ISSN 0393-0998

Agosto-Settembre 1995
Supplemento al n. 8-9

Period. mensile
sped. in abb. post./50

Anno XXII

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DICIASETTESIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA
Temi di attualità

LATINA, 27-28-29 OTTOBRE 1994
a cura di Biagio Micale e Salvatore Pluchino

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai Soci e non è in vendita.

FASCICOLO MONOGRAFICO STAMPATO CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DEL MINISTERO DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA SCIENTIFICA E TECNOLOGICA (fondi ex 40%) NONCHÉ DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE.

Autorizzazione n. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)

Agosto-Settembre 1995
Supplemento al n. 8-9

XVII CONVEGNO NAZIONALE UMI - CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

L'insegnamento della Geometria

Temi di attualità

Latina, 27-28-29 ottobre 1994

Il Convegno è stato organizzato dalla Commissione Italiana per L'Insegnamento della Matematica (CIIM). Al momento della organizzazione del Convegno, la CIIM era così composta: Claudio Bernardi (Presidente), Giulio C. Barozzi, Lucia Ciarrapico, Mario Ferrari, Lucia Grugnetti, Biagio Micale, Giovanni Prodi, Carla Rossi, Carlo Scoppola, Francesco Speranza.

L'organizzazione locale è stata curata da un gruppo di professori di Latina coordinati da Marcello Ciccarelli.

PROGRAMMA

Giovedì, 27 ottobre 1994

ore 9.30 - Apertura del Convegno.
- Saluti delle Autorità e del Presidente della Mathesis.
- Intervento del Presidente dell'UMI, Alberto Conte.
- Intervento del Direttore Generale Antonio Augenti (Ministero Pubblica Istruzione).

ore 11.20 - M. Dedò: "Modelli di poliedri".
ore 12.40- S. Conte: "La geometria della foglia di platano".
ore 15.00 - Gruppi di lavoro.

Venerdì, 28 ottobre 1994

ore 9.00 - V. Villani: "Il ruolo delle trasformazioni nell'insegnamento della geometria".
ore 10.35 - E. Magi: "Termini geometrici spiegati in una classe liceale anche tramite l'etimologia dei vocaboli ".
ore 10.55 - E. Gallo - C. Goldin: "Diverse assiomatiche della geometria: analisi di una situazione didattica".
ore 11.30 - Dibattito sul tema "Intuizione e rigore in geometria": introducono P. Boero e M. Marchi.
ore 15.00 - B. Scimemi: "Studio delle similitudini piane con l'aiuto del calcolatore".
ore 16.40 - M. Batini - M. Cerasoli: "Aspetti culturali e didattici della probabilità geometrica".
ore 17.00 - A. Strolin Franzini - C. Maioli: "Le funzioni matematiche con Cabri-géomètre e il foglio elettronico".
ore 17.20 - A. Boatto: "Un progetto di aggiornamento dei docenti attraverso la ricerca didattica".
ore 18.00 - C. Laborde: "Il Cabri-géomètre (dimostrazione)".

Sabato, 29 ottobre 1994

ore 9.00 - F. Arzarello: "Proprietà logiche delle teorie geometriche".
ore 10.40 - G. Margiotta: "Inversione circolare".
ore 11.00 - Dibattito sul tema: "Aspetti matematici e fisici nell'epistemologia della geometria"; introducono U. Bartocci e F. Speranza.
ore 12.30 - Dibattito conclusivo.
ore 13.00 - Chiusura del Convegno.

PARTECIPANTI

Accascina Giuseppe (Roma) - Alberti Carla (Flero Brescia) - Aliquò Maria (Roma) - Alosi Nicola (Latina) - Amici Anna Maria (Narni Terni) - Ammendola Anna (Latina) - Andreini Mara (Milano) - Andriani Monica (Roma) - Angioli Donata (Arezzo) - Antignani Claudio (Veroli Frosinone) - Aramini Floriana (Latina) - Aramini Marina (Latina) - Archetti Adria (Roma) - Ardizzone Maria Rosa (Roma) - Argenti Eliana (Terni) - Arpinati Anna Maria (Bologna) - Arzarello Ferdinando Torino) - Ascheri Igino (Parma) - Ascoli Bartoli Brenci M. Teresa (Roma) - Augenti Antonio (Roma) - Aureli Gianfranco (Latina) - Balbi Luciana (Trieste) - Baldazzi Rossella (Genzano Roma) - Barbanera Antonio (Terni) - Barra Mario (Roma) - Barsi Maria (Latina) - Bartocci Umberto (Perugia) - Batini Maria (Roma) - Battistella Adriana (Latina) - Bazan Maria Chiara (Castelfranco Veneto Treviso) - Becchere Maria Maddalena (Cagliari) - Bellipanni Mario (Gaeta Latina) - Belloni Nicoletta (Nettuno Roma) - Bernardi Claudio (Roma) - Berneschi Patrizia (Roma) - Bertolino Giovanna (Latina) - Bertotto Maria Rosa (Torino) - Bianchini Silvana (Firenze) - Bisceglie Vincenzo (Latina) - Blasi Michele (Pisa) - Boero Paolo (Genova) - Boieri Paolo (Torino) - Bonotto Cinzia (Padova) - Bordieri Silvia (Latina) - Bornoroni Silvana (Roma) - Brecciaroli Paola (Ancona) - Briganti Michele (Latina) - Buono Rosa (Noicattaro Bari) - Cacciotti Rosa Andreina (Latina) - Calabresi Luciana (Latina) - Candone Teresa (Giaveno Torino) - Cannella Pasquale (Pontecorvo Frosinone) - Cannizzaro Lucilla (Roma) - Cantarelli M. Cristina (Latina) - Carra Daniela (Mantova) - Casaglia Ivan (Firenze) - Casolaro Ferdinando (Napoli) - Castagnola Ercole (Latina) - Castellino Michela (Latina) - Castriota Mario (Oristano) - Cecconi Maurilia (Roma) - Celentano Adriana (Roma) - Cenerazzo Antonio (Amorosi Benevento) - Cepparulo Gianno Alfonso (Latina) - Cerasoli Mauro (L'aquila) - Cerciello Marco (Latina) - Cerocchi Elisa (Latina) - Cetrone Ascenzo (Latina) - Chimetto M. Angela (Vicenza) - Ciammaruconi Patrizia (Roma) - Ciarrapico Lucia (Roma) - Ciceri Carlo (Savona) - Ciccarelli Giovanna (Latina) - Ciccarelli Marcello (Latina) - Cicchi Viviana (Latina) - Cifra Bruno Antonio (Bassiano Latina) - Colaiori M. Vittoria (Frosinone) - Colamasi Loredana (Latina) - Colecchia Antonio (Termoli Campobasso) - Coluzzi Leda (Latina) - Coluzzi M. Antonietta (Latina) - Conserva Francesco (Roma) - Conte Alberto (Torino) - Conte Sebastiano (Roma) - Coscia Fulvia (Roma) - Costanzi Giuseppe (Sezze Latina) - Crespina Elena (Roma) - Crocetti Carlo (Gualdo Tadino Perugia) - Cuccaro Laura (Latina) - Curti Maurizio (Latina) - D'adamo Miria (Latina) - Dalla Mora Paola (Moncalieri Torino) - Dalla Noce Alda (Roma) - Dapueto Carlo (Genova) - Dedò Maria (Milano) - De Falco Giuseppina (Formia

Latina) - Della Rocca Giorgio (Pontinia Latina) - Deirino Cesare (Giaveno Torino) - Del Duca Alessandro (Sezze Latina) - Del Vecchio Francesca (Latina) - Dentella Silvia (Pisa) - De Santis Carla (Roma) - De Simone Anna Maria (Latina) - De Vita Mauro (Roma) - Di Mambro Rosaria (Latina) - Di Marco Amelia (Roma) - Di Mola Sante (Monopoli Bari) - Di Nunzio Francesco (Latina) - Di Sorbo Domenica (Piana Di Monte Verna Caserta) - Di Russo Pietro (Formia Latina) - Di Stasio Michelangelo (Amorosi Benevento) - Domenicone Patrizia (Roma) - Doretti Lucia (Siena) - Dorigo Biancamaria (Latina) - Dusi Carlo (Roma) - Esposito Addolorata (Aprilia Latina) - Fagiani Simonetta (Terni) - Falchi Paolo (Grosseto) - Falsini Anna Maria (Roma) - Fantini Loredana (Fabriano Ancona) - Fara Rina (Roma) - Ferlazzo Mariano (Latina) - Ferrante Loretta (Roma) - Ferrante Paola (Napoli) - Ferrari Ezio (Frosinone) - Ferrari Mario (Pavia) - Ferrari Vito (Roma) - Ferraro Maria Grazia (Latina) - Fioravante Ornella (Latina) - Fiori Carla (Trieste) - Forino Anna (Gaeta Latina) - Franchi Anna (Roma) - Franchi Anna Maria (Cecina Livorno) - Fuiani Laura (Roma) - Fulgenzi Paola (Pesaro) - Gaggero M. Teresa (Genova) - Galasso Emma (Campobasso) - Gallo Elisa (Torino) - Gambone Ida (Latina) - Gasbarrone Peppino (Latina) - Gasperi Carmela (Roma) - Gentile Agnese (Latina) - Geronimo Stefano (Roma) - Giambò Antonino (Macerata) - Giardiello Paola (Nettuno Roma) - Giommetti Elena (Senigallia Ancona) - Giorgianni Agata Maria Rosaria (Latina) - Giorgianni Caterina (Venetico Messina) - Goldin Cristiana (Asti) - Granucci Laura (Firenze) - Grasso Meurizio (Latina) - Grasso Stefania (Latina) - Grugnetti Lucia (Parma) - Guida Maria (Caserta) - Iaderosa Rosa (Milano) - Ilari Ferdinando (Latina) - Impedovo Michele (Milano) - Iurcotta Anna Maria (Trieste) - Jacobelli Daniela (Roma) - Jaquet Francois (Neuchatel Svizzera) - Jengo Letizia (Roma) - Laganà Gaetano Antonio (Roma) - Lanzillotta Maria Gaetana (Roma) - La Rosa Agata (Latina) - La Torre Anna (Roma) - Lattanzi Tommaso (Latina) - Leonori Lucia (Ancona) - Lisi Enzo (Latina) - Listanti Laura (Terni) - Lipone Antonio (Latina) - Loiacono Domenica (Pontinia Latina) - Lombardi Vanna Maria (Roma) - Lovato Valeria (Cologna Veneta Verona) - Lovisa Giuliana (Latina) - Lucchetti Paola (Latina) - Lupoli M. Consiglia (Latina) - Luzi Elvira (Roma) - Magi Eugenio (Firenze) - Magliozzi Antonietta (Gaeta Firenze) - Maiello Maria Rita (Latina) - Maietta Salvatore (Recale Caserta) - Malandruccolo M. Maddalena (Latina) - Malara Nicolina (Modena) - Mammana Carmelo (Catania) - Mancini G. Battista (Roma) - Mancinotti Bernardino (L'aquila) - Mansillo Sofia (Roma) - Maracchia Silvio (Roma) - Marafini Giuliana (Latina) - Maranesi Maria (Roma) - Maraschini Walter (Roma) - Marchetti Fausto (Bolzano) - Marchi Mario (Brescia) - Marchiaro Franca (Latina) - Marchioni Anna Rosa (Sarego Vicenza) - Margiotta Giovanni (Roma) - Marone Silvia (Montecompatri Roma) - Maroscia Paolo

(Roma) - Martinelli Marina (Roma) - Martinelli M. Grazia (Roma) - Martinez Annalisa (Modena) - Martini Maria Cristina (Roma) - Martorelli Maria (Ascoli Piceno) - Mastrantoni Anna (Latina) - Matarazzo Maria Antonietta (Latina) - Materozzoli Alessandra (Roma) - Mauro Raffaele (Terracina Latina) - Mazzei Cinzia (Latina) - Melonari Antonia (Ascoli Piceno) - Micale Biagio (S. G. La Punta Catania) - Michelotti Venè Margherita (Parma) - Migliozzi Elvira Maria (Latina) - Milani Simonetta (Pontinia Latina) - Miniaci Carmela (Roma) - Mobilio Marina (Terracina Latina) - Modica Maria (Catania) - Molinari Rosaria (Latina) - Moncecchi Gianfranco (Brescia) - Morelli Aldo (Napoli) - Moretti Luciana (Ascoli Piceno) - Mortati Carolina Rosetta (Roma) - Mortola Carlo (Camogli Genova) - Moscucci Manuela (Siena) - Nardi Janna (Pesaro) - Nardone Valeria (Latina) - Nava Francesca (Roma) - Nuvolone Mario (L'aquila) - Olivello Antonietta (Napoli) - Onorati Anna (Latina) - Ortolan Giuliana (Padova) - Ovis Silvia (Latina) - Paciello Marisa (Formia Latina) - Paesani Roberto (Roma) - Palma Mauro (Roma) - Panetti Carlo (Latina) - Parenti Laura (Genova) - Pastore Giovanni (Taranto) - Pastore Sandra (Roma) - Patanè Maria Giovanna (Latina) - Paternoster Floriana (Pesaro) - Peluso Mario (Latina) - Pellegrino Consolato (Modena) - Pennisi Mario (Campobasso) - Percario Zelinda (Grosseto) - Perelli Maria Pia (Brescia) - Pergola Marcello (Modena) - Petrini Massimo (Latina) - Piccione Maria (Siena) - Pierantozzi Maria Rosa (Ascoli Piceno) - Pierotti Adriana (Roma) - Pinto Niquini Debora (Roma) - Plateroti Massimo (Roma) - Poli Maria Fortunata (Rutugliano Bari) - Polsonetti Andrea (Latina) - Prestia Giuseppe (Vibo Valenzia Catanzaro) - Prodi Giovanni (Pisa) - Puppo Alda Marina (Latina) - Quartarone Bianca (Latina) - Rago Maria (Campobasso) - Rambaldi Giacomo (Savona) - Ranaldi Nazzareno (Latina) - Randazzo Grazia (Roma) - Ravizza Anna (Latina) - Remondini Sandro (Cagliari) - Repola Boatto Adele (Ancona) - Reversi Lorella (Fabriano Ancona) - Ricci Francesco (Latina) - Ridolfi Irma (Roma) - Rivaroli Adriana (Roma) - Rocco Marina (Trieste) - Rogo Luigi Emilio (Latina) - Rohr Ferruccio (Roma) - Romanato Maria Grazia (Latina) - Romanò Giovanni (Roma) - Rosati Mario (Padova) - Rossetti Andrea (Roma) - Rossi Franca (Livorno) - Rotunno Alessandra (Napoli) - Sacchetti Dario (Roma) - Salomone Lucia (Siena) - Salvucci Olimpia (Ladispoli Roma) - Santoro Rosalba (Piedimonte Matese Caserta) - Savini Luigi (Caravaggio Bergamo) - Schemoz Antonino (Milano) - Schiavon Amabile (Sottomarina Di Chioggia Venezia) - Scialla Daniela (Roma) - Scibetta Mimi Antonella (Latina) - Sciacovelli Daniela (Roma) - Scimemi Benedetto (Padova) - Scipione Giuseppina (Formia (Latina) - Scoponi David (Napoli) - Scozzaro Rosetta (Roma) - Sepe Fabrizia (Roma) - Silvestrini Maria Pia (Fabriano Ancona) - Sorbellini Antonella (Latina) - Sorresina Silvia (Grosseto) - Spagnuolo Ida (Roma) - Sparapani Marilena (Macerata) - Speranza Caterina (Roma) - Speranza Francesco (Parma)

- Spezza Marcella (Albano Laziale Roma) - Spilimbergo Francesca (Oderzo Treviso) - Spirito Giuliano (Roma) - Stanchina Maria Luisa (Torino) - Staropoli Francesco (Tropea Catanzaro) - Strolin Franzini Anna (Bologna) - Tabarin Carla (Roma) - Tacchi Lucia (Lucca) - Talarico Giovanna (Catanzaro) - Tanzi Cattabianchi Maria (Torino) - Tartaglia Erminia (Latina) - Testa Maurizio Emilio (Terracina Latina) - Tini Eleonora (Roma) - Tiragallo Gabriella (Genova) - Tizzani Paola (S. Remo Imperia) - Toni Paolo (Padova) - Tortora Roberto (Napoli) - Travaglione Antonia (Benevento) - Trovini Emilia (Frosinone) - Tuccillo Chiara (Latina) - Uselli Elsa (Cagliari) - Vaccarella Alessandra (Latina) - Vacirca Vincenzo (Catania) - Varone M. Angela (Roma) - Vassallo Luigi (Latina) - Venturi Daniela (Viareggio Lucca) - Varriale Carmela (Latina) - Verde M. Teresa (Latina) - Vertecchi Gabriella (Latina) - Vichi Elena (Ancona) - Vighi Paola (Parma) - Vilardo Federico (Latina) - Villani M. Gabriella (Roma) - Villani Vinicio (Pisa) - Vita Vincenzo (Roma) - Volpe Stefano (Roma) - Zabena Tiziana (Cavallermaggiore Cuneo) - Zanoli Carla (Modena) - Zoccante Sergio (Vicenza) - Zuccheri Luciana (Trieste).

Saluto del Presidente dell'UMI

Il XVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della Matematica organizzato dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (C.I.I.M.) dell'UMI conferma l'impegno dell'Unione nel promuovere lo studio e l'approfondimento di tutte le tematiche connesse con l'insegnamento della Matematica in tutti gli ordini di Scuole. In un momento storico in cui la Matematica sta diventando uno strumento sempre più indispensabile per ogni cittadino per comprendere la realtà in cui vive e per seguire in maniera non puramente passiva le grandi innovazioni tecnologiche del mondo contemporaneo, questo impegno costituisce una risorsa importante non soltanto per la Scuola italiana, ma per tutto il Paese e ci auguriamo che come tale venga riconosciuto da tutti coloro che hanno responsabilità di Governo della Scuola italiana. Il miglioramento della preparazione matematica dei cittadini e l'innalzamento qualitativo dell'insegnamento della nostra disciplina sono due degli obiettivi che l'UNESCO ha esplicitamente indicato nel dichiarare il 2000 Anno Mondiale della Matematica (WMY), al quale dobbiamo prepararci intensificando le nostre tradizionali iniziative in questo campo e immaginandone di nuove che ci consentano, fra l'altro, di far percepire sempre di più all'opinione pubblica l'importanza decisiva che la competenza matematica ha per giungere a occupare una posizione avanzata nella sfida tecnologica che coinvolge tutti i paesi avanzati e per rendere sempre più visibile la pervasività della Matematica nella nostra Cultura.

Mi pare poi che il tema del Convegno di quest'anno sia stato scelto in maniera particolarmente felice, perchè la Geometria, dopo aver vissuto un periodo di declino durante il quale era stata ridotta a pure esercitazioni di algebra lineare, vive oggi, sia a livello di ricerca che di insegnamento, una nuova stagione di fulgore, e ciò proprio grazie ai suoi aspetti più legati all'intuizione, che sono stati ampiamente rivalutati anche grazie alle possibilità grafiche offerte dal computer. In campo geometrico il nostro Paese vanta grandi tradizioni e non a caso è stato scelto come sede del grande Convegno Internazionale che l'ICMI dedicherà nel 1995 proprio all'insegnamento della Geometria.

Per tutti questi motivi, il Convegno annuale CIIM-UMI assume un'importanza e un rilievo particolari e sono lieto di darne atto a tutti coloro che ne hanno curato l'organizzazione, ai quali rivolgo il più caloroso ringraziamento dell'UMI e mio personale.

Alberto Conte
Presidente dell'UMI

RELAZIONI

Modelli di poliedri

*Maria Dedò**

Si ha l'impressione che negli ultimi anni la geometria dello spazio sia quasi scomparsa dai curricula scolastici, sia a livello di scuola secondaria che di università[1]; per quel che riguarda lo studio dei poliedri, la situazione è ancora peggiore, dato che, se qualcosa resta di geometria dello spazio, si tratta sempre e soltanto di geometria analitica: e lo strumento della geometria analitica si presta molto meglio a descrivere un piano, o una sfera, o anche un iperboloide piuttosto che un cubo o un tetraedro.[2]

Questa assenza è, a mio parere, un gran peccato, perché il tema dei poliedri si presta molto bene a fornire un bagaglio di descrizioni di fatti matematici molto vari, cioè nell'ambito di settori anche diversi della matematica (geometria, ma anche algebra, topologia, ecc.).

Mi propongo qui di esporre alcuni esempi a supporto di questa tesi, cercando di sceglierli in modo da mettere in evidenza sia la varietà degli argomenti che si possono illustrare con (modelli di) poliedri, sia la possibile varietà degli interlocutori: fra i fatti matematici che i poliedri si prestano a illustrare, alcuni potrebbero essere utili a livello di scuola elementare, e altri a livello universitario (e altri ancora sono addirittura problemi aperti).

Esempio 1 Contare.

Non ho esperienza di insegnamento elementare; però mi è capitato di interagire con ragazzini (di 6-8 anni) mentre stavo costruendo modelli di poliedri (ad esempio, con cannucce da bibita); succede spesso che ne siano incuriositi e che vogliano provare a costruirli anche loro; chiedono allora un po' di cannucce, ed è facile che spontaneamente si pongano il problema: "Quante ne ho bisogno?"

E volevo qui solo sottolineare due fatti:

1) il problema si pone in modo naturale (se uno prova a COSTRUIRE il poliedro;

---

* Dipartimento di Matematica, Università di Milano.

1 E pare che questo sia un fenomeno non solo italiano: vedi, p.es., [SF], e in particolare [SF]1 e [SF]2.

2 E già questo comporta un livello di astrazione superiore: gli "oggetti" con cui abbiamo a che fare sono di norma poliedrali, e comunque limitati: piani e rette sono solo astrazioni matematiche!

non se uno lo guarda soltanto!): non occorre essere esperti di psicologia per notare che aver bisogno di sapere quante cannucce occorrono per costruire l'oggetto è una motivazione assai più forte a risolvere il problema piuttosto che dover rispondere ad un esercizio che chieda "Quanti sono gli spigoli dell'icosaedro?"
2) il problema non è del tutto banale: è improbabile che uno riesca a contare gli spigoli di un (p. es.) icosaedro procedendo a casaccio: non se ne viene a capo se non si organizza il conto, cioè occorre cercare (e trovare) una struttura sottostante all'insieme apparentemente disordinato degli spigoli (e quindi accorgersi delle simmetrie, ecc...).

Esempio 2 Sezioni

E' sorprendente quanto sia scarsa la capacità di visualizzare situazioni geometriche tridimensionali: questa mia affermazione si basa sulla esperienza al primo anno del corso di laurea in scienze dell'informazione (dove gli studenti restano sconcertati se si indicano due spigoli di un'aula come esempio di rette sghembe) e, anche, al terzo anno del corso di laurea in matematica, dove, fra le altre cose, ho avuto le risposte più strampalate al seguente problema: fra i poligoni in figura 1 (ad esempio), quali possono essere sezioni di un cubo?

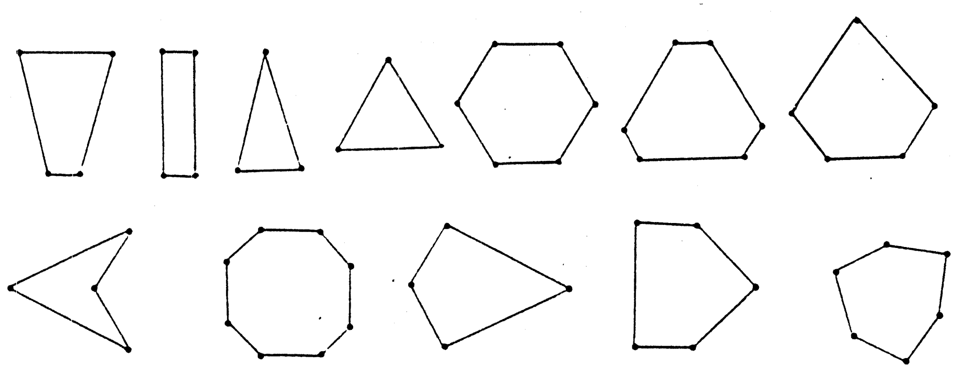


FIGURA 1

Naturalmente il problema si può proporre a livelli scolastici diversi, e con obiettivi diversi, dalla semplice visualizzazione delle forme più elementari, alla dimostrazione di certe impossibilità: ad esempio, è impossibile un poligono non convesso; è impossibile un poligono con un numero di lati maggiore di sei; se la sezione ha sei lati, i lati opposti sono paralleli (perché lo sono le facce opposte del cubo); se la sezione è un pentagono, due coppie di lati sono paralleli; se la sezione è un quadrilatero, almeno una coppia di lati è costituita da segmenti paralleli; ecc. ...

Un problema collegato a questo, e meno banale, è quello di usare le sezioni, ad esempio parallele ad una certa giacitura, per "capire come è fatto" un certo oggetto: vedi figura 2; la stessa tecnica può essere trasportata, per analogia, al problema di visualizzare un oggetto quadridimensionale attraverso le sue sezioni tridimensionali: in un film di Banchoff, p. es., si usa questo metodo per "descrivere", in modo molto efficace, l'ipercubo e l'ipersfera: vedi anche [B], o [SF]3.

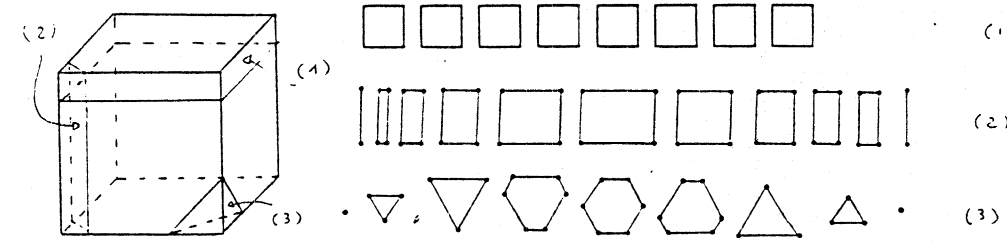


FIGURA 2

Esempio 3 Relazioni fra i diversi poliedri regolari

Sto costruendo, ad esempio con cannucce da bibita, i modelli dei 5 poliedri regolari; se parto da cannucce della stessa lunghezza, il tetraedro viene piccolo e il dodecaedro enorme. Problema ("pratico"): da quali lunghezze devo partire per averli, approssimativamente, delle stesse dimensioni? per lo meno che non "stonino" l'uno rispetto all'altro?

Naturalmente si possono fare i conti: questi non sono particolarmente complicati (si possono trovare ad esempio in [C]), ma sono abbastanza inutili se il problema è proprio quello "pratico" di costruire dei modelli: non interessano i valori esatti, ma sono sufficienti delle approssimazioni, e, addirittura, bastano delle approssimazioni molto rozze: in una costruzione, anche abbastanza accurata, i "vertici" sono comunque delle sferette di qualche millimetro!! [3]

---

[3] In ogni caso, prima di fare i conti, occorrerà precisare il problema, e prima ancora decidere in quale modo precisarlo: calcolare i reciproci rapporti fra gli spigoli dei 5 poliedri regolari che abbiano uguale volume? oppure di quelli inscritti nella stessa sfera? o circoscritti alla stessa sfera? o prendere come punto di riferimento la sfera tangente a tutti gli spigoli (in inglese midsphere) e calcolare i rapporti reciproci fra gli spigoli dei poliedri con la stessa midsphere? Non è difficile rendersi conto che in tutti questi casi si otterranno risposte diverse e non è a priori ovvio quale si attagli meglio al nostro problema "pratico".

Piuttosto, si può utilizzare questo problema per mostrare alcune relazioni fra i poliedri regolari. Ad esempio:
1) 4 vertici, opportunamente scelti, di un cubo sono vertici di un tetraedro regolare; i due poliedri hanno la stessa sfera circoscritta ed esistono 2 siffatti tetraedri inscritti in un cubo.
2) 8 vertici, opportunamente scelti, di un dodecaedro sono vertici di un cubo; i due poliedri hanno la stessa sfera circoscritta ed esistono 5 cubi siffatti in un dodecaedro regolare.
3) I 6 punti medi dei 6 spigoli di un tetraedro regolare sono vertici di un ottaedro regolare; 4 delle facce dell'ottaedro sono contenute nelle facce del tetraedro, e quindi i due poliedri hanno la stessa sfera inscritta; inoltre esistono due tetraedri regolari circoscritti in questo modo ad un fissato ottaedro.
4) Se si dividono (coerentemente!) i 12 spigoli dell'ottaedro nel rapporto $1:\tau$ (dove τ è il rapporto aureo, cioè la radice positiva di $\tau^2=\tau+1$) si ottengono 12 punti che sono vertici di un icosaedro regolare. Esistono 5 ottaedri circoscritti in questo modo ad un icosaedro assegnato e, siccome 8 delle facce dell'icosaedro sono contenute nelle facce dell'ottaedro, i due poliedri hanno la stessa sfera inscritta.
5) I centri delle facce di un cubo (risp. ottaedro, dodecaedro, icosaedro, tetraedro) CIRCOscritto ad una sfera S sono vertici di un ottaedro (risp. cubo, icosaedro, dodecaedro, tetraedro) INscritto nella stessa sfera S. Ovvero, riferendosi alla "midsphere" Σ, (vedi nota 3), se si parte da un cubo (risp. ottaedro, dodecaedro, icosaedro, tetraedro) e si considerano le rette ortogonali agli spigoli nel loro punto di tangenza con Σ, queste formano gli spigoli di un ottaedro (risp. cubo, icosaedro, dodecaedro, tetraedro) con la stessa midsphere. Questa dualità tra cubo e ottaedro e tra icosaedro e dodecaedro spiega anche il parallelismo tra 1 e 3 (ovvero: tra 2 e 4).

Osservando i modelli relativi a queste situazioni (che, peraltro, sono esteticamente molto belli)[4] è facile calcolare i reciproci rapporti (esatti) tra gli spigoli di tetraedro, cubo, dodecaedro con la stessa sfera circoscritta e di tetraedro, ottaedro, icosaedro con la stessa sfera inscritta (e stimare rapporti approssimati ragionevoli per l'effettiva costruzione).

Indipendentemente comunque dalla soluzione del problema "pratico" da cui si è partiti (in sé non particolarmente significativo), questo ha fornito l'occasione per introdurre, sia pure solo a livello descrittivo, molti fatti geometrici non banali: e (a seconda dell'interlocutore..) si potrebbe anche proseguire: ad esempio, i modelli mettono bene in luce le relazioni fra i diversi gruppi di simmetria dei 5 poliedri regolari.

---

[4] Si possono trovare delle belle figure relative a questi modelli, ad esempio, in [CR], o in [St], o in [B]: però una figura (anche se molto bella) rende l'idea meno di un effettivo modello (anche se un po' brutto!).

Esempio 4 Grafi

Racconto un episodio effettivamente accaduto: stavo costruendo i 5 cubi nel dodecaedro, avevo fatto il dodecaedro e stavo usando fili di lana per fare i cubi; intanto chiacchieravo (di tutt'altro) con una amica (laureata in filosofia, curiosa, ma senza particolari nozioni di matematica al di là di vaghi ricordi di liceo classico); a un certo punto questa persona mi chiede: "Come mai continui a spezzare il filo e fare nodi? non sarebbe più semplice fare tutto con un unico filo, girando intorno ai vertici per fissarlo?"

In effetti ciò è impossibile: il grafo costituito da vertici e spigoli del cubo non si può percorrere passando per tutti gli spigoli una e una sola volta. E anche qui mi limito ad alcune osservazioni:
1) Si tratta dello stesso problema del famoso esempio dei ponti di Königsberg di Eulero: è un problema di tipo topologico (e non metrico).
2) Il perché di questa impossibilità si riduce ad un conto di pari e dispari e il ragionamento sottostante è accessibile anche ad una persona priva di particolari conoscenze matematiche: se da un vertice passo e ripasso, da quel vertice escono un numero pari di spigoli, e, se viceversa ne escono un numero dispari, il vertice può essere solo il punto di partenza o il punto di arrivo; ma il cubo ha 8 vertici, da ciascuno dei quali esce un numero dispari di spigoli, sicché non è possibile percorrere tutti gli spigoli, senza ripassare da qualcuno.
3) Se la persona è sufficientemente motivata e incuriosita, si può anche andare oltre, e giustificare il fatto che, per costruire a quel modo il cubo, occorreranno almeno 4 diversi fili di lana; oppure fare osservare che non conta nulla quanto siano lunghi gli spigoli, o il fatto che siano dritti (topologia..!); oppure caratterizzare tutti e soli i grafi che viceversa sono percorribili nel modo descritto.
4) E' assai probabile che la persona sia effettivamente motivata e incuriosita: le dimostrazioni di impossibilità sono sconcertanti (e affascinanti) per chi non ne ha esperienza.
5) E' viceversa facile immaginare che, di fronte allo stesso problema posto in astratto, la reazione della stessa persona avrebbe potuto essere del tipo "le solite astruserie artificiose dei matematici..."

Esempio 5 Conseguenze "bizzarre" della formula di Eulero: geodi, deltaedri e altro

La formula di Eulero asserisce che, se V è il numero dei vertici, S il numero degli spigoli, F il numero delle facce di un poliedro convesso[5], allora

$$V-S+F=2 \qquad (*)$$

Indichiamo con p (risp. q) il numero medio di spigoli in una faccia (risp. il numero medio di spigoli che escono da un vertice)[6]; contando gli spigoli raggruppati per faccia si ottiene $pF=2S$ (perché ogni spigolo appartiene a due facce); mentre, contandoli raggruppati per vertice, si ha $qV=2S$ (perché ogni spigolo contiene due vertici).

Sostituendo in (*) si ottiene $2S/q-S+2S/p=2$, da cui

$$1/q+1/p=1/2+1/S>1/2. \qquad (**)$$

E' sorprendente la varietà di affermazioni sui poliedri che a prima vista sembrano "strane" e molto difficili da giustificare (se si pensa alla enorme varietà di forme possibili nell'ambito dei poliedri), e che sono in realtà una conseguenza più o meno immediata di (*) o di (**). Qualche esempio:

1) Ogni poliedro ha o una faccia triangolare oppure un vertice di valenza 3.
(La valenza di un vertice è il numero di spigoli che escono da quel vertice).

2) Un poliedro non può avere simultaneamente tutte le facce con un numero pari di lati e tutti i vertici di valenza pari.

3) Un poliedro convesso in cui tutte le facce sono triangoli equilateri ha un numero di facce pari e al più uguale a 20.

4) In un poliedro in cui tutte le facce sono triangoli, e tutti i vertici hanno valenza 5 oppure 6 ci sono esattamente 12 vertici di valenza 5.

5) In un poliedro in cui le facce sono o pentagoni o esagoni e i vertici hanno tutti valenza tre ci sono esattamente 12 pentagoni.

La dimostrazione di 1) è immediata: se non esiste una faccia triangolare, allora $p\geq 4$; se non esiste un vertice di valenza tre, allora $q\geq 4$. Ma non può essere simultaneamente $p\geq 4$ e $q\geq 4$, perché contraddirebbe (**).

2) è una conseguenza di 1).

Le dimostrazioni di 3), 4), 5) sono analoghe[7]: si tratta comunque di esprimere le condizioni del problema in termini di V, S, F (o p e q) e utilizzare (*), o (**).

I poliedri del tipo descritto in 3) si chiamano deltaedri (convessi); si può dimostrare (vedi, p.es. [Cu]) che sono 8: 3 regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro, con rispettivamente 4, 8, 20 facce) e altri 5 (con, rispettivamente, 6, 10, 12, 14, 16 facce: è impossibile il caso di un deltaedro con 18 facce). Questi 5 poliedri non sono particolarmente "belli"[8]: merita tuttavia tenerli presente, se non altro perché costituiscono un controesempio alla affermazione (errata; eppure comunissima!) che un poliedro regolare è un poliedro che ha tutte le facce che sono poligoni regolari e uguali fra loro.

I poliedri del tipo descritto in 4) si chiamano geodi. Si arriva in modo naturale alle geodi quando si considera il problema di approssimare una sfera con un poliedro. Infatti, se cerchiamo una approssimazione poligonale di una circonferenza, basta considerare poligoni regolari inscritti o circoscritti: al crescere del numero n dei lati, otterremo approssimazioni arbitrariamente buone. Ciò non è più possibile per la sfera, dato che i poliedri regolari sono in numero finito (e piccolo!). Se vogliamo quindi ottenere delle approssimazioni poliedrali della sfera, migliori di quelle date da icosaedro o dodecaedro, dovremo uscire dalla categoria dei poliedri regolari. Un tipo di poliedri che si può allora considerare è appunto quello delle geodi, che sono stati effettivamente usati a questo scopo in architettura (ad esempio la Géode di Parigi alla Villette)[9].

Si può dimostrare che, comunque si fissi un intero positivo n diverso da 1, esiste una geode con (12 vertici di valenza 5 e) n vertici di valenza 6 (e, quindi, $V=12+n$, $S=30+3n$, $F=20+2n$: per $n=0$ si ritrovano i valori $V=12$, $S=30$, $F=20$ relativi all'icosaedro regolare): una dimostrazione si trova in [GrM], dove in realtà si considera il caso "duale", cioè dei poliedri del tipo 5), e si dimostra che, comunque si fissi un intero positivo n diverso da 1, esiste un poliedro in cui ogni

---

[5] In realtà non è necessario che il poliedro sia convesso; basta che non abbia "buchi", ossia che la superficie del poliedro sia omeomorfa alla superficie di una sfera. Di più, non è neanche necessario che si tratti di un poliedro ("dritto"), ma la stessa relazione si applica a qualsiasi suddivisione della sfera in regioni, mediante degli archi, purchè l'intersezione di due regioni, se non è vuota, sia costitutita da un arco o da un vertice della suddivisione.

[6] p e q in generale non saranno numeri interi!

[7] Per quel che riguarda 3), dato che tutte le facce sono triangoli, $3F=2S$, da cui segue che F è pari; inoltre ogni vertice ha valenza 3, o 4, o 5 (e non di più, perché il poliedro è convesso) e quindi, indicando con U, W, Z il numero dei vertici di valenza, rispettivamente, 3, 4, 5, si ha
$V=U+W+Z \qquad 3F=2S=3U+4W+5Z\leq 5V \qquad 2=V-S+F\geq 3F/5-3F/2+F=F/10.$
Quindi $F\leq 20$.
Per quel che riguarda 4), anche in questo caso si ha $3F=2S$, da cui $V-S/3==V-S+2S/3=V-S+F=2$. Quindi $S=3V-6$.
Indicando con U (risp. W) il numero dei vertici di valenza 5 (risp. 6), si ha $V=U+W$ e $S=3U+3W-6$.
Contando il numero totale degli spigoli raggruppati per vertice (anziché per faccia), si ottiene $5U+6W=2S$.
Confrontando questa relazione con la precedente otteniamo subito $U=12$.
Infine 5) è l'enunciato "duale" di 4): la dimostrazione è identica, scambiando fra loro i ruoli di vertici e facce.

[8] Due sono bipiramidi a base un triangolo equilatero o un pentagono regolare: per una figura degli altri 3 vedi, p.es., [CR], o [SF].

[9] In [SF] si possono trovare foto di costruzioni di tipo geodi in varie parti del mondo; e figure di geodi, p.es., in [SF]4.

vertice ha valenza 3 e le facce sono 12 pentagoni e n esagoni (e, quindi, F=12+n, S=30+3n, V=20+2n: per n=0 si ritrovano i valori F=12, S=30, V=20 relativi al dodecaedro regolare).

Esempio 6 Simmetria e caleidoscopi poliedrali

Pur con tutte le cautele necessarie quando si parla di nozioni di carattere soggettivo, normalmente i poliedri regolari sono ritenuti "belli", mentre, p.es., i deltaedri sono poliedri abbastanza "brutti". E' facile illazionare che questa impressione di "bello" e di "brutto" sia legata al grado di simmetria del poliedro P, e possa quindi essere in qualche modo "misurata" dal gruppo di simmetria di P, cioè dal gruppo Γ (P) delle isometrie (dello spazio) che mandano P in se stesso.

Si potrebbe pensare che più elementi contiene il gruppo $\Gamma(P)$ e più l'occhio avverta il poliedro P come "simmetrico" e quindi "bello": le cose non stanno però esattamente così. Ad esempio, una piramide (retta) che ha per base un poligono regolare di 100 lati ha un gruppo di simmetria con 200 elementi, mentre il gruppo di simmetria del cubo contiene solo 48 elementi: eppure, è probabile che la maggioranza delle persone affermerebbe che il cubo è "più simmetrico" della piramide.

Ciò che fa apparire il cubo come un oggetto molto simmetrico, quindi, non è tanto il numero degli elementi del suo gruppo di simmetria, quanto la transitività della azione del gruppo $\Gamma(P)$ sugli insiemi di vertici, spigoli, facce: questo significa che, comunque si fissino due vertici (due spigoli, due facce) del cubo, esiste un elemento di $\Gamma(P)$ che manda l'uno nell'altro. Il che chiaramente non accade per la piramide su un 100-gono regolare.

I 5 poliedri regolari hanno un gruppo di simmetria che è transitivo sia sui vertici, sia sugli spigoli, sia sulle facce. Da questo punto di vista è quindi abbastanza naturale domandarsi che tipo di poliedri si ottengano imponendo che il gruppo di simmetria sia solo transitivo sui vertici, o solo sugli spigoli, o solo sulle facce, e aspettarsi di ottenere dei poliedri "abbastanza simmetrici": accenniamo qui ad una bella costruzione, basata sul principio del caleidoscopio, con la quale si ottengono poliedri il cui gruppo di simmetria è transitivo sui vertici.

Un caleidoscopio è formato da due specchi, inclinati ad un angolo di π/n: se nel settore delimitato dai due specchi c'è una figura F, la figura F' che si vede è quella ottenuta "rimbalzando" F non solo rispetto ai due specchi, ma anche rispetto a tutte le rette ottenute da uno dei due specchi per successive riflessioni: vedi figura 3.

Supponiamo, per fissare le idee, n=8 (come quasi sempre si trova nei caleidoscopi in commercio): qualunque sia la figura F da cui si parte, F' avrà

almeno la stessa simmetria di un quadrato, cioè il gruppo di simmetria $\Gamma(F')$ contiene le 4 rotazioni di angoli multipli di $\pi/2$ e le 4 riflessioni nei due specchi e nelle due rette che sono immagine del primo specchio nel secondo e viceversa.[10]

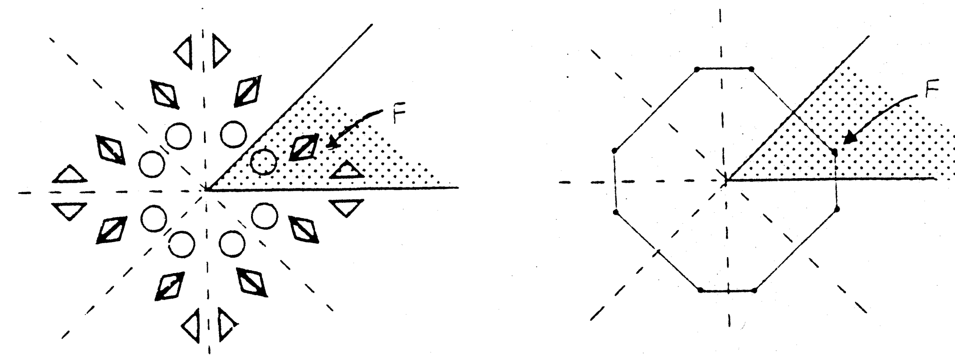


FIGURA 3

Se la figura F è costituita da un solo punto, F' consisterà in generale di 8 punti (che si riducono a 4 se F appartiene a uno dei due specchi); il poligono convesso che ha per vertici questi 8 punti è un ottagono P che in generale non è regolare (lo è se F appartiene alla bisettrice dei due specchi), ma è "abbastanza simmetrico": più precisamente il gruppo di simmetria $\Gamma(P)$ (coincide con il gruppo di simmetria del quadrato ed) è transitivo sui vertici dell'ottagono.

Un caleidoscopio poliedrale è formato da tre specchi che formano fra loro angoli opportuni. Partiamo ad esempio da un cubo e fissiamo sul cubo una bandiera, cioè un vertice V, uno spigolo s uscente da V e una faccia f adiacente allo spigolo s; sia M il punto medio di s, L il centro della faccia f e O il centro del cubo: scegliamo come specchi il piano α passante per i tre punti O, V, M, il piano β passante per i tre punti O,V,L e il piano γ passante per i tre punti O,M,L (vedi figura 4).

Non è difficile dimostrare che il gruppo di simmetria del cubo è generato dalle riflessioni nei tre piani α, β, γ, cioè ogni elemento del gruppo si può vedere come composizione di queste riflessioni.

I piani α, β, γ, e tutti i piani che ottengo da questi per successive riflessioni, dividono lo spazio in 48 regioni, che sono piramidi triangolari infinite di vertice O e che si possono visualizzare facilmente pensando ai 48 (= 8 su ogni faccia) triangoli che queste regioni staccano sul cubo: ognuno di questi triangoli (di cui uno è VML) ha per vertici un vertice del cubo, il punto medio di uno spigolo

[10] E' possibile che F' abbia più simmetria: se ad esempio F è a sua volta simmetrica rispetto alla bisettrice degli specchi, allora F' avrà lo stesso gruppo di simmetria di un ottagono regolare.

uscente da questo vertice, il centro di una faccia adiacente a questo spigolo.

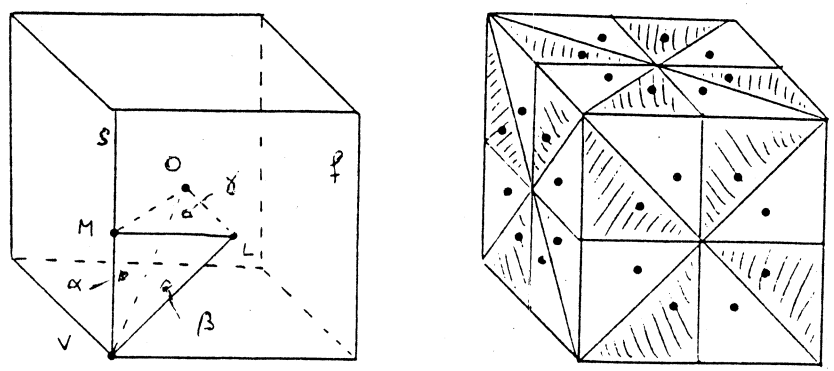


FIGURA 4

Se adesso prendiamo una qualsiasi figura F nel settore delimitato da α, β, γ, la figura F' ottenuta rimbalzando F attraverso i vari specchi avrà lo stesso gruppo di simmetria del cubo[11]. Come nel caso del caleidoscopio piano, partiamo da una figura F costituita da un solo punto x (nel triangolo VLM) e consideriamo il poliedro convesso P che ha per vertici i punti di F' (che sono al più 48): otteniamo un poliedro P in generale non regolare (tranne quando x=V, e F' consiste degli 8 vertici del cubo, o quando x=L, e F' consiste dei 6 centri delle 6 facce del cubo: P è in questo caso un ottaedro regolare) ma "abbastanza simmetrico": precisamente, con la proprietà che il suo gruppo di simmetria $\Gamma(P)$ (che coincide con il gruppo di simmetria del cubo) è transitivo sui vertici di P.

Non è difficile rendersi conto di quali altri poliedri si possano trovare con questa costruzione, che è macchinosa da esporre, e/o da disegnare, ma estremamente più semplice da seguire avendo fra le mani un modello. Si può ancora osservare che:

1 Volendo studiare il gruppo di simmetria del cubo, è più facile "visualizzarne" gli elementi a partire dai modelli di alcuni di questi poliedri, che non a partire da un modello del cubo stesso.

2 Il caleidoscopio da cui siamo partiti si basava sul gruppo di simmetria del cubo: possiamo rifare la stessa costruzione partendo da un altro caleidoscopio basato su un altro gruppo[12] e otterremo altri poliedri con la caratteristica che il loro gruppo di simmetria è transitivo sull'insieme dei vertici. E, viceversa, tutti i poliedri di questo tipo si ottengono in modo analogo.

3 Rientrano fra questi poliedri quelli cosiddetti uniformi che hanno le facce che sono poligoni regolari (non necessariamente uguali fra loro) e tutti gli angoloidi uguali fra loro: verificano questa condizione i 5 poliedri regolari, 2 famiglie infinite (i prismi e gli antiprismi) e altri 13 poliedri (generalmente detti archimedei). Questi poliedri si caratterizzano con un simbolo del tipo $(p_1,\dots,p_q)$, che sta ad indicare che in ogni vertice arrivano (in questo ordine ciclico) un p_1-gono regolare, un p_2-gono regolare, ..., un p_q-gono regolare; e, se si esamina la lista delle 13 possibili q-ple di interi corrispondenti ai 13 poliedri archimedei alla luce della costruzione del caleidoscopio, ci si rende facilmente conto del perché si ottengano proprio quei numeri.

4 Se si richiede che il gruppo di simmetria sia transitivo sulle facce del poliedro, otteniamo (per dualità) una situazione del tutto analoga alla precedente; invece, la condizione di transitività sugli spigoli è strettamente più forte delle altre due: si può dimostrare che, se un poliedro ha un gruppo di simmetria transitivo sugli spigoli, allora è anche transitivo o sui vertici o sulle facce[13].

[11] A priori potrebbe anche avere più simmetrie: d'altra parte ciò non è possibile perché non c'è nessun gruppo finito di isometrie che contenga propriamente il gruppo di simmetria del cubo.

[12] E non sono tanti i casi possibili, grazie alla classificazione dei gruppi finiti di isometrie dello spazio.

Esempio 7 Tassellazioni combinatorie dello spazio

Dicendo che un poliedro P tassella lo spazio intendiamo che possiamo ricoprire lo spazio con l'unione di infiniti poliedri P_i, ciascuno dei quali congruente a P, e tali che l'intersezione di P_i e P_j, se non è vuota, sia una faccia (oppure uno spigolo, oppure un vertice) comune ai due poliedri.

È immediato trovare un poliedro che tassella lo spazio: il cubo.

E' pure immediato trovare un poliedro che NON tassella lo spazio, ad esempio il tetraedro regolare: basta osservare che gli angoli diedri NON sono sottomultipli di 2π, come occorrerebbe per un poliedro che tasselli lo spazio. Si può però provare a indebolire le richieste e chiedersi se il tetraedro regolare tassella combinatoriamente lo spazio, intendendo con questo la stessa cosa di prima, salvo che non si richiede più che i P_i siano tutti isometrici al "prototipo" P, ma solo che siano combinatoriamente equivalenti a P (questo vuol dire che esiste una corrispondenza biunivoca fra i vertici dei due poliedri che manda spigoli dell'uno in spigoli dell'altro, facce dell'uno in facce dell'altro, e rispetta la nozione di incidenza).

[13] La dimostrazione è molto graziosa e si basa su argomentazioni di carattere combinatorio (e sulla formula di Eulero-Poincaré): è una conseguenza del fatto, già visto nell'esempio 5, che un poliedro non può avere simultaneamente ogni faccia con un numero pari di lati e ogni vertice da cui escano un numero pari di spigoli.

Tutti i tetraedri (4 facce triangolari, 4 vertici da ciascuno dei quali escono tre triangoli) sono combinatoriamente equivalenti fra loro, quindi, per tassellare combinatoriamente lo spazio usando come prototipo il tetraedro regolare, basta prendere una tassellazione in tetraedri (qualsiasi) e questa si ottiene facilmente: basta, p. es., partire dalla tassellazione in cubi e suddividere ogni cubo in sei tetraedri.

Si potrebbe pensare da questo esempio che, con la richiesta della sola equivalenza combinatoria, il problema sia diventato così lasco che ogni poliedro P tasselli combinatoriamente lo spazio. Ad esempio, l'analogo problema nel piano sarebbe quello di domandarsi se, fissato n, si riesce a tassellare il piano con n-goni (senza alcuna richiesta né sulla uguaglianza di tali n-goni, né sulla loro forma: dire che due poligoni sono combinatoriamente equivalenti vuol dire semplicemente che hanno lo stesso numero di lati): e, in effetti, questo problema ha una risposta affermativa, per ogni n (vedi, p.es. [N]).

Questo però non è più vero nello spazio: ad esempio il cubottaedro non tassella lo spazio, neppure combinatoriamente, e anche questo è un fatto che segue facilmente dalla formula di Eulero.

Il cubottaedro è un poliedro (archimedeo, di simbolo (3,4,3,4)) che ha come facce 8 triangoli equilateri e 6 quadrati, ed è tale che in ogni vertice arrivano, in questo ordine ciclico, un quadrato, un triangolo, un quadrato, un triangolo.

L'idea della dimostrazione (che si può trovare, ad esempio, in [SF]5) è la seguente: supponiamo per assurdo che esista una tale tassellazione e consideriamone un vertice v; una piccola sfera Σ di centro v viene "bucata" dalla tassellazione che lascia traccia su Σ di un "poliedro" (ricurvo) che ha un vertice (risp. spigolo, risp. faccia) in corrispondenza di ogni spigolo (risp. faccia, risp. poliedro) uscente da v nella tassellazione; per questo "poliedro" su Σ continua a valere

$$(*) \qquad V-S+F=2$$

(dove V è il numero dei vertici, S il numero degli archi, F il numero delle regioni) perché questa formula è di natura topologica e non ha importanza che gli archi siano "dritti" o che le regioni siano poligoni.

Non è difficile dimostrare che in questo "poliedro" su Σ ogni faccia avrebbe esattamente 4 lati[14], e ogni vertice avrebbe valenza pari[15]: il che contraddice

---

[14] Infatti, ogni regione su Σ corrisponde, nella tassellazione, ad un cubottaedro uscente da v, e ognuno di questi ha esattamente 4 facce uscenti da v, ciascuna delle quali stacca su Σ un arco nel bordo della regione considerata.

[15] Infatti, un vertice su Σ corrisponde ad uno spigolo uscente da v; a questo spigolo si appoggeranno q poliedri e ad ogni spigolo su Σ uscente dal vertice considerato corrisponde una faccia di uno di questi; le facce sono triangoli o quadrati, e cubottaedri adiacenti si saldano secondo una faccia di uno stesso tipo; quindi,

quanto abbiamo già visto nell'esempio 5.

Esempio 8 Una costruzione topologica illustrata dall'ipercubo

Ho voluto inserire questo esempio (anche se forse sarà meno chiaro per chi non ha qualche familiarità con costruzioni topologiche in dimensione bassa), perché è sorprendente come un oggetto rigido (un poliedro: l'ipercubo) possa prestarsi benissimo per illustrare una costruzione di natura topologica.

La costruzione che mi propongo di descrivere è il fatto che la sfera di dimensione tre si ottiene dall'unione di due tori solidi, identificandone i bordi in modo tale da attaccare un parallelo del primo con un meridiano del secondo e viceversa. Un toro solido è il (omeomorfo al) prodotto cartesiano di una circonferenza S^1 e di un disco D^2, il suo bordo è un toro, che è il (omeomorfo al) prodotto cartesiano di due circonferenze: rimandiamo alla figura 5 per chiarire cosa si può intendere per meridiano (m) e parallelo (l).

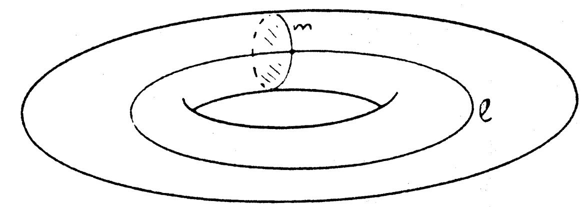


FIGURA 5

Cominciamo allora ad osservare che (come ogni poliedro è omeomorfo alla sfera S^2) l'ipercubo è omeomorfo alla sfera tridimensionale S^3: occorre qui precisare che (in questo esempio) ci riferiamo ad un poliedro (p. es. il cubo) per intendere non l'oggetto tridimensionale (che chiameremo "cubo pieno"), ma la sua superficie (quindi l'unione delle sei facce, che è omeomorfa ad una sfera). Così anche per ipercubo intendiamo il bordo (tridimensionale) dell'"oggetto" di dimensione 4.

L'ipercubo ha 8 facce che sono cubi pieni; possiamo costruirne uno sviluppo, in modo del tutto analogo allo sviluppo del cubo con 6 quadrati disposti a croce, come in figura 6; questo sarà costituito da una colonna centrale di 4 cubi pieni (A,B,C,D in figura 7), dove, al livello del secondo, sono attaccati altri 4 cubi pieni (E,F,G,H) alle facce laterali; naturalmente dire che questo è lo sviluppo significa tener presente poi quali identificazioni occorrerà fare per ricostruire

---

girando ciclicamente intorno allo spigolo della tassellazione si incontrano, alternati, un quadrato, un triangolo, e cosi' via; affinché il ciclo possa chiudersi occorre che q sia un numero pari.

l'ipercubo: come per lo sviluppo del cubo nel piano queste identificazioni non si possono materialmente fare se si resta sul piano del disegno (ma occorre passare nello spazio), così le identificazioni sullo sviluppo per ricostruire l'ipercubo non si possono materialmente fare nello spazio (ma occorrerebbe una quarta dimensione...).

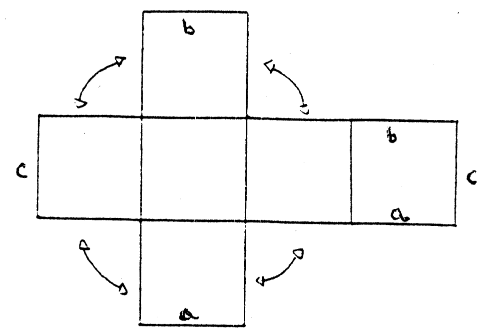


FIGURA 6

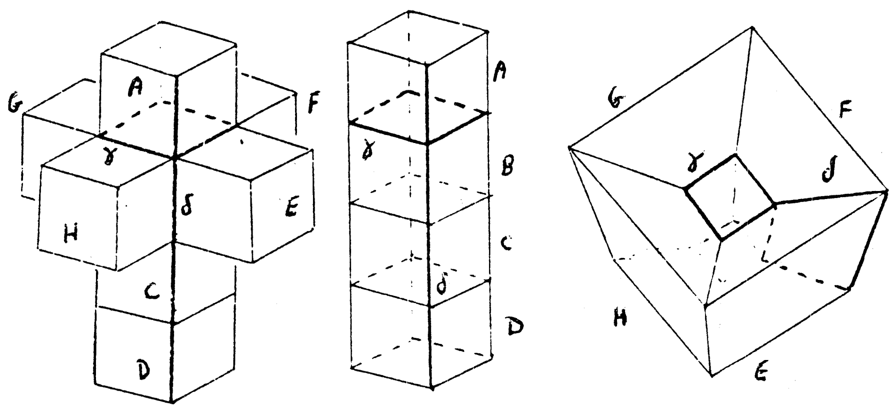


FIGURA 7

Dividiamo ora l'ipercubo in 2 pezzi: la colonna centrale (dei 4 cubi pieni A,B,C,D) è un toro solido, perché la faccia superiore del cubo pieno A va identificata con la faccia inferiore del cubo pieno D. I 4 cubi pieni EFGH, immaginando di operare le identificazioni per ottenere l'ipercubo, costituiscono essi pure un toro solido. Inoltre, si vede dalla figura (o, molto più chiaramente, da un modello!!) che la curva γ è un meridiano per il primo toro solido (è bordo di un disco) ed è un parallelo nel secondo toro solido ("gira intorno al buco") mentre esattamente l'opposto succede per la curva δ.

Qualche considerazione sulla definizione di (poligono e) poliedro

Ho lasciato volutamente per ultime queste considerazioni, perché il problema di dare una definizione rigorosa di poliedro (e di poligono) non è così ovvio, ed è quindi opportuno avere già in mente un sufficiente numero di esempi di oggetti che si vuole rientrino nella definizione di poliedro (e di oggetti che NON si vuole rientrino in tale definizione). Ad esempio:
- Vogliamo che "poligono" sia la figura costituita dai lati (di dimensione uno, per intendersi) o la porzione di piano racchiusa da questi (di dimensione due)?
- Vogliamo che un poliedro sia l'oggetto tridimensionale ovvero la superficie, bidimensionale, di questo oggetto?
- Vogliamo far rientrare nella definizione di "poligono" anche esempi (come in figura 8) intrecciati? illimitati? sghembi?
- Vogliamo che siano "poliedri" anche esempi come quelli di figura 9? o intrecciati? o omeomorfi ad una ciambella come quello in figura 7?

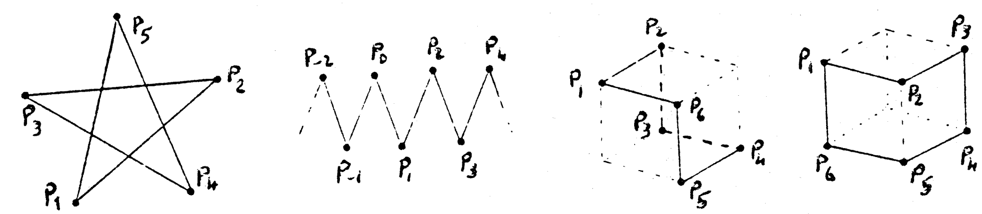


FIGURA 8

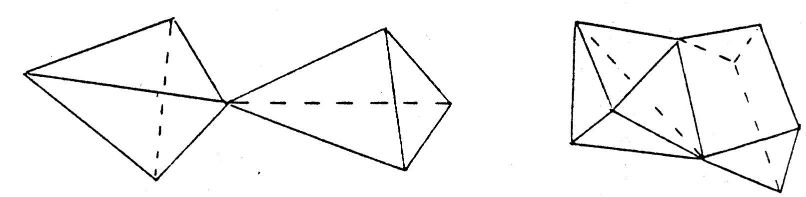


FIGURA 9

Ogni scelta a questo livello è legittima (dare una definizione significa solo mettersi d'accordo su di un nome!), purché, naturalmente, si proceda poi coerentemente. E quindi, ad esempio:
- Se si vuole che il poligono sia una regione piana, limitata dalla poligonale dei lati, allora (si sta usando il teorema di Jordan, che si applica ad una curva piana, semplice, chiusa e quindi) non si possono chiamare "poligoni" i casi descritti in figura 8.

- Se si definisce il poligono in modo da riferirsi alla spezzata poligonale, allora non si può dire né che un poliedro è formato da poligoni, né che è limitato da poligoni; né (p. es.) che un cubo è il prodotto cartesiano di un quadrato per un intervallo; se si definisce poi un poligono regolare come un poligono equilatero e equiangolo, tutti gli esempi di figura 8 sono anche regolari (mentre l'ultimo non lo è se si definisce un poligono regolare come un poligono in cui il gruppo di simmetria è transitivo sulle bandiere).
- Se si definisce un poliedro come una regione di spazio delimitata da un numero finito di poligoni, occorre tener presente che rientrano nella definizione gli esempi in figura 9 e in figura 7; in particolare, non è più vera per un poliedro la formula di Eulero V-S+F=2.
- Se si definisce un poliedro come oggetto tridimensionale, allora non è ovvio cosa si intenda, p.es., per sviluppo del cubo.
- .... ecc.: per un approfondimento di questa discussione si veda, ad esempio, [Gr], o [C2], o [SF]6.

Bibliografia

[B] Banchoff, *Oltre la terza dimensione,* Zanichelli
[C] Coxeter, *Introduction to geometry,* Wiley
[C2] Coxeter, *Regular complex polytopes,* Cambridge University Press
[Cu] Cundy, *Deltahedra,* The Math. Gazette, vol.36 (1952), pp.263-266
[CR] Cundy Rollett, *I modelli matematici,* Feltrinelli
[Gr] Grunbaum, *Regular polyhedra - old and new,* Aequationes Mathematicae vol. 16 (1977)
[GrM] Grunbaum Motzkin, *The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra,* Canadian Journal of Math., vol.15 (1963), pp.744-751
[N] Niven, *Convex polygons that cannot tile the plane,* Amer. Math. Monthly, vol. 85 (1978)
[SF] Senechal Fleck (ed.), *Shaping space: a polyhedral approach,* Birkhauser, In particolare:
[SF]1 Senechal Fleck, *Polyhedra and the curriculum,* p.263
[SF]2 Pedersen, *Why study polyhedra,* p.133
[SF]3 Banchoff, *Torus decomposition,* p.221
[SF]4 Coxeter, *Regular and semiregular polyhedra,* p.67
[SF]5 Schulte, *Combinatorial prototyles,* p.198
[SF]6 Senechal, *Introduction to polyhedron theory,* p.191
[St] Steinhaus, *Mathematical snapshots,* Oxford University Press

Il ruolo delle trasformazioni nell'insegnamento della geometria

*Vinicio Villani**

Uno dei nodi cruciali della geometria consiste nel dare un assetto teorico al confronto tra figure che, pur occupando posizioni diverse nel piano o nello spazio, hanno certe proprietà geometriche che le accomunano. Consideriamo per es. le figure che, intuitivamente parlando, hanno le stesse dimensioni (lunghezze di segmenti e ampiezze angolari). Per precisare in modo rigoroso la relazione che intercorre fra tali figure si introducono, a seconda dell'impostazione teorica prescelta, le nozioni di "congruenza" o di "movimento rigido" o di "isometria". Sotto molti punti di vista queste diverse impostazioni si equivalgono. Ma c'è anche un importante aspetto che le differenzia: mentre le nozioni di congruenza e di movimento rigido si riferiscono solo a particolari figure, la nozione di isometria coinvolge l'intero piano (o, rispettivamente, l'intero spazio) vale a dire tutto l'ambiente nel quale le figure sono contenute.

Una situazione analoga si presenta quando si tratta di precisare la relazione che intercorre tra figure le quali, intuitivamente parlando, hanno la stessa forma (pur potendo differire per un fattore di scala). A seconda che si considerino solo particolari figure o che si coinvolga l'intero ambiente (piano o spazio) nel quale le figure si pensano contenute, si parla di "figure simili" o di "similitudine".

E il discorso si potrebbe estendere alle figure che si corrispondono in un'affinità, in una proiettività, in una trasformazione topologica.

Quando si parla di **trasformazioni geometriche** ci si riferisce alle *trasformazioni biunivoche che coinvolgono tutto l'ambiente (piano o spazio) nel quale si opera.*

Dal punto di vista didattico, il tema delle trasformazioni geometriche suscita vari interrogativi, che sono tuttora argomento di accesi dibattiti in ambito internazionale. Ne elenco alcuni, che mi sembrano particolarmente rilevanti:

1. Quali tipi di trasformazioni è opportuno introdurre? In quali ordini scolastici?

2. E' preferibile seguire un percorso che va dalle strutture più ricche a quelle

* Dipartimento di Matematica, Università di Pisa.

più povere, o viceversa?

3. E' meglio inquadrare la trattazione delle trasformazioni geometriche in un contesto di geometria sintetica, o fare ricorso al metodo analitico?

4. Perché privilegiare un'impostazione dell'insegnamento della geometria basato sulle trasformazioni geometriche, a fronte di altre possibili alternative?

5. Come individuare, e quindi cercare di superare, le difficoltà didattiche che l'argomento comporta?

In quanto segue, esporrò le mie opinioni personali su questi punti, ben consapevole del fatto che esse non sono le uniche possibili.

§1. QUALI TRASFORMAZIONI?

A prima vista, la tesi che mi accingo a sostenere può apparire paradossale. Nella scuola elementare e media è opportuno considerare trasformazioni di vario tipo: intendo non solo isometrie, similitudini e affinità, ma anche trasformazioni proiettive ed eventualmente topologiche. Nella scuola secondaria superiore, invece, ritengo ci si debba limitare ad isometrie, similitudini e affinità. Il paradosso è solo apparente. Infatti a livello elementare e medio si tratta semplicemente di suscitare la curiosità e l'interesse dei ragazzi con considerazioni intuitive. Anzi, mi guarderei bene dall'usare con i giovani allievi i termini tecnici che ho usato qui, parlando a degli insegnanti. Vanno presentati invece esempi concreti e familiari ai ragazzi, quali le ombre determinate dai raggi solari o da una lampadina. Nel caso del sole, trattandosi di raggi che possono essere considerati paralleli, la corrispondenza tra una figura piana (per es. il riquadro di una finestra) e la sua ombra è un'affinità. Nel caso della lampadina, trattandosi di raggi che escono da un punto al finito, la corrispondenza è una proiettività; se il piano della figura è parallelo al piano su cui si proietta l'ombra, la proiettività diventa una similitudine. Con un minimo di fantasia si possono presentare anche esempi di similitudini o affinità nel caso tridimensionale (oggetti e loro modellini in scala, prismi aventi la stessa altezza ma diversamente inclinati, ecc.). Per illustrare la nozione di trasformazione topologica, ci si può poi riferire alle varie forme assunte da una figura disegnata su un foglio di materiale elastico o da un oggetto tridimensionale deformabile senza lacerazioni o strappi.

Nella scuola secondaria superiore, il discorso è diverso. Infatti a questo livello scolastico si esige maggiore sistematicità e rigore, e almeno in linea di principio ogni affermazione fatta deve poter essere dimostrata. Ora, se si pretende di dare anche un minimo di sistematicità e di rigore ad una trattazione delle proiettività o delle trasformazioni topologiche, l'esposizione si fa subito complicata, e occorre una lunga marcia di avvicinamento per giungere a qualche

risultato veramente significativo, per cui - lo ribadisco - uno studio di questi due tipi di trasformazioni mi sembra difficilmente proponibile nella scuola superiore, almeno finché perdura il suo assetto attuale. Solo nel caso di classi particolarmente motivate, e in un contesto interdisciplinare, varrà la pena di accennare alle proiettività, stabilendo collegamenti tra la teoria matematica e il fenomeno della visione prospettica (disegno tecnico, storia dell'arte).

§2. QUALE PERCORSO?

Anche qui, occorre distinguere. A livello elementare e medio l'interesse degli allievi è attratto soprattutto dalle trasformazioni che modificano sostanzialmente l'aspetto delle figure considerate, tant'è che molti ragazzi sono riluttanti a riconoscere alle trasformazioni troppo banali la qualifica di autentiche "trasformazioni". Una frase che si sente dire con una certa frequenza, relativamente alla trasformazione identica, ma spesso anche per tutte le isometrie e talvolta perfino per le similitudini, è che in fondo non si tratta di trasformazioni, poiché "la figura rimane la stessa". Tenuto conto di ciò, nella scuola di base un itinerario didattico troppo rigidamente strutturato può rivelarsi controproducente, mentre può essere più opportuno un certo eclettismo volto a stabilire analogie e differenze fra le proprietà dei vari tipi di trasformazioni geometriche.

Per quanto si riferisce al livello secondario superiore, l'esigenza di sistematicità impone invece una scelta tra il percorso "ascendente" (dalle strutture più povere a quelle più ricche) e quello "discendente" (dalle strutture più ricche a quelle più povere). Io sono un deciso fautore della seconda alternativa. Ossia: vanno trattate dapprima le isometrie, poi le similitudini e infine le affinità. Il percorso inverso, quello cioè che va dalle affinità alle similitudini per terminare con le isometrie, è stato sperimentato in vari paesi (in particolare in Belgio e in Francia) negli anni '60 e '70 sotto l'influsso dello strutturalismo bourbakista, ma ha dato esiti fallimentari. E la spiegazione è chiara. Nella scuola elementare e media gli insegnanti dedicano, giustamente, molta attenzione alle misure di lunghezze, ampiezze angolari, aree, volumi. Chi volesse invece sviluppare all'inizio della scuola secondaria superiore una trattazione sistematica della geometria a partire dalla sola struttura affine del piano (o dello spazio) dovrebbe "proibire" di punto in bianco il ricorso a tutte queste nozioni, che sono di natura metrica. Per es., in geometria affine è lecito parlare del punto medio M di un segmento AB in quanto si tratta di una nozione affine che può essere formulata indipendentemente dall'esistenza di una metrica, mentre non è consentito affermare che $\overline{AM} = \overline{MB}$ (in quanto si tratta di una nozione metrica). A quattordici, quindici anni i ragazzi non possiedono ancora la maturità necessaria per comprendere e apprezzare queste sottili distinzioni e quindi è inevitabile che, pur con tutta la loro buona volontà, non riescano ad assimilarle.

Il percorso che inizia da uno studio della struttura metrica del piano (o dello spazio) è invece molto più graduale, in quanto basato per l'appunto sulla nozione di "metrica" (o "distanza" o "misura delle lunghezze") già ben nota dalla scuola media e bisognosa solo di qualche puntualizzazione critica.

La struttura metrica del piano (o dello spazio) può essere descritta nell'ambito della geometria tradizionale, a partire dall'assiomatica di *Euclide-Hilbert*, ma può essere introdotta anche mediante ricorso diretto ad un'assiomatica di tipo metrico, per es. a quella proposta da *G. Choquet*, ben nota alla maggior parte degli insegnanti perché utilizzata ormai da vari anni in alcuni libri di testo per le nostre scuole secondarie superiori. Non è detto che agli allievi vadano "inflitti" fin dall'inizio tutti gli assiomi dell'una o dell'altra impostazione; i docenti invece devono avere ben chiaro il quadro teorico complessivo entro il quale il loro insegnamento si inserisce.

Per quanto riguarda un'analisi comparativa dei pregi e dei difetti delle due assiomatiche, rinvio ad una mia conferenza, tenuta a Pesaro nel febbraio 1992. La conferenza è stata registrata su videocassetta e costituisce, integrata da ulteriore documentazione scritta, un pacchetto multimediale dell'IRRSAE Marche, dal titolo *"Didattica della geometria delle trasformazioni nei bienni"*.

Qui mi limito ad un'osservazione. Dopo aver definito le isometrie come quelle trasformazioni del piano (o dello spazio) che lasciano inalterate le distanze, nell'assiomatica di Choquet l'esistenza di isometrie, distinte dalla trasformazione identica, consegue da un assioma sulle *simmetrie* (rispetto ad un asse nel piano, rispetto ad un *piano* nello spazio). A mio avviso ragioni di opportunità didattica consigliano di sostituire questo assioma con un assioma un po' più forte, formulato già nel 1894 da *Peano*, che caratterizza in un colpo solo l'insieme di tutte le isometrie del piano (o dello spazio). Una possibile formulazione dell'assioma di Peano per il caso della geometria piana è il seguente:

Esiste una e una sola isometria del piano che trasforma:
un punto P in un punto P' (fissato ad arbitrio),
una retta orientata r passante per P in una retta orientata r' passante per P' (fissata ad arbitrio),
uno dei due semipiani delimitati da r, sia esso π_1 *in uno dei due semipiani delimitati da r', sia esso* π'_1 *(fissato ad arbitrio).*

L'assioma di Peano ha tra l'altro il pregio di inquadrarsi perfettamente nell'ottica del "Programma di Erlangen" di *F. Klein*: poiché stiamo studiando la struttura metrica del piano (o dello spazio), il gruppo delle trasformazioni che si impone naturalmente alla nostra attenzione è quello delle trasformazioni che

lasciano invariata la metrica, ossia appunto il gruppo delle *isometrie*. Il ruolo privilegiato attribuito alle simmetrie assiali nell'assiomatica di Choquet risulta invece a priori poco motivato, in quanto sfugge il nesso con la struttura metrica soggiacente.

A partire dall'assioma di Peano:

Le **traslazioni** (distinte dall'identità) risultano definite come le isometrie nelle quali un punto P va in un punto P', la retta orientata r passante per P e per P' va in se stessa (ma non è luogo di punti uniti) e ciascuno dei due semipiani delimitati da r va in se stesso (ma non è luogo di punti uniti).

Le **rotazioni** (distinte dall'identità) risultano definite come le isometrie nelle quali un punto O va in se stesso; una (semi)retta orientata r passante per O va in un'altra (semi)retta orientata r' ancora passante per O; il semipiano delimitato da r che contiene la semiretta positiva r' va nel semipiano delimitato da r' che non contiene la semiretta positiva r.

Le **simmetrie assiali** risultano definite come le isometrie nelle quali una certa retta orientata r rimane fissa (luogo di punti uniti) e uno dei due semipiani delimitati da r va nel semipiano opposto.

Dopo aver completato lo studio delle isometrie, e ferma restando la struttura metrica dell'ambiente (piano o spazio) nel quale si opera, si possono introdurre e studiare le *similitudini* e le *affinità*.

A conclusione dell'intero percorso didattico così delineato, quali sono i fatti geometrici essenziali, che tutti gli allievi dovrebbero avere ben compreso e interiorizzato? Ecco, in estrema sintesi, la mia opinione. A qualcuno l'elenco che segue potrà forse sembrare riduttivo, ma purtroppo nei miei contatti con gli studenti dei primi anni di Università devo constatare che spesso neppure questi pochi concetti e risultati basilari sono entrati a far parte del loro bagaglio culturale.

- *Le isometrie sono le trasformazioni che lasciano invariate le distanze (o, se si preferisce, le lunghezze dei segmenti).*

Di conseguenza, le isometrie lasciano invariate anche le lunghezze delle linee curve, nonché le ampiezze angolari, le aree (di superfici qualsiasi, non solo dei poligoni) e, nello spazio, i volumi (di solidi qualsiasi, non solo dei poliedri).

- *Le similitudini sono le trasformazioni che alterano tutte le distanze secondo uno stesso fattore moltiplicativo k (detto "fattore di scala").*

Di conseguenza, le similitudini lasciano invariate le ampiezze angolari, mentre le lunghezze (dei segmenti e delle linee curve), le aree e, nello spazio, i volumi, si alterano rispettivamente secondo i fattori moltiplicativi k, k^2, k^3.

- *Le affinità sono le trasformazioni che mantengono l'allineamento dei punti, nonché il parallelismo e l'ordinamento sulle rette.*

Di conseguenza, per effetto di una trasformazione affine, possono modificarsi sia le ampiezze angolari, sia le lunghezze, sia le aree e, nello spazio, i volumi. Precisamente, nel caso delle affinità del piano, tutte le aree si alterano secondo uno stesso fattore moltiplicativo caratteristico dell'affinità considerata. Analogamente, nel caso delle affinità dello spazio, tutti i volumi si alterano secondo uno stesso fattore moltiplicativo caratteristico dell'affinità considerata.

- *L'insieme di tutte le trasformazioni di uno stesso tipo (isometrie, similitudini, affinità, come pure proiettività o trasformazioni topologiche) possiede una struttura di gruppo e tale gruppo non è commutativo.*

Di conseguenza, le trasformazioni di uno stesso tipo si possono invertire e comporre tra loro, restando sempre all'interno della medesima struttura.

Finora non ho nominato, neppure di sfuggita, uno dei cavalli di battaglia della geometria tradizionale: *i criteri di uguaglianza dei triangoli e dei poligoni* (per coerenza con la terminologia usata in questa esposizione sarebbe più appropriato chiamarli criteri di *isometria*), né gli analoghi *criteri di similitudine*.

Sono convinto della loro utilità e quindi ritengo che anch'essi debbano trovare posto all'interno della trattazione delle isometrie e delle similitudini, con l'avvertenza però che si tratta solo di "criteri" da non enfatizzare a dismisura, come invece accade nell'insegnamento tradizionale della geometria, col risultato indesiderato che per molti allievi questi criteri assurgono al ruolo di vere e proprie definizioni delle nozioni di figure isometriche o rispettivamente di figure simili.

§3. IMPOSTAZIONE SINTETICA O ANALITICA?

Da quanto detto nei punti precedenti emerge chiaramente la mia preferenza per un approccio di tipo sintetico allo studio delle trasformazioni geometriche, almeno quando esse vengono introdotte per la prima volta (nella scuola dell'obbligo) o successivamente richiamate (all'inizio della scuola secondaria superiore).

In un secondo momento, però, non appena gli allievi hanno ben compreso il significato geometrico delle nozioni introdotte, è senz'altro opportuno (nel caso delle affinità forse inevitabile) avvalersi anche del metodo delle coordinate, con l'avvertenza di curare sempre, con sistematicità, l'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti per via analitica.

La traduzione dei fatti geometrici in formule algebriche è piuttosto semplice. Nel caso del piano, dette (x,y) le coordinate del generico punto di partenza, e dette (x',y') le coordinate del punto immagine, la più generale "*trasformazione lineare*" è espressa da un sistema del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

(con a, b, c, d, p, q numeri reali).

Affinché questa risulti un'*affinità* basta imporre l'ulteriore condizione

$$ad - bc \neq 0$$

che assicura la biunivocità (e quindi anche l'invertibilità) della trasformazione.

Le *isometrie* sono caratterizzate dalle condizioni

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

Per le *similitudini* le condizioni precedenti si modificano come segue:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = k^2 \\ c^2 + d^2 = k^2 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

(con $k \neq 0$ fattore di scala della similitudine).

Naturalmente le stesse relazioni possono essere scritte in forma più elegante e più compatta, ma per ciò stesso più astratta e quindi più difficile da usare, ricorrendo a notazioni vettoriali o matriciali ed eventualmente ai numeri complessi.

Tra i punti di forza del metodo analitico mi sembra valga la pena di evidenziare almeno tre aspetti:

I. Mentre nell'impostazione sintetica è sempre forte la tentazione di limitarsi a considerare il destino dei soli punti o delle linee che delimitano la particolare figura che interessa trasformare, nell'impostazione analitica è evidente che ogni punto (appartenente o no alla figura) possiede un suo corrispondente nella trasformazione.

II. Le formule scritte sopra (o le loro analoghe tridimensionali) sussistono inalterate, sia che si tratti di una trasformazione del piano (o dello spazio) in se stesso, sia che si tratti di una trasformazione tra piani (o spazi) distinti. Anzi, in questo secondo caso le formule si possono semplificare notevolmente pur di scegliere opportunamente i sistemi di riferimento nei due piani (o spazi).

Colgo l'occasione per ribadire una mia convinzione. Il limitarsi a studiare il caso di due piani (o spazi) coincidenti è inutilmente restrittivo. Nelle applicazioni si ha a che fare quasi sempre con trasformazioni fra piani (o spazi) distinti. Basti pensare all'esempio dell'ombra di una finestra proiettata sul pavimento, o alla similitudine che intercorre tra una fotografia e un suo ingrandimento.

Proprio in vista dell'opportunità di considerare piani (o spazi) distinti, mi sembra anche discutibile l'impostazione seguita in alcuni libri di testo, che fanno derivare la nozione di similitudine da quella di omotetia. Infatti ha senso parlare di omotetie solo nel caso di piani (o spazi) coincidenti.

III. Con un piccolo sforzo di generalizzazione, lasciando cadere la condizione di biunivocità tra l'insieme dei punti di partenza e quello dei punti di arrivo, si possono scrivere formule del tutto analoghe per le trasformazioni lineari che descrivono le proiezioni assonometriche dello spazio tridimensionale su un piano. Al giorno d'oggi, grazie agli elaboratori elettronici che sono in grado di effettuare tutti i calcoli numerici noiosi, e che consentono una visualizzazione quasi istantanea di figure sullo schermo, queste formule possono servire per generare con poca fatica rappresentazioni accurate di solidi particolarmente significativi (per es. poliedri regolari). Modificando i parametri delle formule, si modificano le angolazioni delle proiezioni. Infine, si possono studiare analiticamente (e interpretare geometricamente) le sezioni dei solidi considerati con piani opportunamente scelti, tutte attività importanti per potenziare l'intuizione spaziale degli allievi.

§4. PERCHÉ PRIVILEGIARE LA GEOMETRIA DELLE TRASFORMAZIONI?

La geometria euclidea pone l'accento sulle singole figure, limitandosi poi a studiarne determinate proprietà. I metodi impiegati sono ingegnosi, ma legati alle situazioni specifiche in esame, quindi non automaticamente estendibili allo studio e alla classificazione di figure di tipo più generale.

Un primo punto di forza della geometria delle trasformazioni sta nel superamento di questo punto di vista, nel senso che l'attenzione si sposta dalle "figure" alle loro "proprietà". Ciò consente a sua volta una maggiore generalità, sistematicità e unitarietà di metodi per lo studio e la classificazione delle figure. Cerco di chiarire questa affermazione con un paio di esempi.

I. In geometria euclidea si definisce quando due poligoni sono da considerarsi uguali (isometrici) o simili. Si forniscono poi i corrispondenti criteri di uguaglianza o di similitudine per facilitare le verifiche caso per caso.

Ma queste definizioni e questi criteri non si applicano per es. alle circonferenze o alle ellissi. Eppure è intuitivamente evidente che deve avere senso parlare anche di circonferenze e di ellissi "uguali" o "simili". Per precisare questa idea intuitiva, nella geometria tradizionale occorre quindi dare delle ulteriori definizioni e magari fornire criteri operativi atti a facilitare le verifiche.

Si tratta comunque di un processo senza fine, visto che dopo aver parlato di circonferenze e di ellissi resterebbero da dare definizioni e da fornire criteri ancora diversi per le parabole, per le iperboli e per tutte le possibili figure più o meno irregolari del piano e dello spazio.

Nella geometria delle trasformazioni, invece, tutti i casi possibili sono compendiati in un'unica breve definizione:

Due figure si dicono isometriche (rispettivamente simili) se si corrispondono in una isometria (rispettivamente in una similitudine).

Detto per inciso, due parabole risultano sempre simili, fatto questo tutt'altro che intuitivo.

Per un confronto più approfondito tra la nozione di "similitudine" e quella di "figure simili" rinvio al mio articolo: *Similitudine e figure simili* (L'Educazione Matematica, Anno XI, Supplemento al n. 2, agosto 1990, pp. 55-64).

II. Come secondo esempio, consideriamo le tradizionali classificazioni dei triangoli e dei quadrilateri rispetto a certe loro proprietà. Nel caso dei triangoli, per es., si parla di triangoli equilateri, isosceli e scaleni. Ma resta un po' nell'ombra la logica che sta alla base di questa classificazione. Infatti fra l'insieme dei triangoli equilateri e quello dei triangoli isosceli sussiste una relazione di *inclusione* (per i matematici i triangoli equilateri sono particolari triangoli isosceli) mentre fra triangoli isosceli e scaleni sussiste una relazione di *partizione* (un triangolo non può essere al tempo stesso isoscele e scaleno).

Nel caso dei quadrilateri, la logica soggiacente ad una loro classificazione è ancor più misteriosa. Fino a qualche decennio fa i quadrilateri dotati di un asse di simmetria passante per una coppia di vertici opposti non avevano neppure un nome specifico (oggi vengono detti "deltoidi" o "aquiloni"). Nella famiglia dei trapezi vengono mescolate alla rinfusa proprietà di parallelismo, di perpendicolarità (trapezio rettangolo), di simmetria (trapezio isoscele), ecc. Anche l'allievo più diligente, dopo aver memorizzato tutta la serie delle definizioni date dal libro di testo, è portato a chiedersi se la classificazione studiata è esaustiva o se c'è ancora la possibilità di scoprire qualche nuovo tipo di quadrilatero, magari sfuggito alle classificazioni precedenti (quasi che si trattasse di insetti o piante).

La geometria delle trasformazioni consente anche in questo caso di rendere più trasparenti le classificazioni, dichiarando in partenza i criteri seguiti. Uno dei criteri può essere per es. quello delle *proprietà di simmetria* (figure prive di assi di simmetria, figure con un asse di simmetria, figure con due assi di simmetria,...; figure con un centro di simmetria; figure dotate di simmetrie rotazionali). E lo stesso tipo di classificazione si può estendere ai solidi dello spazio tridimensionale.

Naturalmente le conclusioni alle quali giungerà chi si basa sulla geometria delle trasformazioni non saranno poi sostanzialmente diverse da quelle conseguibili nell'impostazione tradizionale (con qualche eccezione, come quella dei "deltoidi" dimenticati in ambito euclideo). Ma il punto importante sta proprio nella generalità del metodo e nella sistematicità dell'impostazione. Del resto anche nelle scienze della natura le classificazioni botaniche, zoologiche, mineralogiche, chimiche non servono tanto a scoprire fatti nuovi, diversi da quelli già sperimentalmente accertati, quanto piuttosto a mettere in luce regolarità, simmetrie e collegamenti a priori insospettati.

Un secondo punto di forza delle trasformazioni geometriche sta nella possibilità di usare i potenti metodi della geometria analitica. Ne ho già parlato nel § precedente e quindi non mi dilungo oltre su questo aspetto.

Un terzo punto di forza sta nella struttura gruppale delle trasformazioni, ricca di interessanti conseguenze. Per quanto riguarda le isometrie, il risultato più rilevante è il cosiddetto teorema delle tre simmetrie:

Ogni isometria del piano si può ottenere come composizione di non più di tre simmetrie rispetto ad opportuni assi.

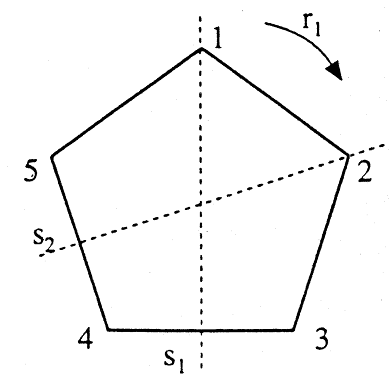
E analogamente:

Ogni isometria dello spazio si può ottenere come composizione di non più di quattro simmetrie rispetto ad opportuni piani.

Si noti che questo teorema giustifica a posteriori il ruolo privilegiato delle simmetrie nell'ambito delle isometrie. A mio parere, però, chi ne trae spunto per definire traslazioni e rotazioni come composizioni di due simmetrie va al di là del segno. Sono invece pienamente d'accordo nell'usare il teorema delle tre (o quattro) simmetrie in fase di revisione critica, per giungere ad una panoramica unificante ed esaustiva dei diversi tipi di isometrie. E ancora una volta c'è una piccola sorpresa. La casistica tradizionale non era completa: mancavano le "glissosimmetrie".

Infine, si possono considerare quelle particolari isometrie che trasformano una data figura in se stessa. E anch'esse formano gruppo. E' molto istruttivo studiare il gruppo delle isometrie che portano un poligono regolare o un poliedro regolare a sovrapporsi a se stesso. Trattandosi di gruppi finiti, se ne può anche costruire esplicitamente la tabella di composizione. Questo argomento, da solo, meriterebbe una trattazione approfondita, alla quale in questa sede non posso neppure accennare. Mi limito ad un rilievo critico: trovo strano il fatto che neppure i testi più recenti, che dedicano ampio spazio alla geometria delle trasformazioni, affrontino questo aspetto. Forse hanno paura di perdere in generalità, abbassandosi a ragionare su particolari figure? Ma la geometria delle trasformazioni è bella e importante proprio in quanto è applicabile allo studio delle figure del piano e dello spazio!

Sempre nello stesso ordine di idee, propongo un esercizio che mi sembra interessante e sul quale ritornerò ancora nel successivo §5.



In figura è disegnato un pentagono regolare.

Sia s_j la simmetria assiale con asse di simmetria passante per il centro del pentagono e per il vertice j (j=1,2,...,5).

Sia r_k la rotazione con centro nel centro del pentagono, che porta il vertice di indice 1 nella posizione del vertice di indice $1+k$ (k=0,1,...,4). Quindi r_0 è l'identità, r_1 è la rotazione di 1/5 di giro in verso orario (o, il che è lo stesso, è la rotazione di 4/5 di giro in verso antiorario), ecc.

Ciò premesso, si chiede di individuare la trasformazione che risulta dalla composizione delle tre isometrie:

$$s_2 \circ r_1 \circ s_1 \ .$$

Invito i lettori a risolvere l'esercizio prima di leggere i miei commenti nel § successivo.

Intanto termino questo § con un'osservazione telegrafica sulle affinità. Esse erano praticamente assenti nell'impostazione tradizionale della geometria. A torto, perché ogni qual volta si considera un sistema di coordinate cartesiane non monometriche, si fa inevitabilmente della geometria affine. Caso tipico: in fisica, quando i due assi coordinati vengono usati per visualizzare grandezze dimensionalmente diverse, non avrebbe senso pretendere di usare coordinate "monometriche".

§5. COME INDIVIDUARE E COME SUPERARE LE DIFFICOLTÀ?

Da quanto ho esposto finora, potrebbe sembrare che tutto vada per il meglio nella geometria delle trasformazioni. Invece le difficoltà ci sono, e molte! Alcune sono insite nell'argomento stesso.

Un primo scoglio è quello di *saper immaginare il destino di punti o di segmenti che non compaiono esplicitamente in una figura*. Tento di spiegarmi - al solito - con un esempio.

Siano dati un rettangolo e un parallelogrammo, con i lati rispettivamente uguali (isometrici). Dalla geometria tradizionale sappiamo che si tratta di due figure non isometriche, in quanto le ampiezze dei loro angoli sono diverse. Ma nella definizione di figure isometriche secondo la geometria delle trasformazioni (vedi il precedente § 4) non si fa cenno all'uguaglianza delle ampiezze angolari. Siccome i lati delle due figure sono uguali per ipotesi, sembrerebbe di poter concludere che in questa nuova accezione le due figure sono isometriche! E invece no, perché in una ipotetica isometria anche le diagonali del rettangolo, trasformandosi nelle diagonali del parallelogrammo, dovrebbero mantenere la propria lunghezza (e ciò avviene solo nel caso eccezionale in cui il parallelogrammo è esso stesso un rettangolo). Tutto chiaro per gli "esperti", dunque. Ma si tratta di un sottinteso difficile da capire per chi si accosta all'argomento per la prima volta.

