ISSN 0393-0998

Novembre 2002
Supplemento al n. 11

Period. mensile spedizione in A.P.
art. 2 comma 20/c legge 662/96
Filiale di Bologna

Anno XXIX

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

XXII CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«QUALE MATEMATICA PER I RAGAZZI FUTURI CITTADINI NELL'EUROPA DEL TERZO MILLENNIO?»

ISCHIA (NA), 15-16-17 NOVEMBRE 2001
a cura di Giuseppe Anichini

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Indice

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

XXII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della Matematica

Quale matematica per i ragazzi futuri cittadini nell'Europa delterzo millennio?

Ischia (Napoli)
15-16-17 Novembre 2001

Programma

Giovedì, 15 novembre 2001

- Saluto delle autorità
- Relazioni introduttive: Lucia Ciarrapico (MPI), Ferdinando Arzarello (Presidente CIIM)
- Giuseppe Anichini, Luciana Bazzini *Il curriculum di matematica in vari paesi europei*
- Tavola rotonda *La formazione iniziale degli insegnanti: nuove prospettive*
  Intervengono: Gabriele Anzellotti, Alessandro Figà Talamanca
- Workshops sull'uso delle calcolatrici ai vari livelli scolastici, condotti da esperti

Venerdì16 novembre 2001

- *Quali nuclei fondanti per la matematica? Il punto di vista dei matematici.* Relazioni di: Stefania Cotoneschi (scuola elementare), Fabio Brunelli (scuola media), Ercole Castagnola (scuola superiore)
- Il punto di vista del mondo del lavoro.
  Relazione di Pasquale Iorio su *"Matematica del cittadino e mondo del lavoro"*
  Il punto di vista di un fisico.
  Relazione di Paolo Guidoni su *Integrazione scienze-matematica: suggerimenti e proposte.*
  Tecnologie e laboratorio di matematica. Relazione di Giampaolo Chiappini.
- Dibattito
- Lavori di gruppo
- Workshops sull'uso delle calcolatrici ai vari livelli scolastici, condotti da

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

esperti (continuazione)

Sabato 17 novembre 2001

- Sintesi dei lavori di gruppo: coordina Giuseppe Anichini
- Tavola rotonda sui musei di matematica. Intervengono: Mariolina Bartolini Bussi, Enrico Giusti, Vittorio Silvestrini.
- Considerazioni conclusive di Giovanni Prodi
- Conclusione dei lavori

Presentazione

Questo fascicolo raccoglie gli Atti del convegno che la CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) organizza ogni anno.

In questa occasione il tema del convegno è stato incentrato sul materiale che una commissione, nominata dalla Commissione Scientifica dell'UMI, ha prodotto relativamente ai curricula di matematica della (nuova) scuola elementare e scuola secondaria di primo grado. Nel luglio del 2000, infatti, l'UMI ha insediato una commissione per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica adeguato ai mutati bisogni della società del nuovo secolo.

La commissione, coordinata dal Presidente della CIIM, prof. Ferdinando Arzarello, e costituita da docenti sia universitari sia della scuola, ha deciso di elaborare un curricolo, definendo le conoscenze fondamentali in matematica dell'intero percorso scolastico, indipendentemente dalla varietà dei corsi di studio che possono essere presenti negli ultimi anni di scuola. È stata fatta propria dalla commissione, infatti, l'idea della "matematica per il cittadino", in altre parole di un corpus di conoscenze e competenze fondamentali, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici, necessario a tutti coloro che vivono, lavorano, leggono i giornali, ecc.. all'inizio del terzo millennio.

Iniziative analoghe erano state avviate anche da associazioni di matematici in Europa e nel mondo, che avevano avvertito le stesse esigenze. Infatti, la conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. Da qui l'esigenza di "privilegiare", come ha scritto l'attuale Ministro del MIUR, l'ampliamento e l'approfondimento delle conoscenze matematiche per ogni studente.

Nel meritoè poi evidente che la formazione del curriculum scolastico disciplinare non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica, strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Quindi da una parte la necessaria attenzione alla matematica come strumento e come linguaggio scientifico, dall'altra l'altrettanto opportuno riconoscimento della matematica come parte ineliminabile della cultura. Al primo aspetto attengono una serie di competenze: saper contare, saper eseguire operazioni aritmetiche sia mentali che per iscritto, saper leggere un istogramma o un diagramma a torta, saper valutare una grandezza e calcolare una probabilità, saper leggere un grafico e ricavarne informazioni, insomma aver acquisito la capacità di muoversi autonomamente in una realtà complessa. Al secondo sono legate una serie di conoscenze: conoscenze teoriche, quando ci siè impadroniti delle idee fondamentali di una teoria, conoscenze storiche, quando la siè situata all'interno di un processo evolutivo, conoscenze epistemologiche, quando siè riflettuto sui principi e sui metodi impiegati. Inoltreè ben presente a tutti coloro che, nei vari gradi della scuola, hanno trattato di matematica con i loro studenti, che tale disciplina va presa a piccole dosi, ha necessità di una didattica "lunga". E ciò per motivi di assimilazione e per motivi di avviamento alla riflessione critica, proposito essenziale di ogni tipo di insegnamento; in particolare, l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, non unicamente come bagaglio astratto di nozioni.

Il lavoro della commissioneè, dopo varie fasi di discussione e di articolazioni, pervenuto all'individuazione di nuclei fondanti: quattro tematici e tre di processo.

Come detto sopra, un percorso analogoè stato fatto, in tempi diversi ma molto recenti, anche negli Stati Uniti e nei principali paesi della Comunità Europea.

Riportiamo allora la parte generale riguardante le competenze matematiche, suddivise per comodità all'interno dei vari nuclei, ma sottolineando ancora una volta la continuità, orizzontale e verticale, la progressività e la essenzialità del curriculo. Ricordiamo che i nuclei tematici individuati sono stati "Il numero", "lo spazio e le figure", "Le relazioni" e "Dati e Previsioni". (Non è di poco conto notare che la Commissione Education della European Mathematical Society aveva individuato, come nuclei tematici, essenzialmente i soliti quattro ovvero *Quantity, Space and Shape, Change and relationship, Uncertainty*). Ad essi sono poi stati affiancati i nuclei di processo "Argomentare e congetturare", "Misurare", "Risolvere e porsi problemi".

NUCLEI TEMATICI:

Il numero

In situazioni varie, significative e problematiche, relative alla vita di tutti i giorni, alla matematica e agli altri ambiti disciplinari:

- comprendere il significato dei numeri, i modi per rappresentarli e il significato della notazione posizionale
- comprendere il significato delle operazioni
- operare tra numeri in modo consapevole sia mentalmente, sia per iscritto, sia con strumenti
- usare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi tratti dal mondo reale o interni alla matematica
-

Lo spazio e le figure

In contesti diversi di indagine e di osservazione:

- esplorare, descrivere e rappresentare lo spazio
- riconoscere e descrivere le principali figure piane e solide
- utilizzare le trasformazioni geometriche per operare su figure
- determinare misure di grandezze geometriche
- usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica

Le relazioni

In vari contesti matematici e sperimentali:

- individuare relazioni tra elementi e rappresentarle
- classificare e ordinare in base a determinate proprietà
- utilizzare lettere e formule per generalizzare o per astrarre
- riconoscere, utilizzare semplici funzioni e rappresentarle
- utilizzare variabili, funzioni, equazioni per risolvere problemi

I dati e le previsioni

In situazioni varie, relative alla vita di tutti i giorni e agli altri ambiti disciplinari:

- organizzare una ricerca
- interpretare dati usando i metodi statistici
- effettuare valutazioni di probabilità di eventi
- risolvere semplici situazioni problematiche che riguardano eventi
- sviluppare e valutare inferenze, previsioni ed argomentazioni basate su dati

NUCLEI DI PROCESSO:

Argomentare e congetturare

In contesti diversi, sperimentali, linguistici e matematici:

- osservare, individuare e descrivere regolarità
- produrre congetture, testarle, validare le congetture prodotte
- riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici e l'importanza delle definizioni che le descrivono
- giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni

Misurare

In contesti interni ed esterni alla matematica, con particolare riferimento alle scienze sperimentali:

- misurare grandezze e rappresentare le loro misure
- stimare misure
- risolvere problemi e modellizzare fatti e fenomeni partendo da dati di misura

Risolvere e porsi problemi

In diversi contesti sperimentali, linguistici e matematici, in situazioni varie, relative a campi di esperienza scolastici e non:

- riconoscere e rappresentare situazioni problematiche
- impostare, discutere e comunicare strategie di risoluzione
- risolvere problemi posti da altri
- porsi e risolvere problemi

Alla conclusione della prima fase, durante la quale sono stati completati i lavori relativi alla scuola elementare e secondaria di primo grado, la Commissione ha deciso di promuovere iniziative volte ad illustrare il significato delle scelte operate. In questa prospettiva ha ritenuto che i messaggi da lanciare al mondo degli insegnanti di matematica sarebbero stati meglio compresi attraverso concrete esemplificazioni. Nell'ambito delle finalità previste da un Protocollo d'Intesa sottoscritto nel 1993 dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana (UMI), esteso nel 1999 alla Società Italiana di Statistica (SIS) e rinnovato nel 2002 dal MIUR, siè allora svolto a Viareggio durante l'anno 2001 un seminario residenziale della durata di due settimane, con lo scopo di *produrre esempi di attività didattiche* e di *prove di verifica* in matematica per le classi della scuola elementare e secondaria di primo grado.

Perciò il Ministero dell'Istruzione, accogliendo la richiesta dell'UMI, ha riunito a Viareggio un gruppo di 40 esperti (ispettori, docenti universitari, insegnanti dei due tipi di scuola, alcuni dei quali membri della Commissione stessa), che ha lavorato durante il Seminario, alla produzione di un cospicuo numero di esempi di attività didattiche e di suggerimenti per prove di verifica, coerenti con gli obiettivi del curricolo elaborato.

Il curricolo elaborato dalla Commissione UMI ha costituito la prima parte del volume distribuito ai convegnisti, mentre gli esempi prodotti ne costituiscono la seconda parte.

Le due parti, curricoli ed esempi, sono organizzate nel seguente modo.

I curricoli sono presentati separatamente per la scuola primaria e per la scuola secondaria di primo grado, con una scansione, rispettivamente, 1+2+2 e 2+1. Essi sono preceduti da una *premessa* comune, che individua le linee guida per l'insegnamento della matematica, e dall'indicazione delle *competenze trasversali e di quelle matematiche conclusive*, che devono essere acquisite al termine dei primi otto anni di scuola. L'esposizione dei curricoli propostiè completata da documenti che esprimono il punto di vista della Commissione UMI su vari aspetti, quali l'*approccio didattico*, i *contesti di apprendimento*, la *discussione matematica in classe*, la *valutazione*, il *ruolo delle tecnologie*.

La seconda parte presenta gli esempi di attività didattica e di elementi di verifica organizzandoli verticalmente in relazione ai vari nuclei previsti nei curricoli; in ogni esempioè comunque indicato l'anno di scolarità più appropriato cui esso si riferisce. I docenti dei due ordini di scuola hanno, infatti, lavorato congiuntamente ai diversi filoni per quella continuità ed osmosi tra i vari gradi di scuola, che deve caratterizzare un buon insegnamento.

Durante il convegno sono state poi presentate relazioni che accompagnavano il lavoro svolto ed il materiale presentato: i docenti presenti, di ogni ordine di scuola, hanno avuto in mano tale materiale, ne hanno "sperimentato" embrionalmente le prime ricadute, hanno espresso i primi pareri, si sono riservati di sperimentarlo in concreto sul campo scolastico inviando alla commissione osservazioni, commenti, critiche, suggerimenti.

Del loro impegno, della fruttuosa ricaduta del loro lavoro e della loro attiva partecipazione ai lavori del convegno credo che la comunità matematica ne debba andar fiera e ringraziarli.

Giuseppe Anichini – Segretario UMI (ottobre 2002)

NOTA: Il volume **Matematica 2001** è andato subito esaurito. Una versione, rivista e ridotta, sarà presto pubblicata come Quaderni del MIUR.
Nel frattempo una versione elettronica è reperibile ai seguenti siti:
http://www.liceo-vallisneri.lu.it
http://www.dm.unito.it/paginepersonali/arzarello
http://www.stat.unipg.it/CIRDIS/Matematica2001/
e sul sito dell'Unione Matematica Italiana http://www.dm.unibo.it/umi .

RELAZIONI

I CURRICULI IN EUROPA
UN PROGETTO DELL'EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY (EMS)

Giuseppe ANICHINI – Luciana BAZZINI

Nella presente relazione si evidenziano alcuni risultati della Commissione Education dell'European Mathematical Society ed alcuni dati, particolarmente rilevanti, relativi a tre paesi europei circa la struttura del sistema scolastico. I dati della prima parte derivano dalla partecipazione del primo autore ad un convegno in cui tali dati sono stati presentati. I dati della seconda parte sono stati ricavati dal secondo autore da vari documenti fra i quali si può ricordare la documentazione edita a cura della Biblioteca di Documentazione Pedagogica del Ministero della Pubblica Istruzione.

Una delle commissioni permanenti dell'EMS, la commissione Education, ha istituito circa tre anni fa un gruppo di lavoro, coordinato dallo stesso Presidente della commissione, allo scopo di dare indicazioni, alla Commissione Europea, sui "reference levels" in Matematica dei sedicenni europei. L'idea era quella di segnalare, per una classe d'età (16 anni) per la quale si può ipotizzare scuole dello stesso tipo, "annate" di studio molto simili nella durata e nella struttura, generica assenza di "esami", "rilascio di diploma" o qualche altro controllo qualitativo, le competenze ed i saperi in Matematica, comuni ai sedicenni dei paesi della comunità europea (ed eventualmente di altri paesi). La Matematica, descritta "ingombrante ma ineludibile in ogni curriculum" per il posto che essa occupa nella cultura quotidiana per il cittadino comune e per l'impatto che la "modellizzazione" e la "scelta decisionale" hanno assunto per ogni scienziato.

Una prima fase dei lavori è durata più di due anni, con diversi incontri di trequattro giorni di una ventina di esperti dei paesi, ha coinvolto tutti i paesi della comunità europea (tranne l'Austria, l'Irlanda ed il Portogallo) ed inoltre la Russia, la Polonia, la Svizzera e l'Ungheria.

Una riunione in cui sono stati esaminati i primi risultati di questo lavoro si è svolta nel maggio 2001 in Lussemburgo. Il Gruppo di lavoro non ha volutamente cercato di scrivere un syllabus di conoscenze o di competenze matematiche per i sedicenni europei, conscio che una simile iniziativa avrebbe corso il rischio di divenire un mero esercizio virtuale (o, peggio ancora, considerato come una ordinanza!).

Ha cercato dunque, inizialmente, di raccogliere i dati strutturali sulle varie situazioni di insegnamento nei paesi esaminati con particolare rilievo alle questioni, di qualsivoglia natura, che potevano maggiormente incidere sull'insegnamento della matematica.

Nessuna intenzione di standardizzazione ma una questione di conoscenza delle situazioni.

Considerando l'incidenza della matematica nella vita del mondo di oggi, sono stati enucleati due livelli di classificazione – *minimale* – relativamente alle conoscenze ed alle competenze richieste:

a) per il cittadino correttamente informato (ovvero per TUTTI)
b) per coloro che hanno necessità della Matematica per gli studi e la professione.

Oltre alla consultazione dei documenti ufficiali (programmi, ecc ...) il Gruppo di lavoro ha chiesto informazioni sui sistemi di insegnamento, sui *punti deboli* e sui *punti forti* dell'insegnamento della matematica anche alla luce delle varie *misurazioni* internazionali (PISA, TIMSS, ecc..), sulle *attese matematiche* dei sedicenni (e sulle "risposte" a tali attese).

Insieme ai problemi di ordine generale appena descritti (che, da soli, provocano naturali differenze fra sistemi scolastici diversi), si deve tener conto delle differenze sostanziali esistenti fra paese e paese, di natura storica, culturale, politica e, in molti casi (Belgio, Svizzera, Spagna, Germania, ecc ...) la presenza di *sottosistemi* di insegnamento, con distanze fra loro anche notevoli, fra regione e regione dello stesso stato.

Nell'ottica descritta si è cercato di capire se c'erano differenze (e quali) fra il curriculum ufficiale ed il curriculum reale, di fare una disamina sui criteri di valutazione, di capire cosa è stato acquisito dagli allievi (in matematica, al termine della scuola dell'obbligo, in ciascun paese intervistato).

Prendendo spunto da tale iniziativa abbiamo allora cercato di

1) descrivere la struttura scolastica di vari paesi;

in tale ottica si evidenziano i cicli scolastici dei vari paesi per durata, articolazione, tipologia, ecc ...; si prendono anche in considerazione gli aspetti di formazione, di intreccio interdisciplinare (particolarmente con l'Informatica) e i punti "forti" ed i punti "deboli" dell'apprendimento della disciplina; viene particolarmente affrontata la corrispondenza fra curriculum scolastico e realtà esterna alla scuola;

2) esaminare programmi di paesi in situazioni sufficientemente analoghe (all'Italia e fra loro);

e qui vediamo come le linee guida siano le stesse. Infatti le **big ideas** evidenziate come struttura portante dei vari curricula dalla commissione Education dell' EMS, ovvero **Numbers and quantities, Shape and forms, Relationships, Incertainty**, sono esattamente le stesse dei *nuclei fondanti* individuati nei documenti dell'UMI.

3) presentare alcuni esempi di *problemi* per sedicenni, individuati dal Gruppo di lavoro EMS;

nel documento EMS essi sono presentati come *Dream Questions* ovvero come situazioni problematiche che dovrebbero essere state, sperabilmente, già incontrate nel corso degli studi dagli allievi, senza peraltro richiedere che esse siano integrate in un processo valutativo. Esse sono state comunque validate da allievi sedicenni.

Come riflessione di tipo generale si cerca di abituare i ragazzi alle procedure (**non alle tecniche** di calcolo, al controllo critico dei risultati ottenuti, alla lettura dei dati statistici con ottica probabilistica.

Alcuni esempi di problemi proposti:

a) Stimare il numero di battiti del cuore di una vita umana
(Problema collegato al Numero, all'Incertezza, alla Modellizzazione).

b) Inserire nei 9 spazi delimitati dai 5 cerchi olimpici tutti i numeri da 1 a 9 in modo tale che in ogni cerchio la somma dei numeri inseriti sia la stessa.
(Problema collegato al Numero, al Simbolismo, ai Processi di cambiamento).

c) Da un punto A si traccia un semicerchio (inferiore) di raggio 1, poi dall'estremo opposto il semicerchio (superiore) di raggio $1/2$; infine ancora il semicerchio (inferiore) di raggio $1/4$; si chiede di:
   - calcolare la distanza dal punto di partenza al punto d'arrivo;
   - la lunghezza totale del cammino.

   (Problema collegato al Numero, allo Spazio e alle Figure, alla Modellizzazione).

d) Quante volte si deve lanciare un dado per avere un 6 con la probabilità del 95%?
(Problema collegato all'Incertezza, alle procedure di calcolo, alla Model-

lizzazione).

e) Nel piano si considerano i punti $A = (2,4), B = (8,3), C = (9,12)$. Il triangolo ABC è un triangolo rettangolo ?
(Problema collegato allo Spazio e alle Figure, ai Processi di cambiamento).

f) Un giornalista ha mostrato un grafico in televisione ed ha commentato: "quest'anno il numero di furti è aumentato considerevolmente"; *dipendentemente dal grafico* è quella del giornalista una corretta interpretazione ?
(Problema collegato all'Incertezza, alla Rappresentazione, alla Comunicazione, ai Processi di cambiamento).

g) Una pizza (rotonda) per una persona ha il diametro di 21 cm. Quanto dovrà essere il diametro di una pizza per 10 persone?
(Problema collegato al Numero, allo Spazio e alle Figure, a Risolvere e Porsi Problemi).

4) illustrare alcune situazioni relative a prove finali ;

in questa ultima parte(esami di stato, in Italia) alcune prove, di matematica o talora di matematica insieme ad altre discipline scientifiche, sono prese in considerazione indicando gli esercizi obbligatori e quelli facoltativi, le *"raccomandazioni"* relative alla durata ed ai sussidi permessi; i punteggi assegnati, ecc..

Vediamone, a mero titolo di esempio, alcuni casi:

(1) **Francia** generale 4 ore (2 esercizi, 1 problema)
Argomenti: Calcolo stocastico; numeri complessi; analisi matematica (problema)
A disposizione carta millimetrata, consentita la calcolatrice Valutazione: qualità della redazione, chiarezza e precisione dei ragionamenti.

(2) **Francia** professionale 2 ore (2 problemi)
Argomenti: Progressioni geometriche (mondo reale), elettrotecnica-matematica (analisi....)
NON si possono usare stampanti (con le calcolatrici) e non si possono scambiare calcolatrici fra allievi.

(3) **Francia** Classe terminale generale (indirizzo scientifico):
– Analisi: funzioni numeriche:
a) studio locale e globale
b) calcolo integrale

– Algebra, aritmetica, geometria:
a) equazioni,
b) aritmetica,
c) numeri complessi,
d) calcolo vettoriale
– Combinatoria, probabilità:
a) combinatoria, computo,
b) probabilità

(4) **Inghilterra** 2 ore e 1/2, 3 prove (15 quesiti, 3 esercizi più 4 scelti fra 7, 4 esercizi fra 7). Analisi, analisi numerica, geometria analitica, statistica, meccanica, probabilità, ...
Indicazioni: indicare in dettaglio il lavoro compiuto .... indicare in dettaglio dove vengono usati sussidi di calcolo ....
(Nota: **Irlanda**: vi possono essere tolti dei punti se il lavoro non è stato svolto in modo chiaro o se non avete indicato quando avete usato la calcolatrice).

(5) **Olanda** ore 5 prove
grafico di funzioni (con 3 quesiti),
studio di funzione (con 2 quesiti),
geometria piana (con 2 quesiti teorici),
funzioni approssimanti (con 4 quesiti),
geometria solida (con 4 quesiti)
Indicazioni: non date più risposte di quelle richieste. Non vengono assegnati punti se, essendo richiesto una spiegazione, un calcolo o un commento, manca anche solo uno di essi.

Riportiamo infine, a titolo di informazione alcuni dati presenti nel documento del Lussemburgo.

La matematica "occupa" nell'insegnamento scolastico circa il 12% del tempo. Il tempo medio assoluto dedicato alla matematica varia dalle 3 ore alle 5 ore settimanali per 45 settimane;

Dopo la lingua nativa la matematica è la disciplina più presente in ogni ordine di scuola (tranne in Olanda, terza dopo anche l'Informatica e negli Stati Uniti, prima ancora della lingua inglese);

in molti programmi vengono considerati, accanto alle voci tradizionali, i "world problems" ovvero problematiche matematiche affrontate mediante argomenti della realtà sociale, civile, economica. In questa ottica prendono campo anche argomenti tradizionalmente messi in secondo piano, quali la statistica e lo studio dell'incertezza, ed argomenti "nuovi" quali il "visual thinking" della geometria.

I CURRICOLA EUROPEI ALCUNI ESEMPI

Luciana BAZZINI*

La situazione dell'istruzione matematica è abbastanza variegata nei vari Paesi Europei.. Già l'obbligo scolastico non ha durata uniforme e diversi sono pure i modelli strutturali, relativamente alla suddivisione dei livelli scolari. In generale si hanno tre tipi di modelli:

- Tripartito, in cui la durata dell'istruzione è divisa in primaria, secondaria inferiore e secondaria superiore (es. Italia, Francia, Germania, Paesi Bassi e Austria)
- Bipartito, in cui la suddivisione è tra ciclo primario e secondario (ad esempio Grecia, Inghilterra-Galles, Scozia, Irlanda, Irlanda del Nord, Liechtenstein, Lussemburgo, Spagna)
- Unico (ad esempio Danimarca, Portogallo, Svezia, Finlandia, Norvegia, Islanda)

Analizzeremo qui tre esempi di sistemi educativi, in particolare quello tripartito della Francia, quello bipartito del Regno Unito e quello unico del Portogallo.

FRANCIA:

<u>Il livello primario</u> va dai 6 agli 11 anni.
La **scuola elementare** comprende **5 classi** ripartite in due cicli:

(1) *Cycle des apprentissages fondamentaux*: (comincia nell'ultima sezione della scuola materna e prosegue nei primi due anni della scuola elementare)
(2) *Cycle des approfondissements* (comprende gli ultimi tre anni di scuola elementare prima dell'ingresso al *Collège*)

<u>Il livello secondario inferiore</u> va dagli 11 ai 15 anni.
Il *Collège unique* comprende 4 classi ripartite in tre cicli:

(1) Cycle d'adaptation (classe 6ème):
(2) Cycle central (classi 5ème e 4ème):
(3) Cycle d'orientation (classe 3ème):

<u>Il livello secondario superiore</u> va dai 15 ai 18 anni.

*Dip. Matematica, Univ. di Torino

I Licei generali, tecnologici e professionali comprendono 3 classi (*seconde, première* e *terminale*). Solo la classe *seconde* rientra nel ciclo dell'obbligo: dai 15 ai 16 anni.

I principi fondamentali che sottintendono alla politica generale dell'educazione sono definiti nella "Legge di orientamento sull'educazione" del 1989.

L'educazione viene qui definita come la più importante priorità nazionale. Lo Stato garantisce dunque il diritto all'istruzione a tutti i bambini e i giovani francesi qualunque sia la loro origine sociale.Ogni giovane stabilisce progressivamente il proprio orientamento.

Ogni giovane raggiunge un livello di formazione riconosciuto (almeno il *CAP - Certificat d'aptitude professionnelle* o il*BEP - Brevet d'études professionnelles*)

Quattro alunni su cinque arrivano fino al livello del *baccalauréat*; Diploma nazionale che sanziona la fine degli studi secondari superiori

Tutti i titolari del *baccalauréat* che lo desiderano sono ammessi a proseguire negli studi superiori.

La Francia si distingue tra i paesi europei per la continuità che mantiene con la tradizione dello Stato centralizzato.

Secondo i criteri fissati dalla Costituzione, il potere legislativo fissa dei "principi generali" riguardanti il sistema di istruzione e il Ministro dell'educazione nazionale definisce nei dettagli la regolamentazione, la fa applicare e ne controlla lo sviluppo.

Recentemente, per far fronte al problema del crescente insuccesso scolastico, le scuole hanno ricevuto più ampi margini di manovra nella gestione degli orari e dei programmi.

Per quanto riguarda i principali aspetti del curriculum della scuola dell'obbligo, la Legge di orientamento sull'educazione attribuisce all'istruzione di base tre obiettivi prioritari. Le discipline insegnate devono

- sviluppare il pensiero logico,
- condurre alla padronanza dei tre principali mezzi d'espressione: scritto, orale, immagine;
- sviluppare l'abitudine al lavoro personale.

L'intero percorso della scuola obbligatoria mira a costruire conoscenze e competenze e ad orientare verso gli studi futuri o verso corsi professionali. Nella scuola obbligatoria i programmi e i percorsi formativi sono gli stessi per tutti.

Per quanto riguarda il Collège, nell'articolo 2 del decreto del 1996 che organizza la formazione al *Collège*, vengono enunciati gli obiettivi generali dell'istruzione secondaria inferiore:

"Il *collège* fornisce a tutti gli studenti, senza distinzione, una formazione generale che deve far loro acquisire saperi e saper fare fondamentali costitutivi di una cultura comune. Contribuisce anche, tramite il coinvolgimento di tutta la comunità educativa, allo sviluppo della personalità di ogni alunno, favorisce la sua socializzazione e la comprensione del mondo contemporaneo. Promuovendo l'educazione alla responsabilità, tale formazione deve permettere a tutti gli alunni di acquisire gli strumenti necessari all'esercizio della cittadinanza e renderli capaci di scelte d'orientamento in previsione del futuro inserimento nella vita culturale sociale e professionale."

Classe **Seconde** (*cycle de détermination*):

l'insegnamento deve mirare essenzialmente alla definizione delle opzioni future, preparando gli alunni alla scelta degli indirizzi (*séries*) nelle ultime due classi (*première e terminale*) del *lycée*. Per questo motivo, i programmi prevedono insegnamenti comuni, insegnamenti cosiddetti di "determinazione", opzioni facoltative e atelier di espressione artistica.

Lycée

Istruzione non obbligatoria. Svariati indirizzi, programmi nazionali Classe **première** Classe **terminale**

L'istruzione secondaria termina con l'esame di fine studi (BACCALAUREAT).

I programmi e le discipline del *cycle terminal* (ultimi due anni) variano a seconda dell'indirizzo di specializzazione scelto.

L'evoluzione dei Programmi suscita in Francia dibattiti molto accesi.

Gruppi di esperti hanno il compito di trovare il giusto equilibrio tra l'aggiornamento delle conoscenze e le capacità di assimilazione degli studenti.

Si riscontra una nuova tendenza nell'elaborazione dei Programmi che consiste nel prendere in considerazione la risoluzione di problemi attraverso approcci multidisciplinari.

Nei programmi del collège (1996-97) si giustifica l'interesse delle "applicazioni" della matematica in fisica, in economia, informatica. Vengono anche introdotti elementi di Statistica nel programma di Seconde (1999), audacia non ripetuta in Première e Terminale.

Interessanti sono i cosiddetti **Travaux personnels encandrés**, che rappresentano un interessante tentativo di insegnamento interdisciplinare

Due professori di materie diverse (ad esempio francese e storia) strutturano lavori di ricerca degli alunni a partire da una lista nazionale di argomenti collegati ai programmi dell'una o dell'altra materia.

Gli studenti lavorano a gruppi di due o tre, sotto il coordinamento incrociato dei professori.

Questi travaux sono obbligatori dal 2000 per tutti gli alunni di *première* e in sperimentazione quest'anno per gli alunni di *terminale.*

REGNO UNITO:

L'obbligo scolastico va dai 5 ai 16 anni, per una durata complessiva di 11 anni.

Nel livello primario, dai 5 agli 11 anni, il programma è comune per tutti.

Nel Livello secondario inferiore (dagli 11 ai 14 anni) e superiore (dai 14 ai 16 anni), il ciclo di istruzione può essere frequentato in diversi tipi di scuole.

La scuola obbligatoria è divisa in primaria e secondaria. All'interno di ognuno dei due livelli l'insegnamento è impartito in *Key Stage*, secondo lo schema seguente:

Livello di insegnamento	**Età**	**Numero di anni di scuola**
Key Stage 1		
Insegnamento primario	5-7 anni	2 anni
Key Stage 2		
Insegnamento primario	7-11 anni	4 anni
Key Stage 3		
Insegnamento secondario	11-14 anni	3 anni
Key Stage 4		
Insegnamento secondario	14-16 anni	2 anni

L'istruzione post-obbligatoria può essere offerta nei

Sixth Form Colleges, **istituti** che offrono corsi generali a tempo pieno e, in alcuni casi, corsi professionali,

Colleges of Further Education, istituti di istruzione post-obbligatoria, che offrono corsi generali, professionali e per il tempo libero, a tempo pieno e a tempo parziale.

In questi istituti sono previsti sia corsi che preparano gli studenti per i certificati di istruzione secondaria di livello avanzato (*General Certificate of Education*

Advanced Level - GCE A level) o per gli esami che preparano al conseguimento di una qualifica professionale (*General National Vocational Qualifications*).

Il fine generale dell'istruzione è il raggiungimento della stabilità e del progresso sociale, come esplicitato nell'Educational Reform Act 1988.

l'educazione "a casa e a scuola" è un mezzo di promozione dello sviluppo spirituale, morale, culturale, mentale e fisico dell'individuo.

Le stesse finalità sono ribadite nell'Education Act del 1996, in cui si afferma che tutte le scuole finanziate dallo Stato devono offrire un curriculum che:

- sia equilibrato e poggi su ampie basi
- promuova lo sviluppo morale, culturale, intellettuale e fisico
- oprepari alle opportunità, responsabilità ed esperienze della vita da adulti includa, oltre al N C, l'educazione religiosa e , per la maggior parte degli studenti della scuola sec., l'educazione sessuale e l'orientamento al lavoro

La distribuzione dei poteri relativamente al curriculum scolastico è ripartita tra livello centrale e livello locale ed è così articolata:

Livello centrale: L'*Education Reform Act 1988* ha attribuito un ruolo importante allo Stato centrale nella definizione delle linee di un curriculum nazionale. Successivi emendamenti o riforme sono state apportate a questo primo quadro legislativo che rimane sempre valido e che costituisce la base del curriculum attuale. Nell'agosto 2000 è entrato in vigore una nuova versione del *National Curriculum* che risponde alla necessità di sviluppare dei curricoli, a livello delle singole scuole, che soddisfino al meglio i bisogni degli studenti e della comunità locale.

La legge vieta esplicitamente una definizione centrale degli orari per ogni materia, ma le discipline del curriculum nazionale, in Inghilterra e in Galles, devono coprire l'80% dell'orario annuale. Le scuole possono gestire autonomamente il restante 20%.

Il curriculum deve includere, nel *key stage* appropriato in base alle capacità di comprensione degli alunni, altre materie elettive, come orientamento professionale, educazione alla salute e altri aspetti dell'educazione personale e sociale.

Livello locale: L'Autorità Educativa Locale (Local Education Authority - LEA)
La LEA ha un ruolo di pianificazione e di consulenza su campi specifici del curriculum, assiste la scuola nello sviluppo del curriculum, prepara gli insegnanti per le attività programmate dalle scuole. Ciascuna *LEA* può offrire servizi scolastici supplementari, se lo ritiene opportuno.

Istituti scolastici

Ogni scuola può organizzare autonomamente orari, discipline elettive e metodi didattici. Le scuole sono finanziate secondo diverse modalità di finanziamento, le cui caratteristiche dipendono dallo statuto della scuola.

Le finalità del Curriculum Nazionale sono

- *Sancire un diritto*
- *Definire degli standard*
- *Promuovere continuità e coerenza*
- *Promuovere la comprensione del pubblico della/nella scuola.*

Per ogni *Key Stage* e per ogni disciplina il curriculum predispone:
– i *programmi* di studio;
– gli *attainment targets* definiti come l'insieme delle conoscenze, abilità, capacità di comprendere che i giovani, di abilità e maturità diversa, devono possedere a ogni *Key Stage.*

Tranne che per l'educazione alla cittadinanza, gli *attainment targets* prevedono otto livelli di difficoltà crescente. Per ogni livello viene descritto il tipo e il grado di rendimento che il giovane deve dimostrare. Viene descritta anche la caratteristica del rendimento eccellente che va oltre il livello 8.

Per quanto riguarda l'istruzione secondaria superiore (da 14 a 19 anni, obbligatoria fino a 16) interessante è pure la posizione governativa relativamente al raggiungimento degli obiettivi (Achieving Success (DfEE, 2001)

Il governo indica l'istruzione dai 14 ai 19 anni come una delle aree di maggior intervento e propone di:

- *Sviluppare un apprendimento personalizzato*
- *Avere la possibilità di scegliere tra apprendimento generale, professionale e direttamente sul posto di lavoro*
- *Avere la possibilità di spostarsi da un percorso all'altro*

Obiettivo del governo è che tutti i giovani proseguano gli studi fino a 19 anni. Si considera 14-19 come una fase unica, divisa in due parti.
Nella prima parte si hanno le seguenti scuole:
Comprehensive schools
Grammar schools

Scuole secondarie specialistiche (es. Technology Colleges, Arts Colleges, Languages Colleges)
Scuole speciali (per studenti in difficoltà)
Dai 16 ai 19 anni si hanno le seguenti scuole:
Sixth Form Colleges
Colleges of Further Education
Specialist Colleges

I Training providers offrono tipi di formazione professionale sostenuta dallo Stato

Dall'aprile 2001 il Learning and Skill Council: è responsabile del finanziamento e della programmazione dell'istruzione e della formazione dopo i 16 anni, ovunque questa sia impartita

Gli studenti del ciclo di istruzione secondaria post-obbligatoria, seguono un numero di corsi che portano al conseguimento del **General Certificate of Education Advanced Levels** (A Level) o preparano agli *Education Advanced Supplementary Examinations.*

Possono inoltre seguire corsi che portano al conseguimento di qualifiche professionali **General National Vocational Qualifications.**

Non esiste perciò un curriculum standard, ma ogni studente può scegliere le materie che lo interessano, anche in considerazione di un eventuale proseguimento degli studi a livello universitario.

PORTOGALLO:

Vediamo ora un esempio di sistema a schema unico, precisamente il sistema educativo del Portogallo.
L'obbligo scolastico va da 6 a 15 anni.

Si ha una struttura unica divisa in tre cicli consecutivi:
- primo ciclo (dai 6 ai 10 anni)
- secondo ciclo (dai 10 ai 12 anni)
- terzo ciclo (dai 12 ai 15 anni).

La legge di base sul sistema educativo dell'ottobre 1986 ha portato l'istruzione obbligatoria a nove anni. L'istruzione di base (*ensino básico*), che coincide con il periodo dell'obbligo scolastico (nove anni di istruzione obbligatoria), comprende tre cicli consecutivi di 4, 2 e 3 anni, corrispondenti a grandi linee ai livelli primario e secondario inferiore.

Per quanto riguarda le finalità generali del sistema di istruzione, la legge di base sul sistema educativo del 1986, e le successive modifiche del 1997, delineano il quadro generale del sistema educativo portoghese, definendolo come un insieme di mezzi destinati a concretizzare il diritto all'istruzione, favorendo lo sviluppo globale della personalità, il progresso sociale e la democratizzazione della società.

I programmi dell'*ensino básico* vengono stabiliti a livello nazionale, ma è possibile adattare l'organizzazione dei curricoli alle infrastutture e alle risorse delle singole scuole, nel rispetto degli obiettivi stabiliti dallo statuto di autonomia della scuola.

Conformemente alle finalità educative enunciate dalla legge di base sul sistema educativo, è stato emanato, nel 1989, un testo di legge (decreto legge n.268/89 del 29 agosto 1989) che definisce la nuova organizzazione del curriculum in ciascuno dei tre cicli dell'*ensino básico* e nell'istruzione secondaria.

I curricoli sono stati definiti dal Governo, dopo aver preso in considerazione le proposte della *Comissão de Reforma do Sistema Educativo* (Commissione per la riforma del sistema educativo) e il contributo risultante dal dibattito nazionale tenuto dal *Conselho Nacional de Educação* (Consiglio nazionale dell'educazione)

Dal 1993 il Ministero dell'Educazione ha subito una riforma che ha dato maggiori poteri ai servizi regionali e che ha reso più flessibile la struttura centrale.

Il Ministro dell'Educazione è responsabile della gestione politica del ministero

Tra i servizi centrali del Ministero, il *Departamento da Educação Básic* (DEB) è responsabile della pianificazione, della supervisione e del coordinamento dell'istruzione pre-scolare e dell'*ensino básico.* Tra i vari compiti, si occupa dell'organizzazione curricolare e della formazione, in collaborazione con l'*Instituto de Inovação Educacional*

- Il governo centrale decide su tutti gli aspetti del curriculum della scuola di base.
- Le *Direcções Regionais de Educação* coordinano e supervisionano lo sviluppo del curriculum, approvano i programmi speciali che devono, tuttavia, essere sottomessi al Ministero dell'Educazione, per un'ulteriore approvazione.
- La scuola: la singola scuola non ha mai goduto di autonomia nella gestione del curriculum, ma la riforma del 1997 si preoccupa di attribuire alle scuole un ruolo più attivo e "rinforza la loro partecipazione al sistema conferendo loro allo stesso tempo un'indipendenza culturale, pedagogica,

amministrativa e finanziaria".

I contenuti del curriculum che le scuole devono applicare sono quelli indicati dai programmi nazionali. Le scuole possono riorganizzare i programmi e aggiungere nuovi temi per il recupero degli allievi a rischio di abbandono o di ripetenza.

Il Ministero dell'Educazione si fa carico della linee guida attraverso periodiche pubblicazioni, come l'**Organização curricular e Programas** Ministério da Educaçao.

Per quanto riguarda gli obiettivi della SCUOLA DELL'OBBLIGO, il curriculum fissa tre grandi obiettivi generali:

- creare le condizioni per lo sviluppo armonioso e globale della personalità attraverso la scoperta progressiva di interessi, attitudini e capacità che formino la persona nella sua doppia dimensione individuale e sociale;
- diffondere l'acquisizione e la padronanza di saperi, strumenti, capacità e valori indispensabili per continuare negli studi o nella professione successiva;
- sviluppare valori, attitudini e pratiche che contribuiscano alla formazione di cittadini coscienti e che partecipino a una società democratica.

Ognuno di questi obiettivi si articola in obiettivi specifici.

Le tre grandi finalità dell'insegnamento della matematica durante i tre cicli dell'*Ensino Básico* sono:

- *Sviluppare la capacità di ragionamento,*
- *Sviluppare la capacità di comunicazione,*
- *Sviluppare la capacità di risolvere problemi.*

Per quanto riguarda l'insegnamento secondario (ENSINO SECONDARIO), sono previsti due diversi tipi di corsi:

- corsi di istruzione generale che portano al diploma di scuola secondaria e indirizzano al proseguimento degli studi
- corsi tecnologici che portano al diploma di scuola secondaria e al diploma di qualifica professionale di 3° livello.

I corsi generali e i corsi tecnologici hanno una struttura analoga articolata in 3 momenti: formazione generale, formazione specifica e formazione tecnica/artistica. La formazione generale è unica e indipendente dal tipo di corso (generale o tecnologico) e, all'interno di questo, dall'indirizzo prescelto; questo al fine di agevolare il passaggio dello studente da un tipo di corso all'altro.

Prevede 3 anni di istruzione dopo i 9 anni dell'istruzione obbligatoria.

Benché non obbligatorio, questo ciclo tende ad essere sempre più diffuso.

Tutti i corsi (4 generali e 11 tecnologici) sono organizzati in quattro aree di studio.

SCIENTIFICO-NATURALE - ARTISTICO – ECONOMICO-SOCIALE - UMANISTICO

Si ha pure una rete di scuole professionali, su iniziativa locale ma sotto la supervisione del Ministero dell'Educazione, e una rete (minore) di scuole artistiche nei campi delle arti visive, danza e musica.

Un recente accordo firmato dal Ministero dell'Educazione, dal Ministero del Lavoro, dai rappresentanti delle parti sociali , associazioni dei lavoratori e sindacati si pone come obiettivo il migliorare il livello della scuola e delle qualifiche professionali.

Per quanto riguarda i programmi di Matematica nei vari'Paesi esistono strette analogie nell'elencazione degli argomenti.

Si sa, però, che dietro queste somiglianze di forma possono celarsi realtà ben diverse.

Intervento sul "Numero"

Stefania COTONESCHI *

Il mio punto di vista è quello dell'insegnante di scuola elementare; cercherò di fornire delle indicazioni a chi riceve per la prima volta il materiale del volume, che possano essere di guida per la lettura e per l'interpretazione.

La fase iniziale del lavoro della Commissione UMI per la stesura delle indicazioni per un nuovo curricolo di matematica è stata soprattutto una attenta ricognizione dell'esistente nella scuola attuale. Gli insegnanti presenti nella Commissione stessa sono stati ascoltati con l'intento di mettere in evidenza quanto di positivo c'era nei programmi vigenti per la scuola elementare ('85) e media ('79). Correttamente si è proceduto ad analizzare ciò che funzionava e ciò che invece andava cambiato o rafforzato. Molte scelte sono perciò strettamente legate a questa fase di ricognizione.

Altri stimoli sono derivati dall'esame degli orientamenti per la scuola dell'infanzia ('91) soprattutto relativamente alle indicazioni metodologiche, infatti si è riconosciuta l'importanza di procedere con attività inserite in contesti di apprendimento ricchi e significativi.

Con questo procedimento iniziale, si intendeva anche dare un esempio di come affrontare un qualunque processo che miri alla crescita nel campo dell'apprendimento.

Gli esempi presentati nel volume che raccoglie il lavoro svolto dal gruppo di insegnanti nelle due settimane di Viareggio vogliono essere soprattutto una chiave di lettura per bene interpretare quanto indicato nel curricolo di matematica; non devono pertanto essere intesi come ricette per un buon insegnamento ma come un materiale di ausilio per effettuare delle scelte quando si deve progettare un percorso educativo e didattico.

"L'educazione matematica deve contribuire a una formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica". Questa frase sembra particolarmente vicina al sentire tipico della scuola elementare, infatti in questo ordine di scuola siamo abituati a pensare agli alunni come a persone nella loro interezza e complessità. Pensare alla matematica come contributo alla formazione culturale del cittadino può tranquillizzare

*Scuola-città Pestalozzi - Firenze

l'insegnante elementare, sempre molto attento all'accrescimento delle proprie conoscenze in questo settore, perché in qualche modo dà l'idea di una matematica dal volto umano.

Di seguito ci siamo chiesti che cittadino vogliamo formare. Riteniamo fondamentale che questo cittadino sia in possesso delle:

- Capacità critica rispetto alle informazioni; nella società moderna i media ci forniscono una quantità sempre maggiore di informazioni, ma spesso, ad esempio nella pubblicità queste informazioni sono poste in modo ingannevole o ambiguo, tale da essere spesso fuorvianti se non sottoposte ad attento giudizio.
- Capacità di porsi e risolvere problemi in situazioni reali; molti esempi indicati nel volume sono in realtà problemi tratti dalla vita quotidiana degli alunni, da esperienze che si presentano con buona frequenza nella realtà e che pertanto offrono occasione di acquisire competenze utilizzabili in analoghe situazioni.
- Capacità di operare scelte in condizioni di incertezza; spesso ci troviamo a dover scegliere tra una strategia o un'altra sulla base delle informazioni che abbiamo e magari siamo costretti a valutare la più conveniente in quel momento e con quelle condizioni.
- Capacità di utilizzare al meglio il proprio pensiero; c'è una grande soddisfazione per un insegnante nel constatare che un bambino, anche molto piccolo, trae divertimento e gioia nel utilizzare il proprio pensiero per inventare giochi, indovinelli, scoprire regolarità...
- Capacità di cooperazione e tolleranza; solo se siamo in grado di decentrarsi, mettersi dal punto di vista dell'altro, ascoltare, capire le ragioni e le motivazioni dell'altro possiamo lavorare proficuamente insieme ed essere tolleranti; sappiamo quanto questa capacità sia importante nella società odierna.

Altro aspetto importante di tutto il lavoro è che c'è stata la considerazione iniziale delle competenze trasversali, collocare nel tempo e nello spazio, comunicare, costruire ragionamenti , formulare ipotesi e congetture, inventare, porre in relazione, rappresentare.

Molto la matematica contribuisce alla formazione di queste, ma anche lo sviluppo di competenze trasversali favorisce la formazione di competenze specifiche.

Quali sono le competenze trasversali che possiamo considerare? Quelle che hanno a che fare con l'organizzazione dello spazio e del tempo e sulle quali nella scuola elementare si lavora a lungo ed in modo articolato. La comunicazione, sia a livello di produzione che di comprensione, è una funzione essenziale dell'essere sociale. In precedenza ho parlato di utilizzare al meglio il pensiero, con ciò possiamo intendere anche costruire ragionamenti ed esprimerli, formulare ipotesi e congetture, inventare ossia esercitare la capacità creativa in vari settori e con vari strumenti.

Trovare relazioni tra esperienze, oggetti, concetti...ed infine rappresentare come capacità non solo legata alla comunicazione ma anche all'uso di linguaggi diversi per creare modelli della realtà e delle idee.

A questo punto ci possiamo chiedere come si inserisce la matematica in questo discorso. Si tratta di una disciplina, come tale, rappresenta una chiave di lettura, di interpretazione della realtà, una lente di ingrandimento con cui guardare il mondo.

Una delle capacità importanti per il cittadino è certamente quella di saper leggere con senso critico le informazioni; un settore importante per comprendere e dare senso alle informazioni è quello dei numeri, delle percentuali, dei dati raccolti e organizzati in tabelle, grafici. È importante riflettere su ciò che troviamo sui giornali, spesso anche le pubblicità possono fornire spunti interessanti per controllare numericamente se quanto ci vogliono comunicare è corretto o meno.

È altresì importante abituarsi a riconoscere problemi, porli in termini matematici, verbalizzare e discutere con altri le strategie di soluzione, valutare le situazioni di incertezza per fare in modo sempre più consapevole le nostre scelte.

I temi importanti da affrontare nell'insegnamento della matematica per la scuola futura li troviamo espressi appunto in quelli che sono stati chiamati "nuclei tematici". È fondamentale che questi nuclei tematici siano gli stessi che si sviluppano in tutto il percorso scolastico, quasi a voler sottolineare che tutti i concetti matematici hanno bisogno di un lungo periodo di formazione e sedimentazione.

Fin dalla scuola elementare si pone attenzione e si enfatizzano quegli apprendimenti relativi a temi, che se pur presenti nei programmi dell'85, nella prassi scolastica erano stati in questi 15anni trascurati o ignorati. Penso che tra i nuclei tematici i maggiori spunti innovativi siano offerti dal nucleo Relazioni e da quello di Dati e previsioni.

Assai importante risulta essere la scelta di prendere in considerazione fin dai primi anni anche i nuclei di processo, ancora una volta risulta chiara l'idea di continuità e progressività oltre che la volontà di iniziare a lavorare precocemente sulla formazione del metodo specifico della disciplina.

Ad esempio anche con gli alunni più piccoli si ravvede la necessità di iniziare a lavorare sull'argomentazione nei suoi due aspetti principali di interpretazione e previsione tenendo conto che questa attività è preparatoria alla dimostrazione e alla modellizzazione.

Fondamentale il procedere per problemi che consente di mettere in atto la trasferibilità di conoscenze e l'arricchimento di significati di concetti già appresi.

I nuclei di processo sono da considerarsi nuclei trasversali che hanno stretto contatto con i temi degli altri nuclei.

Scorrendo le indicazioni per il curricolo di matematica risultano essere aspetti innovativi anche:

- l'attenzione alla costruzione del significato delle operazioni;
- l'attenzione alla capacità di verbalizzare le strategie risolutive e di calcolo;
- l'attenzione alla capacità di osservare e cogliere relazioni;
- l'attenzione alla capacità di produrre congetture interpretative e previsionali;
- l'attenzione alla capacità di interpretare dati e operare scelte in situazioni di incertezza.

Siamo convinti che l'apprendimento della matematica non deve essere un bagaglio astratto di nozioni....ma deve fornire strumenti per interpretare la realtà in campi di esperienza significativi e di questo, il nostro allievo deve essere sempre più consapavole.

"Nella scuola elementare e media la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti culturalmente ricchi e motivanti, che permettano agli allievi esperienze cognitive significative e consonanti con quelle condotte in altri ambiti: scientifici, linguistici, motori, figurativi, ecc.", questo necessita di tempi lunghi, didattica di tipo elicoidale.

È essenziale che la costruzione del curricolo secondo le indicazioni offerte a livello nazionale avvenga in sintonia col progetto formativo di ogni singola scuola, questo perché deve tener conto della effettivi bisogni formativi degli alunni e delle famiglie, con queste ultime inoltre è necessaria chiarezza e trasparenza.

Bisogna tener sempre presente che il soggetto che apprende opera nella realtà, e la sua formazione cresce attraverso esperienze individuali e sociali, ricche di significati, collegate alla nostra cultura.

Ogni apprendimento, e quindi anche gli apprendimenti in matematica, saranno tali se si avrà coinvolgimento emotivo, cognitivo, cooperazione tra pari.

È bene sottolineare infine alcune indicazioni metodologiche: la prima riguarda l'inserimento delle attività in campi di esperienza, che per essere tali non devono dipendere dalle convenzioni interne alla classe, devono contenere significatività insita nell'esperienza stessa, hanno rilevanza anche sociale e culturale, coinvolgono più discipline.

La seconda riguarda l'uso della discussione matematica in classe: ci deve essere un tema che definisce l'obiettivo della discussione stessa, c'è l'interazione tra pari, infine, l'insegnante ha un ruolo importante di "regista". Si possono avere:

- la discussione di un problema che è parte dell'attività complessiva di problem solving;
- la discussione di concettualizzazione che fa parte del processo di costruzione di concetti attraverso il linguaggio e il collegamento tra esperienze già vissute;
- la meta-discussione ossia il momento della definizione dei valori e degli atteggiamenti nei confronti del sapere matematico.

Quali nuclei fondanti per la matematica? Il punto di vista dei matematici

Fabio BRUNELLI *

Sommario

Uno sguardo ai programmi della Scuola Media (1979) alla luce delle ultime indicazioni didattiche di Matematica 2001. Un confronto delle indicazioni didattiche generali e dei contenuti matematici, divisi per temi o per nuclei: elementi di continuità e discontinuità .

Presentazione di qualche esempio d'attività didattiche e di elementi di verifica organizzati in relazione ai vari nuclei previsti nei curricoli.

Proposta d'alcuni argomenti e problemi da discutere nei lavori di gruppo.

I programmi di matematica

Un primo punto di riflessione è lo scollamento che purtroppo dobbiamo registrare tra la scuola reale e quella che qualcuno ha chiamato la "scuola dei programmi".

Con gli allievi della Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario di Firenze, biologi o naturalisti che aspirano all'abilitazione per la classe 59A, scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella scuola media, abbiamo cercato i programmi di matematica della scuola media italiana per leggerli e discuterli.

Dobbiamo ammettere che questi programmi, risalenti al D.M. del 9 febbraio 1979, non sono proprio facili da trovare, specialmente nelle scuole. Li abbiamo fotocopiati da una vecchia edizione del 1981 (1) quando furono ristampati dall'Istituto Poligrafico dello Stato insieme agli allora nuovi criteri orientativi per le prove di licenza media.

È evidente che la maggior parte dei docenti ha lavorato e lavora avendo presente, come guida per la propria programmazione, più che i programmi, forse l'indice del proprio libro di testo.

Una breve considerazione sugli aspetti formativi della matematica.

Abbiamo riletto i programmi del '79 tenendo presenti le indicazioni del gruppo dei quaranta docenti dell'Unione Matematica Italiana (2).

*Scuola Media Masaccio Firenze - SSIS della Toscana, fabio.brunelli@unifi.it

Leggiamo che le materie scientifiche tendono a sviluppare diverse capacità del pensiero e "una mentalità scientifica nel modo di affrontare problemi attraverso un rapporto costruttivo e dinamico con la realtà ". Inoltre l'alunno "sarà così avviato ad una comprensione delle interazioni fra sapere matematico-scientifico e la società umana che lo preparerà ad autonomia di giudizio e a capacità di scelte consapevoli."

Ci sembra interessante sottolineare come fin d'allora ci fosse una particolare sensibilità per quella che oggi noi chiameremmo "educazione scientifica del cittadino".

Il terzo punto è quello dei tempi della scuola.

Nei suggerimenti metodologici del 1979 si afferma che "il processo di avviamento al metodo scientifico proposto agli alunni dovrà rispettare i tempi e le modalità caratteristici della loro età ..., grazie alla progressiva maturazione dei processi astrattivi."

Oggi si mette in guardia il docente da un facile assemblaggio di argomenti: "Il conseguimento delle competenze e conoscenze sopra elencate richiede tempo e partecipazione attiva degli allievi al progetto formativo.' I ritmi dell'azione d'insegnamento-apprendimento devono essere adeguati alle reali esigenze degli allievi e non possono essere dettati da programmi caratterizzati da un'eccessiva segmentazione dei contenuti o da moduli che presuppongano improbabili percorsi quasi indipendenti fra loro. In altri termini la progettazione dell'insegnante va condotta secondo una logica di una didattica lunga, attenta a garantire agli allievi possibilità di costruzioni di significato per gli oggetti d'insegnamento-apprendimento."

E ancora: "L'acquisizione di un linguaggio rigoroso deve essere un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista ..." Nella premessa: "Per questo entrambi i tipi di competenze costituiscono obiettivi a lungo termine, alcuni dei quali potranno essere conseguiti compiutamente nella scuola superiore; la loro costruzione si deve però iniziare già nella scuola elementare e nella scuola media, realizzando una didattica di tipo elicoidale, che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta." Infine nelle indicazioni didattiche: "È consigliabile sviluppare attività nell'ambito di progetti didattici di medio-lungo periodo. I tempi medio-lunghi costituiscono la condizione che può garantire a tutti i bambini di compiere il consolidamento tecnico, l'approfondimento operativo e la riflessione necessari per giungere ad una piena padronanza delle competenze matematiche coinvolte nell'attività ".

Un aspetto indubbiamente problematico è che mentre il discorso che abbiamo fatto per i primi livelli scolastici sembra riscuotere generali consensi, contemporaneamente per le scuole medie superiori si porta avanti un progetto di didattica a moduli. Non parliamo poi dei corsi universitari, che negli ultimi anni continuano a subire contrazioni, concedendo agli allievi sempre minori possibilità di riflessione e assimilazione.

Il quarto punto è il "laboratorio didattico":

A proposito delle attività sperimentali nei programmi del '79 leggiamo che "in molti casi l'indagine sperimentale e quella matematica potranno proseguire a lungo assieme, integrandosi senza confondersi. Si sottolinea l'importanza di quest'attività di laboratorio non solo com'è ovvio, per le scienze sperimentali, ma anche per la matematica..."

Questa idea del laboratorio per la matematica, che troviamo qui appena accennata, oggi si è maggiormente affermata ed è da molti condivisa. Mi sembra importante riportare quanto detto (2) all'inizio del secondo paragrafo: "Nella scuola elementare e media la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti ricchi e motivanti, che permettano agli allievi esperienze cognitive significative e consonanti con quelle condotte in altri ambiti: scientifici, linguistici, motori, figurativi, ecc."

E nella conclusione: "Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza e nel supporto alla comprensione del nesso tra idee matematiche e cultura, assumono i contesti ludici e gli strumenti, dai più semplici, come i materiali manipolabili (ad es. il compasso o il righello), fino agli strumenti tecnologici più complessi (tipicamente il computer o le calcolatrici numeriche e simboliche, ma anche le "macchine", nel senso più ampio del termine, dagli orologi, al distributore di bibite, ecc.)". Nella introduzione del nucleo lo *spazio e le figure* abbiamo altre indicazioni: "Dal punto di vista metodologico sembrano particolarmente adatte le attività di laboratorio, che permetteranno agli allievi non solo di eseguire ma anche di progettare, costruire e manipolare con materiali diversi, discutere, argomentare, fare ipotesi, sperimentare e controllare la validità delle ipotesi fatte".

Ricordo a questo proposito quanto sosteneva Vittorio Checcucci: la matematica non si può leggere, raccontare, studiare, ma si deve "fare". In altre parole, ancor prima della scelta di argomenti e contenuti, più o meno "fondanti", sono importanti la metodologia, l'atteggiamento di base dell'insegnante.

Il discorso sulla metodologia ci porta necessariamente a quello sull'epistemologia.

Per definire chiaramente una metodologia è necessario infatti mettere in luce cosa pensa l'insegnante che sia o che debba essere la matematica, la matematica in generale e la matematica nella scuola: Un insieme ben ordinato di definizioni coerenti e teoremi? Un insieme di formule o di tecniche? Strategie per raggiungere velocità e correttezza nell'eseguire calcoli? Oppure una continua attività di ricerca e di scoperta, un gioco di domande e di risposte, un'officina di congetture, d'esempi e controesempi...?

Considerando il testo del 1979 ci accorgiamo che un'idea ben chiara della matematica ci fosse già allora; basti rileggere il primo obiettivo: "suscitare un interesse che stimoli le capacità intuitive degli alunni..." confrontandolo con il quinto e ultimo obiettivo: "avviare alla consapevolezza e alla padronanza del calcolo." Forse però l'epistemologia sottesa a quel testo non è stata compresa pienamente dalla scuola italiana, impaziente come spesso accade di tradurre i programmi in elenchi d'argomenti da svolgere in classe, spogliandoli dalle premesse culturali e dalle indicazioni metodologiche.

Nel 1991 nei Nuovi Orientamenti per la scuola dell'infanzia e nei Programmi Sperimentali Brocca per il Biennio troviamo l'idea della matematica che nasce per rispondere ad interrogativi sul significato della realtà e va poi sviluppandosi autonomamente ponendo interrogativi sul significato delle sue stesse costruzioni culturali.

Oggi (2) si afferma che la matematica ha due funzioni:

Funzione strumentale
– strumento per l'interpretazione del reale; – strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà; – senza il secondo aspetto rischia di diventare una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione.

Funzione culturale
– bagaglio astratto di nozioni; – sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale; – senza il primo aspetto rischia di diventare un puro gioco di segni senza significato.

Al docente viene affidato il compito non facile di armonizzare queste due funzioni: "I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante introduca entrambi in modo equilibrato fin dai primi anni della scuola elementare." E ancora: "L'insegnante cercherà di trovare un equilibrio tra le attività più costruttive e formative e quelle di consolidamento tecnico e operativo, tenendo conto delle necessità della classe in cui opera."

La metodologia che viene proposta è ancora una volta quella dell'insegnamento per problemi, che si attua attraverso la manipolazione e la discussione, la costruzione di modelli e la formulazione di ipotesi, in un laboratorio di matematica che è un laboratorio di oggetti, materiali, strumenti, mani, parole, idee, ma soprattutto un laboratorio di persone.

La discussione sul metodo ci ha portati ad affrontare l'epistemologia e questa a sua volta ci porta alla storia, alla quale è strettamente connessa.

Una nuova attenzione a quest'aspetto la troviamo fin dalla premessa (2): "Dentro a competenze strumentali ... è sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte, l'aspetto culturale, che fa riferimento ad una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche, quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati non ha senso senza riferimenti ai calcoli...Il nesso profondo tra aspetti strumentali e culturali potrà essere colto dagli alunni proponendo loro opportune riflessioni storiche, introdotte gradualmente, senza forzature e anticipazioni. Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà infatti attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi incertezza negli scolari...la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata."

Vi sono argomenti tra quelli che usualmente vengono affrontati nella scuola media che un insegnante oggi non dovrebbe più riuscire ad affrontare senza uno sguardo alla loro nascita, senza porsi la domanda: "Quando? Perché?"

Gli argomenti cui ci riferiamo sono molti; potremmo qui citare la scrittura dei numeri, il valore posizionale delle cifre, le prime statistiche della storia, terne pitagoriche e Teorema di Pitagora, il rapporto tra circonferenza e diametro del cerchio, l'uso delle lettere in matematica per esprimere proprietà e calcoli, ecc.

Gli aspetti storici non andrebbero visti come un'ulteriore richiesta da fare all'insegnante, un ampliamento del programma o un approfondimento per i bravi, bensì andrebbero visti come una possibile risorsa a disposizione di allievi e docenti per avvicinare e meglio comprendere punti cruciali, passaggi concettualmente delicati che in ogni caso andavano affrontati.

Esempi di attività didattiche

Gli esempi di attività didattiche proposte dall'UMI (2) e destinati alla scuola media sono in tutto trentaquattro e saranno facilmente consultabili in rete.

Non bisogna aspettarsi novità grandiose dal punto di vista dei contenuti. Nella scuola media si continuerà a lavorare con numeri decimali, frazioni e poligoni.

Mi pare invece molto interessante il modo come queste attività sono presentate e la metodologia che esse portano avanti: l'indicazione dei collegamenti con i nuclei di processo del misurare, argomentare e congetturare, risolvere e porsi problemi; e ancora l'alternarsi del lavoro dell'alunno da solo al lavoro in coppia o in piccolo gruppo, la discussione collettiva avente per oggetto prodotti di singoli alunni o di gruppi, i riferimenti alla storia della matematica, l'utilizzo di strumenti vari e di opportuni software. Importanti per ogni esempio sono i suoi riferimenti ai vari nuclei del curricolo matematico, al contesto d'esperienza in cui si colloca, i riferimenti alle competenze interessate e i collegamenti con argomenti anche esterni alla disciplina.

Accenniamo ora solo ad alcuni di questi esempi.

Leggiamo: *"Da bambino, Gargantua aveva bisogno di 17913 mucche per rifornirsi di latte. Quando, da giovane, andò a Parigi per completare la sua educazione, cavalcò su una giumenta che era grande come 6 elefanti. Egli attaccò le campane di Notre Dame al collo della sua giumenta a guisa di sonaglio. Sulla via di casa fu bombardato dai cannoni di un castello e si pettinò via le palle di cannone dai capelli con un rastrello lungo 300 metri".*

Si tratta di un brano della celebre opera di Rabelais. Ma non si tratta di un'unità didattica sulla favola destinata a insegnanti di lettere e nemmeno un approfondimento di letteratura francese per i colleghi di lingue straniere; è invece l'inizio di un'attività di aritmetica dal titolo "Il senso del numero - È possibile che...?".

Spesso i ragazzi applicano meccanicamente formule e calcoli, senza porsi molte domande sulla coerenza tra i dati di partenza e quelli di arrivo. Partendo da questo brano, viene sollecitata proprio la riflessione sulla coerenza dei numerici del testo. Interessante è che si potrà lavorare elaborando dati diversi e in diversi modi, ma con la stessa metodologia: formulare alcune ipotesi, scegliere alcuni valori per buoni, discuterne il possibile significato e la coerenza di altri.

Per la prima media si presenta un'attività sulla frazione come operatore e sulle frazioni equivalenti. Si parte con dei modelli in acetato trasparente di forma circolare. Si tratta di cerchi uguali su ognuno dei quali si disegnano unità frazionarie diverse. Utilizzando un cartoncino rettangolare opportunamente inciso, è possibile incernierare il disco trasparente fissandolo con un bottone automatico e infilarlo nell'incisione mostrandone solo una parte. Un modello analogo si può realizzare anche con strisce rettangolari congruenti al posto dei cerchi, anch'esse da infilare in un cartoncino per mostrarne solo la parte desiderata. Queste attività con modelli materiali vogliono riprendere esperienze fatte dagli alunni nella scuola elementare e tentare di armonizzare il concetto di frazione come operatore a quello di frazione come numero da riportare sulla linea dei numeri anche sotto forma di numero decimale.

Per la geometria nella scuola media vi segnalo un'attività sulle definizioni. Questa volta non si tratta di leggerle, impararle a memoria e ripeterle all'insegnante con le parole del libro per prendere un bel voto. Si tratta invece di raccogliere la definizione dello stesso ente geometrico da diversi libri di testo e discuterle in gruppo. Si tratta anche di validarle realizzando quanto ci richiedono con il software Cabrì e discutendo il risultato ottenuto.

Un'altra attività geometrica proposta, questa volta più classica, parte dalle simmetrie assiali realizzate con fogli di carta piegati in due e forati da spilli, prosegue con la ricerca di assi di simmetria delle figure mediante specchietti, e ancora con la ricerca di simmetrie nella natura, nelle opere dell'uomo e nelle creazioni dei ragazzi stessi. Si lavora poi sulla simmetria centrale secondo un approccio manipolativo che prevede il ricalco di figure su fogli di acetato fermati da bottoni automatici e la rotazione degli stessi. Utilizzando simmetrie assiali e centrali si classificano poi in modo significativo triangoli e quadrilateri e si realizzano con queste figure pavimentazioni del piano.

Concludo con un indovinello: "In che *misura* il cammello può essere considerato un animale tecnologico?" Per risolvere questo indovinello ci sono tre indizi. Il primo è nascosto nel testo stesso dell'indovinello. Il secondo è un numero misterioso: "398". Il terzo indizio è un nome di donna: "Ornella..."

Bibliografia

(1) MPI Nuovi programmi orari di insegnamento e prove di esame per la scuola media statale, 1979. (DPR 6 febbraio 1979, n. 50).

(2) Matematica 2001, Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica, Quaderni M.P.I. - U.M.I. (in corso di stampa, attualmente scaricabile dalla rete).
(3) La Matematica dalla scuola materna alla maturità , edizione italiana a cura di L. Grugnetti e V. Villani, Pitagora Editrice Bologna, 1999.

Quali nuclei fondanti per la matematica? Il punto di vista dei matematici

Ercole CASTAGNOLA *

Ritengo di fondamentale importanza che i nuovi programmi, anche alla luce del progetto di riforma globale della scuola italiana, evidenzino, in particolare, le seguenti caratteristiche:

a) la verticalizzazione dei contenuti;
b) la continuità col ciclo di studi precedente. Sono fermamente convinto che si apprende per approssimazioni successive, il che non vuol dire affatto fornire agli studenti nozioni approssimative, bensì ritornare sui concetti essenziali con approfondimenti via via crescenti.

Inoltre l'articolazione dei contenuti deve essere effettuata in modo da evitare fraintendimenti e "degenerazioni" avvenute nel passato dopo analoghi tentativi di innovazione dei curricoli di matematica introdotti dai programmi del P.N.I. (1985 biennio e 1989 triennio) e dal progetto Brocca (1988 biennio e 1990 triennio), di cui non bisogna assolutamente disconoscere l'importanza per la presenza di importanti aspetti innovativi, sia dal punto di vista dei contenuti che delle metodologie. Occorre dunque prevedere anche l'elaborazione di un gran numero di esemplificazioni e indicazioni "spendibili" dall'insegnante lungo il percorso didattico scelto.

In questa prospettiva si pone la necessità di convincere gli insegnanti della opportunità del rinnovamento dei curricoli di matematica che deve anche liberarli dall'obbligo di dover rincorrere determinati contenuti ormai obsoleti e certe "competenze" dettate più dalla consuetudine che dal reale valore formativo e culturale per gli allievi (è meglio sviluppare pochi concetti essenziali in modo chiaro ed esauriente piuttosto che fornire una miriade di nozioni, di cui alla fine del ciclo di studi non rimane traccia). In altre parole, l'insegnante non deve farsi prendere dalla sindrome dell'"impalcatura preliminare" su cui sviluppare i contenuti, né dal desiderio di proporre precocemente "teorie matematiche" ben sistemate e organizzate. La matematica della futura scuola italiana (che ci piace chiamare una *matematica per il futuro cittadino*) dovrà essere inserita in una scuola di formazione per la vita e per tutti, che metta in gioco studenti e insegnanti, contemporaneamente, e che potrà realizzarsi solo partendo dall'inizio del percorso (di qui l'importanza di

*Scuola superiore - Formia LT

una Riforma globale) e costruendo insieme giorno per giorno il senso delle cose, prendendo la responsabilità delle proprie scelte (lo stesso Ministro Moratti, tra le raccomandazioni fornite al Gruppo ristretto di lavoro per l'attuazione della riforma degli ordinamenti scolastici e trasmesse dal presidente del gruppo Giuseppe Bertagna a varie Associazioni, ribadisce il principio che il sistema di istruzione e formazione del Paese è al servizio della società e del progresso economico, solo se è primariamente al servizio della persona di ciascuno e mira al massimo sviluppo possibile delle capacità di tutti). Inoltre i Nuclei di Ricerca Didattica (opportunamente finanziati dal Ministero della Pubblica Istruzione) dovrebbero farsi carico di raccogliere e ordinare in modo organico gli innumerevoli esempi e percorsi didattici prodotti in tutti questi anni allo scopo di fornire agli insegnanti la possibilità di scegliere un proprio percorso didattico (ferme restando certe competenze irrinunciabili all'interno dei vari nuclei di contenuto). Infine il Ministero della Pubblica Istruzione dovrà organizzare, a livello nazionale, un adeguato piano di formazione per gli insegnanti.

Ricordo che, nell'ambito delle conoscenze matematiche, il riordino dei cicli prevede una chiara distinzione tra:

a) nuclei di contenuto (o nuclei tematici) e
b) nuclei di processo (cioè conoscenze trasversali comuni a tutti i nuclei di contenuto).

I nuclei di contenuto sono:

(1) Numeri e operazioni;
(2) Lo spazio e le figure;
(3) Relazioni e funzioni;
(4) Analisi dei dati e previsioni.

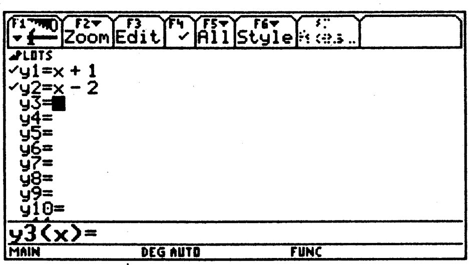
I nuclei di processo sono:

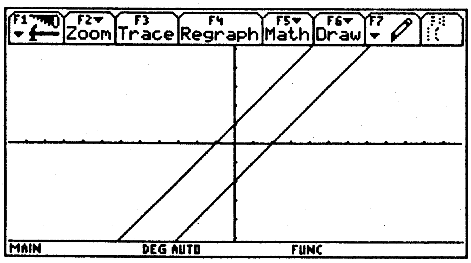
(1) Argomentare, congetturare e dimostrare;
(2) La misura;
(3) Risolvere e porsi problemi.

Inoltre queste conoscenze risultano comuni a tutti i cicli scolastici, in accordo con l'auspicata verticalizzazione e la continuità precedentemente sottolineate. Entrando nello specifico dei vari temi, nell'ambito di "Numeri e operazioni" vorremmo, ad esempio, che al posto del "calcolo dei radicali" (tanto caro agli estensori di libri di testo) comparisse la voce "le potenze con esponente razionale (loro rappresentazioni e relative proprietà)" e che venisse dato spazio adeguato ad argomenti importanti come "i numeri macchina, approssimazioni e incertezze, la notazione scientifica". Nell'ambito del tema "Lo spazio e le figure" si vorrebbe evitare che, come troppo spesso accade, l'insegnamento della Geometria nel biennio delle scuole superiori si traduca nell'adozione, più o meno rigorosa, di una trattazione assiomatica alla Euclide-Hilbert, mentre sarebbe più opportuno privilegiare la pratica delle costruzioni geometriche effettuate utilizzando software di geometria dinamica come *Cabri-géomètre* o *The Geometer's Sketchpad* [vale la pena di ricordare che, come hanno evidenziato i recenti Congressi Internazionali sull'uso della Tecnologia nell'Insegnamento della Matematica, l'utilizzo di questi nuovi software ha fatto rinascere un nuovo interesse nei confronti della geometria euclidea anche in Paesi come l'Inghilterra e gli Stati Uniti, che da anni avevano di fatto eliminato tale argomento dai loro programmi di matematica]; in tal modo si abituano gli allievi a studiare "regolarità di comportamento", a fare congetture, di cui dimostrare in seguito la validità. [Il nome dato a questo tema vuole sottolineare la necessità di trattare, accanto alla geometria piana, anche alcuni concetti fondamentali di geometria dello spazio.] Per quanto riguarda il tema "Relazioni e funzioni", all'interno del quale si è ritenuto opportuno situare il calcolo algebrico (di cui costituisce una premessa il tema "Numeri e operazioni"), penso che l'esperienza didattica fatta in questo ultimo decennio di sperimentazione dei programmi di matematica PNI e Brocca e l'uso delle nuove tecnologie impongano una drastica riduzione (sia come importanza che come tempo da dedicare) delle tecniche di manipolazione algebrica (il cosiddetto "calcolo letterale"), privilegiando, invece, l'aspetto grafico e strutturale, senza dimenticare l'importanza dell'evoluzione storica dei concetti algebrici. Chiaramente il tema "Analisi dei dati e previsioni" dovrà essere completamente rivisto (nella nuova scuola superiore) per tener conto di come tali argomenti sono stati sviluppati nel ciclo primario. Relativamente al nucleo di processo "Argomentare, congetturare e dimostrare" si osserva immediatamente la mancanza, voluta, della voce "Logica": tale scelta è motivata dal fatto che spesso, nel passato, la Logica era sviluppata (in modo più o meno formale) come un capitolo staccato da tutto il resto, senza essere poi utilizzata proprio nell'ambito più congeniale, cioè l'analisi delle dimostrazioni; riteniamo invece più produttivo, ai fini dell'avvio al pensiero teorico e alla dimostrazione, da un lato iniziare in un ambito più semplice come quello aritmetico (rispetto al tradizionale ambito geometrico) e dall'altro, attraverso l'utilizzo dei moderni sistemi di manipolazione simbolica e degli ambienti di geometria dinamica, indurre gli studenti a fare osservazioni, esplorazioni e congetture e a documentare opportunamente il proprio lavoro. Con queste premesse viene a modificarsi anche il concetto stesso di dimostrazione: come ha sottolineato Domingo Paola in un recente intervento al Convegno dell'ADT (Associazione per la Didattica con le Tecnologie) non si dimostra più per *convincere* (un amico, se stessi o l'insegnante), ma per *spiegare perché* una determinata congettura funziona. Il nucleo di processo "Misura" si presta, in modo particolare, a una trattazione storica dell'argomento (ma discorsi analoghi si potrebbero fare a proposito degli altri temi): ad esempio a livello di scuola superiore si potrebbero prima analizzare alcuni lavori di Archimede (ad esempio la "Quadratura della parabola", "Sulla sfera e il cilindro" e "Sul metodo meccanico"), poi alcuni lavori di Bonaventura Cavalieri e infine alcuni aspetti del calcolo infinitesimale, con particolare enfasi al calcolo integrale [teniamo presente che, utilizzando gli attuali strumenti di calcolo, è possibile illustrare, in un tempo sufficientemente limitato, le somme di Riemann per diverse funzioni, cosa che in passato era assolutamente impensabile a causa della complessità di calcolo.] Infine, per quanto riguarda il nucleo di processo "Risolvere e porsi problemi", sarebbe auspicabile creare una banca dati (da rendere disponibile a tutti gli insegnanti) contenente problemi significativi (chiusi, aperti, affrontabili con diverse strategie risolutive, ecc.) ed esempi di discussioni.

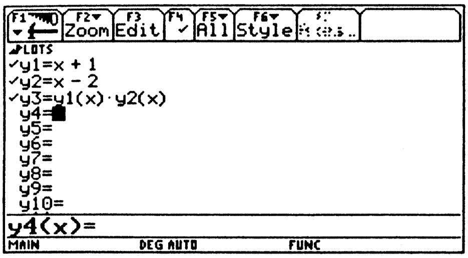
In definitiva la riforma dovrà prevedere una matematica comune a tutti gli indirizzi, sia per il biennio che per il triennio, e riservare, eventualmente, al triennio gli approfondimenti relativi a specifici contenuti. In particolare al biennio si dovrà privilegiare la costruzione di esempi nei diversi nuclei tematici e di processo (privilegiando, fin dove è possibile, gli esempi tratti dalla realtà quotidiana dello studente) e riservare al triennio la successiva sistemazione teorica, facendo sempre attenzione alla costruzione del significato degli oggetti matematici. In questa prospettiva (come è già stato più volte indicato) risulta inevitabile un confronto del mondo dell'insegnamento con gli strumenti automatici di calcolo e con le nuove tecnologie. Nuove tecnologie intese sia sotto l'aspetto dell'alfabetizzazione informatica, cioè come possibilità di offrire agli studenti le conoscenze e le competenze che l'attuale società esige, sia come strumento per favorire il conseguimento di obiettivi di insegnamento-apprendimento disciplinari [si veda quanto scritto in proposito dalla Commissione UMI per i Nuovi Programmi]. Come sottolineato anche dagli *Standards* americani per l'insegnamento [ricordiamo che gli *Standards* americani sono un documento, a cura del National Council of Teachers

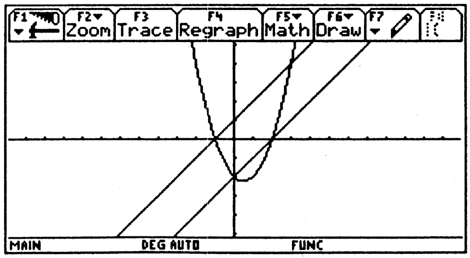
of Mathematics (NCTM) relativo al curricolo di matematica nei diversi ordini di scuola; di tale documento è possibile trovare in rete l'ultima versione all'indirizzo http://standards.nctm.org/, inoltre è disponibile una traduzione in italiano della versione del 1998 degli Standards, a cura dell'IRRE Emilia Romagna, consultabile presso il sito http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/nctm/index.htm], le tecnologie informatiche (calcolatrici e computer) sono strumenti essenziali per insegnare, apprendere e fare matematica. Esse forniscono immagini concrete delle idee matematiche, facilitano l'organizzazione e l'analisi dei dati ed effettuano calcoli in modo efficiente e accurato. Possono aiutare gli studenti nell'esplorare diverse aree della matematica, come la geometria, la statistica, l'algebra, la misura e l'aritmetica. La disponibilità delle tecnologie informatiche evita agli studenti e agli insegnanti eccessive preoccupazioni legate alla complessità dei calcoli e consente loro di concentrarsi su compiti di alto livello cognitivo, come la proposta, la discussione, la condivisione e la scelta delle strategie nella risoluzione di un problema, contribuendo in modo determinante al conseguimento dell'obiettivo di arricchire e potenziare l'insegnamento e l'apprendimento della matematica.
Per illustrare l'uso delle tecnologie voglio considerare un esempio semplice, ma significativo, che sfrutta solamente le possibilità di rappresentazione grafica e tabulare delle moderne calcolatrici. Inseriamo nell'Editor delle funzioni le due equazioni: $y = x + 1$ e $y = x - 1$.





Come sappiamo, tali equazioni rappresentano graficamente due rette parallele. Inseriamo ora nell'Editor il loro prodotto e andiamo a esaminare il relativo grafico.

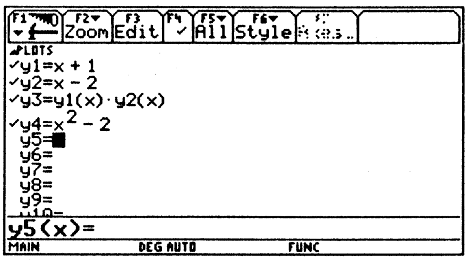


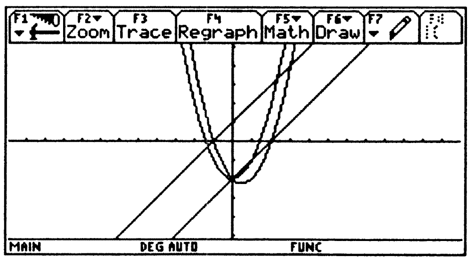


Cosa si può dedurre dal grafico della funzione prodotto? Due concetti importanti:

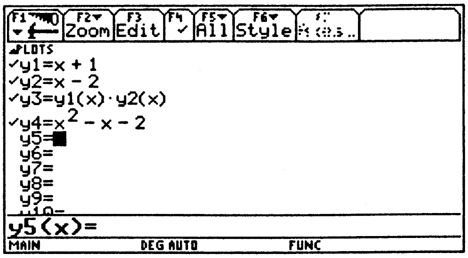
(a) il prodotto si annulla (cioè il relativo grafico interseca l'asse delle ascisse) quando si annulla uno dei due fattori;
(b) il prodotto è positivo quando i due fattori hanno segno concorde e negativo quando i due fattori hanno segno discorde.

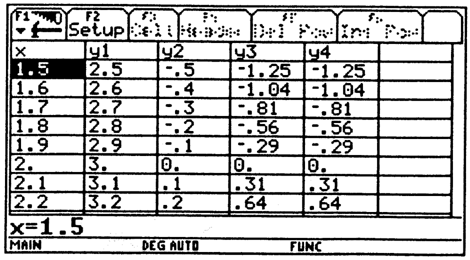
Inoltre le possibilità grafiche offerte dalle moderne calcolatrici possono anche aiutare gli studenti a correggere errori di calcolo algebrico. Un errore abbastanza comune è il seguente: $(x+1)(x-2) = x^2-2$. Inseriamo, allora, anche quest'ultima espressione nell'Editor ed esaminiamo il grafico risultante.





Il grafico risultante è diverso da quello della funzione prodotto. Se invece inseriamo l'espressione corretta, cioè x^2-x-2, il grafico che si ottiene coincide con quello visto in precedenza, in quanto il grafico di $y4(x)$ si sovrappone esattamente al grafico di $y3(x)$. A ulteriore conferma di questo risultato è possibile confrontare, mediante una tabella, i valori assunti dalle due funzioni.





x	y1	y2	y3	y4
1.5	2.5	-.5	-1.25	-1.25
1.6	2.6	-.4	-1.04	-1.04
1.7	2.7	-.3	-.81	-.81
1.8	2.8	-.2	-.56	-.56
1.9	2.9	-.1	-.29	-.29
2.	3.	0.	0.	0.
2.1	3.1	.1	.31	.31
2.2	3.2	.2	.64	.64

Voglio concludere questo mio intervento con una citazione famosa del matematico Roger Godement, che bene sintetizza le mie aspettative da un progetto di Riforma globale della scuola italiana degno di tal nome.

"Stando così le cose, ci sembra che, nelle "grandi" nazioni sovra-sviluppate scientificamente e tecnicamente nelle quali viviamo, il primo dovere dei matematici, e di molti altri, sarebbe piuttosto quello di fornire ciò che non viene loro richiesto, cioè degli uomini capaci di riflettere da soli, di scovare le argomentazioni false e le frasi ambigue, e agli occhi dei quali la diffusione della verità fosse infinitamente più importante, ad esempio, della televisione planetaria a colori e in rilievo: degli uomini liberi, e non dei robot per tecnocrati.

È tristemente evidente che il modo migliore di formare questi uomini che ci mancano non è quello di insegnare loro le scienze matematiche e fisiche, queste branche del sapere la cui buona norma consiste, in primo luogo, nel far finta di ignorare perfino la stessa esistenza di problemi umani, e alle quali le nostre società altamente civilizzate danno, ciò che dovrebbe risultare miope, il primo posto.

Ma anche insegnando matematica si può almeno tentare di dare alle persone il gusto della libertà e della critica, e abituarle a vedersi trattare da esseri umani dotati della facoltà di capire" (R.Godement, Cours d'Algèbre, deuxième édition, Hermann, 1966).

LABORATORIO DI MATEMATICA E TECNOLOGIA

Giampaolo CHIAPPINI *

Le indicazioni contenute nel volume Matematica 2001, realizzato per il XXII Convegno UMI-CIIM, orientano gli insegnanti verso la necessità di curare in modo approfondito la costruzione di una ricca base esperienziale matematica con gli alunni attraverso attività centrate sulla soluzione di situazioni problematiche relative ad aspetti della realtà che risultino significativi per gli alunni e per gli insegnanti.

".... l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, non unicamente come bagaglio astratto di nozioni."

L'indicazione di mettere al centro della pratica didattica la costruzione di una dimensione esperienziale ricca e contestualizzata in matematica viene contrapposto ad un modello di insegnamento di tipo trasmissivo di nozioni, di procedure e di definizioni, sganciato da usi concreti della realtà, puramente formale e astratto.

Inoltre, nelle indicazioni contenute nel volume citato viene rimarcato che la dimensione esperienziale costituisce il terreno concreto e vivo anche per l'approccio e lo sviluppo di conoscenze teoriche.

Tutte le proposte di attività didattiche contenute nel volume sopra citato, realizzate per illustrare il significato delle scelte operate nella strutturazione del curriculum, costituiscono esempi paradigmatici di attività volte a sviluppare un apprendimento di tipo esperienziale in matematica. Gli strumenti usati in molti degli esempi proposti, contribuiscono a strutturare un ambiente particolare di apprendimento che può essere definito *"laboratorio di matematica"*. In questo ambiente si sviluppano particolari processi che risultano coinvolti nella costruzione di un apprendimento esperienziale in matematica. Nel lavoro che segue si centrerà la riflessione sull'importanza dell'apprendimento esperienziale in matematica, su ciò che lo caratterizza e sul ruolo che le tecnologie dell'informazione e della comunicazione possono svolgere per contribuire a strutturare una pratica didattica di laboratorio di matematica in grado di favorire tale apprendimento.

Apprendimento esperienziale in matematica

La ricerca in psicologia dell'apprendimento ha messo in evidenza che l'approccio alla conoscenza avviene fondamentalmente in due modi: quello percettivo-

*Istituto per le Tecnologie Didattiche - CNR - Genova

motorio e quello simbolico-ricostruttivo. Il primo processo, più antico nell'uomo sia filogeneticamente che ontogeneticamente, coinvolge l'azione e la percezione e produce un apprendimento basato sul fare, sul toccare, sul muovere e sul vedere. La seconda modalità di conoscenza, quella simbolica-ricostruttiva, opera su simboli (linguistici, matematici, logici) e ricostruisce nella mente "oggetti", significati e loro rappresentazioni mentali. È un modo più "sofisticato" di conoscere, richiede consapevolezza delle procedure e la padronanza dei simboli astratti utilizzati e dei loro significati.

Antinucci in un suo recente libro (Antinucci, 2001) nota che l'apprendimento esperienziale prende vita principalmente attraverso l'approccio di tipo percettivo-motorio basato su cicli ripetuti di percezione-azione attraverso uno scambio continuo con l'esterno. La conoscenza che si sviluppa con questo approccio è contestualizzata, nel senso che può essere usata solo all'interno di un contesto appropriato, e si caratterizza come una conoscenza fattuale. È una modalità di apprendimento profondamente diversa da quella che generalmente caratterizza l'insegnamento tradizionale, basato invece sull'approccio simbolico-ricostruttivo. Nell'approccio simbolico-ricostruttivo l'apprendimento avviene totalmente all'interno della mente, senza alcuno scambio con l'esterno che non sia l'input di simboli linguistici. Vygotskij mette in evidenza che "sebbene l'intelligenza pratica e l'uso di segni possano operare indipendenti l'una dall'altro nei bambini piccoli, l'unità dialettica di questi sistemi è nell'adulto l'essenza stessa del complesso comportamento umano" (Vigotskij, 1987)

È importante notare che entrambi i due tipi di approccio alla conoscenza sono mediati dall'uso di strumenti. Si tratta però di strumenti che hanno natura diversa e che svolgono la loro funzione di mediazione in modo profondamente diverso (Vigotskij, 1987). Vygotskij distingue tra due tipi di strumenti mediatori di ciascuna attività umana: gli strumenti tecnici e gli strumenti psicologici. I primi, diretti al controllo della natura, mediano l'azione dell'individuo verso l'esterno. L'uso di tali strumenti porta a trasformazioni negli oggetti, cioè produce effetti esterni che possono essere controllati sul piano percettivo-motorio. Gli strumenti psicologici, invece, sono diretti alla padronanza o al controllo dei propri processi di comportamento; sono diretti internamente e non producono alcuna trasformazione nell'oggetto di un'operazione mentale.

Vygotsij, inoltre, nota che lo sviluppo delle funzioni psichiche superiori, coinvolte in tutti i processi di comprensione e di costruzione di significati, sono il risultato di una combinazione di strumenti tecnici e strumenti psicologici nell'attività. Tale combinazione si realizza attraverso un processo di interiorizzazione della pratica esterna, cioè attraverso la ricostruzione interna di operazioni esterne, attuate attraverso l'uso di strumenti tecnici. Il processo di interiorizzazione di una pratica esterna si sviluppa in due fasi: prima a livello sociale, tra le persone che partecipano all'attività, e poi sul piano individuale. Nella prima fase il significato relativo ad una operazione esterna è riconosciuto da altri che partecipano all'attività e da loro espreso in una qualche altra forma. Nella seconda fase, attraverso varie trasformazioni, il significato viene interiorizzato dall'individuo e reso disponibile alla propria coscienza.

Quindi l'essenza degli strumenti psicologici è che essi sono strumenti per dar forma e controllare la cooperazione e la comunicazione tra individui e la propria coscienza delle procedure coinvolte nell'uso e nella costruzione degli strumenti tecnici (Engestrom, 1987).

In generale si può affermare che l'acquisizione e l'applicazione di nuovi strumenti tecnici estende la sfera di influenza dell'individuo, consente di sviluppare nuova esperienza, mentre l'acquisizione e l'applicazione di nuovi strumenti psicologici eleva il livello di influenza e di consapevolezza sui processi e sui fenomeni che caratterizzano le attività umane. Sia gli strumenti tecnici, controllabili attraverso un approccio percettivo-motorio, sia gli strumenti psicologici, controllabili attraverso un approccio simbolico-ricostruttivo, risultano importanti per il processo di apprendimento.

Ciò contrasta con quanto avviene normalmente nella scuola, dove storicamente, con la diffusione del libro stampato, si è privilegiato l'approccio simbolico-ricostruttivo nelle attività di insegnamento apprendimento (per una analisi più approfondita del rapporto tra libro di testo e insegnamento scolastico si veda (Antinucci, 2001)).

Questo tipo di approccio, sganciato dalla costruzione di una ricca base esperienziale, può creare ostacoli sul piano dell'apprendimento. Per esempio, vari studi hanno messo in evidenza che fornire una interpretazione o una spiegazione di un concetto matematico, senza che si siano create tra i partecipanti all'attività le condizioni esperienziali che stanno alla base della sua condivisione, produce generalmente resistenza, è inutile o è causa di confusione.

La costruzione della base esperienzale necessaria per appropriarsi dei significati che possono essere veicolati nell'attività può essere sviluppata solo attraverso attività didattiche in cui vengono usati appropriati strumenti (disegni, mappe, diagrammi, software specifici, strumenti fisici quali compasso, abaco, macchine matematiche ...) in grado di svolgere la loro funzione di mediazione sia sul piano esterno che sul piano interno dell'individuo. Questi strumenti sono mediatori dell'azione dell'individuo e in quanto tali possono essere controllati sul piano percettivo-motorio. Essi contemporaneamente sono mediatori della comunicazione tra i partecipanti coinvolti nell'attività (insegnante e studenti) che è cruciale nel processo di interiorizzazione dei significati matematici coinvolti nell'attività.

Senza lo sviluppo di attività basate sull'uso di appropriati strumenti non è possibile sviluppare la base esperienziale necessaria per l'appropriazione di significati in matematica.

Tecnologia e apprendimento esperienziale in matematica

Con la diffusione dei calcolatori nella scuola e con lo sviluppo di programmi che sfruttano le potenzialità di calcolo, di visualizzazione e di simulazione offerte dalla moderna tecnologia informatica sono stati resi disponibili nuovi tipi di strumenti per lo sviluppo di una base esperienziale in matematica. I moderni programmi per calcolatore, basati su interfaccia di manipolazione diretta, sono dei media interattivi che rispondono all'azione del soggetto e consentono di realizzare un apprendimento basato sul fare, toccare, muovere e vedere. Si pensi per esempio a Cabri Géomètre. Cabri permette di realizzare una costruzione geometrica nell'ambito della geometria euclidea usando le primitive disponibili con il sistema che corrispondono agli assiomi della geometria euclidea. Cabri rende inoltre disponibile una nuova potenzialità visuale: permette cioè di "trascinare" sullo schermo gli elementi variabili della costruzione realizzata e di osservare, di conseguenza, le proprietà che si conservano nella figura modificata. L'introduzione del movimento nelle attività di costruzione geometrica porta ad una *ri-configurazione* di tale attività mediata dalla tecnologia. Attraverso questa ri-configurazione dell'attività vengono offerti nuovi strumenti di tipo visuale, controllabili sul piano percettivo e motorio, per superare ostacoli di natura epistemologica legati al rapporto tra disegno e figura nel dominio della geometria euclidea. Ciò rende possibile lo sviluppo negli alunni di una concreta e ricca base esperienziale in tale dominio di conoscenza. Questa base esperienziale costituisce il riferimento per lo sviluppo di nuovi e più avanzati significati in campo matematico relativi al passaggio dalla costruzione alla dimostrazione in campo geometrico (Mariotti, 2002).

Lo sviluppo di significati matematici più avanzati si realizza quando l'uso degli strumenti tecnici e di quelli psicologici interagiscono nelle attività proposte e gestite dall'insegnante, cioè quando i due approcci percettivo-motorio e simbolico ricostruttivo risultano entrambi coinvolti e integrati nella pratica didattica. È questo l'obiettivo che può essere perseguito attraverso una pratica didattica di laboratorio di matematica.

Il laboratorio di matematica

In Italia, le ricerche di innovazione didattica per l'apprendimento della matematica hanno prodotto un vasto e ricco reportorio di esempi di attività centrate sul laboratorio di matematica (si pensi solamente a tutti i lavori e alle proposte didattiche elaborate da Emma Castelnuovo). Tuttavia, è solo con la diffusione delle nuove tecnologie dell'informazione e della comunicazione nelle scuole che la nozione di laboratorio di matematica ha cominciato a diventare uno strumento di studio nel campo della ricerca in didattica della matematica. Si tratta di una nozione ancora poco definita e questo lavoro vuole essere un modesto contributo in tale direzione. Per comprendere meglio cosa caratterizza la nozione di laboratorio di matematica ritengo possa essere utile confrontare questa nozione con quella di "sperimentazione didattica". Nel fare ciò non intendo contrapporre tra loro le due nozioni, ma solo fare emergere, attraverso il confronto, ciò che caratterizza ciascuna di esse.

Lo studio centrato sulla sperimentazione didattica porta a considerare un fenomeno di apprendimento focalizzando l'attenzione sugli *aspetti metodologici* connessi con la progettazione e lo sviluppo di una situazione didattica o di una batteria sperimentale di attività didattiche connesse a tale fenomeno. In generale ciò implica che si debbano individuare le variabili che caratterizzano la situazione didattica, studiare il comportamento di tali variabili e specificare le condizioni della riproducibilità del fenomeno di apprendimento, cercando di annullare tutti gli aspetti soggettivi che potrebbero concorrere a incidere sul risultato (pregiudizi, aspettative).

Centrare l'attenzione sul laboratorio di matematica significa, invece, analizzare le trasformazioni di natura *culturale e sociale* che modificano la pratica ordinaria di insegnamento a seguito dell'uso di specifiche tecnologie. Nel cambiamento di focus dalla sperimentazione didattica al laboratorio di matematica c'è uno spostamento di interesse dalla *metodologia* allo studio degli *aspetti culturali e sociali* che caratterizzano la pratica didattica mediata dalle nuove tecnologie e dalle sue relazioni con gli aspetti culturali e sociali che caratterizzano invece la pratica ordinaria di insegnamento-apprendimento.

In questo quadro la nozione di laboratorio di matematica è centrata sullo studio delle trasformazioni, di tipo culturale, a cui possono essere sottoposti gli oggetti matematici di insegnamento con l'uso della tecnologia. Tali trasformazioni vengono realizzate con lo scopo di superare, almeno in parte, gli ostacoli posti dai limiti esperienziali e culturali di insegnanti e di studenti nello sviluppo di interazioni proficue con tali oggetti nella pratica ordinaria di insegnamento.

Contemporaneamente, la nozione di laboratorio è centrata anche sullo studio delle trasformazioni, di natura sociale, che caratterizzano le interazioni tra i partecipanti all'attività che operano con gli oggetti matematici di insegnamento trasformati per mezzo dell'uso della tecnologia.

Tecnologia e laboratorio di matematica

Dal punto di vista culturale la nozione di laboratorio di matematica si basa sull'idea che gli oggetti matematici di insegnamento non sono oggetti fissi ma malleabili, nel senso che possono essere ri-configurati attraverso l'uso appropriato di specifiche tecnologie. La trasformazione dell'oggetto matematico di insegnamento comincia a prendere vita attraverso l'incorporazione in uno strumento tecnologico (non importa se software o strumento fisico) di specifiche risorse matematiche per l'attività. È importante osservare che l'uso in questo contesto del temine "risorse" chiama in causa il concetto di "cultura", intendendo, per quest'ultima, il campo di risorse che può essere assunto come riferimento nella costruzione di una determinata conoscenza.

Per esempio, Cabri-Géomètre incorpora nella sua interfaccia gli assiomi della geometria euclidea (e anche alcuni teoremi di base) che costituiscono le risorse di base per la realizzazione di costruzioni geometriche; l'Algebrista incorpora nella sua interfaccia le proprietà associativa, commutativa e distributiva delle operazioni che costituiscono le risorse di base per le trasformazioni algebriche (Cerulli & Mariotti, 2002); alcuni micromondi di Ari-Lab incorporano nella loro interfaccia le potenzialità offerte da un sistema di numerazione che costituiscono le risorse di base per la soluzione di problemi aritmetici (Bottino & Chiappini, 2002).

Le risorse che caratterizzano i campi di esperienza matematici o extramatematici di riferimento per questi sistemi risultano incorporati nella loro interfaccia per mezzo di *oggetti computazionali.*

L'alunno può interagire con tali oggetti producendo effetti e ricevendo feedback dal sistema (controllabili sul piano percettivo-motorio) che possono essere letti e interpretati come *fenomeni* matematici relativi al campo di esperienza di riferimento per l'attività.

Osserviamo che la ri-configurazione degli oggetti matematici realizzata con questi sistemi avviene sfruttando l'interattività e le potenzialità di visualizzazione e di calcolo rese disponibili dalla moderna tecnologia informatica.

Attraverso il processo di incorporazione di una risorsa culturale in un sistema viene compiuta una importante trasformazione culturale: una risorsa che sino a quel momento poteva vivere solo su un piano puramente mentale viene reificata, e resa disponibile attraverso uno strumento con il quale il soggetto può interagire attraverso un approccio di tipo percettivo-motorio.

I meccanismi cognitivi che risultano coinvolti nell'attività con gli oggetti computazionali del sistema sono meccanismi cognitivi ordinari. Questi meccanismi sono infatti basati sull'azione e la percezione come quelli usati nelle relazioni spaziali di base quali raggruppare, muovere e distribuire cose nello spazio, o nella manipolazione di oggetti quali generare un oggetto in uno spazio, modificarlo, sostituirlo, iterare azioni e così via ...

Il feedback fornito dal sistema è controllabile sul piano percettivo. Per esempio l'uso di un comando di Cabri produce un effetto grafico nello spazio di lavoro; l'applicazione ad una parte di un'espressione algebrica di un comando dell'Algebrista che reifica un assioma produce un cambiamento nella forma dell'espressione (se l'applicazione è appropriata). Il feedback costituisce pertanto lo strumento attraverso il quale lo studente può validare la rispondenza dell'azione compiuta rispetto al compito che sta affrontando. Specifiche funzioni permettono di validare un'intera strategia messa in atto nella soluzione del compito, come per esempio la funzione di "trascinamento" di Cabri o la funzione di "conta" di Ari-Lab. I feedback forniti dal sistema svolgono un ruolo cruciale nel permettere una evoluzione degli schemi degli studenti relativi ai modi d'uso delle risorse disponibili per l'attività, che sono gli oggetti computazionali presenti nell'interfaccia del sistema

Questi sistemi sono quindi innanzittutto dei mediatori dell'*azione* dello studente e permettono lo sviluppo di una pratica didattica basata sull'esplorazione attiva, sul fare, sulla rielaborazione delle strategie impiegate nella soluzione del compito.

Consentono, in altre parole, di sviluppare una ricca base esperienziale nell'uso di risorse culturali di tipo matematico, opportunamente ri-configurate, per affrontare e risolvere compiti pratici che caratterizzano un determinato campo di esperienza matematico o extramatematico.

Osserviamo però che lo sviluppo di schemi d'uso degli strumenti che può avvenire nella pratica è dipendente dai compiti per i quali il sistema è usato; il significato soggiacente al compito può rimanere limitato agli specifici usi pratici del sistema e non evolvere verso significati matematici che vanno al di là di quelli coinvolti direttamente nella soluzione del compito.

A tale riguardo osserviamo che quando si usano le risorse incorporate in uno strumento si ha sempre a che fare con una duplice valenza del loro significato: c'è un significato connesso all'uso pratico e concreto della risorsa in relazione al compito che si vuole affrontare, e c'è un significato relativo ad una razionalizzazione di tale uso e ad un suo inquadramento all'interno di un costrutto teorico.

Dentro la pratica d'uso di questi sistemi nelle attività di laboratorio si pone pertanto un problema di interpretazione, condivisione ed evoluzione di significato che non può essere affrontato solamente attraverso un approccio percettivo motorio mediato dal sistema in uso. I problemi di interpretazione di significato e di evoluzione di significato sono problemi affrontabili solo se inquadrati all'interno di una prospettiva sociale, attraverso strategie di apprendimento che coinvolgono anche la dimensione simbolico-ricostruttiva dell'apprendimento.

Sulla base di queste considerazioni si può affermare che il ruolo del laboratorio di matematica è determinato anche da una seconda dimensione, la dimensione sociale che si caratterizza però in modo differente rispetto a quella coinvolta nella pratica didattica ordinaria.

È importante osservare che nella pratica didattica del laboratorio di matematica i processi di comunicazione tra i partecipanti all'attività possono trovare giovamento da vari fattori.

Si è in precedenza evidenziato che le risorse per lo sviluppo dell'attività di laboratorio non devono essere necessariamente presenti nella mente di coloro che partecipano all'attività; gli studenti possono accedere ad esse in quanto distribuite negli strumenti in uso. Questo fa si che si possa realizzare un dialogo sui modi d'uso di una specifica risorsa e sulle sue proprietà, non in senso astratto, bensì potendola identificare precisamente con un oggetto dell'interfaccia e potendo osservare gli effetti che essa produce.

Gli oggetti computazionali sono infatti degli oggetti che consentono di "poterci lavorare sopra didatticamente", che possono entrare facilmente nel dialogo tra i partecipanti all'attività, in quanto oggetti concreti che, se utilizzati, producono effetti osservabili.

Inoltre osserviamo che molti sistemi offrono anche specifiche funzioni di supporto per i processi di comunicazione inerenti lo sviluppo dell'attività.

Per esempio, specifiche funzioni incorporate in molti sistemi consentano di reificare il processo risolutivo attuato dallo studente, operando con gli oggetti computazionali del sistema in uso. Il processo risolutivo è per sua natura dipendente dal tempo e quindi non è permanente. Tali funzioni permettono di trasformarlo in un oggetto permanente che può essere usato nel dialogo e negli scambi comunicativi sia tra insegnanti e alunni che tra gli alunni, per riflettere sui processi compiuti. Per esempio la funzione "storia" di Cabri Géomètre o la funzione "monitor" di Ari-Lab permettono di rivedere, in una sorta di filmato, tutto il processo risolutivo attuato dallo studente. La possibilità di interagire con tutti gli studenti avendo a disposizione non solo il loro prodotto risolutivo, ma anche il filmato di tutto il loro processo risolutivo può essere di grande utilità sul piano didattico.

Inoltre, alcuni sistemi rendono disponibili funzioni di comunicazione in grado di favorire gli scambi, il confronto dei processi e dei risultati nella soluzione dei problemi e la possibilità di inserire tale attività all'interno di meccanismi di interazione sociale. Per esempio, la funzione di comunicazione di Ari-Lab supporta lo sviluppo di varie attività di tipo cooperativo tra coppie di alunni che possono essere particolarmente efficaci per favorire il processo di apprendimento.

In questo quadro, le opportunità di azione offerte dagli oggetti computazionali e le funzionalità di supporto alla comunicazione possono essere viste come strumenti mediatori dei processi di comunicazione tra i partecipanti all'attività di laboratorio. L'uso appropriato di tali strumenti può fornire sia riferimenti per la costruzione e la condivisione di un *linguaggio comune*, sia supporto per i processi di verbalizzazione e di comunicazione tra i partecipanti all'attività.

In pratica, l'uso sociale di tali strumenti nell'attività può consentire di mediare l'integrazione tra l'approccio percettivo motorio e l'approccio simbolico-riocostruttivo; tale integrazione risulta cruciale per proiettare il significato oltre ciò che si è esperito nella pratica d'uso con il sistema. Ciò consente all'alunno di costruire un ponte con nuovi aspetti della cultura matematica che fanno da cornice e possono giustificare e modellare, ad un altro livello, quanto esperito.

È importante osservare che, affinchè tutto ciò si realizzi, è necessaria una nuova figura di insegnante. Innanzitutto tale insegnante deve essere in grado di progettare nuovi tipi di attività didattiche attraverso le quali gli studenti possano effettivamente sviluppare una ricca esperienza matematica interagendo con le risorse matematiche ri-configurate del laboratorio. Nel fare ciò, l'insegnante deve tener conto che i compiti appartenenti alla tradizione didattica, possono non essere adatti per una pratica didattica di laboratorio di matematica. Anzi, molto spesso, possono essere addirittura controproducenti.

In secondo luogo l'insegnante deve essere in grado di gestire l'intera pratica didattica che non può più essere fondata su un modello di insegnamento di tipo trasmissivo, ma deve volta alla costruzione di una base esperienziale tra gli alunni.

Tutto ciò comporta che l'insegnante sia in grado di:

- essere un modello per gli alunni nell'uso delle risorse matematiche ri-configurate del laboratorio per affrontare, attraverso strategie differenti, i compiti
- supervisionare il lavoro degli alunni, usando, all'occasione, le risorse matematiche ri-configurate del laboratorio per risolvere problemi di apprendimento che emergono durante l'attività
- gestire soluzioni diverse proposte dagli alunni cogliendo in ciascuna di esse gli aspetti che possono essere più utili ai fini dell'avanzamento della conoscenza
- mantenere un dialogo stabile con ciascun alunno durante la risoluzione del compito facendo costantemente riferimento all'uso delle risorse matematiche ri-configurate del laboratorio
- orientare discussioni comuni nel laboratorio con il fine di far emergere e far condividere nuovi significati matematici dall'esperienza sviluppata

Si tratta di competenze che si strutturano e raffinano proprio attraverso la pratica di laboratorio. La pratica con gli oggetti matematici riconfigurati del laboratorio richiede quindi anche una ri-configurazione del ruolo dell'insegnante. Si tratta di una ri-configurazione da "insegnante"[1] in "maestro"[2], attribuendo a questo secondo termine l'accezione di significato che veniva data nelle botteghe rinascimentali, veri e propri laboratori di arte, mestieri e scienza, a quei tempi solo per una ristretta élite di persone, oggi con la diffusione delle nuove tecnologie, per tutto il sistema scolastico.

---

[1]Insegnare: dal lat.tardo "insignare", con il senso originario di "imprimere".
Insegnante: "Colui che sa esporre in senso progressivo una disciplina" (Zingarelli)

[2]Maestro: dal lat."magister" derivato di "magis" (più) e suff. "ter" che indica contrapposizione tra due: "Il più forte, il più capace in contrapposizione ad una persona o a un gruppo di persone"

Bibliografia

- Antinucci, F., 2001, *La scuola si è rotta*, Laterza
- Bottino, R.M., Chiappini, G., 2002, Advanced technology and learning environment: their relationship within the arithmetic problem-solving domain, in Lyn D. English (ed), *Handbook of international research in mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publisher
- Cerulli, M., Mariotti, M.A., 2002, L'Algebrista: un micromonde pour l'insegnement et l'apprentissage de l'algèbre, *Sciences et technique éducatives*, Vol 9, n. 1-2/2002, Lavoisier
- Engetrom, Y., 1987, *Learning by expanding*, Helsinki, Finland: Orienta-Consultit
- Mariotti, M.A., 2002, The influence of technological advances on students mathematics learning, in Lyn D. English (ed), *Handbook of international research in mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publisher
- Vygotskij, L., 1987, *Il processo cognitivo*, Boringhieri Editore

QUALE MATEMATICA PER I RAGAZZI, FUTURI CITTADINI QUALE FISICA PER .... QUALE SCUOLA PER ...?

Paolo GUIDONI *

PARTE I:
considerazioni di sfondo, un po' didattiche, un po' cognitive, un po'. epistemologiche

LA SITUAZIONE: Di fatto, oggi a scuola i ragazzi per cui si fa scuola non capiscono il significato di quello che si cerca di insegnare; di conseguenza rifiutano lo strumento culturale offerto. Il modo di insegnare attuale (la matematica, la fisica, ...) di fatto non funziona. Sembra inutile proporre di cambiare, se le proposte non interpretano il non funzionamento attuale in modo esplicito e plausibile e si mostrano in grado di curarlo in modo esplicito e credibile. Serve un modello-quadro di mediazione-interfaccia che sia risonante per la comprensione e la motivazione.

Il modello deve coinvolgere due ingredienti:

(1) quale è la dinamica evolutiva di un pensiero che capisce (l'ipotesi di puro "costruttivismo" non è credibile e non funziona);
(2) quale è la ristrutturazione disciplinare che asseconda il capire (l'ipotesi di pura "correttezza" non è credibile e non funziona).

I due ingredienti devono aggiustarsi a vicenda in interferenza costruttiva (le due ipotesi prese insieme risultano antinomiche e non praticabili).

Da dove viene la matematica? (Where Mathematics comes from? Lakoff & Nunez)

"Pensiero matematico" (vedere ad es. Piaget) e "pensiero naturale" condividono le stesse strategie di base

Il pensiero coinvolge l'intera attività di un uomo-in-quanto-vivente (vedere ad es. la nozione-base di "embodied mathematics")

La modalità cognitiva che corrisponde al pensiero metaforico è cruciale (insieme a percezione, memoria, lingua naturale, azione, etc)

Ogni area del pensiero matematico si sviluppa a partire da alcune specifiche "grounding metaphors" (metafore-fondamento)

*Dip.to di Scienzse Fisiche, Univ.Napoli

Il pensiero matematico si forma attraverso un lento sviluppo individuale e interindividuale culturalmente indirizzato, e non attraverso appropriazione di una realtà predefinita.

C'è dunque correlazione stretta fra "modi di pensare" (matematici...) e "modi di vivere", nella loro varietà e globalità (vedere ad es. Wittgenstein)

Qualcosa di analogo si può dire ovviamente anche a proposito del "pensiero fisico" (vedere ad es. Piaget), e così via: Lakoff & Nunez non se ne occupano.

Come ha origine il pensiero matematico? Attraverso quali correlazioni si sviluppa? (what mathematics comes with?)

Pensiero matematico e pensiero fisico si sviluppano individualmente (evolvono culturalmente) in reciproca (non esclusiva!) interferenza

Sviluppo ed evoluzione sono legati alle stesse radici e manifestazioni dell'intreccio fra pensiero-linguaggio-azione-interpretazione-progetto, ben distinte dagli specifici fondamenti disciplinari (o subdisciplinari)

In particolare, per tutte le articolazioni dei temi-base che caratterizzano il pensiero matematico (numericità, spazialità, algebricità, analiticità, ...) è possibile individuare corrispondenti articolazioni del pensiero fisico, che vengono precocemente "separate" dalle comuni radici, evolvono e si strutturano in reciproca interferenza, trovano sempre nuove occasioni di reciproca risonanza, via via danno luogo a nuove, inedite correlazioni e strutture.

L'analisi di una dinamica cognitiva di questo tipo dà conto, in particolare, del pensiero formale, e delle sue relazioni con altri tipi di pensiero.

A una dinamica cognitiva di questo tipo corrispondono in Piaget le nozioni di astrazione fisica e formale, assimilazione, accomodamento, equilibrazione, etc.

Verso quali forme evolve il pensiero matematico? In che correlazione con lo sviluppo del pensiero fisico? (what mathematics grows into?)

Evoluzione culturale e sviluppo individuale mostrano che tutto il pensiero astratto, non solo quello matematico, si sviluppa rafforzando una autointerpretazione in termini di "categorie" quasi-percettive: in termini p.es. di quasi-oggetti e quasi-fenomeni, quasi-stati e quasi-trasformazioni, quasi-sistemi e quasi-proprietà, quasi-cause e quasi-effetti ... e così via.

Questa progressiva caratterizzazione semantica (quasi "ontologica") traspare nelle strutture di lingua naturale (semantiche e sintattiche) usate; è molto efficiente rispetto allo sviluppo stesso dell'astrazione, in quanto permette di utilizzare metaforicamente (a più livelli) le potenti scatole-nere della dinamica percettiva e del pensiero-linguaggio-azione naturale; è (se ben intesa/utilizzata) un efficace strumento di mediazione didattica; può rappresentare un serio "ostacolo epistemologico" nel momento in cui diventa necessario ricomporre fra loro pensiero matematico e pensiero fisico; dà spazio a notevoli fraintendimenti:

(1) culturali (vedere ad es. il "platonismo" ricorrente nel pensiero sia matematico che fisico; vedere ad es. Wigner "About the unreasonable effectiveness of mathematics ...")

(2) didattici (vedere ad es. l'ostinata disintegrazione fra fisica e matematica, a scuola).

Di cosa ha bisogno, per svilupparsi, il pensiero matematico? (what mathematics needs, to grow up?)

Il "pensiero formale" di base, per necessità di coerenza, si sviluppa solo all'interno di aree limitate e con caratteri di invarianza (Wittgenstein).

Così le dinamiche di evoluzione, validazione e controllo globale ne violano di necessità le "forme logiche di coerenza" (Wittgenstein, Godel, Bateson).

È perciò necessaria una efficace e continua mediazione metacognitiva per sostenerne una appropriazione controllabile e motivante.

In particolare alcune grandi strategie di base (organizzazione cognitiva "per" continuo e discreto, "per" sistemi e variabili, "per" elementi-relazioni-strutture, ... etc) sono sottese alla totalità dell'esperienza-linguaggio-conoscenza, e quindi allo sviluppo non meccanicistico del pensiero matematico che però deve diventare capace di raccordarsi ad esse in quanto tali; l'intreccio dinamico fra strategie, insieme alla loro flessibilità metaforica, caratterizzano l'uso via via più "evoluto" del pensiero formale, e sono accesso e supporto al "paradossale" sviluppo "da meno a più" astrazione, evidente nella storia culturale e nella crescita individuale del pensiero matematico che però deve diventare capace di usarne esplicitamente.

ARGOMENTARE e DIMOSTRARE
(con strumenti interni e esterni, a tutti i livelli di pensiero)

"Lo spirito umano non è capace di formalizzare o meccanizzare tutte le proprie intuizioni matematiche.

Cioè, proprio quando è riuscito a formalizzarne una porzione, questo stesso fatto richiede una nuova conoscenza intuitiva: per esempio quella della coerenza di questo formalismo...

Resta la possibilità che esista (e possa perfino essere scoperta empiricamente) una macchina dimostrativa che di fatto sia equivalente all'intuizione matematica, anche se di fatto non è possibile dimostrarlo." (Kurt Godel) (vedere ad es. Senofane, Anassagora, Eraclito, Protagora .... Galileo, Leibniz, Wittgenstein, Bateson, ...)

PARTE II

Per esempio "numero": per cominciare, "algebra": per cominciare, "calcolo": per cominciare.

Quali criteri per cominciare ...?

Di quello di cui non si sa parlare si deve non tacere ma provare a parlare! (Wittgenstein).

Il discorso è l'ombra dell'azione e viceversa! (Democrito)

Andarli a prendere là dove sono, e trovare una strada per accompagnarli fin dove ... ("mediazione"!) (Wittgenstein)

Quali criteri per cominciare? discorso ... azione ... mediazione ...

"Ma loro, dove sono"? .... per esempio, li sappiamo ascoltare?

- "di più"
  più caramelle, più lungo, più pesante, più dolce, più forte, più bello, più male ...
- "è più" ...
  questo è più pesante di quello ...
- "più è ... più è ..."
  più è bello più è caro ...
- "è più ... cambia più in fretta ..."
  per imparare a vedere (Hawkins), serve un supporto di trasduzione sincronica

e la "misura"? ...

1. "Numero": per cominciare. Dai contesti - prototipo alla modellizzazione

Si comincia con numeri piccolissimi e azioni complesse, in tutti i contesti di cui si ha esperienza: per esempio...

- i passi uguali avanti/indietro ...
  (essere/andare in un posto, sulla linea discretizzata con zero arbitrario)

– i gruppi di oggetti omogenei ...
  (avere/prendere/dare, rispetto a un contenitore con zero arbitrario)
– le azioni ripetute nel tempo ...
  (azioni fatte e da fare, a partire da "ora": il tempo è irreversibile!)
– la scansione discreta del continuo ...
  (continuo fluido, quasi-continuo di discreti, continuo solido divisibile, ...)
– l'assegnazione di valore ...
  (in pratica, introduzione alla proporzionalità ....)

Si prosegue con meta-strategie di riconoscimento e modellizzazione dell'isomorfismo: "separazione" dei caratteri dell'azione risonante secondo forme-strutture invarianti e fenomenologie invarianti

2. "Numero": per cominciare. Un'ipotesi di prima organizzazione cognitiva intorno a "volte":

- esperienza fondante di "zero": assenza di centratura di attenzione
- esperienza fondante di "uno": una centratura completa di attenzione esplicitazioni fondanti: un gesto, segno, simbolo, parola, azione, ... risonanze fondanti: un oggetto, un evento, un gruppo, una estensione ...
- esperienza fondante di "alcuni": centratura multipla di attenzione
- esperienza fondante di "molti/pochi" versus "molto/poco" versus più / meno"...
- operazioni fondanti: produzione di stato / cambiamento di stato / enumerazione (protomoltiplicativa) di stato
- meta-operazioni fondanti: equivalenza fra stati versus variazioni di configur./ equivalenza - compensazione - commutazione fra operazioni
- "regole euclidee" additive e moltiplicative
- due sole tipologie di operazione
- struttura additiva (stato di riferimento zero: criterio di uguaglianza)
- struttura moltiplicativa (stato di riferimento uno: criterio di uguaglianza)

3. "Numero": per cominciare. Problemi di organizzazione cognitiva come problemi di modo di guardare

Per esempio:

– Doppia semantica stato-trasformazione

versus "oggetto-numero" e "oggetto-operazione":

fare $-3p + 2p$?: alla fine è come $-1p$; in tutto sono $5p$ ......

prendere $3/4$ di questo?: se prima (*3) e poi (*1/4) si spreca 2 _, se prima (*1/4) e poi (*3) si spreca solo _ ....

– Organizzazione concettuale (spaziale?) simmetrica delle strutture:

additiva (su retta, intorno a punto-zero)

moltiplicativa (su piano, intorno a retta-uno)

– Semantica & Sintassi:

discreto versus continuo discretizzato

estensivo versus intensivo

misurato versus trasdotto ....

4. "Numero": per cominciare. Dalla modellizzazione alla strutturazione.

La "modellizzazione" spaziale delle relazioni numeriche non ne costituisce una "rappresentazione" opzionale o coadiuvante, ma una supporto essenziale allo sviluppo concettuale

La "materializzazione" fisica delle relazioni numeriche non ne costituisce una "applicazione" a posteriori, ma un supporto essenziale allo sviluppo concettuale della fisica e della matematica

1. "Algebra": per cominciare. Dal contesto-prototipo alla modellizzazione

Per esempio, il contesto lineare di Costo, Prezzo, Quantità in regime di tara, peso-prezzo netto-lordo etc: in "formula" $C = P(Q - Q^\circ) + C^\circ$ (con $^\circ$ i dati riferiti alla tara).

Molte situazioni isomorfe sono: deformazione elastica (durezza, forza, allungamento), moto uniforme (velocità, tempo, spazio), pesantezza (peso specifico, volume, peso), dilatazione termica (dilatabilità, variaz di temperatura, variaz di lungh.), mescolanze (concentrazione, quantità1, quantità2), ...,tutte radicate nell'esperienza e percezione quotidiane.

2. "Algebra": per cominciare. Dal contesto-prototipo alla modellizzazione

Per esempio, le semplici strutture ad 1 incognita
$a + b = X$, $a + X = c$, $X + b = c$, attenzione alla spazializzazione!
$a * b = X$, $a * X = c$, $X * b = c$, attenzione alla dimensionalità! attenzione alla spazializzazione!
$aX + b = cX + d$, attenzione alla dimensionalità! attenzione alle due incognite! attenzione alle situazioni isomorfe! attenzione alla spazializzazione! attenzione a variabili vs parametri! tutte radicate nell'esperienza e percezione quotidiane

3. "Algebra": per cominciare. Dalla modellizzazione alla strutturazione

La relazione "esterna" fra variabili definisce uno spazio concettuale e formale diverso dalla relazione "interna" fra i valori di una variabile: la "numericità" di ciascuna è quindi "marcata" rispetto alla numericità di tutte le altre (vedere ad es. strutturazione concettuale nella lingua naturale)

Una relazione algebrica definisce un vincolo entro uno spazio di variabili e parametri (Thom) e al tempo stesso è una nuova variabile, rappresentabile in un nuovo spazio

In particolare, un vincolo fra più variabili può definire lo "stato" di un sistema

Un vincolo posto su una stessa variabile "estratta" dai vincoli di stato riferiti a più sistemi definisce allora una "interazione" fra sistemi (vedere ad es. equilibrio, conservazione, etc: p.es. ogni trasduzione è basata su stati di equilibrio).

4. "Algebra": per cominciare. Dalla modellizzazione alla strutturazione

La "simbolizzazione" esplicita delle relazioni algebriche è essenziale al loro sviluppo.

La "modellizzazione" spaziale delle relazioni algebriche non ne costituisce una "rappresentazione" opzionale o coadiuvante, ma un supporto essenziale alla comprensione.

La "materializzazione" fisica delle relazioni algebriche non ne costituisce una "applicazione" a posteriori, ma un supporto essenziale allo sviluppo concettuale sia della fisica che della matematica.

1. "Calcolo": per cominciare. Dal contesto-prototipo alla modellizzazione

Per esempio, il movimento a 1 dimensione: la forma continua del movimento viene trasdotta (a mano, poi in modo automatico) in una relazione discreta $x_i(ti)$.

La relazione $x_i(t_i)$ viene ri-trasdotta (a mano, poi in modo automatico) in una rappresentazione quasi-continua su piano cartesiano (x, t), e riconosciuta.

La rappresentazione spaziale viene analizzata qualitativamente in termini di cambiamento, e cambiamento del cambiamento.

L'analisi quantitativa automatica (derivata prima e seconda) viene riconosciuta corrispondente alla qualitativa.

Analogamente per ogni forma di cambiamento (vedere ad es. trasduzione-gioco).

2. "Calcolo": per cominciare. Dal contesto-prototipo alla modellizzazione alla teoria

Confrontando elaborazione automatica ed elaborazione manuale si scopre il semplice meccanismo di "differenze finite" che permette di passare in modo approssimato ma soddisfacente dalla "forma fondamentale" del movimento (del cambiamento) alle sue varie "forme derivate".

Analogamente si scopre la possibilità di invertire il processo, reintroducendo le opportune costanti.

In questo modo si impara a gestire significativamente un quasi-calcolo padroneggiato come struttura coerente anche se approssimata, e di padroneggiarne possibilità e limiti nei contesti e nelle forme più variate.

A questo punto l'introduzione accurata e rigorosa del formalismo del limite viene compresa nei suoi significati cruciali, analitici e applicativi (vedere ad es. Torricelli versus "f=ma").

3. "Calcolo": per cominciare. Dalla struttura alla teoria

Il modo di cambiare di una variabile è una nuova variabile, sintatticamente e semanticamente definita.

La "modellizzazione" spaziale delle relazioni di derivazione-integrazione non ne costituisce una "rappresentazione" opzionale o coadiuvante, ma una supporto essenziale allo sviluppo concettuale.

La "materializzazione" fisica delle medesime relazioni non ne costituisce una "applicazione" a posteriori, ma un supporto essenziale allo sviluppo concettuale della fisica e della matematica.

La formalizzazione del calcolo avviene in modo ottimale a partire dai problemi di invarianza esplicitati attraverso la rappresentazione spaziale.

PARTE III:
E allora, che fare?

- a livello di indirizzi di ricerca,
- a livello di ricerca concreta,
- a livello di formazione, e di disponibilità dei risultati,
- a livello istituzionale.

WORKSHOPS

Argomentare e Congetturare

Gruppo coordinato da:
A. Borelli (Napoli), A. