista Italiana on line sul Cooperative Learning" e www.clcrc.com, che raccoglie numerosi documenti del "Cooperative Learning Center at the University of Minnesota", una delle sedi storiche in cui si è sviluppata questa modalità di insegnamento-apprendimento.

La caratteristica principale di questa modalità di insegnamento-apprendimento è che l'attenzione dell'insegnante e degli studenti, che lavorano a gruppi, deve essere distribuita e bilanciata su due dimensioni, quella disciplinare e quella sociale. Lo sviluppo di competenze disciplinari è accompagnato dall'evolversi di relazioni interpersonali positive, che contribuiscono a costruire un ambiente accogliente, una situazione di benessere che è presupposto necessario per una effettiva crescita nella formazione dei ragazzi.

La distribuzione di ruoli all'interno di ogni gruppo di lavoro è un'altra caratteristica di questa modalità. Nelle esperienze che abbiamo realizzato i ruoli previsti erano cinque: il *coordinatore*, che è l'alunno orientato al compito disciplinare e deve fare in modo di organizzare il suo gruppo in modo da ottenere il risultato migliore; lo *psicologo*, cioè l'alunno orientato al gruppo e dunque responsabile del clima comunicativo tra le persone; il *notaio*, che è responsabile della verbalizzazione di ciò che il gruppo decide in relazione al compito disciplinare; il *relatore*, che è l'alunno che a conclusione del lavoro espone a tutta la classe l'esito ottenuto; infine l'*osservatore*, che è responsabile di notare se ciascuno dei compagni svolge adeguatamente il ruolo che riveste e lo comunica, in fase di relazione finale, a tutta la classe.

Con l'attribuzione di un ruolo ad un alunno gli si dà la possibilità di attuare pienamente la sua autonomia, cioè lo si autorizza a prendere decisioni, a valutare e a controllare e tutto ciò è riconosciuto di fondamentale importanza per lo sviluppo della persona nella sua interezza: lo scambio dei ruoli, inoltre, dà l'occasione ad ognuno di vivere esperienze complementari, sviluppando dunque abilità differenti e riuscendo anche a scoprire e percepire meglio le proprie attitudini.

Una esperienza didattica secondo i principi esposti è stata realizzata in una seconda classe di istituto tecnico sul teorema di Pitagora: il primo compito disciplinare su questo argomento era proprio il ricordo della formulazione verbale del teorema, che tutti incontrano nella scuola media; i due compiti successivi hanno invece riguardato due diverse dimostrazioni del teorema, che sono state lasciate da sviluppare ai ragazzi a partire da situazioni grafiche adeguate.

Una volta discussa e concordata la versione usuale del teorema, che tutti hanno subito ricordato anche se non formulato sempre in modo adeguato, si è passati a sviluppare le due dimostrazioni, ponendo ogni volta attenzione a giustificare i passaggi tra un passo e l'altro del procedimento. E' interessante notare che per entrambe le dimostrazioni richieste, nonostante i disegni di riferimento iniziali fossero uguali per tutti i gruppi, si sono seguite modalità differenti, tutte adeguate, discusse e poi condivise dalla classe.

A livello disciplinare si è dunque ottenuta la partecipazione di tutta la classe e una notevole ricchezza di idee; a livello relazionale si è notato che progressivamente crescevano l'abilità a collaborare tra compagni, la capacità di ascoltarsi e condividere un progetto, la competenza nell'assumere i diversi ruoli previsti.

I giudizi espressi dai ragazzi a conclusione dell'esperienza sono stati tutti largamente positivi, sia sull'aspetto disciplinare che su quello sociale: hanno apprezzato in particolare la possibilità di raggiungere i risultati da soli, con le loro forze, senza l'intervento immediato dell'insegnante ed anche il clima collaborativo, inusuale, che si era stabilito fra compagni e che ha favorito il consolidamento di relazioni interpersonali.

Il ruolo dell'insegnante in una esperienza di apprendimento cooperativo è diverso dall'usuale: egli diventa il regista di tutto il processo, non ne è più primo attore e questo comporta che la sua competenza sia matura non solo a livello disciplinare ma anche relazionale. E' su questo secondo versante che oggi l'insegnante si sente meno preparato: occorre saper accogliere in senso pieno il gruppo classe, riconoscere e sviluppare le risorse degli alunni, osservare e valutare le dinamiche relazionali, in sintesi è necessario farsi carico *in toto* degli allievi come persone, senza trascurare le loro emozioni, percezioni, credenze e aspettative.

Si può riconoscere che per la formazione professionale dell'insegnante alcuni passi in questo senso sono stati compiuti, tuttavia non si è che all'inizio di questo cammino.

Bibliografia

Bonetta G., Luzzatto G., Michelini M., Pieri M.T. (a cura di), 2002, *Università e formazione degli insegnanti: non si parte da zero*, Forum, Udine

Cohen E. G., 1999, *Organizzare i gruppi cooperativi*, Erickson, Trento

Comoglio M., Cardoso M. A., 2000, *Insegnamento e apprendimento in gruppo: il cooperative learning*, LAS, Roma

Demetrio D., Fabbri D., Gherardi S., 1994, *Apprendere nelle organizzazioni*, La Nuova Italia Scientifica, Roma

Fattori A., 2001, *Il teorema di Pitagora nella scuola secondaria superiore: un'esperienza di apprendimento cooperativo*, Tesi di laurea in Mat., Univ. di Pavia, a.a. 2000/2001

Johnson D. W., Johnson R. T., Holubec E. J., 1996, *Apprendimento cooperativo in classe*, Erickson, Trento

Pesci A., in stampa, Insegnanti di matematica e studenti: come migliorare l'aspetto umano delle loro relazioni? *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*

Polito M., 2000, *Attivare le risorse del gruppo classe*, Erickson, Trento

Sharan Y., Sharan S., 1998, *Gli alunni fanno ricerca*, Erickson, Trento

Vianello L., 2003, La relazione tra intelligenze ed autonomia, *Matematica e Difficoltà n. 12*, 17-25, Pitagora, Bologna

LABORATORI

LAVORO DEL GRUPPO "NUMERI E ALGORITMI"

Ercole Castagnola
N.R.D. Dipartimento di Matematica
Università di Napoli "Federico II"

Il programma del nucleo "Numeri e algoritmi" dovrebbe permettere agli studenti, che nel ciclo di studi precedente hanno acquisito una buona comprensione dei numeri interi e razionali e delle loro proprietà, di iniziare a lavorare con i numeri irrazionali per arrivare poi a introdurre (a livello intuitivo) i numeri reali e, contemporaneamente, il riempimento della retta numerica. Sarebbe opportuno a questo punto rivedere la costruzione teorica degli insiemi ¥, ¢, / e ¡, non assiomaticamente, ma mostrando sempre di più la loro struttura "incapsulata" e il distinguersi gli uni dagli altri per le loro proprietà e i loro usi. Inoltre la possibilità offerta agli studenti di lavorare con insiemi (come polinomi, classi di resto, vettori) aventi proprietà diverse da quelle dei numeri reali, dovrebbe aiutarli a capire sia la struttura comune dei vari insiemi numerici che le loro differenti caratteristiche. L'accresciuta abilità degli studenti nel riflettere e nel controllare la propria attività con i numeri dovrebbe condurre a una maggiore capacità di astrazione e di generalizzazione. Infine l'uso dei nuovi strumenti di calcolo dovrebbe richiedere una particolare attenzione agli errori che possono generarsi dall'uso della tecnologia. Si pone in tal modo il problema delle approssimazioni: gli studenti devono saper distinguere e scegliere fra risultati esatti e risultati approssimati in una varietà di problemi e situazioni.

La discussione all'interno del gruppo di lavoro è preceduta da una presentazione di una bozza del programma del nucleo suddiviso in due bienni, spiegando nel contempo le motivazioni che hanno portato, per il momento, a non considerare il quinto anno. Si ribadisce che i programmi che vengono esaminati rappresentano la matematica per tutti (la cosiddetta "matematica per il cittadino"), ferma restando la possibilità di ulteriori approfondimenti per particolari Indirizzi. In ogni caso occorre affrontare il problema della preparazione degli studenti degli Indirizzi Secondari senza perdere di vista il significato degli oggetti matematici e si vuole evitare il rischio di fornire solo tecniche o, peggio ancora, "ricette" precostituite. È quindi importante che gli studenti si "approprino" degli strumenti per acquisire tale significato attraverso opportuni percorsi didattici. Alcuni dei partecipanti al gruppo hanno letto il volume "Matematica 2001", dedicato alle Scuole Elementari e Medie Inferiori, e auspicano che venga pubblicato un testo analogo per le Scuole Secondarie Superiori in quanto è importante fornire agli insegnanti una guida esemplificativa, vista la scarsa diffusione di materiali specificatamente dedicati alla pratica didattica.

Un primo problema è quello relativo all'uso delle tecnologie nei riguardi dell'approssimazione: nel passato era consuetudine approssimare "passaggio per passaggio", mentre con gli strumenti attuali (calcolatrici, ecc.) si arrotonda alla fine di una serie di calcoli sulla base della "ragionevolezza" sul numero di cifre del risultato. Occorre rivalutare il "calcolo mentale": controllare l'ordine di grandezza e utilizzare le proprietà delle operazioni può costruire una buona base per il calcolo algebrico. In generale, come sottolineato nel testo "La Matematica dalla scuola materna alla maturità" curato, per l'edizione italiana, da Lucia Grugnetti e Vinicio Villani, è importante che gli studenti sappiano lavorare coi numeri (1) a mano, (2) a mente e (3) a macchina. Un altro problema didattico di difficile soluzione è l'uso corretto da parte degli studenti dei numeri negativi: una conseguenza positiva dell'uso delle tecnologie, in particolare delle calcolatrici scientifiche e delle moderne calcolatrici grafiche che possiedono due tasti distinti (e a volte utilizzano due simboli diversi) per indicare i diversi significati del segno "meno", potrebbe essere l'utilizzo, a livello didattico, di due segni differenti per indicare l'opposto e l'operazione di sottrazione. Un altro concetto importante, spesso legato all'uso delle tecnologie, è quello di algoritmo. Molti insegnanti nutrono ancora il timore di doversi trasformare in docenti di informatica; occorre invece ribadire che la cosa importante è mettere lo studente in grado di individuare l'algoritmo adatto alla risoluzione di un dato problema e non l'implementazione dell'algoritmo stesso in un dato linguaggio di programmazione, sulla cui scelta è lasciata ampia discrezionalità.

Si sottolinea la necessità di introdurre i numeri reali a livello intuitivo, lasciando all'insegnante la scelta di quando introdurli (nel I o II anno del primo biennio). Relativamente al calcolo sia numerico che algebrico, si sottolinea l'opportunità di non usare espressioni eccessivamente complesse, demandando a strumenti di calcolo simbolico la loro manipolazione e semplificazione, e si consiglia, in particolare, di ridurre al minimo il calcolo coi radicali. Inoltre, per quanto riguarda i polinomi e le loro proprietà, si consiglia di tralasciare la regola di Ruffini (o di limitarsi a una breve illustrazione come metodo di calcolo), di arrivare nel primo biennio alla divisione dei polinomi e di affrontare, al secondo biennio, il teorema di Ruffini con le sue conseguenze. È comunque importante che i polinomi (in particolare, i polinomi in una variabile) vengano considerati sotto il loro duplice aspetto di espressioni formali e di funzioni, in modo da evidenziarne sia l'aspetto sintattico che quello semantico, senza dimenticare il loro utilizzo nell'approssimazione delle funzioni.

Si osserva, infine, che l'utilizzo dello strumento vettore è importante sia all'interno della matematica (ad esempio in geometria, analitica e sintetica, e in statistica) che in altre discipline (ad esempio in fisica); secondo alcuni dei presenti i vettori sono diventati una componente irrinunciabile della loro pratica didattica. Propedeutica all'uso dei vettori può essere l'interpretazione dell'addizione di numeri interi positivi e negativi come spostamenti sulla retta numerica. Inoltre i vettori rappresentano un esempio importante di strutture non numeriche, fermo restando il fatto che il concetto di struttura deve rappresentare per lo studente un punto di arrivo, mai un punto di partenza.

NUCLEO "RELAZIONI E FUNZIONI"

Marilina Ajello, Margherita D'Aprile, Marta Menghini.

Agli insegnanti presenti sono state illustrate le proposte della Commissione relativamente ai contenuti del nucleo "Relazioni e Funzioni", unitamente ad un sunto delle competenze che si vuole che gli studenti raggiungano.

Un problema, generale, emerso durante la discussione, è in che misura questi programmi vadano interpretati come indicazioni per eccesso o per difetto. Chiariamo il problema con alcune delle questioni emerse.

Uno dei contenuti del 2° biennio è "zeri e segno di una funzione". Nel primo biennio si parla di rette e di equazioni e disequazioni di primo grado. Da un punto di vista concettuale si tratta ovviamente anche qui di "zeri". Qualche insegnante ritiene opportuno parlare fin dall'inizio di "zeri". Ovviamente questo è accettabile; la proposta della Commissione contiene una implicita indicazione di carattere metodologico che non è prescrittiva; infatti molti nella Commissione stessa preferirebbero che il tema delle equazioni venisse incluso, già dal primo biennio, in quello più generale della ricerca degli zeri di una funzione.

Quando invece, nel 2° biennio, si fa un elenco di funzioni da trattare (funzione potenza, funzioni polinomiali, ... funzioni definite a tratti, funzioni razionali) l'elenco va interpretato "per eccesso" nel senso che si propone una *scelta* nell'ambito di quanto elencato.

Un altro esempio: non è nominato il "coefficiente angolare". Ciò non vuol dire che non vada trattato, ma semplicemente che la scelta spetta all'insegnante. Nominiamo invece esplicitamente, nei contenuti, la "pendenza". Per chiarire questo, potremmo dire che i contenuti dei programmi vanno visti come *capitoli* di un libro di testo, e non come *paragrafi*. Nello stendere i programmi si fanno alcune scelte, che consistono spesso nel trasformare alcuni capitoli in paragrafi e alcuni paragrafi in capitoli. Il "coefficiente angolare" è (ed è sempre stato) un paragrafo, gli "insiemi" erano un capitolo nei programmi Brocca e qui sono diventati un paragrafo, la "pendenza" è diventata un capitolo, perché attribuiamo una certa importanza a questo aspetto.

In modo analogo si dice, fra le competenze del secondo biennio, che "l'alunno deve saper leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi". Ma i "massimi e minimi" non sono nei contenuti; questo vuol dire che di questo argomento non si fa una trattazione teorica, che si tratta di osservazioni che nascono nell'ambito di attività diverse.

Durante il lavoro di gruppo abbiamo proposto di formalizzare un problema. Qualcuno lo ha risolto senza usare incognite, qualcuno ha usato un sistema di due equazioni in due incognite, qualcuno un sistema di quattro equazioni in quattro incognite. Ovviamente l'insegnante può suggerire, per rendere più immediate le equazioni, di usare 4 incognite (è anzi opportuno che lo faccia qualche volta), ma questo non vuol dire fare una trattazione dei sistemi di n equazioni in n incognite.

Al proposito ci hanno fatto notare che, nei contenuti relativi al primo biennio, vi è "sistemi di equazioni lineari in due o più incognite e loro interpretazioni geometriche". Ovviamente c'è un errore di scrittura del contenuto, perché non si vuole chiedere l'interpretazione geometrica di equazioni in più incognite, ma forse anche "sistemi in più equazioni e più incognite" è di troppo perché potrebbe far pensare ad una trattazione generale.

Ci hanno anche fatto notare che non parliamo di equazioni trascendenti. E' vero che sono implicite nell'argomento "zeri di una funzione", ma le equazioni di 2° grado sono invece citate esplicitamente. Dobbiamo toglierle? O forse le equazioni di 2° grado meritano un trattamento particolare? Per ora rimaniamo di questo secondo avviso.

Nella questione "massimi e minimi" rientra l'approccio intuitivo all'analisi matematica. Non per tutti è chiaro come vada inteso, e forse la nostra frase "successioni e introduzione al concetto di limite" è soggetta ad essere interpretata ad un livello troppo teorico. Andrebbe quindi, a nostro parere, modificata.

Un ultimo problema: software come il Derive consentono, spostando il cursore in corrispondenza di x=0, di ottenere la soluzione di un'equazione. L'insegnante deve accettare questo metodo? Crediamo che si possa dire che, quando si affronta la soluzione di un problema, nessun metodo corretto possa essere espressamente vietato. Ma naturalmente rimane la discrezionalità dell'insegnante nel proporre e valutare l'uso di metodi diversi.

MATEMATICA 2001:
UN ANNO DOPO, QUALI PROSPETTIVE PER LA SCUOLA ELEMENTARE?

Stefania Cotoneschi, Franca Ferri

Passato un anno da quando la Commissione UMI (Unione Matematica Italiana), composta da docenti universitari ed insegnanti di diversi ordini di scuola, ha prodotto i materiali per un nuovo curricolo di matematica, ci siamo chiesti che tipo di rilievo abbia avuto il lavoro della Commissione UMI e quanto le linee ispiratrici del lavoro medesimo, siano state riprese per le indicazioni dei piani di studio personalizzati, all'Interno della riforma proposta dal Ministro Moratti.

Nel laboratorio, abbiamo richiamato alcuni nodi fondamentali sui quali si è basato il lavoro della Commissione Umi.

- La scuola del curricolo, è la scuola che si pone il problema di far raggiungere apprendimenti significativi, conoscenze stabili, competenze specifiche e competenze trasversali a tutti gli studenti, qualunque sia la loro provenienza sociale e culturale.
- Quando si parla della matematica per il cittadino l'obiettivo è quello di delineare quali competenze matematiche siano necessarie ad un cittadino consapevole, che vive, legge i giornali, sente la TV, lavora nel secolo in cui siamo appena entrati.
- L'alunno stesso è l'attivo costruttore delle conoscenze matematiche; egli dovrà progredire sulla base di quanto già acquisito in modo significativo e stabile, tenendo conto che in tale attività egli sarà sostenuto e guidato dall'insegnante secondo un progetto formativo coerente ed esplicito concordato nella scuola e con le famiglie.
- Le discipline hanno una funzione formativa, quindi l'educazione matematica deve contribuire alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica.
- Nella scuola elementare e media la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti culturalmente ricchi e motivanti, che permettano agli allievi esperienze cognitive significative e consonanti con quelle condotte in altri ambiti: scientifici, linguistici, motori, figurativi, ecc.
- Il percorso per il raggiungimento dei concetti matematici e della loro formalizzazione non è lineare, ma passa necessariamente per momenti cruciali che costituiscono salti cognitivi, che è necessario affrontare con una didattica di tipo elicoidale, in un percorso unitario e continuo.
- È essenziale l'attivazione di esplorazioni cognitivamente ricche in campi di esperienza significativi per l'allievo, in sinergia con esperienze parallele condotte nei vari ambiti disciplinari; in tali attività sarà fondamentale la mediazione del linguaggio naturale.

Sono stati richiamati i quattro nuclei tematici che caratterizzano il curricolo ed i tre nuclei di processo che mirano allo sviluppo di capacità relative alla metodologia propria della disciplina fino dai primi anni; si tratta di nuclei trasversali che hanno stretto contatto con i temi degli altri nuclei.

Tra gli aspetti innovativi della proposta UMI per la costruzione del curricolo, si sono evidenziati:

- L'attenzione alla costruzione del significato delle operazioni

- L'attenzione alla capacità di verbalizzare le strategie risolutive e di calcolo
- L'attenzione alla capacità di osservare e cogliere relazioni
- L'attenzione alla capacità di produrre congetture interpretative e previsionali
- L'attenzione alla capacità di interpretare dati e operare scelte in situazioni di incertezza

Abbiamo sottolineato che il soggetto che apprende opera nella realtà e che quindi anche nell'insegnamento della matematica, vanno considerate le esperienze individuali e sociali, esperienze collegate alla nostra cultura e comunque esperienze ricche di significato.

Si è affermata esplicitamente, l'idea della necessità di costruire laboratorialmente gli apprendimenti, approfondendo ed evolvendo verso la costruzione sociale delle conoscenze, attraverso la discussione matematica. Fare laboratorio di matematica significa adottare una metodologia legata al fare, all'interno di un'attività e di un progetto come sede di elaborazione di esperienza e sviluppo di processi

Un altro aspetto innovativo consiste nel riconoscere l'importanza di competenze trasversali, ponendo l'accento su come la matematica svolga una funzione determinante nel loro sviluppo e come la matematica si avvalga di situazioni trasversali per sviluppare competenze collegate anche con altre discipline. Si è rafforzata l'attenzione sui problemi, come funzione irrinunciabile della formazione matematica e della metodologia caratteristica della disciplina.

Un aspetto condiviso da disciplinaristi ed insegnanti è che la matematica richiede immaginazione e motivazioni per "vedere" direttamente i problemi, ossia saperli individuare, porre e risolvere.

Abbiamo esaminato la struttura proposta nella nuova riforma, e ci siamo chiesti quale continuità ci fosse con il passato: con gli orientamenti del '91, con i programmi dell'85, con i programmi del '79; ci è sembrato che molte delle buone idee del passato peraltro ancora attuali e forse addirittura innovative, fossero state assolutamente ignorate.

Nel gruppo ci siamo chiesti con preoccupazione che relazione ci fosse tra l'apprendimento laboratoriale, così come lo intendiamo noi, ed i laboratori di cui si parla nella nuova riforma: sembra che il laboratorio, adesso, sia distinto dal lavoro della classe e delle discipline "prioritarie"...

Ma allora che ne sarà della matematica? Sarà insegnata dall'insegnante tutor, che magari non avrà nemmeno una preparazione specifica e soprattutto, forse, attuerà l'insegnamento nel modo tradizionale della scuola del passato? Si tornerà ad una matematica mnemonica e lontana dal mondo complesso della realtà?

Abbiamo notato come siano adesso in secondo piano le competenze trasversali, i nuclei di processo e soprattutto come siano quasi scomparsi i problemi, nella loro accezione di situazioni stimolanti che mettono in moto il ragionamento per l'individuazione di strategie risolutive.

Anche l'idea di progressività e di apprendimento in tempi lunghi che tanto erano stati sottolineati dalla Commissione UMI sembrano difficilmente realizzabili nella nuova struttura scolastica.

Il gruppo ha evidenziato con rammarico che sembra prevalere un modello trasmissivo anziché un modello scientifico che privilegia nell'apprendimento, l'intelligenza critica, la ricerca e la coniugazione stretta fra teoria e prassi, fra momento cognitivo e momento applicativo.

C'è stato molto interesse e tutti gli insegnanti presenti hanno dichiarato la loro intenzione a voler approfondire il discorso, per capire bene e per essere vigili sulle sorti della scuola pubblica italiana.

Il contributo del gruppo è stato considerato dalle conduttrici del laboratorio, per la stesura di un articolo che è stato pubblicato sul libro edito dalla Tecnodid nel novembre 2002:

"Come cambia la scuola primaria - tesi a confronto".

IL LABORATORIO DI MATEMATICA

Domingo Paola
Liceo scientifico "A. Issel" - Finale Ligure (SV)
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

Con "laboratorio di matematica" si vuole intendere un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone, strutture, strumenti, idee, con lo scopo principale di creare un ambiente di insegnamento – apprendimento adatto alla costruzione di significati, che è strettamente legata, da una parte, all'uso di strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni sociali che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività.

Usando una metafora si può dire che l'ambiente del laboratorio è simile a quello della bottega rinascimentale, nella quale l'apprendista lavora facendo e vedendo fare, costruendo conoscenza, ma anche apprendendo per imitazione dell'esperto e di altri compagni. Strumenti, interazioni sociali e sapere di riferimento sono i poli attorno ai quali ruota il laboratorio di matematica. Tali poli caratterizzano inevitabilmente e in maniera forte la didattica e, quindi, l'insegnamento – apprendimento degli oggetti di studio e i significati stessi che di tali oggetti vengono costruiti.

Le nuove tecnologie devono essere intese come particolari, ma non unici, strumenti che possono essere utilizzati come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza. Su un punto è però necessario riflettere attentamente: l'uso di strumenti, le modalità di comunicazione e condivisione delle conoscenze sono fortemente correlati al sapere di riferimento. Ciò implica che non solo il sapere istituzionale di riferimento può indicare e suggerire se e come utilizzare una certa tecnologia, ma che vale anche il viceversa, e cioè la scelta di utilizzare una determinata tecnologia può portare a ripensare in modo significativo certi aspetti del sapere di riferimento. Questa affermazione può sembrare sorprendente, se non addirittura irriverente: ma come, ci si chiederà, se decido di utilizzare una determinata tecnologia, allora può variare il sapere di riferimento relativo a concetti come quelli di dimostrazione, di funzione, di figura geometrica e così via? Io sono fortemente convinto che così è perché il significato in matematica e, quindi, le riposte a domande del tipo che cosa si intende per un determinato concetto matematico e, più ingenerale, che cosa si intende per matematica, non sono indipendenti dalle pratiche, dalle tecniche e dagli strumenti che si sceglie di utilizzare.

La didattica del laboratorio è una *didattica lunga*, rispettosa dei diversi tempi di apprendimento degli studenti, attenta non solo agli aspetti di carattere cognitivo, ma anche a quelli legati all'interazione sociale e alla gestione delle emozioni e degli atteggiamenti degli studenti di fronte alla materia di studio e di fronte ai successi e agli insuccessi. Nel laboratorio è necessario prestare attenzione non solo alle conoscenze e alle competenze in possesso degli studenti, ma anche a come tali conoscenze e competenze vengono comunicate, discusse e condivise. È necessario essere consapevoli del fatto che emozioni e atteggiamenti influiscono in modo sostanziale sui percorsi di insegnamento – apprendimento. È opportuno prestare maggiore attenzione ai processi di pensiero attivati dagli studenti nella risoluzione di un problema o nella sistemazione delle conoscenze, più ancora che ai prodotti della loro attività. Nel laboratorio di matematica l'insegnante ha la responsabilità di costruire ambienti di apprendimento che favoriscano la produzione di pensiero, la costruzione di significati; deve occuparsi e preoccuparsi di fare in modo che gli studenti si facciano carico dei problemi loro proposti, che si sentano coinvolti nella scelta delle strategie risolutive, nella ricerca e nella validazione delle soluzioni. L'approccio all'apprendimento nel laboratorio di matematica è di tipo percettivo – motorio, piuttosto che non quello ricostruttivo – simbolico che caratterizza la prassi didattica tradizionale.

Nel laboratorio svoltosi durante il convegno e a cui questo scritto si riferisce, sono state presentate, a scopo esemplificativo, le seguenti attività:

§ uso delle macchine matematiche (ossia di macchine che tracciano, localmente, curve piane) per avviare alla dimostrazione nell'ambiente della geometria analitica

§ utilizzazione del campo di esperienza dei numeri interi per avviare all'uso dell'algebra come strumento di pensiero e alla dimostrazione di proprietà aritmetiche

§ uso delle calcolatrici grafico – simboliche e dei sensori di movimento per introdurre al concetto di funzione.

§ Concludo citando alcune reazioni di chi ha partecipato al laboratorio. Speranze e perplessità sono state espresse in ugual misura. Le speranze riguardano in particolare:

§ le potenzialità offerte dal laboratorio di matematica per motivare, coinvolgere e quindi recuperare all'attività matematica quei tanti studenti che si perdono forse anche a causa di pratiche didattiche inopportune.

§ L'attenzione agli aspetti di interazione sociale, che potrebbe anche aiutare nella gestione dei delicati problemi dovuti alla presenza in classe di differenti culture.

Alcuni fra i presenti, piuttosto perplessi, hanno obiettato che l'insegnamento ha bisogno di ordinare, sistemare, organizzare; ha bisogno di quadri di riferimento teorici solidi, di rigore e sistematicità. Altri hanno però reagito affermando che il problema è quello di capire se queste comprensibili e giustificabili esigenze dell'insegnamento possono essere considerate anche esigenze dell'apprendimento. In altri termini, chi apprende deve costruirsi significati e questa costruzione potrebbe addirittura essere inibita da un approccio troppo attento al rigore, agli aspetti formali, già dato in una forma ordinata e sistemata. Un'altra questione molto dibattuta è stata quella relativa all'opportunità di utilizzare le nuove tecnologie. Molti insegnanti, pur consapevoli della diffusione degli strumenti di calcolo automatico, numerico e simbolico, hanno espresso preoccupazioni sull'uso di strumenti che potrebbero favorire atteggiamenti acritici e inconsapevoli. Altri hanno obiettato che se questa preoccupazione è legittima e apprezzabile, non si può non convenire che condizione necessaria per affinare le capacità di controllo di uno strumento e per utilizzarlo consapevolmente e criticamente è quella di utilizzarlo.

"DATI E PREVISIONI"

Maria Gabriella Ottaviani

Hanno preso parte al laboratorio 9 docenti di cui 5 della scuola (2 di scuola media, 1 professionale, 1 liceo scientifico, 1 liceo classico PNI) e 4 universitari.

I docenti della scuola si sono preoccupati dei tempi, dei contenuti e dei modi per porgere gli argomenti.

Circa i tempi, le reazioni sono state diverse. Chi ha detto di venire da una esperienza in cui i contenuti di questo nucleo sono stati già affrontati nelle scuole medie, ritiene ridondante inserire nel biennio delle superiori le distribuzioni semplici, anche se vi potrebbe essere la possibilità - in questo caso - di dedicare tempo all'approfondimento degli aspetti più formali di tali contenuti. Chi, al contrario, viene da una esperienza in cui "Dati e previsioni" non sono stati trattati alle medie, ovviamente, mette in evidenza il problema di doverli affrontare dall'inizio e chiede che siano svolti anche nel ciclo precedente. Questo microcampione di insegnanti ha presentato dunque due situazioni estreme, che hanno necessità di mediazione. Questa è possibile, secondo le indicazioni di un altro docente, proponendo i concetti attraverso approfondimenti ed arricchimenti successivi, tenendo presente che esistono linguaggi comunicativi diversi e che sta alla sensibilità del docente adattarli alla classe. E' anche molto importante per questo docente far comprendere chiaramente la differenza fra matematica del certo e dell'incerto. Va anche segnalato che l'unico insegnante presente, laureato in scienze statistiche e che insegna in un professionale, si è preoccupato di fare presente che i contenuti proposti, per essere sviluppati nella loro completezza in tale tipo di scuola, richiedono un tempo congruo.

Sui contenuti, i docenti hanno al più chiesto spostamenti. Ad esempio alcuni riterrebbero opportuno spostare la Formula di Bayes dal 2° al 1° biennio, soprattutto se si usa lo strumento del diagramma ad albero per la visualizzazione del problema (si può tuttavia osservare che anche la distribuzione doppia offre, nel 2° biennio, un buono strumento didattico allo scopo). Ancora, circa la costruzione della tabella dei dati grezzi per l'introduzione dei dati nel computer, si è chiesto di sottolineare la parte metodologico-concettuale delle competenze e non l'aspetto "manipolativo" dell'operazione (vi è però da dire che ciò può dipendere dal tipo di scuola e dalla sensibilità dell'insegnante).

Dal punto di visto operativo si segnala che:

- in generale il programma di "Dati e previsioni" è piaciuto ai docenti dei licei presenti, che lo vedono fattibile nel tempo che presumono di avere e in base alle proprie esperienze concrete. Alcuni vedrebbero bene anche l'inserimento della distribuzione normale;
- forse occorrerebbe integrare la commissione con almeno un docente delle scuole professionali per conoscere e quindi tener conto delle esigenze di questo tipo di utenza.

Diversa è stata la reazione di una parte dei docenti universitari presenti, poiché la probabilità consente lo scontro-incontro di diverse scuole di pensiero. Le posizioni culturali diverse inducono a proporre strade diverse per l'insegnamento di statistica e probabilità. Così ad alcuni appare che l'approccio frequentista, accanto a quello classico, possano essere più agevoli, almeno inizialmente, e che gli studenti possano essere aiutati dall'aver affrontato prioritariamente lo studio della statistica. Altri invece ritengono che il soggettivismo bayesiano, nella logica che vede tra i suoi capiscuola de Finetti, sia la strada da percorrere a scuola fin dalle elementari. E' nato ovviamente il dibattito fra la diversa importanza da attribuire al modello teorico e alla realtà empirica e fra quale dei due abbia la precedenza, con ciò riproponendo l'antagonismo filosofico fra teoria e realtà.

Tutto ciò è senza dubbio molto interessante e richiede approfondimenti storici e psico-pedagogici. In effetti, a parte le razionalizzazioni fornite successivamente dagli studiosi, la prima utilizzazione storica della probabilità è derivata dall'evidenza sperimentale che ha orientato le strategie ottimali per la sopravvivenza degli esseri umani: e questo è un atteggiamento sicuramente frequentista. Poi, molto più tardi, la riflessione sulle domande poste dai giocatori d'azzardo ha generato la concezione classica della probabilità, secondo approfondimenti successivi che derivano da Laplace e culminano con Kolmogorov (il quale 'confessa' la genesi frequentista dei suoi postulati). L'opzione soggettivista è storicamente successiva ed include le altre due. Essa tuttavia implica molto di più di quella classica e di quella frequentista, poiché pone l'accento sulla strategia da assumere di fronte ad una prova ad esito incerto.

Si è infine evidenziato che il curriculum, proposto nell'ottica del binomio "competenze-contenuti", richiede in ogni caso l'esplicitazione della metodologia didattica necessaria per la sua presentazione in aula. A tale proposito si è convenuto che il "problem solving" sia un metodo particolarmente utile da cui può trarre vantaggio l'insegnamento/apprendimento sia della statistica sia della probabilità. Tra l'altro l'utilizzo di tale metodo consente di esplicitare meglio i legami con gli altri argomenti della matematica e con le altre discipline.

L'interessante dibattito sull'approccio culturale secondo il quale porgere l'insegnamento della probabilità e della statistica a scuola ha occupato una parte notevole del laboratorio, e ha compresso considerevolmente il tempo per la presentazione delle attività che erano state predisposte da Daniela Proia e da M.Gabriella Ottaviani con riferimento, rispettivamente, ad argomenti di probabilità e di statistica.

ELENCO PARTECIPANTI

Pierangela Accomazzo, Patrizia Acquaroli, Maria Ajello, Maria Giuseppa Ancona, Giuseppe Anichini, Mimmo Arezzo, Massimo Armeni, Ferdinando Arzarello, Maria Teresa Ascoli Bartoli, Sergio Ausenda, Giorgio Bagni, Anna Baldrighi, Riccardo Barbero, Vittorio Baritello, Celeste Barone, Mario Barra, Maria Bartolini Bussi, Mauro Basso, Maria Batini, Gioia Battiloro, Patrizia Bazza, Luciana Bazzini, Giuseppina Bellet, Maria Teresa Bezzo, Daniela Biamonti, Carla Bianchi, Aldo Biancofiore, Cinzia Biasibetti, Clara Bisso, Sandra Blengino, Caterina Bocchino, Michele Boffa, Maria Boidi, Mariella Bonaglia, Anna Lina Sonetti,Vittorina Corsari,Rosa Maria Bottino,Giovanni Bratina, Aldo Brigaglia, Franca Brizio, Fabio Brunelli, Giordano Bruno, Emilia Bulgarelli, Rosa Angela Cacciabue, Emilia Calcagno, Maria Luce Campa, Marilisa Campana, Rita Canalini, Anna Candiotto, Francesca Cannizzaro, Maria Teresa Cappagli, Gino Carignani, Patrizia Cassissa, Ercole Castagnola, Maria Castellini, Massimo Cerchiari, Elisa Crocchi, Giampaolo Chiappini, Caterina Chiodaroli, Lucia Ciarrapico, Anna Cichero, Cristina Coggi, Maria Contessa, Anna Corradini, Vittori Coti Zelati, Stefania Cotoneschi, Giulia Crosa, Rosina Crudo, Marina Dalè, Margherita D'Aprile, Carmen De Ferrari Rolleri, Mauro De Vita, Valeria Del Giudice, Silvia Del Sordo, Paolo Delfini, Simona Delle Piane, Domenica Di Sorbo, Giuseppina Esposito, Franco Eugeni, Luigi Facciotto, Rina Fara, Fulvia Fava, Giuseppe Ferrera, Franca Ferri, Emanuela Forzoni Accolti, Francesco Fossati, Anna Maria Franchi, Marcello Frizione, Benito Vittorio Frosoni, Fulvia Furinghetti, Giovanni Fuschi, Maria Pia Galli, Maria Gemma Gallino, Elisa Gallo, Giovanni Garino, Rossella Garuti, Marina Gerace, Silvia Ghirardi, Sara Gobbato, Marcello Gorla, Angelo Grassi, Maria Italia Gualtieri, Dionilla Guaraldo, Annamaria Guerriero, Angela Guerrisi, Rosa Iaderosa, Donatella Iannece, Michele Impedivo, Assunta Incoronato, Grazia Indovina, Grazia Iudici, Silvia Jona, Francesco La Rosa, Francesca Lascialfari, Loredana Letta, Marco LiCalzi, Isabella Lilliu, Elvira Laura Livori, Gabriella Lo Greco, Anna Paola Longo, Guia Longo, Pia Lorenzetti, Laura Lovera, Elena Maiani, Fulvia Maiga, Nicolina Malara, Piera Malversino, Carmelo Mammana, Atonia Manca, Franca Marchesin, Francesca Marchetti, Guglielmo Marchisio, Carla Marconi, Piercarla Marelli, Alberto Marini, Tommaso Marino, Maria Alessandra Mariotti, Silvia Marone, Paolo Maroscia, Ivar Massabò, Marco Mauri, Marta Menghini, Angela Merello, Cristina Merlo, Roberta Nichelini, Laura Miolo, Paola Misulla, Antonella Montone, Cinzia Moretti, Nadia Moretti, Manuela Moscucci, Margherita Motteran, Paolo Nardini, Giancarlo Navarra, Marica Navone, Paolo Negrini, Anna Grazia Neri, Nicoletta Nolli, Aurelia Orlandoni, Maria Ortica, Armida Oss, Maria Gabriella Ottaviani, Maria Pia Pandolfi, Domingo Paola, Maria Parini, Davide Pasero, Daniela Pedrotti, Consolato Pellegrino, Mario Pennisi, Zelinda Percario, Damiana Periotto, Donatella Persico, Maria Clara Persico, Michele Pertichino, Angela Perugini, Angela Pesci, Alessandro Pettinari, Pierluigi Pezzini, Laura Piana, Maria Piccione, Giorgio Pidello, Laura Pierpaoli, Brunetto Piochi, Guido Piovano, Lucilla Eleonora Pirovano, Salvatore Plachino, Lucia Poli, Marialidia Politi, Maria Pretto, Daniela Proia, Maria Ragagni, Silvana Raimondo, Antonino Randisi, Paola Maria Ravera, Laura Recine, Sandro Remondini, Patrizia Revelli, Irma Ridolfi, Silio Rigatti Luchini, Silvestro Rizzetto, Ornella Robutti, Carlo Romanelli, Gianna Roncallo, Carla Rosso, Riccardo Ruganti, Cristina Sabena, Sandra Sacchetti, Annalisa Salomone, Marina Salvi, Ada

Sargenti, Luigino Savarino, Tiziana Savio, Cristina Sciacovelli, Stefano Scotto,Giovanni Seccatore, Antonella Segalerba, Maria José Semeraro, Fausta Sinibaldi, Ada Sità, Annamaria Somaglia, Paola Sorbi, Silvia Sorresina, Adriana Sozzi, Francesca Spilimbergo, Bruno Spotorno, Maria Stinga, Maria Grazia Surbone, Carla Tabarin, Armanda Tallone, Italo Tamanini, Claudia Testa, Luigi Tomasi, Mariella Tortelli, Roberto Tortora, Maurizio Trombetta, Marco Turrini, Daniela Valenti, Alessandro Vezzosi, Bruna Villa, Antonio Vincenzi, Caterina Visalli, Emanuela Zignego.