Altre difficoltà derivano dalla *terminologia*. Numerosi vocaboli sono

mutuati dal linguaggio comune o dalla fisica, ma usati con significati diversi. Un esempio per tutti: nella geometria delle trasformazioni, una rotazione è individuata dalla sola "fotografia" del suo effetto; nel linguaggio corrente e in fisica la stessa parola evoca invece un movimento, ossia qualcosa che assomiglia di più ad un "filmato" parametrizzato cinematicamente nel tempo, per cui una rotazione di 1/5 di giro in verso orario viene considerata diversa da una rotazione di 4/5 di giro in verso antiorario, o da una rotazione che differisca dalle precedenti per un multiplo intero di angoli giri.

Su questo punto gli stessi "Orientamenti per la lettura dei contenuti" dei programmi ministeriali per la scuola media rischiano di indurre in errore quando, dopo aver affermato, correttamente, che "lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro modificarsi" soggiungono: "E' in questa concezione dinamica che va inteso anche il tema delle trasformazioni geometriche". Quest'ultima frase sembra infatti alludere al "filmato" piuttosto che alla "fotografia" dell'effetto di una trasformazione geometrica.

Per accertare le conoscenze lessicali degli allievi e per far emergere eventuali difformità fra il significato che essi attribuiscono a certi termini e il significato col quale gli stessi termini sono usati in matematica, mi sembra utile proporre dei test mirati, seguiti da un'approfondita discussione collegiale. Per es. all'inizio della scuola secondaria superiore, in vista di stabilire se per gli allievi i termini "uguale", "congruente", "isometrico" sono familiari o meno e se vengono intesi come sinonimi o meno, suggerisco di predisporre un foglio sul quale siano state disegnate varie figure geometriche (alcune direttamente isometriche ma diversamente disposte, altre solo specularmente isometriche, altre ancora ingrandite o deformate) con la richiesta di individuare le coppie di figure alle quali si applica l'uno o l'altro o il terzo attributo. Quasi sicuramente emergeranno opinioni assai diverse!

Perfino le *notazioni* possono essere fonte di errori, come ho constatato recentemente a seguito di un piccolo sondaggio tra una cinquantina di insegnanti di vari ordini scolastici, ai quali avevo proposto l'esercizio sul pentagono regolare, enunciato alla fine del § 4.

Secondo alcuni degli intervistati, il risultato della composizione $s_2 \circ r_1 \circ s_1$ doveva essere r_1 (una ventina di risposte); secondo altri r_4 (una quindicina di risposte), secondo altri ancora r_2 (una quindicina di risposte). Come si spiega questo marcato disaccordo? Dico subito che secondo le convenzioni usuali l'unica risposta matematicamente corretta è la prima. Ma chi ha dato risposte "sbagliate" lo ha fatto seguendo ragionamenti perfettamente logici, anche se non in linea con i presupposti teorici.

La risposta r_4 nasce da un'ambiguità (voluta) nell'enunciato dell'esercizio, là dove gli assi di simmetria sono stati contrassegnati con simboli che fanno riferimento alla numerazione dei vertici del pentagono. Dopo aver effettuato una rotazione del pentagono, si deve intendere che l'asse della simmetria s_2 è rimasto fisso, o che ha subito anch'esso una rotazione, seguendo la rotazione del vertice 1? Le convenzioni teoriche impongono di tenere l'asse fisso, ossia solidale col piano. Chi ha optato per la risposta r_4 ha considerato invece l'asse solidale col pentagono.

La risposta r_2 è dovuta all'uso di notazioni - per la composizione di due o più isometrie - difformi da quelle standard. Di solito, una scrittura del tipo $g \circ h$ sta ad indicare che va effettuata prima la trasformazione h e poi la trasformazione g. Chi ha optato per la risposta r_2 si è basato invece sulla convenzione opposta (prima la trasformazione g e poi la trasformazione h). Devo riconoscere che anche tra i libri di testo in circolazione nelle nostre scuole non vi è accordo su questo punto. E chiaramente le due convenzioni possono dare risultati diversi, vista la non commutatività delle simmetrie assiali. La difformità in sé non è grave: una convenzione non è "più vera" o "meno vera" dell'altra. Il privilegiare la prima o la seconda è solo questione di opportunità. Ma la mancanza di accordo fra testi diversi o fra insegnanti diversi rischia di creare ulteriore disorientamento fra gli allievi.

La medesima risposta r_2 poteva essere conseguenza anche di un altro tipo di fraintendimento: vi sarebbe giunto chi avesse ipotizzato, come effetto della prima simmetria, uno scambio della rotazione r_1 con la propria simmetrica, in quanto la simmetria "inverte" il pentagono (e il piano che lo contiene).

Al di là della marginalità dell'episodio, l'esito del sondaggio prova che questa parte della geometria delle trasformazioni è fonte di possibili ambiguità anche per i docenti e per gli autori dei libri di testo, e quindi va ulteriormente approfondita prima di poterla presentare agli allievi.

Per evitare le ambiguità riscontrate nell'esercizio, basta ricorrere al formalismo delle permutazioni sui vertici del pentagono e alle loro composizioni. Ma questa scappatoia non mi soddisfa, se il formalismo delle permutazioni viene usato solo per cortocircuitare il significato geometrico delle operazioni effettuate.

E ancora: in tema di composizione di isometrie, una difficoltà non trascurabile deriva dal fatto che quando si intende decomporre una traslazione o una rotazione nel prodotto di due simmetrie assiali, queste non sono univocamente determinate, anzi possono essere scelte in infiniti modi diversi. La decisione su come scegliere la coppia di simmetrie più vantaggiose per risolvere un determinato problema... rappresenta quindi a sua volta un problema.

Neppure l'uso del metodo analitico è scevro da pericoli. Le formule che descrivono *trasformazioni di figure* e quelle che descrivono *cambiamenti di coordinate* sono formalmente identiche, pur avendo significati diversi.

Ma la difficoltà più rilevante mi sembra rappresentata dalla *mancanza di una tradizione scolastica consolidata*, sia per la parte teorica, sia e soprattutto per quanto riguarda gli esercizi e i problemi da proporre agli allievi.

Non tutti gli esercizi della geometria euclidea si prestano per essere affrontati e risolti con l'ausilio delle trasformazioni geometriche. Viceversa, numerosi esercizi proponibili nell'ambito delle trasformazioni geometriche esulano da quello della geometria euclidea. I libri di testo non hanno ancora saputo fare una scelta oculata e, nell'incertezza, hanno finito col proporre per lo più domande di scarso contenuto geometrico come: studiare in astratto la composizione di certe isometrie o di certe similitudini, senza riferimento ad alcuna figura specifica.

Sfortunatamente, i problemi più significativi della geometria delle trasformazioni (a parte il classico caso della riflessione della luce o del rimbalzo di una pallina sulle sponde di un biliardo) sono troppo difficili per poter essere proposti agli allievi senza una dettagliata traccia del procedimento risolutivo. Penso in particolare ai problemi di minimo, come quello di **Fagnano** (*Dato un triangolo acutangolo ABC, determinare tre punti U,V,W appartenenti rispettivamente ai lati BC, CA, AB in modo tale che il perimetro del triangolo UVW risulti minimo*) o quello di **Fermat**, che però in realtà risale a **Cavalieri** e a **Torricelli** (*Dato un triangolo acutangolo ABC, determinare il punto P che rende minima la somma delle distanze dei tre vertici A, B, C da P*).

Mi consta che in certe scuole gli allievi di una stessa classe possono (o meglio: devono) studiare in successione e a volte anche in parallelo un po' di geometria tradizionale, un po' di geometria delle trasformazioni, un po' di geometria analitica. Fatto positivo per la ricchezza di idee che questa pluralità di punti di vista comporta, fatto negativo se la "ricchezza di idee" scade nelle menti dei ragazzi a livello di "confusione di idee" e causa insicurezza sui metodi e sulle tecniche da usare di volta in volta. Poiché non esiste una ricetta universale che prescriva l'uso dell'una o dell'altra o della terza impostazione, può essere istruttivo, in situazioni di questo genere, assegnare alla classe esercizi suscettibili di essere risolti con metodi e tecniche diverse. Si possono lasciare liberi gli allievi di seguire le vie ritenute più idonee, o invece si può esigere che ogni singolo allievo elabori per lo stesso esercizio almeno due soluzioni con metodi diversi. Un successivo confronto tra le soluzioni trovate contribuirà a rendersi conto dei pregi e dei difetti delle varie impostazioni.

Dopo avere così evidenziato le principali difficoltà che uno studio delle trasformazioni geometriche comporta, devo confessare che non possiedo una bacchetta magica per superarle. Ritengo tuttavia che il fatto stesso di prendere coscienza (insegnanti e alunni) delle possibili difficoltà e dei possibili fraintendimenti sia un primo passo nella direzione giusta per evitare di commettere gli errori più frequenti e più gravi. Spero di aver dato almeno un piccolo contributo in questa direzione.

Studio delle similitudini piane con l'aiuto del calcolatore

Benedetto Scimemi *

§ 1. Scelte e motivazioni.

Chi si pronuncia a favore dell'introduzione delle *trasformazioni geometriche* nella scuola può avere in mente un progetto didattico ben preciso, per esempio quello di utilizzarle per una fondazione assiomatica della geometria, o per affrontare con metodi nuovi argomenti tradizionali; ma può anche, più semplicemente, essere mosso da un'esigenza culturale generica, perché le trasformazioni - in qualche loro accezione - fanno parte del linguaggio comune, e non solo della matematica. Certo è che, se si vuole affrontare l'argomento, occorre fare delle scelte. La scelta che è stata fatta in questa occasione è quella di un approccio ... soffice, che evita le definizioni formali e ogni tipo di dimostrazione, e privilegia invece l'intuizione visiva e l'interpretazione fisica, affinché sia l'evidenza sperimentale a suggerire ragionevoli congetture sulle proprietà geometriche. Questa scelta suggerisce di limitarsi alle isometrie e similitudini del piano (il controllo visivo non si eserciterebbe altrettanto bene, per esempio, sulle affinità), di ignorare la rappresentazione analitica e di ricorrere ai mezzi moderni che facilitano il disegno geometrico e la sua animazione, come sono i prodotti commerciali oggi disponibili per i Personal Computers (CABRI, SKETCHPAD ecc.) .

Una volta compiuta questa scelta, dopo i primi esperimenti ci si rende conto che non è il caso di fermarsi a una classificazione statica, al tradizionale elenco, perché il mezzo adottato consente di affrontare le leggi, non banali, con cui le similitudini interagiscono. L'argomento diventa dunque: *identificazione visiva delle similitudini piane e scoperta sperimentale delle leggi della loro composizione.*

Non sorprenderà se di questa impostazione si avvantaggeranno non tanto la geometria deduttiva quanto quella intuitiva e altri capitoli della matematica. Ecco infatti alcune considerazioni didattiche più generali, a parziale motivazione delle scelte di cui si è detto.

1) La nozione di *funzione* non fa ricorso a una *formula* che la descriva; le variabili non sono necessariamente numeri. Si tratta di un concetto tanto

* Dipartimento di Matematica, Università di Padova.

importante quanto difficile da acquisire.

2) Un problema di partenza come *riconoscere se due funzioni sono eguali* sembrerebbe richiedere un numero infinito di verifiche.

3) Le funzioni di un insieme in sé *si compongono* in modo assolutamente naturale. La *composizione* di funzioni è un'operazione fondamentale in molti contesti; è bene acquisire dimestichezza con tipiche proprietà di questa operazione (associatività, non-commutatività ecc.).

4) In qualche programma di matematica si parla di *strutture algebriche*, e tra queste strutture quella di *gruppo* sembra meritare la maggior attenzione. Se però un insegnante dispone delle sole strutture numeriche, l'introduzione di questi concetti non sembra ben giustificata.

A fronte delle precedenti difficoltà, la scelta dell'ambiente geometrico e l'uso del calcolatore producono circostanze favorevoli:

1) Le similitudini piane sono *funzioni* dell'insieme *dei punti del piano* in sé; le formule numeriche sono rimpiazzate da *costruzioni* geometriche. I punti *si vedono* sul modello di piano che è il monitor del calcolatore e le costruzioni corrispondono a una successione di passi di *programmazione* che si realizzano manualmente con la tastiera o con il mouse; quanto poi al riconoscere *a colpo d'occhio* due oggetti simili (cioè *controllare* se la programmazione al computer si è svolta correttamente), si tratta di un'attività cui il nostro sistema percettivo è allenatissimo.

2) Una volta programmata la costruzione, la variabile indipendente *punto* si può variare arbitrariamente sullo schermo, e la sua traccia dà un'*immagine dinamica* della funzione.

3) La *composizione* di due trasformazioni corrisponde semplicemente alla *successione temporale* dei gesti di programmazione, ciò che rende certi problemi (commutatività e non) assai più significativi.

4) Le similitudini piane sono un importante esempio di *gruppo*.

In conclusione, il tipo di didattica che qui si propone (ma è chiaro che la possibilità di realizzarla in classe dipende da una quantità di fattori assai diversi) dovrebbe chiarire simultaneamente concetti generali di matematica (funzioni e loro composizione), nozioni di algebra (gruppi) e ovviamente di geometria euclidea piana. L'uso del calcolatore, associato all'intuizione geometrica, intende facilitare l'acquisizione dei concetti, ma soprattutto sollecitare l'attività euristica, la formulazione di congetture: lo studente, invece che subire passivamente, dovrebbe essere messo in grado di *suggerire le definizioni e gli enunciati* (ovviamente, non le loro dimostrazioni). La tesi è che l'intuizione visiva - di cui forse si abusa nella vita di tutti i giorni ma che non sempre viene ben sfruttata nella scuola - rende le problematiche più credibili, le risposte più memorizzabili, garantendo un po' di gratificazione anche allo studente che non possiede grandi capacità di astrazione. L'intera attività risulta simile a una ricerca sperimentale sulle leggi della natura, e perciò questa scelta didattica si candida per essere più consona alle capacità e ai gusti di una parte degli studenti e degli insegnanti.

Rimane il pericolo che un'attività promozionale di questo tipo porti via il tempo e l'attenzione dei docenti all'insostituibile funzione didattica di educare al rigore e al ragionamento. Il pericolo è reale. E tuttavia non sembra didatticamente positivo nemmeno descrivere teoremi e applicazioni riguardanti entità nuove, come sono le trasformazioni geometriche per la maggior parte degli studenti secondari, prima che questi concetti e la relativa nomenclatura siano divenuti in qualche modo familiari, occupando un posto ben preciso nell'intuizione dell'allievo. Forse la ricetta giusta è la seguente: piccole dosi (qualche ora di lezione) di questa educazione intuitiva, intervallate da più precise definizioni e da argomentazioni più impegnative.

Questa conversazione non propone un preciso itinerario didattico.

Nei primi paragrafi il calcolatore non compare: si descrivono intuitivamente le varie famiglie di similitudini (§2) suggerendo l'uso delle trasparenze (=lucidi) e del loro movimento; se ne osservano poi gli elementi uniti (§3), che sono utili anche per formulare una più precisa classificazione.

Dal §4 in poi si ricorre al CABRI: le proposte sono suddivise in presentazioni, costruzioni ed esercizi. Le PRESENTAZIONI (§4) hanno lo scopo di esercitare gli studenti a riconoscere intuitivamente certe famiglie di similitudini, scoprirne le principali proprietà e suggerirne formali definizioni ed eventuali simboli. Le COSTRUZIONI (§5) sono una tappa obbligata per l'insegnante che voglia preparare qualunque materiale didattico: esse si possono anche considerare come esercizi supplementari per gli studenti. Gli ESERCIZI (§6) intendono sollecitare le congetture sulle proprietà della composizione, riconducendo tutte le similitudini ai tipi più familiari. Infine il § 7 introduce il linguaggio dei GRUPPI.

Riassumendo: al docente, che non ha bisogno di introduzioni e presentazioni, si suggerisce di incominciare direttamente esercitandosi con il CABRI per realizzare le macrocostruzioni (§5) e poi eventualmente affrontando gli esercizi (§6). Agli studenti, invece, si potrà esporre un'introduzione senza il computer (con considerazioni del tipo dei §2 e 3), poi le presentazioni con il CABRI (§4). In molti casi - quando non c'è molto tempo disponibile - l'esperimento didattico si può anche concludere così.

§ 2. Classificazione e nomenclatura.

Questo paragrafo contiene alcune considerazioni che si possono fare prima di passare al PC, eventualmente utilizzando lucidi (=trasparenze), sovrapponendone più d'uno sulla lavagna luminosa e muovendo l'uno rispetto all'altro.

Per esempio (su due lucidi distinti e sovrapposti) si disegnano due triangoli simili ABC, A'B'C' in colori diversi, siano *nero* e *rosso*: Il primo esercizio consiste allora nell'*individuare* la similitudine P→P' per cui risulta ABC → A'B'C' ; qui *individuare* significa essere in grado, a partire da un qualunque punto nero P, di segnare con il dito la posizione approssimativa del punto rosso P'. La ricerca viene guidata dal fatto che la figura rossa complessiva (cioè i 4 punti rossi, i triangoli che li hanno per vertici ecc.) deve risultare simile a quella nera. Si ripete poi l'esercizio con i lucidi spostati (traslati, ruotati, ribaltati...), in modo che si tratti di una nuova similitudine.

Tutto l'argomento viene poi ripreso (§4) con l'assistenza del PC.

Una definizione esatta di *similitudine* dovrebbe riferirsi al fatto che le rette vengono trasformate in rette, che si conservano gli angoli e i rapporti tra lunghezze ecc., ma qui si è preferito affidare la nozione a quella stessa intuizione visiva che fa riconoscere le *forme* degli oggetti, e alla circostanza che certe famiglie di similitudini - che potremmo chiamare *elementari* - sono interpretabili come effetti di movimenti (traslazione, rotazione, ribaltamento) o di altri fenomeni fisici (riflessione, dilatazione). Il significato di questi nomi, salvo qualche malinteso, è abbastanza noto. Il ruolo di queste trasformazioni particolari, nella classificazione generale, è importante, perché ogni similitudine si può pensare come il prodotto (= il risultato complessivo) di una traslazione, una rotazione, una dilatazione ed eventualmente un ribaltamento.

Supponiamo, per esempio, che due carte geografiche dell'Italia, di scala diversa, siano accidentalmente cadute a terra. Si tratta di due figure simili: si può pensare di trasportare e adattare la prima Italia fino a sovrapporsi alla seconda sottoponendola alle seguenti *trasformazioni* successive:

1) un *ribaltamento* del primo foglio (necessario soltanto nel caso che una delle carte sia caduta a faccia in su e l'altra a faccia in giù: si parla anche di *riflessione* o *simmetria assiale*).

2) una sua *traslazione* (che fa strisciare un foglio sul piano del pavimento, mantenendo la sua orientazione, fino a sovrapporre, per esempio, i due punti che rappresentano nelle due carte la stessa città di Roma).

3) una sua *rotazione* (sul piano del pavimento, attorno a questo punto, che orienti la carta in modo che i due Nord coincidano). La rotazione di un angolo piatto si chiama anche *simmetria puntuale*.

4) una *omotetia* (o *cambiamento di scala*, che, lasciando fisse l'orientamento e la città di Roma, espanda o restringa uniformemente tutto quanto la circonda, fino alla sovrapposizione dei due disegni).

Naturalmente - e lo vedremo subito - ci sono altri modi di decomporre una similitudine: non tutti i passi precedenti sono necessari e la loro successione si può realizzare in ordine diverso. In ogni caso, decomporre una similitudine in una successione (composizione) di similitudini elementari rende più facile lo studio delle sue proprietà.

Anzitutto, in quel prodotto (cioè in quella successione di passi) l'eventuale assenza del ribaltamento caratterizza le similitudini *pari* (o *dirette* o *positive*), le quali conservano anche le *orientazioni* : se per seguire il perimetro di un triangolo si deve *voltare a sinistra*, lo stesso accade per il triangolo trasformato. Le altre similitudini, quelle che richiedono un ribaltamento, si chiamano *dispari* (o *inverse* o *negative*) perché invertono le orientazioni. Le trasformazioni 1), 2), 3) conservano le distanze. Se dunque nel prodotto sopra descritto è assente lo stadio 4), cioè il cambiamento di scala, allora si è in presenza di *isometrie*, o *congruenze*.

§ 3. Elementi uniti.

Anche su questo argomento può valer la pena di incominciare la discussione prima di introdurre il PC, interrompendola dove si riterrà opportuno, eventualmente rinviando il resto alle successive PRESENTAZIONI (§4) con il CABRI.

Un punto di vista utile per la classificazione (e per studiare la composizione delle similitudini) è la ricerca degli eventuali elementi *uniti*, cioè dei punti e delle rette che vengono lasciati invariati (o *fissi*) dalla trasformazione.

Punti uniti delle similitudini pari

Le traslazioni (non banali) non hanno punti uniti (tutti i punti *si spostano* secondo lo stesso vettore). Tutte le altre similitudini pari hanno un unico punto unito, detto il *centro* della similitudine. Il centro O si può individuare a colpo d'occhio osservando che si tratta dell'unico punto che *vede secondo lo stesso angolo (orientato)* tutte le coppie di segmenti corrispondenti. Individuare a occhio il centro di una similitudine diretta richiede una certa abilità, che va utilmente esercitata.

Se esiste un centro, esso assume un ruolo importante nella fattorizzazione della trasformazione, la quale si può sempre pensare come prodotto di una (opportuna) rotazione di centro O con una (opportuna) omotetia che ha lo stesso centro. Inoltre, in questa rappresentazione i due fattori risultano essenzialmente individuati e permutabili (cioè è irrilevante in che ordine si realizzano).

Nell'esempio delle carte geografiche (§2) il punto unito corrisponde alla località che nelle due carte è rappresentata da due punti sovrapposti.

Punti uniti delle similitudini dispari

Anche una similitudine dispari può avere o non avere punti uniti: per la riflessione lungo la retta r sono uniti tutti i punti di r ; per le altre isometrie dispari non ci sono punti uniti. Tutte le similitudini dispari che non siano isometrie hanno un centro O, unico punto unito. Il centro *vede secondo angoli opposti* tutte le coppie di segmenti corrispondenti. Riconoscere a colpo d'occhio il centro di una similitudine dispari è normalmente abbastanza difficile.

Anche in questo caso, se c'è un centro, esiste una particolare fattorizzazione che presenta dei vantaggi: ogni trasformazione si ottiene componendo una riflessione rispetto a un'opportuna retta con un'omotetia che ha il centro opportunamente scelto su quella retta (non occorrono dunque la traslazione né la rotazione). Anche qui i fattori risultano essenzialmente individuati e permutabili.

Rette unite delle similitudini pari

Per le traslazioni sono unite tutte le rette parallele alla direzione della traslazione. Per le omotetie (e dunque, in particolare, per le simmetrie puntuali) sono unite tutte le rette che passano per il centro. Per le rotazioni (che non siano banali o di mezzo giro) non ci sono rette unite.

Rette unite delle similitudini dispari

Nelle simmetrie assiali sono unite, oltre all'asse, tutte le rette ad esso ortogonali. Le altre similitudini dispari possiedono una o due rette unite: se c'è il centro (non isometrie), si tratta dell'asse di riflessione che abbiamo descritto nella fattorizzazione permutabile e della retta ad esso ortogonale passante per il centro (come bisettrici di uno stesso angolo, i ruoli di queste due rette sono interscambiabili). In assenza di centro, cioè per le isometrie dispari, c'è un'unica retta unita, che si localizza abbastanza facilmente a colpo d'occhio: la sua costruzione effettiva è peraltro - come si vedrà - sorprendentemente semplice. Una volta individuata questa retta, l'isometria si fattorizza nel prodotto della simmetria che ha per asse quella retta con una traslazione ad essa parallela. Con queste condizioni i due fattori sono individuati e permutabili. Questo spiega il nome (un po' superfluo) di *glissosimmetria* che si attribuisce alle isometrie dispari.

Le similitudini che conservano le *direzioni* delle rette (cioè trasformano ogni retta in una retta parallela) sono dunque le omotetie e le traslazioni, che, complessivamente, si chiamano talvolta *dilatazioni*.

In particolare, le isometrie che conservano le *direzioni* delle rette sono le traslazioni e le simmetrie puntuali, che, complessivamente, qualcuno chiama *isometrie direzionali*.

Naturalmente, molte delle distinzioni tra i casi precedenti verrebbero unificate se si introducessero i punti (e la retta) all'infinito.

§ 4. Presentazioni con il CABRI. Simbologia.

Ci proponiamo di illustrare al calcolatore i tipi più familiari di similitudini utilizzando **macrocostruzioni** del CABRI. Con l'eccezione delle simmetrie (che nel CABRI sono già disponibili) esse si dovranno preparare anticipatamente, per es. come nel § 5.

L'introduzione dei simboli si può fare progressivamente, a mano a mano che si illustrano le varie famiglie. Ma i simboli (quelli che adotteremo in questo paragrafo o altri analoghi) serviranno soltanto a chi si occuperà di composizioni (§6).

Ecco, per esempio, come si potrebbero presentare le *simmetrie assiali*. Indicheremo con il **grassetto** i comandi già disponibili nel CABRI per le varie

creazioni (di punti, segmenti, rette ecc.) e costruzioni.

Si incomincia disegnando un **punto** P, una **retta** r (per due punti A,B), e costruendo P' come **simmetrico** di P rispetto a r . Muovendo sul piano il punto P con il mouse ci si fa un'idea della trasformazione, pensata come funzione P→ P' del piano in sé. Dopo qualche minuto si potrà chiedere agli studenti di osservare alcune proprietà evidenti, per esempio: P e P' stanno su semipiani opposti rispetto a r, il **segmento** PP' è perpendicolare ad r , P e P' hanno la stessa distanza da r, P e P' sono interscambiabili, ecc. Poi si potrà disegnare un **triangolo** PQR, sottoporre anche gli altri vertici alla **riflessione** rispetto a r , disegnare il nuovo **triangolo** P'Q'R' e soffermarsi a scoprire altre conservazioni (angoli, lunghezze ecc.). Variando il triangolo (i suoi vertici) si vedrà meglio *come agisce la singola trasformazione*; mentre **muovendo** la retta r (cioè i punti A,B) si avrà un'idea complessiva della *famiglia delle riflessioni*. Solo a questo punto si formulerà una definizione formale di simmetria assiale e - volendo - si introdurrà il simbolo σ_r ecc. La ricerca sperimentale dei punti uniti è particolarmente facile con il CABRI: si muove P controllando in corrispondenza i movimenti di P', finché P e P' si vedono sovrapporsi. Analogamente si può cercare una retta per due punti P,Q che si sovrapponga alla retta passante per i corrispondenti punti P', Q'.

ISOMETRIE PARI

(1) τ_{AB} indicherà la *traslazione* del segmento (orientato) AB.

Introdotta la macrocostruzione corrispondente (§5, costr.3), si faranno notare le proprietà: non ci sono punti uniti, si conservano le distanze, le direzioni, gli angoli orientati ecc.

(2) $\rho_{O,\theta}$ indicherà la *rotazione* dell'angolo (orientato) θ attorno a O. Il punto O si dice il *centro* della rotazione.

Si possono usare le costr. 4 e 6 del §5 : si osserva che O è l'unico punto unito (se $\theta \neq 0$), che P e P' hanno la stessa distanza da O, ecc.

Se l'angolo θ ha vertice in O e lati OA e risp. OB, scriveremo

$$\theta = [A\underline{O}B] \quad e \quad \rho_{O,\theta} = \rho\,[A,\underline{O},B].$$

Ogni isometria pari è una traslazione oppure una rotazione.

La generica isometria pari è il prodotto di due simmetrie assiali, cfr. la costr. 6 del § 5.

I punti fissi le contraddistinguono: nelle traslazioni non ci sono, nelle rotazioni ce n'è uno solo.

Per la rotazione di mezzo giro ($\theta = \pi$) si scrive anche

(3) ρ_O $(=\rho_{O,\pi})$ che si chiama anche *simmetria puntuale* rispetto a O.

E' una macrocostruzione già disponibile: si nota che O è punto medio tra un punto e il suo trasformato, si conservano le direzioni ecc. Si può anche usare la costr. 2 del §5.

ISOMETRIE DISPARI

(4) σ_r indicherà la *simmetria assiale* rispetto alla retta r , ovvero *riflessione* sulla retta r, detta *asse* della simmetria.

L'abbiamo illustrata all'inizio del paragrafo. Si può continuare osservando che: r è luogo dei punti uniti, gli angoli cambiano segno ecc. Si può anche introdurre la costr. 1 del §5.

Per le altre isometrie dispari non si usa un simbolo apposito.
La generica isometria dispari si ottiene componendo tre simmetrie assiali (cfr. la costr.7 del §5). Si osserva: non esistono punti uniti, esiste una retta unita, ecc.

Ogni isometria dispari è una riflessione oppure è il prodotto

$\sigma_r \cdot \tau_{AB} = \tau_{AB} \cdot \sigma_r$ con AB ed r paralleli (*glissosimmetria*),
cioè il prodotto (permutabile) di una simmetria assiale con una traslazione (non banale: A≠B) *nella direzione dell'asse*.
La ricerca della retta unita r può essere facilitata ordinando al calcolatore di fare la **misura** del **segmento** PP' e cercandone poi un *minimo* al variare di P. Quando la misura è minima, P e P' appartengono alla retta unita (vedi anche l'es.9 del §6).

OMOTETIE

(5) $\eta_{O,m}$ indicherà l'*omotetia* di *centro* O e *rapporto* m≠0.

Si tratta della funzione η: P→ P' definita dalla relazione (tra segmenti orientati) OP'= m· OP. m si chiama anche *fattore di scala*.
Si possono usare le costr. 8 e 9 del §5 : si osserva che si conservano le direzioni, gli angoli orientati, che le lunghezze si alterano secondo il fattore m ecc.
Il caso m = -1 coincide con la rotazione di un angolo piatto: $\eta_{O,-1} = \rho_O$.
Con il termine *dilatazioni* si comprendono le traslazioni e le omotetie.

SIMILITUDINI: riduzione alle famiglie precedenti.
Per disporre della più generale similitudine si possono usare le costr.12 e 13 del § 5. Tra le possibili ricerche sperimentali, la più interessante è quella del punto unito O. In alternativa al solito procedimento (sovrapponendo P e P') si può cercare O in modo che risultino simili i triangoli OAB, OA'B' (cfr. il § 3). Infine - anche per controllo - si possono utilizzare le costr. 10 e 11 del §5.

Ogni *similitudine* è un'isometria oppure il prodotto di un'isometria per un'omotetia (non banale: m≠ ±1).
Se la similitudine è diretta, lo è anche quell'isometria.

Una similitudine che non sia un'isometria ha sempre un unico punto fisso: il centro O . In tal caso, la similitudine si può esprimere

i) se è pari, nella forma $\rho_{O,\theta} \cdot \eta_{O,m} = \eta_{O,m} \cdot \rho_{O,\theta}$
prodotto di una rotazione di centro O per un'omotetia che ha centro O.
Una volta individuato il centro O, si sceglie θ = [POP']; si può scegliere anche θ = [POP'] + π , e allora nell'omotetia cambia il segno del fattore di scala m.

ii) se è dispari, nella forma $\sigma_r \cdot \eta_{O,m} = \eta_{O,m} \cdot \sigma_r$
prodotto di una riflessione su r per un'omotetia che ha il centro O su r.
Una volta individuato il centro O, r è bisettrice (una delle due) di ogni angolo [POP'] . Poi si individua facilmente l'omotetia, anche qui a meno del segno per m.

§ 5. Costruzioni con il CABRI.

Costruire una similitudine qui significa programmare una successione di comandi CABRI che la producono, partendo con quelli già disponibili. Una tale successione di comandi si chiama talvolta **macrocostruzione** e si può fissare una volta per tutte nella memoria del PC, attribuendole un nome (per es. **traslazione** AB), affinché sia pronta per l'uso. Nell'elenco che segue le prime macrocostruzioni si realizzano facilmente, le ultime sono più complesse. In ogni caso esistono procedure diverse per produrre la stessa trasformazione: saper inventare ed eseguire le costruzioni significa essere in grado di preparare un efficace materiale didattico sulle similitudini, adattandolo alle singole esigenze. E nel preparare il materiale l'insegnante ha probabilmente l'occasione di imparare nuove nozioni di geometria.

ISOMETRIE

1) Assegnati i punti A, A', costruire la simmetria assiale σ_r : P→ P' tale che A→ A'.
Costruito l'**asse** r del segmento AA', P' è il **simmetrico** di P rispetto alla retta r.

2) Assegnati i punti A, A', costruire la simmetria puntuale ρ_O : P→ P' tale che A→ A'.
Costruito il **punto medio** O tra A e A', P' è il **simmetrico** di P rispetto al punto O.

3) Assegnati due punti A, B, costruire la traslazione τ_{AB} : P→ P'.
Accingendosi per la prima volta a programmare la traslazione, si sarà portati a predisporre i seguenti passi: **segmento** AB, **punto** P, **retta** r per A e P, **parallela** s per B a r, **parallela** t per P a AB, **intersezione** P' di t con s, salvo poi rendere **invisibili** le rette ausiliarie. Ma è molto più rapido il procedimento seguente: **segmento** AB, **punto** P, **punto medio** M tra B e P, **simmetrico** P' di A rispetto a M.

4) Assegnato un angolo [AOB] costruire la rotazione $\rho_{O,[AOB]}$: P→ P'.
Retta per OA; **bisettrice** c di [AOB] ; **punto** P; **simmetrico** P_a di P rispetto ad a ; **simmetrico** di P_a rispetto a c.

5) Assegnati due segmenti congruenti e paralleli AB, A'B', costruire la traslazione τ: P→ P' tale che AB → A'B'.
E' ovviamente la traslazione $\tau_{AA'} = \tau_{BB'}$.

6) Assegnati due segmenti congruenti e non paralleli AB, A'B', costruire la rotazione ρ: P→ P' tale che: AB → A'B'.
Asse r di AA', **asse** s di BB' , **intersezione** O di r con s, poi rotazione intorno a O

dell'angolo [A$\underline{O}$A'] come in 4). Più rapidamente: **asse** r di AA', **simmetrico** B_r di B rispetto ad r ; **bisettrice** t di [$B_a\underline{A}$'B'], e poi si compongono le **simmetrie** assiali rispetto a r e a t.

7) Assegnati due segmenti congruenti AB, A'B', costruire la congruenza dispari α: P$\to$ P' tale che : AB $\to$ A'B'.
Tutto come in 6), salvo aggiungere alla fine la **simmetria** rispetto alla retta A'B'. Così da 6) e 7) si vede anche che ogni congruenza è prodotto di al più tre simmetrie assiali.

SIMILITUDINI (non isometriche)

8) Assegnati tre punti allineati O, A, A' costruire l'omotetia di centro O η_O : P$\to$ P' tale che A $\to$ A'.
Retta r per OA, **punto** A' **sulla retta** r, **retta** p per O e P, **segmento** AP, retta q **parallela** a AP per A', **intersezione** P' di p e q.

9) Assegnati due segmenti paralleli e non congruenti AB, A'B', costruire l'omotetia η: P$\to$ P' tale che AB $\to$ A'B'.
Retta a per A,A', **retta b** per B, B', **intersezione** O di a con b; poi si usa 8).
Si noti che la costruzione del centro O fallisce se AB, A'B' appartengono alla stessa retta. Più rapidamente, senza costruire il centro O : **triangolo** ABP e **segmento** A'B' (come sopra), retta a **parallela** ad AP per A', retta b **parallela** a BP per B'; **intersezione** P' di a e b.

10) Assegnati due segmenti AB, A'B' non congruenti, costruire il centro O della similitudine pari tale che AB $\to$ A'B'.
Retta a per A,A', **retta** b per B, B', **intersezione** K di a e b, **triangoli** ABK e A'B'K, **circoli circoscritti** a quei triangoli, (ulteriore) **intersezione** O dei due circoli.

11) Assegnati due segmenti AB, A'B' non congruenti, costruire il centro della similitudine dispari tale che AB $\to$ A'B'.
La costruzione che segue serve anche per la similitudine pari (ma la precedente è più rapida). Con il comando **quadrato** si costruiscono due quadrati ACBD , A'C'B'D' di cui i **segmenti** AB e A'B' siano le diagonali. Si sceglie la parità della similitudine α assegnando le immagini degli altri due vertici α : C$\to$ C', D$\to$D' (cioè scegliendo i **nomi** nei due modi possibili). Se α è pari e AB , A'B' sono paralleli, α è un'omotetia; allora il centro è l'**intersezione** di **rette**: O = AA'$\cap$BB' (oppure O = CC'$\cap$DD', se AB, A'B' appartengono alla stessa retta, vedi costr. 9)). Se AB e A'B' non sono paralleli, si costruiscono i punti **intersezione** di **rette** U = AC$\cap$A'C', V = CB$\cap$C'B', W = BD$\cap$B'D', Z = DA$\cap$D'A', O = UW$\cap$VZ . Allora O è il centro.

12) Assegnati due segmenti AB, A'B' non congruenti, costruire la similitudine pari α : P$\to$ P' tale che AB$\to$ A'B'.
Ci sono molti modi di procedere. Si può costruire il centro come in 10), poi comporre una rotazione e un'omotetia. Alternativamente, si costruisce il **triangolo** ABP, poi si fa ruotare A' attorno a B' dell'angolo [A$\underline{B}$P] (costr. 4) per trovare A", ruotare B' attorno a A' dell'angolo [B$\underline{A}$P] per trovare B" e l'**intersezione di rette** dà P'= A'B" $\cap$ A"B'.

13) Assegnati due segmenti AB, A'B' non congruenti, costruire la similitudine dispari α : P$\to$ P' tale che AB$\to$ A'B'.
Si può costruire il centro come in 11), poi comporre tre riflessioni con un'omotetia. Alternativamente, si costruisce il **triangolo** ABP, poi si fa ruotare A' attorno a B' dell'angolo [P$\underline{B}$A] (costr. 4) per trovare A", ruotare B' attorno a A' dell'angolo [P$\underline{A}$B] per trovare B" e l'**intersezione di rette** dà P'= A'B"$\cap$A"B'.

§ 6. Esercizi sui prodotti con il CABRI.

In questi esercizi due similitudini appartenenti alle famiglie studiate vengono composte applicando due **macrocostruzioni** CABRI, l'una dopo l'altra. Guardando l'effetto si cerca anzitutto di riconoscere la famiglia di similitudini cui appartiene il prodotto. Per esempio, alla domanda: *che cos'è il prodotto di due traslazioni?* lo studente dovrebbe dare la risposta qualitativa: un'altra traslazione. La domanda successiva può essere: se conosco le due traslazioni componenti, *qual'è* la traslazione prodotto? Lo studente dovrebbe a questo punto intuire anche precise relazioni geometriche e introdurre, per es. il parallelogramma.

Nel testo abbiamo inserito tra parentesi quadre, dopo ogni domanda, una risposta qualitativa. Altre precisazioni sono lasciate al lettore come esercizi (non sempre facili).

Attenzione! Diversamente dalla maggior parte dei testi, se α : P $\to$ P', β : P' $\to$ P" sono similitudini, la funzione composta P$\to$ P" si indicherà con $\alpha\cdot\beta$ o semplicemente $\alpha\beta$. Si rispetta cioè l'ordine di scrittura (prima agisce α, poi β). Se risulta $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$, i due fattori α, β si dicono *permutabili*.

Alcune proprietà di composizione delle similitudini sono facilmente intuibili e per discuterle può convenire la trattazione più tradizionale, senza ricorrere al CABRI. Per esempio:

$$\tau_{AA} = \rho_{B,0} = \eta_{C,1} = \iota \,;\; \eta_{C,-1} = \rho_C \,;\; (\tau_{AB})^{-1} = \tau_{BA} \,;$$
$$(\rho_O)^{-1} = \rho_O;\; (\rho_{O,\theta})^{-1} = \rho_{O,-\theta} \,;\; (\sigma_r)^{-1} = \sigma_r \,;\; (\eta_{O,m})^{-1} = \eta_{O,m^{-1}} \,;$$
$$\tau_{AB} \cdot \tau_{BC} = \tau_{AC} \,;\; \tau_{AB} \cdot \tau_{CD} = \tau_{CD} \cdot \tau_{AB} \,;$$
$$\rho_{O,\theta} \cdot \rho_{O,\phi} = \rho_{O,\theta+\phi} = \rho_{O,\phi} \cdot \rho_{O,\theta} \,;\; \eta_{O,m} \cdot \eta_{O,n} = \eta_{O,mn} \,.$$

Elenchiamo altre proprietà la cui scoperta può essere facilitata dal CABRI.

ISOMETRIE

1) Che cos'è il prodotto di due simmetrie puntuali ? [E' una traslazione].
Si creano 3 **punti** e gli si dà **nome** A, B, P . Si creano poi il punto P_A, **simmetrico** del punto P risp. a A e il punto P' **simmetrico** del punto P_A risp. a B. Si sposta P e si guarda come si muove P'. Si scopre allora (= si congettura) che il segmento PP' resta sempre parallelo e di eguale lunghezza. Sulla scorta delle precedenti illustrazioni, si interpreta la congettura dicendo che P $\rightarrow$ P' *è una traslazione.*
Se poi si osserva che il vettore PP' è doppio di AB, si precisa la congettura: $\rho_A\rho_B = \tau_{2AB}$.

2) Che cosa succede se si scambiano i fattori? [Si ottiene la traslazione opposta]. Due simmetrie puntuali sono permutabili ? [Se e solo se A=B].

3) Che cos'è il prodotto di tre simmetrie puntuali? [E' una simmetria puntuale].
Si osserva che $\rho_A\rho_B\rho_C = \rho_D$ dove D Ë il quarto vertice nel parallelogramma ABCD.

4) Che cos'è il prodotto di una simmetria puntuale e una traslazione? [E' una simmetria puntuale].
Una volta costruito il punto P', immagine di P secondo $\rho_A\tau_{BC}$, conviene anzitutto cercare se c'è un punto unito O . Trovata la posizione approssimativa di O, salterà all'occhio che O è sempre il punto medio tra P e P' e dunque...

5) Che cosa succede se nel prodotto di tre simmetrie puntuali si scambiano il primo e il terzo fattore? [Il risultato non cambia]
Si noti che se ne può derivare (con l'associatività!) la permutabilità di due traslazioni:

$$\tau_{2AB} \cdot \tau_{2CD} = \rho_A \cdot \rho_B \cdot \rho_C \cdot \rho_D = \rho_C \cdot \rho_B \cdot \rho_A \cdot \rho_D = \rho_C \cdot \rho_D \cdot \rho_A \cdot \rho_B = \tau_{2CD} \cdot \tau_{2AB}$$

6) Che cos'è il prodotto di due simmetrie assiali? [Se i due assi r, s si incontrano, è una rotazione. Se invece gli assi sono paralleli, è una traslazione].
Anche qui converrà individuare per tentativi - se esiste - un punto unito O come nell'es.4, poi disegnare i segmenti OP, OP' per evidenziare la costanza dell'angolo [POP'] e l'uguaglianza delle lunghezze |OP|=|OP'|. Allora si congetturerà la presenza di una rotazione ecc. Se invece il punto unito non c'è, si evidenzia la traslazione. Come si è già visto, i risultati di questo esercizio sono tra i più utili e più noti di tutto il capitolo delle isometrie.

7) Che cosa succede se si scambia l'ordine dei fattori? [Si ottiene la rotazione (o risp. la traslazione) opposta]. Sono permutabili due riflessioni? [se e solo se r, s sono parallele oppure perpendicolari].

8) Che cos'è il prodotto di una rotazione per una traslazione? [E' una rotazione

(dello stesso angolo)].
Anche qui si cerca il punto unito O. Ma la sua caratterizzazione geometrica si congettura con una certa difficoltà: se $\rho_{O,\,2\,[ba]}$: C $\rightarrow$ D allora ABOC è un parallelogramma.

9) Che cos'è (o meglio: come si può fattorizzare altrimenti) il prodotto di tre simmetrie assiali? [E' il prodotto (permutabile) di una simmetria assiale per una traslazione parallela all'asse di simmetria (= glissosimmetria), cfr. §4].
La congettura corretta - per via sperimentale - non è ovvia. Visto che (in generale) la ricerca del punto unito dà esito negativo, viene spontaneo cercare di rendere minima - per tentativi - la distanza |PP'|. Se si sa che deve risultare un prodotto di una simmetria assiale per una traslazione parallela, si capisce che un segmento PP' che realizza quel minimo appartiene all'asse di simmetria. E' più interessante osservare che tutti i punti medi di punti corrispondenti (cioè tra P e P') sono allineati su una retta unita, che è appunto l'asse della simmetria cercata. Poi è facile definire la traslazione.

10) Che cos'è il prodotto di due rotazioni (ovvero di 4 simmetrie assiali)? [E' una rotazione]. Come sono correlati i centri delle 3 rotazioni? Sono permutabili due rotazioni?

11) Che cos'è il quadrato del prodotto di tre simmetrie assiali? [E' una traslazione].

12) Che cos'è il quadrato del prodotto di una simmetria assiale e una puntuale? [E' una traslazione]. Quando sono permutabili? [Se e solo se B appartiene ad a].

OMOTETIE

13) Che cos'è il prodotto di due omotetie? [E' una traslazione (se i due fattori di scala sono l'uno inverso dell'altro) oppure un'omotetia]. Se il prodotto è un'omotetia, che cosa si può dire dei tre centri ? [Sono allineati e ....].

14) Che cos'è il prodotto di un'omotetia per una traslazione? [E' un'omotetia].

§ 7. Gruppo delle similitudini e suoi sottogruppi.

Le similitudini sono particolari funzioni P$\rightarrow$ P' dell'insieme dei punti del piano in sé. Le loro proprietà caratteristiche sono le seguenti:

1) Le similitudini sono corrispondenze biunivoche.

2) Se A,B,C sono allineati, anche A', B', C' sono allineati (quindi le similitudini trasformano rette in rette).

3) Le similitudini conservano i rapporti tra lunghezze:

$$|AB|/|CD| = |A'B'|/|C'D'|.$$

4) Le similitudini pari conservano gli angoli orientati: $[A\underline{B}C] = [A'\underline{B}'C']$
5) Quelle dispari li cambiano di segno: $[A\underline{B}C] = -[A'\underline{B}'C']$.

Le prossime proprietà sono facili conseguenze:
6) L'identità è una similitudine.
7) L'inversa di una similitudine è una similitudine.
8) Il prodotto di due similitudini è una similitudine.

Le proprietà 6),7),8) (assieme all'associatività del prodotto) si riassumono dicendo:
Le similitudini, rispetto alla composizione, costituiscono un gruppo.

Un sottoinsieme (non vuoto) $\mathcal{R}$ di un gruppo $\mathcal{S}$ si chiama *sottogruppo* di $\mathcal{S}$ se l'inverso di un elemento di $\mathcal{R}$ e il prodotto di due elementi di $\mathcal{R}$ appartengono a $\mathcal{R}$.
In tal caso si scrive $\mathcal{R} \leq \mathcal{S}$.
Un sottogruppo $\mathcal{T}$ di un sottogruppo $\mathcal{R}$ di $\mathcal{S}$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}$.
L'intersezione di due sottogruppi di $\mathcal{S}$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}$.
L'insieme complementare o *differenza* $\mathcal{S}\setminus\mathcal{R}$ non è un sottogruppo di $\mathcal{S}$.

Alcune proprietà dei prodotti, studiate nel §6, si interpretano allora nel modo seguente:

Sono sottogruppi del gruppo delle similitudini:	Sim
Le traslazioni	Tra
Le simmetrie puntuali e le traslazioni (congruenze direzionali)	Dir
Le isometrie pari	Iso^+
Le isometrie	Iso
Le omotetie e le traslazioni	Dil
Le similitudini pari	Sim^+

$$\mathit{Tra} \leq \mathit{Dir} \leq \mathit{Iso}^+ \leq \mathit{Iso} \leq \mathit{Sim}; \quad \mathit{Tra} \leq \mathit{Dir} \leq \mathit{Dil} \leq \mathit{Sim}^+ \leq \mathit{Sim}.$$
$$\mathit{Sim}^+ \cap \mathit{Iso} = \mathit{Iso}^+ \qquad \mathit{Iso} \cap \mathit{Dil} = \mathit{Iso}^+ \cap \mathit{Dil} = \mathit{Dir}$$

Non sono sottogruppi:	
Le simmetrie puntuali	$\mathit{Dir} \setminus \mathit{Tra}$
Le omotetie ($\neq$identità)	$\mathit{Dil} \setminus \mathit{Tra}$
Le rotazioni ($\neq$identità)	$\mathit{Iso}^+ \setminus \mathit{Tra}$
Le glissosimmetrie	$\mathit{Iso} \setminus \mathit{Iso}^+$
Le similitudini dispari	$\mathit{Sim} \setminus \mathit{Sim}^+$

Bibliografia

H S. M. Coxeter: *Introduction to geometry*, J.Wiley & Sons (capitoli 3 e 5)

Cabri-géomètre ou un nouveau rapport à la géométrie

*Colette Laborde**

I - Les rapports entre dessin et objet géométrique

La géométrie enseignée traite d'objets théoriques mais met aussi en jeu des représentations graphiques dont le rôle dans l'apprentissage de la géométrie n'est plus à souligner.

I.1 - La figure en tant que rapport entre dessin et objet géométrique

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié, pour ce sujet, de la figure géométrique associée. Ce signifié correspond à ce que Fishbein (1993) appelle *figural concept*.

Les rapports entre dessin et objet géométrique peuvent être grossièrement caractérisés par le fait que des propriétés de l'objet géométrique se traduisent graphiquement par des relations spatiales. Par exemple, une trait rectiligne qui touche un tracé circulaire peut être interprété dans une théorie géométrique comme une droite tangente à un cercle.
Il importe cependant de souligner la complexité des rapports entre dessin et objet géométrique; en effet le passage du dessin à l'objet géométrique est l'objet d'une interprétation par un sujet humain. Il s'ensuit que :
(i) d'une part, un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprété par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique,

---

* COAST, CNRS, Lyon et IMAG-LSD2 CNRS, Université Joseph Fourier, Grenoble.

(ii) d'autre part les interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique sont multiples pour deux raisons : la première tient à ce que les interprétations dépendent du lecteur et de ses connaissances ainsi que du contexte, la deuxième tient à la nature même du dessin ; à lui seul il ne peut caractériser un objet géométrique.
Précisons ces affirmations qui servent de points de départ à notre cadre théorique.

Un dessin renvoie aux objets théoriques de la géométrie dans la mesure où celui qui le lit décide de le faire, l'interprétation est évidemment dépendante de la théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur. Le contexte joue un rôle fondamental dans le choix du type d'interprétation.

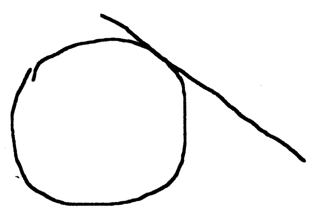


Fig. 1

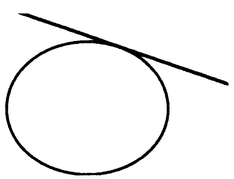


Fig. 2

La figure 1 peut ainsi être interprétée comme le dessin d'unepomme à laquelle reste attaché un bout de tige. Dans un contxte de mathématiques, un mathématicien y reconnaîtra sans nul doute un cercle. Mais il sera plus réticent pour le faire pour le dessin de droite (Fig.2) alors que l'ensemble des marques d'encre sur le papier du dessin de droite est probablement une meilleure approximation aux moindres carrés d'un cercle.

Ce comportement trouve une explication si l'on prend en compte le choix du type d'interprétation du lecteur. Le mathématicien dans son contexte de travail considère ces dessins dans une interprétation totalement géométrique et parce que dans cette interprétation, les dessins doivent renvoyer à des objets établis de la théorie, tenant compte du tracé à main levée, il cherchera à voir un cercle dans le premier, tandis qu'il hésitera entre une ellipse et un cercle dans le second, compte tenu de l'exactitude apparente du tracé.

Un dessin même géométrique peut être interprété de multiples façons et en particulier la perception intervient dans la construction d'une interprétation lorsque le lecteur ne dispose pas de fortes connaissances théoriques géométriques

qui lui permettent de dépasser la première lecture perceptive. On a pu ainsi montrer que les aspects perceptifs (Duval, 1988, Mesquita, 1989, Padilla, 1990) du dessin peuvent gêner ou au contraire favoriser la lecture géométrique par des élèves de collège, en attirant l'attention sur des éléments du dessin non pertinents pour cette lecture. La configuration de Thalès n'est ainsi pas reconnue avec le même degré de facilité par des élèves de troisième dans les deux dessins ci-dessous (Fig. 3) (Cordier & Cordier, 1991).

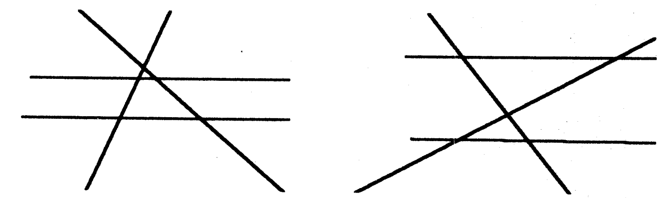


Fig.3

Des dessins prototypiques d'objets géométriques (Noirfalise, 1991) se sont constitués au fil du temps, résultant d'influences à la fois perceptives et culturelles (au sens large et scolaire). Certains sont bien connus (carré/losange), d'autres moins comme celui du parallélogramme : le dessin prototypique d'un parallélogramme est, du moins en France, celui où la diagonale AC est perpendiculaire au côté AD (Fig.4) ; nous avons justement débusqué ce cas de typicalité en utilisant Cabri-géomètre. Mariotti (1993) a montré comment des images mentales standard d'objets solides interagissent avec ce que le sujet visualise et donnent lieu à une image mentale résultante d' un objet inconsistant.

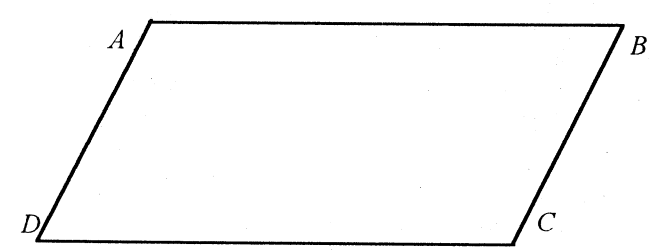


Fig.4

En tant que signifiant d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un *domaine de fonctionnement* au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin). Ainsi un dessin ne rend-il pas compte du domaine de variation des éléments de l'objet géométrique. A partir d'un dessin,

il est impossible d'inférer si un point d'un segment appartient au seul segment ou à la droite support du segment, si deux cercles sécants le sont par hypothèse ou peuvent être dans une position relative quelconque. Une *description discursive caractérisant l'objet géométrique est nécessaire* pour lever les ambiguïtés inhérentes au dessin (Duval 1988, Parzysz 1988).
Inversement toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet, au dessin est attaché un *domaine d'interprétation*. La position du dessin dans la feuille de papier par exemple est en dehors du domaine d'interprétation des dessins en tant que signifiants d'objets de la géométrie euclidienne. Certains des problèmes rencontrés par des élèves tiennent justement à ce qu'ils fonctionnent avec un domaine d'interprétation différent de celui de la géométrie euclidienne.

I.2 - Les rapports entre dessin et objet géométrique dans l'enseignement de la géométrie

L'enseignement de la géométrie ignore les rapports entre objet géométrique et dessin en passant sous silence la distinction entre les deux, ou en faisant comme si un lien naturel les unissait. Nous voudrions reprendre la thèse défendue par Berthelot et Salin (1992) et le cadre théorique afférent développé à propos des rapports entre connaissances spatiales et connaissances géométriques : l'écrasement des connaissances spatiales au profit des connaissances géométriques aboutit à ce que la géométrie enseignée s'appuie sans contrôle sur un rapport privilégié à l'espace réservé au traitement de petits objets ou de tracés tenant sur une feuille de papier, sur l'évidence perceptive: "on voit bien que..." (Bessot, 1993).
Nous interprétons l'ignorance par l'enseignement des rapports entre dessin et objet géométrique en liaison avec cet écrasement. L'enseignement néglige la possibilité d'une lecture spatiale du dessin et ne considère que la seule lecture géométrique du dessin, il méconnaît l'existence du domaine d'interprétation d'un dessin : l'évidence perceptive y est naturellement et immédiatement interprétée en termes géométriques. Il faut dire que le langage facilite cette confusion spatial géométrique, souvent le même terme désigne la propriété spatiale et celle géométrique qui lui est attachée. De par cette indifférenciation, l'enseignement méconnaît la spécificité des rapports entre dessin et géométrique et ne les prend pas pour objet d'apprentissage.

On pourrait décrire brièvement ces rapports en disant que d'une part la géométrie peut être considérée comme le résultat d'une modélisation du dessin, et qu'ainsi elle peut servir d'instrument de production et de contrôle du dessin, ou même de prédiction. Mais inversement, le dessin en géométrie peut être considéré comme

modèle de l'objet géométrique (Laborde, 1992), en cela il offre un lieu d'expérimentation graphique (Chevallard, 1990). Parce que l'enseignement ignore les rapports entre dessin et objet géométrique, ce caractère d'expérimentation n'est pour ainsi dire pas perçu par les élèves et encore moins utilisé (ajouter à un dessin des éléments non mentionnés par l'énoncé ou l'enseignant ne relève pas de décisions prises spontanément par les élèves mais nécessite un apprentissage). En tant que modèle de la géométrie, le dessin se prête à des expérimentations rendant compte de questions posées à la théorie, traduites ensuite dans le dessin dont la réponse dans le dessin ne donne pas une réponse dans la théorie mais fournit des suppositions, des pistes pour le travail théorique. On peut ainsi tracer un grand nombre de triangles et remarquer l'inclination au concours de ses hauteurs.

Ces rapports sont subtils et cela signifie que pour que les élèves en prennent conscience, il faudrait développer dans l'enseignement des situations problème
- portant sur les dessins dans lesquelles la géométrie est un outil efficace de modélisation et de solution, par exemple dans lesquelles elle permet de produire de dessins satisfaisant à des contraintes données, de façon moins coûteuse que le tâtonnement contrôlé par la perception et elle garantit la correction du résultat : par exemple, la géométrie assure du caractère tangent d'une droite à un cercle lorsque celle ci est perpendiculaire au rayon.
- des situations en géométrie, où le recours et l'expérimentation sur le dessin évitent de se fourvoyer dans des solutions théoriques trop longues.

C'est dans cet esprit qu'ont été développés depuis quelques années des environnements informatisés offrant un système de représentation d'objets géométriques par des dessins à l'écran de l'ordinateur qui peuvent être produits par l'intermédiaire de commandes données dans un langage géométrique. Ces objets à l'écran présentent un domaine de fonctionnement plus étendu que les dessins en papier crayon et permettent de disqualifier certaines interprétations illicites. Cabri-géomètre est l'un d'eux. Il est présenté dans le paragraphe suivant.

II - Caractéristiques de l'environnement Cabri-géomètre

Deux caractéristiques importantes de cet environnement informatique (pour une description de l'environnement cf. Bellemain & Capponi 1992 et Laborde & Straesser 1990) résident dans la coexistence de *primitives de dessin pur* et de *primitives géométriques* et dans la manipulation directe du dessin. Si l'on déplace à l'aide de la souris un des éléments de base du dessin, celui-ci se déforme en respectant les propriétés géométriques qui ont servi à son tracé et celles qui en découlent ; par suite si un dessin a été réalisé à l'aide de primitives de dessin pur c'est-à-dire au jugé, il perd ses propriétés spatiales apparentes dans son état original lors du déplacement d'un de ses éléments. La figure 5 présente un parallélogramme obtenu par le tracé de 4 segments posés au jugé sur l'écran (les sommets sont des points de base) à l'état original à gauche, puis après déplacement de A à droite.

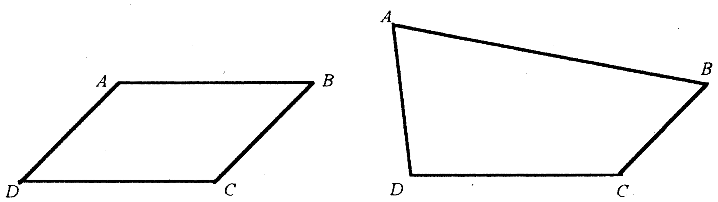


Fig. 5

Le tracé à l'écran d'un dessin attaché à un objet géométrique doit garder au cours du déplacement ses propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques de cet objet, il nécessite donc d'être produit par les primitives géométriques (telles milieu, médiatrice, droite parallèle, droite perpendiculaire etc.). L'exigence de communiquer au logiciel un procédé géométrique de construction permet ainsi de caractériser l'objet géométrique (on retrouve la nécessité que nous avons mentionnée plus haut de la description discursive de l'objet géométrique pour sa caractérisation).

Dans le tracé à l'écran du dessin d'un objet géométrique, c'est donc l'interaction entre les deux caractéristiques du logiciel qui entraîne le recours aux primitives géométriques, comme l'indique le schéma ci-dessous (Fig.6). Le logiciel a été conçu avec l'idée que ce passage par des primitives géométriques devrait favoriser l'usage de connaissances géométriques.

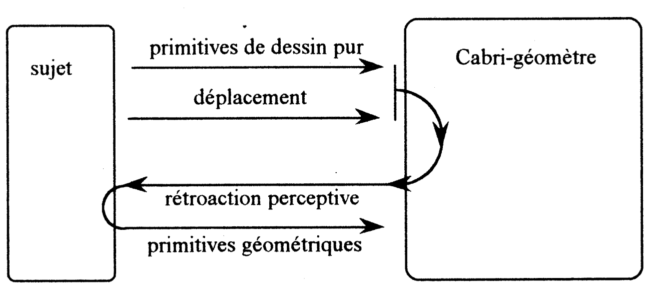


Fig. 6

L'environnement répond donc à l'intention d'offrir un système de signifiants ayant un plus grand domaine de fonctionnement par rapport à la géométrie et rendant plus apparentes les limites du domaine d'interprétation. Parce que le déplacement du dessin est contrôlé par une théorie géométrique (*grosso modo* celle de la géométrie euclidienne), l'environnement rend compte en particulier de la variabilité des éléments de l'objet géométrique et de leur domaine de variation (extension du domaine de fonctionnement) et permet de disqualifier des interprétations non pertinentes (mise en évidence des limites du domaine d'interprétation) ; en effet les propriétés attribuées à l'objet parce que lues sur un dessin statique le représentant ont de fortes chances de n'être apparemment plus vérifiées lors de la déformation du dessin.

Le champ d'expérimentation offert par le dessin dans le dessin papier crayon est limité pour des raisons matérielles (imprécision du tracé, impossibilité de rendre temporairement invisible une partie du dessin, limitation du nombre d'éléments à gérer). L'environnement Cabri-géomètre, non seulement par ses fonctionnalités d'éditeur graphique mais aussi par les connaissances géométriques qu'il intègre, élargit le champ d'expérimentation possible. Les actions possibles autant que les retours tout en étant étendus sont de nature différente puisque fondés sur des connaissances géométriques. Le type de représentation graphique fourni par l'environnement diffère donc du dessin papier crayon. Pour marquer cette différence, dans la suite on appellera *Cabri-dessin* une représentation graphique sur l'écran de Cabri-géomètre.

On peut s'attendre à de nouvelles possibilités d'organisation pour des situations d'apprentissage et à des modifications de conduites des élèves.

III - Les rétroactions de l'environnement informatique

Le déplacement par manipulation directe est une des composantes importantes de Cabri-géomètre offrant une rétroaction aux actions de l'élève.

III.1 - L'importance du caractère extérieur des rétroactions

C'est parce que le déplacement est fondé sur des connaissances de géométrie, qu'il permet une rétroaction extérieure plus riche sur une même production du sujet. Prenons l'exemple d'un élève ayant à résoudre une tâche que nous décrirons en termes classiques comme une tâche de construction d'une figure satisfaisant à des conditions données (dans nos termes, ce serait une tâche de tracé d'un dessin d'un objet géométrique donné issu d'un procédé contrôlé par des connaissances géométriques). Dans un contexte papier crayon, l'élève peut tourner sa feuille de

papier et voir le dessin dans différentes positions mais il ne peut faire varier les éléments variables qu'en traçant à nouveau un dessin, c'est-à-dire en engageant une nouvelle action fondée sur des connaissances.
Il n' y a pas alors rétroaction extérieure sur la *même* production du sujet qui peut très bien changer de façon implicite, voire inconsciente, son procédé de tracé dans la production de nouvelles occurrences du dessin. Le recours au déplacement contient en lui-même l'usage de connaissances ; l'avantage est que ces rétroactions sont issues d'un dispositif externe au sujet et indépendant de l'enseignant : elles sont ainsi susceptibles de faire évoluer le sujet.

III.2 - Utilisation en interaction des possibilités d'action et de rétroaction
Comme dans toute situation, les rétroactions du milieu peuvent être sollicitées par le sujet qui décide de se livrer à certaines actions dont la sanction par le milieu fournira des éléments d'information sur sa production. Il s'agit en quelque sorte d'une *expérimentation dans le modèle* fourni par l'environnement informatique.

L'environnement Cabri-géomètre permet ce genre d'expérimentation par la conjugaison de l'usage des primitives géométriques et du déplacement : pour vérifier ainsi que deux droites sont perpendiculaires, on trace la perpendiculaire à l'une des droites et l'on vérifie que dans le déplacement elle reste confondue avec l'autre droite.
Le sujet peut même se livrer à une expérimentation fondée sur un calcul inférentiel : il montre l'équivalence de la propriété P à vérifier et d'une autre propriété P' qu'il peut vérifier par le procédé présenté ci-dessus. Par exemple, pour vérifier qu'il a bien construit un losange, il peut tracer la médiatrice d'une diagonale et vérifier la coïncidence de cette médiatrice avec l'autre diagonale au cours du déplacement.
Dans une analyse d'un Cabri-dessin donné ayant pour finalité de repérer les dépendances géométriques entre propriétés de l'objet géométrique, un autre type d'expérimentation possible consiste à supprimer des relations géométriques entre éléments et à vérifier si les relations qu'on supposait dépendantes ne sont plus satisfaites.

III.3 - La répétition
Margolinas (1993, p.117) a mis en évidence l'importance de la répétition du problème dans les travaux d'ingéniérie didactique, qui jusqu'alors n'avait pas été prise en compte au plan théorique. Elle montre bien qu'il ne s'agit nullement d'une conséquence d'une option behavioriste dans laquelle la répétition de la confrontation à des stimuli permettrait un apprentissage par renforcement mais bien d'une conséquence d'une option constructiviste: la répétition de la

confrontation au même problème permet à l'élève de construire un sens au problème (processus de dévolution), le "rend de plus en plus conscient de ce qui le pousse à agir". La répétition est intéressante quand les rétroactions ne sont pas simplement en juste ou faux mais sont de nature riche. Dans l'usage régulier de Cabri-géomètre sur un long terme dans des classes de 4ème et de 3ème (Capponi & Laborde 1994), on a pu constater lors de résolution de problèmes une absence de renoncement de la part des élèves, presque toujours un engagement important fait de la succession de nombreuses tentatives de solutions, et - certes un peu moins souvent - une évolution des solutions.

IV - Un nouveau rapport à la géométrie
Les situations adidactiques en géométrie visent à ce que :
- les stratégies de solution fondées sur des connaissances géométriques apparaissent comme plus efficaces que des stratégies empiriques ou fondées sur la perception. "La géométrie résulte d'une ruse, d'un détour dont la route indirecte permet d'accéder à ce qui dépasse une pratique immédiate" (Serres 1993, p.196).
- ces stratégies ne soient pas la réponse à des attentes externes au problème que l'élève croit deviner par exemple chez l'enseignant ou l'auteur du problème.

Notre attention se porte ici sur les situations qui donnent sens à la notion de figure géométrique; ces situations mettent donc en jeu un dessin qui peut être interprété comme représentant un objet géométrique à l'aide d'une analyse géométrique. Pour que cette interprétation ait lieu, il faut qu'elle soit sollicitée par le problème à résoudre, c'est-à-dire que la résolution du problème conduise à un traitement géométrique. Nous cherchons dans le paragraphe suivant à déterminer les modifications apportées par Cabri-géomètre dans les caractéristiques des situations : quels nouveaux types de démarches un environnement comme Cabri-géomètre est-il susceptible de favoriser chez les élèves ? Quel nouveau type de situations adidactiques est il rendu possible?

IV.1 - Quels problèmes dans l'environnement Cabri-géomètre ?
On peut distinguer deux types de problèmes suivant la production demandée aux élèves :
- des problèmes de production de Cabri-dessins,
- des problèmes de preuve.

Dans le premier type de problèmes, la production demandée est, comme on l'a vu, de nature nouvelle : il ne s'agit pas de fournir un tracé mais un dessin à l'écran gardant certaines propriétés spatiales imposées lors du déplacement d'un des points de base du dessin. La tâche consiste donc pour l'élève à élaborer un procédé de production du Cabri-dessin fondé sur les primitives géométriques disponibles.

Outre le caractère nouveau de la production demandée, le déplacement introduit de plus des nouveaux types de problème:

- production de Cabri-dessins ayant un comportement contraint au niveau de leur déplacement
- la recherche de la généricité du procédé de construction
- la reproduction d'un Cabri-dessin donné à l'écran que l'on peut explorer grâce au déplacement.

Un Cabri-dessin est un dessin dynamique; outre l'invariance de propriétés spatiales, on peut imposer des contraintes spécifiques de mouvement. Par exemple, on peut demander de produire un triangle équilatéral tournant autour de son centre. Cela revient à imposer les points fixes, les points mobiles du Cabri-dessin, et certaines trajectoires. On joue ici sur la nature nouvelle du Cabri-dessin, c'est un dessin dont les éléments décrivent des trajectoires, ces trajectoires étant soit réduites à un point du plan, un sous-ensemble de points du plan, ou le plan tout entier. La géométrie devient dans ce problème un outil de modélisation des relations spatiales du dessin au cours du mouvement. Ce type de situation requiert donc une analyse en termes géométriques.

Certains procédés de construction dépendent des positions respectives de certains éléments de base et sont profondément modifiés si ces positions changent. Que l'on pense par exemple au procédé d'obtention d'une tangente à un cercle de centre O passant par un point P donné; le procédé habituel diffère suivant que le point est sur le cercle ou à l'extérieur : dans le premier cas, on trace la perpendiculaire au rayon, dans le deuxième un cercle de diamètre PO. Si l'on déplace P, la tangente obtenue reste tangente au cercle jusqu'à disparaître lorsque P est amené sur le cercle. La production de Cabri-dessins conduit donc à un nouveau type de problèmes celui de la généricité d'un procédé de construction.

Dans la reproduction de dessins en papier crayon, les connaissances géométriques sont susceptibles d'être un outil efficace mais l'on sait aussi que le tracé empirique contrôlé simplement par la perception peut fournir un tracé visuellement satisfaisant. La reproduction de Cabri-dessins disqualifie le tracé empirique contrôlé par la visualisation. Elle exige de plus la reconnaissance d'invariants géométriques de ce Cabri-dessin lors du déplacement, ou à proprement parler elle nécessite que l'on reconnaisse des propriétés géométriques à l'aide des invariants spatiaux du dessin dans le déplacement. Ce type de problème met donc particulièrement l'accent sur la correspondance entre visualisation d'invariants

spatiaux et leur description géométrique. Nous appelons *boîte noire* ces situations problèmes dans laquelle les élèves ont à reproduire un Cabri-dessin donné à l'écran de façon à obtenir un Cabri-dessin ayant un comportement identique lors du déplacement. De telles activités oeuvent être utilisées dans l'apprentissage des transformations géométriques.

La preuve est susceptible de prendre un autre statut dans Cabri-géomètre en ce qu'elle permet d'expliquer des phénomènes visuels ou même l'impossibilité de phénomènes visuels. Ainsi des élèves de 5ème (Bergue 1992) se sont demandés si un triangle pouvait avoir deux angles obtus. La précision du logiciel et le déplacement continu assure aux yeux des élèves de l'impossibilité d'obtenir un tel triangle. Ils sont alors en mesure de s'approprier la question de l'explication d'une telle impossibilité. Il y a dévolution (Brousseau 1986) du problème de la preuve mathématique de l'inexistence de tels triangles. La preuve prend de ce fait un autre statut, celui d'expliquer des propriétés spatiales en contradiction avec les attentes des élèves. Une autre source de problèmes menant à une preuve consiste à demander de trouver les conditions auxquelles doit satisfaire un objet géométrique pour obtenir à l'écran un cas particulier résistant au déplacement. Par exemple, A, B C étant trois points fixes, à quelles conditions sur D les médiatrices du quadrilatère ABCD se coupent-elles en un même point ? (Fig.7). Les élèves ont la possibilité d'obtenir manuellement la trace du point D en essayant de satisfaire visuellement aux contraintes d'intersection des 4 médiatrices. Ils obtiennent ce qu'un de nos collègues J.F. Bonnet appelle un *lieu mou*. A nouveau, la démonstration apparaît comme un moyen de s'assurer de la nature de ce lieu mou.

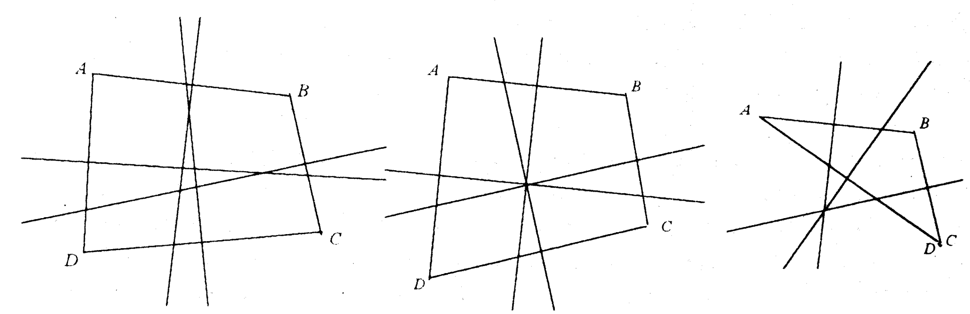


Fig. 7

IV.2- Discussion du caractère adidactique de situations de production de Cabri-dessins

Le caractère adidactique de production de Cabri-dessin peut paraître plus facile à

satisfaire pour deux raisons
-il s'agit de faire faire et non de faire un dessin ; les élèves doivent communiquer un procédé de tracé au dispositif et non faire le tracé eux mêmes. Le dispositif oblige à la distinction entre tracé et procédé de tracé. D'autre part l'enseignant est absent du processus de communication au dispositif.
- un Cabri-dessin est par définition un dessin qui garde au cours du déplacement les propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques attachées à l'objet géométrique qu'il représente ; les procédés de tracé au jugé sont disqualifiés par le dispositif même. Le logiciel par le déplacement offre une invalidation des tracés au jugé et les élèves sont conduits à effectivement utiliser des primitives géométriques pour obtenir le tracé à l'écran d'un Cabri-dessin d'un objet géométrique.

Mais est-il possible à partir de cette constatation de faire deux hypothèses supplémentaires selon lesquelles
(i) demander aux élèves de produire un Cabri-dessin en fixant l'ensemble de primitives géométriques disponibles n'ouvrirait pas la possibilité à une recherche des attentes de l'enseignant et par là favoriserait la recherche par les élèves de procédés s'appuyant sur des connaissances géométriques ?
(ii) le recours à des primitives géométriques s'appuierait nécessairement sur un traitement géométrique ?
Evidemment non !

Nous voudrions nuancer ces hypothèses qui fournissent un tableau trop contrasté des rapports entre élèves et machine.
D'une part, des phénomènes de contrat sont susceptibles de se produire, ainsi certaines primitives géométriques peuvent apparaître aux yeux des élèves comme d'utilisation plus souhaitée que d'autres par l'enseignant.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que les stratégies empiriques des élèves sont renforcées par le fait que les commandes de construction sont en nombre restreint: il leur est loisible de chercher à construire le Cabri-dessin demandé par l'essai successif de diverses combinaisons de menus, et cela d'autant plus que le nombre de primitives géométriques est réduit. Ce n'est pas l'usage de connaissances géométriques qui contrôle le processus de tracé mais la recherche d'une suite de menus conduisant à un Cabri-dessin qui sera validé par le déplacement. La conception de situations adidactiques de construction géométrique avec Cabri-géomètre doit prendre en compte l'accentuation de cette dimension empirique, en choisissant des tracés à réaliser pour lesquels de telles stratégies sont coûteuses et ne conduisent pas au succès.

On a pu de plus constater qu'un jeu s'établit entre une activité perceptive favorisée par le déplacement, une stratégie combinatoire et l'usage de connaissances de géométrie dans les situations où les élèves ont à produire un Cabri-dessin à partir d'une caractérisation discursive. Les élèves abordent le problème par des combinaisons systématiques de menus sur les objets existants mais il peut arriver qu'ils découvrent lors du déplacement un des invariants géométriques demandés mais reliant d'autres objets que ceux souhaités. Ils se placent alors dans une problématique géométrique en cherchant à réobtenir cet invariant entre les objets souhaités et à cette fin, ils analysent géométriquement ce qu'ils ont fait de façon empirique: la géométrie devient un moyen qui leur permet de contrôler la reproduction d'un invariant obtenu de façon aléatoire.

V - La géométrie en tant qu'outil de modélisation

Les savoirs géométriques peuvent aussi être utilisés dans l'environnement Cabri-géomètre comme des outils dans la résolution de problèmes non géométriques. Ils permettent la modélisation de phénomènes, par exemple physiques, telle la modélisation géométrique en optique relative à la réflexion dans un miroir ou à la réfraction dans une lentille. Mais la géométrie peut aussi modéliser des situations algébriques et numériques: la somme, le produit de deux nombres peut être représenté géométriquement. Les représentations graphiques de fonctions polynomiales ou de fractions rationnelles peuvent ainsi être obtenues comme lieux de points dans Cabri-géomètre.
Ci-dessous (Fig.8) une illustration du problème bien connu de la boîte. Il s'agit de découper quatre carrés de côté h aux quatre coins d'un carré de carton de côté a. On obtient ainsi le patron d'une boîte et l'on cherche la valeur de h fournissant une boîte de volume maximum.
On a représenté le patron, la boîte en perspective et le graphe du volume en fonction de h de façon à ce que toute variation continue de h produite par le glissement de la souris sur le patron se répercute continûment sur le dessin en perspective et sur la position de M sur le graphe. Les trois représentations sont faites avec les primitives géométriques de Cabri-géomètre, y compris le graphe du volume.
Cette correspondance entre trois types de représentation d'un même objet est intéressante à double titre: elle montre la diversité des registres d'expression mathématique reposant sur des relations spatiales mais aussi leur spécificité. La géométrie, théorie de l'espace, apparaît alors comme un outil puissant d'expression et de simulation.

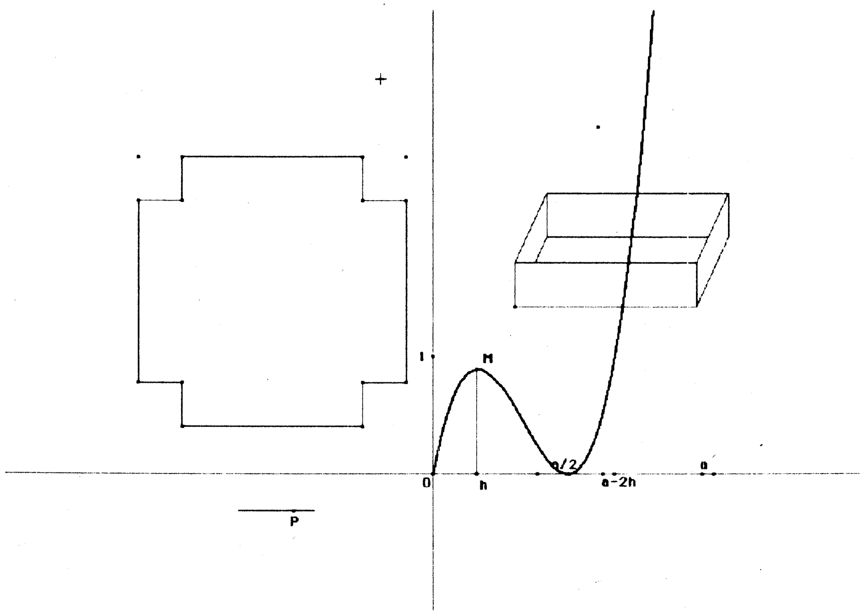


Fig.8

VI - Conclusion

La reconnaissance visuelle est susceptible de jouer un rôle important dans l'environnement Cabri-géomètre. Or la reconnaissance visuelle de propriétés spatiales associées aux propriétés géométriques n'est pas spontanée et doit être l'objet d'un apprentissage. L'association entre visuel et géométrique prend difficilement du sens dans l'environnement papier crayon qui écrase la distinction entre visuel et géométrique (étroitesse du domaine de fonctionnement et absence de limites apparentes du domaine d'interprétation). Comme il a été dit, l'environnement Cabri-géomètre a été conçu pour permettre la distinction entre visuel et géométrique. L'observation des élèves montre que de plus le géométrique peut apparaître dans Cabri-géomètre comme *un moyen de reproduire du visuel ou de l'expliquer* (explication du comportement d'un Cabri-dessin). Le géométrique ne serait pas seulement construit dans cet environnement pour pallier les limites du visuel mais aussi en lien avec le visuel ; le géométrique est un *outil de modélisation du visuel*. C'est une dimension qui nous paraît intéressante dans la mesure où la géométrie trouve son origine dans le contrôle des phénomènes spatiaux.

Entre d'une part l'écrasement entre visuel et géométrique et d'autre part la rupture entre ces aspects, une voie différente nous semble possible dans laquelle l'apprentissage de la géométrie dans ses débuts consisterait en *l'apprentissage du contrôle des rapports entre visuel et géométrique*. L'environnement Cabri-géomètre offre des possibilités d'organisation d'un milieu pour l'apprentissage de ce contrôle pour trois raisons :

- les phénomènes visuels prennent de l'importance de par la dimension dynamique du Cabri-dessin ;
- ces phénomènes sont contrôlés par la théorie puisqu'ils sont le résultat d'une modélisation graphique d'un modèle analytique de propriétés géométriques ;
- les possibilités sans fin de situations géométriques qui peuvent être visualisées avec un grand nombre d'objets et de façon précise.

Références

BELLEMAIN F., CAPPONI B. (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur, *Educational Studies in Mathematics* 23. 1, 59-97

BERGUE D. (1992) Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème, *Petit x*, IREM de Grenoble, n°29, pp.5-13

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université Bordeaux 1

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7. 2, 33-115

BESSOT A. (1993) Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace, *Publications du CIRADE*, Montréal, Canada : Université du Québec à Montréal

CAPPONI B., LABORDE C., 1994, *Cabri-classe*, Argenteuil: Editions Archimède

CHEVALLARD Y. (1990) Autour de l'enseignement de la géométrie, *Petit x*, 27, 41-76

CORDIER F. & CORDIER J. (1991) L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs, *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 11, n°1, 45-64

DUVAL R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg. Vol 1. 57-74

FISHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.24, n°2, 139-162

LABORDE C. (1992) Enseigner la géométrie: permanences et révolutions, *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education*, C. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler, J. Egsgard (eds) (pp.47-75), Québec: Les Presses de l'Université Laval

LABORDE J.M., STRÄSSER R.(1990) Cabri-Géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralbalt für Didactik der Mathematik.* 90/5, 171-90.

MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions, 256 p.

MARIOTTI A. (1993) The influence of the standard images in geometrical reasoning, *Proceedings of PME XVII*, Hirabayashi I. et al. (eds.), (Vol. II, pp.177-82), Tsukuba, Japon

MESQUITA A.L. (1989) *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves: éléments pour une typologie*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg

NOIRFALISE R. (1991)Figures prégnantes en géométrie ? *Repères - IREM*, n°2, 51-58

PADILLA V. (1990) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ULP, IREM de Strasbourg, Vol.3, 223-252

PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19.1, 79-92

SERRES M. (1993) *Les origines de la géométrie*, Paris: Flammarion

Proprietà logiche delle teorie geometriche

*Ferdinando Arzarello**

La geometria, in particolare quella euclidea, ha oggi perduto la posizione centrale che aveva un tempo nell'insegnamento tradizionale della matematica (soprattutto a livello di secondaria superiore). Il documento preparatorio per lo studio ICMI (= Commissione Internazionale sull'Istruzione Matematica) "*Prospettive per l'insegnamento della geometria nel 21° secolo*", evidenzia alcune delle cause che possono essere alla base di tale fenomeno:

a. L'insegnamento della geometria euclidea è tradizionalmente lontano dalle metodologie *attive*, oggi particolarmente diffuse, in cui l'allievo è coinvolto direttamente nella costruzione del sapere.

b. Esso rischia di essere troppo sofisticato, adatto a minoranze di alunni e non a una scuola di massa: l'eventuale introduzione di un sistema di assiomi e la conseguente dimostrazione dei teoremi richiedono capacità *alte* da parte degli allievi e rappresentano seri ostacoli che scoraggiano molti insegnanti (analogo discorso, anche se con argomentazioni un po' diverse viene fatto per la geometria dello spazio, quasi mai presente nella pratica didattica).

c. I professori, formatisi con curricula in cui la geometria è trascurata, hanno peggiorato la situazione, insegnandola sempre meno ai loro alunni.

d. Il divario tra la geometria scolastica e ciò che si intende con geometria quando si fa ricerca è cresciuto in modo drammatico e non si sa se e come colmare almeno parzialmente tale gap: i geometri, salvo eccezioni, tacciono e non fanno proposte in nessun senso (a differenza di quanto avvenuto nel passato).

Sembra prevalere il metodo analitico (con buona pace di Dieudonné, uso il termine come fanno quasi tutti per indicare la geometria delle coordinate e non le varietà analitiche, cfr. Dieudonné [70], p.6, nota 4), con tutti i suoi pregi ma anche con inevitabili rischi: è ben noto che quando ci si abbandona alle formule, ben presto alcuni allievi perdono il controllo sui significati delle medesime e quindi il legame tra le situazioni geometriche e i loro modelli algebrici risulta problematico.

Per uscire da queste difficoltà, ritengo che oggi sia opportuno ripensare la geometria non solo alla luce delle crisi di fine ottocento, ma anche degli sviluppi avvenuti in tempi più recenti, in particolare della rivoluzione informatica e della

* Dipartimento di Matematica, Università di Torino.

disponibilità sempre crescente di strumenti e pacchetti di software di tipo geometrico (dai sistemi CAD e CAM ai manipolatori simbolici, passando per i software dedicati all'insegnamento della geometria). Occorrono competenze diverse e mentalità nuove per analizzare i termini della questione, sia dal punto di vista dei concetti matematici e tecnologici, sia da quello degli obiettivi e dei metodi di insegnamento.

Il mio intervento è un contributo in questo senso dal punto di vista della logica matematica: è quindi una riflessione parziale che cerca di cogliere l'evoluzione della geometria sia come disciplina scolastica sia come campo di ricerca in interazione con la logica. Ciò risulta importante alla luce di quanto affermano i nuovi programmi del triennio: la sistemazione assiomatica di cui questi parlano, con l'approccio conseguente ad alcuni concetti delicati (che essi richiedono), può essere impostata e conseguita solo riflettendo sul significato che i sistemi assiomatici in generale e quelli per la geometria in particolare hanno assunto oggi. Inevitabilmente la riflessione dovrà fare i conti con le forme attuali di logica applicata, che trovano corpo e sangue in concreti software implementabili su computer.

Ciò va fatto criticamente e senza dimenticare la nostra storia: il nostro obiettivo è ancora oggi esprimibile magnificamente dalle seguenti parole di Vailati, purché le attualizziamo alla tecnologia odierna:

> L'aritmetica e la geometria ci consentono, non pur di misurare torri, ma di seguire nelle loro vie misteriose i mondi che vediamo roteare intorno a noi, ci consentono per accostarci al viver nostro, di tracciare e innalzare edifici e di trattare forze, sollevar macigni, forare monti, creare le macchine più mirabili e potenti e lanciarle oltre i continenti e gli oceani e attraverso i cieli. Questo è necessario che sentano gli alunni: che intuiscano, cioè, e riconoscano le profonde e lontane ragioni dei loro calcoli più elementari. **(Vailati)**

La storia sarà sempre presente in queste mie riflessioni e penso che dovrebbe entrare nelle classi con lo spirito e la dinamicità delle cose vive e non solo con il gusto per le cose vecchie, che rischiano di odorare di stantio per molti allievi.

Il mio obiettivo è di individuare elementi, sia di tipo geometrico che logico, i quali possano aiutare l'insegnante a progettare meditatamente l'insegnamento della geometria alle soglie del terzo millennio, secondo il titolo del citato studio ICMI e ai sensi delle finalità dei nuovi programmi per il triennio delle superiori:

> "lo studio della matematica cura e sviluppa in particolare: l'attitudine a riesaminare criticamente e a sistemare logicamente le conoscenze via via acquisite; l'interesse sempre più penetrante a cogliere aspetti genetici e momenti storico-filosofici del pensiero matematico" (punti 4, 5).

In sintesi, il mio intervento vorrebbe suggerire sommessamente un approccio agli assiomi che sia inserito nel panorama culturale di oggi; la tecnologia ne è sempre più parte inestricabile: essa condensa in segmenti di cultura disponibili a chiunque riflessioni complesse riguardanti il significato del metodo assiomatico in geometria. Di ciò non può non tenere conto chi insegna.

1.Geometria e logica alle origini del metodo assiomatico

In questa parte ricorderò schematicamente alcuni punti, peraltro assai noti, che risultano essenziali nello sviluppo della geometria quale sistema assiomatico al volgere del secolo scorso. Per fare ciò dovrò necessariamente parlare sia di geometria che di logica. Nel momento storicamente culminante della sistemazione della geometria elementare come sistema di assiomi troviamo infatti mescolati concetti e problemi sia di natura geometrica che logica. Si tratta di un cammino irto di difficoltà, in quanto bisogna vincere molte rigidità e "falsi assoluti", per giungere a concepire un metodo, quello assiomatico appunto, secondo il quale, come diceva Enriques nella sua *Storia della Logica*, gli enti primitivi sono definiti solo dalle relazioni espresse dagli assiomi e non da qualcosa d'altro che sia al di fuori o prima di questi; come pure il senso delle relazioni tra queste consiste esclusivamente in quanto asserito dagli assiomi; per cui assiomi (e teoremi) risultano invarianti per qualsiasi cambiamento del senso delle parole coinvolte, salve le relazioni postulate dagli assiomi.

Gli aspetti geometrici sono i più noti e li accennerò soltanto.

1.1 Assiomatica e geometria

E' noto che la Geometria di Euclide ha rappresentato nel corso dei secoli il canone sommo secondo il quale si organizzano e insegnano le conoscenze matematiche. E' altrettanto noto che le esigenze di rigore hanno spinto i geometri successivi di epoche e civiltà diverse (Ibn-al-Haytam: anno 1000; Nasir-ad-Din: sec. XIII; Clavius: 1537-1612; G.Saccheri: 1662-1733; J.M.Lambert: 1728-1777; A.M.Legendre: 1752-1833; C.F. Gauss:1777-1836; J.Bolyai: 1802-1860; N.Lobatchevski: 1792-1856) a ricerche critiche sul quinto postulato, le quali nel secolo scorso finiscono col mandare in crisi l'edificio meraviglioso della geometria euclidea. Il postulato delle parallele perde così lo statuto di "verità assoluta" e diventa un'ipotesi tra altre, che per quanto riguarda lo spazio fisico dovrà essere verificata per via sperimentale. La novità epistemologica a quel punto (diciamo poco prima della metà del secolo XIX) consiste nel fatto che, viceversa, anche se una geometria non corrisponde ad alcuna realtà sperimentale, nessuno mette in dubbio che i suoi teoremi continuino ad essere "verità matematiche" indubitabili: si è così lontani anni luce dalla posizione kantiana prevalente alcuni decenni prima, secondo la quale lo spazio euclideo è un giudizio sintetico a priori che precede ogni esperienza e prefigura tutte le nostre conoscenze spaziali.

Ciò pone problemi fondazionali seri e gli studiosi sentono la necessità di rimeditare i concetti di base, che non hanno più un legame comunque assicurato con la realtà sensibile. D'altra parte, ci si è ormai resi conto in forma sempre più estesa che molte argomentazioni e dimostrazioni geometriche risultano drammaticamente sciolte dal significato intuitivo dei termini che vi compaiono, mentre sembra assumere sempre più importanza la forma sintattica del ragionamento. Si veda, tipicamente, il principio di dualità che in geometria proiettiva permette di dedurre teoremi in cui i termini punto e retta si scambiano reciprocamente, "risparmiando" quasi la metà delle dimostrazioni, come evidenzia anche graficamente Gergonne (1771-1859) presentando un testo di geometria su due colonne duali parallele. Il senso dei termini geometrici viene "teso" a comprendere più accezioni e i teoremi di geometria rappresentano così significati diversi sotto un enunciato comune, come rileva esplicitamente Cayley nel 1859 (*Sixième Mémoire sur les Quantiques*):

> "1°...la parola *punto* può significare **punto** e la parola *retta* può significare **retta**;
> 2°...la parola *punto* può significare **retta** e la parola *retta* può significare **punto**.
> ...Noi possiamo con tale estensione [del senso dei termini] comprendere i teoremi correlati sotto un enunciato comune. ...Noi includeremo la geometria sferica in quella a due dimensioni; le parole *piano*, *punto* e *retta* significano a tal fine **superficie sferica**, **arco** (di un cerchio massimo) e **punto** (cioè coppia di punti opposti) su tale superficie sferica" (pp. 61, 62).

Di lì a poco (1868-1872) il modello di Beltrami-Klein avrebbe illustrato la questione in modo perspicuo.

Ciò pone in discussione il senso stesso degli assiomi e delle dimostrazioni (non mi soffermo sulla distinzione, ben nota, che si faceva solitamente tra assiomi e postulati, ma uso senz'altro il termine moderno).

La geometria elementare nel 19° e 20° secolo si presenta come un campo di studio intrigante e fecondo, dal quale traggono alimento problemi e questioni, che opportunamente analizzati e sistemati si riveleranno altrettanti concetti cruciali per lo studio delle proprietà logiche di tutte le teorie matematiche (ad es. l'aritmetica, la teoria dei campi, la teoria degli insiemi, ecc.). La geometria (anzi le geometrie) pone sul terreno concrete questioni la cui comprensione richiede di forgiare fondamentali concetti e metodi di tipo logico: alla fine essi risulteranno applicabili ben al di là della sola geometria, da cui sono stati generati. Ognuno di tali concetti costituisce oggi un capitolo di un manuale di logica e nello stesso tempo un tassello importante nella sistemazione moderna delle teorie matematiche (la problematica fu sviscerata in un celebre convegno a Berkeley, organizzato da A.Tarski nelle vacanze natalizie del 1957 sul *Metodo Assiomatico*).

1.2 Assiomatica e logica

I problemi di base della logica alle origini del metodo assiomatico sono almeno tre, come ora esporrò succintamente. Chi è interessato ad approfondire può utilmente leggere l'articolo di G. Lolli [94].

In primo luogo, le radici diverse della logica. Da un lato abbiamo il filone dell'algebra della logica (Boole, Pierce, Venn, Jevons, Schröder, Peano):la logica permette di esprimere in forma succinta ed espressiva le idee semplici che si combinano poi per esprimere le idee più complesse come si fa in algebra per le formule; ovvero la logica permette di analizzare addirittura le leggi del nostro pensiero. Dall'altro, abbiamo il logicismo di Frege, esplicitamente opposto al metodo assiomatico:

> "per Frege il metodo assiomatico è la esplicita rinuncia per incapacità, tipica del matematico, a definire le nozioni primitive, compito che spetta alla filosofia, o alla logica" (Lolli, *cit.*, p.55).

In secondo luogo c'è da considerare il differente, contraddittorio ruolo giocato dal metodo assiomatico rispetto ai campi matematici trattati (*le* geometrie, *le* algebre, ecc. contrapposte all'unicità del*l*'aritmetica, tale per volere divino, come diceva Kronecker). Le dimostrazioni di categoricità date da Dedekind e da Peano per gli assiomi dei reali e dei naturali si ponevano concettualmente in contrasto con i casi in cui una stessa teoria --ad es. la geometria assoluta di Bolyai-- poteva essere interpretata in modelli diversi (per es., il piano euclideo usuale e il disco di Klein).

Qui emerge il terzo elemento di confusione, cioè il problema se si debba avere una sola interpretazione di una teoria o se invece sia sensato convivere con teorie che ammettono "essenzialmente" (cioè senza che sia possibile correggerle aggiungendo opportuni assiomi) più interpretazioni non isomorfe. L'idea prevalente, ma non esplicitata da nessuno, è che si opti per la prima soluzione.

Le diverse geometrie (euclidea, non euclidee) sono pensate sempre come teorie diverse, che sono variazioni di un'unica teoria di base, mediante aggiunte, tagli, modifiche. Le interpretazioni si pensano sempre come modelli di teorie diverse, oppure come traduzioni di un'interpretazione in un'altra. Nei primi anni del sec. ventesimo è di là da venire la seconda opzione, cioè l'idea secondo la quale è positivo, addirittura essenziale, che una stessa teoria possa avere interpretazioni diverse (tale idea si fa strada solo più tardi attraverso i lavori di Löwenheim e Skolem che studiano il problema della validità di un enunciato in strutture di cardinalità assegnata). E' implicito che a ogni teoria corrisponda un'unica interpretazione e inversamente. Anzi, quando così non è, si sente il bisogno di andare a caccia di principi che rendano categorica la teoria (si fa così sistematicamente nei FG [=Fondamenti della Geometria] di Hilbert [1889]).

Bisognerà attendere parecchi decenni e l'avvento dei computer perché questa libertà di interpretazioni per i termini primitivi si estenda addirittura ai segni stessi della logica (quando i connettivi saranno intesi come operazioni su programmi), svincolandola da un modello antropologico implicito, per cui i simboli logici sono intesi come l'algebra del ragionamento umano. Ma ai tempi di Hilbert (con l'eccezione dell'*eretico* Brouwer dal 1908) la logica era una, quella classica, cioè la logica del ragionamento dell'uomo, tanto è vero che non si sente per molto tempo il bisogno di esplicitare quali siano le regole secondo cui si sviluppa tale ragionamento. Le dimostrazioni in FG non differiscono sostanzialmente da quelle che si potrebbero avere in un testo di geometria euclidea paleo-assiomatico. Diversa la posizione di Peano che nel suo *Calcolo Geometrico* del 1888, riprendendo le idee di Grassmann, che nel 1844 aveva impostato la geometria come calcolo su vettori, fonda a sua volta la geometria come "calcolo geometrico ...[cioè come] sistema di operazioni a eseguirsi su enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fa sopra i numeri."; è così possibile "sostituire una trasformazione di equazioni ad un ragionamento": nel primo capitolo Peano illustra di quale calcolo si tratti, riprendendo con variazioni l'impostazione algebrica del calcolo logico di Schröder (1877). Ma già nei *Principii di Geometria, logicamente esposti* [1889] discute a lungo gli assiomi e le nozioni primitive, non le regole di derivazione.

Oggi la non esplicitazione delle regole di calcolo è basata su altri presupposti; infatti si sa che il calcolo dei predicati del primo ordine è completo (teorema di completezza di Gödel, 1929): quindi con le regole di deduzione si riescono a catturare tutte le verità logiche e non c'è ragione di preoccuparsi. Ma tale teorema ha richiesto una lunga elaborazione che passa attraverso i lavori di molti logici nei primi decenni del secolo XX. Grazie a questi, si è esplicitato che cos'è un linguaggio del primo ordine, che cosa vuol dire che un enunciato è vero, valido, ecc., tutti concetti al di là da venire quando Hilbert, Peano e Pieri scrivevano i loro sistemi di assiomi per la geometria, ma che vennero alla ribalta anche perché tali opere furono scritte e certi problemi cominciarono a presentarsi sia pure inconsciamente tra le righe di quegli (e altri) studiosi.

2. Quali assiomi?

Mentre le regole deduttive rimangono implicite, grande spazio è dedicato alla discussione degli assiomi nei lavori degli studiosi a cavallo del secolo.

Anche questo è un argomento ampiamente discusso nella letteratura. Chi vuole iniziarlo ad approfondire può leggere il bellissimo lavoro di M.Marchi [94], in cui si discutono gli approcci di Hilbert e di Peano e poi proseguire leggendo le opere ivi citate, cui aggiungerei il vecchio *resumé* di G.Fano sulle geometrie non euclidee [37], tuttora validissimo.

Mi limiterò a sottolineare scarnamente i punti che sembrano più significativi dal punto di vista logico e didattico.

In primo luogo, la scelta degli assiomi è cruciale rispetto alle proprietà matematiche in gioco e al modo con cui queste derivano dall'intuizione e dall'esperienza sensibile: sono possibili varie posizioni. Vediamone alcune.

Come osserva Marchi (op. cit., p.15), Hilbert pensa che le nostre immagini mentali ci suggeriscano certi assiomi, a partire dai quali si sviluppa una teoria che si chiama "geometria". Al contrario

> "Peano vede già, nella realtà, intuitivamente, la teoria che vuole dedurre e allora fissa gli assiomi su misura, e deduce le verità che ha già intuito" (ibidem).

Hilbert sembra affrontare la realtà geometrica gradualmente, approfondendo via via i suoi aspetti, a strati successivi: ognuno "esprime certi fatti fondamentali omogenei della nostra intuizione" e costituisce un arricchimento del precedente, cui si collega in forme sempre più articolate e complesse. Così Hilbert individua tre sistemi di oggetti base (punti, rette, piani), collegati tra di loro da alcune relazioni fondamentali e primitive (appartenere, essere fra, essere congruente), "la cui descrizione esatta e completa segue dagli assiomi" (FG, p.3).

In questa sua indagine per strati successivi, egli enuclea dapprima le proprietà legate a sensazioni visive, come acutamente osserva Manara nella prefazione ai FG italiani (p.XVII), che potrebbero essere adatte a costruire la Geometria Proiettiva (I gruppo di assiomi: *collegamento*). Poi passa all'idea di ordine, basata sull'immagine intuitiva di punti in fila lungo una retta (II gruppo: *ordinamento*). Successivamente affronta altri concetti, come quello di congruenza, che "nascono da sensazioni molto composite, che ci provengono dalle esperienze di trasporto dei corpi rigidi" (Manara, loc. cit.) e formula gli assiomi di *congruenza* (III gruppo). Per ultimi vengono, come è noto, gli assiomi critici, cioè il postulato sulle parallele di Euclide (IV gruppo), e quelli che coinvolgono la continuità dello spazio (V gruppo).

Peano invece affronta di petto la realtà geometrica: non si tratta di sfogliarla gradualmente ma di cogliere senz'altro alcune idee primitive fondamentali, eliminando tutti i concetti superflui (ad es. le nozioni intuitive di spazio, solido, superficie, linea, ecc.). Meno idee primitive si usano, meglio è; egli ne usa due: punto e segmento, cioè la relazione che passa fra tre punti quando uno si trova tra gli altri due. In questo migliora il lavoro di Pasch, uno degli iniziatori del metodo assiomatico in geometria (Pasch [1882]), cui si rifà, che aveva usato tre nozioni primitive (punto, segmento, piano).

Lo stesso stile di Peano troviamo nel suo allievo M.Pieri col suo sistema di 24 assiomi (Pieri [1908]), basato sulle idee primitive di punto e di sfera (cioè della relazione che si ha fra tre punti a, b, c quando c appartiene alla sfera di centro a e raggio ab). Pieri ha un ruolo importante nelle nostre considerazioni, in quanto il suo sistema servì di base a Tarski, quando nel 1926-27 tenne un corso sulla Geometria Euclidea all'Università di Varsavia. Elaborando e raffinando tale sistema Tarski giunse nel 1929 a dimostrare che ogni enunciato della geometria formulato nel suo sistema era provabile o refutabile in modo meccanico (decidibilità della geometria elementare). Per una serie di vicende legate anche allo scoppio della guerra Tarski non riuscì a pubblicare il suo lavoro fino al 1948 (= Tarski [1951]).

Questo approccio avvicina Peano e la sua scuola alle concezioni che degli assiomi hanno i bourbakisti (come rilevato da Beniamino Segre in un suo saggio del 1955 sul matematico cuneese): la sua posizione ricorda infatti quella di A.Weil che paragonava la sistemazione assiomatica al lavoro che fanno i soldati del servizio logistico nelle retrovie durante una guerra: essi assicurano i collegamenti e i rifornimenti, che sono essenziali, ma la battaglia la fanno i soldati in prima linea. Peano, come i boubakisti, ama dipanare la matematica dal suo interno procedendo dai concetti più elementari a quelli più complessi e nella ricerca dei primi ha un approccio che si potrebbe definire antropologico:

> "E' chiaro che le idee primitive si debbano ridurre al minimo numero; e che per idee primitive si debbano assumere idee semplicissime, e comuni a tutti gli uomini; esse debbono avere il loro nome in tutte le lingue".

In questo si distingue da Hilbert, per cui l'economia di pensiero è fondamentale, ma altrettanto fondamentale è cogliere i nessi fra le nozioni base derivanti dall'intuizione, anche nel caso che queste non siano ridotte al numero minimo possibile: l'obiettivo è di

> "giungere all'analisi logica della nostra intuizione dello spazio" enunciando "un sistema di assiomi completo ed il più semplice possibile e dedurre dai medesimi le proposizioni geometriche più importanti, in modo tale da mettere chiaramente in luce il significato dei diversi gruppi di assiomi e la portata di conseguenze da trarre dai singoli assiomi".

Inoltre va ricordato che mentre per Peano il metodo assiomatico era pervasivo e lo propugnava anche a livello didattico per l'economia e pulizia di pensiero che permette (anche in questo antesignano dei bourbakisti: cfr. Dieudonné [1970], p.10), non così per Hilbert, autore con Cohn-Vossen di un libro basato su un approccio intuitivo e visivo alla geometria.

Un'osservazione si impone a questo punto: il modo con cui si pensano gli assiomi è fondamentale in ogni impostazione di un progetto didattico ma nella loro introduzione occorre molto buon senso e moderazione: soprattutto occorre sempre avere chiaro che gli obiettivi dello studioso di fondamenti possono divergere da quelli di chi si propone di insegnare agli allievi un po' di geometria elementare (in questo, sono opportune cautele: cfr. per es. Dieudonné, op. cit., p. 10). La mediazione dell'insegnante, che guidi la classe in un processo articolato di costruzione del sapere matematico, è particolarmente importante in questi punti. Per esempio, non bisogna dimenticare che spesso "l'attività concreta di apprendimento della matematica procede per semplificazione di strutture (per 'cancellazione' di dati presenti in un modello concreto) piuttosto che per 'arricchimento' di strutture" (Prodi, Guida al progetto d'insegnamento della matematica, vol.I, p.179) e chè quindi la proposta di assiomi basati su idee

primitive troppo essenziali può risultare controproducente (tipicamente, fare precedere gli aspetti affini a quelli metrici). Come commento su questo punto, ricordo quanto afferma Prodi (loc. cit.). Egli individua per la formulazione degli assiomi (esistenziali) il seguente itinerario, che chiama processo induttivo-deduttivo: (i) esplorazione a livello intuitivo; (ii) formulazione di una definizione precisa; (iii) assioma. E scrive:

> "Una volta formulato l'assioma (che utilizza nella sua formulazione la definizione), non si devono più utilizzare nelle dimostrazioni idee ottenute liberamente dall'intuizione: in altre parole, l'assioma è l'unica via di collegamento autorizzata fra la matematica e la realtà esterna, anche se, a livello euristico, l'intuizione continua ad esercitare la sua suggestione. C'è qui, sul piano didattico, una situazione di contrasto, in cui l'opera dell'insegnante è veramente indispensabile per ottenere che l'allievo sia nello stesso tempo aperto all'intuizione e critico sul piano logico."

3. Problemi fondazionali e problemi didattici: aspetti di continuità e di rottura.

Un punto critico, tra i tanti, che trae alimento dai commenti precedenti è se partire da una trattazione metrica o affine, ovvero se scegliere un approccio sintetico o meno (vedi oltre nel §4 qualche ulteriore commento sul tema analitico-sintetico).

Un esempio di approccio sintetico è dato sia dalla geometria di Hilbert, che da quella di Peano. Ricordo che il primo introduce gli aspetti metrici con le congruenze (gruppo III di assiomi), definendo da queste i movimenti rigidi come bigezioni dello spazio in sé che conservano le congruenze. Peano, viceversa introduce i movimenti come nozione fondamentale governata da opportuni assiomi e ottiene le congruenze come loro invariante.

Il problema della geometria sintetica è il suo rapporto con le strutture numeriche, tipicamente i numeri reali. Uno dei risultati più eleganti illustrato nei *Fondamenti della Geometria* di Hilbert sono le ricerche di H.Wiener (1891) sui teoremi di Pappo-Pascal e di Desargues. I due teoremi costituiscono il ponte che c'è tra enti geometrici e strutture numeriche. Ma il ponte è per così dire interno alla geometria: sono proprio le stesse proprietà geometriche che racchiudono in sé la struttura di corpo ordinato, eventualmente archimedeo e completo. Qui la sistemazione assiomatica risulta essenziale per stabilire l'equivalenza tra gli opportuni principi geometrici e le corrispondenti proprietà numeriche.

Il teorema di Pascal (dimostrabile dagli assiomi della geometria piana senza fare uso dei principi di continuità, oppure dagli assiomi spaziali di collineazione e ordinamento senza quelli di congruenza ma con il principio di Archimede) permette di formulare all'interno della geometria un ingegnoso e raffinato "calcolo coi segmenti", che soddisfa alle usuali proprietà dei campi ordinati (con gli assiomi di continuità si ottiene una struttura isomorfa ai reali).

Il teorema di Desargues, invece (dimostrabile dagli stessi assiomi piani, oppure dai soli assiomi spaziali di collineazione con l'assioma forte delle parallele) permette di formulare un calcolo dei segmenti analogo al precedente, che però non risulta necessariamente commutativo (lo è se vale il principio di Archimede).

I due principi, che esprimono tipiche proprietà proiettive delle configurazioni di punti e rette, racchiudono geometricamente le proprietà numeriche dei sistemi di coordinate. Si tratta di risultati molto eleganti, che dimostrano come non sia necessario postulare l'esistenza degli enti numerici come qualcosa che si aggiunge alla geometria dall'esterno. Il punto chiave è che per ottenere proprio la struttura dei reali occorrono i principi di continuità, che sono delicati e difficili da comprendere.

Da un punto di vista didattico, quindi è forse più opportuno seguire chi evita tale via, molto raffinata, ma difficile e postula senz'altro l'esistenza su ogni retta di un sistema di coordinate isomorfo ai numeri reali. E' questo il cosiddetto approccio metrico, seguito ad esempio da G. Birkhoff [1932]. Esso permette di 'scaricare' sui numeri reali le questioni più delicate legate alla continuità e di rendere l'approccio alla geometria (apparentemente) più leggero: vedi oltre la discussione sugli 'assiomi forti" per un commento didattico. Dal punto di vista fondazionale, il metodo è meno trasparente in quanto rimanda ad altro la sistemazione dei principi di continuità in geometria. L'analisi di Hilbert invece enuclea, e questo è tipico del suo metodo, un principio geometrico (ad es. il teor. di Desargues) che risulta equivalente alla proprietà che si vuole studiare (ad es. il disporre di un corpo numerico per le coordinate) e ne studia le mutue dipendenze dal punto di vista dei due ambienti (ad es. il teorema di Desargues risulta essere condizione necessaria e sufficiente perché una geometria piana sia parte di una geometria dello spazio, mentre in presenza degli assiomi di continuità del gruppo V il corpo numerico corrispondente risulta commutativo e addirittura isomorfo al campo reale). Con questa analisi, il legame tra algebra e geometria risulta molto più profondo di quanto non risulti dall'approccio metrico alla Birkhoff (ovvero dall'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio geometrico, come postulato): la questione è stata in anni successivi approfondita ulteriormente da Artin [1968] in un libro che, in tempi di bourbakismo imperante, ha avuto successo, ma oggi sembra essere molto meno noto.

Due ulteriori commenti sono necessari, parlando di assiomi.

Il primo è sul ruolo della teoria degli insiemi e della logica soggiacente: tipi diversi di oggetti (punti, rette, piani) legati da relazioni opportune (alla Hilbert); oppure solo punti e particolari insiemi di questi per formare rette e piani, individuati da certe proprietà (alla Peano). L'impostazione alla Hilbert è più adatta a trattare la dualità in geometria proiettiva (argomento peraltro non affrontato nel suo volume) ma risulta più pesante in tutti gli altri casi; la trattazione insiemistica con un solo tipo di oggetti snellisce il linguaggio e ha finito col soppiantare l'impostazione hilbertiana, anche in quegli autori che affrontano la geometria proiettiva: si veda ad esempio il volume di Borsuk e Szmielew [1960], che abbandonano la prima impostazione a favore della seconda quando editano in inglese il loro lavoro, originariamente in polacco.

Il secondo riguarda i già citati assiomi "forti", ad es. quello di continuità, di Archimede (corrispondenti al quinto gruppo della sistemazione hilbertiana): rappresentano un nodo fondazionale (sono chiari solo distinguendo *logica del primo e del secondo ordine*) e didattico ("scaricare" sui numeri reali il problema, come fa Prodi --e anche Dieudonné , anche se in forma diversa e più misteriosa per l'allievo--; oppure prendere di petto la continuità enunciando per esempio il principio delle sezioni di Dedekind; oppure ancora seguire vie didatticamente più accessibili ma concettualmente meno trasparenti, come fanno Nikulin & Shafarevich nel loro bellissimo volume *Geometries and Groups* ?).

4. Geometria, logica e tecnologia

Molti problemi logici traggono origine dai lavori fondazionali in geometria agli inizi del novecento. Qui ne discuterò schematicamente solo alcuni, cercando di esplicitare le loro radici geometriche (tra parentesi sono riportati i nomi di quei matematici che più hanno illustrato il problema). Va notato che alcuni di questi compaiono anche nei nuovi programmi ministeriali per il triennio, come argomento di studio (punto 1b della classe 5°, indirizzi scientifico e scientifico-tecnico):

a) Indipendenza e coerenza degli assiomi; il problema dell'assiomatizzabilita' finita (Pasch, Peano, Pieri, Hilbert, Tarski);

b) categoricità, completezza e decidibilità di un sistema di assiomi con certe regole di inferenza (Hilbert, Peano, Veblen, Tarski);

c) modelli di una teoria: modelli interni o meno, legami con la versione sintattica dei concetti di cui in a) e b) (Beltrami, Klein, Hilbert).

Il discorso è tanto più interessante in quanto la chiarificazione e distinzione di tali nozioni è estremamente delicata (ancora oggi si incontrano testi con errori su questo punto) e storicamente si afferma attraverso un cammino faticoso e spesso contraddittorio in cui il metodo assiomatico finisce per l'affermarsi di pari passo con la logica matematica stessa come nuova disciplina (si veda la discussione nel §1).

L'Hilbert dei *Fondamenti della Geometria* pencola nel 1899 tra categoricità e completezza per la sua teoria, anche se già dal 1901 non accetta l'identificazione tra le due nozioni; ma i termini della questione rimangono confusi per lungo tempo: si pensi che ancora nel 1930 F.Kaufmann nel suo libro *L'infinito in matematica* (tradotto recentemente in italiano), pur distinguendo tra le tre nozioni non si azzarda a dirle differenti.

Quello che occorreva è un approfondimento del concetto di *calcolo meccanicamente eseguibile* e dei rapporti tra questo e le *teorie formali*, in quanto sistemi meccanici che deducono teoremi dagli assiomi. Ma tale analisi sarà disponibile compiutamente solo negli anni trenta, grazie ai lavori di Gödel (1929-30), di Turing e di Church (1936).

I termini della questione saranno allora chiari: Bernays potrà aggiungere i suoi *Supplementi* ai *Fondamenti della Geometria*, come pure A.Tarski (che nel 1926 abbiamo visto tenere un corso di geometria a Varsavia usando la sistemazione assiomatica di M.Pieri) potrà elaborare il suo celebre teorema sulla decidibilità per l'algebra e la geometria elementare.

La celeberrima controversia tra geometria sintetica ed analitica, posta con enfasi nel 1803 da L.Carnot e che ispirò molti lavori di illustri geometri (Poncelet, Staudt, Pasch, ecc.) ha anch'essa una duplice valenza, sia didattica che fondazionale.

Un aspetto interessante e nuovo del problema si rifà alla discussione del punto precedente. Un grande progresso è stato per la geometria la disponibilità dei metodi analitici: i "geroglifici dell'analisi", come li definiva con disprezzo Carnot, sono senz'altro meno eleganti rispetto ai metodi sintetici, ma rappresentano uno strumento potente, in grado di funzionare sempre, in modo sistematico e meccanico. La riduzione della geometria a calcoli algebrici è una grande conquista, che non va sottovalutata didatticamente (si veda la discussione in merito all'inizio del cap. 13 della *Guida al progetto d'insegnamento della matematica* di G.Prodi) né culturalmente (ricordo l'elogio dei metodi meccanici quale indice di progresso per l'uomo, fatto da Whitehead nel 1911: cfr. la citazione in fondo a questa relazione). La riduzione della geometria a calcolo in un corpo e il cammino inverso (dalle operazioni in un corpo alla geometria su di questo) illustrato in FG, come sopra accennato, costituisce un risultato fondazionale molto profondo. Con le opportune precisazioni, si possono in certi casi, peraltro molto generali, identificare i due aspetti. la geometria diventa così algebra (dunque calcoli) e viceversa.

Si tratta di una vera rivoluzione concettuale, operata da Cartesio e definita nei suoi aspetti fondazionali nei lavori citati, da Wiener a Artin.

Ma vi è un secondo aspetto di questa rivoluzione, che ha una portata più generale e si afferma negli anni trenta con i citati risultati cruciali in logica di Gödel, Church, Turing, in cui si analizza la nozione di che cos'è un **calcolo**. Usando un linguaggio più moderno e suggestivo, i loro risultati possono essere

così riassunti:

a) non vi è distinzione, concettualmente, tra hard-ware e soft-ware: una macchina può essere codificata come un programma e un programma può essere inteso come una macchina;

b) un sistema di assiomi è un programma, dunque una macchina.

Con la rivoluzione cartesiana la geometria si identifica con l'algebra e quindi con dei calcoli (salve opportune distinzioni e ipotesi); con la rivoluzione di Gödel-Turing-Church ogni sistema formale si identifica con una macchina, è quindi calcolo.

Dimostrare un enunciato in geometria elementare non è diverso da fare una divisione; può darsi che a un certo punto si trovi resto zero oppure si deva continuare indefinitamente, perché il resto è sempre diverso da zero. Il primo caso corrisponde all'avere trovato una dimostrazione dell'enunciato. Il secondo corrisponde al caso in cui l'enunciato non è un teorema.

Che l'analogia con la divisione valga per la geometria elementare fu provato da A.Tarski, come già accennato (decidibilità della geometria elementare), ma non vale più se si considerano, ad esempio, gli assiomi per l'aritmetica o per il calcolo dei predicati (indecidibilità dell'aritmetica elementare --Gödel, 1930-- e del calcolo dei predicati del primo ordine --Church, 1936--). In questo caso la situazione può essere descritta con la metafora della scatola nera: è come se una scatola nera mi desse via via le cifre decimali di un numero reale, con l'eventuale informazione sulla sua periodicità, nel caso che il numero sia periodico (e solo in questo caso). Se il numero che la scatola nera mi trasmette è periodico, io presto o tardi lo saprò; ma se il numero, le cui cifre mi vengono via via trasmesse, è irrazionale sarò sempre nel dubbio se sto ricevendo le cifre di un antiperiodo con un periodo lunghissimo, oppure no.

Il fatto che la geometria elementare (nelle sue varie versioni: assoluta, euclidea, non euclidea) sia decidibile coinvolge due aspetti fondamentali.

In primo luogo, essa è definita come sistema formale e cioè (esemplificando per la geometria piana):

- è fissato un linguaggio, che individua gli enti geometrici di base (ad es. i punti) nonché le relazioni fondamentali tra questi (ad es. il fatto che un punto si trovi tra altri due punti lungo una retta, oppure che due segmenti siano tra di loro congruenti);

- le proprietà che regolano tali relazioni dipendono esclusivamente dagli assiomi della teoria (ad es. gli assiomi di Pieri-Tarski per la geometria piana);

- sono fissate le regole di deduzione per procedere dagli assiomi ai teoremi (una qualunque versione delle regole per il calcolo dei predicati del primo ordine va bene: ciò è conseguenza del teorema di completezza di tale calcolo, dimostrato da Gödel nel 1929).

In secondo luogo, occorre esibire un procedimento di calcolo (= un programma per un computer) tale che, dato un qualunque enunciato scritto nel linguaggio della teoria (NB: gran parte degli enunciati di geometria piana contenuti in un manuale delle superiori sono trascrivibili nel linguaggio del nostro esempio), il procedimento porta a concludere (con un calcolo eseguibile meccanicamente dal computer secondo le istruzioni del programma in un numero finito di passi) se tale enunciato sia o meno conseguenza logica degli assiomi, ovvero ne sia un teorema.

Lo studio della decidibilità di una teoria risulta come componente o perlomeno conseguenza del programma di Hilbert sui fondamenti della matematica (ricordo che il punto 6a nei nuovi programmi per la classe 5°, indir. scient. e scient.-tecn., recita: "esempi di problemi non decidibili"). Nella sua fase più matura, tale programma si proponeva di codificare le varie branche della matematica mediante opportuni sistemi di assiomi, con una logica soggiacente (pure essa assiomatizzata) come base comune per dedurre i teoremi dagli assiomi. Hilbert sperava che tale formalizzazione avrebbe fornito una mappa complessiva di tutti i teoremi delle discipline matematiche, ponendo così le basi per una dimostrazione di non contraddittorietà della matematica stessa. L'idea di fondo era che in matematica non esistono ignorabimus e che quindi tutte le teorie matematiche sono decidibili. Il risultato di Tarski (come molti altri riguardanti altre teorie matematiche) va inteso all'interno di tale programma hilbertiano.

Come è noto, i teoremi di incompletezza di Gödel (1930) e i risultati di indecidibilità di Church (1936) dimostrarono l'irrealizzabilità di tale programma. Quindi i risultati di decidibilità necessariamente non potevano non essere limitati a teorie parziali nelle quali non fosse esprimibile la potenza dell'aritmetica. Ne consegue che la geometria elementare, così come è codificata nel sistema di Pieri-Tarski non ha questa possibilità: essa infatti tipicamente può esprimere --e quindi dimostrare o refutare-- proprietà che riguardano ad esempio poligoni regolari di 7, 17 o 65537 lati ma non proprietà generali che coinvolgano poligoni con un numero n qualsiasi di lati (se si aggiunge questa possibilità si ottiene un sistema più potente di geometria elementare, che risulta indecidibile).

Un'osservazione è essenziale: il risultato di decidibilità di Tarski implica solo che i calcoli dell'algoritmo di decisione sono eseguibili in linea di principio (disponendo di tempo e memoria illimitati), ma essi risultano inavvicinabili da un punto di vista pratico. Infatti, l'algoritmo risolutivo permette di eliminare induttivamente i quantificatori di una formula della geometria (tradotta nel linguaggio delle coordinate cartesiane) utilizzando il teorema di Sturm sugli zeri reali di un polinomio in un intervallo: il processo completo presenta così molte ramificazioni e risulta assai lento (il conto fu fatto da Fisher e Rabin nel 1974). Ciò capita tipicamente con i risultati di decidibilità: ad es., il metodo delle tavole di verità permette di decidere un qualunque enunciato del calcolo proposizionale, ma risulta intrattabile da un punto di vista pratico (anch'esso procede induttivamente con ramificazioni corrispondenti alle scelte per i possibili valori di verità delle variabili proposizionali coinvolte).

Tutti questi algoritmi richiedono tempi di calcolo che crescono (almeno) esponenzialmente nella lunghezza dei dati (ad es., esistono problemi della geometria elementare che richiedono tempi di calcolo che crescono esponenzialmente con la lunghezza dei dati). Ora, perché un algoritmo sia implementabile da un punto di vista pratico bisogna scendere a complessità di tipo polinomiale, anzi bisogna che il tempo di calcolo sia confrontabile con polinomi di grado piuttosto basso (la variabile del polinomio rappresenta sempre la lunghezza dei dati); ad es. gli algoritmi dell'aritmetica razionale non vanno oltre il terzo grado.

Negli anni sessanta e successivi, con il diffondersi dei computer, si sono messi a punto procedimenti di calcolo effettivamente implementabili che risolvono (almeno parzialmente, cioè per sottoclassi opportune di problemi) anche da un punto di vista pratico problemi fino ad allora dimostrati risolubili solo in linea di principio, o addirittura non risolubili in generale.

Un tipico metodo di questo genere è il cosiddetto *metodo di risoluzione* per un'opportuna classe di formule del calcolo dei predicati del primo ordine: esso fu escogitato da Alan Robinson nel 1965 ed è alla base di molti procedimenti risolutivi oggi implementati su computer nel campo della cosiddetta dimostrazione automatica (ad es., è utilizzato nel PROLOG).

Tali procedimenti sono stati (e sono ancora oggi) utilizzati anche in ambito geometrico, ad esempio per dimostrare teoremi di geometria elementare. Si può infatti trarre vantaggio utilmente della doppia rivoluzione cui si accennava sopra (quella cartesiana e quella di Gödel-Church-Turing), approfittando non solo del fatto che le teorie geometriche sono assiomatizzabili ma anche del fatto che i problemi geometrici sono essenzialmente traducibili in relazioni algebriche, esprimibili come equazioni (in più indeterminate) a coefficienti in un campo.

Corrispondentemente si hanno dimostratori automatici di tipo sintetico (che usano per es. il metodo di risoluzione basandosi direttamente sulle formule della geometria come tali) e dimostratori automatici di tipo algebrico (che invece usano la traduzione del problema in linguaggio algebrico). I secondi risultano generalmente più efficienti dei primi, in quanto possono sfruttare proficuamente il linguaggio algebrico e le relative tecniche di calcolo (alcune anche sofisticate), che sveltiscono considerevolmente le procedure. Al momento tali tecniche sono disponibili solo per enunciati geometrici che non coinvolgono relazioni d'ordine. Ma anche così è stato possibile generare in tempi veloci centinaia di teoremi di geometria elementare, alcuni tutt'altro che banali. Gli strumenti utilizzati, che coinvolgono alcune nozioni di algebra (sostanzialmente quella di ideale in un anello di polinomi, quella di base di un ideale e la *Nullstellensatz* di Hilbert), sono oggi disponibili direttamente in alcuni software di base (*Maple, Mathematica*, ecc.).

A livello di ricerca, essi non costituiscono solo una raffinata curiosità: i metodi di dimostrazione automatica in geometria infatti sono alla base dei programmi di progettazione in robotica (ad esempio per progettare il movimento dei robot in ambienti sovraffollati, al fine di evitare le collisioni), in quella che si chiama *machine vision* (per progettare la navigazione automatica dei veicoli), nel CAD (disegno assistito da computer) e nel CAM (macchine assistite da computer).

Tali applicazioni illustrano ampiamente il seguente passo, già evocato, di A.N.Whitehead (in *Introduction to Mathematics*):

> "E' credenza ampiamente diffusa ma profondamente sbagliata, ripetuta in tutti i libri di testo e da personaggi illustri nelle loro conferenze, che si dovrebbe coltivare l'abitudine a pensare a ciò che si fa. Invece è proprio il contrario. La civiltà progredisce estendendo il numero di operazioni importanti che possiamo fare senza pensarci. Le operazioni di pensiero sono come le cariche di cavalleria in una battaglia - sono strettamente contingentate per quanto riguarda il numero, richiedono cavalli freschi e devono essere fatte solo nei momenti decisivi"

Penso che uno dei motivi di interesse odierno per i metodi assiomatici in geometria elementare consista proprio nel fatto che questi hanno reso possibile la (parziale) meccanizzazione del pensiero; i robot che si muovono oggi negli stabilimenti FIAT di Termini Imerese e di Melfi sono figli di Turing e nipoti di Hilbert.

Anche questo bisogna insegnare a scuola.

Bibliografia

Artin E, 1968: *Algebra geometrica*, Feltrinelli, Milano (traduzione di Geometric Algebra, Interscience Publ. Inc., USA, 1957).

Borsuk K. & Szmielew W., 1960: *Foundations of Geometry*, North Holland, Amsterdam.

Birkhoff G., 1932: A set of Postulates for plane geometry, Based on scale and Protractor, *Annals of Math.*, 33, 329-345.

Dieudonné J., 1970: *Algebra lineare e geometria elementare*, Feltrinelli, Milano (originale del 1968, Hermann, Parigi)

Fano G., 1937: *Geometrie non euclidee e non archimedee*, in : Berzolari L. et al. (ed.): Enciclopedia delle Matematiche Elementari, Hoepli, Milano, vol. II, parte II, pp.439-511.

Ferrari M. e Speranza F. (editori), *Epistemologia della Matematica*, Seminari 1992-1993, Progetto strategico CNR Tecnologie e Innovazioni Didattiche, Quaderno 14, pp.55-62.

Hilbert D., 1899: *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart; trad. it. della decima edizione del 1968: *Fondamenti della geometria*, con i Supplementi di P.Bernays, Feltrinelli, Milano, 1970.

Lolli G., 1994: *Metodo assiomatico e logica*, in: Ferrari & Speranza [94].

Marchi M., 1994: *Confronto tra i sistemi assiomatici di Peano e di Hilbert in geometria*, in: Ferrari & Speranza [94].

Nikulin & Shafarevich:*Geometries and Groups*

Pasch M., 1882: *Vorlesungen über neuere Geometrie*V, Teubner, Leipzig.

Peano G.,1889: *I principi di Geometria, logicamente esposti*, Bocca, Torino.

Pieri M., 1908: La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera", *Mem. Soc. It. Sci.* 15(3), 345-450 (= Opere, 455-560).

Prodi G., 1975: *Matematica come scoperta*, voll. I, II, D'Anna, Messina-Firenze.

Segre B., 1955: *Peano e il bourbakismo*, in: Tarski A. 1951: *A decision method for elementary algebra and geometry*, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

Tarski A. 195 :*What is elementary geometry?*, in: Henkin L. & Tarski A. (eds.), Symposium on the Axiomatic Method, North Holland, 16-29.

DIBATTITO

“Intuizione e rigore in geometria”

A proposito di intuizione e di rigore nell'insegnamento-apprendimento della geometria: il problema dell'approccio agli enunciati e alle dimostrazioni

Paolo Boero *

1. Le concezioni degli studenti del primo anno di università sui teoremi e le dimostrazioni della geometria

Vorrei anzitutto riferire su alcuni dati che ho raccolto negli anni scorsi a proposito della situazione di ingresso all'Università nel corso di laurea in Chimica, per quanto riguarda le concezioni che gli allievi hanno della "dimostrazione" e della validità di un "enunciato" di geometria.

In base ad una indagine ripetuta per tre anni consecutivi con strumenti e modalità diverse - questionario con risposte a scelta, intervista, domande scritte aperte - posso stimare che oltre un terzo degli allievi considerati ritiene che la validità della dimostrazione di un teorema di geometria elementare, prodotta da uno studente del primo biennio delle scuole superiori, e la validità di un enunciato, scritto da uno studente del biennio, non possano essere stabilite da un bravo studente che esce dalle scuole superiori senza l'ausilio di libri o di esperti perché *"ci vuole il matematico che sa se il ragionamento è giusto", "ci vuole il matematico perché solo lui sa se il teorema è giusto", "bisogna vedere sui libri se c'è quel teorema"* (o *"se il teorema è vero")*. Anche vari colloqui con gli studenti di Chimica nel corso del I anno, a proposito delle loro difficoltà nello studio della matematica, confermano questa estraneità di molti iscritti a un corso di laurea impegnativo della Facoltà di Scienze ad aspetti importanti del lavoro matematico: quello che importa non è capire se una affermazione è vera oppure no, se un ragionamento è corretto oppure no; quello che importa è adeguarsi a quello che dice il docente: *"Al Liceo, il teorema di Rolle lo avevamo dimostrato così... Va ancora bene, oppure dobbiamo impararlo come lo ha dimostrato lei?" "Se la dimostrazione è valida, va bene anche quella del Liceo" "Come facciamo a saperlo se è valida? Ce l'aveva spiegata il nostro professore..."* La validità di un enunciato o di una dimostrazione sembra dipendere dal "principio di autorità",

* Dipartimento di Matematica, Università di Genova.

non da ragioni intrinseche accessibili a uno studente di I anno di università con una normale preparazione in campo matematico!

Quest'anno (1994/95) l'indagine è stata estesa a studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Fisica della Facoltà di Scienze di Alessandria e a studenti iscritti ai corsi della Facoltà di Ingegneria di Genova che si tengono presso la sede staccata di Savona (oltre 300 studenti in tutto).
L'indagine è stata svolta attraverso un questionario con risposte a scelta, nel quale per la domanda così formulata:
"Un ragazzo di 16 anni che frequenta il secondo anno del liceo scientifico scrive una sua dimostrazione di un teorema che sul suo libro di testo è riportato senza dimostrazione. Per stabilire se la dimostrazione è valida,......"
era stata aggiunta (accanto alle altre già presenti nei questionari degli scorsi anni) la seguente possibilità di risposta:
" - è necessario verificare che non ci siano controesempi per l'enunciato da provare "
Hanno scelto tale risposta complessivamente il 46% degli studenti, senza grosse differenze tra i diversi corsi di laurea, tra le sedi di Savona e di Alessandria e tra le scuole di provenienza (con una percentuale un po' più bassa per gli studenti provenienti dal liceo classico).

Ci possiamo chiedere perché si determina una situazione del genere. A mio avviso, le ragioni sono di due tipi:
(a) prevalenza, nelle scuole preuniversitarie, delle attività di ripetizione degli enunciati e delle dimostrazioni sulle attività di produzione di enunciati, di analisi delle congetture e di costruzione delle dimostrazioni. In effetti in vari colloqui che ho avuto quest'anno e lo scorso anno con i miei studenti di Chimica è risultato che praticamente nessuno ricorda di essere stato mai richiesto di produrre una congettura, e pochissimi ricordano di essere stati qualche volta richiesti di analizzare la validità di una congettura o di costruire delle dimostrazioni; esaminando insieme alcuni loro libri di testo, siamo arrivati invece a contare molte decine di "teoremi da studiare" ogni anno (soprattutto in geometria nelle prime classi, e poi prevalentemente in altri ambiti della matematica);
(b) scarso peso, in molte scuole, della riflessione sul significato del "dimostrare"; scarso peso, in particolare, di tale riflessione nelle ore di matematica: significativamente, molti degli studenti che hanno formulato risposte del tipo *"sì, uno studente che esce dalle scuole superiori è in grado di accertare la validità di una dimostrazione di un teorema di geometria elementare prodotti da un alunno del biennio"* ad una domanda proposta lo scorso anno, hanno dichiarato (in una successiva intervista) di essersi riferiti esplicitamente a cose studiate o discusse non nei corsi di matematica, ma nei corsi di filosofia!

2. Difficoltà che si incontrano in un approccio "costruttivo" e "critico" agli enunciati e alle dimostrazioni della geometria
Ipotizzando di dare più peso alle attività di produzione di congetture e di dimostrazioni da parte degli allievi e alle attività di riflessione sugli enunciati e sulle dimostrazioni, quali difficoltà si incontrano e come è possibile fare fronte ad esse?
La ricerca in campo cognitivo e didattico ha messo in luce vari aspetti di cui occorre tener conto se si vuole operare in modo produttivo in tale direzione.

Per quanto riguarda l'allievo, occorre che egli possieda:

i) sufficienti prerequisiti logico-linguistici: l'importanza di essi è ovvia, meno ovvie sono le strategie didattiche per costruirli; sono ben note le difficoltà che gli insegnanti di matematica delle scuole superiori incontrano quando cercano di operare in questo campo, per via del tempo ridotto a disposizione e della caratterizzazione rigidamente disciplinare della loro cattedra (che non lascia molto spazio per interventi in ambito linguistico). In realtà, i prerequisiti logico-linguistici necessari per la produzione e la comprensione degli enunciati e per lo sviluppo delle dimostrazioni potrebbero e dovrebbero essere costruiti a partire dalla scuola elementare (tenuto conto delle indicazioni contenute nei programmi vigenti: linguaggio naturale come *"strumento del pensiero "*);

ii) prerequisiti a livello metacognitivo: il "distanziamento" dall'oggetto della riflessione è necessario per la riflessione sul significato del "dimostrare"; ma anche nella costruzione di un enunciato o di una dimostrazione, nella ricerca di controesempi, ecc. appare necessario ragionare sui ragionamenti da fare, sulle attività da intraprendere, sul significato di quello che si è fatto; anche in questo ambito, si potrebbe e si dovrebbe operare a partire dalla scuola elementare, ad esempio con attività di confronto e riflessione sulle strategie usate nella risoluzione dei problemi;

iii) prerequisiti concettuali: essi riguardano le conoscenze dei contenuti matematici che intervengono nella costruzione degli enunciati e delle dimostrazioni (ad esempio, la padronanza del concetto di angolo è necessaria per alcuni dei primi teoremi su cui si lavora nella geometria euclidea). La costruzione di questi prerequisiti non appare particolarmente difficile nel caso della geometria, pur di seguire le indicazioni dei vigenti programmi della scuola elementare e della scuola media.

Occorre infine che l'allievo sia già abituato ad assumere per sé il compito di validare un procedimento, una affermazione, ecc. (indipendentemente dall'autorità dell'insegnante). In questa direzione l'insegnamento della matematica abitualmente praticato in Italia appare molto carente. Però c'è da chiedersi se ciò almeno in parte non dipenda, soprattutto alla fine della scuola media e all'inizio delle scuole superiori, dal fatto che l'insegnante oggi fa molta fatica a "tenere la classe", il che lo può indurre a estendere l'esercizio del "principio di autorità" a tutti i terreni su cui si sviluppa il rapporto con gli allievi - compreso il terreno del ragionamento matematico dell'allievo!

Per quanto riguarda gli obiettivi da raggiungere, appare opportuno tener conto degli aspetti epistemologici (elementi di continuità e elementi di rottura tra enunciati geometrici e affermazioni di "senso comune", tra "dimostrare" e "ragionare" deduttivo comune). E' noto che a questo proposito esistono posizioni diverse tra quanti si occupano di didattica, di epistemologia, di storia e di filosofia della matematica (cfr. Arsac, 1987; Szabò, 1961); comunque elementi di continuità (più o meno estesi) esistono senz'altro, e così elementi di rottura.
La continuità pone la necessità (e offre l'opportunità) di sviluppare preliminarmente quegli aspetti del "discorso scientifico" che intervengono nella dimostrazione matematica, e ciò richiede di programmare opportune attività di "formulazione di proprietà" e di "ragionamento deduttivo" accessibili agli allievi (anche al di fuori del campo strettamente matematico - ciò in particolare è possibile nell'ambito della cattedra di Scienze MCFN della scuola media).
Per quanto riguarda gli elementi di rottura appare necessario tener conto della necessità che in relazione ad essi l'insegnante eserciti un ruolo mediatore efficace: alla rottura, ai necessari salti rispetto al ragionar comune e alle affermazioni comuni gli allievi non possono infatti pervenire da soli in tempi ragionevoli; occorre che l'insegnante faccia percepire agli allievi la necessità di un salto e poi trovi il modo per guidarli nell'effettuarlo (facendo riferimento al sapere geometrico standard). In particolare, appare delicato il problema del passaggio da un discorso semplicemente "convincente" a un discorso veramente "rigoroso". In effetti in campo geometrico un discorso può essere "convincente" perché basato sull'evidenza del disegno geometrico realizzato ed eventualmente ripetuto per configurazioni geometriche che soddisfano le ipotesi del teorema, oppure perché dà per scontate proprietà che scontate non sono.

3. Verso un insegnamento efficace e culturalmente equilibrato della "geometria razionale"

Una volta messi a fuoco i problemi considerati al punto precedente, si tratta di

passare alla costruzione di itinerari didattici efficaci che li tengano in debito conto. A tal fine è opportuno utilizzare criticamente risultati di ricerca ed esperienze italiane e straniere

Per quanto riguarda l'approccio alle dimostrazioni, la letteratura disponibile a livello internazionale riferisce su esperimenti controllati che possono fornire elementi per la scelta personale che ogni insegnante deve fare (in relazione alla classe particolare in cui insegna, alle scelte culturali sue e del libro di testo adottato, all'itinerario didattico scelto per la geometria, ecc.). Non si tratta, quindi, di riprodurre nella propria classe le situazioni didattiche descritte dettagliatamente da Balacheff nella sua tesi di stato o da Duval nei suoi articoli, ma di tener conto delle potenzialità che emergono per certe "consegne", delle difficoltà descritte, delle interpretazioni e delle modellizzazioni proposte del comportamento di allievi e insegnanti.
Lo stesso vale per l'analisi della validità di una congettura e anche per la costruzione di una congettura (nella tesi di Balacheff si affrontano anche questi aspetti dell'approccio alla geometria razionale). Per quanto riguarda la costruzione delle congetture in geometria, un aiuto notevole può venire da un uso intelligente dei software disponibili da alcuni anni, come Cabri o Geometric Supposer (vedi Laborde& Laborde, 1992; Yerushalmy & Chazan, 1990).

Ancora a proposito dell'approccio alle dimostrazioni, vorrei segnalare un problema che da alcuni anni stiamo cercando di approfondire nel Nucleo di Ricerca Didattica di Genova e che riguarda l'ambito più opportuno in cui realizzare tale approccio. In effetti ci si può chiedere se sia meglio affrontare per la prima volta le dimostrazioni matematiche in campo geometrico (come accade tradizionalmente) o in campo aritmetico. Come stiamo verificando in un lavoro di ricerca con le insegnanti Alfonsina Sibilla e Rossella Garuti, in campo aritmetico sono facilmente accessibili proprietà non immediatamente evidenti, "scomode" da verificare (per la quantità di calcoli che la verifica richiede su esempi non banali), e quindi di dimostrazione motivata.... ma tale dimostrazione risulta non ovvia! Un esempio interessante (per il livello I-II media) è il seguente: *" due numeri naturali consecutivi sono primi tra loro".*

Per quanto riguarda la formulazione degli enunciati, si tratta di un'area finora poco studiata nella ricerca a livello internazionale.
In un lavoro esplorativo svolto a livello di scuola media (con inizio in I media e conclusione in II media), si è cercato di costruire delle situazioni "classiche" di lavoro geometrico riguardanti la modellizzazione del fenomeno delle ombre del sole. Presentato l'aneddoto su *"Talete e l'altezza della Piramide"*, l'insegnante che

partecipava alla ricerca (Rossella Garuti) ha chiesto agli allievi di formulare un "testamento" attraverso cui Talete avrebbe potuto comunicare ai posteri le sue scoperte (che erano le stesse scoperte effettuate dagli alunni sotto la guida dell'insegnante). Per via della consegna, parecchi testi prodotti presentavano interessanti aspetti di "generalizzazione" delle esperienze intellettuali compiute, e si riferivano a figure geometriche (e non più ad ombre!). Qualche testo era anche formulato in modo "condizionale" (cioè nella forma: *"ammesso che.... è vero che...."*). Il successivo confronto tra i testi prodotti dagli alunni e alcuni enunciati del Teorema di Talete tratti dai libri di testo delle scuole superiori ha consentito di mettere in evidenza i caratteri di "generalità", "astrazione" e "condizionalità" che devono essere posseduti da un enunciato geometrico. In effetti tale confronto ha assunto una funzione di mediazione tra le produzioni degli allievi e il sapere geometrico ufficiale, consentendo ai singoli allievi di collocare le loro produzioni rispetto alla forma in cui tale sapere si esprime nei testi di matematica. In particolare, si è notato che alcuni allievi cercavano di trasformare il loro enunciato in modo di avvicinarlo ad uno degli enunciati ufficiali (ad esempio rendendolo più astratto, o più generale, o mettendo esplicitamente in evidenza l'ipotesi). Altri allievi invece cercavano di "applicare" l'enunciatò ufficiale alla situazione da loro considerata, mettendo in evidenza come l'enunciato ufficiale assicurava la validità delle loro affermazioni. In entrambi i casi, si era stabilità comunque un rapporto attivo tra il sapere degli alunni e il sapere geometrico ufficiale. Per ulteriori dettagli, vedi Boero & Garuti, 1994.

Esperienze come questa (o come quelle descritte da Balacheff nella sua tesi) dovrebbero incoraggiare gli insegnanti ad avere più fiducia, già nella scuola media, nelle capacità dei loro allievi di realizzare un approccio "costruttivo" alla cosiddetta "geometria razionale", partecipando direttamente (sotto la guida attenta e consapevole dell'insegnante, e -ove necessario- con la sua mediazione) ad alcuni dei momenti più importanti del lavoro geometrico: costruzione, formulazione e validazione di enunciati; costruzione di dimostrazioni.

Bibliografia

Arsac, G.: 1987, 'L'origine de la démonstration:...', *Recherches en didactique des mathématiques*

Balacheff, N.: 1987, 'Processus de preuve et situation de validation', *Educational Studies in Mathematics*

Balacheff, N.: 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématiques*, thèse d'état, Université J. Fouries, Grenoble

Boero, P.; Garuti, R.: 'Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements', *Proceedings PME-XVIII*, Lisbon 1994

Duval, R.: 1991, 'Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration', *Educational Studies in Mathematics*

Hanna, G. & Winchester, I.(Eds.): 1990, *Creativity,Thought and Mathematical Proof*, OISE, Toronto

Hanna, G. & Jahnke, N. (Eds.): 1993, Aspects of Proof, special issue of *Educational Studies in Mathematics*

Heath, T.: 1956, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* , Dover, New York

Laborde, C. & Laborde, J.M.: 1992, 'Problem Solving in Geometry:...', in J.P. Ponte et Al. (Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, Springer-Verlag, Berlin

Mesquita, A.L.: 1989, 'Sur une situation d'eveil à la déduction en géométrie', *Educational Studies in Mathematics*

Piaget, J. et Inhelder, B.: *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, P.U.F., Paris

Serres, M.: 1993, *Les origines de la géométrie*, Flammarion, Paris

Szabo, A.: 1961, 'The transformation of mathematics into deductive science and the beginning of its foundation on definitions and axioms', I/II, *Scripta mathematica*, vol. XXVII

Yerushalmy, M. & Chazan, D.: 1990, 'Overcoming Visual Obstacles with the Aid of Supposer', *Educational Studies in Mathematics*

Intuizione e rigore in geometria

Mario Marchi *

1. C'è un vecchio aforisma che ho imparato anni fa dal mio Maestro (e Lui, a sua volta, aveva imparato dal suo) che avevo quasi dimenticato e ho ritrovato invece, ora, di incredibile attualità, proprio leggendo recenti articoli di psicologia dell'apprendimento:

"La Geometria è l'arte di fare i ragionamenti giusti
sulle figure sbagliate".

Questa proposizione, con un po' di gusto del paradosso e dell'ironia, mi pare riassuma in modo suggestivo le contraddizioni, la dialettica interna di quella scienza, difficile e affascinante, perennemente sospesa tra intuizione e rigore, che è la geometria. Essa riassume anche, in modo ironico ma profondo, certi risultati di ricerche della psicologia cognitiva molto attuali, ben fondati, che per spiegare il comportamento della mente introducono una specifica nozione denominata *"concetto figurale"*.

"Intuizione e rigore" ci sembra un binomio così naturale, se stiamo parlando di geometria, che appare quasi come una caratterizzazione di tale disciplina.

Eppure queste categorie mentali (l'intuizione e il rigore!) sono presenti in modo essenziale in tutto il corpo della matematica. Ci chiediamo allora: perché sembra che esse possano caratterizzare in modo così specifico la geometria?

Per tentare una risposta dobbiamo osservare che nella geometria è del tutto peculiare il rapporto con la realtà poiché la realtà non solo ispira, suggerisce, pone i problemi, ma è essa stessa, in parte, anche oggetto di studio (pur se in modo inconsapevole e solo a livello psicologico) e questo è tipico della geometria e non, per esempio, dell'algebra o dell'analisi, che hanno solo la natura di linguaggio.

La prova di questo fatto si può avere con la osservazione che le contraddizioni, o almeno i contrasti, tra intuizione e rigore (= ragionamento deduttivo) sono nate proprio a partire da considerazioni geometriche: la scoperta degli incommensurabili, la nozione di continuo, le negazioni del V postulato.

D'altra parte un ulteriore ambito in cui nascono contraddizioni e antinomie è quello della teoria degli insiemi e della logica, dove pure, a fianco della costruzione matematica formale (= rigore), appare una realtà che psicologica-

* Dipartimento di Matematica, Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia.

mente si presenta come un contenuto naturale e che si conosce attraverso la intuizione: i meccanismi di funzionamento della nostra mente.

2. Esamineremo ora la presenza caratterizzante del binomio intuizione-rigore in due contesti molto significativi e interessanti: nell'ambito della storia del pensiero matematico e in funzione della ricerca scientifica.

Intuizione e rigore nella storia

Esaminiamo il binomio intuizione-rigore nello sviluppo del pensiero geometrico.

Sappiamo che la geometria nasce, dall'epoca di Talete, come razionalizzazione delle esperienze sensoriali, e ciò dopo un periodo precedente di pre-geometria, caratterizzato dall'uso di regole pratiche e formule empiriche non organizzate in un sistema razionale, deduttivo. In questa attività di razionalizzazione si prospettano subito i due termini del binomio: l'intuizione che deduce le proposizioni ritenute vere direttamente dalla valutazione della realtà e il rigore (= razionalizzazione della realtà!) che consiste nel far diventare la geometria una scienza deduttiva.

Sappiamo che questo è un processo che si evolve a partire da Talete attraverso la Scuola Pitagorica per arrivare a Euclide, nella cui opera sono elencate esplicitamente le parole che si usano (i *termini*!**) e le proposizioni assunte come vere (i *postulati*!) da cui poi si deducono, attraverso dimostrazioni, i *teoremi*. All'inizio tale processo è ancora un misto tra intuizione e rigore. L'intuizione infatti, che è assunta per dare valore di verità ai postulati, è una componente sempre presente anche nelle dimostrazioni poiché l'assiomatizzazione non è di fatto completa e ai "termini" si attribuiscono inconsapevolmente delle proprietà oggettive. Tuttavia sappiamo che già ai tempi dei pitagorici iniziano a rivelarsi i possibili conflitti tra intuizione e rigore. Esemplare è, a questo proposito, la scoperta degli incommensurabili (cioè degli irrazionali). Ed è proprio a partire da queste esperienze che i matematici giungono progressivamente a non accettare l'evidenza intuitiva come conclusiva di un ragionamento.

Successivamente, la crisi conseguente alla scoperta (o invenzione?) delle geometrie non euclidee e la conseguente cosiddetta "crisi dei fondamenti" hanno portato alle costruzioni assiomatiche moderne di PASCH, HILBERT, PEANO, che si presentano con una veste completamente formale e quindi come una costruzione intellettuale basata sul solo rigore (= ragionamento deduttivo).

Non di meno tali costruzioni si fondano altrettanto profondamente sulla intuizione, anche solo in modo implicito (come nel caso di HILBERT che offre

** Invero recenti lavori di storia vogliono posticipare il loro inserimento in tempi successivi ad Erone (I sec. d.C.).

una sistemazione rigorosa della geometria di Euclide), oppure in modo esplicitamente dichiarato, come nel caso di PEANO.

L'esistenza di questo binomio intuizione-rigore con la dialettica che lo accompagna, con le crisi e le tensioni che si sono verificate al suo interno, non è però solo un episodio "giovanile" della geometria che ha segnato il passaggio dalla geometria dell'epoca classica (di Euclide) a quella moderna (dei fondamenti di PASCH, HILBERT, PEANO ...) per arrivare ormai alla forma definitiva attuale del formalismo in cui la geometria rientra nelle categorie dei linguaggi matematici e sembra quasi perdere la sua peculiarità.

Vi è, al contrario, una situazione di conflitto (nel senso di dialettica) permanente che accompagna tutti i successivi e continui sviluppi della disciplina geometrica.

Possiamo infatti collegare il nascere di diversi filoni disciplinari in cui si articola attualmente la geometria con episodi di crisi che hanno investito, una dopo l'altra, le diverse basi intuitive della geometria stessa (cfr. [2]).

Tali crisi hanno portato con sé la perdita di fiducia nel valore della evidenza di determinate intuizioni, intuizioni sulle quali era fondata la ipotizzata verità delle proposizioni conseguenti; e quindi hanno comportato la necessità di un processo razionale, operato a partire dai dati sensoriali, di astrazione (dagli elementi contingenti che non interessano) di generalizzazione (per uscire dall'ambito limitato e locale della esperienza), di formalizzazione.

Esemplarmente ci si può riferire ai seguenti atteggiamenti della geometria classica:

i) l'accettazione del concetto di corpo rigido (o movimento rigido) come evidente ed intuitivo;

ii) la accettazione acritica della estrapolazione delle nostre esperienze fisiche locali ad una distanza comunque grande;

iii) la accettazione acritica del concetto di continuo.

Potremmo dire che la perdita di certezza relativa alle nozioni del punto (i) ha portato alla geometria proiettiva e, con l'ampliamento del gruppo delle trasformazioni geometriche, alla geometria algebrica nel senso classico.

La crisi relativa al punto (ii) ci porta da una parte alle geometrie non-euclidee e dall'altra alla geometria differenziale.

La crisi del concetto intuitivo di "continuo", indicata al punto (iii), ci porta alla moderna topologia con la nozione di trasformazioni biunivoche e bicontinue che generalizzano ancora le intuizioni del punto (i).

Intuizione e rigore nella ricerca

Quanto il binomio intuizione-rigore faccia profondamente parte dello spirito e dell'essenza stessa della geometria può essere messo in evidenza, a mio parere, anche guardando all'ambito della ricerca scientifica avanzata. A questo proposito c'è una celebre polemica (che io assumo qui come emblematica) che ha interessato, alla fine dello scorso secolo (circa 1890-92), Giuseppe VERONESE e Corrado SEGRE, da una parte, e Giuseppe PEANO dall'altra (cfr. [3]).

Argomento della polemica fu proprio il ruolo di rigore e intuizione nell'ambito della ricerca scientifica in geometria.

L'occasione prossima al nascere della polemica fu il sorgere del problema di come introdurre la nozione di "punto" nello spazio ad n-dimensioni.

Già nella seconda metà dell'800 nel mondo dell'analisi si usava con disinvoltura un linguaggio geometrico nel quale comparivano espressioni come "spazio n-dimensionale" (Cayley, 1846). Nacque di qui una nozione spontanea di "iperspazio" che tendeva ad entrare anche nella trattazione geometrica.

Parlare di iperspazi (= spazi a n dimensioni) significava allontanarsi, però, da un approccio intuitivo e sensoriale della geometria per ottenere generalizzazioni di cui occorreva avere chiaro il significato.

Per svolgere questo lavoro era necessario adottare un metodo rigoroso, ma non tutti gli studiosi erano d'accordo su che cosa si doveva intendere per rigore.

La posizione di VERONESE, per esempio, si basa essenzialmente su un ricorso alla intuizione spaziale (ordinaria!) che Egli estende poi (= generalizza) liberamente al caso di "più di tre dimensioni" (senza tuttavia dire che cosa ciò vuole significare). Egli scrive: "il punto (dell'iperspazio) è il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario ... ogni considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi..."

E' l'intuizione, dunque, che viene "educata" e da spaziale diviene iperspaziale. E' ovvio che ci si debba però porre adesso il problema del significato logico che questa intuizione "educata" può avere.

Corrado SEGRE, in una Nota del 1891, concorda con il punto di vista di VERONESE che giudica il più "geometrico" e "pienamente intuitivo". Egli lavora allo scopo di geometrizzare l'algebra piuttosto che considerare la geometria come una "finzione" dell'algebra.

Per entrambi gli studiosi è sempre l'intuizione che permette di cogliere la prospettiva di ricerca più produttiva e permette di correggere il tiro se ci si avvia verso un vicolo cieco. E' l'intuizione, essi sostengono, che fa progredire la scienza. Il rigore, anche se necessario in matematica, non può e non deve ostacolare questo progresso.

G.PEANO ritiene invece ingenua la posizione di SEGRE e VERONESE poiché afferma che è necessario esaminare accuratamente le premesse in base alle quali si vuole sviluppare la matematica. E in ciò consiste il rigore. L'intuizione può solo aiutare a non perdere di vista i punti di partenza e gli obiettivi che ci si pone. Egli afferma risolutamente che "i lavori nei quali manca il rigore non possono fare avanzare di un passo la matematica".

Certo sarebbe interessante una analisi psicologica per capire fino in fondo che cosa intendevano i tre studiosi per rigore o intuizione (perché PEANO di intuizione doveva averne parecchia e SEGRE non manca certo di rigore nelle sue opere ... !).

Non possiamo approfondire questo discorso interessantissimo, ma non possiamo neanche dimenticare la celeberrima definizione di PEANO:

"Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell'affermare tutte cose vere e nel non affermare cose che sappiamo non vere. Non sta nell'affermare tutte le verità possibili".

3. Ho cercato di tratteggiare alcuni fatti che ci mostrano quanto il binomio intuizione-rigore sia profondamente legato alla geometria: al suo studio, alla sua crescita.

Queste considerazioni ci interessano particolarmente nel momento in cui vogliamo riflettere sui problemi dell'insegnamento/apprendimento della geometria, sulle difficoltà, sulle strategie ma anche sulle occasioni formative che esso offre.

La relazione successiva a questa esaminerà diffusamente difficoltà, strategie, finalità, con particolare riferimento all'esecuzione di dimostrazioni e alla enunciazione di proposizioni. Io ora mi propongo di sottolineare principalmente le occasioni formative che l'insegnamento e lo studio della geometria può offrire e quanto la geometria possa essere occasione per sviluppare i due valori intellettuali costituiti da intuizione e attitudine e capacità al ragionamento corretto (= rigore!) (cfr. [5], [6]).

E' importante notare, prima di tutto, che queste finalità sono esplicitamente espresse nei programmi ministeriali di insegnamento: sia per la scuola secondaria inferiore sia per la scuola secondaria superiore (e particolarmente nel testo della proposta di nuovi programmi della cosiddetta "Commissione Brocca").

Scuola Media inferiore

Enunciato del Tema: *La geometria prima rappresentazione del mondo fisico*.

Contenuti: *"Dagli oggetti ai concetti geometrici"*. Ciò va inteso come un "esercizio guidato" a partire dalla intuizione per pervenire ad una forma di razionalizzazione (= concetti geometrici!).

Obiettivi:

i) *stimolare le capacità intuitive degli alunni;*

ii) *condurre a verificare la validità delle intuizioni per mezzo di* *ragionamenti;*

iii) *sollecitare ad esprimersi e comunicare in un linguaggio che diventi sempre più chiaro e preciso anche mediante un confronto tra il linguaggio comune e quello più formale della matematica.* (Questo obiettivo sarà preso in considerazione in particolare nella relazione del prof. BOERO).

<u>Scuola Secondaria superiore</u>

Nel commento al tema "Geometria" (per il biennio, ma è valido anche per il triennio) viene detto:

"Lo studio della geometria ha la finalità di condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale.

Lo studio della geometria rappresenta dunque una "guida privilegiata" alla consapevolezza argomentativa giungendo ... (dalle conoscenze intuitive) ... allo sviluppo razionale di (limitate) catene di deduzioni".

Siamo dunque sempre in presenza di un passaggio (guidato) dalla intuizione all'argomentazione razionale (= rigore). Successivamente si precisa ancora meglio che cosa si deve intendere per "rigore": *"è necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento".*

A proposito di questa ultima indicazione possiamo notare che questa non è altro che la definizione di rigore che dà PEANO, non solo, ma questa stessa frase ci dice quanto sia vicino l'apporto della fantasia al rigore, quanto sia un preconcetto che il rigore sia una costrizione che è contrapposta alla libertà della fantasia. Si dice infatti *"quali che siano le ragioni ..."* e questa è proprio l'azione della fantasia, è la libera creazione di mondi improbabili ma reali (cfr. [4], [5]).

Queste osservazioni, valide nella scuola media, si possono estendere, nelle misure opportune, anche alla scuola elementare, dove i programmi del 1985 da una parte sottolineano il legame con la realtà ma dall'altra tendono ad interpretare la geometria come una concettualizzazione della realtà stessa: *"sistemazione delle esperienze spaziali"* (dicono i programmi).

4. Questo esame dei programmi ci porta a dire che anche nella educazione geometrica, come nella storia del pensiero e nella stessa ricerca scientifica, intuizione e rigore sono un binomio inscindibile e non si ha vera educazione se non si cerca di formare ad entrambe le componenti.

Non c'è una età per la intuizione e una per il rigore. Ad ogni età ed ogni livello scientifico è indispensabile l'intuizione. E ogni età ha il suo livello di rigore

che, come abbiamo detto, non è (necessariamente) un esplicito riferimento ad un sistema di assiomi, ma è una educazione a "rendere ragione". Infatti anche l'uso e la manovra dei sistemi di assiomi può diventare meccanica, di "routine" e così pure la tecnica delle dimostrazioni. E ciò non è formazione matematica, ma solo addestramento. Al contrario, l'abitudine al bisogno di chiedersi il perché e di giustificare le proprie affermazioni, questo è rigore e questa è vera formazione.

Le esigenze formative di cui parliamo, valide sul piano umano, non meno che su quello intellettuale, trovano una ragione e una giustificazione in precise analisi che riguardano la psicologia dell'apprendimento e i meccanismi mentali che presiedono alla formazione dei concetti.

Mi riferisco, in particolare, ai risultati di E.FISCHBEIN e di altri studiosi (ricordo la prof. MARIOTTI dell'Università di Pisa) che attraverso la nozione di "concetto figurale" hanno messo in evidenza il fatto che nella formazione dei concetti geometrici la componente dell'immagine geometrica (sotto forma di immagine mentale sulla quale si opera essenzialmente con la intuizione) e la componente concettuale, logica (nella quale si opera con il ragionamento deduttivo che controlla ed è controllato dal rigore) costituiscono una unica entità mentale omogenea, che ha una doppia natura simultanea ed è diversa dal puro concetto o dalla pura immagine (cfr. [1], [7]).

Questa è forse la ragione per cui lo studio della geometria è così educativo e così difficile: poiché esso stabilisce sempre un ponte tra il livello psicologico-intuitivo (in cui gli oggetti del ragionamento geometrico sembrano conservare le loro proprietà reali) e il livello del ragionamento formale controllato da un sistema di definizioni e di assiomi. Invero la distanza tra i due livelli può a volte anche diventare molto grande e questo rende difficile ma affascinante lo studio della geometria.

E' riflettendo su questi dati che torna alla mente la sintesi maliziosa e paradossale costituita dall'aforisma da cui siamo partiti.

Ed è anche da queste riflessioni che si può avere una conferma della convinzione (già espressa) che l'insegnamento della geometria non può trascurare un esplicito ruolo dell'aspetto concettuale di tale disciplina.

In altre parole, mentre non è possibile abbandonare completamente il terreno della visualizzazione, si deve pure rilevare che il momento della esplicitazione dei concetti non è un fatto accessorio, ma una componente fondamentale dell'insegnamento/apprendimento della geometria.

L'obiettivo didattico dell'insegnamento della geometria deve dunque tener conto di questi due livelli e della necessità di rendere armonica la loro interazione e il loro sviluppo in tutti i livelli scolari in cui ci troviamo ad operare.

Bigliografia

[1] Fischbein E., *The theory of Figural Concepts*, Educational Studies in Mathematics. 24 (1993), 139-162.

[2] Manara C.F., *La generalizzazione del concetto di geometria*, Nuova Secondaria, 6 (1985), 31-34.

[3] Manara C.F., Spoglianti M., *Le idee di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G.Peano, C.Segre e G.Veronese*, Atti Accademia Naz. Modena; IV, 19 (1977), 109-129.

[4] Marchi M., *Geometria elementare nel geopiano*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, **4**, 6 (1981), 5-78.

[5] Marchi M., *Aspetti educativi di una presentazione assiomatica della geometria*, Nuova Secondaria, n.6 (1984), 66-69; n.8 (1984), 81-82.

[6] Marchi M., *Rigore e verità nell'insegnamento della matematica*, Atti del Convegno in memoria di Luigi Campedelli (30 maggio - 1 giugno 1988), 69-80.

[7] Mariotti A., *Immagini e concetti in geometria*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate. **15**, 9 (1992), 863-885.

DIBATTITO

"Aspetti matematici e fisici

nell'epistemologia della geometria"

Aspetti matematici e fisici nell'epistemologia della geometria

Umberto Bartocci *

E' oggi opinione pressoché generale presso gli operatori del settore che di una riflessione "filosofica" sui fondamenti della matematica si possa tranquillamente fare a meno (non è stato forse già detto tutto?, e lo sviluppo della matematica non ci ha forse condotti all'approdo più conveniente e desiderabile?). Così, nel più delicato momento di avvio di un processo di formazione, si continua ad esibire di fronte ai malcapitati studenti con sicura imperturbabilità quella "rozza e superficiale mistura di sensismo e di formalismo" già rimproverata con scarso successo ai matematici da Hermann Weyl agli inizi del secolo.

E' chiaro dove ritrovare le radici storiche di un siffatto atteggiamento, dalla cosiddetta "aritmetizzazione dell'analisi" portata avanti da Weierstrass e soci - ideologicamente influenzata dal successo delle teorie darwiniste - fino all'affermazione del punto di vista formalista della Scuola di Gottinga, passando attraverso la cosiddetta crisi dei fondamenti (e senza sottovalutare la parte giocata nella vicenda dal successo di teorie fisiche quali la relatività ristretta di Albert Einstein).

Così, si è persa gradatamente consapevolezza del ruolo fondante della geometria "euclidea" - ma meglio sarebbe dire "intuitiva" - dispersa tra una infinità di opzioni razionalmente possibili, nessuna delle quali identificabile come privilegiata per ragioni puramente logiche o empiriche, e del fondamentale dualismo tra una matematica dello spazio (*geometria*), ed una del tempo (*aritmetica*), dualismo che si è perduto nelle nebbie di un indefinibile in modo non formale spaziotempo degli eventi pseudo-euclideo, che si è sostenuto essere capace di offrire anche la migliore cornice possibile per le teorie fisiche.

Anche se questo offerto dalla storia fosse stato davvero il modo più corretto di risolvere il problema, resterebbe però pur sempre valida l'osservazione di Federigo Enriques, secondo il quale: "Pei valori dello spirito come per quelli materiali dell'economia, sussiste una legge di degradazione: Non si può goderne pacificamente il possesso ereditario, se non si rinnovino ricreandoli nel proprio sforzo d'intenderli e di superarli" (sottolineature nel testo - *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna, 1938, p. 153).

* Dipartimento di Matematica, Università di Perugia.

Nel nostro caso particolare, al di là di una sempre opportuna ripresa di ogni dibattito interessante - con probabile riconferma delle posizioni dei 'vincitori', che sarebbero allora comunque condivise con maggiore consapevolezza - c'è oggi invero anche la possibilità di sostenere in modo radicale che il moderno approccio alla matematica sia viziato alla base da un *morbus mathematicorum recens* (secondo una suggestiva definizione di Gottlob Frege), e che sull'intreccio matematica-fisica costituitosi all'ombra di Hilbert agli inizi del secolo ci sia ancora da fare molta luce.

Si cercherà di difendere la tesi che un approccio "intuitivo" (non necessariamente intuizionista) alla matematica sia ancora non solo del tutto possibile ma anche estremamente valido, e che la questione filosofica dei fondamenti - inquadrata nella sua irrinunciabile cornice storica - gioca sempre un ruolo importante nella matematica, soprattutto sotto il profilo della scelta di una didattica adeguata. Sotto questo punto di vista, vanno rifiutate infatti sia la "mistura" che si diceva prima, sia l'approccio più dignitosamente "astratto" fondato sul concetto di insieme (peraltro, l'unico concetto matematico alla cui introduzione si sia accompagnata quella di vere e proprie antinomie) e di struttura formale, perché non sembra corretto ignorare tutte le difficoltà legate all'uso di infinità non costruttivamente definite, e lasciar credere di avere fatto ricorso con la teoria degli insiemi ad un tipo di intuizione assai più limitata che non quella della geometria euclidea (ancora Weyl denuncia "l'arbitrio - commesso sin dall'inizio in matematica - di considerare un campo di possibilità costruttive come un aggregato chiuso di oggetti esistente in sé"). Si proporrà infine di individuare la "naturalità" di un itinerario matematico nel passaggio da una matematica intesa come una descrizione delle leggi dell'intelletto - in relazione alle strutture fondamentali di spazio e tempo con le quali questo appare essere organizzato, ed introducendo quindi ad esempio la fondamentale corrispondente dicotomia nella genesi dei numeri, quelli esprimenti quantità e quelli esprimenti misura - ad una matematica che possa essere finalmente vista come lo studio di "tutti i possibili pensieri di una mente infinita" (G. Takeuti).

In questo senso, in relazione cioè ad una didattica a misura d'uomo, il concetto di struttura formale deve essere considerato piuttosto come un punto d'arrivo, anziché un punto di partenza, e gli "esempi" sui quali costruire tali strutture dovranno essere presi non soltanto dalla "intuizione aritmetica", ma anche da quella "geometrica".

Nota - Per un approfondimento di queste tematiche, vedi dello stesso autore: *Riflessioni sui fondamenti della matematica ed oltre*, Synthesis, Di Renzo Ed., Roma, 1994,3, p. 20-26.

Aspetti matematici e fisici dell'epistemologia della geometria

*Francesco Speranza**

Alcuni problemi

La geometria è un campo disciplinare piuttosto complesso, sia "in verticale" (per diversi livelli di astrazione e formalizzazione), sia "in orizzontale" (per la presenza di "geometrie diverse", per l'interazione con l'aritmetica e l'algebra, eccetera). Una tradizione bimillenaria ci ha abituato a un certo modo di considerarla (e di impostarne l'insegnamento); a quella si sono sovrapposte nuove tendenze, che a volte si richiamano a quella tradizione (si vedano le prime righe dell'*Introduction* agli *Eléments de Mathématique*), a volte le si oppongono in modo eclatante (*A bas le triangle! A bas Euclide!*).

Risulta dunque assolutamente necessaria, più che per altri settori della matematica, una riflessione approfondita sulla geometria e sulla sua collocazione nel contesto della matematica e *del sapere in generale*. In queste occasioni non ci si deve meravigliare se persone diverse danno risposte diverse, anzi questo è un fatto auspicabile. C'è la massima libertà nell'affrontare questi problemi, ma l'esperienza mostra come sia utile inquadrarli entro grandi problemi epistemologici (torneremo su questo punto).

Indichiamo intanto alcuni problemi, nei quali interagiscono geometria, epistemologia e didattica. Fra di esse non c'è un ordine necessario, nel senso che il 'possesso' di una garantisca una guida sicura per le successive: si deve trattare piuttosto di una serie di rimandi (Enriques parlò esplicitamente di 'circolo').

a) Importanza dell'epistemologia per la geometria

1) Chiarire la 'filosofie implicite', cioè i modi di pensare nascosti (nelle trattazioni, nel modo di affrontare i problemi, ...)
2) Spazio geometrico e spazio fisico
   hanno un 'momento iniziale' comune? Esiste una geometria sperimentale? Esiste una fisica dei 'puri fatti'?
3) Individuazione di vari livelli della geometria; coordinamento fra i vari livelli
   in occasione della riforma susseguente l'unità d'Italia, la convinzione che la sola geometria degna di questo nome fosse quella di Euclide portò ad abo-

* Dipartimento di Matematica, Università di Parma.

lire fino alla quarta ginnasiale la geometria .
4) Come impostare una fase di geometria intuitiva e una fase pre-assiomatica
Poiché i nuovi programmi delle superiori prevedono che la fase assiomatica inizi piuttosto tardi, quale tipo di geometria insegnare nei primi anni?
5) Come impostare una trattazione assiomatica
siamo platonisti (come nella tradizione), oppure formalisti stretti (come nella 'nuova tradizione' di stampo bourbakista), oppure facciamo interagire sintassi e semantica, ...

b) Importanza della geometria per l'epistemologia
Presenza della geometria in alcune grandi svolte del pensiero matematico
1) La crisi degli incommensurabili
Il carattere astratto della matematica
La geometria come modello d'un sapere perfetto
La supremazia della ragione sull'esperienza
La filosofia razionalista dell'antichità e la geometria
2) Il ruolo della geometria nella rivoluzione scientifica dell'età moderna
La geometria come punto fermo per costruire la nuova fisica (Galileo, Newton)
La geometria analitica
Dalla geometria analitica all'analisi
Il ruolo della geometria per la filosofia razionalista (Descartes, Leibniz)
3) La geometria e Kant
4) La geometria non euclidea e la nuova filosofia della scienza
Possibilità di interpretare la 'rivoluzione non euclidea' in senso
a) *convenzionalista (Poincaré)*
b) *empirista (Gauss, Riemann, Enriques, Gonseth)*
Necessità di coordinare le due tendenze
5) Il ruolo della geometria nella filosofia della scienza attuale
6) Il valore culturale della geometria
Il ruolo della geometria nell'arte del Trecento e del Quattrocento, e nei nostri tempi
In che cosa la geometria ha contribuito alla cultura?
Importanza della storia della matematica, inserita nella storia della cultura.

Tratterò qui alcuni di questi argomenti, tenendo conto delle preferenze che mi sono state segnalate.

Le filosofie implicite nella matematica

Come in ogni attività umana di un certo impegno, dietro ogni attività matematica (si tratti di ricerca, di insegnamento, di applicazioni) vi sono delle 'filosofie' alle quali il matematico si richiama, spesso senza rendersene conto (di qui il termine 'implicite'). Esse sono il risultato dell'apprendimento, dell'ambiente nel quale egli opera, di sue personali rielaborazioni: c'è chi ritiene che ce ne dovremmo liberare (si pensi, per lo studio della natura, a Francis Bacon); a mio avviso, esse ci sono necessarie; dobbiamo però portarle alla luce, per capire quanto e come possono influire, per utilizzarle al meglio.

Un procedimento analogo può essere tentato anche nei confronti di altri autori, soprattutto del passato: è vero che non potremo mai ricostruire completamente il contesto intellettuale nel quale hanno operato, ma possiamo cercare di fare ipotesi su di esso. Per esempio, si suol dire che Euclide era un seguace di Platone, perché trattava gli enti matematici come enti astratti. Ebbene, non vedo come avrebbe potuto fare altrimenti: semmai fu Platone a indirizzarsi verso una "filosofia matematizzante", a subire l'influsso dei matematici della sua epoca (che erano già arrivati, come appare da numerosi suoi passi, a una concezione astratta della matematica). Euclide invece non fa alcuna proclamazione di assoluta certezza dei suoi postulati (discostandosi in ciò anche da Aristotele); si limita a dire "Si chiede che ...". In altri punti, sembra particolarmente attento a non andare contro alcune prescrizioni aristoteliche, per esempio quella secondo cui "una linea non è composta da punti": infatti, non considera mai esplicitamente una figura come 'il luogo dei punti tali che ...'.

Come si vede, in simili questioni non si può pretendere di avere dei riscontri precisi; si deve costruire, come disse Enriques, la storia per ipotesi (le quali potrebbero essere corroborate o smentite dall'acquisizione di nuovi fatti).

Per quanto riguarda "voi stessi", vi sottopongo alcune domande, le cui risposte possono essere rivelatrici di alcuni aspetti delle vostre filosofie implicite:
"*La matematica è vera?*"
"*Il teorema di Pitagora esisteva prima di Pitagora?*"
"*Come si costruisce la conoscenza matematica?*"

Le risposte a queste domande sono connesse a un classico problema della filosofia, e anche alle moderne concezioni della matematica.

Il problema degli universali

Quale è la natura delle idee, dei concetti generali?

Secondo Platone, le idee sono la vera realtà, della quale la realtà sensibile è solo una copia (nel Medioevo si diceva che esse sono *ante rem*). Questa concezione viene detta *platonismo*, o *realismo delle idee*. Secondo Aristotele, i concetti generali non sussistono senza gli oggetti concreti: essi sono *in re*. Essi descrivono, caratterizzano la natura dell'oggetto: nella scienza, non possiamo prescindere da tale 'vera natura' (per esempio, Aristotele sostiene che non è possibile, "se non in modo sofistico", dimostrare una proprietà del triangolo distinguendo i casi d'un triangolo rettangolo o acutangolo od ottusangolo, perché la dimostrazione deve fare appello alla natura del triangolo).

Secondo i nominalisti (Roscellino), gli universali sono pure parole (*flatus vocis*): la sola realtà è quella degli individui.

Un'altra corrente, che veniva spesso considerata vicina al nominalismo, è quella detta dei terministi (Guglielmo da Ockham): i concetti sono elaborazioni (libere?) della nostra mente.

Ai nostri giorni, i logicisti si richiamano esplicitamente al platonismo: essi ricercano la verità nella matematica. Per esempio, è molto interessante leggere le opinioni di Frege sulla geometria: non si capacitava di come si potesse parlare sia della geometria euclidea che di quella non euclidea, una sola delle due può essere vera!

Fino alla fine dell'Ottocento, il platonismo era la 'filosofia implicita' più ovvia per la matematica: una impostazione nominalistica sarebbe stata considerata per lo meno una bizzarria (qualcuno ha trovato delle ragioni di natura psicoanalitica per questa preferenza). Invece, oggi la situazione è complessa: abbiamo una 'costituzione formale' che è di fatto formalista, in quanto si usa dichiarare che i termini primitivi non hanno significato, e per gli assiomi non si pone il problema se sono veri: in tal senso ci si riallaccia al nominalismo. D'altra parte, la maggior parte dei matematici pensa in termini di "verità dei teoremi", e quindi c'è una 'costituzione materiale' che è ancora realista. È il ben noto fenomeno del "realismo nei giorni feriali, del formalismo nei giorni festivi".

Il terminismo prosegue oggi nelle epistemologie costruttiviste: categoria che comprende molte varianti: da Kant (per il quale quello che costruiamo è comunque determinato dalla nostra struttura mentale), e da Piaget (per il quale 'le strutture, *per loro stessa costruzione*, conducono alla necessità che l'apriorismo ha creduto di porre ... nelle condizioni preliminari ..."), fino ai costruttivisti 'radicali' alla von Glasersfeld ("la funzione della cognizione è adattativa e serve all'organizzazione del mondo dell'esperienza, non alla scoperta della realtà ontologica'). A mio avviso, una via intermedia può essere una buona soluzione, ed è in questa direzione che conviene elaborare una efficace epistemologia della matematica.

Il problema dei problemi filosofici

I matematici (e più in generale gli scienziati) sono abituati a vedere prima o poi risolti i problemi della loro disciplina (eventualmente, per concludere che la soluzione, nei termini richiesti, non c'è). Per i problemi filosofici, la situazione è del tutto diversa. Come osserva Rota, "Non solo i problemi matematici vengono sempre risolti, ma presto o tardi a ogni problema si trova una soluzione banale [... Invece] la filosofia si lascia caratterizzare come lo studio di un pugno di problemi, dell'enunciato praticamente immutato nel tempo [...] i problemi non vengono quasi mai risolti [...] ". Rota prosegue sostenendo la irriducibilità e l'importanza di questi caratteristica degli studi filosofici, e che è illusorio pretendere di formalizzarli.

Almeno per quanto concerne la filosofia delle scienze esatte, vorrei proporre un altro motivo di riflessione, suggerito dall'analisi svolta nella sezione precedente. I grandi problemi della filosofia (della scienza) si ripresentano in tutte le epoche, ma lo stesso sviluppo della scienza getta su di essi nuova luce, li trasforma, apre la strada a nuove soluzioni. Ecco spiegato come mai questi problemi siano sempre attuali: lo studioso di epistemologia dovrà quindi tenere un occhio rivolto alla storia dei grandi problemi, e un altro allo stato attuale della scienza. Per la geometria, la sua lunga storia, e le forti connessioni con lo sviluppo dell'epistemologia, rendono particolarmente necessaria questa duplice visione.

Le rivoluzioni in geometria

Un concetto importante dell'attuale filosofia della scienza è quello di "rivoluzione scientifica". In un certo senso, Kuhn l'ha ideato per rendere più realistico l'ideale di Popper sulla scienza come impresa critica: per Kuhn, questo è vero nei periodi rivoluzionari, nei quali viene messa in crisi la "scienza normale", e vengono cercati nuovi paradigmi per lo sviluppo della scienza.

Una domanda relativamente recente è: sono esistite rivoluzioni in matematica? Lo sviluppo delle conoscenze matematiche si presenta spesso come un'accumulazione del sapere: i teoremi della geometria elementare, si dice, erano ammessi nell'antichità e sono ammessi ancora oggi. Tuttavia, è molto cambiato il significato della loro validità (ne parleremo fra poco). Dunmore ritiene che le rivoluzioni in matematica avvengano piuttosto al "metalivello", quello delle credenze, delle concezioni generali, condivise dalla comunità scientifica, piuttosto che a quello dei risultati. Condivido in buona parte quest'idea: comunque, questi cambiamenti dei modi di pensare sono anche più significativi dei mutamenti in fatto di risultati; essi comportano anche un cambiamento dei criteri per giudicare quali problemi siano significativi.

A mio avviso la domanda "il tale episodio è stato una rivoluzione?" va intesa in modo flessibile: è preferibile chiedersi "come posso interpretare il tale episodio in termini 'rivoluzionari'?", senza per questo cancellare una eventuale interpretazione che lo leghi al passato.

Orbene, molti degli episodi nella matematica "interpretabili in termini rivoluzionari" hanno riguardato la geometria. Possiamo cominciare dalla crisi delle grandezze incommensurabili: nonostante la scarsità di notizie sulla situazione precedente, esso ha richiesto una visione astratta della matematica, quale certamente non era presente in quella pre-ellenica, e ha reso indispensabile l'uso di metodi rigorosi. Anzi, in questa tensione verso l'astrazione e il rigore si può riscontrare la motivazione per il sorgere del razionalismo nella filosofia greca (i pitagorici, Parmenide, Democrito, Platone), e quindi del razionalismo nel pensiero occidentale. All'interno della matematica, ha dato luogo alla superiorità della geometria sull'aritmetica, durata fino all'epoca moderna. Ha toccato anche la questione dell'infinito, che si è drammaticamente posta all'attenzione dei matematici e dei filosofi.

La geometria classica ha svolto un ruolo importante nella rivoluzione scientifica del Seicento: essa è stata il modello d'un sapere razionale, e ha fornito una continuità fra la scienza classica e quella moderna (mentre altre scienze erano in piena rivoluzione, e la stessa matematica si sviluppava rapidamente in nuove direzioni).

L'introduzione della geometria analitica è giudicata da alcuni poco rivoluzionaria, anche perché Cartesio si muoveva nell'ambito di problemi classici. Di fatto, però, dopo di essa molte cose sono cambiate, soprattutto al livello di concezioni generali, per esempio, sull'idea di spazio. Dopo di allora, lo spazio va considerato come insieme di punti (contrariamente a una prescrizione aristotelica, contro la quale le trattazioni tradizionali cercavano di non scontrarsi); inoltre, forse proprio contro le idee dello stesso Cartesio, lo spazio è diventato il primo e più importante soggetto della geometria, più delle singole figure (alle quali andava invece l'attenzione delle trattazioni tradizionali, a cominciare da quella di Euclide).

L'introduzione della geometria non euclidea ha avuto anch'essa un carattere rivoluzionario, anche se non ha comportato il rigetto di quella euclidea: è caduta l'idea di arrivare a costruire una scienza sicuramente vera; le affermazioni della geometria sono oggi proposizioni di una teoria formale (e quindi estranee al criterio della verità), oppure proposizioni empiriche (se si interpreta la geometria elementare alla Enriques, come una scienza sperimentale). Ci si è dovuti abituare alla coesistenza di teorie matematiche in qualche modo in opposizione l'una all'altra, fra le quali anche quando si interpretano come teorie empiriche deve stabilirsi un *modus vivendi*. È caduta parte della dottrina kantiana (quella riguardante il carattere sintetico a priori dei giudizi della geometria: ecco un altro caso nel quale lo sviluppo della scienza ha comportato un ripensamento radicale di un problema epistemologico); ma le sue esigenze più genuinamente costruttive sono uscite corroborate dalla vicenda, come osservarono Helmholtz ed Enriques. Si sono dovuti affrontare i rapporti fra spazio fisico e spazio geometrico, con risposte diverse da parte di diversi pensatori.

Meno radicale sembra il mutamento prodotto dal programma di Erlangen: ma le grandi risistemazioni globali di un settore disciplinare raramente mancano di produrre conseguenze profonde. Lo stesso Klein, per mantenersi più prossimo agli aspetti intuitivi, riservava un ruolo speciale alla geometria elementare (tale

erá per lui quella legata al gruppo S delle similitudini), per cui, a meno di mettersi "da un punto di vista formale", i gruppi significativi sarebbero solo quelli che contengono S: ma la stessa idea portante del programma, applicata liberamente, ha superato questa limitazione (che a ben vedere non è giustificata neppure dal punto di vista empirico, in quanto vi sono situazioni che si regolano secondo altri gruppi). Il programma di Erlangen ha messo a fuoco l'importanza dell'idea di invariante, fondamentale per la scienza di oggi (idea che in qualche misura permette di superare il classico dualismo fra *assoluto* e *relativo*).

La geometria nella cultura

Vi sono altre situazioni, oltre a quelle accennate, nelle quali la geometria ha svolto un ruolo culturale determinante: si pensi per esempio al problema della prospettiva nel Quattrocento, nel quale la geometria è stata il ponte fra una forma di espressione artistica e una nuova concezione del mondo.

Si potrebbe obiettare che queste sono cose d'altri tempi, nei quali era possibile costruire un'unità del sapere e del saper fare, di scienza, filosofia e arte. Intanto, possiamo osservare che comunque quei momenti fanno parte della nostra cultura, sono una parte di noi stessi; anzi, seguendo un'intuizione di Bachelard, pur se ci sono stati dei profondi cambiamenti nella scienza, i modi di pensare della scienza precedente hanno influito, anche se si tratta di opposizione frontale, sulle vie della nuova, per cui ne fanno inscindibilmente parte.

Certamente oggi vi sono forti spinte a vivere in modi completamente differenti il saper fare e il sapere, anzi questo è scisso in 'scienza', 'filosofia', 'lettere' (è addirittura difficile trovare dei termini per parlarne unitariamente, anche solo in modo generale). Un ripensamento del ruolo della geometria nella matematica, nell'epistemologia, nel panorama culturale appare come un significativo momento per avvicinare quello che sembra irrimediabilmente diviso.

Bibliografia

F. Enriques, *Problemi della Scienza*, Zanichelli, Bologna 1906

F. Enriques, G. De Santillana, *Storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna 1932

P. Ernest, *Philosophy of Mathematics Education*, Falmer Press, London

G.C. Rota, *Matematica e filosofia: storia di un malinteso*, B.U.M.I., (7) 4-A, 295-307 (1990)

F. Speranza (ed.), *Epistemologia della Matematica: seminari 1989-1991* (1992), *seminari 1992-1993* (1994), CNR - TID

COMUNICAZIONI

La geometria della foglia di platano

Sebastiano Conte (Roma)

Premessa

L'esperienza è stata realizzata nelle classi differenziali di una scuola media.

Tema dell'esperienza fu uno studio dei caratteri geometrici di oggetti presenti in natura: nel nostro caso le foglie (aghi) di pino e quelle di platano. Come per ogni esperienza educativa suoi aspetti rilevanti furono il contesto operativo, la metodologia adottata, la scelta degli obiettivi che la finalizzarono. Di essi però non si darà che qualche cenno essenziale, essendo questa descrizione limitata al contenuto dell'esperienza. Va soltanto precisato che il lavoro realizzato fu un prodotto di equipe, a cui parteciparono tutti i docenti di quelle classi e si avvalse della collaborazione del Laboratorio di Didattica della Matematica dell'Università "La Sapienza" di Roma, allora diretto dal Prof. Lucio Lombardo Radice.

Dividerò la descrizione in due parti, delle quali la seconda ripartita in tre unità successive.

Parte 1ª. Le lunghezze degli aghi di pino

Ad ogni ragazzo fu affidata la parte terminale di un rametto di pino e un foglio di carta quadrettata (quadrettatura di mezzo centimetro) su cui, a partire da un punto O, era stata tracciata una linea sovrapposta ad una riga della quadrettatura. Si chiedeva di staccare dal rametto un ago per volta, di distenderlo lungo la suddetta linea con un estremo nel punto O e, quindi, di contrassegnare con una crocetta il primo quadratino libero della colonna su cui cadeva l'altro estremo dell'ago. Al termine del lavoro le crocette tracciate componevano l'istogramma delle frequenze delle lunghezze degli aghi, distribuite in classi di grandezze. Un esempio di questi istogrammi è nella figura 1.

In ciascun istogramma fu individuata la moda (o le mode), calcolata la lunghezza media degli aghi e valutata la dispersione delle lunghezze, calcolando il campo di variazione. Furono confrontate le lunghezze medie e le dispersioni per aghi staccati da rametti di età diversa, ottenendo la correlazione rappresentata nella figura 2. Si constatò che, al crescere dell'età dei rametti (cioè al crescere delle lunghezze medie dei rispettivi aghi), cresceva anche la dispersione delle lunghezze.

Questa prima parte dell'esperienza servì come parte introduttiva al lavoro che le avrebbe fatto seguito e a richiamare quelle esperienze di statistica già fatte negli anni precedenti in ambienti più artificiali, per portarle in contesti di oggetti naturali.

Parte 2ª. La geometria della foglia di platano

La foglia di platano fu scelta per il fatto che il suo bordo si presenta sufficientemente differenziato e perciò adatto a ritrovarvi convenienti punti di riferimento. Offrivano la stessa possibilità le foglie di altri alberi (quelle di acero, ad esempio), ma i loro alberi non erano presenti nei viali cittadini, viceversa non l'offriva la foglia di siliquastro (il cosiddetto albero di Giuda) che presenta un bordo continuo, privo di *singolarità*, escluso il suo centro.

Si lavorò su un campione di 30 foglie, di grandezze diverse, distribuite una o due per ragazzo.

Unità 1. *Fu finalizzata a individuare quei caratteri della foglia ai quali era possibile fare riferimento per descriverne la forma.*

La foglia fu orientata, distinguendo la sua faccia dal suo dorso; furono individuati il suo centro, l'asse, gli apici e i seni (figura 3) e i raggi che dal centro proiettano gli apici e i seni. Si osservò che questi caratteri erano comuni a tutte le foglie del campione, cioè *invarianti*, pur variando gli oggetti su cui erano rilevati: essi erano cioè caratteri di una sola forma che veniva appunto riconosciuta come forma della foglia di platano.

Unità 2. *Servì a calcolare i valori medi delle ampiezze degli angoli che i raggi di quelle foglie formavano con l'asse.*

A ciascun ragazzo fu affidato un diagramma polare, come quello della figura 4 (ampiezza di ciascun settore uguale a 5° e di ciascuna colonna uguale a 1 cm). Si chiedeva di disporre ciascuna foglia su quel diagramma, come è mostrato nella stessa figura 4, e di rilevare i settori entro cui cadevano i suoi apici e i suoi seni. I dati raccolti su tutto il campione furono riportati in due quadri complessivi. Uno di essi, quello riprodotto nella figura 5, riportava i dati degli istogrammi riferiti agli apici, l'altro riportava gli istogrammi riferiti ai seni. Furono quindi calcolati i valori medi delle ampiezze degli angoli che l'asse della foglia formava rispettivamente con i raggi degli apici e con quelli dei seni. Questi valori non si presentavano simmetrici rispetto all'asse, ma differivano di un piccolo scarto dalla configurazione simmetrica. Lo scarto fu attribuito all'esiguità del campione e la simmetria fu *imposta*, sostituendo ad ogni coppia di valori corrispondenti la loro media aritmetica.

Unità 3. *Le lunghezze dei raggi e i loro rapporti.*

Significativi nei riguardi della forma non sono le lunghezze dei segmenti, ma i loro mutui rapporti. Si presentava così la distinzione tra il ruolo degli angoli in una figura e il ruolo delle distanze. Ponemmo il problema mostrando in un primo tempo che i dati medi ricavati direttamente dalle lunghezze dei raggi conducevano ad una figura che non aveva la stessa regolarità delle foglie che conoscevano. Cercammo di individuare un modo per riconoscere i parametri a cui avremmo dovuto riferirci. Per farlo fissammo una foglia su una lamina di plexiglas e proiettammo la sua ombra su un reticolato polare del tipo di quelli già usati. Si poté osservare come al variare dell'inclinazione della lamina rispetto allo schermo, la forma dell'ombra variava e, in generale non riproduceva la forma della foglia. Assumeva quella stessa forma soltanto nei casi in cui si disponeva la lamina parallelamente allo schermo. Con questa scelta variava la grandezza dell'ombra, ma si conservavano gli assi e, se l'asse raddoppiava o triplicava, accadeva la stessa cosa per i raggi.

Scegliemmo la distanza dallo schermo in modo che l'ombra dell'asse raggiungesse una lunghezza prestabilita e misurammo sull'ombra le lunghezze dei raggi.

Si poteva ripetere lo stesso lavoro su ciascuna delle foglie del campione, ma ciò riduceva tutta la classe a lavorare su una foglia per volta senza più posto per il lavoro individuale. Preferimmo allora adottare il procedimento grafico descritto sommariamente nella figura 6, equivalente alla proiezione della foglia nella sua ombra, ma adatto ad essere sviluppato individualmente da ogni ragazzo sulla foglia (o foglie) di cui disponeva. Furono calcolati i valori medi delle lunghezze dei raggi portati alla grandezza prestabilita, e quindi ridotti a simmetria rispetto all'asse.

Con i dati raccolti sia per gli angoli, sia per i raggi, fu composta la figura 7 che colloca apici e seni rispetto al centro e all'asse. La figura 7 fu poi completata nella figura 8. Essa evidenzia i caratteri geometrici da noi selezionati per analizzare la forma della foglia. I triangoli che la compongono non li presentammo però come oggetti della geometria, ma come termini linguistici: *parole* o *ideogrammi* dotati di funzione descrittiva, che compongono *frasi* le quali descrivono stati di cose. Ritenemmo quest'uso opportuno per guidare i ragazzi nel passaggio dalla geometria delle figure riducibili a segmenti di linea a quelle delle figure piane.

Si osservò che la figura nella quale si era concluso il nostro lavoro era inscrivibile in una cardioide (figura 9). Questa linea è facilmente costruibile per punti, con operazioni grafiche indipendenti dai fatti naturali. Essa è tuttavia riconoscibile, oltre che nella foglia di platano, anche in altre foglie e ripete il bordo continuo della foglia di siliquastro suggerendo l'idea di un possibile sostrato geometrico nei fatti naturali.

Per una descrizione più completa dell'esperienza si veda:
S. Conte, *Dalle forme della natura alle forme della geometria, in Insegnamento/apprendimento della matematica* (Atti del 1° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona, marzo 1993), ed. Qualevita, Sulmona.

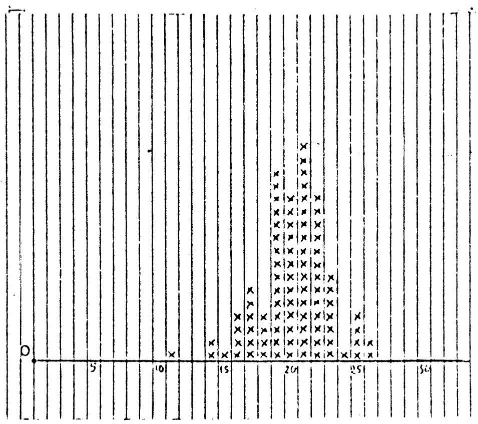


fig.1

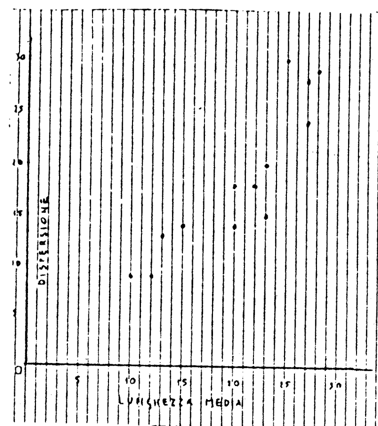


fig. 2

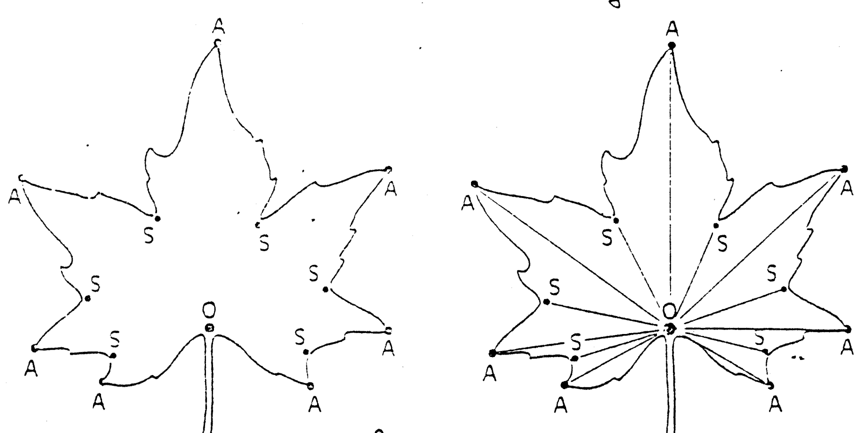


fig 3

Apici, A
Seni, S
Centro, O

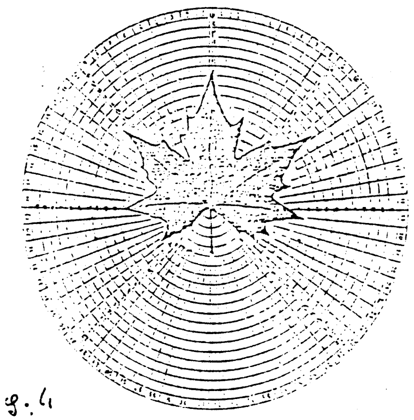


fig. 4

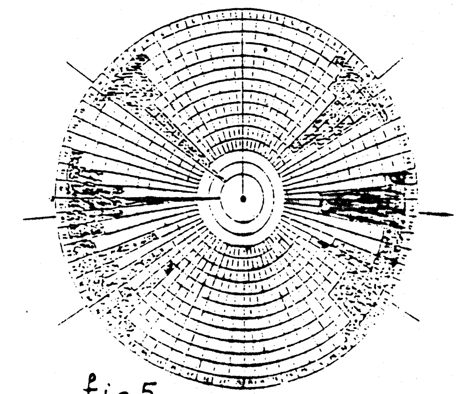


fig 5

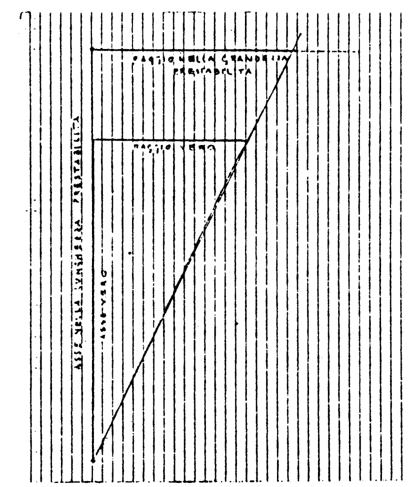


fig. 6

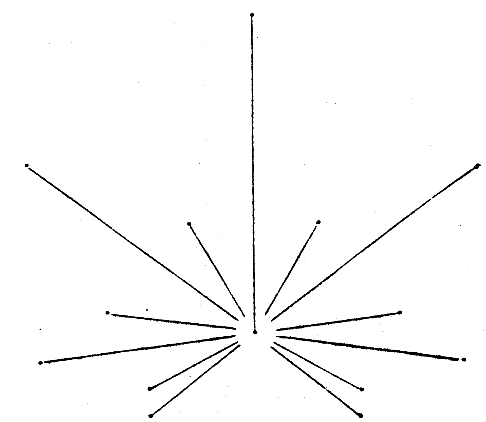


fig. 7

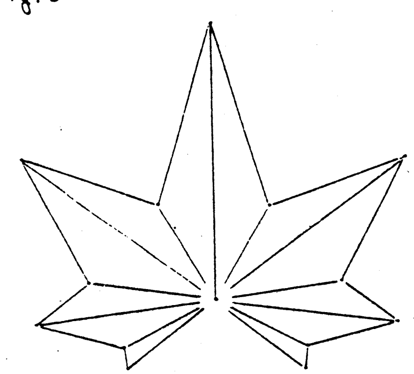


fig. 8

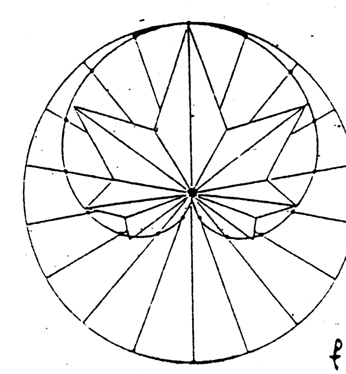


fig 9.

La rigorosità dei termini geometrici spiegati in una classe liceale anche tramite l'etimologia dei vocaboli

Eugenio Magi *

Insegno da 11 anni in un Liceo Classico, inizialmente tradizionale e da 6 anni con una sperimentazione, nel solo biennio, secondo il Piano nazionale di Informatica.

In generale gli alunni che si iscrivono ad un Liceo Classico scelgono questo tipo di scuola anche perché pensano di avere scarsa predisposizione verso la Matematica.

Sono stato sempre convinto, anche per merito del mio "maestro", il Prof. **Luigi Campedelli**, che la cultura scientifica e quella umanistica debbano coesistere nelle spiegazioni sia per quello che riguarda le discipline storico-filosofiche-letterarie, sia per quelle scientifiche-tecniche, armonizzandosi per formare una cultura di aspetto globale.

Gran parte dei miei discenti sono molto interessati al mondo classico ed alla cultura umanistica.

Ho sempre cercato di coinvolgere gli allievi meno motivati scientificamente, inquadrando, sotto l'aspetto storico, le varie tematiche affrontate, sia di algebra, di geometria, di informatica, sia infine di fisica, ed ho per questo sempre scelto dei manuali che affrontassero il rapporto fra la Storia e la Matematica.

Recentemente un nuovo testo per i bienni presentava anche le etimologie dei principali vocaboli della geometria ricavandoli dal Latino e dal Greco.

L'affrontare le tematiche con l'ausilio del significato etimologico delle parole ricavandole dai termini greci e latini, citando anche gli autori che, per primi, l'hanno utilizzata in quell'accezione o con significati simili, ha aiutato i miei allievi a superare le difficoltà nell'acquisire le definizioni e le proprietà. Questo evita loro di "apprendere a pappagallo " gli argomenti svolti. Qualche studente incontra delle difficoltà ad apprendere le proprietà e le definizioni, per esempio, quelle dei quadrilateri particolari.

Se però si spiega al discente che il termine **parallelogramma** proviene dal vocabolo del tardo latino ***parallelogrammum*** ricavato dalla parola greca παραλλελογραμμον (= parallelogrammon) che risulta composta da παραλλελοζ (= parallelos) che significa "parallelo" e da γραμμε (= gramme)

---

* Liceo classico "Michelangiolo" di Firenze.

che vuol dire "linea", è facile far comprendere al ragazzo, e non mnemonicamente, che i lati opposti di un parallelogramma sono paralleli.

Chiarire ad uno studente che il vocabolo **quadrato** deriva dal latino ***quadratus*** che è il participio passato del verbo ***quadro*** che significa "completare armonicamente le proprietà", sarà' facile per l'allievo ricordarsi allora che il quadrato gode di tutte le proprietà degli altri quadrilateri e quindi che le sue diagonali:

- si dividono scambievolmente a metà come nel parallelogramma,
- sono uguali come nel rettangolo,
- sono perpendicolari e bisettrici degli angoli come nel rombo.

Così la spiegazione etimologica del vocabolo permette anche di comprendere l'affermazione "far quadrare i conti", vuol dire completarli armonicamente senza ammanchi.

Propongo altri esempi :

La parola **classe** deriva dal termine latino ***classis*** che inizialmente indicava la "flotta" oppure "l'esercito"; successivamente ha assunto il significato di "classe, gruppo". Si trova, in Marco Tullio Cicerone (vissuto nel I secolo a.C.) "***pueros in classes distribuere***" (distribuire i fanciulli in classi) e da Marco Fabio Quintiliano (vissuto nel I secolo d.C.) "***classem ducere***" (essere il primo della classe). Il vocabolo risulta probabilmente di origine etrusca.

Osserviamo alcuni vocaboli relativi alla teoria della circonferenza e del cerchio.

La parola **circonferenza** deriva dal vocabolo latino ***circumerentia*** da ***circumferens linea*** (linea circolare) proviene dal verbo ***circumferre*** che significa "portare intorno" e richiama il vocabolo greco περιφερια (= periferia) con lo stesso significato. Dal vocabolo greco si ha l'utilizzazione del termine italiano periferia di una città con il significato di abitazioni di una metropoli intorno al suo centro.

Il vocabolo **cerchio** deriva dal termine latino ***circulus*** che aveva anche il significato, oltre quello della lingua italiana, di "orbita, anello, piatto". Nell'italiano antico il cerchio era denotato con la parola **cerco** che deriva dal latino ***circus*** di analogo senso. Il nome è dovuto alla forma circolare del ***Circus Maximus*** sorto a Roma fra il Palatino e l'Aventino, noto, per antonomasia, con il solo nome di ***Circus***.

Vorrei proporre un ultimo esempio quello della parola **raggio.**

Raggio deriva dal latino ***radius*** che significava, in origine, "bacchetta aguzza" adoperata dai maestri di geometria o di matematica per descrivere diagrammi nella sabbia ***"ex eadem urbe humilem homunculum a pulvere et radio excitabo"*** M.T.Cicerone Tusculanae 5,23 ("risveglierò dalla sua polvere e dalla sua bacchetta un pover'uomo di quella stessa città"; successivamente il termine ha preso il significato di "raggio luminoso" sia del Sole che del fulmine come in Marco Tullio Cicerone e in T. Maccio Plauto (III - II secolo a.C.) ed anche di "raggio di una ruota" in Publio Virgilio Marone (I secolo a.C.) perché irradiava dal centro come i raggi di una sorgente di luce : "***hinc radios trivere rotis***" Virgilio Georgiche - 2,444 (ne trassero raggi torniti per le ruote) ed infine di "raggio di una circonferenza" come in Marco Tullio Cicerone nella traduzione del *Timeo* par. 17.

Questo modo di far lezione, correlando l'etimologia e la trattazione teorica, ha permesso agli allievi di pervenire a buoni risultati, sia per i livelli di preparazione raggiunti, sia, soprattutto, per l'interesse verso la disciplina non più considerata ostica.

Questo metodo, ideale per un liceo classico è valido anche per altri indirizzi; si possono sempre inquadrare storicamente gli argomenti senza utilizzare l'etimologia greca o latina.

Non penso di aver scoperto, con questo tipo di didattica, "l'elisir di giusta-spiegazione" da pubblicizzare con spot televisivi più o meno incisivi, ma ho solo voluto riferire una mia esperienza didattica che ha migliorato i livelli di apprendimento da parte di un numero di alunni sempre maggiore.

In considerazione di quanto esposto anche il collega di lettere, per agevolare la traduzione dal latino e dal greco, ha seguito il mio metodo applicandolo alle sue discipline. Ha svolto quindi una ricerca etimologica a più ampio spettro di termini che esulavano dalla matematica. Alla fine dell'anno ha notato un netto miglioramento delle capacità di tradurre le versioni e una minore consultazione, da parte degli alunni, del vocabolario.

Diverse assiomatiche della geometria: analisi di una situazione didattica

Elisa Gallo - Cristina Goldin *

Introduzione.

La sequenza di lavoro che descriviamo, inizio di una nuova ricerca, si può inquadrare tra le ricerche condotte dal Nucleo di Torino che opera a livello di Biennio della Scuola Secondaria Superiore: anche qui, infatti, giocano i modelli posseduti dai soggetti che vengono attualizzati nella situazione ed in essa si devono evolvere per adeguarsi al compito proposto.

Sequenza di lavoro.

La classe dove è stata svolta la nostra esperienza è una terza Liceo Pedagogico Sperimentale, composta da 15 alunni.

Il lavoro è stato svolto in 10 ore distribuite in 6 lezioni.

Le **indicazioni metodologiche** erano: metodo dialogico come stimolo reciproco a cercare, costruire e scoprire insieme; discussione critica; utilizzo di un linguaggio specifico, con eventuali chiarimenti per termini poco noti.

I ragazzi possedevano i seguenti **prerequisiti**: conoscenza degli enti geometrici fondamentali; dei triangoli; della congruenza dei triangoli; del teorema dell'angolo esterno dei triangoli; del teorema sulle rette parallele; del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo; delle nozioni fondamentali della logica; dei numeri reali; della teoria delle proporzioni.

La **finalità educativa** che ci eravamo proposti era di far lavorare i ragazzi in un "ambiente" deduttivo.

L'**obiettivo didattico generale (O.d.g.)** era di mettere gli studenti nella condizione di dimostrare una proposizione, rispettando le premesse di una data assiomatica, secondo una catena deduttiva esatta. Questo O.d.g. è stato raggiunto nella sesta lezione, dopo aver conseguito nelle prime cinque i seguenti **obiettivi didattici specifici**.

(1) Comprendere cos'è un'assiomatica, fissando le nozioni primitive e gli assiomi e analizzando le regole logiche che la governano.

(2) Saper ricostruire, consapevolmente, la geometria già studiata in uno schema assiomatico, che è risultato il seguente:

A. NOZIONI PRIMITIVE: punto, retta, stare tra, congruenza di segmenti ed

---

* Dipartimento di Matematica, Università di Torino.

angoli

B. POSTULATI:

1_E- Postulato fondamentale della retta:

(a) ogni punto di una retta la divide in due parti, ciascuna delle quali è detta raggio o semiretta;

(b) per due punti del piano passa sempre una retta e una sola.

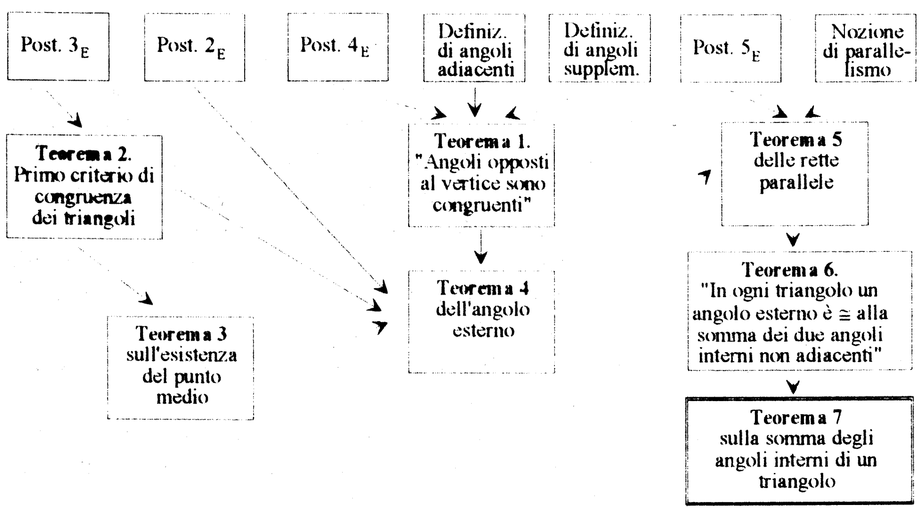
2_E- Data una semiretta di origine O ed un segmento a, esiste sulla semiretta un segmento, e uno solo, di origine O e congruente ad a.

3_E- Data nel piano una semiretta, esiste un angolo, e uno solo, congruente ad un angolo dato che abbia uno dei lati coincidenti con la semiretta, il vertice nell'origine della semiretta e che giaccia da una parte prefissata rispetto ad essa.

4_E- Tutti gli angoli piatti sono congruenti tra di loro.

5_E- Postulato di Euclide o delle parallele.

(3) Verificare l'iter deduttivo che riconduce la dimostrazione di un teorema ad altri teoremi ed ai postulati iniziali, obiettivo raggiunto dai ragazzi costruendo schemi come il seguente:



(4) Conoscere le nozioni primitive e i postulati dell'assiomatica di Birkhoff, che sono:

A. NOZIONI PRIMITIVE: punto, retta, distanza, misura angolare, numero reale.

B. POSTULATI:

1_B- Assioma del metro. Ai punti di una qualunque retta possono essere assegnati dei valori numerici in modo che le differenze numeriche misurino le distanze tra i punti corrispondenti.

2_B- C'è una e una sola retta passante per due punti dati.

3_B- Assioma del goniometro. Tutti i raggi aventi lo stesso estremo possono essere numerati in modo che le differenze numeriche misurino gli angoli tra i raggi corrispondenti.

4_B- Tutti gli angoli piatti hanno la stessa misura.

5_B- **Assioma di similitudine** o primo criterio di similitudine dei triangoli.

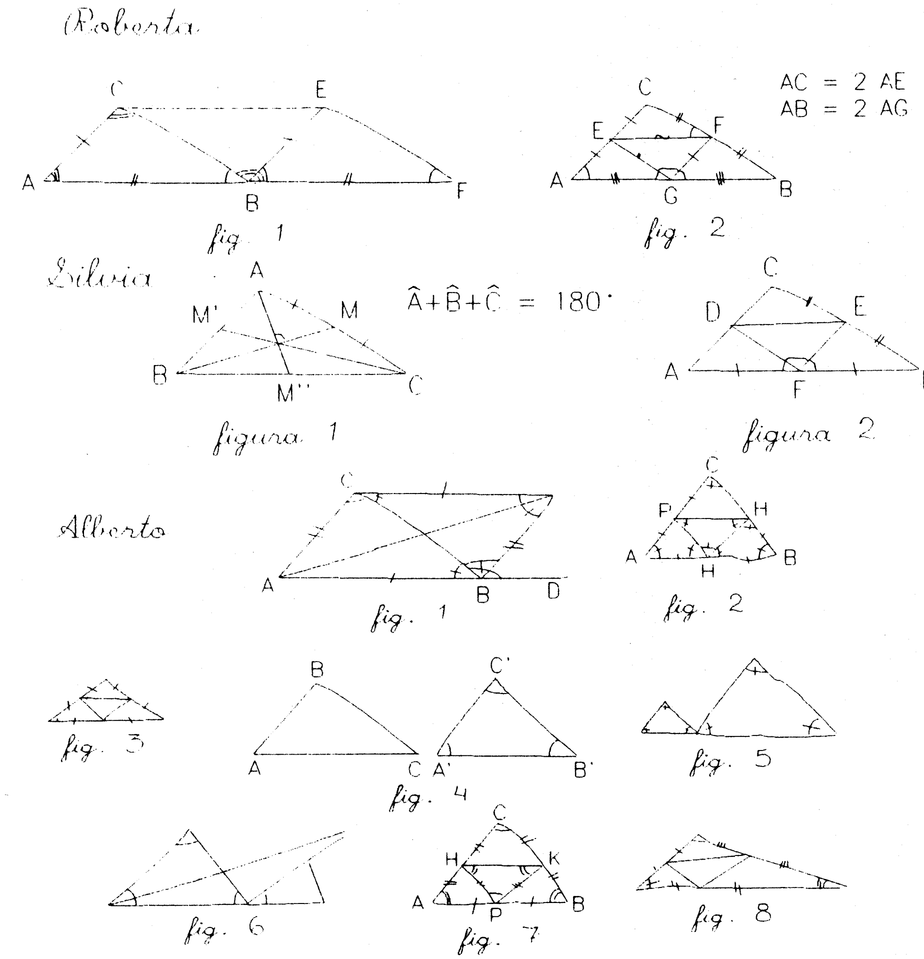
(5) Acquisire familiarità con l'assiomatica di Birkhoff dimostrando il secondo ed il terzo criterio di similitudine.

(6) Lavorare con la consegna:

Utilizzando solo le definizioni, i postulati e i teoremi visti nell'assiomatica di Birkhoff, cerca "pensando ad alta voce", di dimostrare il teorema:

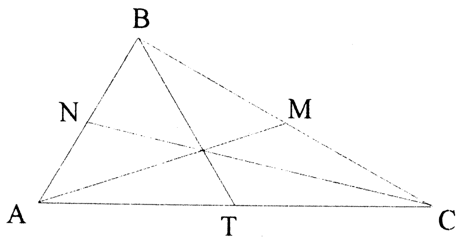
"La somma dei tre angoli interni di un triangolo è 180° "

Dai protocolli prodotti dai ragazzi abbiamo selezionato i seguenti disegni, utili per comprendere i primi tentativi fatti dagli studenti.



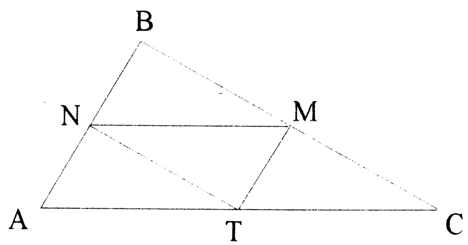
I ragazzi non si sono inizialmente resi conto che, costruendo figure composte da triangoli congruenti e parallelogrammi, era inevitabile riprodurre una dimostrazione analoga a quella da loro studiata nell'assiomatica tradizionale. Il primo ostacolo è stato quindi abbandonare modelli tradizionali per costruire modelli adatti ad operare con la nuova assiomatica tradotti in figure adeguate allo scopo: cioè abbandonare gli strumenti euclidei, riconoscere quelli di Birkhoff ed imparare ad usarli.

Ecco, in sintesi, l'iter che ha portato alla dimostrazione del teorema.

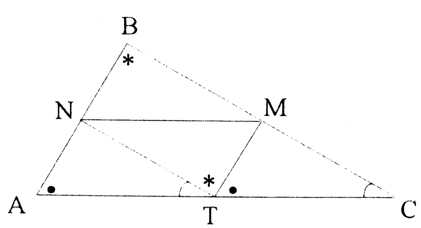


1) Fondamentale è stato il disegno di SILVIA per l'individuazione della figura esatta:
Silvia introduce però il punto medio associato alla mediana secondo un modello ancora tipicamente euclideo.

2) ALBERTO intuisce che la figura precedente non porta alla risoluzione del problema e unisce i punti medi nel seguente modo:
Alberto traccia la figura esatta ma non ragiona ancora secondo il nuovo modello assiomatico: infatti cerca di utilizzare la congruenza e non la similitudine.



3) ALBERTO e ANTONELLA, utilizzando la similitudine, risolvono il problema:



$A\hat{T}C = 180°$ e $A\hat{T}C = A\hat{T}N + N\hat{T}M + M\hat{T}C$;
ma, per il I e il III criterio di simil. dei triang.,
$A\hat{T}N = A\hat{C}B$, $N\hat{T}M = C\hat{B}A$, $M\hat{T}C = B\hat{A}C$;
allora $A\hat{C}B + C\hat{B}A + B\hat{A}C = 180°$ C.V.D.

Per finire, mettiamo in evidenza in uno schema i diversi strumenti utilizzati per dimostrare questo teorema nella geometria studiata in precedenza e in quella nuova di Birkhoff:

	ASSIOMATICA STUDIATA	ASSIOMATICA DI BIRKHOFF
Enunciato	**TEOREMA 7.** "La somma degli angoli interni di un triangolo qualunque è ≅ ad un angolo piatto."	**TEOREMA c.** "La somma dei tre angoli interni di un triangolo è 180°."
Strumenti della dimostrazione	**Teorema 6.** "In ogni triangolo un angolo esterno è ≅ alla somma dei due angoli interni non adiacenti" **Teorema 5** delle parallele **Teorema 4** dell'angolo esterno **Teorema 3** sull'esistenza del punto medio **Teorema 2** o primo criterio di ≅ dei triangoli **Teorema 1** sugli angoli opposti al vertice **Postulati 2_E, 3_E, 4_E, 5_E** **Definizioni** di angoli adiacenti, di angoli supplementari, di rette parallele.	**Teorema b** o terzo criterio di similitudine **Teorema a.** "Se due lati di un triangolo sono uguali, gli angoli opposti a questi lati sono uguali" **Postulato 5_B** **Definizioni** di similitudine, di angoli supplementari, di punto medio.

Conclusioni.

Se apprendere significa "apprendere per modelli", la loro fissazione diventa un ostacolo all'apprendimento: è quindi necessario creare nel proprio insegnamento attività in cui i modelli vengano mobilizzati e modificati per adeguarsi allo scopo.

Bibliografia.

G. D. Birkhoff, *A set of postulates for plane Geometry based on scale and protractor*, The Annals of Mathematics, 33-1931.

G. D. Birkhoff, R. Beatley, *Basic Geometry*, Chelsea, New York, 1959.

Aspetti culturali e didattici della probabilità geometrica

Maria Batini - Mauro Cerasoli***

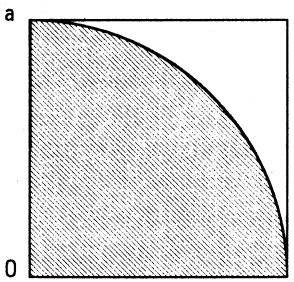
In *Essai d'arithmétique morale*, pubblicato nel 1777, nel quarto volume di un supplemento alla sua *Histoire naturelle*, il conte di Buffon (1707-1788) propose l'idea di una branca essenzialmente nuova della matematica, ossia di un insieme di teoremi che comportavano considerazioni geometriche e probabilistiche.

I lavori che hanno dato origine storicamente alla teoria della probabilità geometrica, nota anche come **Geometria Integrale**, sono il problema dell'ago di Buffon e il paradosso di Joseph Bertrand (1822-1900) da lui esposto nel suo trattato Calcul des probabilités (1889) e così successivamente chiamato da Poincaré, in quanto se ne potevano dare più soluzioni tutte ugualmente accettabili.

Ponte fra la geometria e la probabilità è la scelta a caso di un punto ω in Ω con $\Omega \subseteq R^n$. Lo spazio campione uniforme n-dimensionale è il cubo n-dimensionale Ω di lato a. Scegliere un punto campione in Ω equivale a scegliere n punti nell'intervallo [0,a] e la scelta a caso di n punti nell'intervallo [0,a] equivale alla scelta di una n-pla $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ di numeri reali in [0,a].

Didatticamente sarà opportuno trattare solo i casi con n=1,2,3, dove la misura di Ω, pensata finita, è rispettivamente la lunghezza, l'area, il volume.

Consideriamo il problema della scelta a caso di un punto nel quadrato di lato a e fissiamo poi l'attenzione sul settore circolare.



Sia A l'evento "il punto cade nel settore circolare", la probabilità di A è la misura dell'eventualità che il punto scelto a caso nel quadrato cada dentro il settore circolare.

$$P(A) = \frac{\text{area del settore circolare}}{\text{area del quadrato}} = \frac{\pi a^2 / 4}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

* Docente di matematica e fisica presso il Liceo Classico "Orazio" di Roma; fa parte del Nucleo di Ricerca Didattica operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma "La Sapienza".
** Dipartimento di Matematica dell'Università di L'Aquila

Risulta perciò che la probabilità di A non dipende dalla lunghezza del lato del quadrato e che è un invariante per omotetie.

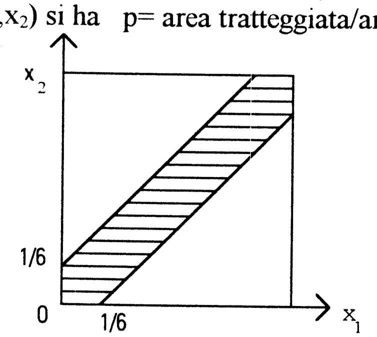
Potremmo allora supporre per semplicità a=1. La scelta di un punto a caso nel quadrato si riduce perciò alla scelta dei numeri x, y fra 0 ed 1, che può essere fatta utilizzando una moneta equa. Al primo lancio dividiamo [0,1] in due parti uguali, con la convenzione, per esempio, che se esce croce il punto starà nella metà di sinistra, altrimenti nell'altra metà. Al secondo lancio e a quelli successivi dividiamo di nuovo la metà scelta con lo stesso criterio. Si proceda in modo analogo per scegliere y. Abbiamo così un metodo probabilistico, detto oggi metodo Montecarlo, per determinare le prime cifre di π.

Utilizzando la scelta a caso di due punti nell'intervallo [0,a], isomorfo alla scelta a caso di un punto in un quadrato di lato a, si possono trattare vari problemi.

Prendiamone in considerazione uno. Un giovanotto prende appuntamento con la propria fidanzata per le 18.00. Poiché entrambi sono distratti, dimenticano l'ora dell'appuntamento. Ognuno arriva a caso fra le 18 e le 19, aspetta 10 minuti e se l'altro non arriva se ne va. Qual è la probabilità che i due fidanzati passino insieme la serata supponendo che gli istanti di arrivo siano indipendenti ed uniformi?

La soluzione comporta il passaggio al piano cartesiano e l'interpretazione geometrica della risoluzione di disequazioni di primo grado in due incognite. Siano x_1 e x_2 i due istanti di arrivo, nell'intervallo di un'ora.

Occorre che sia $|x_2 - x_1|<1/6$; passando alla rappresentazione nel piano (x_1,x_2) si ha p= area tratteggiata/area quadrato=11/36.



Sempre in R^2 significativa è anche la scelta a caso di un segmento, che permette di trattare sia il paradosso di Bertrand che il problema dell'ago di Buffon.

Il paradosso di Bertrand (si sceglie a caso una corda in un cerchio e si calcola la probabilità che essa sia maggiore del lato del triangolo equilatero inscritto) ha più di una soluzione, perché non essendo chiaro il significato di "scegliere a caso una corda", è possibile sceglierla in modi diversi. A tutt'oggi si sono trovati sei modi, ognuno dei quali corrisponde ad una soluzione. Da qui l'apparente paradosso. Delle

possibili soluzioni ne elenchiamo tre, che sono quelle che possono essere utilizzate in ambito didattico (per le altre si veda [8]).

1ª Soluzione. Per ragioni di simmetria possiamo scegliere orizzontale la direzione della corda. Tracciando il diametro perpendicolare alla corda, questa sarà maggiore del lato del triangolo inscritto se cade da un quarto a tre quarti della lunghezza del diametro dal momento che il centro del cerchio circoscritto dista di un terzo dal lato. La probabilità di questo evento è perciò p=2/4=1/2 (fig.1).

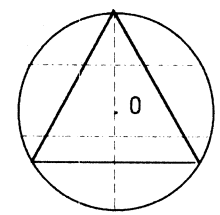


fig.1

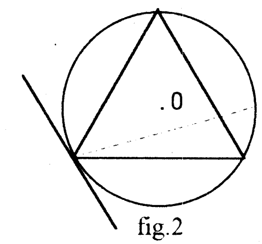


fig.2

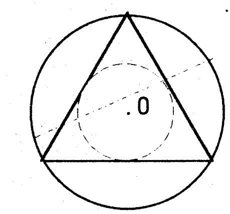


fig.3

2ª Soluzione. Sempre per questioni di simmetria scegliamo un estremo della corda coincidente con un vertice del triangolo. La corda sarà maggiore del lato se è contenuta dentro l'angolo del triangolo. Si avrà perciò p=1/3 (fig.2).

3ª Soluzione. La corda è più lunga del lato del triangolo se il suo punto di mezzo cade nel cerchio inscritto nel triangolo il cui raggio è metà del cerchio circoscritto. La probabilità, come rapporto delle loro aree vale perciò p=1/4 (fig.3)

La scelta a caso di un punto in $\Omega \subseteq R^2$ ci permette di fare alcune considerazioni sul concetto di **misura.** Agli studenti sono già note alcune prime misure concrete, quali:

1- cardinalità di un insieme
2- lunghezza, area, volume
3- massa
4- probabilità.

Più in generale, dato un insieme Ω astratto è possibile associare ad esso la misura $\mu(A)$ di un suo sottoinsieme A, che soddisfa ai seguenti assiomi:

1- $\mu(A) \geq 0$
2- $\mu(\emptyset) = 0$
3- $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots$ se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

Se $\mu(\Omega)=1$, μ è una probabilità; quando $\mu(\Omega)\neq 1$, se $\mu(\Omega)$ è finita si pone $P(A)=\mu(A)/\mu(\Omega)$, se è infinita basta invece definire una probabilità condizionata $P(A|B)=\mu(A)/\mu(B)$ su un sottoinsieme B di Ω di misura finita con $A \subseteq B$.

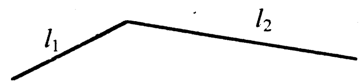
Si può allora generalizzare il concetto di misura e misurare oltre che un insieme di punti, anche un insieme di segmenti (problema di Buffon e paradosso di Bertrand) o un insieme di rette.

Nel problema dell'ago di Buffon si considera nel piano un insieme di rette parallele tracciate a distanza d l'una dall'altra; si lancia un ago di lunghezza l minore di d e ci si chiede qual è la probabilità che esso intersechi una retta. Questo problema ha fatto molto discutere i matematici dell'Ottocento sia per la difficoltà di renderlo rigoroso sia perché permette un calcolo approssimato di π; la difficoltà maggiore fu quella di rendere preciso il significato della frase "lanciare a caso". La soluzione che si riporta è dovuta a Barbier (1860).

Consideriamo un ago di lunghezza l non necessariamente minore di d e sia X il numero di intersezioni con le rette parallele. Il numero medio di intersezioni sia $E(X)=f(l)$ con f funzione crescente di l, $f(0)=0$. Considerati due aghi di lunghezza l_1 ed l_2, dal momento che l'ago composto ha lunghezza l_1+l_2 si avrà

$f(l_1+l_2)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=f(l_1)+f(l_2)$

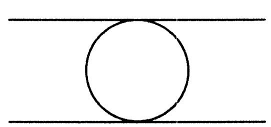
Dall'analisi sappiamo che una funzione crescente, che soddisfa a questa condizione, è della forma $f(l)=kl$ con $k>0$.

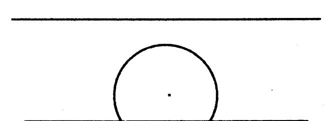


Generalizzando si ha

$E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)=kl_1+kl_2+...+kl_n=kl$

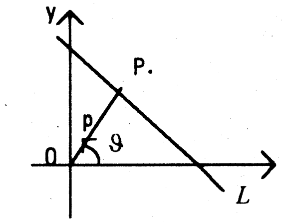
con l lunghezza della poligonale; quanto sopra è vero anche per una curva regolare chiusa, dal momento che una qualsiasi curva di lunghezza finita si può sempre approssimare con una poligonale. Applichiamo il risultato ad una circonferenza di diametro d. Poiché in questo caso avremo sempre due intersezioni, si avrà $2=k\pi d$ e quindi $k=2/\pi\, d$.





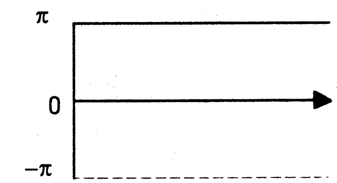
Se $l<d$, la variabile aleatoria X assume il valore 1 se l'ago interseca le rette (evento A), altrimenti assume il valore 0. In tal caso $2l/\pi d = E(X_1) = 1 \cdot P(A) + +0(1-P(A)) = P(A)$ è la probabilità cercata.

Consideriamo adesso la misura di un insieme di rette. Come l'area di una figura piana è indipendente dal sistema di riferimento scelto, così è possibile definire una misura delle rette che non dipende dalla scelta di coordinate ed è unica.



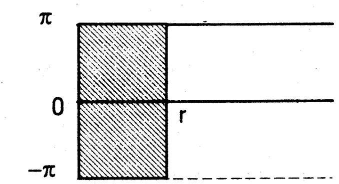
Sia L l'insieme delle rette di R^2. Si scriva la loro equazione in forma normale $x \cos\vartheta + y \operatorname{sen}\vartheta = p$ esse sono quindi rappresentabili nel piano (p,ϑ) con $p\geq 0$ e ϑ compreso nell'intervallo $]-\pi,\pi]$.

All'insieme di rette $A\subseteq L$ si associa l'insieme dei punti $A'\subseteq R^2$ tale che $A'\subseteq\ ]\pi,\pi] \times [0,\infty[$; ad A' è associabile la misura $\mu(A')$ ordinaria di Lebesgue, come l'area del corrispondente insieme della semistriscia.



Si voglia per esempio calcolare la misura dell'insieme A di rette che intersecano un cerchio C di raggio r e centro l'origine O degli assi. Una retta appartiene all'insieme A se $p<r$. Pertanto $\mu(A)=2\pi r$.

Per l'invarianza di $\mu(A)$ si ha che la misura dell'insieme delle rette che intersecano un qualsiasi cerchio di raggio r è $2\pi r$.



Supponiamo adesso di avere un cerchio C di raggio r contenente al suo interno un cerchio D di raggio s. Sia A l'insieme delle rette che intersecano D e B l'insieme delle rette che intersecano C; la probabilità che una retta scelta a caso intersechi D se interseca C è $P(A|B)=2\pi s/2\pi r$, il rapporto dei perimetri dei due cerchi.

Si calcoli adesso la misura delle rette che intersecano un segmento di lunghezza l.

Per l'invarianza della misura rispetto al cambiamento delle coordinate, è possibile porre il nostro segmento in una posizione conveniente del piano.

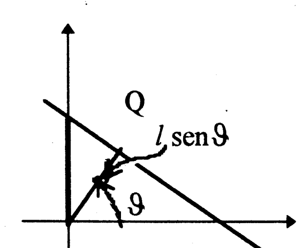


fig.4

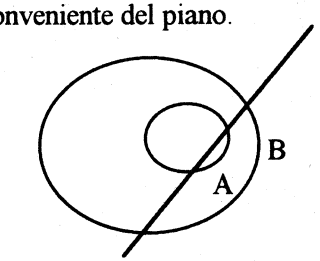


fig.5

Per un dato ϑ la retta corrispondente a (p,ϑ) ed intersecante il segmento OQ soddisfa alla disequazione $0 \leq p \leq l \operatorname{sen}\vartheta$ (fig.4). La regione corrispondente all'insieme delle rette che intersecano OQ, ha perciò misura pari all'integrale $\int_0^{\pi} l \operatorname{sen}\vartheta d\vartheta = 2l$. Più in generale si potrebbe facilmente dimostrare (vedi [1]) il famoso teorema di Crofton apparso per la prima volta nella IX edizione della Enciclopedia Britannica del 1885: dati gli insiemi convessi A e B, con $A \subset B$ (fig.5), di rispettivi perimetri l_A e l_B, la probabilità che una retta scelta a caso intersechi A, nell'ipotesi che abbia intersecato B, è il rapporto l_A/l_B.

Valenza didattica

E' possibile introdurre questa trattazione dopo aver fatto alcuni elementi di analisi matematica e di probabilità, verso la fine del corso di studi della Scuola Secondaria Superiore. E' infatti necessario che l'allievo non solo abbia acquisito delle capacità tecniche di calcolo, ma sia in grado di poter essere guidato a fare collegamenti all'interno della matematica.

La geometria integrale, della quale abbiamo presentato qui alcuni aspetti che ci sono sembrati didatticamente trasferibili, presenta il vantaggio di mostrare la matematica sotto un aspetto unitario, di utilizzare abilità di calcolo già acquisite e teoremi dell'analisi in contesti concreti ed inusuali per ottenere risultati significativi, utilizzare la geometria analitica per rappresentazioni diverse da quelle abituali, presentare una situazione significativa relativa al numero π, in cui partendo da una trattazione teorica, è possibile determinarne un valore approssimato con un metodo statistico.

Bibliografia

1 - K.Baclawski, M.Cerasoli, G.C.Rota, *Introduzione alla probabilità*, UMI Bologna, 1984, II°ed.1990.

2 - Barbier, *Journal de Mathématiques*, serie II, tomo V, 1860.

3 - J.Bertrand, *Calcul des probabilitiés*, Paris 1889.

4 - C.B.Boyer, *Storia della matematica*, ISEDI 1976.

5 - G.Castelnuovo, *Calcolo della probabilità*, Zanichelli, Bologna 1918, III ed. 1945.

6 - M.Cerasoli, *Un approccio combinatorio alle variabili aleatorie continue*, Périodico di matematiche, 3-4, 1985, pp. 43-53.

7 - N.T. Gridgeman, *Geometric probabiliy and the number π*, Scripta Mathematica, 25, 1960, pp. 183-195.

8 - H.Solomon, *Geometric probability*, Society for industria and applied mathematics, Philadelphia, Pennsylvania 1978.

Le funzioni matematiche con Cabri-Géomètre e il foglio elettronico

Anna Strolin Franzini - Cesare Maioli***

In questo lavoro viene presentato un gruppo di schede di lavoro, sperimentate per due anni nella Scuola Media Guido Reni di Bologna, che propongono l'uso di CABRI-géomètre per lo studio della geometria piana e, in particolare, l'uso abbinato di CABRI-géomètre e del foglio elettronico per lo studio di funzioni. Questo materiale è quindi utilizzabile da insegnanti di Matematica della Scuola Media Inferiore per aiutare gli studenti a approfondire sia il concetto funzione che, contestualmente, le conoscenze della geometria del piano acquisite in situazioni didattiche più consuete. Non richiede approfondite conoscenze di informatica.

Con questa proposta di lavoro non si intende suggerire di limitare attività di tipo 'manuale' finalizzate allo studio della geometria e delle funzioni (come ad esempio la produzione di disegni o la costruzione di modellini mobili) ma di affiancarle metodicamente, fin dalla prima media, allo studio mediante strumenti software. Si ritiene inoltre positivo dare agli studenti, con CABRI, anche una esperienza di ambiente 'a oggetti' per fare loro sperimentare un approccio alla progettazione di algoritmi diverso da quello, di tipo procedurale, generalmente utilizzato nelle scuole. Si è rilevato che l'esplicitazione, da parte dell'insegnante, delle modalità di rappresentazione per oggetti permette agli studenti una migliore comprensione di entità, attributi e relazioni presenti in CABRI. Ciò fornisce non solo un'interessante prospettiva per lo studio della geometria ma anche un punto di vista nuovo estensibile a molte rappresentazioni e descrizioni di situazioni non matematiche.

Questa sperimentazione si affianca a un'altra, iniziata nel 1988, che si pone l'obiettivo di produrre materiale didattico per la Scuola Media che proponga un approccio informatico all'insegnamento della matematica e sia omogeneo dal punto di vista metodologico. Il materiale prodotto sino ad ora è sviluppato in Unità Didattiche, due delle quali dedicate alle funzioni matematiche. In esse gli

* Scuola Media Guido Reni, Vicolo Bolognetti 10, 40127 Bologna. Tel 051 235481, E-mail: anna@arci01.bo.cnr.it

** Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna Tel 051 354449, E-mail:maioli@dm.unibo.it

studenti, dopo attività atte a favorire un'acquisizione implicita del concetto di funzione, vengono guidati a progettare algoritmi, con metodo *top-down* e in modalità di *pseudocodifica*, per ottenere tabelle e grafici di funzioni. Vengono anche proposti esempi di produzione di algoritmi che portano gli studenti a utilizzare il concetto di funzione nell'ambito dello studio della geometria del piano (ad esempio studio dell'area di rettangoli isoperimetrici in funzione della base).

Il materiale presentato in questo lavoro è una integrazione di quelle due Unità Didattiche sulle funzioni, pure essendo completamente autonomo quindi sviluppabile indipendentemente. Esso propone infatti un'attività di tipo *sperimentale* per lo studio delle funzioni che sfrutta le potenzialità di CABRI, di trasformare una figura geometrica mantenendo le costruzioni impostate e di fornire misure di segmenti e angoli, e le potenzialità del foglio elettronico di elaborare dati. Le schede per lo studio di funzioni guidano infatti alla costruzione, con CABRI, di una figura geometrica. Suggeriscono poi una particolare trasformazione della figura che permetta l'impostazione di un problema di dipendenza funzionale tra due grandezze e un'ampia raccolta di dati. Il lavoro degli studenti prosegue poi su coppie di computer, uno con CABRI per trasformare la figura e leggere le misure, l'altro con il foglio elettronico per scrivere i dati in tabella e elaborarli. L'osservazione dei grafici rende in alcuni casi possibile non solo descrivere la funzione ma anche ipotizzare la relazione matematica che lega le due grandezze studiate. La generalità dell'andamento della funzione può poi essere messa alla prova trasformando la figura con CABRI in modo da cambiare una delle costanti del problema e ripetendo la raccolta delle coppie di corrispondenza. Il foglio elettronico fornirà automaticamente tutte le elaborazioni e rappresentazioni grafiche precedentemente impostate.

Le schede di lavoro guidano quindi gli studenti alla ricerca, per via *sperimentale* e *analitica*, di relazioni nell'ambito della geometria piana, alcune semplici e intuitive, altre più complesse e non intuitive il teorema di Pitagora o i teoremi di Euclide. Tali relazioni, ipotizzate tramite CABRI e il foglio elettronico, verranno poi dimostrate nelle modalità più adatte alle conoscenze degli studenti. Si è constatato anche che, qualora una scheda di questo tipo venga proposta a studenti che abbiano già avuto occasione di dimostrare la relazione e magari anche di usarla in numerosi esercizi, essi si accorgano di avere scoperto una relazione che già conoscono solo dopo essere passati attraverso tutto il lavoro suggerito dalla scheda. La diversità di approccio al problema sembra quindi indurre negli studenti una temporanea incapacità a riconoscere situazioni già esplorate e le conclusioni cui giungono sono una gratificante conquista.

Nella sperimentazione si è rilevato che gli studenti lavorano con grande interesse e impegno. In particolare, l'uso abbinato di CABRI e del foglio elettronico crea positive situazioni di collaborazione e di intesa. Si è notato inoltre che, sebbene praticamente tutti gli studenti lavorino intensamente alla produzione della figura, delle tabelle e dei grafici, non tutti giungano con uguale consapevolezza alla definizione della relazione matematica tra le grandezze studiate. Per gli studenti più preparati questa fase del lavoro si è invece rivelata molto stimolante e efficace.

Come esempio di scheda di lavoro si fornisce quella che guida gli studenti alla ricerca della relazione tra e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo, relazione nota come secondo teorema di Euclide.

PROIEZIONI SULL'IPOTENUSA DEI CATETI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

DISEGNO DELLA FIGURA

- Retta per due punti
- Nomi: primo punto A, retta r
- Punto
- Nomi: punto P
- Parallela per il punto P alla retta r
- Punto sulla parallela
- Nomi: punto C
- Segmento definito dai punti A e C
- Perpendicolare per C al segmento AC
- Intersezione tra la perpendicolare e la retta r
- Nomi: intersezione B

Muovere il punto C sulla retta cui appartiene

a) Quale è la caratteristica dell'insieme di triangoli ABC che ottieni muovendo il vertice C? ....

Trascinare il punto P in un'altra posizione e muovere di nuovo il punto C sulla retta cui appartiene

b) Che cosa è cambiato nell'insieme di triangoli ABC? ....

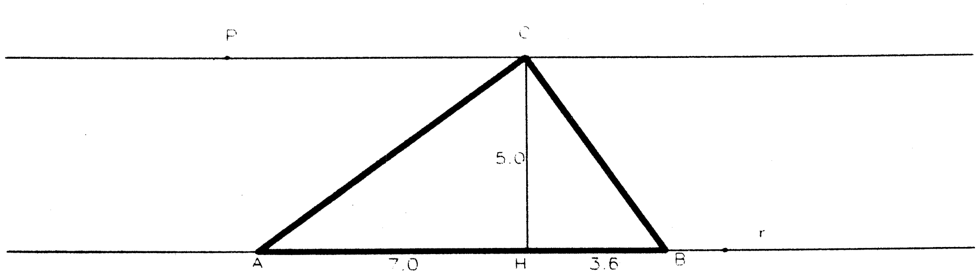
- Perpendicolare per C alla retta r
- Intersezione tra la perpendicolare e la retta r
- Nomi: intersezione H
- Segmento: AH, BH, CH, BC
- Aspetto degli oggetti, pennello: segmento AC, segmento BC
- Aspetto degli oggetti, pennello blu: segmento AH
- Aspetto degli oggetti, pennello rosso: segmento BH
- Aspetto degli oggetti, gomma: retta per C e B, retta per C e H
- Misura: segmento AH, segmento BH, segmento CH

Muovere il punto C, sulla retta cui appartiene, osservando la misura dei segmenti AH e BH, proiezioni sull'ipotenusa dei cateti del triangolo ABC.

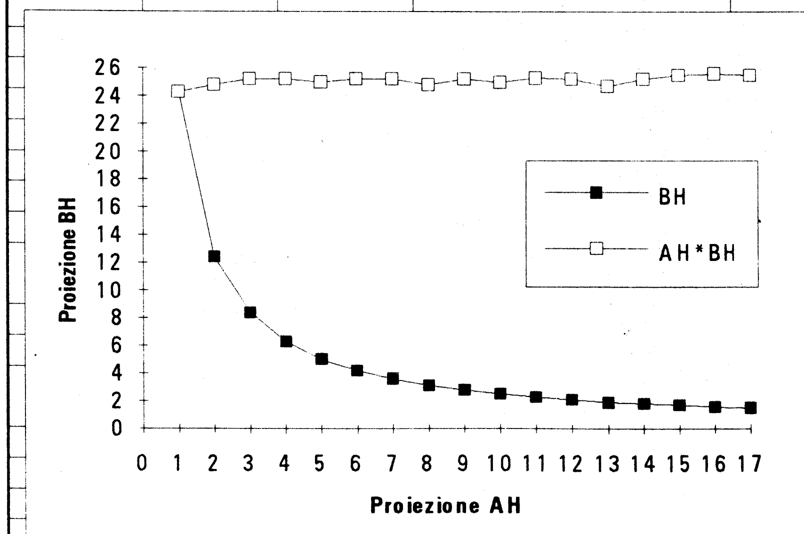
STUDIO DELLA FUNZIONE BH = f (AH)

1) Muovere il punto P nel piano in modo da ottenere CH = 5 unità
Inserire la misura di CH in una cella del foglio elettronico.
2) Muovendo il punto C sulla retta generare un insieme di coppie di corrispondenza (AH, BH) con AH che varia da 1 a 20 con passo 1 e inserirle nel foglio elettronico.
   a) Secondo te BH è funzione crescente o decrescente di AH? ....
   Ottenere il grafico di BH in funzione di AH.
   b) Descrivere la funzione BH = f (AH) ....
   c) Quale pensi che sia la legge matematica che lega le due proiezioni AH e BH? ....
3) Compilare una nuova colonna con i valori di AH*BH e inserire nel grafico anche questa serie di valori.
   d) Che cosa puoi dire del prodotto AH*BH? ....
   Calcolare la media dei prodotti AH*BH ottenuti in tabella e inserirla in una cella del foglio arrotondata all'unità.
4) Muovere il punto P in modo da ottenere CH = 6 unità e ripetere i procedimenti suggeriti nei punti 2 e 3 (sarà sufficiente modificare i dati nella colonna con le misure di BH: tutte le elaborazioni che hai impostato verranno aggiornate automaticamente dal foglio elettronico).
   e) Il grafico che ottieni è dello stesso tipo? ....
   f) Quale è, in questo caso, la media dei prodotti AH*BH? ....
   g) Da che cosa pensi dipenda il valore della media? ....

CONCLUSIONI:
BH = ...



	PROIEZIONE DEI CATETI SULL'IPOTENUSA			
AH	BH	AH*BH	Altezza CH =	5
1	24,3	24,3		
2	12,4	24,8		
3	8,4	25,2		
4	6,3	25,2		
5	5	25		
6	4,2	25,2		
7	3,6	25,2		
8	3,1	24,8		
9	2,8	25,2		
10	2,5	25		
11	2,3	25,3		
12	2,1	25,2		
13	1,9	24,7		
14	1,8	25,2		
15	1,7	25,5		
16	1,6	25,6		
17	1,5	25,5		
media AH*BH =		25		



Un progetto di aggiornamento dei docenti di matematica attraverso la ricerca didattica

Adele Repola Boatto *

Il problema dell'aggiornamento dei docenti di matematica dei bienni e' stato affrontato dall'I.R.R.S.A.E.-MARCHE in modo sistematico a partire dal 1989, sulla base dei risultati di una **indagine regionale** allora condotta su tutti gli istituti secondari di II grado di area P.N.I. della Regione. Obiettivi dell'indagine erano stati: *1- conoscere la preparazione culturale e professionale dei docenti, 2- le caratteristiche del loro insegnamento, 3- le situazioni in cui esso si esplicava, 4- le loro esigenze, attese e richieste, 5- il tipo di collaborazione esistente tra loro e la disponibilità a collaborare per il miglioramento della loro professionalità e a quali condizioni.* Il quadro informativo risultante mostrava una grande eterogeneità relativamente a formazione culturale, aggiornamento professionale, propensione ad una sostanziale revisione delle proprie abitudini di insegnamento; si evidenziavano anche un diffuso disorientamento rispetto alle innovazioni didattiche che i programmi del P.N.I. sollecitavano e la solitudine nella quale quasi tutti fronteggiavano le loro difficoltà.

Le richieste riguardavano iniziative sistematiche di supporto per l'aggiornamento professionale che non si esaurissero in lezioni frontali: probabilmente per questa esigenza, veniva sorprendentemente preferito l'I.R.R.S.A.E. all'università (anche se allora l'istituto regionale aveva assunto solo sporadiche iniziative nel settore) perché si organizzassero situazioni in cui confrontarsi sui problemi didattici e scambiarsi consulenze sulle loro soluzioni.

L' I.R.R.S.A.E., a sua volta, poteva mettere a disposizione del settore il tempo pieno di un solo docente comandato (fino al settembre scorso quello parziale di un secondo) e pochi mezzi; escludendo iniziative occasionali e per pochi "privilegiati", si studio' un PIANO REGIONALE DI AGGIORNAMENTO PLURIENNALE, ad attivazione provinciale, di costo ridotto, ma al quale, ad ogni istituto secondario della Regione fossero offerti due posti-partecipanti per docenti di matematica dei bienni, uno dei quali "stabile" per il "referente d'istituto".

Il Piano si sarebbe realizzato in **due fasi**: la prima di esse, esauritasi nel

---

* Docente comandata presso l'I.R.R.S.A.E.-MARCHE.

1993, prevedeva, dopo un corso pilota, due CORSI DI AGGIORNAMENTO per ogni provincia (Ascoli e Pesaro ne ebbero poi uno solo poiché si erano intanto attuati gli otto corsi di matematica del P.N.I. regionale) ed il modulo dell'intervento assegnava uguale spazio a **quanto veniva offerto ai corsisti** (*lezioni, comunicazioni e documentazioni scientifico-didattiche, consulenza*) e a **quanto si richiedeva ad essi** (*collaborazione attiva nei gruppi di lavoro*, a guida esterna, per l'elaborazione del **compito** ogni volta chiaramente definito ed espresso, mediante una scheda-guida).

Al termine della prima fase gli obiettivi preposti risultarono pienamente centrati: era stato ampliato e migliorato il complesso delle conoscenze necessarie, si erano promosse abilità collaborative tra i partecipanti per tradurre tali conoscenze in dimensione concretamente didattica; questa seconda conquista si era ottenuta attivando la loro esperienza nei lavori dei gruppi (quattro per provincia) che produssero una interpretazione critica dei programmi del P.N.I. ed elaborarono proposte di curricoli didattici complessivi per il primo anno, nei quali la logica costituiva tema trasversale di raccordo.

L'I.R.R.S.A.E., anche dalle schede di verifica di qualità degli interventi, ebbe la conferma che un aggiornamento professionale efficace non può prescindere da procedure di ricerca didattica, che l'aspetto personale di tale ricerca riceve sostegno e promozione in un contesto di collaborazione e consulenza reciproca tra gli insegnanti, che in questo contesto, in particolare, devono evidenziarsi esigenze di ulteriori chiarimenti, ampliamenti e approfondimenti culturali.

La **seconda fase del piano regionale** converti' il progetto dei **Gruppi** da due anni su temi trasversali, nell'omonimo PROGETTO REGIONALE DI RICERCA DIDATTICA TEMATICA, per ottenere lo sviluppo delle componenti essenziali, ma più problematiche per i docenti, dei curricoli didattici del primo anno già prodotti. I primi temi selezionati allo scopo furono: "Geometria delle Trasformazioni e "Teoria delle Probabilità e Statistica".

Durante il Corso di Aggiornamento della provincia di Pesaro, nel 1992, furono effettuate le videoriprese delle lezioni ad essi rispettivamente relative, dei proff. Vinicio Villani e Giovanni Prodi con le quali furono successivamente prodotti **due pacchetti multimediali di supporto alla didattica sperimentale** dei due settori. Si era deciso che primo tema sul quale centrare la ricerca fosse la geometria perché, durante la giornata ad essa dedicata in ognuno dei corsi provinciali, si era evidenziata la diffusa e profonda crisi che ne minava l'insegnamento: l'*abitudine culturale "euclidea" ne sostiene una didattica spesso sovraddimensionata rispetto ai tempi ora disponibili e rigida rispetto a precise esigenze degli allievi*: di fronte a queste difficoltà gli insegnanti mostravano di non vedere altre vie d'uscita che cancellare la geometria dall'insegnamento o degradarla a disegno tecnico o a supporto visivo dell'algebra.

Il nuovo Progetto D.I.M., avviato nel 1992, si realizza in cicli annuali di incontri in tutte le provincie delle Marche: responsabili della produttività dei gruppi sono i formatori che avevano attuato i corsi del P.N.I. regionale e la sottoscritta, incaricata del Piano. Il primo ciclo di incontri fu dedicato alla conoscenza "attiva" del pacchetto multimediale, che i referenti d'istituto portarono alle rispettive scuole. Il dibattito stimolato da essa mostro' due ostacoli particolarmente gravi per l'elaborazione di una didattica innovativa: la inadeguata conoscenza *professionale* dell'assiomatica di Choquet e di un insegnamento fondato su assiomatizzazioni locali didatticamente significative e correttamente mirate.

Le schede-guida dei gruppi di ricerca D.I.M. proposero, quindi, il seguente **compito**: *1- dimostrare uno stesso teorema, ritenuto rilevante, con riferimento sia alla assiomatica di Euclide-Hilbert che di Choquet, 2- confrontare i due processi dimostrativi procedendo, a ritroso, alla individuazione dei prerequisiti necessari in ognuno dei due contesti, 3- scegliere possibili "convenzioni assiomatiche locali", didatticamente motivate, per costruire segmenti curricolari mirati agli obiettivi educativi del tema n.1, 4- dichiarare gli obiettivi particolari di tali segmenti, segnalare i passaggi più delicati, le modalità per affrontarli e confrontare i due percorsi paralleli, 5- indicare spunti e modalità didattiche per il raccordo dei vari segmenti di ognuno dei due contesti verso una ristrutturazione fondata sulla relativa assiomatizzazione globale*.

Questo tipo di attività ha suscitato notevole interesse: il livello e la qualità dell'impegno sono stati notevoli e produttivi. Sono stati utilizzati 13 teoremi e i segmenti curricolari costruiti con essi sono stati confrontati con varie modalità: percorsi deduttivi, mappe concettuali, "alberi" di prerequisiti, considerazioni di difficoltà o complessità relative all'apprendimento, indicazioni sulle proprie difficoltà verso l'innovazione proposta.

In ogni ciclo annuale sono messi in cartella tutti i materiali fino a quel punto prodotti: sui 13 teoremi scelti hanno finora lavorato due cicli di gruppi D.I.M.; nel ciclo 1995 sarà completato il **compito** affrontando il punto n.5, poi il materiale sarà rivisto ed organizzato per la pubblicazione in quaderno-I.R.R.S.A.E. dalla **Commissione di Consulenza Didattica** costituita, con due dirigenti dell'I.R.R.S.A.E., dai conduttori dei gruppi.

Durante i quattro incontri D.I.M.-1994 alla ricerca didattica in geometria e' stata abbinata la proposta del pacchetto multimediale su "Teoria delle Probabilità e Statistica" per avviare il nuovo filone di elaborazione di segmenti curricolari.

Penso possa interessare **l'elenco dei teoremi scelti dai corsisti per il loro lavoro**: *1) rette parallele con trasversale e coppie di angoli congruenti o supplementari (cond.nec. e/o suff.), 2) ortocentro nei triangoli (esistenza e unicità), 3) triangoli isosceli (cond. nec. e/o suff.), 4) bisettrice di un angolo come luogo* *geometrico, 5) diagonale nei parallelogrammi, 6) terzo criterio di congruenza dei triangoli, 7) angoli esterni a triangoli, 8) angoli al centro e alla circonferenza, 9) teorema di Pitagora.*

Possono forse interessare, infine, le considerazioni più significative espresse dai corsisti relativamente al contesto di Euclide-Hilbert (A) e a quello di Choquet (B); in entrambi i casi il + o il - indicano la positività o la negatività di valutazione al confronto:

A+ *culturalmente* più facile,

A- dimostrazioni più elaborate, con maggiore complesso di prerequisiti

A- nel teorema 1): concatenate le condizioni necessaria e sufficiente,

A- presenza di varie dimostrazioni per assurdo e quindi esigenze più impegnative di logica (prop.contronominale),

A- teorema 9): meno stimolante (dimostrazione con equiestensione tra pallelogrammi);

B+ maggiore economia di pensiero,

B- necessità di grossa preparazione dei docenti (che si dichiarano generalmente conservatori!),

B+ introduzione meno drammatica del parallelismo, senza impegnare la teoria dei triangoli,

B+ per teor.1): dimostrazioni più immediate, con più spunti nuovi,

B+ per teor.9): dimostrazione mediante composizione tra omotetia e simmetria assiale più bella e potente, ma da secondo anno.

Io penso di poter aggiungere che giova alla didattica, anche della geometria in assiomatica euclidea, la "pratica" di una assiomatica alternativa: rivitalizza l'insegnamento il rompere l'abitudine e si può apprezzare di più qualcosa che si veda anche da un punto di vista "esterno".

Avendo studiato il progetto e curato in ogni sua fase l'attuazione finora, sento di dover esprimere sentita ammirazione per l'impegno continuo ed appassionato dei corsisti (nonostante gli intralci del servizio scolastico contestuale, dei limiti dell'art.65-D.P.R.417/'74 e, in alcuni casi, della scarsa attenzione o disponibilità dei presidi). La documentazione (tipo di convocazioni, schede di lavoro, schede di verifica, materiali prodotti) potranno essere resi disponibili per gli istituti di ricerca didattica che li richiedessero all' I.R.R.S.A.E.-MARCHE, insieme al quaderno che sarà pubblicato.

Inversione circolare

*Giovanni Margiotta**

I. Introduzione

I nuovi programmi di matematica della scuola media superiore (PNI o Brocca) propongono lo studio di trasformazioni geometriche che conservano l'allineamento; giudico utile affrontare nel triennio superiore anche lo studio di trasformazioni per cui questo non è più valido. Una delle trasformazioni più interessanti di quest'ultimo tipo è l'inversione circolare, un esempio da proporre sia per la semplicità di trattazione che per l'applicazione alla costruzione di un modello di geometria non euclidea.

Illustro, pertanto, un'ipotesi di itinerario didattico da seguire in un triennio di scuola superiore sullo studio delle proprietà fondamentali dell'inversione circolare, e sulla sua utilizzazione alla costruzione del modello di Poincaré della geometria non euclidea iperbolica.

Presento, inoltre, l'ambiente Cabri come ulteriore strumento di indagine da affiancare ai metodi tradizionali per rafforzare il lavoro di scoperta guidata.

II. Inversione circolare sul Cabri

Definizione di inversione circolare:

nel piano sia dato un cerchio in di centro O e raggio r, per definizione, l'immagine di un punto P, per inversione circolare, è il punto P' appartenente alla semiretta OP e tale che

$$OP \cdot OP' = r^2 .$$

La traduzione di questa definizione in ambiente Cabri può essere proposta agli alunni. Per costruire il punto P' applico il teorema di Talete (fig.1) ai punti O, P e Q (intersezione della retta r individuata da O e P con in), e ai punti O, T (intersezione della perpendicolare per O ad r con in) e N (intersezione della parallela per Q al segmento PT con la retta s).(6)

Con questo strumento gli alunni indagano sul comportamento dell'immagine di un punto, di una retta, di un cerchio; guidandoli nell'osservazione scoprono che:

– a punti interni al cerchio di inversione corrispondono punti esterni e viceversa; i punti appartenenti al cerchio di inversione sono uniti; l'inversione è una trasformazione involutoria; più i punti sono prossimi al centro di inversione più i

* Liceo scientifico "Francesco d'Assisi", Roma.

corrispondenti si allontanano dal centro di inversione.
– non si conserva l'allineamento: a rette corrispondono cerchi; il raggio del cerchio aumenta al diminuire della distanza della retta dal centro di inversione: le rette per il centro di inversione sono unite
– al cerchio corrisponde un cerchio; al diminuire della distanza del cerchio dal centro di inversione corrisponde un aumento del raggio: ai cerchi per il centro di inversione corrispondono rette; esistono cerchi uniti (5).

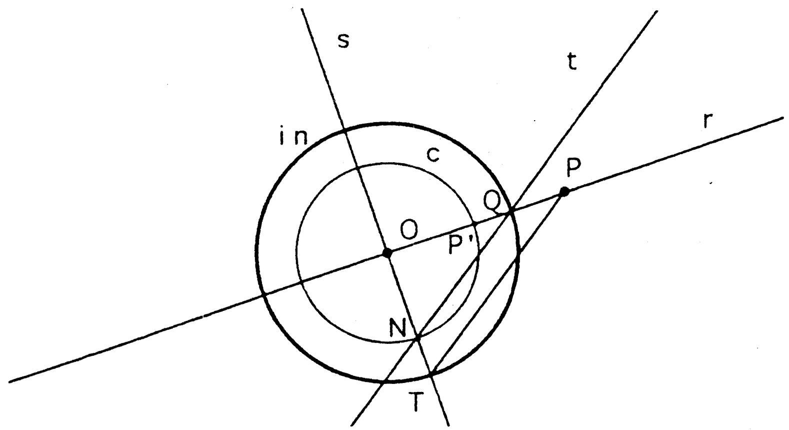


fig. 1

III. Dall'osservazione alla sistemazione
Ho raggruppato le proprietà osservate sul Cabri per comodità di esposizione, nella pratica didattica è utile intrecciare le osservazioni con sistemazioni formali per rafforzare l'abitudine a scoprire e dimostrare proprietà con metodi e linguaggi diversi.
Illustro delle situazioni per concretizzare quanto sopra affermato:

III.1 scoprire con il linguaggio algebrico
determinata la rappresentazione analitica dell'inversione con il centro nell'origine degli assi:

$$(i) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{r^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{r^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

(la rappresentazione analitica dell'inversa si ottiene scambiando l'apice nella (i)), si può studiare, ad esempio, il trasformato di un cerchio per l'origine di equazione

$$x^2 + y^2 + a x + b y = 0 \quad ,$$

esprimendo x ed y in funzione di x' e y' tramite l'inversa si ha che l'immagine è una retta di equazione

$$a x' + b y' + r^2 = 0 \quad ,$$

e, ricordando che la tangente al cerchio nell'origine si ottiene uguagliando a zero i termini di primo grado in x e y dell'equazione del cerchio,

$$a x + b y = 0 \, ,$$

si scopre, con il formalismo algebrico, che la retta immagine e la tangente al cerchio nell'origine sono parallele (1).

III.2 dimostrare con il linguaggio geometrico
abbiamo osservato che esistono cerchi uniti; come caratterizzarli ?
utilizzando i metodi della geometria sintetica, si dimostra che

$$C_2 \text{ è unito rispetto a } C_1 \quad \Leftrightarrow \quad OT \perp O'T$$

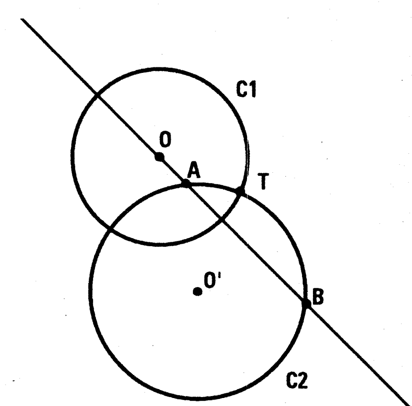


fig. 2

($\Rightarrow$) se $OT \cap C_2 = \{T, R\}$ allora inv(T) = R, assurdo;
($\Leftarrow$) $OT^2 = OA \cdot OB$, allora inv(A) = B e viceversa.

III.3 rendere più esplicite con il linguaggio Cabri situazioni problematiche; ad esempio sul significato di angolo.
L'angolo rPz si trasforma per inversione nell'oggetto r'P'z individuato da una semiretta e da un arco di cerchio (fig.3); la definizione di angolo lineare (angolo è una coppia di semirette aventi la stessa origine) può essere generalizzata sostituendo al termine semiretta quello di porzione di curva, rispetto a questa

estensione un angolo si trasforma in un angolo, tuttavia gli angoli retti rPz e sQz si trasformano in angoli r'P'z e s'Q'z distinti.

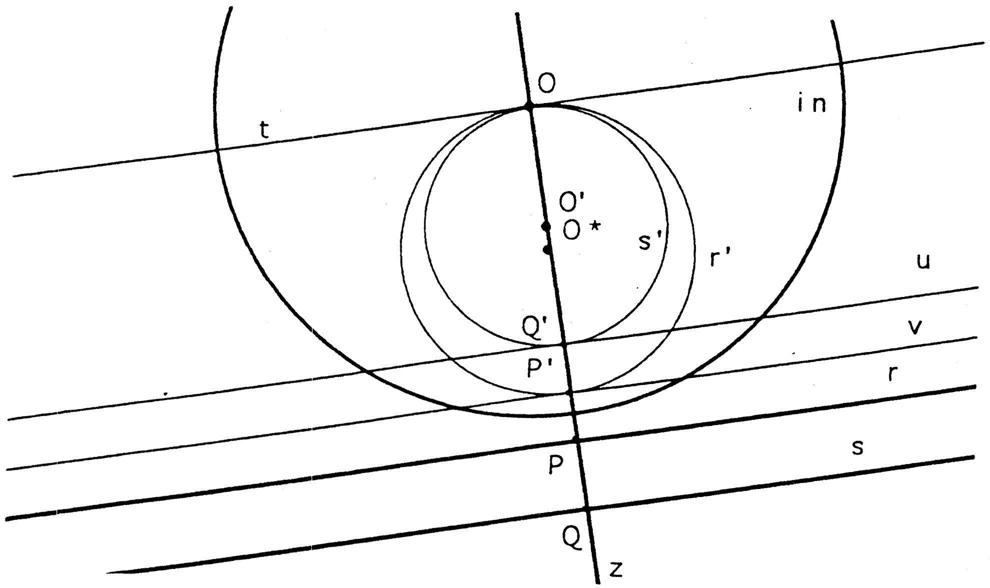


fig. 3

Un'altra possibile via per estendere la nozione di angolo è quella di rivedere alcune proprietà degli angoli lineari: l'ortogonalità tra rette, (z è perpendicolare ad s se z è unita rispetto alla simmetria di asse s), può essere estesa al caso di s' e z, z è unita rispetto all'inversione individuata da s', inoltre z è perpendicolare alla tangente ad s' in Q'; questo è vero anche per i cerchi uniti per inversione, inoltre le tangenti sono ancora perpendicolari; questi due casi possono essere generalizzati identificando l'angolo tra due curve come quello formato dalle rispettive tangenti nel punto di intersezione. Come primo risultato per l'inversione abbiamo che gli angoli retti si conservano, infatti l'angolo retto rPz si trasforma nell'angolo retto r'P'z; più in generale si dimostra che l'inversione appartiene alle trasformazioni conformi (5). Le nozioni appena discusse hanno una naturale applicazione alla costruzione del modello di Poincaré.

IV. Modello di Poincaré

Fermat ha formulato un principio generale dell'ottica geometrica: in un mezzo omogeneo un raggio luminoso che passa da un punto a un altro segue un cammino per cui il tempo impiegato è minimo rispetto a tutti i cammini che congiungono i due punti.

Se si applica il principio di Fermat alla situazione in cui la luce si sposta all'interno di un disco di bordo in, cerchio di centro O e raggio R, con velocità espressa dalla relazione

$$v(A) = R^2 - r^2 \ , \ OA = r,$$

si dimostra che, comunque scelti due punti interni al disco, il percorso di tempo minimo è un arco di cerchio ortogonale a <u>in</u> (4).

Siamo condotti a verificare in questa situazione quali assiomi della geometria euclidea sono ancora validi : questa analisi, se si è studiata la geometria elementare seguendo l'esposizione di Prodi (8), ci porta ad affrontare problemi di definizione e di esistenza (1), (2), (3).

Definita la metrica come il logaritmo del birapporto, la retta come arco di cerchio ortogonale a <u>in</u>, la simmetria come inversione circolare si può mostrare (7) e dimostrare che sono verificati gli assiomi:

della metrica; dell'esistenza ed unicità della retta per due punti; dell'esistenza di tre punti non allineati; di ordine; dell'esistenza della corrispondenza biunivoca tra punti e numeri reali; dei semipiani; dell'esistenza ed unicità della simmetria assiale; dell'esistenza ed unicità della retta perpendicolare.

A titolo di esempio illustro come costruire sul Cabri la perpendicolare s alla retta r per il punto P (fig.4): il cerchio s deve passare per il punto P', immagine per inversione di P, (s è unito per inversione rispetto ad <u>in</u>), il centro di s appartiene allora all'asse del segmento PP', inoltre deve appartenere anche alla perpendicolare in P alla retta u, (s deve essere ortogonale a r), dall'unicità di P', u, v e del punto di intersezione di due rette segue l'unicità della perpendicolare.

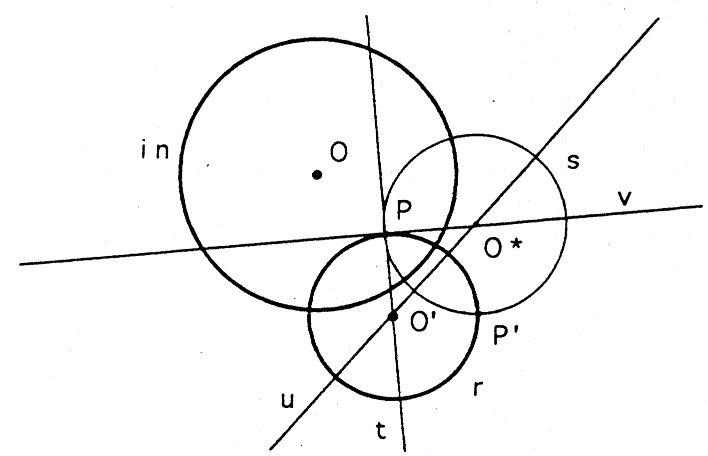


fig.4

Il Cabri può essere di aiuto nel mostrare la non unicità della parallela , infatti muovendo B su in (fig.5) il fascio per M è formato da rette incidenti r internamente al disco, rette incidenti r sul bordo (parallele), rette non incidenti r (iperparallele) (7).

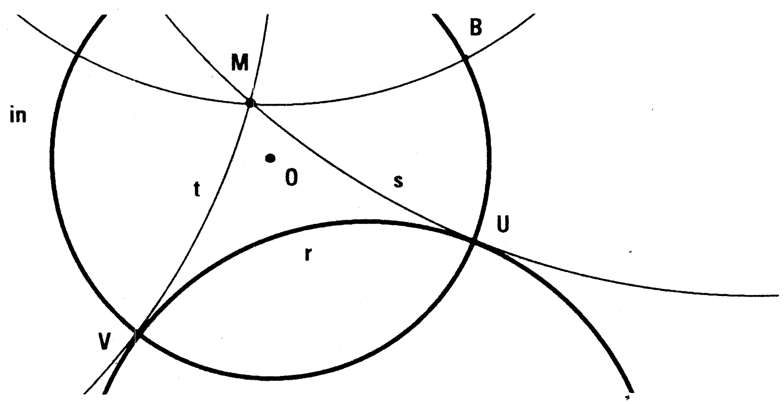


fig.5

Una conseguenza della non unicità è che due rette parallele hanno per un punto perpendicolari distinte; nel caso delle rette iperparallele r e s (fig.6), detta t la perpendicolare a r per il punto H, fissati arbitrariamente i punti E, F, G su s, costruiti i corrispondenti E*, F*, G* rispetto all'inversione individuata da t, muovendo H su r, esiste un unico punto di r per cui E*, F*, G* appartengono a s, poiché l'immagine di un cerchio per inversione è un cerchio, dall'unicità del cerchio per tre punti, si può congetturare l'esistenza di un'unica perpendicolare comune a due parallele.

Per dimostrare formalmente la congettura su enunciata osserviamo che i punti A e B sono allineati con il centro di t perpendicolare a r, infatti si corrispondono rispetto all'inversione individuata dalla t , per poter essere t perpendicolare anche ad s, i punti C e D devono essere allineati con il centro di t, tale centro è dato allora dall'intersezione delle rette individuate da A, B e C, D, inoltre i punti di intersezione di t con in devono essere allineati con i centri di r ed s perché t, oltre ad essere unito rispetto a r, deve essere unito anche rispetto ad s, quindi passa per i punti di intersezione del segmento di estremi i centri di r ed s con il cerchio in, con questo è dimostrata l'esistenza e l'unicità della perpendicolare a due rette iperparallele.

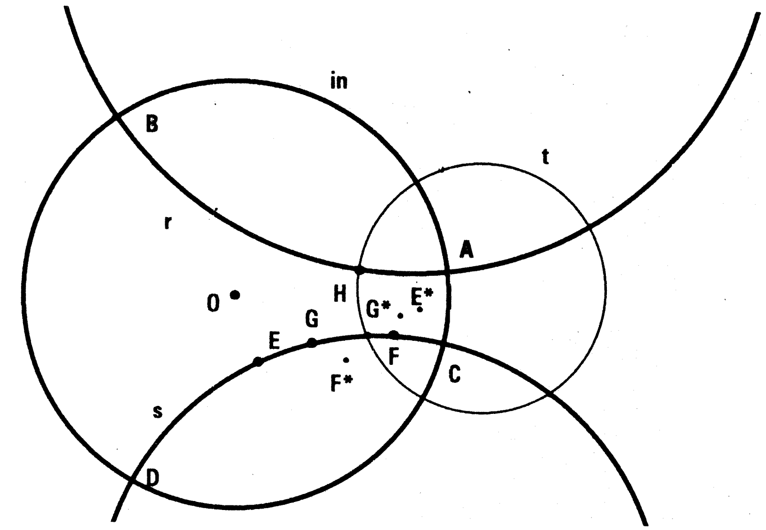


fig.6

Quanto sopra proposto è un esempio guida di come sia possibile condurre lo studio del modello di Poincaré, cioè utilizzare:

– le tecniche costruttive (troppo spesso trascurate!) per descrivere gli oggetti su cui si lavora e costruire esperienze per mostrare le proprietà del modello sul Cabri;

– il linguaggio sintetico e analitico per dimostrare se quanto mostrato è vero formalmente.

Bibliografia

1. E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee*, Mondadori, 1978
2. L. Cannizzaro, M. Carosi, *Esplorando la geometria del modello di H. Poincaré*, Archimede, 1-2, 1981
3. H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley ,1969
4. L.A. Lyusternik, *The sortest lines. variational problems*, Mir Publishers, 1976
5. Eli Maor, *All'infinito e oltre*, Mursia, 1993
6. G. Margiotta, *Inversione circolare*, Cabrirrsae, (in corso di stampa)
7. G. Margiotta, *Macro per la costruzione del modello di Poincaré*, Cabrirrsae, (in corso di stampa)
8. G. Prodi, *Matematica come scoperta*, vol. I e II, D'Anna, 1977

GRUPPI DI LAVORO

Un'esperienza di laboratorio di matematica: il paese dei trasparenti

Gruppo di lavoro Scuola Elementare

Coordinatore: Paola Vighi *

E' stato presentato un itinerario didattico progettato nell'ambito delle attività relative al Laboratorio di Matematica, promosse dall'IRRSAE Emilia-Romagna.

L'itinerario è finalizzato a stimolare gli allievi ad utilizzare e a costruire le proprie conoscenze lavorando in situazioni concrete. I concetti affrontati sono quelli di volume, conservazione del volume, rapporto capacità-volume e loro misure.

L'attività prende spunto da una storia in cui si ipotizza la costruzione di un villaggio detto "Villaggio dei trasparenti". Gli alunni sono invitati a realizzare praticamente un quartiere del paese, utilizzando materiale vario fornito dall'insegnante e rispettando ben determinate regole. La costruzione diventa un momento di osservazione e scoperta di proprietà e risulta inoltre un buon elemento di motivazione.

Si sono analizzate criticamente le unità didattiche che costituiscono l'itinerario e si sono illustrati i risultati della sua sperimentazione. Sono state inoltre esaminate alcune videoregistrazioni che documentano l'esperienza fatta in diverse classi. La discussione si è basata soprattutto su di esse.

* Dipartimento di Matematica, Università di Parma.

Le isometrie piane: problemi di insegnamento - apprendimento*

Gruppo di lavoro Scuola Media

*Coordinatori: Rosa Iaderosa - Nicolina A. Malara***

INTRODUZIONE

Si espone qui una sintesi del laboratorio tenuto per insegnanti di scuola media inferiore che ha avuto come oggetto l'analisi di problemi di insegnamento-apprendimento delle isometrie piane messi in luce da una ricerca sperimentale effettuata, con l'utilizzo del computer, in classi di seconda media per due anni consecutivi.

In tale ricerca si è indagato, analizzando comportamenti, risposte e produzioni degli allievi, sulle seguenti ipotesi:

- se il visualizzare attraverso il computer gli effetti su varie figure delle diverse trasformazioni isometriche favorisca la formazione di appropriate immagini mentali e possa prevenire negli allievi difficoltà documentate in letteratura (si veda ad esempio Hart, 1981) producendo in questi una più corretta concettualizzazione;
- se indurre l'osservazione su ciò che muta e ciò che si conserva su tante classi di figure anche non limitate (poligoni, circonferenze, spezzate, rette, ...), in posizioni diverse e non speciali, porti gli allievi a cogliere il concetto di invariante ed a vedere una figura mutata in sé in una data trasformazione come privilegiata rispetto ad altre in riferimento a questa trasformazione;
- se e fino a che punto è possibile superare il concetto di trasformazione come azione su una figura per passare a quello di trasformazione come corrispondenza tra *tutti* i punti del piano.

Tali ipotesi sono state indotte dalla considerazione che in un itinerario didattico di tipo statico, basato esclusivamente su immagini riprodotte su libri di testo, a

* Lavoro realizzato nell'ambito del MURST (40%) e del CNR (contratto n. 94.00112.CT01.

** Gruppo di Ricerca in Educazione Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Modena

nostro avviso, si rafforza la tendenza degli allievi a vedere la trasformazione unicamente come azione su poligoni, o ancora di più sul loro contorno con cui gli allievi li identificano. Sfugge così l'idea dell'estensione di una trasformazione a figure non limitate (rette, strisce o altre analoghe parti di piano) ed alla azione contemporanea sulla totalità dei punti del piano.

D'altra parte, utilizzando il computer per dare una visione dinamica della trasformazione, pur privilegiando inizialmente l'aspetto di "movimento fisico", si consente agli allievi di cogliere più facilmente e rielaborare il più possibile autonomamente gli aspetti che caratterizzano ogni tipo di isometria e il concetto di proprietà invariante. In particolare, è possibile visualizzare e favorire la concettualizzazione di *punti uniti* e di *figure unite*.

Il filo conduttore, nella progettazione e nello sviluppo dell'itinerario didattico sulle isometrie dirette, è stato il collegamento tra traslazione e rotazione per analogia tra spostamento lungo una retta e lungo una circonferenza. Tale analogia è stata rafforzata anche evidenziando, grazie alla visualizzazione, il collegamento tra *invarianti per traslazione*, quali famiglie di rette parallele al vettore di traslazione, e *invarianti per rotazione*, quali famiglie di circonferenze concentriche al centro di rotazione.

Un'importante scelta culturale e didattica in questo itinerario è stata quella dello svincolamento, nelle attività proposte, dall'aspetto metrico e dal riferimento cartesiano. Si è privilegiato l'uso del foglio bianco e le costruzioni con riga e compasso, anche al fine di una riflessione sulla costruzione di figure con tali strumenti o con il computer e per preparare all'analogia illustrata precedentemente.

L'itinerario didattico per ciascuna delle principali isometrie (traslazione, rotazione, simmetria assiale), basato su schede da noi opportunamente elaborate, può essere così sintetizzato:

- momenti di visualizzazione al computer;
- raccolta di osservazioni e previsioni da parte degli allievi;
- uso di schede miranti alla costruzione dei concetti e alla messa in luce dei possibili conflitti tra immagini mentali e concetti in gioco, schede elaborate tenendo conto dei nodi didattici e delle difficoltà di apprendimento *previsti in un'analisi a priori*;
- discussioni collettive per analizzare con i ragazzi i risultati del loro lavoro e recuperare errori e difficoltà attraverso una socializzazione delle conoscenze;
- uso di schede per verificare l'interiorizzazione delle attività di visualizzazione, discussione e riflessione svolte, schede elaborate anche sulla base delle difficoltà emerse.

IMPOSTAZIONE DEL LABORATORIO

Il laboratorio si è incentrato, per questioni di tempo, solo sulle isometrie dirette.

Inizialmente si sono illustrate le linee culturali e metodologiche della ricerca sopra esposte. Successivamente si sono mostrate alcune delle visualizzazioni con cui si è lavorato con i ragazzi in classe e sono state presentate delle schede di lavoro, scelte perché particolarmente significative per ciò che hanno messo in luce, inquadrandone la collocazione nello sviluppo dell'itinerario. E' stato richiesto agli insegnanti presenti (in numero di 28) di analizzare tali schede e indicare per ciascuna obiettivi e difficoltà possibili per gli allievi (elementi che stavano alla base della loro progettazione). Gli insegnanti, organizzatisi a piccoli gruppi, hanno lavorato autonomamente per circa quaranta minuti.

LE SCHEDE DI LAVORO

Le schede di lavoro da noi scelte sono state otto, due dedicate specificamente alla traslazione, due alla rotazione e quattro ad entrambe. Le prime due schede riguardavano la traslazione, e si collocavano in una fase centrale dell'itinerario didattico relativo a questa isometria.

Nella prima si mostrava, in quattro differenti situazioni, una coppia di bandierine corrispondentisi per traslazione. In ciascuna delle situazioni proposte le bandierine venivano a trovarsi in parte sovrapposte lungo un lato. Si chiedeva agli allievi di individuare il vettore di traslazione per cui la seconda bandierina risultava traslata rispetto alla prima e poi, una volta prolungate con un medesimo colore coppie di lati corrispondenti (usando colori diversi per ciascun lato), di esprimere ciò che pensavano accadesse per le coppie di rette corrispondenti. Gli obiettivi di questa scheda riguardavano la verifica della concettualizzazione del *vettore libero* di traslazione, su cui si era precedentemente lavorato, il passaggio dell'osservazione da segmenti (limitati) alle rette di appartenenza (illimitate) e l'intuizione dell'esistenza, in una traslazione, di rette unite con direzione parallela a quella del vettore. Le difficoltà previste riguardavano la rappresentazione del vettore di traslazione (applicato o libero), l'incapacità di distinzione tra segmenti e rette di appartenenza, la mancanza di riconoscimento del parallelismo nel caso di rette sovrapposte.

Nella seconda scheda si chiedeva, in quattro differenti casi, di traslare una retta data, di cui erano evidenziati due punti, secondo un certo vettore. Due dei casi considerati riguardavano la posizione della retta, rispettivamente orizzontale ed obliqua, gli altri due riguardavano la direzione del vettore rispetto a quella della retta, rispettivamente parallela e non. Obiettivo della scheda era di verificare se le attività di visualizzazione al computer, mirate a far cogliere l'invarianza delle rette rispetto a traslazioni nella loro direzione, avevano portato ad una tale concettualizzazione negli allievi. Le difficoltà previste riguardavano il possibile conflitto tra direzione del vettore di traslazione e direzione della retta nella rappresentazione della traslazione della retta e la concettualizzazione del fatto che un punto della retta viene portato in un punto della stessa retta nel caso di vettore ad essa parallelo e quindi dello scivolamento della retta su se stessa.

La terza e la quarta scheda riguardavano la rotazione ed erano collocate nella fase iniziale dell'itinerario su tale trasformazione, dopo una prima visualizzazione al computer degli effetti di svariate rotazioni su bandierine ed altre figure limitate. In entrambe le schede veniva rappresentata la visualizzazione al computer di una bandierina, con drappo triangolare, e della sua ruotata rispetto ad un punto fuori di essa. Nella rappresentazione erano evidenziati quattro punti privilegiati delle bandierine costituenti il piede e i vertici del drappo, inoltre i piedi delle bandierine figuravano congiunti entrambi al centro di rotazione. Nella terza scheda figurava tratteggiato un arco di circonferenza congiungente un vertice del drappo con il suo corrispondente, nella quarta invece, di lettura più complessa, erano tratteggiati tutti gli archi di circonferenza congiungenti rispettivamente i quattro punti privilegiati con i loro corrispondenti e le coppie di raggi congiungenti i punti corrispondenti con il centro di rotazione. Obiettivo della terza scheda era il riconoscimento guidato degli elementi caratteristici di una rotazione nel piano ed una prima indagine sulla capacità degli allievi di identificare alcuni elementi invarianti per osservazione autonoma. La quarta invece era più specificamente finalizzata alla esplicitazione della procedura seguita per ruotare una figura nel piano, alla osservazione dell'invarianza dell'angolo individuato dai raggi congiungenti coppie di punti corrispondenti con il centro di rotazione. La principale difficoltà riguardava proprio il riconoscimento dell'invarianza dell'angolo di rotazione in contrapposizione alla varianza dell'arco sottendente (classico è il concetto errato che considera l'ampiezza di un angolo dipendente dalla lunghezza dei segmenti rappresentanti le semirette che lo delimitano). Nella quarta scheda vi era poi l'ulteriore difficoltà di coordinamento tra la visione globale della figura e le varie parti di essa, in relazione ai punti evidenziati.

Le restanti schede erano tratte da un questionario di verifica finale sulle due isometrie. La quinta e la sesta scheda erano le più complesse sia da un punto di vista concettuale che di rappresentazione. Nella quinta si presentavano sei situazioni, quattro dedicate alla retta e due al cerchio. Precisamente, data una retta di cui non si indicava alcun punto, si chiedeva di operare: a) la sua traslazione rispetto ad un vettore sia non parallelo che parallelo ad essa; b) la sua rotazione di 90° in senso orario sia rispetto ad un suo punto, sia rispetto ad un punto fuori di essa; dato un cerchio si chiedeva di operare la sua rotazione di 90° in senso orario sia rispetto al suo centro, sia rispetto ad un punto fuori di esso. Obiettivo era quello di verificare se vi era stato il superamento di difficoltà evidenziate in precedenza, quali quelle di immaginare la traslata di una retta nel caso di vettore ad essa parallelo, o la costruzione della ruotata di una retta e di un cerchio. Tale scheda presentava svariate difficoltà connesse all'assenza di punti privilegiati sulla retta e sul cer-

chio, alla costruzione del corrispondente di un punto rispetto ad una rotazione, se pure di 90°, e all'immaginare gli effetti di una rotazione sulle figure rispetto ad un centro fuori di esse.
La sesta era in assoluto la scheda di lavoro più delicata, in essa era data una figura costituita da un cerchio ed una retta tangente ad esso con evidenziato il punto di tangenza. Si presentavano due situazioni, nella prima si chiedeva di realizzare la traslazione della figura rispetto ad un vettore parallelo alla tangente, nella seconda si chiedeva di realizzare la rotazione della stessa figura rispetto al centro del cerchio. Si chiedeva inoltre nei due casi l'individuazione di eventuali punti, rette o circonferenze unite ed infine il confronto tra le due situazioni. Obiettivo della scheda era di verificare la capacità di vedere la trasformazione di figure composte e non limitate, di riconoscere nei vari casi elementi uniti, di individuare analogie e differenze nelle varie situazioni, di indagare sulle concettualizzazioni favorite dalle visualizzazioni al computer come l'invarianza di fasci di rette individuate da una retta data e di strisce di piano o di famiglie di circonferenze concentriche ad una data e di cerchi. Le difficoltà presentate da questa scheda erano molteplici e di vario livello, vi era la difficoltà di: a) immaginare e di costruire il trasformato di un singolo elemento della figura (punto, retta, circonferenza) nelle due trasformazioni; b) coordinare i vari elementi trasformati sia nel caso della traslazione che della rotazione, ad esempio riconoscere che per individuare la figura trasformata nella assegnata rotazione basta individuare il trasformato del punto di tangenza mentre nel caso della data traslazione basta individuare il traslato del centro del cerchio; c) vedere la tangente come figura unita nel caso della traslazione, e, cosa più difficile, anche tutte le rette ad essa parallele, d) concepire la circonferenza e tutte quelle ad essa concentriche come figure unite nella rotazione rispetto al suo centro; e) riconoscere il centro di rotazione come unico punto unito nella rotazione. La richiesta di confronto tra le due situazioni comportava poi il controllo metacognitivo su quanto appreso.
Le schede settima ed ottava erano più centrate sulla traslazione.
Nella settima si chiedeva di indicare il traslato di un quadrato, posto in posizione non privilegiata, rispetto ad un vettore equipollente ad un suo lato. Obiettivo della scheda era quello di indagare se negli allievi vi fosse la capacità di vedere correttamente l'azione di una traslazione in situazione di distrazione e soprattutto di vedere il *mutamento contemporaneo di posizione* dei punti del piano. (Inizialmente in situazioni analoghe era emerso il conflitto tra punto e posizione del punto, vari allievi infatti avevano parlato di punto unito manifestando l'idea che in tale situazione avvenisse la sovrapposizione di un punto con il suo corrispondente.)
Nella ottava scheda, assegnata una striscia di piano si chiedeva di: a) immaginare e descrivere la sua traslata rispetto ad un certo vettore ad essa non parallelo; b) traslare la striscia rispetto ad un vettore ad essa parallelo (non assegnato) e dire qualcosa sulla corrispondente; c) precisare se esistono rotazioni che trasformano in sé la striscia ed in caso affermativo indicare di qualcuna centro, ampiezza e verso di rotazione. Obiettivo di questa scheda era di indagare sulla formazione delle appropriate immagini mentali circa gli effetti di traslazioni e rotazioni su figure non limitate, sulla base delle visualizzazioni al computer ed alle attività di previsione effettuate, anche nel caso di figure unite. Le difficoltà della scheda erano di tipo concettuale e, anche se più semplice della quinta e sesta, per rispondere correttamente ad essa gli allievi dovevano aver interiorizzato buona parte delle precedenti attività.
Al di là delle difficoltà specifiche c'erano inoltre difficoltà di tipo generale quali quelle proprie dell'uso degli strumenti (riga e compasso) e quelle di carattere espositivo, legate al dover esprimere osservazioni e considerazioni.

RISULTATI DEL LABORATORIO

Il tempo disponibile ha consentito agli insegnanti di prendere in esame solo sei delle otto schede loro proposte, precisamente le due relative alla sola traslazione, le due alla sola rotazione, e le prime due di sintesi su entrambe le isometrie.
Gli insegnanti si sono mostrati molto interessati alla novità di quanto proposto dichiarando di aver sempre trattato il tema delle isometrie in maniera fedele al proprio libro di testo, senza minimamente pensare di prendere in considerazione gli aspetti da noi studiati, né sospettare i problemi di insegnamento-apprendimento da noi evidenziati. Hanno richiesto informazioni più dettagliate sulle modalità di utilizzo dello strumento informatico, ed in particolare riguardo alla costruzione delle procedure per la visualizzazione. Sulle schede in generale hanno puntato la loro attenzione sulla loro impostazione grafica, anche in riferimento agli spazi riservati alla compilazione da parte degli allievi, ma soprattutto sulla formulazione delle consegne e quesiti posti. Al riguardo si è discusso sulla difficoltà di raggiungere un buon equilibrio tra l'esigenza di un linguaggio non ambiguo e puntuale e quella di una lettura facile e comprensibile per tutti gli allievi.
Per quanto riguarda specificamente la consegna loro data, si è rilevata una certa rispondenza tra gli obiettivi individuati dagli insegnanti e quelli soggiacenti alla redazione di ogni scheda. Più difficile invece è risultata la previsione delle difficoltà possibili per gli allievi. Per le schede relative alla traslazione, ad esempio, non è stata da loro considerata la difficoltà, nella visione dell'azione di una traslazione, del passaggio da un segmento alla retta di appartenenza, così come la maggiore difficoltà nella individuazione e rappresentazione di un vettore libero di traslazione rispetto a quello applicato. Inoltre, non è stata da loro assolutamente prevista una grossa difficoltà degli allievi emersa con la nostra ricerca: quella di *traslare una retta*, in parecchie produzioni è documentato l'evidente e persistente conflitto tra la direzione del vettore della traslazione e quella di rette su cui essa

agisce.
Riguardo alla rotazione, l'attenzione degli insegnanti è stata rivolta soprattutto alla difficoltà degli allievi di identificare l'invarianza dell'angolo di rotazione dalla lunghezza dei suoi lati. E' stato chiarito nella discussione anche il ruolo svolto, nella procedura utilizzata per la visualizzazione, dal "braccio", segmento congiungente il centro di rotazione con ciascun punto, ruolo che ha permesso di indurre negli allievi l'immagine mentale di una figura ruotata rispetto ad un centro ad essa esterno e di oscurare la visione, usualmente indotta dalle rappresentazioni statiche dei libri di testo, che porta ad interpretare l'effetto su una figura di una rotazione rispetto ad un punto fuori di essa come frutto della composizione di una rotazione rispetto ad un punto privilegiato di essa e di una opportuna traslazione.
Assolutamente nuova per gli insegnanti è stata la situazione didattica affrontata con le ultime schede da loro esaminate, in cui si chiedeva agli allievi di operare rotazioni e traslazioni su rette, circonferenze, e poi su entrambe.
Gli insegnanti si sono mostrati molto interessati infine alla presentazione delle diverse categorie di elaborati prodotti dai ragazzi al riguardo. In alcuni di questi appaiono evidenti le difficoltà, anche dopo ripetute esperienze di visualizzazione, sia nell'effettuare rotazioni su rette, sia nel controllare l'azione contemporanea di una traslazione o rotazione su una coppia cerchio-retta. In altri sono invece chiari gli sforzi tesi al superamento di tali difficoltà ed infine in altri ancora emerge chiara una buona concettualizzazione delle situazioni proposte.
Nonostante le difficoltà emerse, riguardo ai risultati della ricerca c'è da precisare che, il ricorso alle visualizzazioni al computer ha consentito negli allievi una buona interiorizzazione della visione di classi di figure unite per traslazione o rotazione e la conquista del concetto di figura unita rispetto ad una data isometria, concetto quest'ultimo essenziale per dare senso allo studio del problema di caratterizzare di una assegnata figura le isometrie rispetto alle quali è unita. Inoltre è apparsa nella maggioranza degli allievi una buona concettualizzazione della trasformazione come corrispondenza, nonostante la sequenzialità nella costruzione delle figure nelle visualizzazioni proposte, che si pensava potesse inibire la concezione della contemporaneità dell'azione della trasformazione sulle figure stesse.
E' risultata problematica invece l'estensione della trasformazione all'intero piano, dovuta a nostro avviso, al di là della limitatezza dello strumento di rappresentazione, al prevalere in diversi allievi di una visione locale dei fatti osservati, visione che si estendeva a seconda dei casi considerati ma rimaneva lontana da quella globale, difficile da conquistare forse anche per l'immatura formazione a questo livello scolare degli stessi concetti di retta e piano.
A conclusione del laboratorio gli insegnanti hanno richiesto ulteriore materiale di documentazione e auspicato una maggiore diffusione di studi di questo genere.

Bibliografia

Clements D.H., Battista M. T., 1992, Geometry and Spatial Reasoning, in Grouws D.A. (a cura di) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, McMillan, N.Y., 420-464

Hart K., 1981, *Children understanding of Mathematics 11-16*, London, Murray

Krigowska S., 1979, Ruolo didattico della trasformazione e dell'invariante nell'insegnamento della Matematica, cap. 3 di *Cenni di didattica della Matematica*, Quad.12, ed Pitagora, Bologna, 46-62

Iaderosa R., Malara N. A., 1993, Una ricerca sperimentale sulle isometrie piane, relazione presentata al *XIV Conv. Naz. Nuclei di Ricerca* - sez. Sc. Media, Bocca di Magra (SP), 1993

Malara N. A., 1994, Didactical Innovation in Geometry for pupils aged 11-14, in Malara N. A., Rico L. (eds.) Proc. *First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, Modena, 59-66

Malara N. A., 1994, La geometria nei programmi scolastici di alcuni paesi europei per allievi dai 6 ai 16 anni, in stampa su Atti del *XXIII Seminario Nazionale del Centro Morin*

Mariotti A., 1993, Geometrical Reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspect, *Topologie Structurale/Structural Topology*, n. 18

Pellegrino C., Malara N. A., 1991, The LOGO in the teaching of Mathematics: problems, experiences and requests, Proc. *EUROLOGO 91*, Parma, 507-530.

SMP, 1972, *School Mathematics Project*, Zanichelli, Bologna

Speranza F., 1988, Salviamo la Geometria, *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 2, n. 2, 6-13

Villani V. e Altri, 1994, Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Documento preparatorio Studio ICMI, *Notiziario UMI*, XXI, n. 7, 67-76

Analisi di disegni di situazioni spaziali: ipotesi di ricerca e implicazioni didattiche

Gruppo di lavoro Scuola Media

Coordinatori: Laura Parenti e Paola Tizzani***

1.Introduzione

Il lavorò di gruppo è stato coordinato da alcune delle persone che, all'interno del Nucleo di Ricerca Didattica di Genova, si occupano in modo rilevante del tema "rappresentazione dello spazio".

Inizialmente abbiamo sottolineato come questa attività fosse per noi occasione di presentare i risultati del nostro lavoro degli ultimi anni, ma anche occasione per discuterli e per trarne indicazioni utili per il fututo.

In questo clima di collaborazione, abbiamo proposto ai presenti dei materiali, chiedendo di analizzarli per individuare e discutere quali dinamiche mentali vengono attivate a livello adulto e dagli alunni nella produzione e/o lettura di disegni di situazioni spaziali.

2. Problematiche affrontate nel lavoro di gruppo e loro discussione.

Il lavoro di gruppo è stato articolato nei seguenti passi:

a) breve premessa da parte nostra per spiegare che:
   - i materiali presentati sono di alunni di prima e seconda media che seguono il Progetto genovese, quindi di alunni abituati, in particolare, a verbalizzare, ad affrontare prooblemi aperti e problemi senza numeri;
   - i disegni analizzati sono di ragazzi che non conoscono tecniche specifiche di disegno e che sono stati prodotti per risolvere problemi. Prenderemo in considerazione anche schizzi realizzati per indagare situazioni problematiche.

b) richiesta ai partecipanti di svolgere la scheda di verifica seguente al fine di coinvolgerli nella identificazione, razionalizzazione e verbalizzazione delle dinamiche mentali personali che ciascuno mette in atto (a livello conscio o inconscio) quando affronta un problema di lettura/interpretazione di un disegno.

* Dipartimento di Matematica, Università di Genova.

**Scuola Media I.Calvino, Sanremo.

Abbiamo dichiarato che questa attività ci avrebbe aiutato anche a comprendere se le ipotesi formulate per gli alunni si verificano anche per i processi di pensiero a livello adulto.

***Consegna**: Completa la scheda cercando di identificare e descrivere i processi di pensiero (dinamiche mentali) che ti hanno consentito di arrivare alla soluzione finale.*

Scheda di verifica

(seconda media - 12 anni)

La figura S (fig.S) rappresenta due palazzi in prospettiva e la figura R (fig.R) rappresenta la sezione di un piano.

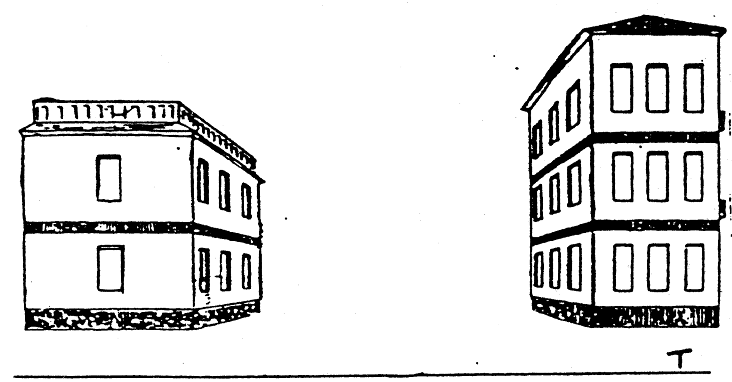


fig. S

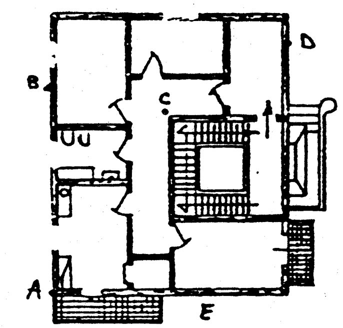


fig. R

1a) A quale palazzo si può attribuire la sezione ?..........Perché ?

1b) Quale piano è rappresentato nel disegno di fig..R ?

2) Si sa che l'osservatore dei due palazzi in prospettiva può muovere i piedi sulla linea T tracciata sul terreno. Traccia in fig. S la sagoma dell'osservatore.

3) Si possono trovare in fig.S i punti che corrispondono ai punti A, B, C, D, E di fig.R ?   Perché ?

<u>In questa fase non vengono discusse le strategie messe in atto dai partecipanti.</u>

c) consegna della soluzione proposta da un'alunna (Manuela), chiedendo ai presenti di assumere il "ruolo insegnante" e di identificare <u>le dinamiche mentali e le difficoltà</u> <u>che l'alunna ha incontrato</u>, informando che per dare la soluzione l'alunna ha dovuto ritagliare e ruotare fisicamente il disegno in pianta.

Consegna**: Analizza attentamente la seguente soluzione proposta da* ***Manuela, 12 anni *cercando di identificare le <u>dinamiche mentali e le difficoltà</u> incontrate dall'allieva.*

Soluzione di Manuela (12 anni)

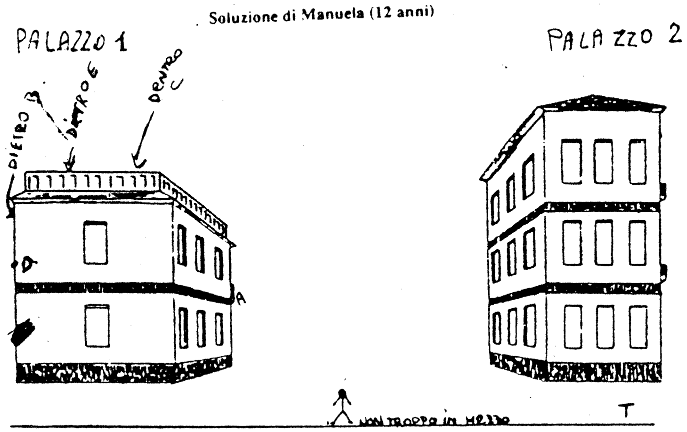


fig. S

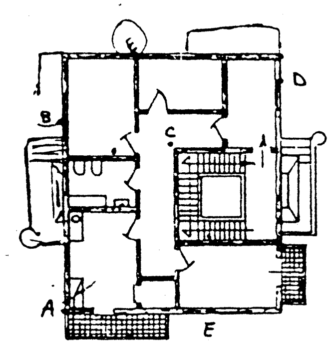


fig. R

1a) Al primo palazzo, perché nel secondo si dovrebbe vedere il portone a sinistra (o a destra a seconda che la fig.R sia girata o no) ma comunque le coordinate non corrispondono nemmeno con i balconi. Nella figura R girando il disegno girano tutte le cose e il balcone si vede come nel palazzo S e non si vedono quello piccolo e le scale con il portone.
1b) Il secondo. Si vede dal balcone e dalla figura girata.
2) L'osservatore è circa al centro (non proprio al centro) perché nel primo palazzo la figura ha le finestre un pò più piccole, nell'altro la figura ha le finestre un pò più grandi.
3) sul foglio

Segue una partecipata discussione in cui vengono messe a confronto le nostre interpretazioni della soluzione proposta dall'alunna con quelle dei presenti.

Tutti siamo d'accordo sul fatto che Manuela non è in grado di gestire mentalmente la rotazione delle immagini senza avere un supporto fisico, per cui ruota la pianta per cercare le corrispondenze, le trova col primo palazzo, quindi risponde correttamente alla domanda 1a).

Secondo noi inoltre Manuela blocca la rotazione finale, eseguita materialmente ruotando il foglio, fissandola con un disegno. Quindi il disegno blocca il pensiero alle situazioni rappresentate e l'alunna non riesce a compierne una lettura critica per capire che vi possono essere situazioni alternative che portano a formulare nuove ipotesi.

Altri ragazzi invece hanno fatto schizzi separati delle varie situazioni possibili (con rotazioni), anche a questi manca la capacità di gestire mentalmente e globalmente la rotazione del modello, ma il disegno è comunque per loro una traccia del proprio pensiero: dividono il problema in sottoproblemi più facili da analizzare e ogni schizzo può successivamente essere gestito mentalmente (riletto in modo critico) per il confronto con il disegno proposto. Altri ragazzi ancora hanno risposto a questo quesito con frasi del tipo "sono entrato nel disegno, ho girato dietro il palazzo e ho visto che....": questi hanno saputo gestire mentalmente la rotazione senza il supporto di un disegno. Questi movimenti immaginati rientrano in quelle che abbiamo definito "dinamiche mentali di tipo spazialziale".

Per rispondere alla domanda 1b), Manuela utilizza ancora il proprio disegno e rimane chiusa in questo dicendo: "si vede dalla figura girata".

Altri alunni hanno invece detto "sono entrato nel portone, ho salito le scale seguendo le frecce e sono entrato al 1° piano", dando anche in questo caso una visione dinamica della soluzione (dinamiche mentali di tipo spaziale).

Per quanto riguarda la domanda 2, Manuela dà una motivazione empirica, in mancanza di tecniche specifiche. Abbiamo notato che in altre classi, il possesso di tecniche relative al punto di fuga, apprese in altre discipline, ha portato a congiungere le linee dei palazzi; alcuni alunni hanno però collocato liberamente l'osservatore in un punto diverso da quello determinato con la tecnica o hanno disegnato due osservatori, dimostrando come le loro convinzioni fossero radicate oltre quanto "appreso".

Domanda 3): Manuela non è ancora in grado di sostenere mentalmente la rotazione e si appoggia al disegno ritagliato. Riesce a collocare correttamente il punto E, dopo aver trovato in pianta il trasformato nella rotazione di 180°; posiziona D dalla parte opposta di A (ritorna al ragionamento destra/sinistra) ma arrivata a B si perde. Dalla verbalizzazione è emerso che ha spostato il punto B a destra sulla pianta, ma non è riuscita a pensare contemporaneamente anche alla rotazione della pianta, ha visto B dalla stessa parte di D e ha scritto "dietro B".

d) solo a questo punto del lavoro abbiamo presentato ed esemplificato, con l'aiuto di altri protocolli, le nostre ipotesi di ricerca, alla luce delle quali avevamo dato le interpretazioni precedenti.

Tali ipotesi si riferiscono alla lettura e alla produzione di rappresentazioni piane di situazioni spaziali e da esse derivano alcune iplicazioni relative al lavoro in classe e alla formazione degli insegnanti.

Possono essere sintetizzare così:

Ipotesi provvisorie (formulate allo stato attuale della ricerca):

1) la capacità di leggere/decodificare in modo approfondito un disegno è strettamente legata alla capacità di produrre/progettare disegni

2) la realizzazione efficace di disegni strutturati (intendendo la soluzione dei problemi di rappresentazione grafica degli oggetti e delle situazioni spaziali e non il fatto di disegnare formalmente "bene") e l'interpretazione/decodifica efficace di disegni complessi non si riducono all'utilizzazione di conoscenze e abilità tecniche specifiche ma, in modo sostanzialmente simile, entrambe richiedono l'attivazione e la gestione accurata di dinamiche mentali spaziali e temporali.

Abbiamo quindi identificato come altro nodo al quale si possono attribuire le difficoltà incontrate dagli alunni nelle attività di produzione e di lettura di disegni, la capacità di gestire le dinamiche mentali che mettono in rapporto esperienze, concetti, proprietà,... di oggetti e situazioni da rappresentare.

In particolare, la gestione di:

- dinamiche mentali associate alle relazioni spaziali;
- dinamiche mentali associate alla variabile tempo.

Per "dinamiche mentali" intendiamo quei processi mentali in cui la mente immagina collocazioni e spostamenti nel tempo e nello spazio o, più in generale, quei processi mentali in cui vengono gestiti tempi e spazi.

Un'esposizione estesa di queste ipotesi si può trovare sugli atti del 46° CIEAEM, in fase di pubblicazione (tale materiale è stato distribuito ai presenti).

e) L'ultimo impegno richiesto ai partecipanti è stato quello di rivedere, alla luce di quanto discusso, la formulazione della loro prima ipotesi di soluzione della scheda di verifica proposta (passo b) di questo verbale) e di riflettere su eventuali modifiche, integrazioni o conferme delle risposte date.

f) La discussione finale ci ha portato a riflettere su aspetti importanti del lavoro proposto e su temi più generali relativi al lavoro di gruppo.

Per quanto riguarda le dinamiche mentali degli adulti sono emerse:

- tendenza a dare risposte sintetiche e codificate e, quindi, difficoltà a ricostruire ed analizzare i processi di pensiero e le dinamiche mentali messe in atto nella costruzione delle risposte;
- difficoltà ad interpretare il disegno proposto nella scheda, relativamente al piano rappresentato, per problemi inerenti alle proprie esperienze di palazzi sul territorio. Queste considerazioni, che ci hanno condotto a riflettere sull'utilità di problemi a risposta multipla, confermano, anche a livello adulto, le dinamiche mentali spaziali e temporali legate al vissuto individuale.

Più in generale, è stato difficile per alcuni mettersi in gioco in tempi brevi su temi non molto meditati e con stili di lavoro non usuali.

E' stato comunque osservato che le problematiche sollevate sono utili punti di riferimento per ripensare al proprio insegnamento, ed è emersa una generale concordanza sulla necessità di costruire nei ragazzi l'abitudine a verbalizzare il proprio pensiero, anche al fine di renderli più consapevoli nelle attività di risoluzione di problemi anche standard e più difficili.

Aspetti della geometria dello spazio

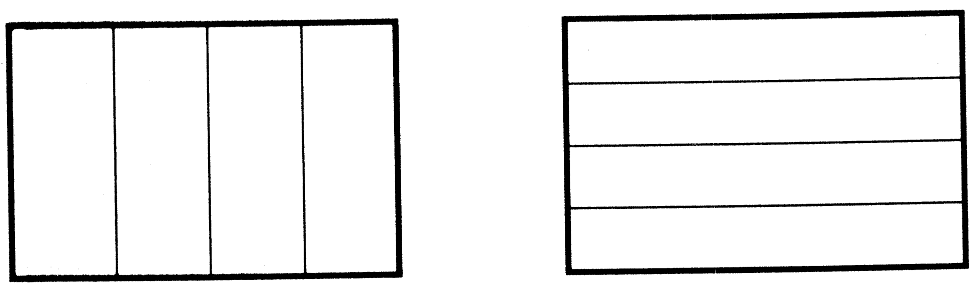
Gruppo di lavoro Biennio Scuola Secondaria Superiore

*Coordinatori: Maria Maddalena Becchere e Elsa Uselli**

I lavori sono stati aperti dalle insegnanti coordinatrici (una delle prime due classi della media superiore, l'altra di una terza media inferiore), con la esposizione di un segmento di una esperienza didattica, partendo da una indagine volta ad accertare le capacità degli alunni di rappresentare la realtà nella sua tridimensionalità, su un foglio a due dimensioni. L'indagine è stata svolta in tre classi, ma l'esperienza qui riportata è relativa ad una seconda della media superiore.

Alla classe è stato posto il seguente quesito che trae spunto da un problema proposto da E. CASTELNUOVO.

Dato un foglio di dimensioni 16cm x 24cm si costruisca un parallelepipedo piegando il foglio lungo la dimensione maggiore o lungo la minore.



Quale sarà il parallelepipedo di volume maggiore?
Giustifica la tua risposta.

La discussione ha preso avvio dalla formulazione del testo intorno al quale sono emerse diverse posizioni: il testo proposto è per alcuni un buon approccio per passare dallo spazio a due dimensioni a quello tridimensionale, per altri sarebbe stato più opportuno partire da una situazione più concreta (per esempio

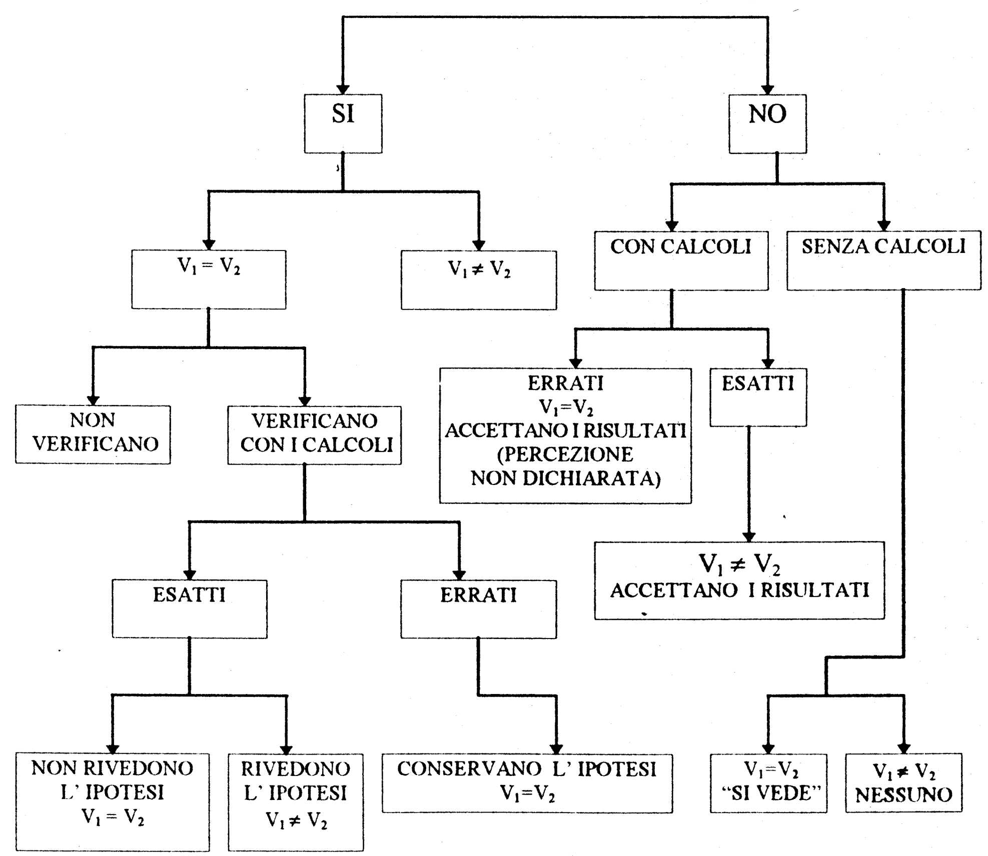
* Nucleo di Ricerca Didattica di Cagliari.

da un cartoccio di castagne); altri ancora hanno suggerito una diversa formulazione, che, comunque, avrebbe implicato prerequisiti non posseduti dagli alunni coinvolti nel lavoro. Si è, poi, presa in esame la risposta data dagli alunni al quesito.

I risultati emersi sono i seguenti:

a) coloro che sono partiti da un ipotesi hanno previsto, per i due solidi, lo stesso volume;
b) quelli che, invece, non hanno formulato alcuna ipotesi

IPOTESI INIZIALI



1) hanno identificato il foglio con il parallelepipedo (individuando nel suo spessore la terza dimensione);
2) hanno tentato di ricavare dalla piegatura del foglio almeno una base ;
3) molti sono partiti dall'idea che quanto viene perso in altezza si recupera in larghezza;
4) hanno applicato formule a caso .

Lo schema della pagina precedente illustra i percorsi seguiti dagli alunni.

Fra coloro che hanno ipotizzato $V_1=V_2$,, tutti hanno verificato l'ipotesi utilizzando il calcolo, due di essi hanno eseguito correttamente le operazioni e sono giunti alla conclusione che $V_1 \neq V_2$, rivedendo quindi correttamente la loro ipotesi, uno solo di loro, nonostante i risultati ha voluto sostenere senza altra giustificazione $V_1=V_2$. Si precisa che tutti i ragazzi del gruppo hanno eseguito correttamente i calcoli .Si è preso, poi, in considerazione il secondo ramo, cioè quello percorso dagli alunni che hanno risolto il quesito senza formulare ipotesi. Si è osservato che undici hanno lavorato eseguendo calcoli, quattro dei quali hanno ottenuto risultati sbagliati e sono arrivati alla conclusione che $V_1=V_2$; cinque hanno eseguito correttamente i calcoli concludendo $V_1 \neq V_2$; tre, infine non hanno eseguito i calcoli e hanno concluso ugualmente $V_1=V_2$ giustificando tale conclusione con un "si vede". Nessuno conclude dichiarando $V_1 \neq V_2$.

Nella tabella 1 sono stati riportati i dati emersi dall'analisi degli elaborati:

TABELLA 1

N°	TRASCRIZ. TESTO	RAPPRES. GRAFICA	CONSIDE-RAZIONI	IPOTESI	CAL-COLI	GENE-RALIZZ.	COERENZA	SVOLGIM.	CONCLUSIONI
1	INCOMPL.	2					COERENTE	INCOMPL.	1°V. = 2°V.
2	INCOMPL.	3	FINALI		SI		PERC.>CALC.	COMPL.	1°V. ≠ 2°V.
3	INCOMPL.						S = → V =	INCOMPL.	1°V. = 2°V.
4	COMPL.	4	FINALI	1°V.= 2°V.	SI		COERENTE	COMPL.	1°V. ≠ 2°V.
5	INCOMPL.	2	FINALI		SI		COERENTE	COMPL.	1°V. = 2°V.
6	COMPL.	3			SI			INCOMPL.	1°V. ≠ 2°V.
7	INCOMPL.	2	FINALI				S = → V =	INCOMPL.	1°V. = 2°V.
8	COMPL.	5	FINALI		SI		COERENTE	COMPL.	1°V. ≠ 2°V.
9	COMPL.	4	FINALI	1°V.= 2°V.	SI		COERENTE	COMPL.	1°V. = 2°V.
10	COMPL.	4	FINALI		SI		COERENTE	COMPL.	1°V. ≠ 2°V.
11	INCOMPL.	3	FINALI		SI		S = → V =	COMPL.	1°V. = 2°V.
12	COMPL.	5	FINALI		SI		S = → V =	INCOMPL.	1°V. = 2°V.
13	INCOMPL.	2	FINALI		SI			INCOMPL.	1°V. ≠ 2°V.
14	INCOMPL.	2			SI			COMPL.	1°V. ≠ 2°V.
15	INCOMPL.	1						INCOMPL.	
16	INCOMPL.	2	FINALI		SI		S = → V =	COMPL.	1°V. = 2°V.
17	COMPL.SB.	2	FINALI		SI			COMPL.	1°V. ≠ 2°V.
18	COMPL.	4	INI. E FIN.	1°V.= 2°V.	SI			COMPL.	1°V. ≠ 2°V.

I numeri da 1 a 18 corrispondono agli elaborati degli alunni

Al fine di analizzare le connessioni esistenti tra i diversi parametri riportati nella tabella 1, le coordinatrici hanno elaborato alcune tabelle che sono state presentate durante i lavori.

Le tabelle, trovate molto interessanti dai partecipanti, non permettono certo di dire che esiste una implicazione del tipo "se......allora", tuttavia possono facilitare l'interpretazione di tali connessioni.

Per limiti di spazio analizziamo solo la tabella 2.

TAB. 2

	COERENZA		INCOERENZA	
IPOTESI (SI)	9	1/18	4-18	2/18
IPOTESI (NO)	1-5-6-8-10-14-16-17	8/18	1-2-7-11-13-15-12	7/18

Nella tabella 2 sono riportati i numeri relativi agli elaborati e le percentuali.

L'analisi degli elaborati che si trovano nelle caselle ipotesi(si)/coerenza, ipotesi (si)/incoerenza non ha creato eccessive difficoltà in quanto coerenza e incoerenza sono da intendersi relative alla messa in relazione, da parte dell'alunno, fra risultato ottenuto e ipotesi dichiarata.

L'analisi degli elaborati che si trovano nelle caselle ipotesi(no)/coerenza, ipotesi(no)/incoerenza è risultata, invece, più complessa. Esaminiamole separatamente:

Ipotesi (no) / Coerenza.

Sono emerse due tipi di coerenza:

a) coerenza fra calcoli eseguiti e lettura di questi ultimi

b) coerenza percettiva, "si vede", e calcoli manipolati in funzione di questa (elaborato 5)

Ipotesi (no) / Incoerenza

a) accettazione passiva dei risultati pur essendo convinti del contrario: "strano avrei detto che..." (elaborato 2). La considerazione dell'alunno è stata interpretata come una ipotesi non dichiarata.

b) calcoli totalmente slegati dalla rappresentazione grafica riportata (elaborato 11)

c) totale assenza di ragionamento e di calcoli con dichiarazione " I volumi sono uguali" (elaborato 3 -13-15)

d) Viene dichiarato che i volumi sono uguali, mentre i calcoli vanno in direzione opposta (elaborato 12). Anche in questo caso possiamo interpretare questa considerazione come una ipotesi non dichiarata.

Nel proseguo dei lavori sono emersi e sono rimasti in parte aperti alla discussione i seguenti quesiti:

1) Vista la poca rilevanza che si attribuisce alla geometria solida, sia nelle medie inferiori che in quelle superiori, non sarebbe opportuno assegnarle un nuovo ruolo nella didattica della matematica ?

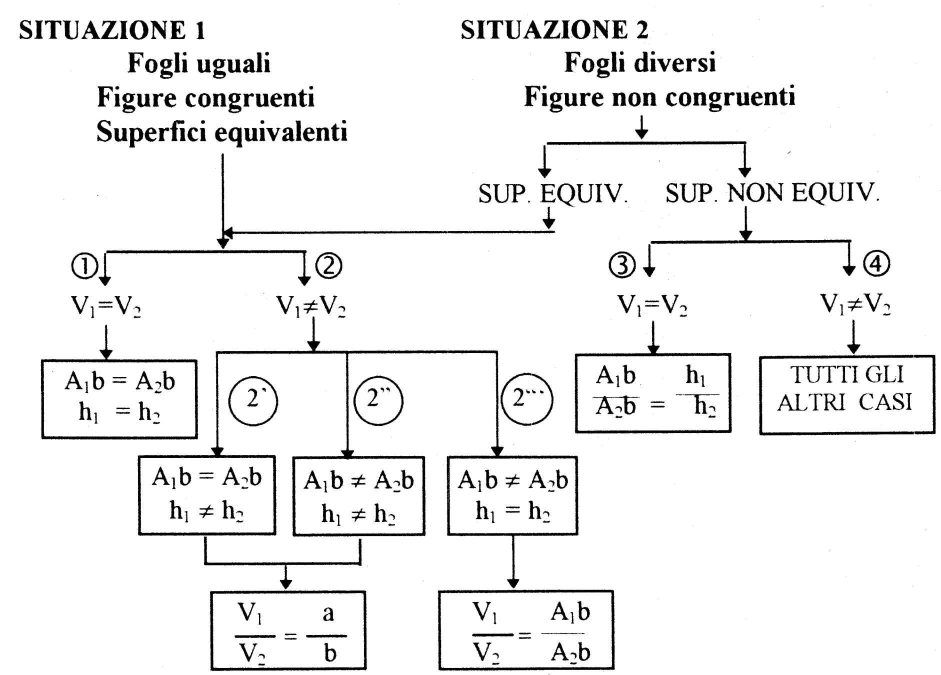
2) Questo genere di problemi può far parte di una strategia di lavoro finalizzata all'apprendimento del metodo deduttivo ?

La seconda parte del lavoro che, non è stato possibile discutere per mancanza di tempo, cerca di dare, almeno in parte, una risposta ai punti su indicati.

Lo schema seguente, elaborato dalle coordinatrici, illustra le possibili strade che si possono seguire per risolvere il problema partendo da due situazioni :

1) costruzione di due parallelepipedi a partire da fogli di uguale dimensione (come nel caso del problema trattato)

2) costruzione di due parallelepipedi a partire da fogli di dimensioni diverse .



SITUAZIONE 1 (fogli uguali)

a) Il ramo 1 richiama la proposizione 31 del libro 11° degli ELEMENTI di EUCLIDE "Solidi parallelepipedi che stiano su basi uguali, ed abbiano altezze uguali sono uguali fra loro".

b) Il ramo 2 presenta tre vie: la prima delle quali 2' seguita dagli alunni come dimostrano i protocolli 10 e 6, la seconda 2'' dimostrata per via algebrica da E. CASTELNUOVO pag. 28 "Pentole, Ombre, Formiche" e in embrione nei protocolli 4 e 2, la terza 2''' dimostrata da EUCLIDE, libro 11° proposizione 32" Solidi parallelepipedi che abbiano altezze uguali stanno fra loro come le basi".

SITUAZIONE 2 (fogli diversi)

a) Il ramo 3 richiama EUCLIDE libro 11°, proposizione 34: "In solidi parallelepipedi uguali le basi sono inversamente proporzionali alle altezze; ed i solidi parallelepipedi le cui basi siano inversamente proporzionali alle altezze, sono uguali".

E' evidente che il problema proposto in classe dalle coordinatrici può essere risolto anche per via grafica sul piano, dando dei due parallelepipedi la rappresentazione dello sviluppo della superficie totale. L'uso di strategie grafiche, sempre a parere delle coordinatrici, sarebbe estremamente utile per questa fascia di alunni, in quanto consente e il recupero di esperienze e il recupero di conoscenze già possedute.

BIBLIOGRAFIA

E. Castelnuovo, *Pentole, ombre, formiche*, La Nuova Italia.
E. Castelnuovo, *I numeri e le figure*, La Nuova Italia.
F. Enriquez, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli.
Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A.Fraiese e L.Maccioni, U.T.E.T.
Danny R. Moates, Gary M. Schumaker, *Psicologia dei processi cognitivi*, Il Mulino.
W. Correl, *Introduzione alla psicopedagogia*, Psycologica.
Piaget, *Giudizio e ragionamento nel bambino*, La Nuova Italia.
Studi e documenti degli annali della Pubblica Istruzione n.56, *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni. Le proposte della Commissione Brocca.*

L'impostazione dell'insegnamento della geometria nella scuola secondaria superiore

Gruppo di lavoro Biennio Scuola Secondaria Superiore

*Coordinatore: Carlo Dapueto**

1. Introduzione

Il gruppo di lavoro è stato coordinato dal Nucleo di Ricerca Didattica MACoSA di Genova (operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università) e, in particolare, dal gruppo di progettazione che, nell'ambito della costruzione e sperimentazione di un piano di lavoro e di materiali didattici per l'insegnamento della matematica nel biennio, si occupa dei temi geometrici.

Una prima parte del lavoro di gruppo si è svolta affrontando alcuni quesiti (contenenti sia aspetti "tecnici" che aspetti "didattici") presentati in una scheda di lavoro (man mano, durante la discussione delle risposte, integrata da altri materiali).

La seconda parte è stata dedicata a una discussione generale sull'impostazione dell'insegnamento della geometria e al confronto di esperienze didattiche.

La gestione della prima parte è stata piuttosto direttiva: non si voleva che venisse sottratto tempo alla discussione generale e, nel contempo, affinché questa non fosse generica e dispersiva, si volevano mettere prima a fuoco alcuni problemi di fondo.

In questa sintesi, per problemi di spazio, non riporto la scheda di lavoro con il testo integrale dei quesiti, ma li presento sommariamente assieme ai relativi commenti, rinviando a un articolo in corso di pubblicazione su *L'insegnamento della matematica* per una presentazione e una discussione più estesa.

2. Questioni proposte per il lavoro di gruppo

1. Un primo gruppo di quesiti proponeva di motivare perché in un meccanismo articolato ad aste incernierate "a fisarmonica" (|XXX|), del tipo di quelli impiegati per transenne, sottotegami regolabili, ... , i due supporti alle estremità si mantengono paralleli. Venivano richieste sia una ***spiegazione***

* Dipartimento di Matematica, Università di Genova

accessibile a una persona "normale" sia una ***dimostrazione riferita alle presentazioni assiomatiche*** della geometria piana proposte dai manuali di Enriques-Amaldi e di Prodi.

Il confronto tra una spiegazione del primo tipo (che, per essere efficace e comprensibile, è sembrato opportuno che sia dinamica, appoggiata a sistemi di riferimento, collegata alla proporzionalità degli avanzamenti dei vari perni, ...) e le dimostrazioni "complete" riferite alle definizioni e agli assiomi considerati dai due manuali (dimostrazioni che, illustrate graficamente, danno luogo a due grafi ad albero assai complessi), ha messo in luce come le classiche dimostrazioni geometriche in genere sono meno "convincenti" e meno "naturali" di argomentazioni basate su concetti e proprietà più collegati alle esperienze spaziali della vita quotidiana. Con ciò si è messa in luce l'opportunità di chiarire meglio, culturalmente e didatticamente, il ruolo delle dimostrazioni e delle presentazioni assiomatiche.

2. Il successivo quesito proponeva (sotto forma di una sceneggiatura con protagonista un Pierino, alunno cocciuto e senza grande feeling con l'insegnante di matematica), l'analisi di una "dimostrazione" del 1° criterio di eguaglianza dei triangoli del tipo di quelle che si trovano i numerosi manuali per la scuola secondaria superiore: si assume come "primitivo" il concetto di movimento (a cui si aggiunge l'aggettivo "rigido", per coltivare la confusione tra figure e corpi ...), senza caratterizzarlo con assiomi, e poi si riproduce, malamente, la stessa dimostrazione di Euclide (prendo un triangolo, lo "trasporto", ...), che, ai nostri occhi, una dimostrazione non è (per Euclide l'uso di alcuni concetti "primitivi" erano giustificato nel "mondo delle idee", per noi deve essere regolato da opportuni assiomi).

Questo quesito ha introdotto ulteriori questioni:

– dietro alla difficoltà a *motivare* gli studenti *alle attività di dimostrazione* ci sono spesso forme di insegnamento inadeguate culturalmente (occorrerebbe tener conto che la *dimostrazione in una presentazione assiomatica* della geometria non ha tanto lo scopo di certificare la "verità" di una proposizione quanto quello di verificare l' "adeguatezza dei postulati" alla cattura delle conoscenze che si vogliono inquadrare assiomaticamente) e didatticamente (sarebbe diverso il contesto di insegnamento-apprendimento se si ponesse il *problema*: «conoscendo le misure di un angolo e dei due lati che lo "comprendono", sono in grado di riprodurre il triangolo in un'altra posizione del piano?»);

– l'importanza, nell'uso del lessico, nelle argomentazioni, ..., di distinguere definizioni, spiegazioni, ... *fisiche* e definizioni, argomentazioni, ... *matematiche* (senza rinunciare alle prime).

3. Un terzo gruppo di quesiti proponeva la riflessione su alcune dimostrazioni errate, con:

– errori di tipo "logico-linguistico",

– errori dovuti al ricorso (ingannevole) all'intuizione "sensibile",

– errori dovuti alla presenza di ragionamenti basati su proprietà della "particolare" figura con cui si è illustrato il teorema ma che non sono presenti nell'ipotesi del teorema,

– errori dovuti all'utilizzo implicito di ipotesi equivalenti alla tesi.

In questo modo si sono messe in evidenza le ***difficoltà "tecniche" delle dimostrazioni*** (errori di questo genere costellano la storia della geometria e sono frequenti anche nel lavoro quotidiano del matematico attuale), e in particolare delle dimostrazioni in geometria.

4. Un quarto gruppo di quesiti ha introdotto un inquadramento più generale della questione del ***ruolo delle dimostrazioni*** e della ***natura delle presentazioni assiomatiche***, che è stato oggetto anche della successiva discussione generale, e che possiamo sintetizzare così:

– le *dimostrazioni* nell'insegnamento devono essere un oggetto di attività conoscitive o uno *strumento conoscitivo*?

– analogie e differenze tra le *dimostrazioni* incontrate *in diversi contesti* ("geometria euclidea", corsi universitari, derivazioni in logica simbolica);

– sono culturalmente più significative attività volte a *seguire una dimostrazione*, a *trovare una dimostrazione*, a *congetturare* proprietà, o ... ? analogie con il problema: che cosa vuol dire "capire" un programma (scritto in un linguaggio di programmazione)?

– da *Euclide* a *Cartesio*, a *Hilbert*;

–come ci si può assicurare che un *sistema di assiomi* per la geometria definisca effettivamente qualcosa, cioè *non porti a contraddizioni*?

– difficoltà a comprendere il significato di assioma e a comprendere il ruolo e a seguire le dimostrazioni nell'ambito di una *teoria assiomatica con un solo modello*, come quella della geometria euclidea (in cui si usano gli stessi termini – punto, retta, segmento, ... – impiegati per descrivere il modello standard – il concetto intuitivo di piano – che si vuole caratterizzare assiomaticamente), difficoltà che si presentano in modo attenuato nel caso di sistemi di assiomi con più modelli (gruppo, distanza, probabilità, ...).

5. L'ultimo quesito proponeva un'attività di costruzione geometrica al calcolatore mediante un semplice programma di tipo "paint" (come Paint Brush o MacPaint, cioè che realizza e memorizza i disegni come insiemi di pixel, a differenza dei programmi di tipo "draw", che possono memorizzare separatamente le componenti di un disegno, registrare un segmento come coppia di punti, un poligono come successione finita di punti, ...).

Si sono così messe in luce le opportunità didattiche che offre l'uso di una applicazione per fare ***disegni al calcolatore***: che cosa fanno i veri comandi? a quali costruzioni e quali trasformazioni geometriche corrispondono? quali conoscenze geometriche (e in che forma) sono incorporate in una applicazione di questo tipo? ...

Sono sorti anche alcuni problemi:

– l'uso del calcolatore quando, fino a che punto, ... può sostituire l'uso di carta, matita, strumenti da disegno tradizionali?

– l'impostazione dell'insegnamento della geometria dovrebbe essere rivisto anche alla luce delle caratteristiche del software grafico "vero" (quello che si usa nelle attività di disegno al calcolatore, sia amatoriali che didattiche o professionali), che ha strumenti diversi rispetto a compasso, riga, squadra, ... tradizionali?

– l'uso di software didattico (come "Cabri" e altri) che utilizza il calcolatore per fare cosfruzioni geometriche con linguaggio e strumenti "euclidei" trova una buona accettazione da parte di insegnanti che, invece, hanno difficoltà di fronte alle applicazioni grafiche standard: ciò è indice dell'efficacia di questo software o è la spia di un ulteriore tentativo, più o meno esplicito, più o meno consapevole, della scuola (e dell'insegnamento della matematica, in particolare) per "digerire" il nuovo (nella tecnologia, nelle professioni, nelle comunicazioni, ...) senza cambiamenti sostanziali?

3. Discussione generale

La seconda parte del lavoro di gruppo è consistita in una discussione in cui hanno preso la parola numerosi partecipanti, sia con interventi di carattere generale, sia riferendo esperienze personali o segnalando difficoltà didattiche e difficoltà di apprendimento degli alunni.

Sintetizzando (e riorganizzando), i temi affrontati sono stati i seguenti:

livelli di ingresso, obiettivi per la scuola secondaria superiore, nuovi programmi

– nei programmi della scuola dell'obbligo e in quelli del biennio e, in parte, in quelli del triennio, sono presenti gli stessi temi e gli stessi argomenti, ma non emerge con sufficiente chiarezza quali debbano essere man mano i diversi livelli di formalizzazione rispetto al ciclo scolastico precedente;

– è parso, comunque, che gli obiettivi che sarebbe importante raggiungere nella scuola media e privilegiare nella verifica e nel recupero nel biennio (all'inizio della prima o prima di affrontare specifici argomenti) sono più quelli di "atteggiamento cognitivo" e di capacità di "operare" consapevolmente con le conoscenze di base: ad esempio saper calcolare l'area di qualche figura "strana" più che recitare formule, saper usare strumenti di misura e da disegno più che ripetere definizioni, sapersi organizzare il "foglio di lavoro", saper schematizzare con figure astratte situazioni concrete, aver riflettuto (non genericamente) sulle differenze tra linguaggio comune e linguaggi specialistici, aver svolto (in contesti semplici, ma non banali) qualche attività di sperimentazione-congettura-verifica-dimostrazione, avere confidenza con il ricondurre problemi ad altri problemi (ricondurre problemi di tipo geometrico ad altri problemi di tipo geometrico, realizzare o interpretare rappresentazioni grafiche di relazioni tra grandezze, visualizzare geometricamente proprietà algebriche, ...), ...

– come esempi dei nuovi livelli di formalizzazione raggiungibili si possono fare: l'uso delle coordinate non solo per rappresentare graficamente dati e funzioni ma come modo di fare geometria, il teorema di Pitagora non solo per risolvere problemi ma anche come cardine della metrica euclidea, le trasformazioni geometriche presentate anche analiticamente e mettendo a fuoco il concetto di "invariante", ...

– i nuovi programmi per il biennio, oltre a non chiarire quali siano i nuovi livelli di formalizzazione (a parte l'aver precisato che non consistono nella presentazione assiomatica della geometria), in più punti creano confusione o danno indicazioni fuorvianti: l'aver aggiunto (rispetto alla versione PNI) dopo «piano cartesiano» la specificazione «: retta, parabola, iperbole equilatera» sembra consentire di ridurre la geometria analitica al grafico di qualche funzione invece che assumerla come modo di fare geometria; non è più presente (rispetto al PNI) il cerchio tra gli esempi di geometria analitica mentre (sia come curva che come luogo geometrico) è tra gli esempi più semplici e più significativi; la mancanza del Teorema di Talete nel programma debole compromette la messa a fuoco dei collegamenti tra approccio sintetico e approccio analitico; lascia perplessi la limitazione delle funzioni trigonometriche agli angoli convessi (e le rotazioni? e i radianti, indispensabili per l'uso delle funzioni trigonometriche dei linguaggi di programmazione? ...) e l'assenza della funzione tangente (e il collegamento tra angoli e coefficienti angolari? ...); non è citata la possibilità di introdurre il concetto di vettore e di impiegarlo per lo sviluppo della geometria; ...

quali riferimenti/strumenti per il lavoro in classe?

– più persone hanno segnalato come l'insegnamento "tradizionale" della geometria, basato sulla presentazione alla lavagna di dimostrazioni e la ripetizione di esse da parte degli alunni, crea un rapporto innaturale con gli alunni e è frustrante anche per l'insegnante (che spesso si trova a studiare definizioni e dimostrazioni presenti sul libro di testo e a ripeterle senza convinzione della loro correttezza o della possibilità da parte degli alunni di comprenderle effettivamente);

– anche buona parte dei libri di testo riferiti ai nuovi programmi hanno mantenuto l'impostazione tradizionale; diversi insegnanti hanno sottolineato l'utilità di privilegiare manuali in cui la presentazione della geometria non sia sistematica e preveda molte attività operative, così da dar modo all'insegnante di organizzarsi più liberamente gli itinerari didattici, di far lavorare gli alunni in modo più attivo, ...; qualche insegnante ha introdotto considerazioni più generali sui libri di testo (sulla loro qualità, sul fatto che molto spesso l'insegnante deve subire l'adozione di un libro operata da altri, ...) e ha sottolineato che sarebbe utile, piuttosto che usare un libro di testo, far lavorare gli alunni su materiali prodotti dagli insegnanti, eventualmente integrandoli con la consultazione di buoni manuali.

educazione alle definizioni e alle dimostrazioni; prima l'algebra o la geometria?

– sono state riferite da alcuni insegnanti esperienze didattiche all'inizio del biennio in cui, rinunciando a una presentazione sistematica della geometria, a partire da alcuni problemi geometrici presentati informalmente, si sono gradualmente messe a punto con gli alunni definizioni (prima con condizioni sovrabbondanti, poi man mano raffinate) e proprietà (congetturate, sperimentate, dimostrate utilizzando altre proprietà già dimostrate o ritenute sufficientemente evidenti), ... con l'obiettivo di educare alle definizioni, alle dimostrazioni, alla padronanza operativa dei concetti, ...

– altri hanno sottolineato l'importanza di non fermarsi ad obiettivi di tipo metodologico, ma di dare comunque, anche a livello di biennio, una organizzazione razionale o dei concetti unificanti o ... alle conoscenze geometriche; sono state accennate alcune proposte: basandosi sul concetto di trasformazione geometrica (alla Klein, per intenderci), riferendosi a una introduzione analitica dei concetti primitivi, fornendo (con solo alcune dimostrazioni) una banca di teoremi organizzati secondo opportuni criteri, ...

– prima l'algebra o la geometria? c'è chi con i "vecchi programmi" svolgeva sin dall'inizio i due insegnamenti in parallelo, chi anticipava l'algebra, chi la geometria; si sono confrontate e brevemente discusse queste diverse scelte: qualcuno ha sostenuto che avviare subito lo studio della geometria fornisce agli alunni un'immagine meno calcolistica, più metodologica, della matematica, consentendo poi di inquadrare meglio anche l'insegnamento algebrico; altri hanno sostenuto che introducendo, in modo ragionato, le attività di manipolazione algebrica (trasformare un termine o un'equazione attraverso passaggi successivi, applicando opportune proprietà) è un'utile premessa per comprendere l'articolazione delle dimostrazioni; altri hanno sottolineato l'utilità di un avvio parallelo, o per l'importanza di mettere subito in luce gli intrecci offerti dal metodo delle coordinate, o perché è utile riferirsi subito a entrambi i contesti per introdurre i concetti fondamentali per lo sviluppo della matematica come quelli di funzione, relazione di equivalenza, ...

– i nuovi programmi sembrano comportare un insegnamento più "fuso": se, infatti, li si interpretasse come un'unione disgiunta di "geometria euclidea", trasformazioni geometriche, calcolo letterale, strutture numeriche, probabilità, statistica, informatica, ... non si vede come potrebbero essere attuati nell'arco del biennio; del resto la prospettiva suggerita nelle indicazioni didattiche dei programmi è quella di individuare degli itinerari didattici in cui le diverse aree matematiche vengano integrate; ma, purtroppo, questa indicazione rimane generica, non è suffragata da esempi, è contraddetta dal modo in cui i contenuti di alcune aree vengono presentati, ...

– in particolare lascia perplessi che nei nuovi programmi per la geometria dalla finalità di «descrivere e studiare razionalmente uno spazio» (PNI) si sia passati alla visione come «guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa» (Brocca): il rilievo si è spostato dalla "matematizzazione" alla "argomentazione", lasciando intendere che le altre aree matematiche offrano/richiedano meno spazio per il ragionamento, e trascurando le difficoltà specifiche delle dimostrazioni geometriche (le ipotesi implicite aggiunte illustrando il teorema con una figura particolare, la difficoltà di separare intuizione "fisica" e argomentazione "formale", ..., di cui si è discusso esaminando i quesiti); alcuni interventi hanno manifestato perplessità anche sull'utilità, nel triennio, di fare riferimento alle geometrie non euclidee: non è un tema che sia facile affrontare correttamente nella scuola secondaria superiore, mentre per far comprendere la natura non assoluta della geometria euclidea si può far ricorso a esempi più semplici (l'uso di distanze diverse da quella euclidea, problemi di navigazione, ...) e, più in generale, mettere a fuoco, non solo in geometria, la natura dei "modelli matematici".

Insegnamento della geometria attraverso l'analogia e l'induzione: spazi n-dimensionali per una proposta di "fusionismo"

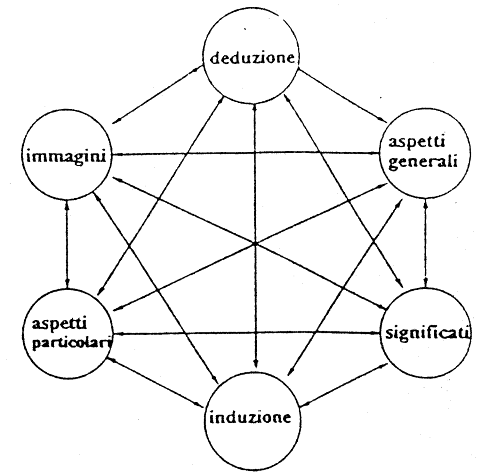
Gruppo di lavoro Scuola Secondaria Superiore

Coordinatore: Mario Barra *

Il gruppo di lavoro che ho condotto assieme ai professori: Loretta Ferrante, Laura Fuiani e Ferruccio Rhor, ha impegnato una quindicina di docenti divisi in gruppi di tre. In ogni gruppo si doveva riempire autonomamente, con qualche intervento dei conduttori, i due questionari che si allegano. La partecipazione è stata considerata attiva, intensa e proficua.
I questionari sono stati presentati specificando alcuni elementi della ricerca all'interno della quale si collocano.
Tale ricerca ha come parole chiave: FUSIONISMO e IN-DE.
Per Fusionismo si intende la filosofia di Klein e di de Finetti che enfatizza in particolare l'importanza didattica del collegamento fra i vari linguaggi della matematica. I due questionari (attraverso gli ipercubi) presentavano un collegamento fra geometria, calcolo combinatorio e teoria dei numeri. Circa il collegamento con il calcolo delle probabilità, che è presente nell'argomento e che si considera importante[1] in special modo, non si è avuto il tempo per andare oltre qualche cenno.
Con IN-DE (induzione-deduzione) si intende il collegamento fra ragionamento per induzione e per analogia con il ragionamento deduttivo. Più in generale si intende sfruttare le potenzialità e il collegamento di vari tipi di ragionamento e di varie modalità di apprendimento, ivi compresa quella per immagini mentali e per auto-apprendimento. I vari aspetti che si intendono porre in relazione sono indicati sinteticamente nel grafo completo che segue:

* Dipartimento di Matematica, Università "La Sapienza" di Roma.

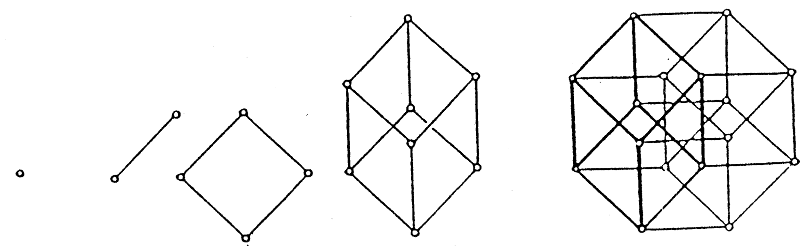
[1] Vedi: Barra M., Probabilità e Statistica nella scuola secondaria, intervento alla tavola rotonda con Michele Boffa, Giuseppe Cicchitelli ed Enzo Lombardo nel XVI convegno nazionale sull'insegnamento della matematica: Probabilità e Statistica nella scuola secondaria, Civitanova Marche - (MC), 28-30/10/93, *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, luglio 1994, supplemento al n.7, pp.59-69.



Gli obiettivi generali che si intendono raggiungere all'interno della ricerca, e che si conducono in particolare con metodi innovativi nei confronti dell'esistente, sono:
1) apprendere di più e meglio e sviluppare armonicamente le varie potenzialità dell'individuo, sfruttando maggiormente il tempo disponibile ed agevolando i processi di attivazione dell'impegno personale e di memorizzazione;
2) migliorare l'immagine e l'atteggiamento nei riguardi della matematica;
3) rendere più agevole il passaggio fra ragionamento naturale e ragionamento scientifico.

"Apprendimento per induzione e analogia" Questionario n. 1

IPERCUBI



C^0 C^1 C^2 C^3 C^4

Fig. 1

DEFINIZIONE: quando un punto C^0 si muove lungo una linea da una **posizione iniziale** ad una **finale**, esso traccia un segmento C^1. Un quadrato C^2 è la traccia di un segmento C^1 traslato da una **posizione iniziale** ad una **finale** lungo un segmento perpendicolare a C^1 e della stessa lunghezza. Allo stesso modo un quadrato C^2 traccia un cubo C^3. La generalizzazione d-dimensionale è:

0) un ipercubo C^d è la traccia di una **base** costituita da un C^{d-1}, traslato **perpendicolarmente a tutti i suoi spigoli**, da una **posizione iniziale** ad una **finale** lungo un segmento che ha la stessa lunghezza di questi. C^0 è un punto e C è un segmento.

1) Quanti sono i vertici C^0 di C^4, cioè quanti sono i $C^{0;4}$? ....

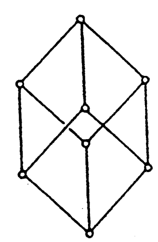
2) Quanti sono i vertici C^0 di C^d, cioè quanti sono i $C^{0;d}$? ....

Immaginate un quadrato C^2 che trasla da una posizione iniziale ad una finale per tracciare un cubo C^3:

3) In questo cubo C^3, che cosa è la traccia di un vertice del quadrato ?

....

Sia $C^{1;i}$ il numero degli spigoli di un cubo ad i dimensioni.
Nel disegno a fianco di C^3 indicate con un:
1) pallino vuoto gli spigoli di C^3 che appartengono a C^2 nella **posizione iniziale**;
2) pallino pieno gli spigoli di C^3 che appartengono a C^2 nella **posizione finale**;
3) con un trattino gli spigoli di C^3 tracciati dai vertici di C^2 durante la **traslazione**.



4) E' vero che $C^{1;3}=2C^{1;2} + C^{0;2}$? ....

Immaginate un cubo C^3 che viene traslato per tracciare C^4:

5) Quanti fra i $C^{1;4}$ appartengono a C^3 nella posizione iniziale? ....

6) Quanti fra i $C^{1;4}$ appartengono a C^3 nella posizione finale? ....

7) Quanti fra i $C^{1;4}$ sono tracciati dai vertici di C^3 durante la traslazione? ...

8) Quanti sono i $C^{1;4}$? ....

9) Quando C^2 genera C^3, che cosa è la traccia di uno spigolo di C^2? ......

Sia $C^{2;i}$ il numero dei quadrati di un cubo ad i dimensioni.

10) Quanti fra i $C^{2;4}$ appartengono a C^3 nella posizione iniziale? ....

11) Quanti fra i $C^{2;4}$ appartengono a C^3 nella posizione finale? ....

12) Quanti fra i $C^{2;4}$ sono tracciati dagli spigoli di C^3 durante la traslazione?

....

13) Quanti sono i $C^{2;4}$? ....

(Se una domanda risulta difficile perchè ad esempio si riferisce ad uno spazio a 4 dimensioni, può essere utile cercare di rispondere alla questione analoga in 3 o in 2 dimensioni)

Le domande precedenti e **seguenti** possono aiutarvi per completare la seguente tabella nei riquadri scuri:

	C^0 i=0	C^1 i=1	C^2 i=2	C^3 i=3	C^4 i=4	C^5 i=5	....	C^d i=d
$C^{0;i}$	1	2	4					
$C^{1;i}$		1	4	12				
$C^{2;i}$			1	6				
$C^{3;i}$				1				
$C^{4;i}$					1			
$C^{5;i}$								
Totale			9					
...								
$C^{j;d}$								

14) Quanti sono i cubi C^3 di un ipercubo C^4, cioè i $C^{3;4}$? $C^{3;4}$ = ...

15) Quanti sono gli spigoli C^1 di un C^5, cioè i $C^{1;5}$? $C^{1;5}$=...................

16) **Quanti sono i quadrati C^2 di un C^5, cioè i $C^{2;5}$?** $C^{2;5}$=........................

17) **Quanti sono i cubi C^3 di un C^5, cioè i $C^{3;5}$?** $C^{3;5}$=............................

18) **Come si può esprimere il numero dei C^2 di un ipercubo C^4, cioè i $C^{2;4}$ attraverso $C^{2;3}$ e $C^{1;3}$?** $C^{2;4}$ =..

19) **Come si può esprimere il numero dei C^3 di un ipercubo C^4, cioè i $C^{3;4}$ attraverso $C^{3;3}$ e $C^{2;3}$?** $C^{3;4}$ =...

20) **Come si può esprimere il numero dei C^j di un ipercubo C^d, cioè i $C^{j;d}$ attraverso $C^{j;d-1}$ e $C^{j-1;d-1}$?** $C^{j;d}$ = ...

Ricordiamo che ad esempio il coefficente binomiale $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ indica il numero dei modi in cui si possono scegliere 3 oggetti su 5. In generale $\binom{d}{j}$ è il numero dei modi in cui si possono scegliere j oggetti su d. Cercate di rispondere alle domande n.: 24_C, 25_C, 28_C, 29_C, 30_C in termini di coefficenti binomiali; ad es. possiamo dire che i **quadrati** in un **vertice** di C^3, cioè i $C^{2,0,3}$, sono $\binom{3}{2}$ perchè in ogni vertice di C^3 ci sono 3 spigoli e scegliendone comunque 2, si individua un quadrato.

21) **Un cubo C^3 è la traccia di uno qualsiasi dei suoi C^2 ?**..............................

Sia O il vertice di C^4 che ha generato il primo spigolo, che a sua volta ha generato il primo quadrato, che ha generato il primo cubo, che ha generato C^4.

22) **Quanti sono gli spigoli di C^4 nel vertice O? Cioè quanti sono i $C^{1,0,4}$?**......

23) **Un ipercubo C^4 è la traccia di uno qualsiasi dei suoi C^3 ?**.......................

24_C) **Quanti sono i cubi in un vertice di C^4, ad esempio nel vertice O ? Cioè quanti sono i $C^{3,0,4}$?** ....

25_C) **Quanti sono i quadrati in un vertice di C^4, ad esempio nel vertice O ? Cioè quanti sono i $C^{2,0,4}$?** ....

26) **Quanti sono gli spigoli di C^d nel vertice O? Cioè quanti sono i $C^{1,0,d}$?** ......

27) **Un ipercubo C^d è la traccia di uno qualsiasi dei suoi C^{d-1} ?** ....

28_C) **Quanti sono i quadrati in un vertice di C^d, ad esempio nel vertice O ? Cioè quanti sono i $C^{2,0,d}$?**...

29_C) **Quanti sono i cubi in un vertice di C^d, ad esempio nel vertice O ? Cioè quanti sono i $C^{3,0,d}$?**..

30_C) **Quanti sono i $C^{j,0,d}$?** $C^{j,0,d}$ =...

"Apprendimento per induzione e analogia" Questionario n.2

Quanto segue esemplifica un teorema molto importante nella teoria dei numeri interi.

5^3-5=120=**3**·5·8. 8^3-8=**3**·8·21. 11^3-11=**3**·11·40. 3^5 - 3= 3·**5**·20.
4^5 - 4=1020= **5**·K. 3^4- 3=81-3=78_ 4·h . 2^6-2=62_6·k. 2^{10}-2=1022_**10**·h.
3^6-3=726=6·121, 2^{341}-2=341·k (341=11.31). 2^{11}-2=2046=11·186.
2^{13}-2=8190=13·630. 100^7-7=7h. 3^7-3=2187-3=7·312. **7^{101}-7=101k.**

31) Individuate il significato del teorema ed esprimetelo in simboli generali completando quanto segue:
CN (la condizione è necessaria e non sufficente): se p è un numero primo, allora: ....

Un metodo per dimostrare il precedente teorema, fa ricorso alle immagini mentali e al ragionamento per induzione ed analogia. Per seguire tale metodo abbiamo bisogno di:

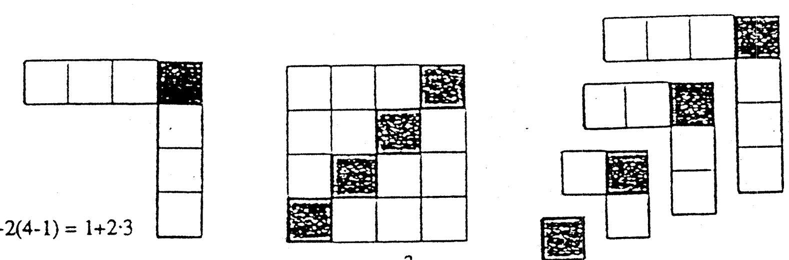
a) gnomoni d-dimensionali di spessore unitario, **b)** metodo di Eulero per esprimere C^d, **c)** teorema: se p è un numero primo: $\binom{p}{j}$ è divisibile per p.

Cominciamo con a) e b).

GNOMONI d-dimensionali di spessore **unitario** e con spigolo di lunghezza **e**: $G_e^d(1)$ e

METODO DI EULERO per esprimere $C_e^d = e^d$ (volume del cubo a **d** dimensioni di spigolo **e**)

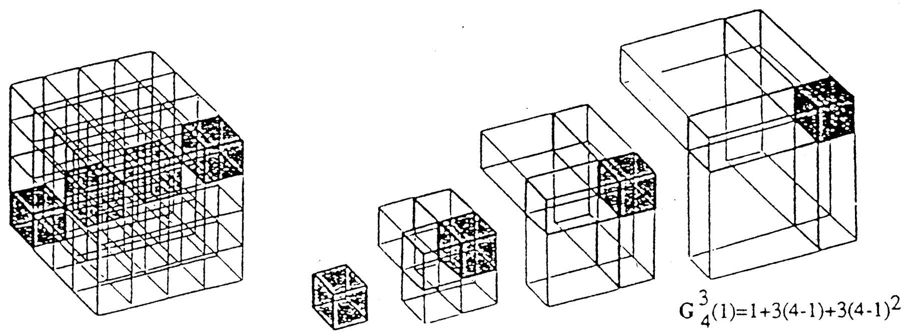
Generalizzate in formule il significato dei seguenti disegni sfruttando la risposta alla domanda 30):



$G_4^2(1) = 1+2(4-1) = 1+2 \cdot 3$

$C_4^2 = \sum_1^4 {}_i\, G_i^2(1) = 4^2 = 1+1+1+1+2(1+2+3) = 4 + \binom{2}{1} \sum_1^3 {}_i\, i$

fig. 3



$$C^3_4=\sum_{1}^{4}{}_i\, G^3_i(1)=4^3=1+1+1+1+3(1+2+3)+3(1+2^2+3^2)=4+\binom{3}{1}\sum_{1}^{4-1}{}_i\, i+\binom{3}{2}\sum_{1}^{4-1}{}_i\, i^2$$

Fig. 4

E' venuto il momento per cercare di raggiungere l'obiettivo iniziale, che riproponiamo:
generalizzate in formule il significato dei precedenti disegni sfruttando la risposta alla domanda 30):

32) $\mathbf{G^d_e}(1)$ = ...

33) $\mathbf{C^d_e} = e^d =$ ....

Ora manca relativamente poco alla dimostrazione e dovete trovarla da soli:

34) ∀ p, numero primo, dimostrate che: $\binom{p}{j}=\frac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{j!}$ **è divisibile per p.**

33) e 34) dimostrano il Teorema precedente, detto "piccolo Teorema di Fermat".

(come curiosità si indicano alcuni possibili **Corollari** di quanto si è visto precedentemente:

1) un modo per ottenere $\sum_{1}^{n} \mathbf{i}\ \mathbf{i^d}$. 2) Ipercubi visti come iperpiramidi. 3) Gnomone di spessore non unitario. 4) Formula del binomio di Newton)

35) Domanda impegnativa:
Quanto vale esplicitamente (cioè non ricorsivamente): $\mathbf{C^{j;d}} = ?$

Cerchiamo di ottenere il valore esplicito dei $C^{j,d}$ sapendo soltanto che $C^{0,d}=2^d$ e senza ricorrere a metodi ricorsivi, presentando un altro ragionamento di tipo induttivo. Supponiamo di non sapere che il numero degli spigoli in un cubo sia $C^{1,3}=12$.

Per calcolare il loro numero potremmo considerare che moltiplicando i 2^3 vertici del cubo per i $\binom{3}{1}=3$ spigoli che escono da ciascun vertice, ogni spigolo verrebbe contato $2^1=2$ volte, perchè uno spigolo ha 2 vertici. Così gli spigoli sono: $C^{1,3}=\frac{2^3\binom{3}{1}}{2}=\binom{3}{1}2^{3-1}=3\cdot 4=12$

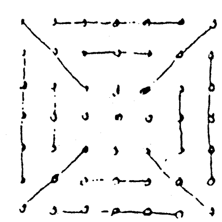
Analogamente per calcolare il numero dei quadrati di un cubo: $C^{2,3}=6$, potremmo considerare che moltiplicando i 2^3 vertici del cubo per i $\binom{3}{2}=3$ quadrati che si incontrano in ciascun vertice, conteremmo ogni quadrato $2^2=4$ volte, perchè ciascun quadrato verrebbe contato 4 volte in relazione ai suoi 4 vertici. Quindi i quadrati in un cubo sono: $C^{2,3}=\frac{\binom{3}{2}2^3}{2^2}=\binom{3}{2}2^{3-2}=3\cdot 2=6$.

Ripetendo quanto detto **in generale**, abbiamo:

*) $\mathbf{C^{j,d}}=\binom{d}{j}\mathbf{2^{d-j}}$ ove $C^{j,d}$ è il numero di C^j contenuti in C^d

Infatti i vertici di C^d sono 2^d e da **30**): $C^{j,0,d}=\binom{d}{j}$, facendo il prodotto si ottiene $2^d\binom{d}{j}$ che indica un numero in cui ogni C^j è contato 2^j volte perchè ogni C^j contiene 2^j vertici. Dividendo per 2^j si ha la tesi.

Da *) derivano altre formule, ad esempio se: $e=2m+1$ allora, sempre ad esempio:



$(2\cdot 3+1)^2=$ centro+vertici+spigoli =
$= 1+2^2\cdot 3+2^{2-1}\binom{2}{1}(1+3+5)=$
$= 1+\ 12\ +36$

e in generale:

Fig.5

**) $$(2m+1)^d=1+2^d m+2^{d-1}\binom{d}{1}\sum_{1}^{m}{}_i\,(2i-1)+2^{d-2}\binom{d}{2}\sum_{1}^{m}{}_i\,(2i-1)^2+\cdots+2\binom{d}{d-1}\sum_{1}^{m}{}_i\,(2i-1)^{d-1}$$

E' una sorta di "nuovo" teorema di Fermat che può interessare poco.
Può interessare, sempre di più nella nostra società, che l'apprendere non sia solo ripetere.

Geometria "tradizionale" e geometria "delle trasformazioni": itinerari a confronto

Gruppo di lavoro Scuola Secondaria Superiore

*Coordinatori: Elena Crespina, Marta Menghini e Linda Percario**

E' stato posto all'attenzione dei docenti partecipanti un confronto fra l'approccio sintetico alla geometria "tradizionale" secondo Euclide, formalizzato poi da Hilbert, e l'approccio alla "geometria delle trasformazioni", come è stato assiomatizzato da Choquet.

Partendo dalla dimostrazione di proprietà geometriche, così come generalmente viene svolta in una classe di biennio delle superiori, si ha un'esemplificazione di due diversi percorsi per introdurre la geometria. E' in questo modo possibile distinguere fra la linea degli assiomi di Hilbert e quella di Choquet, una volta che tali assiomi siano stati esplicitati, sintetizzati e messi a confronto. Le isometrie prima e le affinità poi, pur essendo evidentemente introducibili in entrambi gli approcci, avranno una loro "collocazione naturale" in uno dei due. In particolare le isometrie possono essere punto di partenza per un percorso e complemento finale, non indispensabile nell'altro. A tale diversità di approccio per quanto riguarda i contenuti si sovrappongono problemi didattici di importanza non inferiore: a quale livello scolare vanno esplicitati gli assiomi? Con quale livello di rigore? Come raccordare l'impostazione scelta al biennio con una trattazione che al triennio completi il tema geometria con le affinità? Il nucleo di ricerca di Roma ha esplicitato possibili scelte di contenuti e di metodo, illustrando anche alcune schede-guida di lavoro usate in classe dagli alunni sia di biennio che di triennio di scuola superiore.

L'impostazione data al lavoro di gruppo è stata caratterizzata da
- ambientazione del confronto nello "scenario della pratica didattica",
- esame immediato di materiali, sia per docenti che per alunni,
- partecipazione in forma di osservazioni e commenti immediati,
- spazio al dibattito e agli interventi, che sono stati numerosi e che, affidati poi per scritto dai partecipanti alle conduttrici, sono stati integrati nella presente relazione.

* Dipartimento di Matematica, Università "La Sapienza" di Roma.

Diverse dimostrazioni per la stessa proprietà geometrica

Illustriamo in modo più dettagliato le dimostrazioni relative a questi primi teoremi, perché esse ci consentono di chiarire il confronto fra le assiomatiche di Hilbert e di Choquet (ai partecipanti è stato distribuito un sunto sinottico delle due linee assiomatiche).

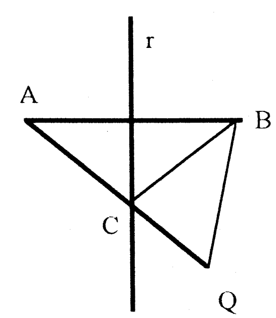
Primo esempio: "Tutti e soli i punti dell'asse di un segmento sono equidistanti dagli estremi del segmento"

La proprietà può naturalmente essere enunciata usando la nozione di luogo di punti.

Il percorso tradizionale presente sul maggior numero di testi scolastici in uso prevede l'applicazione del I criterio di uguaglianza dei triangoli o del criterio complessivo che riguarda i triangoli rettangoli, e, per il teorema inverso, delle proprietà del triangolo isoscele o ancora dei criteri di uguaglianza.

La definizione di asse di un dato segmento è in ogni caso di retta perpendicolare al segmento per il suo punto medio. Tuttavia le dimostrazioni precedenti possono differire per le diverse posizioni iniziali riferite all'esistenza del punto di mezzo, a cui fa seguito il teorema di esistenza e unicità della perpendicolare ad una data retta per un dato punto.

Se si parte invece sfruttando un'introduzione *intuitiva* delle isometrie (traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali e loro prodotti), il teorema diretto "I punti dell'asse sono equidistanti dagli estremi" diventa una semplice riflessione sulla definizione di simmetria rispetto all'asse r, la quale comporta il fatto che l'asse r è "asse del segmento congiungente due punti corrispondenti". Dunque se A e B sono due punti corrispondenti anche PA e PB si corrispondono nella stessa isometria e pertanto risulta che PA è uguale a PB.



Il teorema inverso richiede invece un diverso uso di quanto gli alunni già sanno. Si dimostra per assurdo che, se un punto Q non appartiene all'asse r, allora le sue distanze da A e da B risultano diverse.

Prendendo infatti Q in uno dei due semipiani rispetto ad r, uno dei due segmenti che lo congiungono con gli estremi attraversa r: sia C tale punto. Per il teorema diretto CA = CB ; ma nel triangolo BCQ vale la disuguaglianza (si noti che si sfruttano proprietà della *distanza*)

$$BQ < BC + CQ \ , \ BQ < AC + CQ \ , \ BQ < AQ.$$

Secondo esempio: " Un triangolo è isoscele se e solo se gli angoli alla base sono uguali "

Ancora più evidenti sono le differenze di approccio in questo secondo teorema esaminato. Infatti nel percorso "euclideo" questo è uno dei primi teoremi che si dimostrano perché sono necessari solo i primi due criteri di uguaglianza, ma non è dei più brevi e soprattutto induce nello studente l'impressione che si metta in moto il meccanismo della dimostrazione piuttosto inutilmente.

L'approccio con le trasformazioni divide la proprietà geometrica suddetta in due tappe, ben distinte temporalmente. Si può ben presto enunciare e dimostrare il seguente teorema :

" Un triangolo è isoscele se e solo se ha un asse di simmetria"

Teorema diretto: Supponiamo AB = AC, dunque A appartiene all'asse di BC e tale asse è pertanto asse di simmetria sia per i punti B e C, sia per A che risulta unito. E' dunque asse di simmetria per tutto il triangolo.

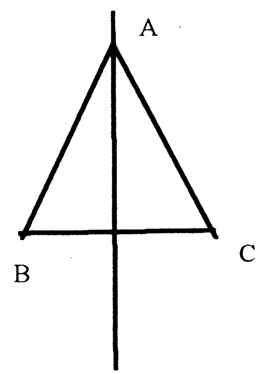
Teorema inverso: Se esiste una simmetria assiale nella quale si corrispondono i 3 vertici, uno di essi è unito, ad esempio A e gli altri 2 si corrispondono; dunque AB = AC perché segmenti corrispondenti.

Tuttavia fa seguito, procedendo nel percorso didattico, una definizione di angolo di due semirette a e b con la stessa origine O come "rotazione che porta a su b" (ovviamente la rotazione è diventata ormai solo il prodotto di due simmetrie assiali ad assi incidenti, o meglio un'isometria con uno ed un solo punto unito).

Questo permette di dimostrare il fatto che date due semirette a e b di comune origine O, la rotazione che porta a su b trasforma b nella semiretta c che risulta la simmetrica di a rispetto a b. E poi ancora permette di dimostrare che angoli che si corrispondono in una simmetria assiale sono inversamente uguali.

E' solo a questo punto che la proprietà esaminata può essere dimostrata completando il discorso con il seguente teorema :

"Un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli uguali"



Teorema diretto: Se ABC è isoscele, ha un asse di simmetria che contiene un vertice, ad esempio A, mentre B e C sono simmetrici rispetto a quest'asse. Gli angoli ACB e ABC di vertici B e C, hanno in comune il lato BC, simmetrico di se stesso ed hanno come ulteriori lati AC e AB che sono fra loro simmetrici. In conclusione gli angoli suddetti sono simmetrici e uguali.

Teorema inverso: Se gli angoli ACB e CBA sono uguali, allora ACB e ABC sono simmetrici rispetto all'asse di BC (si deduce dal teorema inverso di quello appena citato), dunque i lati simmetrici AC e BC si incontrano sull'asse, cioè A appartiene all'asse nella cui simmetria già si corrispondevano B e C. Pertanto è tutto il triangolo ad avere tale asse come asse di simmetria e, per il teorema precedente, questo garantisce che si tratta di un triangolo isoscele.

Le isometrie

Le isometrie possono essere ovviamente definite in entrambe le linee dimostrative. Cambia la loro collocazione.

Nell'impostazione hilbertiana la congruenza (uguaglianza) fra segmenti e angoli è un concetto primitivo (possiamo anche dire intuitivo, in quanto usualmente nei libri di testo che adottano tale impostazione non vengono riportati gli assiomi relativi alla congruenza). In base ad essa e ai fondamentali criteri di uguaglianza per triangoli si stabilisce quindi l'uguaglianza di figure, e *in seguito* a questa si definiscono le isometrie, come trasformazioni (corrispondenze) che conservano la congruenza (useremo in seguito solo il termine uguaglianza).

Nell'impostazione di Choquet il concetto primitivo (definito tramite assiomi) è quello di distanza, le isometrie sono trasformazioni (corrispondenze, funzioni) che conservano le distanze, e la definizione di uguaglianza *segue* quella di isometria: due figure sono uguali se si corrispondono in una isometria. E' necessario però un assioma che garantisca l'esistenza di isometrie; dal momento che dalla simmetria si ottengono per composizione le altre isometrie, è sufficiente un assioma che garantisca l'esistenza di simmetrie, l'*assioma del piegamento*: per ogni retta r, esiste una isometria (diversa dall'identità) in cui r è unita.

Si può allora dimostrare che tale isometria è proprio la simmetria assiale (due punti A e A' sono simmetrici rispetto a r se r è l'asse di AA'). La dimostrazione si basa sulla definizione di isometria e, sfruttando la disuguaglianza triangolare, sull'equivalenza tra perpendicolarità e distanza fra due punti.

Il teorema precedente è un teorema che si ritrova solo nell'impostazione di Choquet, mentre nell'impostazione hilbertiana potremmo trovare un teorema diverso: una simmetria (definita come sopra) trasforma un segmento AB in un segmento A'B' uguale. La dimostrazione si basa sui criteri di uguaglianza dei triangoli.

Nell'impostazione hilbertiana si deduce facilmente che un'isometria, se conserva le distanza, conserva anche gli angoli, grazie sostanzialmente al terzo criterio di uguaglianza.

In Choquet abbiamo visto in precedenza che l'analoga dimostrazione si basa sulla ridefinizione di angolo come rotazione.

Alcuni libri di testo, pur scegliendo una linea sostanzialmente simile a quella di Choquet, preferiscono evitare tale definizione rimanendo su quella tradizionale. In tal caso è necessaria una definizione più forte di isometria: isometria è una trasformazione che conserva le misure (in particolare di segmenti e angoli corrispondenti). E' ovvio che le dimostrazioni che ne conseguono saranno diverse.

Un altro teorema che acquista significati diversi nelle due linee assiomatiche è il seguente: in un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo lato.

Per Choquet tale teorema è una semplice riformulazione della "disuguaglianza triangolare", cioè di una proprietà della distanza espressa assiomaticamente.

Per Euclide/Hilbert si tratta di un teorema che segue, con qualche passaggio, dalla proprietà che a lato maggiore corrisponde angolo maggiore. Si tratta di uno di quei teoremi che fanno un po' discutere perché di contenuto ovvio rispetto alla complessità della dimostrazione. Di tale teorema potrebbe essere anche eseguita una semplice "verifica sperimentale". Torneremo su questo punto in relazione al problema dei vari livelli di rigore.

I criteri di uguaglianza

I criteri di uguaglianza dei triangoli hanno nell'impostazione hilbertiana un ruolo centrale e vengono quasi all'inizio della trattazione (il primo criterio è un assioma); su essi si basa la soluzione di quasi tutti i problemi geometrici. Per Choquet due triangoli sono uguali se esiste un'isometria che porta l'uno nell'altro; a sua volta un'isometria è determinata da tre coppie di punti corrispondenti. Da queste proprietà si possono far derivare, come teoremi, i tre criteri. Tali criteri sono tutt'altro che indispensabili in tale linea ai fini dimostrativi, così come non lo sono le isometrie nella linea hilbertiana. Tuttavia isometrie e "criteri" assumono un ruolo "culturale", nell'una o nell'altra linea, e consentono una maggiore possibilità di scelta fra strumenti dimostrativi. In sostanza le due posizioni devono essere viste come un arricchimento delle possibilità e strategie del docente (e dell'allievo).

Il rigore

L'introduzione della geometria delle trasformazioni ha portato con sé anche un cambiamento metodologico, un insegnamento "a spirale" che propone di adattare il livello di rigore ai diversi livelli scolari. I sostenitori di tale metodologia sostengono infatti che a 14-15 anni qualunque assiomatica porti difficoltà concettuali. I ragazzi non capiscono perché alcune verità intuitive si ammettono per assiomi ed altre no; inoltre la dimostrazione di verità banalmente evidenti accanto ad altre estremamente complicate può indurre in loro il dubbio che il processo dimostrativo sia privo di buon senso.

E' perciò sensato ampliare a questa età il numero degli assiomi, senza

scandalo sia per la validità dell'insegnamento che per l'interesse degli alunni: si può dare così facilità alle dimostrazioni, pur mantenendo rigore nella trattazione, ma anche dare agli alunni la convinzione che il processo della dimostrazione serva a scoprire qualcosa di non troppo immediato.

La questione è nell'indipendenza degli assiomi che si introducono: per stabilire che gli assiomi di cui ci serviamo nelle diverse impostazioni della geometria sono indipendenti ci sono voluti studi ben più profondi di quelli che sono in grado di fare gli alunni nei primi anni di scuola superiore: una sistemazione rigorosa in tal senso ci potrà essere verso i 17-18 anni quando gli alunni saranno più maturi, sia per età che per bagaglio culturale, e potranno veramente arrivare ad apprezzare la validità di una struttura assiomatica. Del resto anche l'opera di Euclide ha rappresentato una sintesi di 300 anni di lavoro precedente.

Ad esempio la proprietà che una simmetria centrale trasformi una retta in una retta ad essa parallela, si può far derivare a livello di 14 anni dalla definizione di questa come prodotto di due simmetrie ad assi perpendicolari, ammettendo implicitamente che un'isometria è una collineazione. A 17 anni la simmetria centrale può essere riconosciuta come trasformazione affine, e la stessa proprietà può essere dimostrata tramite le proprietà di invarianza del punto medio e della proiezione parallela.

La presenza di assiomi o teoremi dati come proprietà evidenti, le deduzioni locali, l'uso del disegno etc. hanno avuto come effetto fra molti insegnanti quello di far passare in secondo piano la portata assiomatica della geometria delle trasformazioni, di considerarla quasi una geometria "da scuola media". Per contro chi si sofferma sulla sola assiomatica la considera non più intuitiva di quella di Euclide e non vede alcun vantaggio nel sostituire un'assiomatica con un'altra.

Il problema è che quasi mai sono stati praticati in Italia tentativi di "alleggerimento" della geometria di Euclide/Hilbert: introduzioni meno rigorose della geometria euclidea sono invece praticate in altri paesi e soprattutto in Germania, e si basano in particolare su una prima attività sperimentale e sulla traduzione dei teoremi euclidei in termini di costruzioni eseguibili con riga e compasso; anzi la verifica sperimentale diviene la prima interpretazione di un teorema euclideo. Ad esempio i criteri di uguaglianza dei triangoli ci dicono che "è sempre possibile costruire un triangolo in modo univoco, quando di esso sono assegnati etc.". Ed è anche vero che la geometria secondo Euclide può essere resa "dinamica" sviluppando opportune capacità di "vedere", cioè opportuni dinamismi mentali.

Occorrerebbe quindi riflettere non solo sui cambiamenti di contenuti in geometria, ma anche, e forse soprattutto, su possibili modifiche metodologiche. Le stesse isometrie vanno trattate non tanto come un nuovo insieme di contenuti, ma come un nuovo metodo di indagine. Rimane sempre fra gli scopi finali quello della "correttezza", nel passaggio dagli assiomi ai teoremi.

Le trasformazioni al triennio

Il prosieguo più comune, al triennio, dell'itinerario "tradizionale" è costituito dall'introduzione del piano cartesiano e della geometria analitica, mentre l'itinerario "delle trasformazioni" prosegue lavorando su e con le affinità.

Chi sceglie fin dall'inizio del biennio la geometria delle trasformazioni si propone non un capitolo a parte accanto alla trattazione euclidea, ma un percorso omogeneo lungo tutto il quinquennio.

Si può iniziare con osservazioni sulle ombre, con costruzioni grafiche e manipolazioni che permettono di sgombrare il campo da errori concettuali che la trattazione euclidea a volte induce: le differenze fra rombo e quadrato, rendersi conto che un triangolo ha tre basi e quindi tre altezze, ecc. Sono attività che interessano gli alunni: si rivela loro una matematica per lo studio della realtà: sarà questa una forte spinta alla loro curiosità per impossessarsi del processo di dimostrazione. Si inizia la trattazione con le isometrie, con le costruzioni e i teoremi ad esse connessi; si passa quindi alla similitudine e poi alle affinità (volendo o potendo anche alla proiettività). Lungo il percorso si portano gli alunni a riflettere sul concetto di invariante, come proprietà di pertinenza della relativa geometria, che è fondamentale nella trattazione: siamo passati dal campo più vincolato, quello metrico delle isometrie e delle similitudini, a quello delle affinità e a quello delle proiettività diminuendo sempre più i vincoli. A questo punto la geometria può essere considerata dal punto di vista di Klein, cioè come studio delle proprietà che non mutano quando si opera con un gruppo di trasformazioni: gli alunni hanno 17-18 anni, hanno sviluppato una certa curiosità, possono capire che cambiando i vincoli delle trasformazioni varia la geometria di cui ci vogliamo occupare. Parallelamente a questo l'esigenza di un "confronto" fra figure geometriche, che si rifà ad un criterio di equivalenza, ha portato in modo naturale alla struttura di gruppo (di un insieme di trasformazioni).

Il processo di ampliamento nelle scelte dei vincoli e poi di restrizione permette di capire bene il procedimento assiomatico; si vede una classificazione delle geometrie e contemporaneamente la loro unificazione: variano gli assiomi, varia la geometria. Si arriva alla consapevolezza che un procedimento assiomatico consiste esclusivamente nella coerenza con le premesse. Si può anche introdurre la trattazione algebrica delle trasformazioni lineari tramite le equazioni per le trasformazioni affini che, con le opportune limitazioni nella scelta dei coefficienti, diventano equazioni di similitudini e di isometrie. Si ribadisce cioè lo stesso concetto: aumentano i vincoli nella costruzione geometrica e abbiamo minore libertà di scelta per i coefficienti delle equazioni. Con il calcolo algebrico si possono verificare le proprietà invarianti nei diversi gruppi di trasformazioni.

Ma i programmi Brocca, che per il biennio lasciano la scelta tra percorso tradizionale o percorso basato sulle trasformazioni, parlano comunque di affinità al triennio. Cosa può fare chi ha seguito sempre la linea Euclide/Hilbert? Può l'insegnante del triennio svincolarsi dalle scelte operate per il biennio?

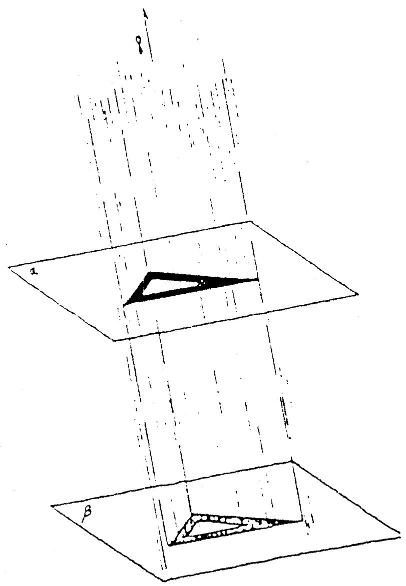
Alcuni degli argomenti cui si è appena accennato possono essere ancora utilizzati: le ombre (cfr. figura in fondo al testo) possono costituire un buon riepilogo e un'introduzione agli invarianti. L'approccio algebrico, tramite le equazioni, è forse quello più semplice se si è cominciato a lavorare nel piano cartesiano: si possono scegliere equazioni semplici (elementari) di affinità e vedere come viene trasformato prima il quadrato unitario, poi altre figure. A poco a poco si specificheranno i coefficienti delle equazioni fino ad arrivare alle isometrie. Si tratta del resto di un riepilogo che viene spesso effettuato anche nella linea che parte dalle trasformazioni.

Nell'ambito di un'impostazione "costruttiva" è poi possibile adattare gli strumenti da disegno (sostituendo il compasso con una squadra non ad angolo retto) per accorgersi che divengono costruibili solo configurazioni con proprietà *affini*. Si arriva così agli assiomi del piano affine, che possono altrimenti essere introdotti anche semplicemente nel contesto di un discorso più generale sull'assiomatica. Questo non significa però necessariamente parlare di invarianti, nel senso del programma di Erlangen, com'è invece naturale nell'approccio tramite trasformazioni geometriche. Tuttavia i due discorsi convergono. Ad esempio nella tabella della figura seguente, tratta dalle schede di ricapitolazione sugli invarianti che sono state presentate, le figure invarianti nelle varie trasformazioni corrispondono alle figure distinguibili nel piano metrico, affine e proiettivo.

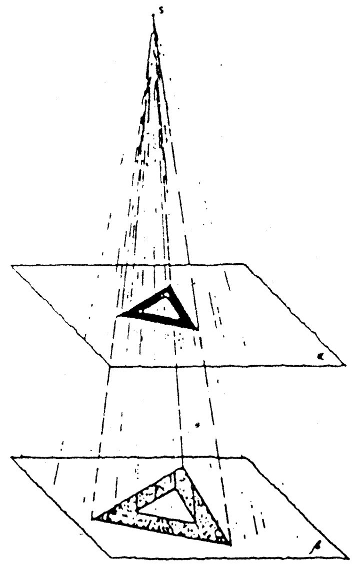
Il filtro delle trasformazioni: qualcosa diventa indistinguibile!

Isometria	infiniti cerchi infinite ellissi infinite parabole infinite iperboli	infiniti rombi infiniti quadrati infiniti rettangoli infiniti parallelogrammi infiniti trapezi
Similitudine	1 cerchio infinite ellissi 1 parabola infinite iperboli	infiniti rombi 1 quadrato infiniti rettangoli infiniti parallelogrammi infiniti trapezi
Affinità	1 ellisse 1 parabola 1 iperbole	1 parallelogramma infiniti trapezi
Proiettività	1 conica (non degenere)	1 quadrilatero

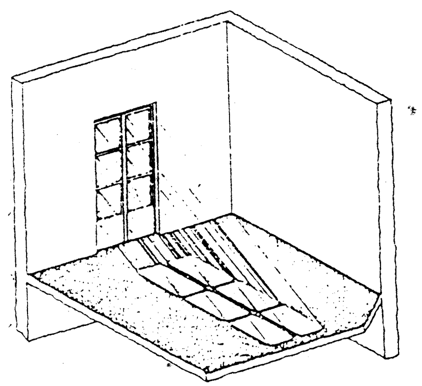
OMBRA DI UN OGGETTO PIANO PRODOTTA DA UN PUNTO LUMINOSO POSTO ALL'INFINITO (RAGGI DEL SOLE) SU UN PIANO PARALLELO

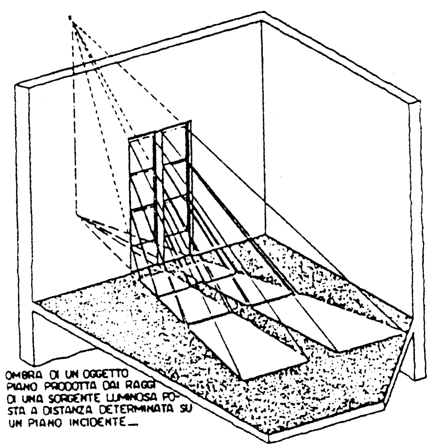


OMBRA DI UN OGGETTO PIANO PRODOTTA DAI RAGGI DI UNA SORGENTE LUMINOSA POSTA A DISTANZA DETERMINATA



OMBRA DI UN OGGETTO PIANO PRODOTTA DA UN PUNTO LUMINOSO POSTO ALL'INFINITO (RAGGI SOLARI) SU UN PIANO INCIDENTE





OMBRA DI UN OGGETTO PIANO PRODOTTA DAI RAGGI DI UNA SORGENTE LUMINOSA POSTA A DISTANZA DETERMINATA SU UN PIANO INCIDENTE

Cabri-Géomètre nella risoluzione di problemi di geometria classica*

Gruppo di lavoro Scuola Secondaria Superiore

*Coordinatore: Consolato Pellegrino***

INTRODUZIONE

Sino agli anni '60 circa il valore formativo dell'insegnamento della Geometria euclidea sembrava indiscusso. Tale insegnamento era finalizzato all'acquisizione di capacità di analisi, deduzione e rigore espositivo. Parte integrante di quel tipo di insegnamento era l'attività di risoluzione di problemi geometrici che era considerata utile anche allo sviluppo delle facoltà creative dell'allievo. Il tutto costituiva da base e da sfondo all'introduzione della Geometria analitica. Si riteneva che questa progressività facesse apprezzare ancor di più la generalità e la sistematicità del metodo analitico da una parte e l'eleganza e la "semplicità" del metodo sintetico dall'altra. Questi obiettivi sono tuttora in parte presenti nella proposta dei nuovi programmi per il biennio della scuola secondaria superiore. C'è da dire però che nella pratica didattica l'insegnamento della Geometria è progressivamente mutato. Per vari motivi, sui quali qui non entriamo, nella scuola secondaria la Geometria classica è sempre più trascurata a vantaggio di quella analitica. Ma ciò che è più sorprendente, e che forse potrebbe sancire definitivamente questa trasformazione, è che all'università, seguendo l'*impostazione algebrica* ormai dominante, nei corsi di Geometria, anche per studenti del corso di laurea in Matematica, i concetti ed i risultati di natura geometrica, compresi quelli relativi alla Geometria euclidea, sono ricavati esclusivamente da conoscenze di tipo algebrico precedentemente introdotte (sul ruolo e sullo stato dell'insegnamento della Geometria nella scuola secondaria rinviamo a Barlotti 1989; Speranza 1988, 1989). Perciò è abbastanza difficile pensare ad una inversione di tendenza che porti ad un recupero del patrimonio culturale sottovalutato. Tuttavia oggi è possibile un risveglio di interesse verso la Geometria classica grazie alle nuove tecnologie ed in particolare a *Cabri-géomètre*, software specificatamente messo a punto per l'insegnamento di questa.

---

* Lavoro realizzato nell'ambito del MURST (40%) e del CNR (contratto n.94.00112.CT01)

** Dipartimento di Matematica, Università di Modena

Il laboratorio aveva lo scopo di esaminare, insieme ai docenti, le possibilità offerte all'insegnamento della Geometria classica dal suddetto software, da poco distribuito anche in Italia, e valutare le difficoltà che possono emergere durante il suo effettivo utilizzo in classe. A nostro giudizio il tema del laboratorio ha suscitato un certo interesse vista l'ampia partecipazione dei docenti (quasi quaranta).

Il laboratorio si è articolato in più fasi. Inizialmente sulla base di una nota "falsa dimostrazione" (cfr. Pellegrino 1994) presentata mediante una figura realizzata con *Cabri*, sono state illustrate le principali caratteristiche delle figure realizzate con questo software e subito dopo sono stati presentati i principali comandi. Al riguardo sottolineiamo qui che *Cabri*:

- ammette *primitive di disegno puro* che, come accade in tutti i programmi di disegno geometrico, consentono di disegnare sullo schermo del computer gli "oggetti geometrici" fondamentali (punti, rette, segmenti, triangoli, circonferenze);
- ammette *primitive geometriche*, generalmente non presenti nei programmi di disegno geometrico, che consentono di costruire oggetti geometrici che soddisfano particolari relazioni con altri oggetti già tracciati;
- consente una alta *interattività* e *dinamicità* ossia consente di manipolare i disegni realizzati e di conservare le relazioni che sono state introdotte semplicemente spostando gli oggetti a partire dai quali sono stati realizzati i disegni stessi.

Successivamente sono stati illustrati alcuni prototipi di problemi geometrici che sono stati discussi e risolti con l'aiuto di *Cabri*. Infine il tempo rimasto che, nelle nostre intenzioni, doveva essere dedicato ad una discussione sulle reali possibilità di un utilizzo di *Cabri* nella prassi didattica è stato impiegato prevalentemente per rispondere ai quesiti degli insegnanti desiderosi di avere chiarimenti sulle caratteristiche di *Cabri* ed indicazioni bibliografiche sul suo impiego. Tra i presenti molti hanno ritenuto di poter proficuamente introdurre *Cabri* nelle loro classi.

Al fine di dare una idea del lavoro svolto durante il seminario diamo la soluzione di un problema scelto tra quelli proposti recentemente in una gara di Matematica per studenti di scuola secondaria superiore (cfr. Notiziario UMI, 1994, n. 5, p. 44). Il problema viene qui risolto cercando di mettere in luce l'utilità di *Cabri* proprio per l'avvio degli studenti alla risoluzione, per via sintetica, di problemi geometrici. In fondo all'articolo, oltre ad alcune indicazioni bibliografiche sui problemi geometrici, riportiamo, per comodità del lettore, la bibliografia più facilmente reperibile riguardo *Cabri* indicata durante il laboratorio.

SOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI GEOMETRIA CON L'AIUTO DI CABRI

Problema: *Dato un parallelogramma provare, eventualmente con considerazioni di carattere intuitivo, che esiste un triangolo equilatero con i tre vertici giacenti sui lati del parallelogramma e con un lato parallelo alla diagonale maggiore. Determinare quanti altri triangoli ci sono con la predetta proprietà.*

Al fine di cercare le eventuali soluzioni di questo problema, seguendo una delle indicazioni generali che vengono date al riguardo (cfr. ad es. Cipolla 1948; Sabbatini 1900, rist. 1983), cerchiamo di stabilire le caratteristiche comuni alla famiglia di figure (in questo caso triangoli equilateri) che soddisfano a tutte meno una le condizioni imposte dal problema. Poniamoci quindi di fronte al foglio di lavoro di *Cabri* e disegniamo, utilizzando i comandi dei menù Crea e Costruzioni, un parallelogramma $ABCD$ che abbia AC come diagonale maggiore. Consideriamo quindi un punto R vincolato a muoversi sul lato AB e tracciamo la retta r parallela ad AC per R; r intersecherà il lato BC del parallelogramma in un punto S. Tracciamo il segmento RS e "nascondiamo" la retta r (quest'ultima operazione è realizzabile mediante il comando Aspetti degli oggetti del menù Edizione). Il segmento RS appena costruito ha gli estremi rispettivamente su AB e su BC ed è parallelo alla diagonale maggiore AC. Possiamo dunque pensare a RS come ad un lato del triangolo da costruire. In generale però, si veda *fig. 1*, nessuno dei due triangoli equilateri RST ed RSU, uno simmetrico all'altro, costruiti su RS ha il terzo vertice sul contorno del parallelogramma. Tuttavia sfruttando la dinamicità di *Cabri*, se spostiamo il punto R sul lato AB abbiamo modo di osservare che:

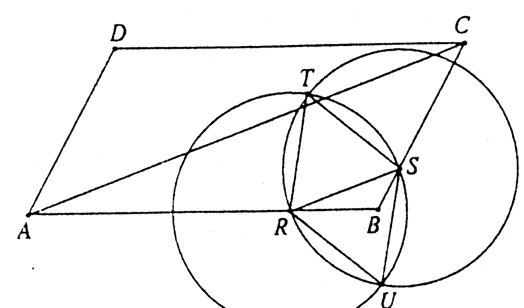


Fig. 1

- i due triangoli si ingrandiscono se avviciniamo R ad A (arrivano a coincidere con i triangoli equilateri di lato AC se R coincide con A) e, invece, si rimpiccioliscono se avviciniamo R a B (arrivano ad "annullarsi" se R coincide con B);

- il triangolo RSU (avente il terzo vertice nel semipiano di origine RS che non contiene il triangolo ACD) non avrà mai il terzo vertice sul contorno del parallelogramma mentre ciò accadrà una ed una sola volta per il triangolo RST (c'è infatti una ed una sola posizione R_1 di R su AB per cui T si viene a trovare in un punto T_1 sul contorno del parallelogramma).

È abbastanza intuitivo infatti, ragionando "per continuità", che deve esistere *almeno* una posizione di R su AB per cui T si viene a trovare sul contorno del parallelogramma. Quello che invece è più difficile "vedere", senza l'aiuto di *Cabri*, è la effettiva collocazione di T_1 e la sua unicità. Per stabilire ciò, seguendo un'altra indicazione generale riguardo alla soluzione dei problemi geometrici, conviene individuare il luogo $\boldsymbol{L}$ dei punti del piano descritto da T al variare di R su AB (la caratterizzazione di $\boldsymbol{L}$ è utile in quanto i punti R di AB che forniscono soluzioni del problema sono tutti e soli i punti comuni ad $\boldsymbol{L}$ ed al contorno del parallelogramma). In effetti con l'aiuto di *Cabri* (una volta nascosti per comodità i lati RU, SU ed il vertice U del triangolo RSU) se spostiamo R su AB possiamo intuire che T, muovendosi su una retta passante per B, descrive un segmento. Questa intuizione può essere rafforzata usando il comando Luogo di punti del menù Costruzioni (si veda *fig. 2*). Ovviamente però, per escludere false impressioni, occorre dimostrare che T si muove effettivamente su una retta passante per B. Anche a questo riguardo *Cabri* può essere utile, infatti, si veda *fig. 3*, se teniamo

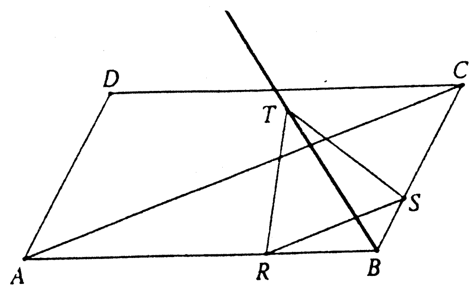


Fig. 2

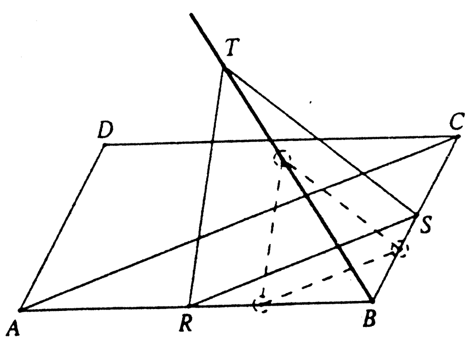


Fig. 3

premuto il tasto di tabulazione mentre muoviamo R su AB vediamo che sullo schermo, oltre al triangolo RST che varia, continua a rimanere visualizzata anche la sua posizione iniziale. Ciò consente di rendersi conto che, per costruzione, i triangoli equilateri ottenuti hanno i lati a due a due paralleli e quindi, per il teorema di Desargues, sono omotetici. Questo fatto comporta che le rette congiungenti i vertici corrispondenti di tali triangoli devono incontrarsi in uno stesso punto che non può essere altro che B, dal momento che due di esse, AB e BC, si incontrano proprio in esso.

Da quanto detto segue che tutti i triangoli equilateri che hanno due vertici rispettivamente sulle rette AB e BC hanno il terzo vertice, T, giacente su una retta t passante per B. Di conseguenza tra i suddetti triangoli ce n'è uno solo che ha tutti e tre i vertici sui lati del parallelogramma.

Volendo una soluzione costruttiva del problema (oltre a dimostrarne l'esistenza come si è fatto) basta utilizzare uno qualunque dei triangoli RST già costruiti. Infatti, da quanto emerso dalla precedente esposizione, basta prendere come T_1 il punto di intersezione del contorno del parallelogramma con la retta t che passa per B e per T e poi costruire R_1 ed S_1 rispettivamente intersecando AB con la parallela per T_1 a RT ed intersecando BC con la parallela per T_1

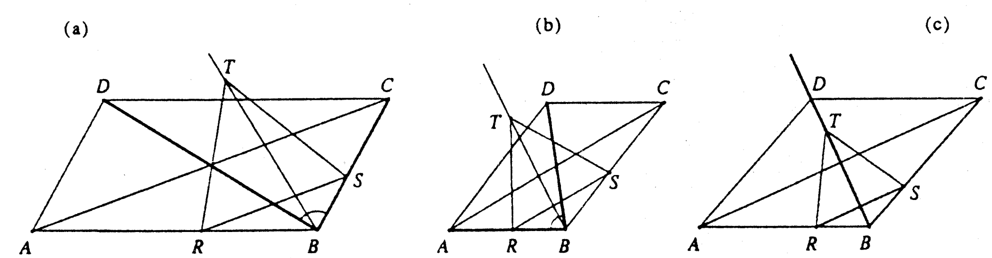


Fig. 4

a ST. Per quanto riguarda l'effettiva posizione di T_1 va detto che esso, nel caso del parallelogramma considerato in *fig. 1*, si trova sul lato CD ma ciò non è vero in generale. Infatti, come mostrato in *fig. 4*, sempre sfruttando la dinamicità di *Cabri* si può intuire e quindi arrivare a dimostrare che T_1 si trova o su BC o su CD oppure coincide con D a seconda che t sia interno all'angolo ABD o all'angolo DBC oppure coincida con BD.

Ovviamente non è detto che non esistano altri triangoli che soddisfino alle condizioni richieste. Infatti lo studio condotto dipende dalla scelta del lato su cui abbiamo preso il punto R. Di conseguenza per esaminare tutti i casi possibili dobbiamo vedere cosa accade se scegliamo R su uno dei rimanenti lati. Se R appartiene a BC ovviamente la soluzione coincide con quella già trovata. Invece se scegliamo R su CD o, equivalentemente, su DA otteniamo una nuova soluzione.

Riassumendo possiamo concludere che i triangoli richiesti sono sempre due (*fig. 5*).

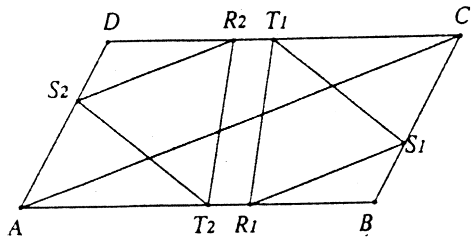


Fig. 5

Prima di chiudere facciamo osservare che, utilizzando le principali possibilità offerte da *Cabri*, di fatto siamo giunti, in modo abbastanza agevole, alla soluzione ed alla discussione del problema mediante uno dei metodi generali di soluzione dei problemi geometrici, quello di similitudine o meglio di omotetia (altri importanti metodi sono quello di traslazione, rotazione e dei luoghi geometrici).

BIBLIOGRAFIA

Sul ruolo e sullo stato dell'insegnamento della Geometria rinviamo a:

BARLOTTI A., 1989, La Matematica nelle Scuole Secondarie Superiori: Il ruolo della Geometria, *Notiziario UMI*, suppl. al n. 7, 42-48

SPERANZA F., 1988, Salviamo la Geometria, *La Matematica e la sua Didattica*, vol.2, n. 2, 6-13

SPERANZA F., 1989, La razionalizzazione della Geometria, *Periodico di Matematiche*, serie VI, vol. 65, n. 1, 29-45

La letteratura riguardo ai problemi geometrici risolti per via sintetica è vasta. Tra i vari scritti che si possono citare ci limitiamo a segnalare:

CAMPEDELLI L., 1971, I metodi sintetici per la risoluzione dei problemi di geometria piana, in VILLA M. (a cura di), vol. 2°, *Repertorio di Matematiche*, CEDAM, Padova, 157-170

CIPOLLA M., 1929 (rist. 1948), I problemi geometrici. Metodi sintetici di risoluzione, cap. XXV di *La Matematica Elementare nei suoi fondamenti*, Macrì editore, Firenze - Bari, 235-242

GHERSI I., 1913, *Metodi per risolvere i problemi di Geometria elementare*, Hoepli, Milano

SABBATINI A., 1900 (rist. 1983), Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici, in ENRIQUES F. (a cura di), *Questioni riguardante le Matematiche Elementari*, parte II, Zanichelli, Bologna, 1-156

Al momento, per quanto ci risulta, la letteratura relativa a *Cabri-géomètre* è quasi esclusivamente in lingua straniera. In italiano oltre al manuale (a cura di P. BOIERI) che accompagna il programma, vi è:

BAROZZI G.C., 1994, Un esempio di utilizzo del sistema Cabri-géometre, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 5, n. 17 A-B, 459-466*CABRIRRSAE*, bollettino degli utilizzatori di Cabri dell'IRRSAE Emilia Romagna (via U. Bassi, 7 - 40121 Bologna)

PELLEGRINO C., 1994, Cabri-géomètre: un programma per imparare ed insegnare la Geometria, in D'AMORE B. (a cura di), *L'apprendimento della Matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, Pitagora Ed., Bologna, 133-134

Per quanto riguarda la letteratura internazionale segnaliamo:

GREEN D., 1992, Cabri-géomètre - Euclid`s Revenge, *Mathematics in School*, n. 2, 46-50,

LSD2-CIAP-IREM GRENOBLE, *Cabriole* (Bollettino degli utilizzatori di *Cabri-géomètre*), Grenoble

LABORDE J.M., CAPPONI B., 1994, Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notation de figure géomètrique, *Recherces en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, n. 1-2, 165-210

LABORDE C., CAPPONI B., 1992, Solving problems in computer based geometry environments, The influence of features of the software, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **4**, 128-135

LABORDE J.M., STRÄSSER R., 1990, Cabri-géomètre, a micro-world of geometry discovery learning, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **5**, 171-177

MICROMATH, vol. 8, 1992, n. 2 (contiene una ampia sezione dedicata a *Cabri-géomètre*)

STRÄSSER R., CAPPONI B., 1991, Drawing - Computer Model - Figure - Case studies in students' use of geometry software, *Proc. PME15*, vol. 3, Assisi, 302-309

Utilizzo del software DERIVE nella risoluzione di problemi di geometria

Gruppo di lavoro Triennio Scuola Secondaria Superiore

Coordinatori: Giuseppe Accascina [*] *- Patrizia Berneschi* [**] *-*
Silvana Bornoroni [***] *- Mauro De Vita* [****]

Hanno partecipato al gruppo di lavoro 33 professori di scuole secondarie superiori e due professori universitari.
Dei 33 partecipanti la metà ha utilizzato il calcolatore per insegnare la geometria facendo uso di: ***PASCAL*** (quasi tutti), ***LOTUS 1 2 3*** (due terzi) e ***LAM*** (due terzi). Il software ***LAM*** è allegato ai testi di Battelli-Moretti.

Due professori hanno già utilizzato ***DERIVE.*** Uno di essi, Raffaele Mauro, ha scritto in collaborazione con Marina Mobilio, "*Matematica con **DERIVE***", in cui vengono forniti molti esempi nel campo della geometria.

L'altra metà dei partecipanti non ha fino ad ora usato il calcolatore per mancanza di tempo e/o per mancanza di software adatto.

La totalità dei partecipanti sente la necessità di proposte didattiche sull'insegnamento della geometria per mezzo di un calcolatore.
Metà di essi ritiene che esse dovrebbero essere relative a contenuti curricolari mentre l'altra metà pensa che non lo debbano essere necessariamente.

I lavori si sono svolti in un bel laboratorio didattico del Liceo Scientifico "Ettore Majorana" dotato di 16 PC con schermo a colori. Un ulteriore PC era collegato ad un data display monocromatico.

I lavori sono stati così organizzati:
1) Nella prima mezz'ora sono stati illustrati alcuni esempi di uso di ***DERIVE***.
2) Nelle successive due ore i partecipanti hanno svolto gli esercizi loro assegnati.

[*] Dipartimento Metodi e Modelli Matematici, Università di Roma "La Sapienza", Via A.Scarpa 16, 00161 ROMA (tel: 06 49766724).
[**] Liceo Scientifico e Classico "San Giovanni Evangelista", Via Livorno 91, 00161 Roma (tel: 06 8604522/3).
[***] I.T.I.S. "Alessandro Volta" Via di Bravetta 541, 00164 Roma (tel: 06 6663939).
[****] I.T.I.S. "Cartesio", Via Cesare Lombroso 120, 00168 Roma (tel: 06 35502409).

3) Nell'ultima mezz'ora si è discusso su pregi e difetti dell'uso del calcolatore nell'insegnamento della geometria.

All'inizio dei lavori è stato distribuito ad ognuno dei partecipanti un fascicolo di 20 pagine contenente:
- una breve spiegazione dei comandi principali di ***DERIVE***
- i listati dei programmi illustrati nel corso dei lavori
- i testi degli esercizi.

Alla fine dei lavori è stato distribuito un questionario da cui abbiamo desunto le informazioni riportate in apertura.

E' stato inoltre, a chi lo richiedeva, distribuito un dischetto contenente:
- i listati dei programmi illustrati nel corso dei lavori
- i listati delle soluzioni degli esercizi proposti.

*1. ESEMPI DI USO DI **DERIVE.***

Si è utilizzato il data display per illustrare cinque esempi.
Primo esempio. Accascina ha fatto vedere come disegnare la retta (il segmento) passante (avente come estremi) due punti distinti assegnati facendo uso di equazioni cartesiane implicite e esplicite e equazioni parametriche delle rette.
Secondo esempio. Berneschi ha mostrato come determinare le intersezioni tra due rette. Sono stati analizzati i casi di rette date in equazioni cartesiane e in equazioni parametriche.
Terzo esempio. Accascina ha illustrato come disegnare le circonferenze.
Quarto esempio. De Vita ha mostrato come disegnare parabole e come disegnare le loro immagini attraverso isometrie.
Quinto esempio. Bornoroni ha illustrato due esercizi sugli inviluppi di rette. In essi sono assegnate schiere di rette verificanti alcune proprietà. Vengono disegnate velocemente molte di queste rette. Il loro disegno permette di fare delle congetture. Per la loro dimostrazione si possono utilizzare le proprietà di calcolo simbolico di ***DERIVE.***

2. ESERCIZI PROPOSTI.

Sono stati proposti 10 esercizi. La maggior parte sono per principianti, alcuni per esperti dell'uso di ***DERIVE***.

Gli intervenuti hanno avuto a disposizione due ore per provare a svolgere gli esercizi che preferivano. Nei dischi fissi dei PC inseriti i listati delle soluzioni degli esercizi.

Tutti gli intervenuti hanno lavorato con interesse, ponendo domande e ricevendo suggerimenti dai coordinatori.

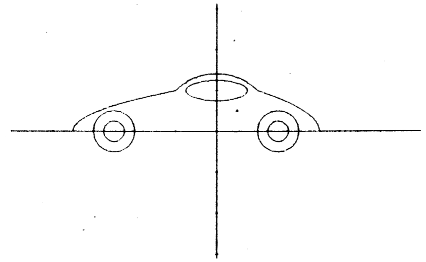
Ecco i testi dei dieci esercizi.

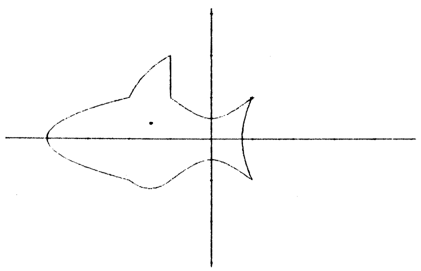
Esercizio n.1

Disegnare il triangolo di vertici A=(1,1), B=(-2,1), C=(2,-2) e disegnare la circonferenza circoscritta al triangolo.

Esercizio n.2

Disegnare la seguente macchina con i centri delle ruote nei punti (-5,0) e (3,0). Per facilitare sono rappresentati gli assi cartesiani e i punti aventi coordinate intere multiple di 2.



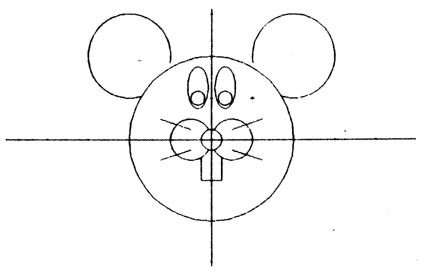


Esercizio n.3

Disegnare il seguente squalo. Sono rappresentati i punti aventi coordinate intere.

Esercizio n.4

Disegnare il seguente topolino. Sono rappresentati i punti aventi coordinate intere.



Esercizio n.5

Disegnare la circonferenza di centro C=(-1,-1) e raggio 3/2.

Disegnare le sue tangenti passanti per il punto P=(2,1).

Suggerimento. Determinare la circonferenza avente come diametro il segmento CP. I punti di intersezione delle due circonferenze sono i punti di tangenza.

Esercizio n.6

Disegnare l'ellisse di equazione x^2/9+y^2/4=1. Ruotare l'ellisse in senso antiorario di un angolo di 45° con centro l'origine degli assi. Successivamente traslarla di un vettore v=(-3,2).

Esercizio n.7

Trasformare il triangolo di vertici A=(0,0), B=(2,0), C=(3,2) con l'omotetia di centro P=(3,2) e rapporto k=3/2.

Suggerimento. Traslare gli assi in modo che P coincida con l'origine.

Esercizio n.8

Disegnare l'ellisse X^2/9+y^2/4=1 e almeno venti sue tangenti.

Esercizio n.9

In un riferimento cartesiano Oxy la generica retta stacca sull'asse y un segmento pari a p e sull'asse y un segmento pari all'opposto del reciproco di p. Disegnare almeno venti di queste rette e trovare l'equazione della conica inviluppo.

Esercizio n.10

Scrivere una programma che abbia come funzioni:

TRIANGOLO(x1,y1,x2,y2,x3,,y3) (equazioni parametriche dei lati del triangolo) e CIRCONFERENZACIRCOSCRITTA(x1,y1,x2,y2,x3,y3) (equazione parametrica della circonferenza circoscritta al triangolo).

NOTA. E' un esercizio per i più esperti.

3. *DISCUSSIONE FINALE*

Nell'ultima mezz'ora si è discusso sull'uso di ***DERIVE*** nell'insegnamento della geometria e, più in generale, sull'uso del calcolatore nell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori.

Quasi tutti i professori hanno preso la parola.

a) Discussione sull'uso di ***DERIVE*** nell'insegnamento della geometria.

Gli intervenuti hanno notato che spesso gli studenti, nel risolvere gli esercizi di geometria analitica, commettono errori di calcolo. L'attenzione degli studenti viene quindi concentrata sul problema di calcolo a discapito dell'analisi dei concetti di geometria. ***DERIVE***, con il suo calcolo simbolico, svolge tutti i calcoli necessari e permette allo studente di concentrare l'attenzione sui problemi di geometria. La buona grafica permette poi di fare congetture.

Durante l'illustrazione degli esempi di uso di ***DERIVE*** è stata messa in evidenza l'importanza delle equazioni parametriche, argomento poco trattato nelle scuole secondarie superiori. E' stata quindi posta la domanda se sia il caso di trattare le equazioni parametriche delle curve e, in particolare, delle rette. Alcuni docenti hanno fatto notare che in alcuni testi scolastici le equazioni parametriche vengono introdotte per alcuni tipi di curve ma, stranamente, non per le rette. Alcuni docenti hanno ricordato che lo studio della fisica non può fare a meno della conoscenza della geometria dello spazio tridimensionale. Le equazioni parametriche delle curve, a differenza delle equazioni cartesiane, sono analoghe negli spazi di qualsiasi dimensione. Tutto ciò consiglia l'introduzione delle equazioni parametriche nei programmi scolastici.

b) Discussione sull'uso del calcolatore nell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori.

E' stato rivelato che la presenza sul mercato di tecnologie sempre più avanzate e di software sempre più sofisticati non deve portare ad un atteggiamento di chiusura o rifiuto. Si impone una presa di coscienza del fenomeno e uno studio accurato sul corretto utilizzo del software per il raggiungimento di obiettivi educativi.

La totalità degli intervenuti era d'accordo sul fatto che l'uso del calcolatore nell'insegnamento della geometria possa aiutare lo studente a fare congetture. C'è il rischio che lo studente creda che la bontà della grafica elimini, in qualche modo, la necessità delle dimostrazioni. E' compito dei professori mettere in guardia gli studenti nei confronti di questo comune errore.

Bibliografia

G.ACCASCINA, *L'insegnamento della geometria con il calcolatore*, Atti delle XXXV Olimpiadi Nazionali della Matematica, Cesenatico, 1994 (in corso di pubblicazione)

G.C.BAROZZI, *I sistemi di manipolazione algebrica nell'insegnamento medio superiore: promessa o minaccia?*, Atti del Convegno "Matematica e Informatica a scuola" (a cura di B.D'Amore), Armando Editore, 1988

G.C.BAROZZI, ***DERIVE**: un sistema di calcolo simbolico al servizio della didattica*, La Matematica e la sua Didattica, 1990, vol.4, no.2, 17-25

S.CAPPUCCIO, *Per un uso "creativo" del laboratorio di matematica*, La Matematica e la sua Didattica, 1993, no. 4, 452-464

M.P.MANARA, A. PEROTTI, *Algebra lineare e Geometria con **DERIVE***, Mc Graw Hill, 1992

S.ROSSETTO, ***DERIVE** per le scuole*, Mc Graw Hill, 1992

***DERIVE**: A Mathematical Assistant for Your Personal Computer*, version 2.5, Soft Warehouse Inc., 1993

Riviste dedicate a DERIVE

The Bulletin of the DERIVE User Group
The International DERIVE Journal
Nella rivista "La Matematica e la sua Didattica" esiste una rubrica curata da G.C.Barozzi e S.Cappuccio.

Introduzione alla geometria delle coniche

Gruppo di lavoro Triennio Scuola Secondaria Superiore

*Coordinatori: Marcello Pergola, Carla Zanoli**

Si illustrano anzitutto obiettivi e caratteristiche della ricerca che i partecipanti dovranno discutere.

A) Un piano di lavoro sulla geometria delle coniche può essere organizzato in modo che la dimensione storica ne costituisca un aspetto fondamentale? Cioè: l'apprendimento di proprietà, metodi o tecniche che consentano di risolvere i problemi sulle coniche, quindi di "conoscere" queste curve, può essere integrato (reso contestuale) allo studio dell'evoluzione storica di quei metodi, all'analisi dei cambiamenti prodotti dal tempo nella interpretazione di quelle proprietà?

L'itinerario didattico che qui esploreremo a tappe forzate (lo svolgimento effettivo in classe richiede circa due mesi), fornisce un primo esempio di risposta (positiva) a queste domande; in esso, teoria e storia delle coniche sono strettamente intrecciate: ne risulta, ci sembra, un notevole arricchimento culturale, una immagine della matematica assai migliore (più articolata e complessa; più "vera" e "concreta") di quella ottenuta quando il medesimo tema sia studiato escludendo ogni riferimento alla storia reale.

E' importante ricordare che:

a) Nella nostra esperienza, i modelli fisici svolgono un ruolo di primo piano. Anzitutto forniscono un indispensabile supporto alla intuizione spaziale; gli studenti inoltre, lavorando in gruppo attorno ad essi e discutendo, acquistano gradualmente abilità nell'eseguire dimostrazioni.

b) Occorre tuttavia chiarire: in geometria non si può mai parlare di storia con riferimento a immagini sensibili, a figure. Sia che queste si formino nella mente come risultato dell'attività produttiva della immaginazione, sia che vengano trasformate in oggetti concreti, non sono - in quanto tali - sottomesse al tempo. E'

* Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Modena.

invece il loro trattamento matematico che ha una storia. L'oggetto matematico si costituisce nella elaborazione dello schema generale astratto che permette di riconoscere e distinguere le singole figure particolari e ne fonda la costruzione tecnica. Anche le dimostrazioni (pur se condotte, per fissare le idee, su una configurazione o modello particolare) asseriscono sempre la validità generale di un enunciato, estendendolo dunque a tutto un insieme, assai vasto, di configurazioni e modelli: del quale non è mai possibile realizzare materialmente (né mentalmente) la **effettiva** visibilità.

c) Ci siamo convinti che la scelta migliore, all'inizio, sia quella di procedere attraverso il confronto tra diverse sezioni temporali del sapere matematico, eseguite su epoche anche molto lontane fra loro. La diversità nei metodi, nei linguaggi, negli schemi generali usati dai matematici, risalta allora con forza: e produce i problemi a cui, in seguito, la ricerca storica potrà tentare risposte.

d) Poiché è impossibile accostarsi alla storia senza una conoscenza diretta delle fonti, abbiamo preparato la traduzione (o, quando necessario, la trascrizione) di alcuni testi classici: ce ne sono molti del tutto accessibili anche a studenti di un triennio di scuola superiore; e possono utilmente sostituire o integrare il libro di testo. Ma occorrerà far comprendere (anche, e soprattutto, a noi stessi) che non basta una singola, affrettata lettura. Alle fonti, per svelarne il significato, occorre tornare sempre di nuovo: tentando ogni volta di abbandonare gli schemi a cui siamo abituati perché li usiamo ogni giorno, e poi riprendendoli e riconfrontandoli con quelli del passato. Capiremo meglio, in questo esercizio, anche la nostra modernità.

B) Ciò premesso, si dispongono nell'aula alcuni fra i numerosi modelli fisici usati e manipolati dagli allievi durante le lezioni. Sono stati costruiti nel laboratorio di matematica del Liceo Tassoni, a Modena. Si tratta di coni (retti e obliqui) realizzati con fili tesi e tagliati da un piano di plexiglas: su questo, la curva sezione si può anche leggere come proiezione della circonferenza di base dal vertice del cono. Altri modelli spiegano la corrispondenza di De La Hire (ne parleremo in seguito).

Si passa quindi ad esaminare come si presentava la teoria delle coniche attorno al 300 a.C.

Menecmo, Aristeo ed Euclide prendono in considerazione soltanto coni retti limitati (ottenuti per rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei cateti). Se il triangolo è isoscele, si ha un cono retto e rettangolo, altrimenti un cono retto acutangolo (quando la rotazione avviene attorno al cateto maggiore) o ottusangolo. Un piano contenente l'asse del cono determina in questo una sezione

triangolare (**triangolo per l'asse**) isoscele. La sezione conica, ottenuta con un piano perpendicolare a uno dei lati uguali del triangolo per l'asse (solo questo "taglio" e', a quell'epoca, accettato e studiato), si chiama orthotome se il cono è retto e rettangolo, oxytome se il cono è retto e acutangolo, amblytome nel terzo caso. Ogni conica è così assegnata per intero, costruita nella sua totalità; ognuna di esse è diversa dalle altre: ma, per poterle in ogni caso distinguere fra loro, è necessario scoprire i "sintomi" caratteristici, analizzando le configurazioni spaziali descritte dalla precedente definizione.

A questo punto, distribuite ai partecipanti alcune schede guida (simili a quelle usate nelle classi), e invitandoli ad osservare i modelli esposti, si chiede loro di dedurre tali "sintomi" **usando soltanto la teoria delle proporzioni.**

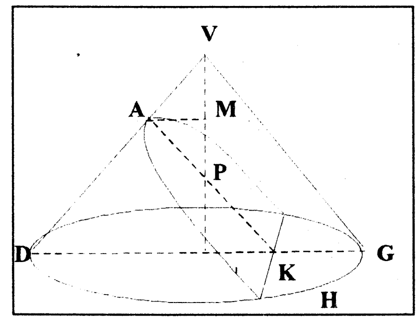


fig. 1

Il ragionamento (esemplifichiamo il caso della orthotome: cfr. fig.1) si sviluppa come segue: nel piano che contiene la base del cono il teorema di Euclide fornisce (*) $KH^2=DK.KG$; nel piano che contiene il triangolo per l'asse, dalla similitudine dei triangoli DAK, VAM e dall'essere AV=AP si ricava (*) DK.KG=2AP.AK; infine, nel piano secante, il punto (generico) H della orthotome individua le due rette (cosi' la terminologia classica indica i segmenti) HK e AK, legate fra loro, per le (*), dalla uguaglianza $KH^2=2AP.AK$ **che è il "sintomo" cercato**. (Si noti: 2AP è l'**orthia**, o **lato retto**, della conica). In modo analogo si procede per la oxytome e l'amblytome. Esprimendo questi risultati con il linguaggio e i metodi della geometria analitica postcartesiana, si hanno le equazioni:

$$(**) \qquad y^2 = 2px \qquad y^2 = 2px - \frac{p}{2a}x^2 \qquad y^2 = 2px + \frac{p}{2a}x^2$$

(il riferimento ortonormale ha origine nel vertice A della conica, l'asse delle ascisse coincide con l'asse della conica; KH=y, AK=x, p=AP, "a" è la distanza tra i due vertici della oxytome, oppure tra il vertice di una amblytome e il vertice della amblytome opposta, giacente cioè sul cono opposto a quello considerato).

Discutendo i risultati ottenuti con i partecipanti, è stato messo in evidenza:

- che il parametro "p" (metà dell'orthia) ha assunto un significato non raggiungibile senza conoscere la teoria di Menecmo;

- che le equazioni $y^2=2px$ ecc., normalmente interpretate solo come relazioni numeriche, appaiono ora, in modo naturale, espressione di proprietà geometriche delle coniche;

- che lo studente è dunque immerso in uno spazio teorico più ampio, in cui può variare i contesti di lettura di ciò che trova scritto o scrive.

C) La sezione temporale successiva si colloca attorno al 200 a.C.: è ormai apparso il trattato sulle coniche di Apollonio, che contiene numerose novità. Anzitutto, una diversa definizione della superficie conica (descritta da una retta mobile nello spazio: mentre uno dei punti di questa retta percorre una circonferenza, un altro - non appartenente al piano della circonferenza - è mantenuto in una posizione prefissata). Si possono così generare anche coni obliqui; e il tipo di sezione ottenuto dipende dalla giacitura del piano secante rispetto a uno dei lati del triangolo per l'asse (che non e' più isoscele). L'ipotesi (del resto non restrittiva) mantenuta da Apollonio è che il piano secante e il piano di base del cono si intersechino lungo una retta perpendicolare alla base del triangolo per l'asse. Questo triangolo però non è più perpendicolare al piano di base del cono. Le conseguenze sono facilmente leggibili sui modelli fisici: il piano secante non incontra il cono in un estremo (nell'estremo) dell'asse, ma in un estremo (nell'estremo) di un diametro. Eppure i sintomi dedotti da Apollonio per ognuna delle coniche sono - da un punto di vista formale - identici a quelli ricavati da Menecmo o da Euclide. Ma l'orthia ha una nuova definizione (assai più complicata) e un valore che dipende dalla forma del triangolo per l'asse e dunque dalla posizione del diametro rispetto alla curva; e le rette "condotte ordinatamente" al diametro non sono perpendicolari a questo. Nel linguaggio attuale: valgono ancora le (**), però gli assi di riferimento sono obliqui, le ordinate sono parallele alla tangente alla conica in un estremo (nell'estremo) del diametro (origine del riferimento stesso). Si è passati dalla coniugazione ortogonale alla coniugazione obliqua.

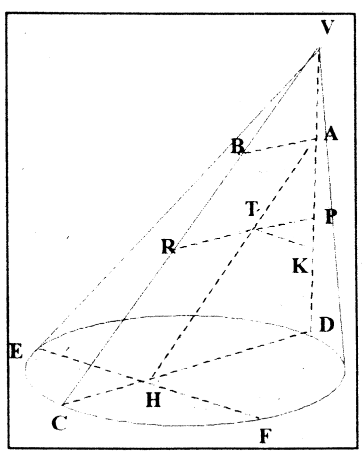


fig. 2

Fra le schede distribuite ai partecipanti per ricostruire i ragionamenti di Apollonio, riportiamo qui, per brevità, solo quella relativa al caso in cui il piano secante è parallelo a un lato del triangolo per l'asse (cfr. fig.2): caso corrispondente a quello della orthotome in Menecmo.

I punti R,T,K giacciono su un cerchio parallelo al piano di base del cono. K è un punto della sezione. Si ha (teorema di Euclide) $KT^2=RT.TP$; dai triangoli simili VAB e VDC si ricava RT:VA=CD:VD; dai triangoli simili APT e VDC si ricava PT:AT=CD:VC; moltiplicando membro a membro le proporzioni precedenti e definendo k (orthia, lato retto) come segue $k:VA=CD^2:(VD.VC)$ si ottiene, con semplici passaggi, $KT^2=k.AT$.

In questa seconda fase del lavoro di gruppo, la discussione è servita a spiegare:

- che Apollonio indica le sezioni del cono con i termini parabola, ellisse, iperbole in quanto collega (per la prima volta in modo esplicito) i sintomi trovati al problema della applicazione delle aree in Euclide;

- che quella di Apollonio è una generalizzazione della teoria precedente (cioè la contiene come caso particolare) perché se il triangolo per l'asse è rettangolo e isoscele, si ricava subito, dalla fig.2, k=2VA=2p: il parametro torna ad assumere lo stesso valore e la stessa interpretazione che aveva nella teoria di Menecmo.

- Inoltre, la possibilità della coniugazione obliqua appare in Apollonio inerente alle coniche fin dalla loro genesi; ma era già nota in precedenza (si vedano gli studi di Archimede sulla parabola). Come veniva dedotta? Come si è arrivati alla sistemazione di Apollonio? Queste domande esemplificano un tipo importante di problema storico.

D) Spostiamoci al 1600: la teoria delle coniche, benché ancora fondata, per molti aspetti, sulla rilettura, l'interpretazione e la ricostruzione delle grandi opere dei geometri greci, presenta in questa epoca profonde innovazioni. Cominciano a differenziarsi linee separate di indagine: quella analitica, impensabile senza l'opera di Cartesio che aveva modificato il pensiero matematico superando il conflitto tra algebra e geometria, consentendo l'interpretazione numerica dei simboli letterali, accettando di ricavare (senza alcun pregiudizio) dalla osservazione e progettazione di meccanismi idee feconde per le costruzioni teoriche; quella geometrico- proiettiva, legata alla matematizzazione delle ricerche (inizialmente empiriche) di architetti e pittori sulla prospettiva. In entrambe, la crescente confidenza e abilità nell'uso tecnico dei concetti di infinito e di infinitesimo, apre orizzonti sconosciuti al pensiero matematico classico.

Si esaminano in breve due opere che rappresentano con efficacia lo stato della ricerca dopo la metà del secolo:

1) **J.Wallis, Nuovo metodo di esporre la teoria delle sezioni coniche, 1655.** E' un trattato interessante per la insofferenza (ormai chiaramente leggibile tra le righe) verso i modelli classici; e perché vi si dichiara apertamente che è inutile voler insistere nel far apparire le coniche come curve "solide" (cioè costruibili e trattabili solo in ambiente tridimensionale). Il "passaggio al piano" (che nella transizione dall'antichità all'epoca moderna caratterizza la storia delle coniche), è del tutto maturo: come nessuno pensa di ricorrere al cono per studiare il triangolo o la circonferenza (che tuttavia sono sezioni coniche), così anche parabola, iperbole, ellisse si possono definire e analizzare "in assoluto", cioè

direttamente nel piano che le sostiene.

Ciò che permette a Wallis di eliminare il cono è un nuovo schema costruttivo per questo solido geometrico, unito a una lettura di tipo "cartesiano" delle proprietà che caratterizzano le sue sezioni.

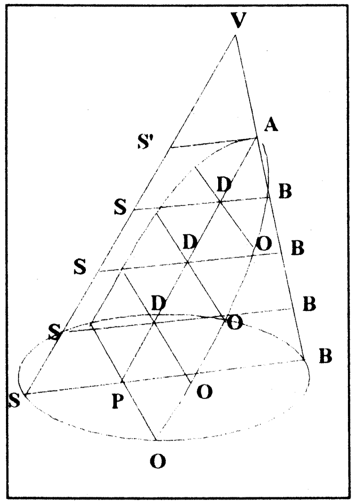


fig. 3

In sintesi: il cono è costruito (al modo di Cavalieri, la cui teoria degli indivisibili è un fondamento - esplicitamente citato - del metodo di Wallis) "impilando" opportunamente attorno al triangolo per l'asse (non perpendicolare al cerchio di base del cono stesso) un gran numero di cilindri circolari infinitamente sottili (di altezza infinitesima), aventi diametri BS (cfr. fig.3, che illustra il caso della parabola) e contenenti ognuno un punto O della sezione conica con la relativa ordinata OD (in direzione coniugata ad AP, diametro di tale sezione). Entro ciascuno di questi cilindri si applica il teorema di Euclide (OD^2=DB.DS); ma poiché DS è costante (considerare il parallelogrammo ASS'P) e DB proporzionale a DA (considerare i triangoli simili ADB), possiamo scrivere $OD^2=k$DA (#). Quindi il parametro (lato retto) k risulta definito dalla uguaglianza kDA=DB.DS, ossia dalla proporzione k:DB=DS:AD.

La relazione (#) non è più letta, ora, come proprietà di una curva già data; ma come una relazione che determina la posizione dei punti O nel piano secante, purché siano dati il diametro AP, la direzione ad esso coniugata, il valore di k. Precisamente, conoscere AD significa fissare l'indivisibile su cui ci si trova (ad ogni indivisibile bidimensionale del cono corrisponde un indivisibile unidimensionale della parabola); la costante k consente di determinare la lunghezza DO, quindi la posizione del punto O (da una parte e dall'altra del diametro). E' in questo senso che (#) definisce **cartesianamente** la curva nel piano: può servire a costruirla. Il cono è inutile: le altre proprietà della parabola (o ellisse, o iperbole) saranno dedotte per via planimetrica a partire da (#). Si osservi inoltre che, mentre nella geometria classica il "sintomo" era trovato per un punto generico (che poteva esser spostato sulla curva assegnata: e si faceva quindi, a livello di immaginazione, ricorso, se non al movimento, almeno alla possibilità di iterare la prova cambiando il punto inizialmente considerato): nel trattato di Wallis la (#) è ricavata **simultaneamente** per tutti i punti: è una visione "statica" della curva, che implica l'uso dell'**infinito attuale**.

2) Ph. De La Hire, Nuovo metodo geometrico per studiare le sezioni coniche, 1673. E' il primo di tre volumi sulle coniche che De La Hire scrive ritrovando e risistemando quasi tutti i risultati noti al suo tempo, compresi quelli classici di Apollonio. La parte più originale è quella che riprende e sviluppa le ricerche di Desargues (1639), ignorate invece da Cartesio e Wallis. Si tratta del punto di vista proiettivo (non a caso, in gioventù, De La Hire aveva fatto il pittore), l'unico dal quale le coniche possono apparire come diverse modalità di un unico essere matematico (mentre, per i classici e anche per buona parte degli studiosi del '600, erano oggetti matematici ben distinti).

Nel capitolo intitolato "Les Planiconiques", De La Hire riesce, utilizzando intuizioni e proprietà sviluppate e dimostrate inizialmente nello spazio a tre dimensioni, ad elaborare un metodo per trasformare circonferenze in coniche con operazioni (grafiche) eseguibili senza uscire dal piano che contiene le circonferenze e che dunque, alla fine, conterrà anche le coniche trasformate.

Si fa osservare ai partecipanti un modello che spiega la costruzione di De La Hire, mostrando come da una prospettività fra piani incidenti si può passare (usiamo termini contemporanei) a una omologia sovrapponendo i due piani prospettivi con un movimento coordinato d'uno di essi e del centro di proiezione (movimento ben noto ai pittori dell'epoca e agli studiosi di ottica). Tale costruzione (che De La Hire illustra con un linguaggio assai diverso dal nostro (per es. **retta formatrice** invece di asse; **retta direttrice** invece di retta limite; **polo** anziché centro della trasformazione, ecc.) ha un notevole interesse didattico: è di immediata comprensione; non richiede che si faccia ricorso esplicito agli elementi impropri del piano; tradotta in calcoli simbolici con le tecniche della geometria analitica (occorre soltanto conoscere l'equazione di una retta, e risolvere problemi elementari sulle rette) consente di scrivere subito le equazioni cartesiane dell'omologia.

E) Si chiude così il pomeriggio di lavoro; i partecipanti sono un po' affaticati, ma mostrano di aver apprezzato il metodo didattico da noi proposto, e i vantaggi che può produrre, sia a livello di conoscenze sia per la formazione culturale degli studenti. Unico appunto, la difficoltà di procurarsi o costruirsi i modelli, apparsi indispensabili per una gestione efficace delle attività da svolgere in classe, ma d'altra parte complessi, pesanti e difficili da realizzare.
Abbiamo quindi, a discussione conclusa e stimolati anche da richieste di prestito (che non è possibile esaudire), deciso di progettare (almeno in relazione alla teoria delle coniche) una serie di modelli fisici più "leggeri", più facilmente trasportabili; soprattutto, costruibili (smontabili, rimontabili) con rapidità. Ci siamo riusciti: e cogliamo questa occasione per assicurare agli amici che hanno avuto la pazienza di seguirci che ci metteremo presto in contatto con loro.

APPENDICE

Bibliografia dei Nuclei di Ricerca Didattica

Qui di seguito è riportato un elenco, non completo, di lavori prodotti da Nuclei di Ricerca Didattica o da singoli ricercatori in didattica della matematica. L'elenco riguarda i lavori pubblicati a partire dal 1989 e rappresenta un aggiornamento degli elenchi riportati in appendice agli Atti del XIII e del XIV Convegno sull'Insegnamento della Matematica (Notiziario UMI, suppl. al n.3, 1990, e suppl. al n.5, 1991).

Abbreviazioni

AP	: Ed. Apeiron, Bologna-Roma
AR	: Archimede, Le Monnier, Firenze
CI	: Cabrirssae, IRRSAE Emilia-Romagna, Bologna
CS	: Cultura e Scuola, Roma
DS	: Didattica delle scienze e informatica nella scuola, La Scuola, Brescia
ED	: L'Educatore, Milano
EM	: L'Educazione Matematica, Cagliari
EP	: Epsilon, Paravia, Torino
IMSI	: L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Paderno del Grappa
ID	: Induzioni (Demografia, probabilità, statistica e scuola), Roma
IN	: Infanzia, Bologna-Firenze.
LP	: Lettera PRISTEM, Milano
MD	: La matematica e la sua didattica, Pitagora, Bologna
NS	: Nuova Secondaria, La Scuola, Brescia
NUMI	: Notiziario U.M.I., Bologna
QDF	: Quaderni di didattica della matematica e dei suoi fondamenti, Parma
PM	: Periodico di matematiche, Roma
PV	: Pedagogia e Vita
SD	: Scuola e didattica, La Scuola, Brescia
SIM	: Scuola italiana moderna, La scuola, Brescia
SMI	: Le scienze, la matematica e il loro insegnamento, Le Monnier, Firenze
SS	: La Scuola Se, N. Milano ed., Bologna
SV	: Scuola viva, SEI, Torino
VP	: Vita e pensiero
VS	: La vita scolastica, Giunti, Firenze

Nucleo di Ricerca Didattica di BOLOGNA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Bruno D'Amore, Dipartimento di Matematica, Università, piazza Porta di S. Donato 5, 40126 Bologna.*

Aglì F., Martini A., *Uno spazio, degli oggetti ...*, ED, 1992.
Aglì F., Martini A., *Progettisti e costruttori*, ED, 1992.
Aglì F., Martini A., *Velocità di crescita*, SS, 1993.
Aglì F., Martini A., *Idee, esperienze, ricerche. Un contributo per la costruzione di un curricolo di matematica*, IN, 1991.
Aglì F., Martini A., *Le competenze dei bambini alla base della costruzione dell'aritmetica scritta*, IN, 1993-94.
Aglì F., Martini A., *Lo spazio vissuto, descritto, rappresentato*, IN, 1994.
Aglì F., Martini A., *Casualità e attese*, IN, 1994
Aglì F., Martini A., *La torta di ciliege*, IN, 1994.
Aglì F., Martini A., *Esperienze matematiche con le filastrocche*, IN, 1994.
Aglì F., Martini A., *C'era una volta il gioco dell'oca*, ED, 1993.
Aglì F., Martini A., *Con lenti e specchi deformanti ... e un foglio di carta a quadretti*, ED, 1993.
Aglì F., Martini A., *Giocando con le colorazioni*, ED, 1993.
Aglì F., Martini A., *Alice assegna i posti a tavola*, ED, 1994.
Aglì F., Martini A., *Costruisco una linea e mi diverto*, ED, 1994.
Aglì F., Martini A., *Tanti giochi per contare*, ED, 1994.
Aglì F., Martini A., *Strategie ingenue di notazione delle quantità, delle variazioni di quantità e di scrittura del numero in età pre-scolare*, Età Evolutiva, in corso di pubblicazione.
Aglì F., Martini A., *Il quadernone dei 3.a*, Fabbri, Milano 1992.
Aglì F., Martini A., *Il quadernone dei 4.a*, Fabbri, Milano 1992.
Aglì F., Martini A., *Il quadernone dei 5.a*, Fabbri, Milano 1992.
Aglì F., Martini A., *Il grande passaggio*, Fabbri, Milano 1993.
Bagni G.T., *Gian Maria Ciassi, fisico trevigiano*, Ed. Teorema, Treviso 1991.
Bagni G.T., D'Amore B., Giovannoni L., Picotti M., *Esercizi di autoverifica per insegnanti*, Progetto Ma.S.E., vol.VIII, Franco Angeli, Milano 1992.
Bagni G.T., *La matematica nella Marca: Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati*, Ed. Teorema, Treviso 1993.
Bagni G.T., *Problemi di matematica*, Tip. Editrice Trevigiana, Treviso 1994.
Bagni G.T., D'Amore B., *Alle radici storiche della prospettiva*, Franco Angeli, Milano 1994.
Bagni G.T., *Torquato il quadrato*, SS, anno X, n.74-75, 1991, p.24.
Bagni G.T., *I logaritmi dei numeri negativi in un "opuscolo matematico" (1787) di Francesco Maria Franceschinis*, MD, anno V, n.3, 1991.
Bagni G.T., *Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1989*, MD, anno V, n.1, 1991.
Bagni G.T., *La classificazione dei quadrilateri*, Atti del Convegno "Incontri con la Matematica n.5", Castel San Pietro 1991, AP, 1991.
Bagni G.T., *Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1991*, MD, anno VI, n.1, 1992.
Bagni G.T., *Una storia "Delle matematiche applicate" (1808) di Francesco Maria Franceschinis*, MD, anno VI, n.2, 1992.
Bagni G.T., *La classificazione dei quadrilateri*, IMSI, vol.15, n.8, 1992.
Bagni G.T., *Procedimenti iterativi nella storia della matematica*, MD, anno VI, n.3, 1992.
Bagni G.T., *Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1992*, MD, anno VI, n.3, 1992.
Bagni G.T., *Il problema della colorazione delle carte geografiche*, in B. D'Amore - F. Speranza (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica*, vol.II, Armando, Roma 1992.
Bagni G.T., *Un analista del Settecento: Jacopo Riccati*, in B. D'Amore - F. Speranza (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica*, vol.II, Armando, Roma 1992.
Bagni G.T., *Alla ricerca dei numeri primi*, MD, 1993, n.2, pp.166-174.
Bagni G.T., *Strutture algebriche e proprietà associativa*, Rend. Comitato Studi Economici, vol.XXX/XXXI, 1993.
Bagni G.T., *Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1993*, Boll. Mathesis Bologna, n.27, 1993.
Bagni G.T., *Spunti storici per la didattica della matematica: la prospettiva e le geometrie non euclidee*, Atti del Convegno "Incontri con la Matematica n.7", Castel San Pietro 1993, AP, 1993.
Bagni G.T., *Esercizi di autovalutazione per insegnanti e problemi "classici"*, Atti del Convegno "Incontri con la Matematica n.7", Castel San Pietro 1993, AP, 1993.
Bagni G.T., *Funzioni naturali di variabile reale*, MD, 1993, n.4, pp.466-475.
Bagni G.T., *L'approssimazione di π, i poligoni regolari e la circonferenza*, IMSI, vol.17B, n.4, 1994.
Bagni G.T., *Una "controversia" della matematica del Settecento: i logaritmi dei numeri negativi*, PM, Serie VII, vol.2, n.2/3, 1994.
Bagni G.T., *Numeri e operazioni nel Medioevo: Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478)*, MD, 1994, n.4, pp.364-373.
Bagni G.T., *I metodi pratici di sottrazione nei manuali di aritmetica*, MD, 1994, n.4, pp.364-373.
Barozzi G.C., *Un'applicazione del calcolo matriciale alla genetica di popolazione*, Boll. Docenti di Matematica del Canton Ticino, n.23 (1991), pp.1-8.

Barozzi G.C., *Nuovi strumenti per il laboratorio di matematica*, Informatica, Telematica e Scuola, vol.5 (1991), pp.34-45.
Barozzi G.C., *Alcune osservazioni sullo sviluppo di Taylor della funzione tangente*, DS, n.154 (1991), pp.49-52.
Barozzi G.C., *Una congettura sui numeri primi*, AR, 1991 n.1, pp.3-6.
Barozzi G.C., *Numeri primi*, Atti del Convegno UMI/CIIM Grosseto 1992, suppl. NUMI n.5, vol.XX (1993), pp.31-48.
Barozzi G.C., *Un esempio di utilizzo del sistema Mathematica: classificazione e tracciamento delle coniche*, MD, 1993, 1ª parte pp.82-90, 2ª parte pp.208-216.
Barozzi G.C., *Matematica all'alba*, LP, 1993 (n.8), pp.20-21.
Barozzi G.C., *Dall'equazione di terzo grado ai numeri complessi*, Sæcularia Nona, 1993, pp.60-64.
Barozzi G.C., Scimemi B., Sitia C., *The Influence of Computers on Mathematics*, in *Mathematics of Computing*, UNESCO 1993, pp.675-724.
Barozzi G.C., *Studio di successioni e serie*, MD, 1994, pp.70-80.
Barozzi G.C., *Un esempio di utilizzo del sistema CABRI-Géomètre*, IMSI, vol.17 (1994), pp.459-466.
Casadei G., Palareti A., Roccetti M., *Un ITS per discipline ipotetico-deduttive*, Atti del Convegno "L'Università per la scuola nell'Europa del '92", Elea Press, Salerno 1991.
Casadei G., Cuppini P., Palareti A., Roccetti M., *L'uso della negazione in un ambiente didattico*, Atti del Convegno "L'Università per la scuola nell'Europa del '92", Elea Press, Salerno 1991.
Casadei G., Palareti A., Roccetti M., *Un sistema per valutare procedimenti risolutivi di problemi*, Atti Convegno Didamatica '91, Forlì-Cesena 1991, pp.51-64.
Casadei G., Melino R., Palareti A., Sfarcich B., *La gestione dell'errore di apprendimento nel sistema Pitagora*, Atti Conv. Didamatica '92, Campobasso 1992, pp.221-224.
Casadei G., Carbonaro A., Salomoni P., *Le tecniche di machine learning nella realizzazione di un sistema per la didattica*, Atti Convegno AICA '93, Bari 1993.
D'Amore B., *M come Matematica. 6: Matematica e magia*, Boll. dei docenti di Matematica del Canton Ticino, 22, 1991, pp.17-20.
D'Amore B., *La formalizzazione logica e matematica*, in *Umanesimo e società in trasformazione*, I Quad. di cultura del Liceo Ginnasio "L. Galvani", Bologna 1989, pp.137-150; e in Boll. dei docenti di Mat. del Canton Ticino, 25, 1992, pp.71-76.
D'Amore B., *Giochi logici linguistici e matematici*, Angeli ed., Milano 1992.
D'Amore B., Arrigo G., *Infiniti*, Angeli ed., Milano 1992.
D'Amore B., Oliva P., *Numeri. Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri*, Angeli ed., Milano 1994.
D'Amore B., *Cenni sulla presenza della matematica nell'opera di Dante*, in E. Pasquini (a cura di), *Dante e l'Enciclopedia delle scienze*, Atti del Convegno omonimo, Clueb, Bologna 1991, pp.51-61.
D'Amore B., *Numerali, numeri ed aritmetica nelle culture indigene centro e sudamericane*, DS, 158, 1992, pp.5-8.
D'Amore B., *Alcuni cenni sulla presenza della Matematica nella "Divina Commedia"*, CS, 127, 1993, pp.145-161.
D'Amore B., *L'infinito*, conferenza trascritta su B. D'Amore - M. Emmer - G. Palmieri - N. Pintacuda, *2+2=5 Incontri con i matematici*, Sondrio 1994.
D'Amore B., *Lo spazio, l'ordine e la misura* (a cura di), Casa Editrice Valore Scuola, Roma 1994.
D'Amore B., Fiorini C., *Educazione matematica nelle scuole dell'infanzia*, Quadrante scolastico, 48, 1991, pp.194-205.
D'Amore B., *Matematica e curricolo nella scuola dell'infanzia*, IN, 1, 1991, pp.11-14.
D'Amore B., *L'apprendimento spontaneo della matematica*, ciclo di 7 conferenze su IN: I: 1, 1992, pp.26-27; II (*Spazio ordine misura: qualche esempio per cominciare*): 2, 1992, pp.31-33; III (*Modelli mentali che si formano spontaneamente nel "mondo della matematica"*): 3/4, 1992, pp.32-33; IV (*Aiutare in formarsi di corretti modelli mentali nel campo di esperienze spazio, ordine, misura*): 5, 1993, pp.26-27; V (*Alcuni dei caratteri generali dei processi di insegnamento/apprendimento della matematica nella scuola dell'infanzia*): 6, 1993, pp.41-42; VI (*Conoscenze alla base delle strategie ingenue messe in atto nel fare matematica*): 7, 1993, pp.33-34; VII (*Strategie ingenue nel fare matematica*): 9/10, 1993, pp.24-25.
D'Amore B., *I palloncini di Greta* (in collab.), IN, 1, 1993, pp.31-34.
D'Amore B., *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Progetto Ma.S.E., vol.XA, Angeli ed., Milano 1993.
D'Amore B., Fiorini C., Minarelli M., Sandri P., *Syllabus Ma.S.E. per il I e II ciclo*, Progetto Ma.S.E., vol.IX, Angeli ed., Milano 1993.
D'Amore B., *Esercizi di geometria per insegnanti*, MD, 1991, n.2, pp.68-74.
D'Amore B., Speranza F., *Costruire la Matematica*, SS, 76, 1991, pp.17-18.
D'Amore B., *Eureka!*, VS, 3, 1991, pp.8-12.
D'Amore B., introduzione e cura di AA.VV., *Un itinerario didattico di matematica*, Direzione didattica di Russi, Comune di Russi, 5 voll., 1987-1991.
D'Amore B., Sandri P., *Prima visione a quadretti*, VS, 5, 1991, pp.11-15.
D'Amore B., Speranza F., *Matematica e didattica. Senza sicumera*, SS, 0, 1992, p.15.
D'Amore B., *Due obiettivi fondamentali per l'educazione matematica*, SV, 9, 1992, pp.31-32.
D'Amore B., *Dalla geometria del taxi alla probabilità (Laboratorio di matematica)*, in A. De Flora (a cura di), *Matematica nella scuola primaria*, Irrsae E.R. -

N.Milano, Bologna 1993, pp.41-45; *Logica I ciclo* (*Syllabus*), in *idem*, pp.107-111; *Logica II ciclo* (*Syllabus*) (in coll. con F. Speranza), in *idem*, pp.112-119.

D'Amore B., Sandri P., *Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili*, MD, 3, 1993, pp.348-353.

D'Amore B., Sandri P., *Il problema della pratica matematica educativa*, ED, 1993, I-X.

D'Amore B., *Rileggere i nuovi programmi della scuola elementare*, I diritti della scuola, 2, 1993, pp.41-45.

D'Amore B., *Il problema del pastore*, VS, 2, 1993, pp.14-17.

D'Amore B., *Glossario di matematica* (cura e introduzione), Dip. Pubblica Educazione, Canton Ticino, 1991.

D'Amore B., *Un'indagine sulle programmazioni nella scuola media*, MD, 1, 1994, pp.82-94.

D'Amore B., *La matematica fra gli 8 e i 15 anni* (a cura di), AP, 1991.

D'Amore B., *Matematica e scuola: teorie ed esperienze* (a cura di), Pitagora, Bologna 1992.

D'Amore B., *Alla scoperta della matematica, per una didattica (più) viva* (a cura di), Pitagora, Bologna 1993.

D'Amore B., *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica* (a cura di), Pitagora, Bologna 1994.

D'Amore B., *Teoria dei giochi e giochi matematici*, in "Il gioco", Fare scuola n.3, Quaderni di cultura didattica, La Nuova Italia, 1986, pp.43-57.

D'Amore B., *Un sapere in ebollizione*, La Didattica, n.1, 1994, pp.68-72.

D'Amore B., Sandri P., *Motivazione e immagine*, La Didattica, n.1, 1994, pp.73-77.

D'Amore B., *logica Logica LOGICA, la didattica della logica fra gli 8 e i 15 anni*, La Matematica fra gli 8 e i 15 anni, AP, 1991, pp.79-90.

D'Amore B., *Ricerca-Azione, possibile paradigma della ricerca in didattica*, SS, 79-80, 1991, pp.14-17.

D'Amore B., *Stili di apprendimento differenziati per l'educazione matematica*, SS, 82, 1992, pp.19-22.

D'Amore B., *I giochi di strategia nella didattica, dalla scuola materna all'università*, Atti del Convegno "Matematica e scacchi", Forlì 1992, pp.33-40.

D'Amore B., Pellegrino C., *Atti del "Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza* (a cura di), Bologna 1992.

D'Amore B., *L'insegnamento della matematica offende le intelligenze?*, Atti del Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza, Bologna 1992, pp.33-40.

D'Amore B., *Una breve panoramica su alcune ricerche in corso*, ED, 4, 1992, pp.62-67.

D'Amore B., Plazzi P., *La didattica della logica dei predicati*, IMSI, 15, 1992, pp.1019-1039.

D'Amore B., *Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico*, MD, 3, 1993, pp.289-301.

D'Amore B., *Considerazioni sull'insegnamento della matematica in continuità tra la scuola media ed il biennio superiore*, MD, 3, 1993, pp.348-353.

D'Amore B., *Geometria: mezzo pedagogico per l'educazione matematica*, MD, 4, 1993, pp.387-409.

D'Amore B., Sandri P., *Everiday language and "external" models in an a-didactic situation*, in N.A. Malara and L: Rico, *Proc. of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematical Education*, Modena 1994, pp.115-122.

D'Amore B., *Via democratica (o via regale) alla matematica*, QDF, n.1, 1993, pp.31-40.

Giovannoni L., *Lo spazio, l'ordine, la misura*, in A. Longo Micalessin (a cura di),. *La scuola dell'infanzia nel Friuli-Venezia Giulia*, Progetti e Convegni Irrsae F.V.G., Trieste 1991.

Giovannoni L., *Combinare le forme: un'arte, un gioco*, ED, n.23, 1992, pp.29-33.

Giovannoni L., *Vola vola l'asino: i giochi della verità*, ED, n.6, 1993, pp.12-15.

Giovannoni L., *La matematica come campo di esperienza nella scuola dell'infanzia*, in B. Jannamorelli (a cura di), *Insegnamento/Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, ed. Qualevita, Sulmona 1993.

Giovannoni L., *La Geometria: descrizione della realtà e avventura nell'impossibile*, SS, Dossier Didattico n.9, 1993, pp.19-23.

Giovannoni L., *I labirinti: dal magico alla struttura*, MD, n.2, 1991.

Oliva P., *Logo e tassellazioni (spunti per un'esercitazione didattica)*, MD, anno V, n.2, 1991, pp.38-40.

Oliva P., *Il logo e il simbolismo MNF*, MD, anno V, n.3, 1991, pp.48-51.

Oliva P., *Appello per una ricerca di etnoaritmetica. 1: algoritmi per la sottrazione*, SS, n.79/80, 1991, pp.26-27; *2: algoritmi per la divisione*, SS, n.85, 1992, pp.14-15; *3: algoritmi per la moltiplicazione*, SS, n.86/87, 1992, pp.25-26.

Oliva P., *Le conte (appello per una ricerca di etnoaritmetica)*, SS, n.2, 1992, pp.18-19.

Oliva P., *I nomi dei numeri (appello per una ricerca di etnoaritmetica)*, SS, n.3, 1992, pp.10.

Oliva P., *Leonardo il Pisano, figlio di Bonaccio, "Fibonacci"*, In B. D'Amore - F. Speranza (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica (spunti didattici)*, vol.2, Armando, Roma 1992, pp.63-72.

Oliva P., De Bernardi V., *Tarta e Ruga, automi in coppia e in rima*, "Didamatica '93", CDS, Genova 1993, pp.291-300.

Oliva P., *Isoperimetria ed equiestensione*, Faenza ed., Faenza 1990.

Oliva P., *Matematica e Logo (obiettivi, contenuti, metodi)*, Angeli ed., Milano 1993.

Ricci R., *Strutture matematiche e Prolog*, MD, n.1, 1991, pp.30-32.

Ricci R., *Insiemi e Prolog*, MD, n.1, 1991, pp.33-36.
Ricci R., *Rompicapo logici e Prolog*, MD, n.2, 1991, pp.41-42.
Ricci R., *Numeri naturali, liste e Prolog*, MD, n.3, 1991, pp.42-44.
Ricci R., *Una introduzione alle strutture linguistiche di pensiero ricorsivo*, MD, n.4, 1991, pp.39-43.
Ricci R., *Uso del Prolog in classe: le relazioni d'ordine*, in B. D'Amore (a cura di), *La Matematica tra gli 8 e i 15 anni*, AP, 1991, pp.142-144.
Ricci R., *Sulla formula di Bayes*, MD, n.2, 1992, pp.46-50.
Ricci R., *Sistemi formali, haiku, Prolog*, in B. D'Amore (a cura di), *Alla scoperta della matematica, per una didattica (più) viva*, Pitagora, Bologna 1993, p.125.
Ricci R., *SW didattico: Simmetrie. Leggi del caso. Esercitazioni di geometria analitica*, 8° censimento nazionale SW didattico, AICA, 1992, pp.52-55.
Ricci R., *I numeri reali: sulla loro introduzione come numeri decimali illimitati*, MD, n.4, 1992, pp.14-17.
Ricci R., *Moti puntiformi con l'elaboratore*, DS, n.170, 1994, pp.55-57.
Ricci R., *Linguaggio naturale, matematica e Prolog*, in B. Jannarelli (a cura di), *Insegnamento apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, Qualevita ed., Sulmona 1993, pp.137-146.
Ricci R., *Punti notevoli dei triangoli*, MD, n.1, 1994, pp.39-43.
Ricci R., *Un metodo per disegnare curve ricorsive*, MD, n.2, 1994, pp.190-196.
Ricci R., *Meccanismi articolati con Cabri-Géomètre: meccanismo di Watt*, CI, n.2, 1994, pp.6-7.
Ricci R., *Meccanismi articolati per moti quasi rettilinei*, in via di pubbl. su CI.
Ricci R., *Meccanismi articolati per moti rettilinei*, in via di pubbl. su CI.
Ricci R., *Tracciamento di coniche*, in via di pubbl. su CI.
Ricci R., *Algebra con Cabri-Géomètre*, in via di pubbl. su CI.
Sandri P., *Le infanzie equatoriane: uno sguardo alla realtà educativa di un paese sudamericano*, IN, n.2, 1990, pp.49-58.
Sandri P., *Strutture operatorie dell'intelligenza e strutture matematiche: il gruppo INRC di Piaget*, Età evolutiva, 43, 1992, pp.36-48.
Sandri P., *Per una didattica del tempo convenzionale*, SS, 1993, pp.16-21.
Sandri P., *Problemi nella pratica didattica* (in collab.), Angeli ed., Milano 1993.
Sandri P., *Tre quaderni operativi per i bambini di 3, 4 e 5 anni della scuola dell'infanzia: Giochiamo con la matematica*, Fabbri ed., Milano 1994.
Pertichino M., Sandri P., *Atti Convegno Nazionale su "Matematica e difficoltà"* (a cura di), Castel S. Pietro 1991, Pitagora, Bologna.
Pertichino M., Sandri P., Zan R., *Atti Convegno Nazionale su "Matematica e difficoltà"* (a cura di), Castel S. Pietro 1992, Pitagora, Bologna.
Caredda C., Piochi B., Sandri P., *Atti Convegno Nazionale su "Matematica e difficoltà"* (a cura di), Castel S. Pietro 1993, Pitagora, Bologna.

Nucleo di Ricerca Didattica di BRESCIA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Mario Marchi, Dipartimento di Matematica, Università Cattolica del Sacro Cuore, via Trieste 17, 25121 Brescia.*

Billante M., Pedrali M.G., Salucci E., Tosi R., Verzelletti E., *Problematiche relative all'utilizzo di strumenti informatici nell'approcoio alla probabilità*, XVI Congegno UMI-CIIM, Civitanova Marche, 1993.
Bozzolo C., *Elementi di logica e insiemi*, Quaderno n.3 - Collana di formazione professionale, Ed. Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", 1989.
Bozzolo C., *La proprietà "dissociativa"*, SIM, n.4, 1989.
Bozzolo C., *Uso delle unità di misura*, SIM, n.6, 1989.
Bozzolo C., *I problemi: riflessioni sui più adeguati schemi di risoluzione*, SIM, n.9, 1990.
Bozzolo C., *Il cerchio e i poligoni*, SIM, n.11, 1990.
Bozzolo C., *Le tecniche usuali e inusuali delle operazioni*, SIM, 1): n.13, 1990; 2): n.15, 1990.
Bozzolo C., *Riflessioni sull'esistenza o meno dell'altezza in figure geometriche piane e solide*, SIM, n.4, 1990.
Bozzolo C., *La lunghezza e la sua misura*, SIM, n.6, 1990.
Bozzolo C., *L'area e la sua misura*, SIM, n.6, 1990; 1) n.9, 1991; 2) n.11, 1991; 3) n.13, 1991; 4) n.15, 1991.
Bozzolo C., *I nuovi programmi di matematica*, SIM, n.4, 1991.
Bozzolo C., *Il problema dei problemi*, SIM, n.6, 1991.
Bozzolo C., *Leonardo Eulero: una delle più grandi figure nella storia del pensiero scientifico*, IMSI, vol.14, nn.11-12, 1991.
Bozzolo C., *La misura: i programmi chiedono un cambiamento totale*, SIM, n.9, 1992.
Bozzolo C., *La misura: il calcolo dimensionale e l'uso delle marche nella risoluzione dei problemi*, SIM, n.11, 1992.
Bozzolo C., *Il concetto di operazione: riflessioni e approfondimenti*, SIM, n.4, 1992.
Bozzolo C., *La ricchezza delle tabelle operative*, SIM, n.6, 1992.
Bozzolo C., *Le piramidi di mattoni*, IMSI, vol.15, n.3, 1992.
Bozzolo C., *Primi elementi di logica, insiemi relazioni*, La Scuola, Brescia 1993.
Bozzolo C., *Logica, insiemi relazioni: proposte didattiche*, La Scuola, Brescia 1993.
Bozzolo C., *Le frazioni: il significato dei termini*, SIM, n.11, 1993.
Bozzolo C., *I vari significati del termine "frazione"*, SIM, n.13, 1993.
Bozzolo C., *Altri significati del simbolo "frazione"*, SIM, n.15, 1993.
Bozzolo C., *Il signor Pen, pentagono bizzarro*, IMSI, vol.16, n.1, 1993.

Capra T., Portieri S., *Imparo a ... conoscere i numeri*, Ed. Erickson, Trento 1994.
Gazzaniga G., *Un approccio multimediale nell'insegnamento della Matematica e della Fisica*, XIV Congresso UMI, Catania, 1991.
Gazzaniga G., *Designing computer based flexible teaching tools for the teaching of mathematically based disciplines*, IFIP Open Conference, Gmunden, 1993.
Gazzaniga G., Salucci E., *Riflessioni sulla attività di organizzazione e gestione di una biblioteca di software didattico*, Atti Conv. "Didamatica '93", Genova, 1993, pp.80-91.
Manara C.F., Marchi M., *L'insegnamento della matematica*, La Scuola, Brescia 1993.
Marchi M., Dalla Torre P., Moncecchi G., Perelli M.P., *Geometrizzazione dello spazio ambiente: una proposta didattica*, Progetto CNR-TID, vol.4, 1990.
Marchi M., *Matematica e bisogni umani: il bisogno di verità*, Atti del Convegno Nazionale Mathesis, Iseo 1990, pp.28-38.
Marchi M., *Geometria, verità, fantasia*, VP, n.1, 1991, pp.54-63.
Marchi M., Manara C.F., Karzel H., *L'assiomatica della geometria elementare da Euclide a Hilbert*, NS, IX, 10, 1992.
Marchi M., *Le figure della geometria elementare da Euclide a Hilbert*, NS, IX, 10, 1992, pp. 41-44.
Marchi M., *L'opera di Peano e la moderna geometria di incidenza*, Atti del Convegno "Peano e i fondamenti della matematica", Modena 1992, pp.197-212.
Marchi M., *La problematica Hilbertiana nello studio dei Fondamenti della Geometria*, Atti del Convegno "Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana", IRRSAE Marche 1992, pp.134-142.
Marchi M., *Confronto tra i sistemi assiomatici di Peano e di Hilbert in Geometria*, Quaderno n.14 del CNR "Seminari di Epistemologia della Matematica", Pavia 1994, pp.11-30.
Moncecchi G.F., Perelli D'Argenzio M.P., *Textbooks and statistics in Italian primary school*, IASE Proc. of the first scientific meeting, ed. by L. Brunelli and G. Cicchitelli, Perugia 1993, pp.457-458.
Perelli D'Argenzio M.P., Eureli Cutillo E., Pesarin F., *The teaching of probability and statistics in italian compulsory schools*, in *Statistics*, vol.7, Unesco, Paris, 1989, pp.228-242.
Perelli D'Argenzio M.P., *La Probabilità: fondamenti, lineamenti psicopedagogici, proposte didattiche*, IMSI, Quad. di aggiorn. didatt. discipl., n.1, 1991, pp.7-127.
Perelli D'Argenzio M.P., Moncecchi G.F., *Probabilità e Statistica nel primo ciclo della scuola elementare: analisi di due proposte didattiche*, ID, n.5, 1992, pp.125-138.
Perelli M.P., *On the psycological aspects of teaching statistics at the primary school*, IASE Proc. of the first scientific meeting, ed. by L. Brunelli and G. Cicchitelli, Perugia 1993, pp.47-51.
Perelli D'Argenzio M.P., *Alcune considerazioni psicopedagogiche sull'insegnamento della Statistica e della Probabilità*, Atti del Convegno sull'Insegnamento della probabilità, Bressanone 1993, in corso di stampa.
Perelli D'Argenzio M.P., Moncecchi G.F., *Statistica come strumento trasversale nei corsi di formazione professionale*, CNOS, in corso di stampa.
Salucci E., Tosi R., *Alcuni esempi di software didattico per l'addestramento all'uso di strumenti informatici*, DS, 1994.
Salucci E., *Indagine sull'insegnamento della Probabilità nei libri di testo per il biennio della Scuola Secondaria Superiore*, in corso di stampa.

Nucleo di Ricerca Didattica di CAGLIARI

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Maria Polo, Dipartimento di Matematica, C.R.S.E.M., viale Merello 92, 90123 Cagliari.*

Addari M., Caredda C., *Recupero di abilità matematiche in un caso clinico di insufficienza mentale*, Atti del Convegno Nazionale Matematica e difficoltà, 1992.
Addari M., Caredda C., *Un approccio mutlidisciplinare per la comprensione della cronologia di eventi in un soggetto affetto da grave sindrome di Down*, Atti del IV Convegno Nazionale Matematica e difficoltà, 1994.
Barbarossa I., *Un'esperienza didattica nella scuola media: costruzione e uso di un questionario*, EM, 1991, pp.185-206.
Caredda C., *Probabilità e statistica*, EM, 3, 1991, pp.173-183.
Caredda C., *Uso di rappresentazioni grafiche nella risoluzione di problemi in un grave caso di ritardo nell'apprendimento*, in corso di stampa su Integrazioni.
Caredda C., Polo M., *Insegnare Matematica in quarta elementare*, Lisciani e Giunti, 1991.
Caredda C., Polo M., *Insegnare Matematica in quinta elementare*, Lisciani e Giunti, 1992.
Caredda C., Puxeddu M.R., *Ostacoli linguistici alla base delle difficoltà nell'insegnamento della probabilità a livello elementare*, ID, 2, 1991.
Caredda C., Puxeddu M.R., *Una situazione problematica per la costruzione del concetto di "possibile" nel I° ciclo della scuola elementare*, MD, 1, 1992.
Caredda C., Puxeddu M.R., *Il gioco: strategia pedagogica per l'apprendimento di concetti matematici in bambini in difficoltà*, in corso di stampa su SD.
Caredda C., Puxeddu M.R., *Un tentativo di risolvere situazioni problematiche in un caso grave di ritardo nell'apprendimento*, in corso di stampa su SD.

Deplano S., *Indice degli autori della rivista e dei supplementi dal 1980 al 1989*, EM, 1, 1990, pp.1-20.

Deplano S., Navarra G., *Gli insegnanti ricercatori in Didattica della Matematica*, EM, 1, 1992, pp.41-44.

Fasano M., Polo M., *La formazione degli insegnanti in servizio. Una proposta per la matematica.*, Annali della Pubblica Istruzione, Anno XXXVIII, n.5/6, 1992.

Melis C., Nuvoli L., Orrù G., *La valutazione di un problema di ottimizzazione*, EM, 1993, pp.109-122.

Melis C., Orrù G., Uselli E., *L'évaluation d'un problème d'optimisation: difficultés et essai*, Atti 45° inconto CIEAEM, pp.263-266.

Grugnetti L., *The Role of the History of Mathematics in an Interdisciplinary Approach to Mathematics Teaching*, ZDM (Karlsruhe), fasc.4, 1989, pp.133-138.

Grugnetti L., *A Importancia dos problemas*, Educaçao e Matematica (Lisboa), n.10, 1989, pp.3-6, 35.

Grugnetti L., *Problemi ed equazioni*, Atti del XIII Convegno UMI-CIIM, NUMI, suppl. al n.3, 1990, pp.49-61.

Grugnetti L., Orrù G., Susnik, G., Vannucci V., *Les programmes de mathématique: évolution en Italie*, Atti CIEAEM 41, Bruxelles 1989, pp.315-318.

Grugnetti L., *Le rôle difficile du professeur face à l'aspect dynamique de l'apprentissage*, Atti CIEAEM 42, Szozyrk (Polonia), 1990.

Grugnetti L., Mureddu Torres C., *The "power" of additive structure and difficulties in ratio concept*, Atti PME XV, Assisi 1991, pp.96-100.

Grugnetti L., *Language: an obstacle in understanding the problem statement of a world problem*, Atti CIEAEM 44, Chicago 1992, pp.164-172.

Grugnetti L., *Une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques*, PLOT, 1992, pp.17-21.

Grugnetti L., *De la recherche à la pratique scolaire: la problématique de l'évaluation*, Actes de la 45^e Rencontre CIEAEM, Cagliari 1993, pp.3-9.

Grugnetti L., *History and Didactics of Mathematics*, Atti del 1° Convegno Svizzero-Tedesco, Friburgo 1993.

Grugnetti L., *Relation between hystory and didactics of mathematics*, Proc. of the Eighteenth International Conference for the PME, Lisbon 1994, vol.1, pp.121-124.

Grugnetti L., *Il concetto di funzione: difficoltà e misconcetti*, EM, vol.1, n.3, 1994, pp.173-184.

Grugnetti L., *La storia della matematica nella didattica: riserva di spunti, metodologia esemplare, o scelta filosofica?*, Atti degli incontri con la matematica n.8, 1994.

Grugnetti L., Jaquet F., *Dai pesciolini rossi ai gemelli, la valutazione delle situazioni problematiche: quali sono gli elementi caratterizzanti e come strutturare una griglia che consenta di valutare diverse competenze*, VS, anno 49, 1994, pp.4-8.

Grugnetti L., Speranza F., *Teacher training in Italy: the state of art*, Proc. of the first Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, Modena, 1994, p.205-210.

Grugnetti L., Uselli E., *Quels instruments pour s'orienter dans l'espace?*, in corso di stampa sugli atti dell'incontro CIEAEM 46, Toulouse, 1994.

Montaldo O., *I compiti a casa servono?*, EM, 3, 1991, pp.173-184.

Montaldo O., *Le matematiche nell'era dei computers e della dissacrazione*, EM, 3, 1992, pp.193-198.

Montaldo O., *E' opportuno disciplinare la fantasia?*, EM, 1, 1992, pp.1-3.

Montaldo O., *Valutare è difficile*, EM, 1, 1994, pp.1-4.

Nocera C., Pinna M.P., *I linguaggi non verbali; resoconto di una esperienza nella scuola materna*, EM, (I Parte) n.3, 1990 - (II Parte) n.1, 1991.

Pinna M.P., *Approccio alla simmetria nella scuola materna*, EM, vol. 3, 1994.

Polo M., *Trasposizione didattica e teoria delle situazioni: solo concetti teorici? Note del traduttore*, EM, n.1, 1991, pp.77-90.

Polo M., *L'attività del CRSEM per la scuola elementare*, NUMI, suppl. al n.5, 1991.

Polo M., *Coordonnées Cartésiennes et Géométrie analytique. Le point de vue de la transposition didactique*, Seminaire n°144, Equipe Didatech, Grenoble, 1992.

Polo M., *Problèmes et problèmatiques: analyse d'une secance et questions thèoriques* (titolo provvisorio), in corso di stampa sugli Atti del Seminaire National de Didactique des Mathèmatiques.

Nucleo di Ricerca Didattica di CATANIA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Biagio Micale, Dipartimento di Matematica, viale A. Doria 6, 95125 Catania.*

Mammana C., *Il ruolo della Geometria*, IMSI, vol.13, n.8, 1990.

Mammana C., *Sui gruppi che determinano la "Geometria elementare" sulla retta, nel piano e nello spazio*, EM, Anno XI, Serie III, vol.1, suppl. al n.2, 1990.

Mammana C., Micale B., *Gruppi di trasformazioni geometriche e geometria elementare. I. Geometria della retta*, MD, n.1, 1991; *II. Geometria del piano*, MD, n.2, 1991; *III. Geometria dello spazio*, MD, n.3, 1991.

Mammana C., *Quando Euclide imperava*, La scuola si aggiorna, Nuova ERI - Ed. RAI, n.4, 1991.

Micale B., *Dall'abaco al computer*, La scuola si aggiorna, Nuova ERI - Ed. RAI, n.4, 1991.

Mammana C., *Un argomento di geometria sviluppato in ogni ordine di scuola: la retta*, in "La Matematica fra gli 8 e i 15 anni", AP, 1991.

Mammana C., *La storia della didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni*, Boll. Atti Accad. Gioenia di Scienze naturali, vol.25, 1992.
Micale B., *"Esercitazioni matematiche": una rivista ad uso degli studenti universitari*, IMSI, vol.15, n.6, 1992.
Mammana C., Micale B., *Quando due figure congruenti sono direttamente congruenti*, Boll. UMI, (7), 6-A, 1992.
Mammana C., Micale B., *Alcuni problemi sulle isometrie e le figure piane nell'insegnamento secondario*, MD, anno VI, n.3, 1992.
Mammana C., Micale B., *Una caratterizzazione delle similitudini del piano euclideo*, MD, n.4, 1994.
Pennisi M., *Triangles et moyennes*, Mathématique et Pèdagogie, 99, 1994, pp.21-26.
Mammana C., Micale B., *Le affinità piane*: I. *Il rapporto di segmenti corrispondenti*; II. *Il rapporto di angoli corrispondenti*; III. *Invarianti*; IV. *Sottogruppi e generatori*, in corso di pubblicazione su MD.
NRD di Catania e GRIM di Palermo (a cura di), *Matematici siciliani della prima metà del novecento e didattica della matematica: alcune testimonianze*, Dip. di Matematica, Univ. di Catania, 1991.

Nucleo di Ricerca Didattica di COSENZA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Salvatore Di Gregorio, Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, 87036 Arcavacata di Rende CS.*

Zumpano D., *Un progetto di Alfabetizzazione Informatica per la scuola elementare: fase di formazione degli insegnanti*, Tesi 1992.
Zicarelli E., *Un progetto di Alfabetizzazione Informatica per la scuola elementare: fase di sperimentazione in una classe*, Tesi 1993.

Nucleo di Ricerca Didattica di FERRARA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Carlo Morini, Dipartimento di Matematica, via Machiavelli 35, 44100 Ferrara.*

Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Simmetrie non lineari: le inversioni rispetto ad una circonferenza*, MD (1991), Anno V, n.2, pp. 25-31.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Generalizzazioni del concetto di inversione circolare*, MD (1991), Anno V, n.3, pp.30-35.

Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Il metodo delle trasformazioni nello studio della geometria*, VS (1991), n.5, pp.8-11.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Considerazioni didattiche sulle simmetrie assiali*, VS (1991), n.6, pp.14-17.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Rappresentazioni analitiche delle isometrie*, IMSI (1993), vol.16, n.8, pp.758-777.
Fiocca A., *La formazione dei giudici e dei notai d'argine a Ferrara*, in *La rinascita del sapere. Libri e maestri dello Studio ferrarese*, a cura di P. Castelli, Venezia, Marsilio, 1991, pp.367-384.
Fiocca A., *La diffusione della geometria descrittiva in Italia*, Boll. di Storia delle Scienze Matematiche, vol.XII, 1992, pp.187-249.
Mazzanti G., Piochi B., *Il principio di induzione*, IMSI (1991), vol.14, n.2, pp.107-136.

Istituto per la Matematica Applicata C.N.R. - GENOVA

Indirizzare le richieste di copie (per materiali non altrimenti reperibili) a: *I.M.A. - C.N.R. - Via De Marini, 6 - 16149 Genova.*

Pubblicazioni su riviste, atti di convegni, libri a livello internazionale.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *The process of naming in algebraic problem solving*, Proc. of PME 18, Vol. II, pp.40-47, Lisbona, 1994.
Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking, in Algebraic Learning*, Rend. del Seminario Matem. Univ. e Politecnico di Torino, vol.52, n.2, pp.105-125, 1994.
Boero P., Carlucci A., Chiappini G., Ferrero E., Lemut E., *Pupils' cognitive development through techological experiences mediated by the teacher*, Proc. IFIP WG 3.5 Conference "Exploring a New Partnership: Children, Taechers and Technology", Philadefia 1994. La versione finale verrà pubblicata in: *Exploring a New Partnership: Children, Taechers and Technology*, D.Benzie ed., Elsevier Science Publisher B.V., (North-Holland), IFIP WG3.5, 1994.
Bottino R.M., Chiappini G., Ferrari P.L., *Arithmetic Microworls in a Hypermedia System for Problem Solving*, in L. Burton and B. Jawrosky (eds.), *Technology in Mathematics Teching: A Bridge between Teaching and Learning*, Chartwell-Bratt Publishers, Selected Proceedings of TMT93 Conference, Birmingham (UK) (in corso di stampa).
Bottino R.M., Chiappini G., Ferrari P.L., *A hypermedia system for interactive problem solving in arithmetic*, di prossima pubblicazione sul Journ. of Educational Multimedia and Hypermedia, AACE.

Bottino R.M., Chiappini G., *ARI-LAB: models issues and strategies in the design of a multiple-tools problem solving environment*, Instructional Science, Kluwer Academic Publishers, (in corso di stampa).

Chiappini G., Lemut E., *External Representations in Grasping a Sense of a Problem*, Proc. First Italian-Spanish Research Symposium in Matematics Education, N.Malara e L.Rico eds., Modena, 1994.

Chiappini G., Dettori G., Lemut E., *Linguistic, planning, cultural deficiencies in problem solving with the computer*, Proc. of WG 17, ICME-7, Berlino (in corso di stampa).

Dettori G., Garuti R., Lemut E., Netchitailova L., *An analysis of the relationship between spreadsheet and algebra*, in L. Burton and B. Jawrosky (eds.), *Technology in Mathematics Teching: A Bridge between Teaching and Learning*, Chartwell-Bratt Publishers, Selected Proceedings of TMT93 Conference, Birmingham (UK), (in corso di stampa).

Dettori G., Lemut E., *Relating Effective Representations and Hypothesis Production in Arithmetic Problem Solving*, Proceedings CIEAEM 46, Toulouse, 1994 (in corso di stampa).

Dettori G., Lemut E., *External Representations in Arithmetic Problem Solving*, in: *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education*, R.Sutherland ed., NATO ASI Series F, Springer-Verlag (in corso di stampa).

Dettori G., Lemut E., Netchitailova L., *Spreadsheet: a tool toward Algebra?*, Rend. del Sem. Matem. e Politec. di Torino, vol.52, n.3, 1994 (in corso di stampa).

Forcheri P., Molfino M.T., *Knowledge based systems in mathematics education*, British Journal of Educational Technology, (in corso di stampa).

Forcheri P., Molfino M.T., *AI based tools in teaching/learning arithmetic*, Proc. of Intern. Symp. on Mathematics/Science Education and Technology, San Diego, USA, 1994.

Forcheri P., Molfino M.T., *Integrating new technology in mathematics teaching*, Proc. of 11th Intern. Conf. on Technology and Education, vol.II, London, U.K., 1994, pp.1131-1133.

Arzarello F., Chiappini G., Lemut E., Malara N., Pellerey M., *Learning Programming as a Cognitive Apprenticeship Through Conflicts*, in *Cognitive Models and Intelligent Environments for Learning Programming*, NATO ASI Series F, Springer-Verlag, vol. 111, 1993.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework*, Proc. of XVII PME Conf., pp.138-145, Univ. of Tsukuba, Japan, 1993.

Forcheri P., Molfino M.T., *Teaching pupils formal reasoning through analogies and differences*, Proc. of AI-ED93, Bma P., Ohlsson S., Pain H. (eds.), Edinburgh 1993, pp.193-200.

Forcheri P., Molfino M.T., *Technology as a tool to increase pupils' cognitive activity*, Proc. of 10th Intern. Conf. on Technology and Education, vol.II, Boston, USA, 1993, pp.975-977.

Bottino R.M., *Comparing Different Approaches to Programming from an Education Viewpoint*, Computers & Education, 18, n.4, Pergamon Press, 1992, pp.273-281.

Chiappini G., Lemut E., *Interpretation and contruction of computer-mediated graphics representations for the development of spatial geometry skills*, Proc. XVI PME Conf., Durham, NH, USA, 1992.

Forcheri P., Molfino M.T., *The design and evaluation of teaching experiments in computer science*, Education and Training Technology Int., vol.29, n.2, 1992, pp.94-104.

Forcheri P., Molfino M.T., *Formal Techniques in Higher Education: A proposal, in Computer Assisted Learning*, Tomek I. (ed.), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Germany, 1992, pp.212-224.

Forcheri P., Molfino M.T., *Knowledge based systems in primary school: a new insight into mathematics education*, Proc. of Ninth Intern. Conf. on Technology and Education, Paris 1992, pp.1593-1595.

Bottino R.M., Ferrari P.L., *Intelligent Learning Environments and Mathematics Knowledge from a Cognitive Perspective*, Proc. of Seventh Intern. PEG93 Conf., Edinburgh, 1993, Vol.I, pp.116-123.

Bottino R.M., Chiappini G., *ARI-LAB: Models, issues and strategies in the design of a hypermedia problem solving system*, Proc. of Seventh Intern. PEG93 Conf., Edinburgh, 1993, Vol.II, pp.409-420.

Bottino R.M., Chiappini G., Ferrari P.L., *Hypermedia and communication: a challenge for interactive learning in mathematics*, in H. Maurer (ed.): *Educational Multimedia and Hypermedia Annual*, Proc. of ED-MEDIA 93 World Conf. on Educational Multimedia and Hypermedia, AACE, Charlottesville, VA, 1993, pp. 83-90.

Bottino R.M., Forcheri P., Molfino M.T., *Teaching of Linear Regression Models at Secondary School Level*, in M. Niss, W. Blum, I. Huntley (eds.), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, Ellis Horwood, London, 1991, pp.203-212.

Chiappini G., Lemut E., *Construction and interpretation of algebraic models*, Proc. of Intern. Conf. PME XV, Assisi 1991.

Chiappini G., Lemut E., Parenti L., *Analysis of the behaviour of Mathematics Teachers in problem Solving with the Computer*, Proc. of Intern. Conf. PME XV, Assisi 1991.

Forcheri P., Molfino M.T., *Designing a knowledge based learning environment for arithmetic concepts*, Computers and Education, Pergamon Press l.t.d., Great Britain, vol.16, n.2, 1991, 143-151.

Forcheri P., Molfino M.T., *MEMO: an educational environment for manipulating mathematical objects*, Proc. of Nordic Conf. on Computer Aided Higher Education, Otaniemi, Finland, 1991, pp.152-161.

Forcheri P., Molfino M.T., *Theopro: an automatic theorem prover for mathematical education*, Proc. of Intern. Conf. on Computer Aided Learning in Science and Engineering, Lausanne 1991, pp.201-208.

Bottino R.M., Forcheri P., Molfino M.T., *Teachers' courses for Prolog teaching*, Abstracts of WCCE90, 1990, pp.59-60.

Chiappini G., Lemut E., Martinelli A.M., *On the problem solving with the computer: Analysis of Difficulties and Requirements*, in *Computers in Education*, A.McDougall and C.Dowling eds., Elsevier Science Publisher B.V., (North-Holland), IFIP 1990.

Chiappini G.P., Laviosa L., Parenti L., *Enseignants et formateurs d'enseignants face au defi informatique: analyse d'une experience*, Proc. of CIEAEM 42, pp.83-91, Poland, 1990.

Chiappini G., Conte M.P., *Ambiente di rete telematica per lo sviluppo cognitivo in bambini audiolesi inseriti nella scuola dell'obbligo*, Golem anno II, n.3, 1990, pp.9-11.

Pubblicazioni su riviste, atti di convegni, libri a livello nazionale

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *L'algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche per la scuola dell'obbligo*, Prog. CNR, Collana Innovazioni Didattiche, Quad. n.6, 1994.

Bottino R.M., Chiappini G., Belzuino Z., *ARI-LAB sistema Ipermediale per il problem solving aritmetico*, Pubbl. dell'Ist. per la Matem. Applicata, C.N.R., 1994.

Bottino R.M., Chiappini G., Dettori G., Lemut E., *Risultati di una sperimentazione del sistema ARI-LAB in una classe seconda elementare*, Pubbl. I.M.A., n.9, 1994.

Bottino R.M., Chiappini G., *Technology and learning: theoretical approaches and practical findings from a project on computer mediated communication with deaf children*, Pubbl. I.M.A., n.11, 1994.

Bottino R.M., Chiappini G., *Interazione sociale e pratiche collaborative mediate dal calcolatore nel problem solving aritmetico*, Tecnologie Didattiche, n.4, 1994, pp.64-71.

Bottino R.M., Chiappini G., Buono E., *Problem solving aritmetico con il sistema ARI-LAB*, in A. Andronico, G. Casadei, G. Sacerdoti (eds.), *Software Didattico '94: documentazione ed esperienze*, A.I.C.A., Clueb, Bologna, 1994, pp. 25-33.

Belzuino Z., Bottino R.M., Chiappini G., Ferrrari, P.L., *ARI-LAB: un sistema ipermediale e di comunicazione per il problem solving in aritmetica*, in A. Andronico ed Al. (eds), *Atti Didamatica '93*, AICA, Genova, 1993, pp.35-47.

Bottino R.M., Buono E., Chiappini G., *Problem Solving Aritmetico e Tecnologie Ipermediali: Analisi di una sperimentazione con Bambini sordi*, Atti del 3° Conv. Naz. "Informatica, Didattica e Disabilità", Torino, 1993.

Bottino R.M., Martelli M., Del Zanno G., *Logic Programming Applications*, Pubbl. del Prog. Finalizzato Informatica e Calcolo Parallelo, Sottoprog. 4, n.R/4/103, 1993.

Bottino R.M., Forcheri P., Molfino M.T., *Informatica integrata nel corso di matematica: un itinerario didattico per il triennio della scuola secondaria superiore*, Quad. 9 del GREMG, 1993.

Forcheri P., Molfino M.T., *Sistemi basati sulla conoscenza nell'insegnamento della matematica*, Atti del Congresso A.I.C.A., 1993, pp.953-965.

Bottino R.M., *Appunti Introduttivi sui Sistemi Esperti*, Pubbl. I.M.A., n.2/92, 1992.

Boero P., Carlucci A., Chiappini G., Ferrero E., Lemut E., *Analysis of classroom experiences on automatic processes as cultural "objects" suitable to force pupils' cognitive development*, Pubbl. IMA, n.10/91, 1991.

Chiappini, Conte, Cosma, Lowemberger, *Comunicazione per mezzo di calcolatori collegati tramite modem e sviluppo cognitivo dei bambini sordi*, Atti del 2° Conv. Naz. Informatica, Didattica e Disabilità, pp.122-135, Pisa, 1991.

Chiappini, Conte, Cosma, De Mola, Lowemberger, *Progetto di rete telematica per alunni sordi*, Pubbl. IMA n.4/91.

Chiappini G., Lemut E., Parenti L., *Evolution of pupils' and teachers' conceptions and of their cognitive behaviours in the domain of information technology*, Pubbl. IMA, n.11/91, 1991.

Chiappini G., Bagnara C., *Computer e LIS nell'educazione del bambino sordo*, Video atti del Conv. Naz. "Linguaggio e sordità", Roma, 1991.

Chiappini G., *Acquisizione del concetto di variabile in campo matematico e informatico*, Pubbl. IMA n.8/90.

Forcheri P., Molfino M.T., *Il ruolo del software nell'educazione matematica*, in *Matematica Oggi: dalle idee alla scuola*, F.Furinghetti (ed.), B. Mondadori, 1990, pp.125-138.

Nuclei di Ricerca Didattica di GENOVA

(Dipartimento di Matematica - Scuola secondaria superiore)

Indirizzare le richieste di copie (per materiali non altrimenti reperibili) a:
Prof. Fulvia Furinghetti (nucleo GREMG) o Prof. Carlo Dapueto (nucleo MACOSA), Dipartimento di Matematica, via L.B. Alberti 4, 16132 Genova.

Barra M., Fasano M., Ferrari M., Furinghetti F., Malara N., Speranza F. (editors), *Some Italian contributions in the domain of the psychology of* *mathematics education*, Dip. Matematica Univ. di Genova, 1991.

Barra M., Fasano M., Ferrari M., Furinghetti F., Malara N., Speranza F. (editors), *Italian research in mathematics education: common roots and present trends*, Quaderno T.I.D. - C.N.R., serie F.M.I., 1992, n. 12.

Bosco A, Dapueto C., Gaggero M., Mortola C., Tiragallo G., *La geometria nel biennio della scuola secondaria superiore*, parte 1ª e parte 2ª, IMSI (di prossima pubbl.).

Bottino R. M., Forcheri P., Furinghetti F., Molfino M. T., *Mathematics and computer in upper secondary school: an outlook on experiences and opportunities*, presentato a ICME 7, Quebec, 1992, di prossima pubbl. sul volume edito da K.D. Graf relativo ai lavori del WG.17.

Bottino R. M., Forcheri P., Furinghetti F., Molfino M. T., *Computer science in mathematics curriculum: what after the first elements of literacy?*, in Knierzinger A., Moser M. (editors), *IFIP open conference* (Gmunden), 1993, part VIII, pp.1-4.

Bottino R. M., Furinghetti F., *The emergenging of teacher's conception on new topics inserted in mathematics programs: the case of computer science*, presentato a ICME 7, Quebec, 1992, di prossima pubbl. sul volume edito da K.D. Graf relativo ai lavori del WG.17.

Bottino R. M., Furinghetti F., *The problem of student evaluation in changed curricula*, in Estes, N., Thomas, M. (editors), *Proc. of the ninth International Conference on Technology and Education* (Paris), 1992, v.3, pp.1637-1639.

Bottino R. M., Furinghetti F., *Teacher training, problems in mathematics teaching and the use of didactic pakages*, in Tilson, J., Warson, D. (editors), *Proc. of IFIP Working Group 3.1* (Barcellona), 1994, in stampa.

Bottino R. M., Furinghetti F., *Teaching mathematics and using computers: links between teachers, beliefs in two different domains*, in Ponte J. P., Matos J. F. (editors), *Proc. of PME XVIII* (Lisbona), 1994, v.2, pp.112-119.

Cambiaso D., Lapegna D., Rimassa L., *Mathcad: una proposta per il laboratorio di matematica*, in Andronico A., Casadei G., Sacerdoti G. (editors), *Software didattico '94*, CLUEB, Bologna, 1994, pp.135-153.

Chiarugi I., Fracassina G., Furinghetti F., Paola D., *Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe*, IMSI, in stampa.

Chiarugi I., Furinghetti F., Martini D., Paola D., *Geometria nel biennio: modi diversi di avvicinarsi al problema*, in *Atti del III internuclei Scuola sec. sup.*, Parma, 1992.

Dapueto C., *La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica*, in F.Furinghetti (a cura di), *Atti del 2° internuclei scuola secon. sup.*, C.N.R. - Progetto T.I.D., quad. 13, 1992, pp.19-51.

Dapueto C., *Calcolatore e insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore*, Atti del XV Conv. UMI-CIIM, NUMI, suppl. n.5, 1993, pp.159-167.

Dapueto C. (a cura di), *MaCoSa, vol.1 - Guida per gli insegnanti*, Rapporto Tecnico, Dip. di Matem. dell'Univ., Genova, 1994.

Dapueto C., Furinghetti F., *Un'esperienza di lettura critica dei Nuovi Programmi di Matematica per il primo biennio della scuola secondaria superiore*, Insegnare, n.11-12, 1992, pp. 38-40.

Dapueto C., Ghio S., Pesce G., *Relazione del gruppo di lavoro "Statistica e Probabilità nel biennio: nodi culturali e didattici da affrontare"*, in "Atti del XVI Convegno dell'U.M.I.-C.I.I.M., NUMI, suppl. n.7, 1994, pp.105-114.

Dapueto C., Ghio S., Pesce G., *Statistica e Probabilità nel biennio: nodi culturali e didattici da affrontare*, parte 1ª e parte 2ª, IMSI, vol. 17 B, n.4, 1994, pp.309-316, 357-384.

Dapueto C., Greco S. (a cura di), *Calcolatore e insegnamento della matematica*, Rapporto Tecnico del NRD MaCoSa, Dip. di Matem. dell'Univ., Genova, 1991.

Furinghetti F. (editor), *Proceedings of the P.M.E. 15*, Assisi 1991, 3 voll..

Furinghetti F., Paola D., *On some obstacles in understanding mathematical texts*, in *Proc. of the P.M.E.* 15, Assisi, 2, 1991, pp.56- 63.

Furinghetti F., *Costruzione di curricula. Insegnanti. Dimostrazione*, in *Sunti delle comunicazioni del XIV Congresso U.M.I.*, Catania 1991.

Furinghetti F., *Che cosa resta e che cosa dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica*, MD, 7 (1993), pp.302-328.

Furinghetti F. (editor), *Definire argomentare, dimostrare. Atti del secondo internucleo scuola secondaria superiore*, Genova 1991, Quaderno TID - CNR, serie FMI, 1992, n.13.

Furinghetti F., *Luci ed ombre nell'approccio "intuitivo", Atti del 2° internuclei scuola secondaria superiore*, C.N.R. - Progetto T.I.D., quad.13, 1992, pp.83-96.

Furinghetti F., *The ancients and the approximated calculation: some examples and suggestions for the classroom*, The mathematical gazette, 1992, pp.71-74.

Furinghetti F. (a cura di), *La bellezza della matematica. Proposte di letture di area matematica per una biblioteca comunale*, Comune di Modena, 1992.

Furinghetti, F., *Insegnare matematica in una prospettiva storica*, EM, n.3 (1993), pp.123-134.

Furinghetti F., *History and mathematics teaching in Italy: a glorious past, an uncertain present, a promising future*, in *Proc. of first UEE*, Montpellier 1993, in stampa.

Furinghetti F., *Educazione matematica e storia, LP*, n. 9, 1993, pp.38-39.

Furinghetti F., *Images of mathematics outside the community of mathematicians: evidence and explanations*, For the learning of mathem., 13, 1993, n.2, pp.33-38.

Furinghetti F., *Mathematics teachers and changes in curricula: problems of reshaping beliefs and attitudes*, in Malara N. A. & Rico L. (editors) *Proc. of the first Italian-Spanish Symp. in mathematics education*, Modena, 1994, pp.173-180.

Furinghetti F., *Tendenze della ricerca sull'insegnamento-apprendimento dell'analisi*, in Piochi B. (a cura di) *Atti del 4° internuclei scuola sec. sup.*, Siena 1994.
Furinghetti F., *Una storia infinita: la ricerca di "un senso comune" nell'insegnamento della matematica*, in B. D'Amore (editor), *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, 1994, pp.161-162.
Furinghetti. F., *Informatics technology and mathematics education: past and future of a peculiar relation*, in Bazzini L. & Steiner H.G. (editors), *Proc. of the second German-Italian bilateral Symposium on didactics of mathematics* (Georgemarienhutte, 1992), 1994, pp.203-222.
Furinghetti F., *L'algebra nella scuola secondaria superiore: discussione di qualche problema di insegnamento-apprendimento*, in B. D'Amore (editor) *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, 1994, pp.37-45.
Furinghetti F., *Ghosts in the classroom: beliefs, prejudices and fears*, in Bazzini L. (editor); *SCTP* (Grado, 1994), in stampa.
Furinghetti F., Paola D., *The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students' concept images (ages 16-19)*, in Warbecq A. (editor), *Proc. of the 41st CIEAEM's meeting*, Bruxelles 1991, pp.167-177; e in *International journal of mathematical education in science and technology*, 22, n.5, 1991, pp.719-729.
Furinghetti F., Paola D., *Parameters, unknowns and variables: a little difference?*, in Ponte J. P. & Matos,J. F. (editors) *Proc. of PME XVIII* (Lisbona), v.2, 1994, pp.368-375.
Furinghetti F., Robinson B., *Rapporto del Focus Group "Teachers and training"*, in Tilsen J. & Watson D. (editors), *Proc. of IFIP Working Group 3.1* (Barcellona), in stampa.
Furinghetti F., Somaglia, A., *Evaluating the teaching process by the teachers themselves: an example of realization*, in Grugnetti L. (editor), *Proc. of 45th CIEAEM meeting*, Cagliari, 1993, pp.144-151.
Furinghetti F., Somaglia A. M., *Uno studio longitudinale sulla funzione*, in Piochi B. (a cura di), *Atti del 4° internuclei scuola sec. sup.*, Siena 1994.
Furinghetti F., Somaglia A., *Functions in algebraic and graphical environments*, in Antibi A. (editor), *Proc. of CIEAEM 46* (Toulouse, 1994).
GREMG, Quaderno dieci, *Informatica nel corso di matematica: come e perché* (Cambiaso D.), 1994.
GREMG, Quaderno nove, *Informatica integrata nel corso di matematica: un itinerario didattico per il triennio della scuola secondaria superiore* (Bottino R. M., Forcheri P., Molfino M. T.), Genova 1993.
GREMG, Quaderno otto, *Temi di logica per il triennio dei licei sperimentali in un corso tradizionale* (Paola D.), 1993.
Gruppo didattico MaCoSa, *MaCoSa: Matematica per Conoscere e per Sapere, vol. 1*, Casa Editrice Maggi, Ceranesi, 1994
Paola D., *Sottile è il Signore, ma non malizioso. Proposta di letture di fisica*, Comune di Modena, 1993.
Paola D., *Aspetti paradossali della probabilità*, MD, n.3, 1994, pp.245-256.
Paola D., *Grafici di funzioni con l'ausilio di Microcalc*, in Andronico A., Casadei G., Sacerdoti G. (editors), *Software didattico '94*, CLUEB, Bologna, 1994, pp.175-184.

Nucleo di Ricerca Didattica di GENOVA
(Gruppo di ricerca sulla didattica della matematica e la formazione scientifica nella scuola dell'obbligo)

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Paolo Boero, Dipartimento di Matematica, via L.B. Alberti 4, 16132 Genova.*

A) lavori pubblicati su Riviste a diffusione almeno nazionale o Atti di Convegni a carattere almeno nazionale.

Boero P., *Learning of mathematical modelling and reality: the intermediating role of language and culture*, Proc. TME - VI, IDM Bielefeld, 1991.
Boero P., *Aspetti generali e specificità disciplinari della ricerca in didattica della matematica: i casi della matematica e della lingua*, Atti Convegno "Verso il 2000: università è ricerca educativa", Salerno 1991.
Boero P., *Sulla specificità delle ricerche in didattica della matematica: il caso del formalismo algebrico*, IMSI, 1992.
Boero P., Szendrei J., *The problem of motivating pupils to learn mathematics*, Proc. CIEAEM-44, Chicago, 1992.
Boero P., *The crucial role of semantic fields in the development of problem solving skills*, in J.P. Pedro Ponte et al. (eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, Springer - Verlag, 1992.
Boero P., *Il trucco è l'òperazione*, VS, 1992.
Boero P., *Razionalizzazione del reale, modellizzazione matematica e costruzione del sapere matematico: esempi e riflessioni*, Atti del Convegno "La matematica tra 7 e 15 anni", Castel San Pietro, 1992.
Boero P., *Linguaggio verbale, matematica ed informatica da 7 a 14 anni*, Atti del Convegno "La matematica tra 7 e 15 anni", Castel San Pietro, 1992.
Boero P., *Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11*, Proc. II German - Italian Joint Symposium on Mathematics Education, Osnabruck 1992 (in corso di stampa).
Boero P., Shapiro L., *On some factors influencing students' solutions in multiple operations problems: results and interpretations*, Proc. PME-XVI, Durham, 1992.

Boero P., *Libri di testo e matematica*, VS, 1993.
Boero P., Bondesan M.G., *Assessing Mathematical Potentialities in the "Zone of Proximal Development"*. Proc. CIEAEM-45, 1993.
Boero P., *Situations didactiques et problèmes d'apprentissage:convergences et divergences dans les perspectives de recherche*, Actes du colloque intern. "Vingt ans de didactique des mathèmatiques en France", Paris, 1993, Ed. La Pensée Sauvage.
Boero P., *About the Role of Algebraic Language in Mathematics and Related Difficulties*, Proc. of the International Workshop on the Algebraic Language, Institute of Education, London 1993 (to appear).
Boero P., *The "transformation" function of the algebraic code*, Proc. WALT, Torino 1992; Rend. dell'Univ. e del Politecnico di Torino, vol. 52, 1994.
Boero P., Ferrero E., *Interplay between Classroom Practice and Theoretical Investigation: a Case Study Concerning Hypotheses in Elementary Mathematical Problem Solving*, Proc. SCTP-VI, Grado, 1994 (in corso di stampa).
Boero P., Ferrero E., *Production and management of hypotheses in elementary mathematical problem solving*, Proc. of the First Italian - Spanish Research Symposium in Mathematics Education, Modena, 1994.
Boero P., Garuti R., *Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements*, Proc. PME-XVIII, Lisboa, 1994.
Boero P., *Padronanza dei numeri decimali e delle operazioni con i numeri decimali alla fine della scuola elementare e all'inizio della scuola media*, in *Numeri e proprietà*, Atti I° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore, 1994.
Boero P., Ferrari P.L., Ferrero E., Shapiro L., *Some Aspects Regarding the Social Construction of Hypotheses in Primary School Mathematics Classes*, Journal of Mathematical Behaviour, 1994.
Bondesan M.G., Ferrari P.L., *The active comparison of strategies in problem-solving: an exploratory study*, Proc. PME-XV, Assisi, 1991.
Bondesan M.G., *Diagnosi e sviluppo della progettualità nel primo ciclo con bambini che presentano difficoltà di apprendimento: riflessioni ed esperienze*, in Atti Convegno Castel San Pietro: "Handicap e svantaggio", Pitagora, 1993.
Bondesan M.G., *Uso di tematiche economiche per la diagnosi e lo sviluppo dell'autonomia di bambini/e con difficoltà di apprendimento: un'esperienza in III elementare*, in Atti Convegno Castel San Pietro, Pitagora, 1994 (in stampa).
Chiappini G., Laviosa L., Parenti L., *Enseignants et formateurs d'enseignants face au defi informatique: analyse d'une experience*, Proc. of CIEAEM 42, Bielsko Biala-Poland, 1990.
Chiappini G., Parenti L., *Insegnanti, didattica, calcolatore: analisi di una esperienza di aggiornamento rivolta ad insegnanti di matematica della scuola media*, IMSI, 1991.
Chiappini G., Molinari M., *Il problema della "sospensione dei significati" e l'approccio alle operazioni con i numeri relativi*, in *Numeri e proprietà*, Atti I° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore, 1994.

Ferrari P.L., *Il confronto attivo di strategie nella risoluzione dei problemi*, XIV Congresso UMI, sunti delle comunicazioni, Catania, 1991.
Ferrari P.L., *Problemi di primo apprendimento della matematica con soggetti portatori di handicap psicofisici lievi o medi*, Pedagogia Clinica, 1991.
Ferrari P.L., *Aspects of hypothetical reasoning in problem solving*, in J.P.Pedro Ponte et al. (eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, Springer - Verlag, 1992.
Ferrari P.L., *Problem solving in geometrical setting: interactions between figure and strategy*, Proc. PME XVI, Durham, 1992.
Ferrari P.L., *The constructivist paradigm and the philosophy of mathematics*, Actes de l'Univ. d'Eté sur l'Histoire des Mathém., Montpellier, 1993 (in stampa).
Ferrari P.L., *Drawings, Microworlds and Geometry Learning*, Proc. of CIEAEM 46, Toulouse, 1994.
Ferrero E., *Sull'insegnamento-apprendimento di alcuni connettivi*, IMSI, 1991.
Garuti R., Boero P., *A sequence of proportionality problems: an exploratory study*, Proc. PME XVI, Durham, 1992.
Garuti R., Boero P., *Mathematical modelling of the elongation of a spring: given a double length spring....*, Proc. PME XVIII, Lisboa, 1994.
Gazzolo T., Rubini C., *Approccio ai numeri decimali e alle operazioni con i numeri decimali nel secondo ciclo della scuola elementare: proposte su come dare la precedenza ai significati e al ragionamento*, in *Numeri e proprietà*, Atti I° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore, 1994.
Parenti L., *Genetica: dall'esposizione alla costruzione dei modelli, evoluzione di una proposta didattica*, Atti XVI Convegno UMI-CIIM, Civitanova Marche, 1993.
Parenti L., Tizzani P., *Quelques hypothèses pour interpréter les difficultés qui se présentent dans la représentation plane de situations spatiales et leur implications pour ce qui est de l'enseignement*, Proc. CIEAEM 46, Toulouse, 1994 (in stampa).
Parenti L., Tizzani P., *Analyse de certaines représentations planes de situations dans l'espace*, Atelier, in Proc. CIEAEM 46, Toulouse, 1994 (in stampa).
Scali E., *Scelte a lungo termine sul problem solving per un caso ai confini con l'handicap*, Atti Conv. "Handicap e svantaggio", Castel San Pietro, Pitagora 1993.
Scali E., *Costruzione dei significati dei numeri naturali in prima elementare: il ruolo dei "campi di esperienza" e la funzione mediatrice dell'insegnante*, in *Numeri e proprietà*, Atti I° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore, 1994.
Scali E.,*"Economia" come terreno di scelte didattiche mirate alla conquista dell'autonomia*, in Atti Conv. Castel San Pietro "Handicap e svantaggio", Pitagora, (in stampa).
Scali E., *Le rôle du dessin dans la modélisation géométrique élémentaire des*

phénomènes astronomiques, Proc. CIEAEM 46, Toulouse, 1994 (in stampa).

Scali E., *Analyse de certains aspects du rôle du dessin dans la modélisation géométrique élémentaire des phénomènes astronomiques*, atelier, in Proc. CIEAEM 46, Toulouse, 1994 (in stampa).

Sibilla A., *Uso della storia della matematica per approfondire e sistemare le conoscenze matematiche nella scuola media*. Atti del Conv. "La matematica tra 7 e 15 anni", Castel San Pietro, 1992.

Sibilla A., *Riflessioni ed esperienze sull'uso della storia della matematica per l'insegnamento della matematica nella scuola media*, IMSI, vol.14, 1991.

Sibilla A., *Approccio alla costruzione degli enunciati, alle dimostrazioni e al formalismo algebrico attraverso lo studio di alcune proprietà nell'insieme dei numeri naturali*, in *Numeri e proprietà*, Atti I° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore, 1994.

B) Altre pubblicazioni.

Il Nucleo pubblica ogni 2-3 anni, presso il Centro Stampa del Dipartimento di Matematica, Rapporti Tecnici relativi ai Progetti di insegnamento integrato della matematica nella scuola elementare e nella scuola media; pubblica inoltre dossier e quaderni (in italiano) relativi alle attività di sperimentazione e ricerca sui temi che costituiscono oggetto delle ricerche a cui si riferiscono i lavori dell'elenco precedente.

Nucleo di Ricerca Didattica di LECCE

Indirizzare le richieste di copie a: *Dipartimento di Matematica, Università, via Provinciale Lecce, Arnesano c.p. 193, 73100 Lecce.*

Iacomella A., *Valori Culturali della Matematica nella formazione del futuro diplomato della Scuola Secondaria Superiore*, IMSI 12, n. 2 (1989), pp.326-331.

Iacomella A., *Collaborazione tra Università e Scuola Secondaria Superiore. Problemi culturali e didattici nei nuovi programmi di Matematica ed Informatica per la Scuola Secondaria Superiore. Aggiornamento, Ricerca e Sperimentazione*, su Q. 3 (1990): *Seminari di Didattica A.A. 1988/89* , pp.5-25.

Iacomella A., *Interazione tra rappresentazioni e linguaggi in Matematica - Aspetti didattici*, Q.1 (1992): *Seminari di Didattica A.A. 1990/91 e 1991/92*, pp.83-110.

Margiotta P., *Sostituzioni e cubiche in una prima media: una proposta didattica*, IMSI, 13, n.4 (1990), pp.427-438.

Margiotta P., *Un'esperienza con le sostituzioni nella Scuola Media*, MD, anno 5, n.2, 1991, pp.32-36.

Margiotta P., *Le sostituzioni in un'ottica interdisciplinare*, EM 12 (3) Vol. 2 (1991), pp.23-44.

Margiotta P., *Il ruolo delle sostituzioni nell'insegnamento/apprendimento*, su Q.1 (1992): *Seminari di Didattica A.A. 1990/91 e 1991/92*, pp.111-124.

Nortier M., *Un'esperienza sul calcolo combinatorio*, IMSI., vol.14, n.5, 1991, pp.437-458.

Micol G., *I problemi impossibili*, MD, 5, n.4, 1991, pp.45-48.

Barnaba A., Barnaba M., Peluso A., Russo G., *Problemi didattici del concetto di uguaglianza*, EM, 13 (3) vol.3, n.1 (1992), pp.6-16.

Barnaba A., Barnaba M., Peluso A., Russo G., *Identità ed equazioni*, presentato a EM.

Berenzi A., Berenzi G., *L'uso delle variabili e dei quantificatori*, presentato a NS.

Marchini C., *Dall'insiemistica alla teoria degli insiemi II. (I Naturali di Von Neumann)*, MD, n.1, 1989, pp.22-28.

Marchini C., *Modelli e Logica* IMSI, 12, n.2 (1989), pp.187-192.

Marchini C., *Logica proposizionale nella scuola*, MD, n.2 (1989), pp.28-37.

Marchini C., *Aspetti didattici del calcolo dei predicati*, MD, n.3 (1989), pp.23-35.

Marchini C., *Le sostituzioni e la didattica della Matematica*, Boll. UMI (7) 4, A (1990), pp.145-153.

Marchini C., *Le sostituzioni e le relazioni*, IMSI, 13, n.7 (1990), pp.732-744.

Marchini C., Morini G., *Moltiplicazione e divisione in prima elementare*, SIM, 99, n.9, 1990, pp.62-63.

Marchini C., Chirenti A., *Alla scoperta delle soluzioni di un problema di aritmetica mediante calcolatore*. su: *Computer Perché - Introduzione delle nuove tecnologie nella scuola* (a cura di R. Bortone, Ed. Milano, Maglie, 1990.

Marchini C., Micol G., *Operare con le traslazioni*, ED 37, n.23, 1990, pp.4-7.

Marchini C., *La Logica Matematica nell'Insegnamento - Alcune riflessioni*, su Q. 3 (1990): *Seminari di Didattica A.A. 1988/89*, pp. 26-55.

Marchini C., Iacomella A., *Riflessioni sul problema della misura*, PM, 66 (VI), n.4, 1990, pp.28-52.

Marchini C., *Il problema dell'area*, in stampa su PM.

Marchini C., *La semidivisione*, AR, 42, n.4, 1990, pp.189-213.

Marchini C., *Tabelline che passione!* , MD Anno 5, n.1, 1991, pp.46-51.

Nucleo di Ricerca Didattica di MILANO

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Gabriele Lucchini, Dipartimento di Matematica, via Cesare Saldini 50, 20133 Milano.*

Castagnola E., Citrini Cariboni L., Lucchini G., *BDRDM e altri dischetti per* *personal computer MS-DOS liberamente duplicabili al XIV Congresso UMI*, Sunti delle comunicazioni, 1991, p. 287.

Citrini L., *Strane geometrie*, RES Cose di oggi a scuola, 1993, n.5.

Citrini L., Castagnola E., Impedovo M., *La matematica - Strutture, libro di testo per il triennio del liceo scientifico*, Einaudi, in stampa.

Citrini L., Castagnola E., Impedovo M., *La matematica - Funzioni, libro di testo per il triennio del liceo scientifico*, Einaudi, in stampa.

Davoli A., *Interventi educativi per soggetti con difficoltà di apprendimento in matematica*, PV, 1993, n.6.

Davoli A., Manara M.A., *Proposte per l'insegnamento della matematica a soggetti con difficoltà*, QDF, n.1, 1993.

Davoli A., Panceri A., *Strategie risolutive di semplici problemi numerici nell'esperienza quotidiana, in soggetti che presentano difficoltà di apprendimento*, in *Matematica e difficoltà: insegnare la matematica ad allievi in difficoltà*, Bologna, Pitagora, 1993.

Dedò M., *Il rigore nell'insegnamento pre-universitario*, IMSI, v.16 nn.5-6 (1993), pp.461-468.

Dedò M., *Matematica descrittiva e matematica artigianale*, IMSI, v.16 nn.5-6 (1993), pp.469-483.

Dedò M., *Omissioni, errori ed inopportunità didattiche*, IMSI, v.16 nn.5-6 (1993), pp.484-496.

Impedovo M., *L'algoritmo di Sturm*, LP, n.10 (1993).

Impedovo M., *Matematica e astronomia*, LP, n.11 (1994).

Impedovo M., *L'algebra a scuola. Come e quando*, Quad. di didattica PRISTEM, 1994.

Lucchini G., *Poliedri regolari e scuola dell'obbligo*, SS, n.76, pp.19-21 e n.78 pp.23-24 (1991).

Lucchini G., *Dati sulle edizioni originali delle "Grundlagen der Geometrie" di D. Hilbert*, Atti del "Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza", Dip. di Matem., Bologna, 1992, pp.101-110.

Lucchini G., *La Matematica in prove di selezione per l'ammissione a corsi di laurea: un'occasione per riflettere*, MD, a. 6, n.4 (1992), pp.18-22.

Lucchini G., *Banca Dati Ricerca Didattica Matematica, ASIM e IAMSI, oggi e domani*, Suppl. al NUMI, 1993, pp.149-153.

Lucchini G., *Funzione docente, professionalità docente e fondamenti della professione di docente di Matematica*, QDF, n.1, 1993, pp.57-78.

Lucchini G., *Matematizzazione e de-matematizzazione*, Seminari di didattica, Quad. del Dip. di Matem. dell'Univ. di Lecce, 1993, pp.145-163.

Lucchini G., *Su alcuni aspetti della terminologia degli Elementi di Euclide*, Scritti in onore di Giovanni Melzi, Milano, VP, 1994, pp.255-283.

Lucchini G., *Didattica del nel col computer*, Atti del Convegno "Il computer nella didattica", Roma, EDAV srl, in stampa.

Lucchini G., *Le immagini materiali nell'insegnamento della Geometria*, Atti del Conv. "Scuola 2000 - Insegnare con l'immagine - una metodologia", Roma, EDAV srl, in stampa.

Lucchini G., *Problemi sull'età del capitano*, SS, in stampa.

Manara C.F., *Problemi filosofici della geometria in Ruggero Giuseppe Boscovich*, Rend. dell'Istituto Lombardo, 123 (1989).

Manara C.F., *Quella sfida che di continuo si rinnova - Lo sviluppo delle scienza e la stella polare della verità*, Avvenire, 24 gennaio 1990.

Manara C.F., *Le basi della matematica*, Avvenire, 28 marzo 1990; La voce del CNADSI, a. 27, n.8 (1990).

Manara C.F., *La storia delle scienze al servizio della didattica delle scienze*, IMSI, v.14, nn.11-12 (1991).

Manara C.F., *L'insegnamento della matematica nella scuola elementare in Italia*, PV, 1992, n.4, pp.7-19.

Manara C.F., *L'assiomatica classica e moderna*, NS, a. IX, n.10 (1992), pp.36-41.

Manara C.F., Intervento scritto per il conv. su handicap e difficoltà di apprendimento di Castel San Pietro, *Matematica e difficoltà*, 1, Bologna, Pitagora, 1992, pp.91-94.

Manara C.F., *I valori educativi e formativi dell'insegnamento delle scienze esatte*, PV, 1993, n.2.

Manara C.F., *Rappresentazione geometrica di parole*, Ratio mathematica, 1993, n.6, pp.79-83.

Manara C.F., *Maturità scientifica (risoluzione del tema e commento)*, NS, a.X, n.7 (1993), pp. 75-77.

Manara C.F., *L'impiego dei "tests" in matematica*, NS, a. XI, n.1 (1993), pp.37-40.

Manara C.F., *Il calcolo approssimato*, NS, *I*: n.3, 1993, pp.77-80; *II*: n.5, 1994, pp.71-72.

Manara C.F., *Introduzione a "ripensando l'educazione matematica" di Hans Freudenthal*, La Scuola, Brescia 1994 (anche traduzione).

Manara C.F., *Il concetto di "astrazione" in matematica*, SIM, 1994, pp.24-27.

Manara C.F., *Un sistema di assiomi per un continuo unidimensionale chiuso*, Scritti in onore di Giovanni Melzi, Milano, VP, 1994, pp.285-300.

Manara C.F., *Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria*, IMSI, v.17B, n.3 (1994), pp.283-295.

Manara C.F., *Metodi della Geometria nel secolo XIX*, IMSI, v.17B, n.4 (1994), pp.385-394.

Manara C.F., Marchi M., *Il commento (a Matematica e Informatica per il biennio)*, NS, a.IX, n.8 (1992), pp.24-26.

Manara C.F., Marchi M., *L'insegnamento della matematica nei primi due anni della scuola secondaria superiore*, La Scuola, Brescia 1993.

Gruppo di Ricerca sulla Educazione Matematica di MODENA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Consolato Pellegrino, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata "Giuseppe Vitali", Università, via G. Campi 213/b, 41100 Modena.*.

Arpinati Barozzi A.M., *Il computer come "Laboratorio di Matematica"*, NUMI XVII, suppl. n.3, 1990, pp.107-116.

Arpinati Barozzi A.M., *Indaghiamo sui numeri primi*, IMSI, vol.13, n.8, 1990 pp.824-844.

Malara N.A., *Probabilità e Statistica nella scuola media: analisi di alcuni libri di testo*, quad. n.6 della collana *Innovazioni e tecnologie didattiche*, CNR Modena, 1990.

Malara N.A., *Affinamento delle capacità di soluzione di problemi in allievi di Scuola Media*, MD, IV, n.2, 1990, pp.39-53.

Malara N.A., Pellegrino C., *Il gioco come mezzo per promuovere una corretta immagine della Matematica*, in D'Amore B. (a cura di), *Gioco e Matematica* AP, 1990, 53-62.

Navarra G., *«E se una triàndria di poliferi ammirasse una scultura perilitica?» - Storia delle parole come strumento di conoscenza*, SD, n.10, 1990, pp.79-82.

Pellegrino C., *Avvio all'uso di un linguaggio di programmazione attraverso attività di scoperta guidata*, CompuScuola, 1990, VI, n.48, 45-49.

Pellegrino C., Garuti R., *Dall'avvio alla ricorsività ai cambiamenti di base nei sistemi di numerazione attraverso la simulazione in LOGO dei contachilometri: descrizione di un'esperienza realizzata in una scuola media* MD, n.1, 1990, pp.19-30.

Pellegrino C., Iaderosa R., *LOGO & Problemi: conversazione a tre "voci"*, MD IV, n.1, 1990, pp.40-44.

Pellegrino C., Iaderosa R., *Un'esperienza di utilizzo del Tangram in attività di Matematica nella Scuola Media*, MD, IV, n.3, 1990, pp.5-11.

Arpinati Barozzi A.M., Pellegrino C., *Alla ricerca di una strategia di classificazione degli sviluppi piani dei parallelepipedi rettangoli*, MD, V, n.4, 1991, pp.4-11.

Garuti R., *Esempi di attività di interazione fra Informatica e Matematica nella Scuola Media*, in Gisolfi A. (a cura di), *Informatica e Didattica*, Elea Press, Salerno, 1991, pp.141-150.

Gherpelli L., *Esperienze di Laboratorio con allievi di 11-13 anni per la costruzione di testi di problemi e l'avvio al ragionamento ipotetico*, in D'Amore B. (a cura di), *La Matematica fra gli 8 ed 15 anni*, AP, 1991, pp.112-113.

Heraud B., Malara N.A., *Le metier d'ensegnant de mathematiques dans un monde qui change*, in Ciosek M. (ed.), Proc. CIEAEM 42, Szczyrk (1990), Cracow, 1991, pp.356-363.

Iaderosa R., *Un'esperienza didattica di interazione tra allievi ed elaboratore per la risoluzione di problemi aritmetici*, in Gisolfi A. (a cura di), *Informatica e Didattica*, Elea Press, Salerno, 1991, pp.356-363.

Malara N.A., *Improvement of the ability to solve problems in pupils aged 11 to 14: some results of a long lasting research*, in Ciosek M. (ed.), Proc. CIEAEM 42, Szczyrk (1990), Cracow, 1991, pp.46-60.

Malara N.A., Garuti R., *The table as a working tool and as a means for monitoring their thought processes in problems involving the transfer of algorithms to the computer*, Proc. PME XV, Assisi, 1991, vol.2, pp.373-380.

Navarra G., *Una storia di alberi e di case. Una proposta didattica per la quinta classe sulla classificazione, la rappresentazione ed il potenziamento delle competenze logico-linguistiche*, ED, XXXVIII, n.23, 1991, pp.16-21.

Pellegrino C., *Avvio alla ricorsività attraverso problemi*, in Marchini C. (a cura di), Quaderni del Dip. Mat. Univ. Lecce, n.1, 1991, pp.63-73.

Pellegrino C., *Il computer nell'educazione matematica di allievi di 11-14 anni: le scelte del GREM*, in Gisolfi A. (a cura di), *Informatica e Didattica*, Elea Press, Salerno, 1991, pp.71-82.

Pellegrino C., *Attività dell'unità locale del Progetto Nazionale "Informatica e Didattica" nel periodo 1986-1990*, in Gisolfi A. (a cura di), *Informatica e Didattica*, Elea Press, Salerno, 1991, pp.71-82.

Pellegrino C., Malara N.A., *The LOGO in the teaching of Mathematics: problems, experiences and requests*, Proc. Eurologo 1991, Parma, 1991, 507-530.

Arzarello F., Chiappini G.P., Lemut E., Malara N.A, Pellerey M., *Learning Programming as a Cognitive Apprenticeship Trough Conflicts*, in E. Lemut e Altri (eds.), *Cognitive Models and Intelligent Environments for Learning Programming*, NATO ASI series, vol.111, Springer-Verlag, pp.284-298.

Ferrari M., Malara N.A., Speranza F., *Mathematics Education: in Italy from 1861 to present*, in Barra ed Altri (a cura di) *Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trend*, quad. 12, collana FMI, prog. TID-CNR, 1992.

Malara N.A., *Ricerca Didattica ed Insegnamento*, IMSI, vol.XII, n.2, 1992, pp.107-136.

Malara N.A., *Il libro di testo per la Matematica*, in Orlando Cian D. (a cura di), *I libri di testo nella Scuola Media: linee di analisi pedagogica*, Gregoriana libreria editrice, Padova, 1992, pp.527-596.

Malara N.A., Pellegrino C., Iaderosa R., *Avvio ad attività di matematizzazione* *attraverso problemi*, MD, vol.2, 1994, pp.169-179.

Malara N.A., Pellegrino C., Tazzioli R., *I fogli elettronici in attività di Matematica per allievi di 11-16 anni*, CDE, 1992, Modena.

Navarra G., *Il sig. Kappa allo zoo, riflessioni su una attività didattica sulla comprensione dei valori di verità dei connettivi "e", "e/o", "o"*, SD, 13, 1992, pp.83-88.

Pellegrino C., *La tela di Arithmós: una storia pretesto per rivisitare i concetti di massimo comun divisore, minimo comune multiplo e le loro proprietà*, MD, VI, n.3, 1992, pp.25-32.

Arpinati Barozzi A.M., *Indagine sull'uso del computer nella scuola secondaria di primo grado nella regione Emilia Romagna*, in Atti del Conv. Didamatica 93, 1993, pp.3-18.

Graf K.D., Malara N.A., Zehavi N., Zienbalg J., *Thecnology in the service of the mathematics curriculum*, in Goulin & Alii, Proc. ICME 7, 1993, pp.197-201.

Malara N.A., *Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza*, IMSI, vol.16, n.10, 1993, pp.928-954.

Malara N.A., *On the assesment of pupils involved in mathematics research activities*, Proc. CIEAEM 45, Cagliari, 1993, pp.178-185.

Malara N.A., *Some Aspects of the assessment in the Italian Middle School with particular reference to the resolution of problems*, Proc. CIEAEM 45, Cagliari, 1993, pp.259-262.

Malara N.A., *Zadania matematyczne dla Ciebie*, Nauczyciele i Matematyka, n.6, 1993, pp.30-31.

Malara N.A., *I problemi logici per l'avvio al ragionamento ipotetico*, in stampa su Quad. Dip. Mat. Univ. Torino.

Malara N.A., Tomasello M.A., *Ricerche attuali su problemi di insegnamento-apprendimento dell'algebra, rapporto tecnico*, GREM Modena, 1993.

Navarra G., *Un mazzo di fiori alquanto pericoloso: un itinerario didattico sulle leggi di De Morgan*, SD, 9, 1993, pp.46-40.

Navarra G., *Itinerari attraverso la Logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative*, IMSI, vol.16, n.8, 1993, pp.731-756.

Navarra G., *The inquiries of inspector Clouseau, the case of the murdered billionaire: from the analysis of reasoning to the propositional variables*, Proc. Bisme 3, Bratislava, Slovakia, 1993, pp.134-136.

Navarra G., De Plano S., *Gli insegnanti ricercatori in didattica della matematica: problematiche prospettive dopo la legge 341 sulla riforma degli ordinamenti didattici universitari*, MD, 1, 92-96.

Navarra G., De Cian S., *Analisi geometriche di patterns: un esempio di attività interdisciplinare tra matematica, arti figurative e musica*, SD, 6, 1993, pp.77-85.

Pellegrino C., Arpinati Barozzi A.M., *Come allievi di terza media hanno studiato un collegamento tra gli sviluppi dell'ottaedro e del cubo*, IMSI, vol.16, n.4, 1993, pp.383-398.

Pellegrino C., Marchini C., *Come giocando al calcio senza pallone si possono incontrare insospettati personaggi matematici*, Le Scienze, n.244, pp.90-93; anche in EM, anno XIV, serie III, n.1, 1993, pp.15-25.

Arpinati A.M., Masi M.G., Mezzogori V., *Scuola media: ogni banco un computer spesso incompatibile*, Innovazione Educativa, n.1, IRRSAE E.R., 1994, pp.13-11.

Gherpelli L., *Sperimentazioni nel triennio di Scuola Media per un approccio consapevole e non traumatico all'algebra*, in D'Amore B. (a cura di), *L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica*, Pitagora, 1994, pp.129-131.

Gherpelli L., Malara N.A., *Argomentazione in Aritmetica*, Numeri e Proprietà, CSU, Parma, 1994, pp.55-60.

Iaderosa R., *La teoria della Divisibilità nella Scuola Media*, in stampa su Numeri e Proprietà, CSU, Parma, 1994, pp.101-106.

Malara N.A., *Didactical Innovation in Geometry for pupils aged 11-14*, in Malara N.A., Rico L. (eds) Proc. First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, 1994, pp.59-6.

Malara N.A., *Analisi dei programmi Spagnoli di Matematica*, IMSI, vol.17A, n.4, 1994, pp.307-333.

Malara N.A., *Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?*, in D'Amore B. (a cura di), *L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica*, Pitagora, 1994, pp.67-77.

Malara N.A., Gherpelli L., *El planteamento de problemas y el razonamento hipotetico en geometria*, UNO, pp.57-74, in vers. ital. su MD, 1994, n.3, pp.229-244.

Navarra G., *Dalla moltiplicazione a gelosia ai regoli di Genaille*, Numeri e Proprietà, CSU, Parma, pp.23-28.

Pellegrino C., *Cabri-géomètre: un programma per imparare ed insegnare la Geometria*, in D'Amore B. (a cura di), *L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica*, Pitagora (BO), 1994, pp.133-134.

Barra M., Ferrari M., Fasano M., Furinghetti F., Malara N.A., Speranza F. (a cura di), *Some Italian Contribution on Psychology of Mathematics Education*, CSU, Genova, 1991.

Barra M., Ferrari M., Furinghetti F., Malara N.A., Speranza F. (a cura di), *Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trend*, Prog. TID-CNR, collana FMI, quad. n.12, 1992.

Basso M., Garuti R., Malara N.A., Pesci A., Vighi P., Zan R. (a cura di), *Numeri e Proprietà*, CSU, Parma, 1994.

D'Amore B., Pellegrino C. (a cura di), *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*, Bologna, 1992.

Malara N.A., Rico L. (a cura di), *Proceedings of First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, CSU, Modena, 1994.

Pellegrino C., Borrelli A., *Indice generale Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate 1970-1993*, suppl. bibl. 1994, n. 29.

Malara N.A., *Methodological and Curricolar Innovations in Mathematics through the use of the computer*, in Proc. WG 17 "Technology in the service of the mathematics curriculum", ICME 7, Quebec (1992).

Malara N.A., *Thecnology in the service of the mathematics curriculum*, documentazione distribuita al WG17.2, Quebec (1992), come introd. alla discussione.

Malara N.A., *Mediating Theory and Practice: a Case Study*, in stampa su Proc. Fifth International Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education, Grado (UD), 1994.

Malara N.A., *La geometria nei programmi scolastici di alcuni paesi europei per allievi dai 6 ai 16 anni*, in stampa su Atti del XXIII Sem. Naz. del Centro Morin.

Navarra G., *Itineraries through Logics for potentiating Linguistic and argumentative skills*, in Proc. WG7 "Language and Communication in the Classroom", ICME 7, Quebec (1992).

Pellegrino C., *Problem solving and top-down method: an example of computer studies in interaction with mathematics*, in corso di stampa su Proc. Second Italo-German Symposium on teaching of Mathematics, Osnabrück (1992).

Pellegrino C., Fiori C., *Cosa dice il teorema di Enumerazione di Pólya: Escursione tra movimenti, gruppi, rappresentazioni, conteggi ed altro ancora*, in corso di stampa su L'Insegnamento delle Scienze e dell'Informatica.

Pellegrino C., Fiori C., *Teoremi configurazionali e coordinatizzazione dei piani affini*, presentato per la pubblicazione.

Pincella M.G., Malara N.A., *Lo studio informale delle trasformazioni e degli invarianti come approccio alla Geometria nella scuola media*, inviato per la stampa.

Nucleo di Ricerca Didattica di MODENA

(Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica)

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Maria Bartolini Bussi, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata "Giuseppe Vitali", via Campi 213/b, 41100 Modena.*

Monografie

NRD di Modena, *I numeri complessi*, TID-CNR, Formazione degli insegnanti, n.4, 1990.

Franchi G., Barberini G. (a cura di), *Nuovi Programmi di Matematica: Alcuni contributi per l'aggionamento degli insegnanti elementari*, Modena: C.D.E., rapp. tecnico n.17, 1990.

Franchi G. (a cura di), *Informatica povera*, Modena: C.D.E., rapp. tecnico n.18, 1991.

Bassoli M.G., Bolognesi M., Borsari V., De Masi S., Gasparini M., Neri A.G., *Percorso di logica per il biennio superiore*, Modena: C.D.E., rapp. tecnico n.19, 1992.

Fiori C., (a cura di), *Alcune proposte di unità didattiche per il biennio di scuola secondaria superiore. Costruzione e sperimentazione*, Modena: C.D.E., rapp. tecnico n.20, 1993.

Iannicelli M., *Le tassellazioni e i poligoni regolari (schede con guida)*, Ass. alla Cultura del Comune di Nonantola, 1991.

N.R.S.D.M. di Modena, *Macchine matematiche ed altri oggetti - catalogo*, Comune di Modena, 1992.

N.R.S.D.M. di Modena, *Macchine matematiche ed altri oggetti - schede di approfondimento*, Comune di Modena, 1992.

Bartolini Bussi M., *Lo spazio, l'ordine, la misura*, Bergamo, Juvenilia, 1992

Videocassette didattiche

Fasci di parabole (3 vc); *Fasci di iperboli* (3 vc); *Fasci di coniche* (1 vc); *Numeri complessi: intersezione di una retta e una conica* (1 vc); *Numeri complessi: intersezione di una retta e una cubica* (1 vc); *Teorema di Pitagora* (1 vc); *Teorema di Carnot* (3 vc); *Ombre solari ed omologie affini* (4 vc); *Macchine matematiche ed altri oggetti: i modelli esposti* (2 vc); *Macchine matematiche ed altri oggetti: documentario* (1 vc: versione italiana ed inglese).

Articoli

N.R.D. - Scuola Media Superiore - Modena, *Laboratorio di Matematica: presentazione e descrizione di una esperienza*, SMI, vol.27 n.1, 1990, pp.55-63.

Bartolini Bussi M., *Learning Situations and Experiential Domains Relevant to Early Childhood Mathematics*, in Steffe L.P. & Wood T. (eds.), *Transforming Children's Mathematics Education: International perspectives*, L.E.A., 1990.

Bartolini Bussi M., *Lo spazio, l'ordine, la misura*, in Rubagotti G. (a cura di), *I nuovi orientamenti per la scuola materna*, pp.177-191, Fabbri Editori, 1990.

Zanoli C. (a cura di), *Calcolo delle probabilità*, SMI, vol.27, n.4/5.

NRD Modena, *Teoria delle probabilità: storia e didattica*, in Zanoli C. (a cura di), *Calcolo delle probabilità*, SMI, vol.27, n.4/5.

Bandieri P., *Il bambino, la scuola e la probabilità*, in Zanoli C. (a cura di), *Calcolo delle probabilità*, SMI, vol.27, n.4/5.

Cavani I. & a., *Un'avventura tra fiaba e probabilità* , in Zanoli C. (a cura di), *Calcolo delle probabilità*, SMI, vol.27, n.4/5.

Zanoli C., *Indicazioni bibliografiche*, in Zanoli C. (a cura di), *Calcolo delle probabilità*, SMI, vol.27, n.4/5.
Bartolini Bussi M., *Apprendere la matematica attraverso la discussione: i grafici nel piano cartesiano. 1^a e 2^a parte:* IMSI, vol. 14 (1991), n.3; *3^aterza parte:* IMSI, vol. 14 (1991), n.5.
Fiori C., *Dalla scuola media al biennio: prove di verifica e di ingresso in matematica. Risultati di una sperimentazione condotta all'inizio degli a.s. 1988/89 e 1989/90*, EP, vol. 4, 1991, n.1.
Quattrocchi P., *Il ruolo della geometria*, in Atti del IV Convegno UMI-CIIM, NUMI, vol.18, 1991, n.5.
Bartolini Bussi M., *Social Interaction and Mathematical Knowledge*, in *Proc. of the 15th International PME Conference*, vol.1, pp.1-16, Assisi 1991.
Bartolini Bussi M., *Mathematics Knowledge as a Collective Enterprise*, in Seeger and Steinbring (eds.), *The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor*, pp.121-151, Materialien und Studien Band 38, IDM Bielefeld, 1992.
Bandieri P., *Teoria della misura, considerazioni didattiche*, SMI, vol. XXX (4), 1993, pp.53-58.
Barberini G., Bartolini Bussi M., *A proposito di trasformazioni geometriche nella scuola elementare, I parte:* IMSI, vol.16, n.7, 1993, pp.643-662; *II parte:* IMSI, vol.16, n.9, 1993, pp.787-820.
Bartolini Bussi M., *Forme*, Bambini, vol. IX, 1993, n.2, pp.38-45.
Bartolini Bussi M., *Il corpo nello spazio*, Bambini, vol.IX, 1993, *I parte:* n.5, pp.54-57; *II parte*: n.6, pp.37-41.
Bartolini Bussi M., *Tre esperienze in chiave costruttivista*, SV, vol.29, 1993, n.2, pp.28-31.
Ferri F., *Rappresentazione del mondo visibile*, SV, vol.29, 1993, n.2, pp 32-35.
Zanoli C., *L'uso del laboratorio: le macchine matematiche*, SV, vol.29, 1993, n.2, pp.41-44.
Ferri F., *"Perspective is a Solvable Problem" or "To Be Born Five Hundred Years Before"*, in Milan H. & Novotna J. (eds.), *Proc. of the SEMT 93*, pp.33-35, Praha, Charles University Publ, 1993.
Bartolini Bussi M., *Geometrical Proofs and Mathematical Machines: An Exploratory Study*, Proc. of the 17th PME Conference, vol.II, 1993, pp.97-104.
Quattrocchi P., Rinaldi G., *Una caratterizzazione dei piani affini pappiani*, MD, n.2, 1993, pp.148-165.
Bartolini Bussi M., *Theoretical and Empirical Approaches To Classroom Interaction*, in Biehler, Scholz, Strasser & Winckelmann (eds.), *Mathematics Didactics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publ., 1994, pp.121-132.
Bartolini Bussi M., Pergola M., *Mathematical Machines in the Classroom: the History of Conic Sections*, in Malara N. A. & Rico L. (eds.), *Proc. of the First Italian-Spanish Symp. in Mathemctics Education*, pp.233-240, Dip. di Matem., Univ. di Modena, 1994.
Bartolini Bussi M., *On socio-cultural Theory and Psychology of Mathematics Education*, PMENEWS (1994), pp.7-9.
Bartolini Bussi M., *Il ruolo della discussione e dell'argomentazione nella costruzione delle conoscenze matematiche*, in Atti del Conv. su "La costruzione della conoscenza matematica nella scuola media", pp.63-78, SEI, Torino, 1994.
Bartolini Bussi M., Pergola M., *History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry*, in Jahnke, Hans Niels, Knoche, Norbert & Otte Michael (HRSG.): *Geschichte der Mathematik in der Lehre*, Gottingen: Vandenhoeck & Ruprecht (in press).
Bartolini Bussi M., *Social Interaction and Mathematical Knowledge: Foreword*, in stampa su The Journal of Mathematical Behavior, 13 (3).
Bartolini Bussi M., *Coordination of Spatial Perspectives: An Illustrative Example of Internalization of Strategies in Real Life Drawing*, in stampa su The Journal of Mathematical Behavior, 14.
Costa C., Ferri F., Garuti R., *Perspective Drawing as a Semiotic Tool Towards the Statements of Geometry for Young Pupils (grades 3-6)*, presentation & atelier in Proc. of the 46th CIEAEM.

Nucleo di Ricerca Didattica di PADOVA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Cinzia Bonotto, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, via Belzoni 7, 35131 Padova.*

Antoniazzi S., *Proposte per (ri-)ottenere identità dell'algebra usando la probabilità*, Atti del XVI Convegno UMI-CIIM, NUMI, suppl. al n.7, 1994, pp.147-152.
Antoniazzi S., *Un'esperienza sull'insegnamento dell'inferenza statistica nella scuola secondaria*, ID, 8, 1994.
Basso M., *Un possibile itinerario didattico sulle frazioni nella scuola elementare. Classe III*, IMSI, vol. 14, n.7, 1991, pp.678-698; *Classe IV*, IMSI, vol. 14, n.9, 1991; *Classe V*, IMSI, vol. 14, n.11, 1991.
Basso M., *Ideazione di uno spazio degli eventi in situazioni casuali. Resoconto di una esperienza nella scuola elementare*, ID, 4, 1992, pp.81-91.
Basso M., Perelli D'Argenzio M.P., *A curriculum of probability in an italian primary school*, VII ICME, Quebec, 1992.
Bazan C., Codetta Raiteri A., *Il cambiamento di ruolo dell'insegnante che introduce metodi e contenuti sperimentali nella classe: riflessioni su nostre espe-*

rienze, Atti CIEAEM 42, Szczyrk (Polonia), 1990, pp.128-142.
Bazan C., Codetta Raiteri A., *Riflessioni sul cambiamento indotto dalla sperimentazione nel ruolo del docente*, Informatica, Telematica e Scuola, V, n.1, 1991, pp. 8-16.
Bazan C., Codetta Raiteri A., *Assessment of students engaged in problem-solving group work*, Atti CIEAEM 45, Cagliari, 1993, pp. 98-103.
Bonotto C., *Numeri razionali. Approcci diversi e relative sperimentazioni didattiche*, IMSI, vol. 14, n.7, 1991, pp.607-638.
Bonotto C., *Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale*, IMSI, vol.15, n.5, 1992, pp. 415-448.
Bonotto C., *A study on the concept of decimal and rational numbers in 5^{th} and 6^{th} grade italian children*, VII ICME, Quebec, 1992.
Bonotto C., *Origini concettuali di errori che si riscontrano nel confrontare numeri decimali e frazioni*, IMSI, vol. 16, n.1, 1993, pp.9-45.
Bonotto C., Basso M. et al., *Analisi di indagini sui numeri decimali rivolte ad allievi ed insegnanti della scuola dell'obbligo*, Atti del Primo Conv. Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore, 1994, pp.93-98.
Busulini F., *Sul confronto degli angoli in Hilbert*, AR, n. 3, 1992, pp.147-149.
Egano M., Maddalosso M., *Insiemistica: non è l'unica strada ovvero l'importanza del buon senso a scuola*, Via Libera, 1992.
Lucio P.L., *Geometrical visualization by interactive software, that uses movements and colors*, VII ICME, Quebec,1992.
Millevoi T., *Il tema di matematica per la maturità scientifica*, AR, n.3, 1991, pp.115-122.
Scimemi B., *Algebra e Geometria piegando la carta*, Atti del Conv. "Matematica: gioco ed apprendimento", Castel San Pietro, 1990, AP, pp.79-87.
Scimemi B., *Matematica propedeutica* (in collab. con Favilli F., Pergola P., Mantovani M., Villani V.), testo per i corsi del semestre propedeutico dell'Univ. Naz. Somala di Mogadiscio (1990).
Scimemi B., *Geometria del triangolo e trasformazioni*, in occasione delle Olimpiadi Intern. di Matem. (selez. naz.), Cesenatico, 19-21 aprile 91, stampato a cura dell'Agip, 1992.
Scimemi B., *Il tema di matematica del concorso a cattedre nella scuola media-1991*, AR, n.1, 1992, pp.18-22.
Scimemi B., *Aritmetica come scoperta*, SD, 17, 1992, pp. 42-47.
Scimemi B., *Aritmetica e musica*, Atti del Conv. "Il pensiero Matematico nella ricerca storica italiana", IRRSAE Marche, Ancona, 1992.
Scimemi B., *Reflections for reconstructing a triangle from its notable points*, presentato al Conv. "Geometry of the triangle", Center for research on concepts and cognition, Bloomington, Indiana, Jan. 93.

Scimemi B., *Le frazioni continue rivisitate*, Atti del XV Convegno UMI-CIIM, NUMI, suppl. al n.5, 1993, pp.11-29.
Scimemi B., *The influence of computers on mathematical research*, ch. 10, pp.675-694 in "Mathematics of computing", ed. by Luccio F., Marzollo A., Serafini P., Unesco project on Applied Math. and Informatics for developing countries, CISM Udine, 1993.
Scimemi B., *Partizioni*, IMSI, vol.5, n.17A-17B, 1994, pp.523-533.
Testa G., *La misura del cerchio e un probabile caso di paranoia*, IMSI, vol.15, n.6, 1992, pp.634-647.
Testa G., *Equations du troisième degré et nombres complexes*, First Summer Univ. History and Epistemology in Math. Education, Montpellier 1993 (in corso di stampa sugli Atti).

Software prodotto:
Lucio P.L., T.A.G. - Teaching Aid for Geometry (C.A.D geometrico) per sistema operativo MS DOS e Windows.

Nucleo di Ricerca Didattica di PALERMO

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Filippo Spagnolo, G.R.I.M., Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, via Archirafi 34, 90123 Palermo.*

Spagnolo F., Margolinas C., *Un ostacolo epistemologico rilevante per il concetto di limite: Il postulato di Archimede*, Atti Conv. PME, Assisi 1991, e MD, n.4, 1993.
Mostacci, *Il "Problema" dei modelli concettuali del preadolescente*, Atti Conv. PME, Assisi 1991.
Di Leonardo M.V., Marino T., *Una dimostrazione di alcune proprietà del segmento parabolico note ai tempi di Archimede*, EM, 1, 1991.
Di Leonardo M.V., Marino T., *Proposte di soluzioni di alcuni quesiti, posti per la maturità scientifica in anni recenti, con l'ausilio della regola di Archimede*, MD, 1992 e Quad. GRIM n.2, 1991.
Di Leonardo M.V., Marino T., *Regola di Archimede e principio di Eudosso*, MD, 1991.
Mostacci, Spagnolo, *Svantaggio e apprendimento della matematica*, ED, n.20, 1990.
Cutrera, Spagnolo, *Le difficoltà di apprendimento in matematica nelle immagini dei docenti*, ED, n.4, 1990.
Spagnolo F., *Gli IREM in Francia*, LP, 1991.
Marino T., Spagnolo F., *Alcune considerazioni storiche su "Il Pitagora"*

(Giornale di matematica per gli alunni delle scuole secondarie), Comunicazione al Conv. Storia Didattica, 1991.

Di Leonardo M.V., Marino T., Spagnolo F., *Alcune osservazioni didattiche ed epistemologiche sul postulato di Eudosso-Archimede ed il metodo di esaustione*, MD, n.1, 1994.

AA.VV., *Considerazioni su alcuni articoli di didattica della matematica della rivista "Il Pitagora"*, in attesa di pubblicazione su MD.

Calisti, Cassetti, *LOGO, una proposta per l'introduzione dell'informatica nella scuola dell'obbligo*, ANVIED, Palermo, 1991.

Nastasi P., Scimone A., *Una polemica catanese degli anni 30 sulla trattazione dei numeri decimali*, MD, n.1, 1992, pp.29-35.

Scimone A. et alii, *Il metodo dimostrativo in Euclide e in Cartesio*, Insegnare, n.1, 1992.

Brigaglia A., Scimone A., *L'algebra e la teoria dei numeri*, in attesa di pubbl..

Nastasi P., Scimone A., *Pietro Mengoli and the six-square problem*, Historia mathematica, 20, 1993.

Scimone A., *La teoria delle congruenze binomie in Italia tra le due guerre mondiali*, in corso di pubbl..

Margolinas C., *La ricerca in Didattica della Matematica*, Quad. GRIM n.1, 1990.

Camarda S., Spagnolo F., Margolinas C., *Un ostacolo epistemologico per il concetto di limite: il postulato di Archimede*, Quad. GRIM n.1, Palermo, 1990.

Iannuzzo G., *Il concetto di funzione dall'antichità al XVII secolo*, Quad. GRIM n.1, Palermo, 1990.

Iannuzzo G., *Alcune ricerche didattiche sul concetto di funzione*, Quad. GRIM n.1, Palermo, 1990.

Di Leonardo M.V., Marino T., *Regola di Archimede e principio di Eudosso*, Quad. GRIM n.2, Palermo, 1991.

Palumbo P., *L'epistemologia fallibilista di Popper*, Quad. GRIM n.2, Palermo, 1991.

Niceta F., Profumo M., *L'informatica a scuola: ruolo, aspettative, esperienze*, Quad. GRIM n.2, Palermo, 1991.

Rigamonti G., *Sul rapporto fra gli Analitici di Aristotele e gli Elementi di Euclide*, Quad. GRIM n.2, Palermo, 1991.

Ferreri M., *Evoluzione come apprendimento, apprendimento come evoluzione, parte I*, Quad. GRIM n.2, Palermo, 1991; *parte II*, Quad. GRIM n.3, Palermo, 1992.

Bologna V., *Esperienze francesi sulla dimostrazione*, Quad. GRIM n.3, Palermo, 1992.

Lo Verde D., *La dimostrazione euclidea: tradizione classica, metodi automatici, applicazioni didattiche*, Quad. GRIM n.3, Palermo, 1992.

Riccobono I., *Una sperimentazione informatica nella scuola*, Quad. GRIM n.3, Palermo, 1992.

Melisani E., *Incidenza di diversi tipi di struttura logica di un problema sulla condotta di risoluzione*, Quad. GRIM n.3, Palermo, 1992.

Scimone A., *I numeri di Bernouille: aspetti storici e didattici*, Quad. GRIM n.3, Palermo, 1992.

Spagnolo F., *Apprendimento tra emozione ed ostacolo: l'errore nella comunicazione delle matematiche, intersezione tra problemi dell'apprendimento/insegnamento e la neurofisiologia*, Quad. GRIM n.4, Palermo, 1993.

Valenti S., *Dall'intero all'iperreale: un'introduzione graduata all'analisi non standard*, Quad. GRIM n.5, Palermo, 1994.

Nucleo di Ricerca Didattica di PARMA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Francesco Speranza, Dipartimento di Matematica, via M. D'Azeglio 85/A, 43100 Parma.*

Marchini C., *La teoria alternativa degli insiemi, una nuova proposta per i Fondamenti della Matematica*, D'Amore B. Pellegrino C. (a cura di), Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza, Zanichelli, Bologna, 1992, pp.157-169.

Marchini C., Pellegrino C., *Come giocando a calcio, senza pallone, si possono incontrare insospettati personaggi: ovvero divagazioni sul geopiano, teoria elementare dei numeri e dintorni*, EM, 14 (3) vol. 4 n. 1, 1993, pp.15-25 e Le Scienze, n.294, 1993, pp.90-93.

Marchini C., *Procedimenti dimostrativi presenti nei manuali scolastici*, su F. Furinghetti (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti II Internuclei Scuola Superiore, (Genova 1991), Quaderno T.I.D n. 13, 1992, pp.97-110,

Marchini C., *Finito?*, su F. Speranza (a cura di), Epistemologia della Matematica - Seminari 1989 - 91, Quaderno T.I.D. n. 10, 1992, pp.101-133.

Marchini C., *La Logica Matematica, strumento essenziale per l'insegnamento.I*, MD, Anno VI n.3, 1992, pp.40-49; *II*, MD. Anno VI n.4, 1992, pp.41-56.

Marchini C., *Le definizioni e le notazioni, un problema didattico*, Quad.1 Dip. Mat. Univ. Lecce (1992): *Seminari di Didattica A.A. 1990/91 e 1991/92*, pp.125-143.

Marchini C., *Ricerca e Didattica: Ricerca Didattica*, presentato per gli Atti del 1° Congresso di Matematica: Ricerca e Didattica, Cagliari 1992.

Marchini C., *La sintassi del calcolo dei predicati desunta da procedimenti dimostrativi in uso nei manuali scolastici*, su A. Bernardi, S. Cerrato, P. Universo (a cura di), *La Comunicazione Scientifica - Media e Metodi 3: La*

Matematica tra didattica e cultura, Trieste 1992, pp.100-123.
Marchini C., *Quale Logica per la scuola elementare*, IMSI 16 n.11/12, 1993, pp.1017-1040.
Marchini C., *Logica e Teoria degli insiemi, Parte I*, IMSI 16 n. 11/12, 1993, pp.1061-1076.
Marchini C., *Schemi di deduzione*, in stampa su Atti del Corso di didattica della Logica, Lecce 1993, AILA preprint.
Medici D., Mazzoni C., *Vari approcci alla costruzione e classificazione delle figure geometriche*, MD, vol.2, 1990, pp.71-73.
Medici D., Vighi P., *Il problema della intersezione di figure geometriche attraverso varie rappresentazioni*, MD, vol.5, 3, 1991, pp.54-60.
Michelotti M., Rinaldi M.G., Vighi P., *Calcolo letterale*, Atti del convegno 2° Internuclei Scuola Secondaria Superiore, Genova.
Michelotti M., Speranza F., Vighi P., *Riflessioni sui corsi per insegnanti di sostegno*, QDF, 1, Univ. Parma, pp.79-88 (1993).
Michelotti M., Vighi P. e altri, *Un test d'ingresso per la prima superiore*, PM, vol.65, VI, 2, 1989, pp.33-77.
Michelotti M., Ferrabini P., *Recupero di difficoltà di apprendimento*, NS, 1991.
Michelotti M., Mazzetta L., *Orientamenti per il piano di lavoro di Matematica*, NS, 1991.
Michelotti M. e altri, *Dai grafici al concetto di limite attraverso l'analisi non standard*, Quad. del Dip. di Matematica di Parma, n.100, 1994.
Oriolo P., Michelotti M., *Incontro con l'Aritmetica*, B. Mondadori, Milano, 1992.
Oriolo P., Medici D., *Incontro con la Matematica: Algebra*, B. Mondadori, Milano, 1992.
Oriolo P., Vighi P., *Incontro con la Geometria*, B. Mondadori, Milano, 1992.
Rinaldi M.G., Vighi P., *Relazioni e loro rappresentazioni: le frecce*, MD, vol.3, VI, 1992, pp.50-55.
Rinaldi M.G., *Strutture algebriche e isomorfismi*, NS, 4, 1993, pp.74-78.
Rinaldi M.G., Michelotti M., *Un test d'ingresso per le facoltà scientifiche*, MD, 8, 1994, pp.142-156.
Speranza F., *Confronto fra i programmi della Scuola Media e quelli delle Scuole Superiori*, in *La matematica nel biennio* (a cura di A. De Flora), Cappelli, Bologna 1988, pp.41-44.
Speranza F., *La matematica: problemi e teorie*, EIT, Teramo 1989.
Speranza F., *Statistica*, in *Lezioni di Matematica per la scuola materna*, AP, pp.99-102, 1989.
Speranza F., *Affrontare la Geometria in modo nuovo*, in *Lezioni di Matematica per la scuola materna*, AP, pp.59-72.
Speranza F., *Applicazioni della Logica nei nuovi programmi della scuola elementare*, in *Lezioni di Matematica per insegnanti della scuola elementare*, AP, pp.117-126, 1989.
Speranza F., *Cenno sulle basi della Matematica*, in *Lezioni di Matematica per insegnanti della scuola elementare*, AP, pp.231-233, 1989.
Speranza F., *La Matematica nel biennio: riflessioni sui nuovi programmi*, IMSI, 12 (n.2), pp.298-305, 1989.
Speranza F., *La razionalizzazione della Geometria*, PM, VI, 65, pp.29-46, 1989.
Speranza F., *History, Epistemology, Didactics: some noteworthy cases*, in Proc. of the First Italian - German bil. Symp. on Did.of Math., Pavia 1988, CNR-TID, pp.95-107, 1989.
Speranza F., *Orientamenti metodologico-didattici della matematica di base per adulti*, in Atti del seminario 1986-87 per docenti dei corsi 150 ore (a cura di R. Grazia), IRRSAE E.R., pp.415-418, 1989.
Speranza F., *Matematica e linguaggio*, EM, II, 4, pp.97-114, 1989.
Speranza F., *Matematica e cultura, oggi*, in Atti del convegno "Cultura Matematica e insegnamento" (Firenze 1988), Univ. Firenze, pp.155-169, 1989.
Speranza F., *Un nuovo linguaggio per un nuovo modo di insegnare la scienza*, in *Gli audiovisivi e l'insegnamento scientifico*, a cura di C. Oleari e F. Speranza, Univ. Parma, pp.46-56, 1989.
Speranza F., *Riflessioni sui criteri per valutare le trattazioni di una teoria matematica*, Riv. di Mat. Univ. Parma, (4) 15*, pp.117-128, 1989.
Speranza F., Vighi P., Mazzoni C., Fabbroni F., *Imparare a scuola* (fasc. iniziale, 3, 4, 5), N. Milano, Bologna 1990.
Speranza F., *Controindicazioni al riduzionismo*, MD, 4, f.3, pp.12-17 (1990).
Speranza F., *Filosofia e matematica: prospettive di interazione*, CS, 116, pp.174-181, 1990.
Speranza F., *Nuove prospettive per la geometria nelle scuole superiori*, NS, 7/8, pp.73-75 e 9, pp.65-67, 1990.
Speranza F., *Matematica e scienze: quale distinzione, quale integrazione?*, EM, III, 1, suppl. 2, pp.47-54, 1990.
Speranza F., *L'insegnamento della geometria secondo il metodo ipotetico-deduttivo*, Atti sem. "L'insegnamento della matematica nei nuovi programmi della scuola secondaria superiore", IRRSAE Veneto, pp.25-42, 1990.
Speranza F., *La riduzione di una disciplina a un'altra: una strategia generale?*, in Proc. of the Conf. on Found. of Math and Phys, Wesley, Blaumberg 1990, pp.237-247.
Speranza F., *Il significato filosofico della Matematica e il suo insegnamento*, Atti conv. "Il pensiero matematico nella cultura e nella società italiana negli anni '90", Quad. PRISTEM n.1, pp.59-66, 1990.
Speranza F., *Problemi di raccordo tra le varie fasce scolastiche*, Atti XIII conv.

UMI-CIIM, NUMI, XVII, suppl. al n. 3, pp.99-104, 1990.

Speranza F., *La matematica del tempo*, SS, pp.19-20, 1991.

Speranza F., Vighi P., Mazzoni C., *Esistono capacità spontanee in ambito logico e probabilistico?*, IMSI, 14 (f. 5), pp.459-475, 1991.

Speranza F., *Confronto fra concezioni epistemologiche a proposito della geometria*, in "Conoscenza e matematica" (a cura di L. Magnani), Marcos y Marcos, Milano 1991, pp.445-468.

Speranza F., *Riflessioni sul dilemma finito-infinito*, Quad. Dip. Mat. Univ. Lecce, Sem. didattici, 89/90, pp.26-41, 1991.

Speranza F., *Per un approccio costruttivo alla Matematica*, in "La Matematica fra gli 8 e i 15 anni", a cura di B. D'Amore, AP, 1991, pp.73-78.

Speranza F., *Considerazioni epistemologiche sul metodo del riferimento mobile di Elie Cartan*, Atti Congr. SILFS, CLUEB, Bologna 1991, pp.343-349.

Speranza F., *A proposito de "L'angolo della filosofia"*, Notizie di Logica, X, 2/3, pp.37-38, 1991.

Speranza F., *Matematico per professione, filosofo per caso*, SMI, 29, n.2, pp.60-64, 1992.

Speranza F., *Mathematics Education in Italy from 1861 to the present* (con M. Ferrari, F. Furinghetti, N. Malara), in *The Italian research in mathematics education: common roots and present trends* (a cura di M. Barra, M. Ferrari, F. Furinghetti, N. Malara, F. Speranza), ICME 7 (Quebec), CNR-TID, pp.9-51, 1992.

Speranza F., *Senza sicumera* (con B. D'Amore), SS, pp.15-16 (1992).

Speranza F., *A proposito dei settori scientifico-disciplinari*, LP, n.5, pp.36-37, 1992.

Speranza F., *È matematica vera! Analizziamo i programmi*, SS, Dossier didattico 0, n.5, pp.36-37, 1992.

Speranza F., *Il progetto culturale di Federigo Enriques*, Atti conv. per i 60 anni di Francesco Speranza (a cura di B. D'Amore e C. Pellegrino), Pitagora, Bologna 1992, pp.1-15.

Speranza F., *The role of philosophy and history in mathematical education*, ICME 7, Quebec 1992.

Speranza F., *Note introduttive* a *Epistemologia della Matematica, Seminari 1989-1991*, a cura di F. Speranza, CNR, prog. TID-FAIM, n.10, pp.3-7, 1992.

Speranza F., *Tendenze empiriste nella Matematica*, in *Epistemologia della Matematica, Seminari 1989-1991*, a cura di F. Speranza, CNR, prog. TID-FAIM, n.10, pp.77-88.

Speranza F., *La "rivoluzione" di Felix Klein*, in *Epistemologia della Matematica, Seminari 1989-1991*, a cura di F. Speranza, CNR, prog. TID-FAIM, n.10, pp.269-286.

Speranza F., *La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità?*, in *Atti del secondo incontro internuclei della scuola sec. sup.*, a

cura di F. Furinghetti, CNR, prog. TID-FAIM, n.13, pp.135-141, 1992.

Speranza F., *Il ruolo della storia nella comprensione dello sviluppo della scienza*, CS, v. 31, n. 123, pp.201-208, 1992.

Speranza F., *La scuola di specializzazione per la formazione degli insegnanti secondari: alcune riflessioni*, Scuola e Città (1993).

Speranza F., *L'equazione di Piaget*, Rassegna dell'Istruzione, XLVII, n.3, pp.61-63, 1993.

Speranza F., *Ricercando l'infinito* (recensione a: B.D'Amore e G.Arrigo, *Infiniti*, F. Angeli, Milano 1992), "Corriere del Ticino", 2 marzo 1993, p.43.

Speranza F., *La filosofia nell'insegnamento della matematica (non solo nelle scuole superiori)*, in *Alla scoperta della matematica per una didattica (più) viva*, a cura di B.D'Amore, Pitagora, Bologna, pp.47-56, 1993.

Speranza F., *Aspetti epistemologici dei programmi di matematica*, in *Matematica nella scuola primaria*, a cura di A. De Flora, IRRSAE E.R., N. Milano, Bologna, pp.9-11, 1993.

Speranza F., *Sillabo: Geometria I ciclo*, in *Matematica nella scuola primaria*, a cura di A. De Flora, IRRSAE E.R., N. Milano, Bologna, pp.87-93; *Geometria II ciclo*, pp.94-106; *Logica II ciclo* (con B. D'Amore), pp.112-119.

Speranza F., *Punti di vista diversi nella costruzione d'una teoria*, QDF, Univ. Parma, pp.89-103

Speranza F., *Contributi alla costruzione d'una filosofia non assolutista della Matematica*, Epistemologia, XVI, pp.255-280, 1993.

Speranza F., *La classificazione delle scienze: un problema pratico con fondamenti epistemologici*, Riv.di Mat. Univ. Parma, (5) 2, pp.159-170, 1993.

Speranza F., *The role of non-classical geometries for a radical renewal of mathematics teaching*, Proc. of the first Italo-Spanish bil. Symp., pp.249-256, 1994.

Speranza F., *Teachers' training in Italy: the state of art* (con L.Grugnetti), Proc. of the first Italo-Spanish bil. Symp., pp.205-210.

Speranza F., *Attualità del pensiero di Enriques* , MD, 8 (2), pp.112-132 (1994).

Speranza F., *Linguaggio e simbolismo in Matematica*, Atti I sem. int. di did. d. mat., *Insegnamento e apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, a cura di B. Jannamorelli, pp.17-23, ed. Qualevita, Torre dei Nolfi, 1994.

Speranza F., *Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio - Some ideas on space*, EM (IV), 1, pp.95-116, 1994.

Speranza F., *La geometria non euclidea: come e perché*, in "Atti del 3° incontro internuclei della scuola superiore" (a cura di C. Marchini e F. Speranza), Dip. Mat. Univ. Parma, 1994.

Speranza F., *L' epistemologia*, IMSI, 1994.

Speranza F., *Filosofie neo-empiriste della matematica fra Ottocento e Novecento*, in

Atti Convegno Ancona 1994.
Speranza F., *Rivoluzioni in Matematica: il caso cartesiano e il caso bourbakista*, in Atti del Conv. SILFS, 1994.
Speranza F., *Dalla filosofia della scienza alla filosofia della matematica: la metodologia dei programmi di ricerca scientifici in matematica*, in *Epistemologia della Matematica, Seminari 1992-1993*, TID-CNR, pp.119-134, 1994.
Speranza F., *The influence of some mathematical revolutions over philosophical and didactical paradigms*, Proc. of the 2nd of Didactics of Math, Osnabruck 1992.
Speranza F., *A la recherche d'un philosophie de la mathématique idoine pour la didactique*, Cahiers de didactique des Mathématiques, anche in Erasmus ICP-93-G-2011/11, Thessaloniki 1994, pp.53-62 e pp.177-184.
Speranza F., *The Idea of Revolution as an Instrument for the Study of the Development of Mathematics and for its Application to Education*, in P. Ernest (ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*, The Falmer Press, London, 1994, pp.241-246.
Speranza F., *The Significance of History and of Non-Absolutist Philosophies of Mathematics in Mathematics Education*, Perspectives, in print.
Speranza F., *Il valore conoscitivo della geometria*, PM, in print.
Speranza F., *Espace et temps: géométrie, physique, art, philosophie*, Erasmus ICP 94, in print.
Vighi P. *Le trasformazioni geometriche*, VS, vol.9, Anno 47, 1993, pp.18-25.
Vighi P. *Operazione finale*, VS, Anno 48, 1994, pp16-18.

Nucleo di Ricerca Didattica di PAVIA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Mario Ferrari, Dipartimento di Matematica, Università, via Abbiategrasso 209, 27100 Pavia.*

Bardone L., Sforzini M., Tonali C., *Attività sulla moltiplicazione per il secondo ciclo, Parte II*, IMSI, vol.13, n.3, 1990, pp.512-545.
Bazzini L., *Reformansatze fuer das Unterrichtsfach Mathematik an Italienischen Schulen*, Mathematica Didactica, Vol.13 n.1, 1990, pp.11-20.
Bazzini L., *Book Review: The IEA Study of MathematicsII: Contexts and Outcomes of School Mathematics*, (by D.P. Robitaille, R.A. Garden, Eds.) Educational Studies in Mathematics, Vol.21, n.4, 1990, pp.383-390.
Bazzini L., *Didactic Research between University and School: Problems of Integration*, in Dossey J. (Ed.) *Proceedings ICME 6*, 1990.
Bazzini L., *Examples of incorrect use of analogy in word problems*, Proc. of PME XIV, Mixico, vol.3, 1990, pp.175-182.

Bazzini L., Ferrari M., *Primi elementi di Statistica descrittiva*, in Ferrari M. (Ed.), *Statistica e Probabilità nei Nuovi Programmi della Scuola Elementare*, Editore Battagin, San Zenone degli Ezzelini (TV), 1990, pp.12-32.
Capelo A.C., Ferrari M., Gabba A., Scapolla T., *Felice Casorati e la cultura matematica anglosassone*, Memorie dell'Ist. Lomb.-Acc. Sc. Lett., Classe di Sc. Mat. e Nat., Vol.XXIX, 2, 1990, pp.35-74.
Capelo A.C., Ferrari M, Padovan G., *I sistemi di numerazione*, Progetto Strategico TID, Quad. n.3, 1990.
Capelo A.C., Ferrari M., Padovan G., *Numeri: aspetti storici, linguistici e teorici dei sistemi di numerazione*, Decibel-Zanichelli, Padova-Bologna, 1990.
Ferrari M., *L'induzione matematica*, Did. Sc. Inf. Scuola, XXV, n.146, 1990, pp.42-45.
Ferrari M., *Attività di Geometria in classe seconda*, IMSI, vol.13, n.3, 1990, pp.317-336.
Ferrari M., *Attività di Statistica in terza elementare Parte I, II, III, IV, V*, IMSI, vol.13, n.1, 1990, pp.87-110; vol.13, n.3, 1990, pp.275-300; vol.13, n.7, 1990, pp.681-700; vol.13, n.9, 1990, pp.927-941; vol.13, n.11, 1990, pp.1105-1128.
Ferrari M. (a cura di), *Probabilità e Statistica*, Quad. n.4, Collana di Formazione Professionale, G. Battagin Editore, S. Zenone degli ezzelini, TV.
Pesci A., *Muoversi nell'incertezza*, VS, 1990, pp.10-14.
Pesci A., *An experience to improve pupils' performance in inverse problems*, Proc. of PME XV, Mixico, Vol.II, 1990, pp.117-124.
Pesci A., Reggiani M., *Attività di gruppi di ricerca didattica sul tema Probabilità e Statistica nella scuola media*, SMI, XXVII, n.4/5, 1990, pp.94-98.
Pesci A., Reggiani M., *Elementi di Calcolo delle Probabilità*, IMSI, Collana di formazione professionale, n.4, Statistica e Probabilità, 1990, pp.62-90.
Pesci A., Reggiani M., *Probabilità e statistica*, IMSI, vol.13, n.12, 1990, pp.1191-1208.
Reggiani M., *Il Campione e la moda. La Statistica come momento per stimolare il senso critico degli alunni*, VS, 1990, pp.6-9.
Reggiani M., *Alcuni complementi di Statistica*, IMSI - Collana di formazione professionale, n.4, Statistica e Probabilità, 1990, pp.33-41.
Bardone L., Sforzini M., Tonali C., *Attività sulla moltiplicazione per il secondo ciclo, parte terza*, IMSI, vol.14, n.3, 1991 pp.273-298.
Bazzini L., *Curriculum development as a meeting point between research and practice*, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, n.4, 1991, pp.128-131.
Bazzini L., *La Statistica come occasione per un itinerario interdisciplinare*, IMSI, vol.14, n.1, 1991, pp.41-52.
Bazzini L., Grugnetti L., *Meaningful Contexts for School Mathematics*, Proc. PME XV, vol.1, 1991.

Bazzini L., *A study of mathematical regularities in grade 4* (Poster), Proc.of PME XV, vol.1, 1991.

Bazzini L., Grossi M.G., *Strategie risolutive di problemi di aritmetica nella scuola elementare*, in Dienes P.Z., Vegetti M.S. (Eds.), *Il Piacere della Matematica*, Cappelli, Bologna 1991, pp.189-205.

Bazzini L., *From primary to secondary education: an investigation on pupils' mathematical abilities*, Proc. of CIEAEM 41, Bruxelles, 1991, pp.435-440.

Bazzini L., *Geometry as a progressive organization of the space: didactical suggestions*, in Gagatsis A. (Ed.), *Didactics of Mathematics* (in greco), 1991, pp.210-221.

Bazzini L., *Il ruolo dell'analogia nell'apprendimento della matematica*, Atti XIV Congresso UMI, 1991, p.285.

Capelo A., Ferrari M., *Il rapporto aureo: matematica e paramatematica*, IMSI, vol.14, n.4, pp.307-336.

Ferrari M., *Attività di Statistica in quarta elementare, Parte I, II, III, IV*, IMSI, vol.14, 1991, n.3, pp.226-242, n.5, pp.477-498, n.7, pp.639-658, n.9, pp.853-875.

Ferrari M., *I numeri primi: un mondo affascinante per grandi e piccini*, IMSI, vol.14, 1991, n.8, pp.707-472.

Ferrari M., *I numeri primi*, Did. Inf. Sc. Scuola, anno XXVI, 1991, n.152, pp.52-56.

Ferrari M., Maggi M., *Attività di Geometria in classe seconda: la simmetria assiale*, IMSI, vol.14, 1991, n.1, pp.66-92.

Pesci A., *Problemi inversi e schemi a frecce in prima media*, IMSI, vol.14, n.2, 1991, pp.153-181.

Pesci A., *Graphical representations: a study on their production and interpretation* (poster), Proc. of PME XV, Vol. I.

Pesci A., *I problemi inversi nella scuola media*, Atti XIV Congr. UMI, 1991, p.304.

Pesci A., Mariotti A., *Visualization in problem solving and learning*, Proc. of PME XIV, vol.I, 1991.

Reggiani M., *Computer activities in mathematical problem solving with 11-14 year old students: the conditional structure learning*, in Furinghetti F. (Ed.), *Proc. of PME 15*, Dip. di Mat. dell'Univ. di Genova, vol.III, 1991, pp.199-206.

Reggiani M., *Il raccordo medie-superiori. La matematica fra gli 8 e i 15 anni*, (B.D'amore Ed.) AP, 1991, pp.166-167.

Reggiani M., *Test of the learning of mathematics at the end of the obligatory school*, Warbecq A. (Ed.), *Proc. of the 41st CIEAEM Meeting*, Bruxelles, 1991, pp.457-462.

Reggiani M., *Problemi connessi all'uso della variabile in attività matematiche con il computer nella scuola media inferiore*, XIV Congresso UMI, 1991, p.305.

Bazzini L., *Report on the International Conference on Psychology of Learning and Mathematics Learning*, Trento 1991, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, n.2, 1992, pp.69-72.

Bazzini L., *The cooperative development of a mathematical curriculum for primary education: reflection on a five year experience*, in Seeger F., Steinbring H. (Eds.), *The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the broadcast metaphor*, 1992.

Bazzini L., *The teaching-learning process and assessment practice: two intertwined sides of mathematics education*, An ICMI Study, Kluwer Ac. Press, 1992, pp.99-106.

Bazzini L., Grugnetti L., *Meaningful Contexts for School Mathematics*, Proc. of PME XVI, Durham, N.H., vol.1, 1992, p.18.

Ferrari M., *I numeri decimali, Parte I, II, III: Approssimazioni decimali, IV: Numeri decimali periodici*, IMSI, vol.15, n.3, 1992, pp.215-233; vol.15, n.5, 1992, pp.450-474; vol.15, n.7, 1992, pp.689-703; vol.15, n.9, 1992, pp.887-908.

Ferrari M., *Matematica che passione*, La Matematica tra cultura e Didattica, Trieste 1992, pp.88-96.

Barra M., Ferrari M., Furinghetti F., Malara N.A., Speranza F. (eds), *The italian research in Mathematics Education: common roats and present trends*, Progetto strategico CNR, TID, Quad. 12, 1992.

Maggi M., *Combinatoria e moltiplicazione*, IMSI, vol.15, n.7, 1992, pp.729-748.

Maggi M., Sforzini M., *La matematica nel tempo, Parte II*, IMSI, vol.15, n.9, 1992, pp.925-951.

Pesci A., Mariotti A., *Visualization in problem solving and learning*, Proc. PME XV, Durham, N.H., 1992, p22.

Reggiani M., *Programming activities with 11-14 year old pupils: some learning problems Cognitive Models and Intelligent Environments for Learning Programming*, NATO Advanced Research Workshop, S.Margherita Ligure (GE), 1992 pp.287-290 (poster).

Reggiani M., *Learning difficulties in mathematical problem solving with computers WG17*, ICME 7 Quebec 1992, (in stampa).

Sforzini M., *La matematica nel tempo*, IMSI, vol.15, n.5, 1992, pp.493-514.

Amoretti G., Bazzini L., Pesci A., Reggiani M., *Test di Matematica per la Scuola dell'Obbligo*, O.S. Firenze, 1993.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework*, Proc. of PME XVII, Tsukuba 1993, pp.138-145.

Bazzini L., *Mathematics as intellectual venture and as instrument to approach reality: implication for teaching*, Proc. of the 27th Conference of the GDM Group, Friburg 1993, in Beitrage zum Mathematikunterricht Vortraege fuer Didaktik der Mathematik, Franzbecker, Hildesheim, 1993.

Cazzani L., Giuliani E., Joo C., Reggiani M., Romanoni M.C., *Aritmetica con il computer nella scuola media: un bilancio di 7 anni di esperienza*, Atti del

Convegno Incontri con la Matematica n.7, Pitagora ed, 1993, pp.105-106.
Crosia L., Grignani T., Magenes M. R., Pesci A., *La divisibilità tra polinomi: una proposta didattica per la scuola media superiore*, Atti del Convegno Incontri con la Matematica n.7, 1993, Pitagora Ed., pp.119-120.
Ferrari M., *Giocando coi quadrati magici*, in *Alla scoperta della matematica per una didattica (più) viva*, Pitagora, Bologna 1993, pp.37-42.
Giuliani E., Pesci A. Romanoni C., *Un'esperienza di avvio alla simbolizzazione in prima media*, MD, n.1, 1993, pp.21-35.
Pesci A., *Low attainers' management: an experience in junior secondary school*, in Bazzini L., Steiner H.G., *Proc. of the Second It.-Ger. Bil. Symp. on Didactics of Mathematics*, IDM, Bielefeld, 1993.
Reggiani M., Vercesi N., *Schematizzazioni, diagrammi di flusso, tabelle e attività matematiche con il computer nella scuola media inferiore*, MD, n.1, 1993, pp.39-50.
Sforzini M:, *La Matematica del tempo, Parte III*, IMSI, vol.16, n.3, 1993, pp.268-298.
Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking*, Atti del Seminario Matematico, Univ. Torino, 1994.
Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *L'Algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche*, Prog. Strategico TID, Quad.n.6, 1994.
Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G.P., *The process of naming in algebraic problem solving*, Proc. of PME XVIII, Lisbona 1994, vol.II, pp.40-47.
Baldrighi A., Giuliani E., Joo C., Pesci A., Romanoni C., *Ratio concept and graphical mediators: an exploratory study with 13-14 year old pupils*, Atti CIEAEM 45, Cagliari, 1994, pp.92-97.
Bardone L., Ferrari M., Maggi M., Sforzini M., Trevisani M., *"Grandangolo" Sussidiario per le classi 3, 4, 5* (relativ. alla parte matematica), ELMEDI, 1994.
Bazzini L., *Cultural choices and teaching implications in primary mathematics education*, in Bazzini L., Steiner H.G. (Eds.), *Proc. of the Second Italian-German Bilateral Symposium in didactics of Mathematics*, IDM, Bielefeld, 1994, pp.17-30.
Bazzini L., Ferrari M., *Experience of methodological and curricular innovation in primary school*, in Malara N., Rico L. (eds.), *Proc. of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, Modena, 1994, pp.35-42.
Bertolini C., Maggi M., Pesci A., Trevisani M., *Un test esplorativo sul segno di uguaglianza in terza elementare*, Atti del Convegno Matematica e difficoltà n.3, Pitagora Ed., 1994, pp.73-80.
Capelo A., Ferrari M., Moglia P., *Le formule di Mainardi*, IMSI, Vol.17B, n.1, 1994, pp.7-38.
Cavallari, De Angelis A., Pesci A., Toma D., *Il segno di uguaglianza in ambito aritmetico-algebrico: attività per esplorare stereotipie e fraintendimenti*, Atti I

Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore 1994.
Dell'Aquila G., Ferrari M., *La lunga storia dei numeri interi relativi Parte I, II, III*, IMSI, Vol. 17A, 1994, n.2, pp.145-158, n.3, pp.247-265, n.4, pp.335-362.
Ferrari M., *The problem of the in-service teacher training*, in Malara N., Rico L., *Proc. of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics education*, CNR, Dip. Mat. Modena, 1994.
Ferrari M., *Se il chiodo è perpendicolare*, VS, n.19, 1994, pp.19-21.
Pesci A., *Visualization in Mathematics and graphical mediators: an experience with 11-12 year old pupils*, in R. J. Sutherland (Ed.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Nato ASI Series F, in stampa
Pesci A., *Tree graphs: visual aids in casual compound events*, Proc. of PME XVIII, vol.IV, 1994, pp.25-32.
Pesci A., Reggiani M., *In service teacher training of middle school teachers: observations and balance of fifteen years of experience*, Proc of first Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, Modena 1994, N.A. Malara, L.Rico eds., 1994, pp.189-196.
Reggiani M., *Construction and analysis of verification protocols as diagnosis and recuperation tool*, Proc. of CIEAEM 45, 1994, pp.186-192.
Reggiani M., *Insegnare a programmare nella scuola media inferiore: obiettivi, risultati, difficoltà, riflessioni*, IMSI, vol. 17 B, n.1, 1994, pp.65-91.
Reggiani M., *Analisi di difficoltà legate all'uso di convenzioni nel linguaggio aritmetico-algebrico*, Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo, Salsomaggiore 1994, pp.61-66.
Reggiani M., *Generalization as a basis for algebraic thinking: observations with 11-12 year old pupils*, Proc. PME XVIII, vol.IV, 1994, pp.97-104.
Zampieri L., *Raccontare attraverso un grafico. Parte I e II*, IMSI, vol.17a, 1994, n.3, pp.209-245, n.4, pp.363-376.

Nucleo di Ricerca Didattica di PISA

Indirizzare le richieste di copie ai singoli Autori: *Dipartimento di Matematica, Università, via F. Buonarroti 2, 56127 Pisa.*

Mariotti M.A., *Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems*, Proc. XV PME Conference, 1991.
Mariotti M.A., Bianchi N., *Le intuizioni coinvolte in problemi di divisibilità*, EM, vol.2, 1991, n.2.
Mariotti M.A., *Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspect*, Topologie structurale / Structural topology, vol. 18, 1992.

Mariotti M.A., *Immagini e concetti in geometria*, IMSI, vol.15, n.9, 1992, pp.865-884.
Mariotti M.A., *The dialectical process between figures and definition in social interaction in the classroom*, Proc. of the Second Italian-German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics, 1992.
Mariotti M.A., *Strategie di conteggio del numero delle facce, dei vertici e degli spigoli di un poliedro*, IMSI, vol.16, n.7, 1993, pp.591-608.
Mariotti M.A., *Il ruolo della visualizzazione in matematica*, SV, XXIX, 2, 1993.
Mariotti M.A., *Il ruolo della visualizzazione interna ed esterna nella costruzione della conoscenza*, in stampa sugli Atti del convegno "La costruzione della conoscenza matematica nella scuola media", 1993, SEI.
Mariotti M.A., *The influence of standard images in geometrical reasoning*, Proc. of the XVII PME Conference, 1993.
Mariotti M.A., *Images and concepts in geometrical reasoning*, in corso di pubbl. su R.Sutherland (ed.), *Proc. of the Nato Advanced Research Workshop "Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education"*, Springer-Verlag.
Mariotti M.A., *Figural and conceptual aspects in a defining process*, Proc. of the XVIII PME Conference, 1994.
Mariotti M.A., *Il ragionamento geometrico nell'ambito dei problemi di insegnamento/apprendimento della matematica*, in B.D'Amore (ed.), *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, Pitagora, Bologna 1994.
Prodi G., *La ricerca in Didattica della Matematica*, IMSI, vol.15, 1992.
Prodi G., *Riflessioni sull'insegnamento dell'Analisi Matematica*, IMSI, vol.16, 1993.
Prodi G., *Didattica della Probabilità*, SD, 1992.
Prodi G., *Spunti didattici tratti dalla geometria dei numeri*, Atti del XV Convegno UMI-CIIM (Grosseto, 1992), Suppl. al NUMI.
Villani V., *Aspetti culturali e abilità tecniche della matematica*, NUMI, vol.18, 1991, Suppl. al n.5, pp.1-7.
Villani V., *Matematica per discipline bio-mediche*, McGraw-Hill It., 1991.
Villani V., *Macchine di Turing e loro simulazione al calcolatore* (in collab. con Villani A.), AR, 1991, pp.7-20.
Villani V., *Quale matematica per l'Europa del 1992*, AR, 1991, pp.163-175.
Villani V., *Riforma della scuola secondaria superiore: le proposte della Commissione Brocca*, AR, 1992, pp.115-123.
Villani V., *Il tema di matematica per la maturità scientifica 1992*, AR, 1992, pp.163-174.
Villani V., *Riviste di didattica della matematica: una panoramica internazionale*, AR, 1992, pp.212-215.
Villani V., *Didattica della geometria delle trasformazioni*, Pubbl. dell'IRRSAE Marche, 1992.
Villani V., *Rigore e significato in matematica*, IMSI, vol.16, n.5-6, 1993, pp.431-445.

Villani V., *Vecchio e nuovo nell'insegnamento della matematica*, Annali della P.I., vol 38, n.5-6, 1992, pp.567-578.
Villani V., *Perché la matematica è difficile*, in: *Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà*, n.2, a cura di M. Pertichino, P. Sandri, R. Zan, Pitagora, Bologna 1993.
Villani V., *Disegno e definizione del cubo*, (in collaborazione con Favilli F.), IMSI, vol.16, n.10, 1993, pp.908-925.
Villani V., *Insegnamento della matematica: la noia della routine quotidiana, la molla della curiosità, il fascino del rischio, la paura dell'ignoto*, in *Alla scoperta della Matematica, per una didattica (più) viva*, a cura di B. D'Amore, Pitagora, 1993.
Villani V., *Errori nei testi scolastici: Algebra*, AR, 1993, pp.51-65; *Geometria*, AR, 1993, pp.134-144; *Analisi*, AR, 1993, pp.163-179; *Calcolo numerico, Logica, Informatica*, AR, 1994, pp.3-18; *Probabilità, Statistica, Matematizzazione*, AR, 1994, pp.51-64; O*ltre i programmi ministeriali*, AR, 1994, pp.115-127.
Villani V., *L'insegnamento preuniversitario della geometria: molte domande, qualche risposta*, IMSI, vol 17, n. 5, 1994, pp.440-457.
Villani V., *L'insegnamento della geometria nei nuovi programmi della scuola italiana*, (in corso di pubbl.).
Zan R., *Questioni psicologiche connesse con la risoluzione dei problemi*, SD, n.15, 1991.
Zan R., *I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare*, IMSI, vol.14, n.7, n.9, 1991, vol.15, n.1, 1992.
Zan R., *Il ruolo del contesto e della domanda nel problema espresso in forma verbale*, MD, n.2, 1992.
Pertichino M., Sandri P., Zan R. (a cura di), *Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà*, Pitagora, Bologna, 1993.

Unità Operativa di PISA (Dipartimento di Informatica)

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Eugenio Morreale, Dipartimento di Informatica, Università, Corso Italia 40, 56125 Pisa.*

Agostini L., Alberti C., Carducci L., Celi F., Laganà M.R., Pantani M., Parrini U., *Costruzione di un sistema autore per la realizzazione di software multimediale finalizzato alla comprensione del testo*, Atti Convegno "Sistemi multimediali intelligenti", Ravello, 1994, pp.278-283.
Alberti C., Celi F., Laganà M.R., *L'ABC con il CD: un ambiente ipermediale per l'avviamento alla lettura, alla scrittura e alla comprensione del testo*, Atti Didamatica '93, Genova, 1993, pp.269-278.

Alberti C., Balestracci D., Corbani L., Celi F., Laganà M.R., *Multimedialità e apprendimento della geografia*, Atti Didamatica '94, Cesena, 1994.
Alberti C., Borromeo E., Carosi P., Celi F., Laganà M.R., Morreale E., *Informatica e didattica: alcune recenti esperienze*, Atti Convegno "Sistemi multimediali intelligenti, Ravello, 1994, pp.341-365.
Alberti C., Celi F., Di Bello P., Laganà M.R., Mastrolorenzo A., *Dotto: un sistema multimediale per l'apprendimento della lettura*, in Pecchia L., Saba A., Alberti C., *Informatica, Didattica e Disabilità*, CNR, Pisa, 1992.
Alberti C., Celi F., Laganà M.R., *Multimedialità e apprendimento della lettura e della scrittura*, in Andronico A., Leoni G., Sacerdoti G., Tucci S. (eds.), *Didamatica '92*, Edizioni Enne, Campobasso, 1992.
Borromeo E., Carosi P., Morreale E., *Sbagliando si I.M.P.A.R.A.*, DS, 171, 1994, pp.16-19 (parte 1ª); 172, 1994, pp.40-46 (parte 2ª).
Borromeo E., Carosi P., *Sostegno e recupero nella sperimentazione I.M.P.A.R.A.*, Atti II Conv. Naz. Informatica Didatt. e Disabilità, vol.III, Pisa, 1991, pp.796-799.
Borromeo E., Carosi P., *I.M.P.A.R.A.*, in Andronico A., Casadei G., Sacerdoti G. (a cura di), *Software didattico '94 - Documentazione di esperienze*, CLUEB, Bologna, 1994, pp.95-111.
Borromeo E., Carosi P., *La sperimentazione I.M.P.A.R.A., un approccio pluralistico, trasversale e operativo all'informatica nella scuola dell'obbligo*, Atti 1° Conv. Naz. di Studio "L'Informatica nella Scuola di Base", Fabriano, 1993, in corso di stampa.
Borromeo E., Carosi P., Morreale E., *I.M.P.A.R.A.: un approccio trasversale all'informatica nella didattica*, Atti "Didamatica '93", Genova, 1993, pp.19-34.
Borromeo E., Carosi P., *Sperimentazione I.M.P.A.R.A., esperienze di introduzione sistematica e trasversale dell'informatica nella scuola dell'obbligo*, Sensate Esperienze, n.17, 1993, pp.19-23.
Borromeo E., Maffei M.C., *Una esperienza di informatica nella Scuola Media*, Atti del XV Convegno UMI-CIIM, NUMI, 1993, pp.127-135.
Carosi P., Fabretti M., Borromeo E., *Alla scoperta del cielo vicino: il sistema solare*, in Andronico A., Casadei G., Sacerdoti G. (a cura di), *Software didattico '94 - Documentazione di esperienze*, CLUEB, Bologna, 1994, pp.85-93.
Costagli F., *Simulazione di esperienze di fisica al calcolatore*, SMI, 3, 1990.
Forcellini D., Laganà M.R., Turrini G., Zanchi G., *Trasformazione di testi in ipertesti*, Atti Congresso AICA '91, Siena, 1991.
Gilardi M.R., Laganà M.R., Meini G., Turrini G., Zanchi G., *Cucciolo: Un sistema destinato a far rumore*, Atti Conv. Informatica, Didattica, Disabilità, Pisa, 1991.
Gilardi M.R., Laganà M.R., Meini G., Turrini G., Zanchi G., *Listen to me*, Proc. Conf. Computers for Handicapped Persons, Vienna, 1992.
Gilardi M.R., Laganà M.R., Turrini G., Zanchi G., *Un sistema autore per l'educazione delle capacità uditive nel bambino cieco*, Atti Convegno Informatica e Didattica, Salerno, 1990.
Laganà M.R., Leoni G., Santilli P., *Babel: an author system for teaching a foreign language*, Proc. Education and Application of Computer Technology, Sant Feliu (Spain), 1990.
Lagana M.R., Morreale E., Silva M., Tognocchi M., *Multimedialità ed educazione ambientale*, Atti Conv. "Sistemi multimediali intelligenti", Ravello, 1994, pp.251-257.
Laganà M.R., Orsini M., Picchetti M., *Il dettato musicale con la moderna tecnologia*, Atti "Didamatica '94", Cesena, 1994.
Laganà M.R., Turrini G., Zanchi G., *Experiments on the compression of dictionary entries*, Proc. Data Compression Conference, Snowbird, Utah, 1991.

Nucleo di Ricerca Didattica di POTENZA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Margherita Fasano, Dipartimento di Matematica, Università della Basilicata, via N. Sauro 85, 85100 Potenza.*

Fasano M., *Quadro generale degli obiettivi e contenuti dell'informatica per la scuola media inferiore*, in *Moduli - L'informatica come e perché - Documenti di Ricerca*, IBM, Milano, 1989, pp.6-18.
Fasano M., *Elementi per un itinerario informatico*, in *La Secondaria al lavoro - L'esperienza della Scuola superiore di San Marino*, Giunti & Lisciani Editori, Teramo, 1989, pp.188-195.
Fasano M., *Alcune riflessioni sull'introduzione dell'informatica nella scuola elementare*, Orientamenti pedagogici, anno XXXVI (1989), n.6, pp.1225-1238.
Fasano M., *Iniziazione agli ipertesti*, Atti del Convegno "Informatica e Didattica", Salerno, Ed. Elea Press, 1990, pp.133-140.
Fasano M., Polo M., *La formazione degli insegnanti in servizio: una proposta per la didattica della matematica*, Annali della Pubblica Istruzione, nn.5-6, anno XXXVIII (1992), Le Monnier, Roma, pp.671-686.
Fasano M., *Mezzi e strumenti, organizzazione della classe, valutazione nella costruzione delle conoscenze matematiche*, Atti del Convegno "La costruzione della conoscenza matematica nella scuola media", SEI, Torino, 1993, pp.105-117.
Fasano M., *Sviluppo del pensiero matematico e tecnologia*, Atti del Convegno "L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica", Pitagora, Bologna, 1994, pp.13-22.
Fasano M., *La videoregistrazione come strumento di analisi del rapporto alunno-calcolatore*, Atti del Convegno "Sistemi multimediali intelligenti", Elea

Press, 1994, pp.258-262.
Fasano M., *Un modello per la formazione degli insegnanti in servizio*, Atti del Convegno "Didamatica '94", in corso di pubblicazione.

Nucleo di Ricerca Didattica di ROMA

Indirizzare le richieste di copie ai singoli Autori: *Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo", Università "La Sapienza", Piazzale A. Moro 2, 00185 Roma.*

Scuola Elementare
Ardizzone M.R., Cilento E., Lanciano N., Marlia A.M., Pierotti A., *Dal Pantheon alla geometria - una ricerca che è anche ricerca di innovazione*, IMSI, (1994), n 1 pp.33-68.
Ardizzone M.R., Lanciano N., *The notion of three-dimensional space in the learning of geometry in primary school*, International Symposium SENT 93 - Elementary Mathematics Teaching, Praga 1993, pp.29-32.
Bernardi C., L. Cannizzaro, P. Mentrasti, N. Lanciano (a cura di), *La matematica nella Scuola elementare - 1° volume: "Geometria", 2° volume: "Il numero e le abilità numeriche", 3° volume: "Logica. Informatica. Probabilità e statistica"*, La Nuova Italia, Firenze 1990-1.
Bernardi C., Cannizzaro L., *C'è numero e numero*, VS, XLVII, 1993, n.8, pp.24-34.
Bolletta R., *La prova di matematica*, in *CENSIS, "La valutazione nella scuola italiana: proposte operative e monitoraggio della riforma della scuola elementare"*, Roma, 1992, pp. 227-275 e 381-436.
Bolletta R., *Le competenze matematiche*, in *CENSIS, "Monitoraggio della riforma della scuola elementare. Rapporto finale"*, vol I, Roma 1992, pp.174- 255.
Bolletta R., *La rilevazione delle competenze matematiche*, in *CENSIS, "Monitoraggio della riforma della scuola elementare. Rapporto finale"*, vol II, Roma, 1992, pp.47-67 e 216-227.
Cannizzaro L., *La prima educazione matematica nel settore aritmetico*, IMSI, 15 (1992), n.3, pp.236-252.
Cannizzaro L., *The changing faces of numbers*, International Symposium ENT 93, Elementary Mathematics Teaching, Praga 1993, pp.3-8.
Lanciano N., *Guardare lo spazio ed il tempo*, Cooperazione Educativa, n.6, 1990, pp.10-15.
Lanciano N. et al., *Dall'orizzonte al cielo*, in *L'educazione scientifica nella scuola elementare*, a cura di F.Duprè, La Nuova Italia ed., 1991.
Lanciano N., *Eppure non si move*, VS, Giunti ed., 1992.
Lanciano N., *Aspects of teaching learning geometry by means of astronomy*,

Atti del I Simposio Italo -Spagnolo a cura di Malara N. e Rico L., C.N.R. Univ. di Modena (1994), pp.43-49.
Ragusa Gilli L., Rohr F., Sacchetti I., *Geometria dall'esperienza e dal gioco*, Giunti Lisciani, 1990.

Scuola Media
Barra M., *Mathematiques dans la vie*, PLOT, pp.5-25, n.50, 1990.
Barra M., *Gioco, sviluppo, apprendimento, attitudini sociali e matematica*, in *Incontri con la matematica*, Quad. 2-3, pp.67-82, 1990.
Barra M., *Matematica ed allievi in difficoltà*, in *Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà*, a cura di M. Pertichino, P. Sandri e R. Zan, Pitagora, 1993, pp.61-76.
Benedetti N., Clerico M., *Il passaggio dalla scuola dell'obbligo alla scuola superiore*, EP 13, 1 (1993), pp.45-48.
Bernardi C., *L'educazione logica nella Scuola Media*, SD, XXXV, 1990, n.16, pp.25-28.
Bernardi C., *Intuizione e riflessione critica nell'apprendimento della matematica*, Atti del Convegno "La costruzione della conoscenza matematica nella Scuola Media", pp.79-87, SEI, Torino 1994.
Bolletta R., *Sviluppo di alcune abilità matematiche nella scuola dell'obbligo, dati per la continuità*, in pubbl. negli Atti del seminario sulla continuità organizzato dal comune dei Seriate nel 1993.

Scuola Superiore
Ascoli Bartoli M.T., *Quelques observations sur les erreurs de logique dans les classes d'eleeves ages de 14-15 ans*, in Atti del 39° Convegno CIEAEM, Universitè de Sherbrooke (1988).
Barra M., *Savoir prouver*, PLOT, pp.29-32, 1990.
Barra M., *Calcolo delle probabilità, statistica e conoscenza induttiva*, ID, pp.23-31, n.0, 1990.
Barra M., *Il gioco della matematica*, in *Matematica, gioco e apprendimento* (a cura di B. D'Amore), AP, pp.19-27, 1990.
Barra M., *Aspetti epistemologici e storici relativi alla "legge dei grandi numeri" e alla "legge empirica del caso" a partire dai Greci*, ID, n.2, 1991, pp.17-32.
Barra M., *Being able to see in d-Dimentional Spaces*, Proc. of the First Italian-Spanisch Research Symposium in Mathematics Education, Modena, 1994.
Barra M., *Valutazioni della probabilità nella storia*, Atti del Convegno "Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana", (Ancona 1992), pp.143-174.
Barra M., *Probabilità e statistica nella scuola secondaria*, interv. ad una tavola rotonda nel XVI Conv. nazionale UMI-CIIM, NUMI, 1994, suppl. al n.7, pp.59-69.

Batini M., *Un primo incontro con la probabilità*, ID, n. 8 (1994), pp.133-148.
Batini M., Percario L., *Introduzione alla dimostrazione*, in corso di stampa sugli Atti del III Internuclei Scuola Secondaria Superiore.
Bernardi C. (con Tazza C.), *I quantificatori in logica matematica*, Didattica delle scienze e informatica nella scuola, XXV (1990), n.148, pp.49-54.
Bernardi C., *Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della "e"*, EP III (1990), n.2, pp.37-42.
Bernardi C., *Osservazioni sulla didattica della Logica matematica*, in *Il Piacere della Matematica* (a cura di Z. P. Dienes), Cappelli Ed., Bologna 1991, pp.179-187.
Bernardi C., *Il formalismo matematico fra astrazione e realtà*, EP VI (1993), n.14, pp.9-13.
Bernardi C., *La Logica nella Scuola Secondaria*, IMSI, vol.16 (1993), n.11-12, pp.1041-1060.
Bernardi C., *Problemi per la logica (ovvero, la logica per problemi)*, IMSI, vol.17A-B (1994), n.5, pp.507-521.
Bolletta R., *Il rendimento in matematica all'inizio della scuola superiore: gli esiti del test VAMIO-CEDE*, in: Autori vari, *La produttività della scuola nella provincia di Bergamo. Saper scrivere saper leggere saper calcolare: il profitto degli alunni e il sistema valutativo*, Provv. Agli Studi di Bergamo, 1990.
Bolletta, *L'accertamento e la valutazione delle abilità matematiche mediante il test VAMIO all'ingresso della scuola secondaria superiore nella provincia di Trento*, Didascalie, IRRSAE Trento, suppl n.4, 1993.
Cavallaro B., Celentano A., *Scale e funzioni logaritmiche*, EP 16, 1, 1994, pp.28-32.
Crespina E., *Tassellazioni come ambiente di esercizi*, in corso di stampa sugli Atti del III Internuclei Scuola Secondaria Superiore.
Cruciani R., *Sul diametro delle figure piane*, AR, anno XLV (1993), n.1.
Ferrari E., Laganà G., Luzi E., Trovini E., *Il concetto di infinito nell'intuizione matematica*, in corso di stampa su IMSI.
Lanciano N., (con Dilaghi E. e Farinella P.), *Il sole e l'energia solare*, Giunti Marzocco, Firenze 1991.
Lanciano N., *Le meridiane filari*, Astronomia UAI, n 10, 1990, n 1, 1991.
Lanciano N., *Strumenti matematici per l'Astronomia*, EP n. 14 (1993), pp.32-38.
Mancini Proia L., *Valori nell'insegnamento della matematica*, EP 7, 1 (1990), pp.11-16.
Menghini M., *Problematiche didattiche attuali e sviluppo storico dell'analisi matematica*, IMSI, vol.14, n.10 (1991), pp.909-929.
Menghini M., *"Punti di vista" sulle coniche*, AR, Fasc.2 (1991), pp.84-106.
Menghini M., *Piano affine e "costruttivismo"*, MD, 4(1992), pp.5-13.
Menghini M., *The Form in Algebra: reflecting with Peacock, upon the Teaching in Secondary Schools*, accettato per la pubbl. su For the Learning of Mathematics.
Menghini M., Maraschini W., *Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria*, EM XIII (3), 1992, pp.161-180.
Pugliese R., Spagnuolo I., *Definizioni e dimostrazioni, cardini della matematica*, in Atti del II Internuclei Scuola Secondaria Superiore, Quaderni TID n. 13 (1992).

Università

Accascina G., V. Villani, *Algebra lineare*, E.T.S, Pisa, 1989.
Bernardi C., *I matematici e l'indirizzo didattico*, in corso di stampa su EM.

Formazione Insegnanti, Aggiornamento

Altieri Biagi M.L., Barra M., Corda Costa M., Perussia F., Mauri G., Veggetti S., Volterra V., *Dibattito su: "L'apprendimento" in l'Utopia e il Progetto. Una scuola per sapere*, CIDI, XVI Conv. Naz., Roma '90 e in Insegnare nn.8/9 e 10, pp.56-62 e 51-56, 1990.
Barra M., Zanardo R. (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica*, vol.5, XII incontro, Scuola di Specializzazione, Univ. di Siena, 1988.
Barra M., Fasano M., Ferrari M., Furinghetti F., Malara N.A., Speranza F., *Some Italian contributions in the domain of the psycology of mathematics education*, edited on the occasion of the PME XV conference, Dip. di Matematica, Univ. di Genova, 1991.
Barra M., Ferrari M., Furinghetti F., Malara N.A., Speranza F., *The Italian research in mathematics education: common roots and present trends*, Progetto strategico del C.N.R., TID, Quad. n.12, 1992.
Barra M., *Random Images on mental images*, in *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* di prossima pubbl., Springer-Verlag.
Bernardi C., *Archimede risponde - n.1*, AR, XLIII, 1991, pp.176-183; *n.2*, AR, XLIV, 1992, pp.175-185; *n.3*, AR, XLV, 1993, pp.66-75; *n.4*, AR, XLVI, 1994, pp.65-77.
Bolletta R., *La ricerca VAMIO e intervento nella discussione*, Ricerca Educativa, 1990, 1-2, pp.148-157 e 172-173.
Bolletta R., *Valutare in matematica*, Res, 1992, 4, pp.28-31.
Bolletta R., *Dedalo, statistiche per la formazione. Corso per l'autoaggiornamento degli operatori della formazione professionale. Ideazione e sceneggiatura multimediale*, SEVA-ISFOL, 1992.
Cannizzaro L., Menghini M., *La didattica della Matematica*, EP 11, (1992), n.1, pp.49-51.
Cannizzaro L., *Mathematical models of real world phenomana: some historical developments as a guideline for identifying cultural aims*, apparirà negli Atti del Secondo Incontro Bilaterale Italia-Germania sulla Didattica della Matem., 1992.

Emmer M., *Il nuovo immaginario matematico*, in B. Vertecchi (ed.), *Una scuola per tutta la vita*, La Nuova Italia, 1991, pp.119-134.
Emmer M., *Scrivere sulla matematica*, Didattica della Mat., VI, n.3, 1992, pp.8-12.
Emmer M., *Il museo di matematica*, Didattica della Mat., n.2, 1993, pp.131-147.
Emmer M. (con Marchiafava V.), *Bulles de savon, un spectacle des mathematiques*, in A. Giordan, J.-L. Martinand, D. Reichwarg (eds.), *Science et technique en spectacle*, L.I.R.E.S.T., Univ. Paris 7, 1993, pp.61-70.
Emmer M. (con Marchiafava V.), *Bolle di sapone: uno spettacolo di matematica*, in B. D'Amore (ed.), *Alla scoperta della matematica*, Pitagora, Bologna, 1993, pp.25-35.
Lanciano N., *Il cielo laboratorio privilegiato dell'astronomia*, in *Incontrare la Scienza - Riflessioni e proposte rivolte Agli insegnanti*, a cura di G. Cortini, La Nuova Italia, 1991, pp.243-254.
Lanciano N., *Imaginaire et connaissance*, in Actes des XII Journees Internationales de l'Einsegnement Scientifiques, 1990, pp.221-225.
Lanciano N., *Su alcune linee meridiane di Roma del XIX secolo*, preprint, Convegno della Società Astronomica Italiana, Specola Vaticana, 1991.
Lanciano N., *Le ciel nous ouvre son spectacle*, Actes XIV Journees Internationales de Chamonix, 1993, A.Giordan, J-L. Martinand, C. Souchon eds.
Lanciano N., *Concepciones, percepciones y emociones en la diadactica de la Astronomia: Ptolomeo y Copernico*, in pubbl. negli Atti delle II Jornadas Nacionales de Astronomia en la ensenanza, Alicante 1993.
Lanciano N., *Il piano equatoriale e il mappamondo parallelo*, in pubblicazione negli Atti del V Seminario di gnomonica, S. Feliciano (Pg), 1993.
Lanciano N., *Concezioni ostacolo in Astronomia: la visione spaziale*, EM (1994), n.1, pp.5-20.

Epistemologia, divulgazione, generalità

Bernardi C., Menghini M., *Sistemi elettorali proporzionali. La "soluzione" italiana*, Boll. UMI (serie VII), vol. IV-A (1990), pp.271-293.
Bernardi C., *Nessuno ci scaccerà ...*, in *Epistemologia della Matematica*, n.1 (a cura di F. Speranza), Progetto TID (CNR), quaderno n.10 (1992), pp.89-100.
Bernardi C., *Il metodo matematico nella ricerca e nella didattica*, in corso di pubbl. sugli Atti del Convegno "Filosofia, Logica, Matematica, dal periodo classico al nostro secolo", Ancona, 1993.
Bernardi C., *La matematica pura nella divulgazione: un fascino discreto*, in *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, (a cura di B. D'Amore) pp.3-12, Pitagora, 1994.
Bernardi C., *Gian-Carlo Rota: un matematico che riflette sull'attività del matematico*, in corso di stampa su AR.

Emmer M., *Mathematics and the Media*, in A. J. Howson, J. P. Kahane (eds), *The popularization of Mathematics*, ICMI, Cambridge Univ. Press, 1990, pp.89-102.
Emmer M., *Mathematics and Technologies*, in D. L. Ferguson (ed), *Advanced technologies in the teaching of Mathematics and Sciences*, Computer and System Sciences Series, v.107, Springer-Verlag, Berlino 1993, pp.617-646.
Emmer M., *Mathematics & Technology*, in B. Jaworski (ed.), *Technology in Mathematics Teaching TMT 93*, Birmingham University, 1993, pp.221-228.
Emmer M., *La matematica è di scena. Matematica e media: alcune riflessioni*, in A. Bernardi, S. Cerrato, P. Universo, *La matematica tra didattica e cultura*, La comunicazione scientifica, Laboratorio Immaginario Scientifico, Trieste, 1993, pp.9-27.
Emmer M, *Can Mathematics play a Cultural Role?*, in B. Schiele (ed), *When Science becomes Culture*, Universitè de Quebec, Editions Multipmonde, Montreal 1994, n.28.
Emmer M., *L'occhio di Horus*, Sapere, vol. 56, n. 1 (1990), pp.25-30.
Emmer M., *La perfezione visibile: matematica e arte*, Ed. Theoria, Roma, 1991.
Emmer M., *Le bolle di sapone: viaggio tra arte, scienza e fantasia*, La Nuova Italia, Firenze, 1991.
Emmer M., *Meandri e labirinti*, XY Dimensioni del disegno, vol.5, n.13 (1992), pp.16-23.
Emmer M., *La Venezia perfetta*, Centro Intern. Grafica, Venezia, 1993.
Emmer M. (a cura di), *Visual Mathematics*, numero speciale di "Leonardo", Pergamon Press, Oxford, vol.25 n.3/4, 1992.
Emmer M., *The Visual Mind: Art and Mathematics*, The MIT Press, Cambridge, 1993.
Emmer M., *La matematica visiva*, EP, anno VII, n. 2, 1994, pp.3-9.
Emmer M., *How Computer Graphics is Changing Mathematical Research*, in Atti congresso "Structures in Mathematicl Theories", appendice, San Sebastian, 1990.
Menghini M., *Divulgare matematica: al cittadino non far sapere...*, EP 8, II (1990), pp.57-59.
Menghini M., *Quella dimensione in più...*, EP 15, III (1993).
Menghini M., *C'è geometria e geometria*, EP 17, I (1994),
Menghini M., *Die euklidisce Methode im italienischen Geometrieunterricht seit 1867*, in *Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften*, Band I: Mathematik, Schriftenreihe der Pedagogischen Hochschule Heidelberg, Deutscher Studien Verlag, Weinheim 1994.

Software, film, videocassette

Emmer M. (con Falcone M. e Finzi Vita S.), *Analisi matematica al computer: ricerca degli zeri*, 20 min., Progetto Strategico CNR "Nuove tecnologie per la

didattica", 1990.
Emmer M. (con Loreto L.), *I gruppi di simmetria*, 20 min., Progetto strategico CNR "Nuove tecnologie per la didattica", 1990.
Emmer M., *La Venezia perfetta*, 20 min., 1993.
Emmer M., *Oltre il compasso: la geometria delle curve*, in collab. con E. Giusti e F. Conti, 27 min., progetto MURST-Scuola Normale Pisa per "Il museo di matematica", Centro didattico Televisivo, Univ. Firenze, in fase di montaggio.

Unità Operativa di SIENA

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Brunetto Piochi, Dipartimento di Matematica, Università, Via del Capitano 15, 53100 Siena.*

Andronico A., De Blasi M., Sacerdoti G. (a cura di), *Atti Didamatica '89*: "Esperienze di applicazione di software didattico", Laterza, Bari 1989.
Marmugi I., Bellio I., *La geometria delle trasformazioni e il linguaggio LOGO*, in Andronico, De Blasi, Sacerdoti (a cura di), *Atti Didamatica '89*, pp.119-122.
Mazzanti G., Moscucci M., Salomone L., *Alcune curiosità relative al triangolo di Tartaglia*, PM, s. VI, 65, 3 (1989), pp.34-50.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Complessi somiglianti agli interi: gli interi gaussiani*, AR 2 (1989), pp. 71-87.
Mazzanti G., Piochi B., *Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della Matematica*, DS, 149 (1990), pp. 45-50.
Andronico A., *The computer laboratory connected with the "IRIS project" in elementary school*, in Atti 2nd East/West invitational seminar on "New technologies in education", Leningrad 1990.
Andronico A., *Un progetto di intervento nell'attività educativa*, Atti Conv. "Informatica e Didattica", Salerno 1990.
Marmugi I, Bellio I., *Il LOGO nella scuola elementare*, Atti Conv. "Informatica e Didattica", Salerno 1990.
Andronico A., Parisi R., Sacerdoti G. (a cura di), *Atti Didamatica '90*, Ed. Tacchi, Pisa 1990.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Simmetrie non lineari: le inversioni rispetto a una circonferenza*, MD, 5 (1991) (2), pp.25-31.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Generalizzazione del concetto di inversione circolare*, MD, 5 (1991) (3), pp.30-35.
Mazzanti G., Piochi B., *Il Principio di Induzione*, IMSI, 14, 2 (1991), pp.107-136.
Andronico A., Casadei G., Sacerdoti G. (a cura di), *Atti Didamatica '91*, Forlì 1991.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Punto e basta*, VS, XLVI, 5 (1991), pp.8-10.

Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Perfettamente sottosopra*, VS, XLVI, 6 (1991), pp.14-17.
Pagli P., Piochi B., *L'utile inutilità della Logica*, VS, XLVI, 7 (1991), pp.14-17.
Piochi B., *Come motivare lo studente alla dimostrazione*, in F. Furinghetti (ed.), Atti 2° Incontro N.R.D. scuola secondaria superiore, Quaderno CNR-TID n.13, 1991.
Bianchi R., Piochi B., *Una via geometrica elementare per la ricerca del minimo su una famiglia di funzioni*, AR, 1 (1992), pp.30-35.
Piochi B., *Una introduzione alla Combinatoria: i codici e la Parola di Fibonacci*, DS, 158 (1992), p.41-47.
Andronico A., Leoni G., Sacerdoti G., Tuucci S. (a cura di), *Atti Didamatica '92*, Ed. Enne, Campobasso 1992.
Andronico A., Cossa L., Gagliardi M., Spera C., *A structured model to manage a large number of Transactions*, Proc. Int. Workshop on Project Management and Scheduling, Como 1992.
Andronico A., Gagliardi M., Spera C., *B.L.O.O.M.S.: Basic Language Object Oriented for Management Systems*, Proc. Management System Conference, Denver 1992.
Andronico A., Gagliardi M., Lomagistro P., Spera C., *The Recognition Phase*, EUROXXI/TIMS XXXI, Helsinki 1992.
Andronico A., Cossa L., Gagliardi M., Spera C., *An Object Oriented Approach to a Model Management System: Characteristics and Examples*, Atti Conv. ANIPLA, 1992.
Pacini P.,. Papi Pacini E., Piochi B., *Quale geometria*?, in C. Marchini e F. Speranza (a cura di), Atti 3° incontro Internuclei matematici delle scuole sec. sup., Parma 1992.
Doretti L., Mazzanti G., Piccione M., *Rappresentazione analitica delle isometrie piane*, IMSI, 16, 8 (1993), pp.757-777.
Piochi B., *Problemi di minimo risolvibili con metodi elementari*, in B. Micale e G. Pluchino (a cura di), Atti Convegno UMI-CIIM "Aritmetica, informatica, logica nell'educazione matematica", NUMI, suppl. n. 5, 1993, pp.137-140.
Andronico A., Forcheri P., Molfino M.T., Pedemonte O., Sacerdoti G. (a cura di), *Atti Didamatica '93*, Stampa CDS, Genova 1993.
Andronico A., *Informatica e Didattica*, Atti Seminario "Innovazione e Tradizione nella Scuola", Bracco 1993.
Bellissima F., Pagli P., *La verità trasmessa*, Sansoni, Firenze 1993.
Contardi A., Pertichino M., Piochi B., *Matematica Possibile: come facilitarne l'apprendimento a tutti gli alunni*, Ed. Del Cerro, Tirrenia 1993.
Piochi B., *Acquisizione e rafforzamento di concetti matematici nel lavoro con la classe*, in M. Pertichino, P. Sandri, R. Zan (a cura di), Atti 2° Convegno Matematica e Difficoltà, Pitagora, Bologna 1993, pp. 149-157.

Andronico A., *Principi e concetti dell'informatica per l'apprendimento nella scuola di base*, Atti "Innovazione e tradizione nella scuola", Milano 1993.
Andronico A., Bellucci M., Cardinali M., Giannetti R., Lusini F., *Sulla interpretazione automatica di normative con l'uso del linguaggio naturale: apporto ai processi di apprendimento*, Atti Conv. "Informatica, didattica, disabilità", 1993.
Piochi B. (a cura di), *Atti 4° Incontro N.R.D. scuola superiore*, "Funzioni, limiti, derivate: come, perché, quando, con quali strumenti insegnare l'analisi nei diversi ordini di scuola", Quaderni IRRSAE Toscana, 1994.
Pacini P., Papi E., Piochi B., *Proposta di un questionario di analisi*, in B. Piochi (a cura di), Atti 4° Incontro N.R.D. scuola superiore, 1994, pp.123-134.
Andronico A., Marmugi I., Simoncini M., *Funzioni, Mappe Cognitive e Ipertesti: un progetto ed un'esperienza nella scuola dell'obbligo*, in A. Gisolfi (a cura di), *Multimedia, beni culturali e formazione*, Salerno 1994.
Caredda C., Piochi B., Sandri P. (a cura di), *Atti 3° Convegno Matematica e Difficoltà*, "Handicap e svantaggio", Pitagora, Bologna 1994.
Contardi A., Pertichino M., Piochi B., *Obiettivi matematici e crescita nell'autonomia*, in C. Caredda, B. Piochi, P. Sandri (a cura di), Atti 3° Convegno Matematica e Difficoltà, 1994, pp.199-204.
Contardi A., Pertichino M., Piochi B., *Verso la geometria*, Integrazione, n.1/2 (1994), pp.49-50.
Contardi A., Pertichino M., Piochi B., *Il diritto alla matematica*, Insegnare, n.6 (1994), pp.38-39.
Contardi A., Pertichino M., Piochi B., *Apprendimento della matematica: insegnamento per problemi e alunni con handicap*, Psicologia e Scuola, 71 (XV), 1994, pp.3-8.

Nucleo di Ricerca Didattica di TORINO

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Elisa Gallo, Dipartimento di Matematica, via Carlo Alberto 10, 10123 Torino.*

Pubblicazioni

Gallo E., *Le parole chiave dell'algebra (numeri, variabili, incognite) nell'ottica dei nuovi programmi*, in *Matematica oggi: dalle idee alla scuola*, B. Mondadori, 1990.
Gallo E., *Geometria e logica*, IMSI, vol.13, n.7, 1990.
Gallo E., *Numeri, figure, ... e "Attività" come strumento per fare matematica*, in *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni*, Atti degli Incontri con la Matematica n.5, Castel San Pietro, 1991.

Gallo E., Amoretti C., Testa C., *Mobiliser les modèles: presentation d'un Poster*, Atti del Convegno CIEAEM 42, Szczyrk 1990, 1991.
Gallo E., Battù M., Testa C., *The control in problem resolution* (poster), Atti del PME XV, 1991.
Gallo E., Testa C., *Modèles, stratégies, types de contrôle dans la résolution d'un problème graphique de géométrie*, TDM Tessalonica, n. 8, 1991.
Gallo E., *Il problema del calcolo letterale, il calcolo letterale come problema*, Sem. Naz. di Ricerca in Didattica della Mat., su "Insegnamento e apprendimento dell'Algebra", Pisa, 1992.
Gallo E., *Le contrôle dans la résolution de problèmes: une situation de classe*, Atti del Convegno ICSIMT-CIEAEM 44, Chicago 1992, 1993.
Gallo E., *Modellizzazione e geometria in soggetti di 14/16 anni: presentazione e analisi di ricerche*, Sem. Naz. di Ricerca in Didattica della Mat., su "Geometria: epistemologia-metodologie di ricerca-tendenze attuali", Pisa, 1993.
Gallo E., Sacco M. P., Nilo M., *Un itinerario di geometria per superare alcune difficoltà di apprendimento inerenti ai concetti di angolo e di poligono* (poster), Conv. su "Difficoltà di apprendimento", 7° Internucleo Sc. Elem., Grado, 1993.
Gallo E., *Control and solution of "algebraic problems"*, WALT 1, Torino 1992, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 52,3, 1994.
Gallo E., *Algebraic manipulation as problem solving*, Atti del First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, Modena, 1994.
Gallo E., *Problematizzare per apprendere in matematica*, Conferenze e Seminari 1993-1994, Associazione Subalpina Mathesis e Sem. di Storia delle Mat. "T. Viola", Torino, 1994.
Gallo E., *The ostensive reduction in algebraic manipulation* (poster), Atti del PME XVIII, 1994.
Gallo E., *Le figure, queste sconosciute: come manipolarle, disegnarle, immaginarle per conoscerle meglio*, Atti degli Incontri con la Matematica n. 8, Castel San Pietro, 1994.
Gallo E., *Elaboration of models for problem resolution in interaction with 14/15-year-old pupils*, Atti del Second Italian-German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics, 1992, vol. 39 - IDM - 1994.
Gallo E., Battù M., Testa C., *Evaluation et contrôle dans le calcul littéral comme problème*, Atti del Convegno CIEAEM 45, 1994.
Gallo E., *Il passaggio dal disegno alla figura attraverso l'elaborazione di modelli*, 3° Internucleo per la Scuola Secondaria Superiore, Parma 1992, (in stampa).

Manuali e testi

Gallo E. (a cura di), *La Matematica attraverso Attività. Teoria, Esercizi. I° e II°*, SEI, Torino, 1990.

Gallo E. (a cura di), *La Matematica attraverso Attività, Teoria, Esercizi: commenti per l'insegnante*, SEI, Torino, 1990.
Gallo E., Bertotto M. R., Re P., *La matematica nel laboratorio di informatica*, SEI, Torino, 1990.
Gallo E., Sacco M. P., Del Lungo M. G., *Itinerari di Informatica per la Scuola Elementare*, Pubbl. IRRSAE Piemonte, Quad. n.8, 1992.
Gallo E., Del Lungo M. G., Sacco M. P., *Matematica per un anno, I° e II°*, ed. ATLAS, 1993-94.

Conferenze e comunicazioni

Gallo E., *Le situazioni matematiche ed il problema della continuità nell'insegnamento*, Conf. Mathesis, Bologna, 1990.
Gallo E., Testa C., *L'attività del Nucleo tra innovazione e ricerca: il problema del recupero in algebra*, Com. al 1° Internucleo per la Sc. Sec. Sup., Genova, 1990.
Gallo E., *L'algebra nei nuovi programmi del Biennio della Scuola Secondaria Superiore: un'analisi critica*, Conf. Mathesis, Torino, 1991.
Gallo E., Golzio E., Migliano P., *Problemi con cubi e cubetti*, Com. al Conv. su "I problemi nella Scuola Elementare", 5° Internucleo per la Sc. Elem., Garda, 1991.
Gallo E., *Legami tra insegnamento e ricerca in didattica: 1. Le trasformazioni geometriche come strumenti e come oggetti: un'indagine epistemologica 2. Riconoscere, analizzare, confrontare: tre tappe nella costruzione del pensiero geometrico. Il caso dei poligoni e della loro definizione 3. Il ruolo dei problemi in geometria: osservazione, descrizione, dimostrazione*, Conf. Mathesis, Bologna, 1992.
Gallo E., *Risolvere problemi per acquisire contenuti disciplinari e per sviluppare abilità*, Conf. Mathesis, Varese, 1992.
Gallo E., *Attualizzazione ed evoluzione dei modelli nel fare geometria*, Conf. Mathesis, Pavia, 1992.
Gallo E., Golzio E., Nilo M., *Il problema della rappresentazione di torri di cubi disposte su una scacchiera, da punti di vista diversi*, Com. al 6° Internucleo per la Scuola Elementare, Bocca di Magra, 1992.
Gallo E., Collini A., *L'elaboratore nella didattica delle trasformazioni isometriche*, Com. al 6° Internucleo per la Elementare, Bocca di Magra, 1992.

Nucleo di Ricerca Didattica del Politecnico di TORINO

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Maria Mascarello, Dipartimento di Matematica del Politecnico, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino.*

Mascarello M., Massobrio F., Scarafiotti A.R., *Computer Experiments in teaching discrete dynamical systems at the Polytechnic of Turin (Italy)*, ed. Murillo E.D., Toscano A.Q. e Vincente Cordoba J.L., atti del Conv. "Computational Geometry and Topology and Computation in Teaching Mathematics", Universidad de Sevilla, Grafitres, Utrera 1990, pp.98-106.
Cacciabue R.A., Mascarello M., Scarafiotti A.R., *Algoritmi in competizione: esperienze su problemi di analisi numerica elementare nel triennio I.T.I.S.*, MD, 2, 1990, pp.27-37.
Galizia Angeli M.T., Marconi C., *Sui periodi delle composizioni di funzioni trigonometriche: i concetti di m.c.m. e M.C.D.*, AR, 1990, pp.3-15.
Cacciabue R.A., Mascarello M., Sargenti A., Scarafiotti A.R., *L'enseignement en spirale: experiences realisees en mathematique numerique avec des eleves de 16 a 19 ans*, ed. A.Warbecq, Atti del Conv. CIEAEM 41, Frameries 1991, pp.127-134.
Elia M., Galizia M.T., *A Note on the Controllability Distance for linear Singular Systems*, Proc. of IASTED Symposium, Lugano, 1990.
Mascarello M., Scarafiotti A.R., *Dalla Secondaria ad Ingegneria: difficoltà di un raccordo*, NS, 5, 1991, pp.70-71.
Mascarello M., Scarafiotti A.R., *Ruolo dell'Informatica nella didattica della Matematica nella Sscuola Secondaria Superiore oggi e domani: dal Piano Nazionale Informatica alle nuove proposte di Programmi Sperimentali*, MD, 3, 1991, pp.45-47.
Galizia Angeli M.T., Marconi C., *Matematica e circuiti a corrente alternata: un'esperienza interdisciplinare col supporto del personal computer*, EM, vol.2, 1991, pp.113-124.
Accomazzo P., Cacciabue R.A., Sargenti A., Maggiorotti M., *Problemi matematici e strumenti informatici*, Zanichelli, Bologna, 1991.
Galizia M.T., Malaguzzi C., *Esercitazioni al calcolatore: un percorso didattico sull'integrazione*, MD, n.4, 1992, pp.57-62.
Sargenti A., *L'Analisi di Fourier col supporto dell'elaboratore: un percorso didattico per la scuola secondaria superiore*, EM, vol.3, 1992, pp.85-99.
Elia M., Galizia M.T., *A Note on Bi-dimensional Fast Fourier Interpolation, Control and Computers*, IASTED, vol.20, n.2, 1992, pp.44-48.
Mascarello M., Winkelmann B., *Calculus teaching and the computer. On the interplay of discrete numerical methods and calculus in the education of users of mathematics*, in *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching*, Cornu B. and Ralston A. eds., Science and Technology Education 44, 1992 UNESCO, pp.108-116 .
Mascarello M., Scarafiotti A.R., *Alla ricerca delle valenze interdisciplinari della matematica attraverso i test di ingresso, dall'Università all'impresa*, EM, vol.3, 3, 1992, pp.181-192.
Elia M., Galizia M.T., Marconi C., Mascarello M., *An Information Theory View*

of the Mathematics Teaching/Learning, in *Pre-Conference Proceedings IFIP Open Conference 1993*, Gmunden, Austria, pp.13-16.

Galizia M.T., Marconi C., Mascarello M., Scarafiotti A.R., *Experiences of computer laboratory in mathematics teaching*, in *Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science*, Ferguson D.L. ed., NATO ASI Series, vol. 107, Springer-Verlag, Berlin 1993, pp.585-615.

Galizia M.T., Mascarello M., *Symbolic Mathematical Systems in Teaching Integration and Fourier Series*, in *Conference Proceedings "Technology in Mathematics Teaching"*, TMT93, B.Jaworski ed., Birmingham 1993, pp.253-260.

Galizia M.T., Mascarello M., *Different kinds of software in teaching integration and Fourier series*, Collegiate Microcomputer Vol.XI, 4, 1993, pp.264-274.

Galizia M.T., Mascarello M., *L'Analisi di Fourier con il Computer: dalla Scuola Secondaria Superiore alla Facoltà di Ingegneria*, MD, 3, 1994, pp.308-328.

Gruppo di Ricerca CNR del Politecnico di TORINO

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Anna Rosa Scarafiotti, Dipartimento di Matematica del Politecnico, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino.*

Arnaldi P., *Proposte per la costruzione del concetto di limite in triennio liceo scientifico*, 4° Incontro N.R.D., Siena, 1994.

Arnaldi P., Branda A.M., Travaglini G., *Un'indagine sulle capacità matematiche in studenti di liceo scientifico*, in corso di stampa.

Di Carlo A., Trentin G., *Diagnostic testing in formative assesment: the students as test developers*, Word Yearbook of Education 1990 Assessment and Evaluation Kogan Page, London.

Di Carlo A., Garassino C., Rovero G., *La vérification formative pour orienter tout le procédé de construction de la connaissance*, Atti CIEAEM 45, 1993, pp.124-135.

Di Carlo A., Longo P., *Contributo per una ipotesi costruttiva nell'insegnamento dell'analisi*, Internucleo Scuola Superiore, Siena 1994.

Longo Bruno P., *L'uso didattico dell'errore in matematica*, Conf. per insegnanti di Scuola elementare e media del Distretto di Ciriè, 1993.

Longo Bruno P., *Problemi di didattica della matematica*, Lezioni per gli insegnanti di Scuola Media del Distrettto di Fumane, 1993.

Longo Bruno P., Traduzione, prefazione e cura dell'edizione italiana di "G. Vergnaud, Il bambino, la realtà", ed. Armando, in corso di stampa.

Longo Bruno P., *Le discipline scolastiche per educare: la matematica*, Atti Corso di aggiorn. UCIM, Torino, 1991.

Longo Bruno P., *Dimostrare: ostacoli e valenze della matematica*, Atti 2° Convegno Internuclei CNR Scuola Superiore, 1991.

Longo Bruno P., *I problemi nell'insegnamento della matematica nella scuola elementare e media*, Rapp. interno del Dip. di mat. del Politec. di Torino, n.10, 1991.

Longo Bruno P., *Uso di rappresentazioni esterne nella risoluzione di problemi in un allievo con difficoltà di apprendimento*, in *Handicap e svantaggio*, vol.3, Pitagora 1992.

Longo Bruno P., *Esempio di didattica individualizzata per un allievo di prima media con grave difficoltà di apprendimento* (4 parti), SD.

Longo Bruno P., *La matematica per i soggetti in difficoltà: esperienze di un ricercatore*, Atti del Convegno "Inserimento di handicappati nella scuola superiore", Torino 1994, in corso di stampa.

Longo Bruno P., *Uso di rappresentazioni esterne in un caso di recupero*, Comunic. Internuclei CNR Didattica Scuola Media, Torino 1992.

Longo Bruno P., *Le discipline scolastiche per educare: la matematica*, Atti del Convegno "Insegnare oggi: perché? Educare", IRRSAE Piemonte 1992.

Longo Bruno P., *I problemi della Scuola Elementare*, Conf. Conv. Ass. Diesse.

Longo Bruno P., *Geometria ed organizzazione dello spazio*, relaz. al Convegno Nuclei CNR Scuola Superiore, Parma 1992.

Longo Bruno P., *Didattica della matematica: un caso di recupero in prima media*, Rapporto interno Dip. di Mat. Politecnico di Torino, n.7, 1993.

Longo Bruno P., *Uso di rappresentazioni esterne nella risoluzione di problemi in un allievo con difficoltà di apprendimento*, Atti del Convegno "Matematica e difficoltà", 1993.

Longo Bruno P., Di Carlo A., *Contributo per una ipotesi costruttiva nell'insegnamento dell'analisi: cenni teorici ed esempi*, Atti Internuclei CNR Scuola Superiore, Siena 1994.

Longo Bruno P., *Didattica della matematica contro la dispersione scolastica: relazione su una esperienza per il raccordo tra Scuola Media e Scuola Superiore*, Conf. per insegnanti di scuola media e superiore, Torino.

Scarafiotti A.R., Mascarello M., *Algoritmi in competizione: esperienze su problemi di analisi numerica elementare nel triennio I.T.I.S.*, MD, 2 (1990), pp.27-37.

Scarafiotti A.R., Mascarello M., *Ruolo dell'informatica nella didattica della matematica nella scuola sec. superiore oggi e domani: dal Piano Naz. Informatica alle nuove proposte di progr. sperimentali*, MD, 3 (1991), pp.45-47.

Scarafiotti A.R., Mascarello M., *Dalla secondaria ad ingegneria: difficoltà di un raccordo*, NS 5 (1991), pp.70-71.

Scarafiotti A.R., Mascarello M., *L'enseignement en spirale: expérience réalisées en mathematique numerique avec élèves de 16 à 19 ans*, Ed. A. Warbecq, Atti del Convegno CIEAEM 41, 1991, pp.127-134.

Scarafiotti A.R., Mascarello M., *Scoprire algoritmi: metodi computazionali in vista di un approccio numerico in scuola secondaria superiore*, Rap. interno 2/1989, Dip. Mat. Politec. Torino.

Scarafiotti A.R., Galizia M.T., Mascarello M., *Experiences of computer laboratory in math. teaching*, NATO advanced research workshop on "Advanced technologies in the theaching of mathematics and exact sciences", 1990.

Scarafiotti A.R., Mascarello M., *Computer experments in teaching dynamical systems at the polytechnic of Turin*, Atti del Convegno "Computational geometry and topology and computation in teaching math.", 1990, pp.98-106.

Scarafiotti A.R., Mascarello M., *Alla ricerca delle valenze interdisciplinari della matematica attraverso i test di ingresso*, EM, 3, 1992.

Scarafiotti A.R., *Formazione matematica e mondo del lavoro: le attese*, Atti del Conv. "Pensiero matematico nella cultura e nella società", Milano 1990.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., *Artificial intelligence and teaching initiatives: analysis of experiences*, Proc. Sixth Int. Peg Conference, Rapallo 1991.

Scarafiotti A.R., Di Carlo A., *Nuovi programmi, nuova didattica*, Incontri con la Matematica n.5.

Scarafiotti A.R., *Nuove metodologie didattiche per l'insegnamento della matematica*, Salerno, 1991.

Scarafiotti A.R., Di Carlo A., *The overcoming obstacoles in concepts developing: a casus study*, Icsimt 44th., Chicago 1992.

Scarafiotti A.R., Marconi C., *Calculus in high school: from fiction mathem. to real math. through the use P.C.*, ICME 7, Quebec 1992.

Scarafiotti A.R., Leone B., *Geometria e PC: dalla geometria della tartaruga all'esperienza frattale*, III Internuclei Scuola s. s., Parma 1992.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., *History of hipertest for calculus*, Ifip Open Conference Gmunden, Linz 1993.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., Montessoro P.L., *Orientation systems and "hot words" maps*, Peg Conference, Edimburgh 1993.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., Montessoro P.L., *Note introduttive sullo sviluppo di un ipertesto di matematica*, Didamatica 1993, Genova 1993.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., Montessoro P.L., *Hypermath: a calculus hypertest for distance learning*, Teleteaching 1993.

Scarafiotti A.R., Angeli, Marconi C., Mascarello M., *Experiences of computer laboratory in mathematics teaching*, Computer and system sciences, 107, 1993, pp.585-615.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., *Hipermath: un hypertext de mathematiques*, Proc. CIEAEM 45, 1993.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., *Hypertest for mathematical teaching: disciplinary bonds and epistemological arguments*, Birmingham 1993.

Scarafiotti A.R., Longo Bruno P., Leone P., *La geometria, da un glorioso passato ad un brillante futuro: riflessione sulle finalità ed obiettivi dell'insegnante della geometria nelle scuole sup.*, III Internuclei Scuola Secondaria Superiore, 1992.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., *Hypermath: a hypertext for calculus teaching to learn in hypertextual form*, Proc. 1° Colloquio italo-spagnolo Didattica della Matematica, Modena 1994.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., Alloatti F., *La produzione di senso nella gestione di problemi matematici: un sistema ipertestuale per imparare a risolvere esercizi di calculus*, Atti Convegno Sistemi multimedia, Univ. Salerno 1994.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., *A hypertext for calculus teaching to learn in hypertextual form*, Proc. of First Italian-Spanish Research Symp. in Mathematics Education, Modena 1994.

Scarafiotti A.R., Giannetti A., Alloatti F., *Experiences: from verbal protocols to hypertexts for learning*, Ifip Ws3.1, Barcellona 1994.

Scarafiotti A.R., *Insegnare analisi matematica. Approccio alla definizione di limite*, 4° Incontro NRD, Siena 1994.

Nucleo di Ricerca Didattica di TRIESTE

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Luciana Zuccheri, Dipartimento di Scienze Matematiche, Piazzale Europa 1, Edificio Centrale, 34127 Trieste.*

Balbi L., Bran M., Marceddu M.C., Zuccheri L., *Alcuni spunti didattici offerti dalla crittografia*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.2, 1989.

Boiti A., *Le reti di Petri*, Logica e Geometria, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1992, pp.173-190.

Boiti A., *Un metodo di generazione della spirale esponenziale*, IMSI 12, 2, 1989.

Boiti A., *Le potenze di una matrice quadrata e il teorema del punto unito: applicazioni*, IMSI 12, (2), 1989.

Candussio G., *Applicazioni matematiche e utilizzo del computer in attività interdisciplinari*, IMSI, 12,(2), 1989.

Casarsa F., *Un metodo di lavoro: una "uscita" nella geometria dello spazio*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.3, 1989.

Casarsa F., *L'elogio del finito: La logica come strumento organizzativo della materia. Alcune utilizzazioni degli insiemi finiti*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.5 e n.8, 1990.

Casarsa F., *Isometrie e similitudini del piano*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1992, pp.99-118.

Dal Maso D., *Applicazioni della matematica a problemi di biologia*, IMSI,

vol.12, n.4, 1989.
Felician G., *Trasformazioni elementari sulla retta*, IMSI 12, (2), 1989.
Felician G., *Parliamo di Geometria*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1992, pp.81-98.
Fiori C. e altri, *Dalla scuola media al biennio: prove di verifica e di ingresso di matematica. Risultati di una sperimentazione condotta all'inizio dell'a.s.1988/89*, Centro Documentazione Educativa, Modena 1989.
Fiori C., *Dalla scuola media al biennio: prove di verifica e di ingresso di matematica. Risultati di una sperimentazione condotta all'inizio delgli anni scolastici 1988/89 e 1989/90*, EP, anno IV, n.1, 1991, pp.56-58.
Fiori C., Barbieri F., *L'ultima lettera di Ruffini a Cauchy*, NUNCIUS, IV, fasc.1, 1989, pp.161-163.
Fiori C., Barbieri F., *Paolo Ruffini all'Università di Modena*, pre-print.
Fontana R., *Dal campione alla popolazione: proposta didattica sulla statistica inferenziale con il LOTUS*, IMSI, vol.12, n.4, 1989.
Giorgolo B., *Simmetroscopio*, Didattica Triestina Ed., 1990.
Giorgolo B., *Il simmetroscopio e le sue utilizzazioni didattiche*, Atti del Convegno "Media e metodi III: la matematica tra didattica e cultura", Trieste, 1992.
Invernizzi S., *Limiti e visualizzazione*, Quaderni Didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.15, 1993.
Invernizzi S., *Un approccio integrale alla definizione delle funzioni circolari*, Quaderni Didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.16, 1993.
Penco A., *Proiezioni di un cerchio su un piano. Le coniche*, IMSI 12, (2), 1989.
Penco A., *Modelli dell'algebra booleana ... il computer quale sussidio didattico*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia (1992), pp.47-80.
Rocco M., *I problemi*, in *Aritmetica*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli Venezia Giulia, 1990.
Rocco M., *Un itinerario per la geometria solida nella scuola media*, IMSI 12, (2), 1989.
Rocco M., Markò R., Bressan C., Vetere Rossi A., Fontana R., Petrossi F., Todisco L., *Tre proposte didattiche per l'insegnamento di probabilità e statistica con l'utilizzo del computer*, Progetto TID (CNR), Quad. n.5, 1990.
Rocco M., *Modelli di crescita di popolazioni al foglio elettronico*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.10, 1991.
Rupeni F., *Logica e teoria delle relazioni binarie nella didattica*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze mat. di Trieste, n. 12, 1991.
Rupeni F., *La logica nel Biennio. Riflessioni e proposte*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1992, pp.119-126.
Rupeni F., *Dalla logica predicativa alla logica proposizionale. Proposte per un percorso didattico*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia,

1992, pp.127-130.
Sgarro A., *Codici Segreti*, ed. Mondadori, 1989.
Sgarro A., Zuccheri L., *I codici segreti nell'insegnamento della matematica*, Atti del Conv. "Media e metodi III: la matematica tra didattica e cultura", Trieste, 1992.
Tironi G., *Recenti sviluppi della logica e della teoria degli insiemi. Un'introduzione alla "costrizione" o "forcing"*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1992, pp.11-38.
Todisco L., *Probabilità al computer*, IMSI 12, (2), 1989.
Vetere Rossi A., *Statistica e spreadsheet*, IMSI 12, (2), 1989.
Volcic A., *Alcune osservazioni sull'insegnamento della matematica negli Istituti Tecnici Commerciali*, IMSI, vol.12, n.4, 1989.
Volpi G., *Applicazioni della matematica a problemi di natura economica*, IMSI, vol.12, n.4, 1989.
Volpi G., *Un'introduzione alla linguistica*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1992, pp.131-150.
Volpi G., *Matematica ed economia: una proposta didattica*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze mat. di Trieste, n.13, 1992.
Zennaro E., *L'imbarco e lo sbarco di piccoli pesi su una nave e ... una involuzione sopra una retta*, IMSI 12, (2), 1989.
Zennaro E., *Introduzione al PROLOG*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze mat. di Trieste, n.9, 1991.
Zennaro E., *Introduzione alla programmazione logica*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1992, pp.151-172.
Zennaro M., *La risoluzione approssimata di equazioni nonlineari*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.4, 1990.
Zuccheri L., *Alcune considerazioni sui numeri*, in *Aritmetica*, "Aggiornamento" dell'IRRSAE del Friuli-Venezia Giulia, 1990.
Zuccheri L., *Alcune considerazioni sull'insegnamento del calcolo delle probabilità nella scuola media inferiore*, IMSI, vol.12, n.4, 1989.
Zuccheri L., *Crittografia e statistica nella scuola elementare*, IMSI, vol.15, n.1, 1992.
Zuccheri L., *Guida alla mostra-laboratorio "Oltre lo specchio"*, Quaderni didattici del Dip. di Scienze Mat. di Trieste, n.14, 1992.
Zuccheri L., *Oltre lo specchio: storia e motivazioni di un'esposizione didattica*, Atti del Conv. "Media e metodi III: la matematica tra didattica e cultura", Trieste, 1992.

Pubblicazioni di F. Arzarello

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Ferdinando Arzarello, Dipartimento di Matematica, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino.*

Arzarello F., *Hierarchies in the activity of problem solving*, Proceedings PME - XIII, Paris, 1989.

Arzarello F., *Logica e Informatica*, Atti del Convegno CIIM-UMI di Calagonone, NUMI, 1991.

Arzarello F., *Procedural and relational aspects of algebraic thinking*, Proceedings PME-XV, Assisi, 1991.

Arzarello F., *Pre-algebraic problem solving*, in *Mathematical Problem Solving Research*, eds. J.P. Mendes da Ponte et al., NATO ASI Series Volumes, Springer 1992.

Arzarello F., Chiappini G.P., Lemut E., Malara N., Pellerey M.,1993, *Learning to program as a cognitive apprenticeship through conflicts*, in Lemut et al. (eds.), *Cognitive Models and Intelligent Environment for Learning Programming*, NATO ASI Series, vol. F111, Springer Verlag, Berlin.

Arzarello F., *The rôle of natural language in pre-algebraic and algebraic thinking*, ICME 7, 1992, Québec.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework*, Proceedings PME-XVII, Tokyo, 1993.

Arzarello F., *Analysing algebraic thinking*, Proceedings of the ESRC conference on Algebraic Processes and the Role of Symbolism, Londra, 1993.

Arzarello F., *C'è una nuova filosofia della matematica?*, in *Epistemologia della matematica, Seminari 1989-1991*, a cura di F.Speranza, Quaderno del CNR, Progetto strategico TID, 1992.

Arzarello F., *Il finito in Kronecker*, in *Epistemologia della matematica, Seminari 1989-1991*, a cura di F.Speranza, Quaderno CNR, Progetto strategico TID, 1992.

Arzarello F., *La ricerca in didattica della matematica*, IMSI, 1992.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking*. International workshop on algebraic learning, Turin 1992, Rend. dell'Univ. e del Politecnico di Torino, vol 52/1.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G., *L'algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche*, Quad. n. 6 del CNR, Progetto TID, 1992.

Arzarello F., *Il ruolo dell'errore nella costruzione del sapere matematico*, Atti del III Convegno Nazionale su Matematica e Svantaggio, Pitagora, Bologna 1993.

Arzarello F., *Ordine e casualità nell'Universo dei numeri*, Convegno dell'Immaginario Scientifico, Trieste 1992.

Pubblicazioni di G. Di Biase e A. Maturo

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Antonio Maturo, Istituto di Scienze Fisico-matematiche e di Analisi strutturale, Università di Chieti, Via G. D'Annunzio 69, 65100 Pescara.*

Colagrande V., Di Biase G., *Simulazione su calcolatore di alcuni esempi di applicazione del Teorema di Bayes*, PM, n.4, 1990, pp.53-60.

Di Biase G., *Eventi subordinati, probabilità condizionate e considerazioni critiche*, Quad. n.1 Sez. Mathesis Pescara, 1990.

Di Biase G., *Sul concetto di indipendenza tra eventi*, Atti Convegno "Matematica negli anni novanta", Iseo del Garda, 1990, pp.162-171.

Di Biase G., *Introduzione al concetto di probabilità (Alcune indicazioni per una sperimentazione nelle scuole medie superiori)*, Quad. n.2 Sez. Mathesis Pescara, 1991.

Di Biase G., Maturo A., *La formule de Bayes dans l'induction statistique*, Plot n.60, 1992, pp.7-13.

Di Biase G., Maturo A., *Alcuni spunti per la didattica del Calcolo delle probabilità a partire dai giochi ed utilizzando concetti logico matematici elementari*, NUMI, suppl. al n.5, 1993, pp.169-173.

Colagrande V., Di Biase G., *Interpretazione dei risultati di un campionamento statistico con approccio bayesiano: simulazione su calcolatore*, Ratio Math., n.1, 1990, pp.39-50.

Di Biase G., Maturo A., *Sulla verifica di casualità di successioni numeriche in [0,1] da un punto di vista bayesiano: esempi e considerazioni critiche*, Atti Convegno Naz. Mathesis, Cattolica 1991, pp.249-256.

Di Biase G., Maturo A., *Considerazioni probabilistiche su alcune strategie nei giochi d'azzardo*, in corso di stampa su ID.

Di Biase G., *Dalla coerenza alla formula di Bayes: un percorso teorico fondamentale per le applicazioni*, in corso di stampa su Ratio Math..

Di Biase G., Maturo A., *Induction statistique: approche classique ou bayesienne?*, in corso di stampa su Bulletin National APMEP.

Di Biase G., Maturo A., *Probabilités, statistique, informatique et sciences: proposition et expériences pour l'einseignement transdisciplinaire*, Plot, 1992.

Maturo A., Varone G., *Osservazioni ed esempi sulla generazione di numeri a caso a partire da campi di Galois*, Atti Convegno Naz. Mathesis, Cattolica 1991.

Maturo A., *Una introduzione alla probabilità soggettiva*, PM, 3, 1992, pp.19-36.

Maturo A., *Il calcolo delle probabilità nella vita quotidiana*, Atti Convegno Naz. Mathesis, 1990, pp.144-151.

Maturo A., *Proposte per un inquadramento della teoria della misura delle figure piane*, Atti Convegno Naz. Mathesis 1992.
Maturo A., *Analisi critica dei test statistici usuali*, Atti Conv. Naz. Mathesis, 1991.
Maturo A., *Sul problema probabilistico dei tre prigionieri*, PM, 1, 1994.

Pubblicazioni di R. Scozzafava

Indirizzare le richieste di copie a: *Prof. Romano Scozzafava, Dipartimento di Metodi e modelli matematici per le scienze applicate, Università "La Sapienza", via Scarpa 16, 00161 Roma.*

Scozzafava R., *Per un insegnamento "fusionista" della probabilità e della statistica nelle scuole secondarie*, in *Matematica oggi: dalle idee alla scuola*, Genova 1988 (Ed. F.Furinghetti), B. Mondadori, Milano, 1990, pp.251-257.
Scozzafava R., *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, MASSON, Milano, 1989.
Scozzafava R., *A merged approach to probability and Bayesian statistics*, Medianen, n.2, 1989, pp.1-9.
Scozzafava R., *Aspetti soggettivi del concetto di indipendenza*, ID, n.0, 1990, pp.15-18.
Scozzafava R., *A merged approach to stochastics in engineering curricula*, European Journal of Engineering Education, 15, 3 (1990), pp.241-248.
Scozzafava R., *A project of merged approach to the teaching of probability and Statistics in the Italian secondary schools*, Proc. 3rd Intern. Conf. on Teaching Statistics, Dunedin, New Zealand 1990, Intern. Statistical Institute, 1991, pp.91-94.
Scozzafava R., *Sistemi elettorali: miti e paradossi della proporzionalità*, Studi parlamentari e di politica costituzionale, 23, n.88 (1990), pp.5-9.
Scozzafava R., *La valutazione e l'interpretazione della probabilià: il ruolo non eludibile della visione soggettiva*, Prog. Strat. Tecn. Innov. Didat. C.N.R. "Epistemologia della Matematica", Quad. n.10 (1992), pp.167-174.
Scozzafava R., *I giudizi soggettivi. Probabilità ed inferenza statistica (Quale probabilità e statistica nelle scuole secondarie superiori?)*, EP, 4 (1991), n.1, pp.15-20; n.2, p.63.
Scozzafava R., *Calcolo delle probabilità*, in *Matematica per Docenti Scuole Secondarie Superiori*, Consorzio per l'Università a Distanza, MPI, Unità 4 (1992).
Scozzafava R., *Matematica di base*, MASSON, Milano, 1992.
Rossi C., Scozzafava R., *Perché è falsa la teoria del passaggio da droghe leggere a droghe pesanti*, Osservatorio Leggi sulla Droga, VIII rapporto (1992), Millelire, Stampa Alternativa, pp.30-37.

Rossi C., Scozzafava R., *Sull'uso distorto dei dati statistici nei media*, ID, n.6, 1993, pp.45-51.
Gilio A., Scalia Tomba G., Scozzafava R., *La probabilità nella vita reale attraverso esempi*, ID, n.8, 1994, pp.69-78.
Scozzafava R., *Probability assessment and Bayesian inference*, The ISBA (International Society for Bayesian Analysis) Newsletter, n.3, 1994.
Scozzafava R., *A real life approach to the teaching of probability*, Ratio Math., to appear.
Scozzafava R., *Probabilistic background for the management of uncertainty in Artificial Intelligence*, European Journal of Engineering Education, to appear.
Scozzafava R., *"Quasi" determinismo, informazione, complessità*, Convegno "Fra ordine e caos: confronti della ricerca", Roma, Goethe-Institut, 1994.

INDICE

Gruppi di lavoro

COLLANA DI QUADERNI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

9. C. CORRADI: *Problemi di stima in econometria e loro risoluzione numerica*, 1979, pp. 65 .... L. 2.000
10. C. SITIA (a cura di): *La didattica della matematica oggi. Problemi, ricerche, orientamenti*, 1979, pp. VIII - 412 .... L. 7.000
11. M.G. GASPARO, M. MACCONI, A. PASQUALI: *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali*, 1979, pp. V - 217 .... L. 4.000
12. Z. KRIGOWSKA: *Cenni di didattica della matematica*, 1, 1979, pp. VIII - 244 .... L. 4.000
13. F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, F. LAZZERI: *Topologia delle superficie algebriche in* $P_3(C)$, 1979, pp. II - 171 .... L. 4.000
14. T. MANACORDA: *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, 1979, pp. IV - 112 .... L. 3.500
15. C. CATTANEO: *Teoria macroscopica dei continui relativistici*, 1980, pp. V - 105 .... L. 3.500
16. A. TOGNOLI, A. ZEPPILLI: *Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali*, 1980, pp. 121 .... L. 3.500
17. AA. VV.: *Ottimizzazione non lineare e applicazioni*, a cura di S. Incerti e G. Treccani (Atti del Convegno Italsiel-UMI, l'Aquila 18 - 20 giugno 1979), 1980, pp. XI - 372 .... L. 10.000
18. L. SALCE: *Struttura dei p-gruppi abeliani*, 1980, pp. IV - 300 .... L. 8.000
19. S. COEN: *Una introduzione ai dominii di Riemann non ramificati n-dimensionali*, 1980, pp. VI - 222 .... L. 5.000
20. C. CATTANEO: *Elementi di teoria della propagazione ondosa*, 1981, pp. VI - 216 .... L. 6.000
21. G. GALLAVOTTI: *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto*, 1981, pp. XII - 388 .... L. 8.000
22. A. CONTE: *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni*, 1982, pp. 136 .... L. 4.500
24. L. CATTABRIGA: *Alcuni problemi per equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti*, 1983, pp. VIII - 192 .... L. 7.000
25. A. CASSA: *Teoria elementare delle curve algebriche piane e delle superfici di Riemann compatte*, 1983, pp. VIII - 360 .... L. 10.000
26. P.M. SOARDI: *Serie di Fourier in più variabili*, 1984, pp. VIII - 160 .... L. 6.000
27. R. BENEDETTI, M. DEDÒ: *Una introduzione alla geometria e topologia delle varietà di dimensione tre*, 1984, pp. VIII - 152 .... L. 5.000
28. P. BALDI: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, 1984, pp. VIII - 312 .... L. 10.000
29. P. de LUCIA: *Funzioni finitamente additive a valori in un gruppo topologico*, 1985, pp. VIII - 188 .... L. 7.500
30. R. CONTI: *Processi di controllo lineari in* IR^n, 1985, pp. VIII - 192 .... L. 7.500
31. A. BACCIOTTI: *Fondamenti geometrici della teoria della controllabilità*, 1986, pp. VIII - 184 .... L. 9.000
32. L. PANDOLFI: *Alcuni metodi matematici nella teoria dei sistemi lineari di controllo*, 1986, pp. XII - 296 .... L. 15.000
33. S. BENENTI: *Relazioni simplettiche: la trasformazione di Legendre e la teoria di Hamilton-Jacobi*, 1988, pp. XII - 336 .... L. 20.000
34. F. BORCEUX: *Fasci, logica e topoi*, 1989, pp. VIII - 300 .... L. 24.000
35. S. DRAGOMIR, J. C. WOOD: *Sottovarietà minimali ed applicazioni armoniche*, 1989, pp. IV- 168 .... L. 15.000
36. C. PROCESI: *Aspetti geometrici e combinatori della teoria delle rappresentazioni del gruppo unitario*, a cura di E. Rogora, 1991, pp. VIII - 172 .... L. 20.000
37. J. KIJOWSKI: *Elasticità finita e relativistica: introduzione ai metodi geometrici della teoria dei campi*, a cura di D. Bambusi e G. Magli, 1991, pp. IV - 256 .... L. 25.000
38. P. BASSANINI: *Leggi di conservazione iperboliche e onde d'urto*, 1993, pp. VIII - 160 .... L. 25.000
39. G. BUTTAZZO, A. MARINO, M.K.V. MURTHY (a cura di): *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni*, 1995, pp. 252 .... L. 30.000
40. C. BERNARDI (a cura di): *Sviluppi e tendenze internazionali in didattica della matematica*, 1995, pp. 304 .... L. 35.000

Distribuzione: Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, 40138 Bologna
Ai soci UMI sconto del 20% sui prezzi di copertina.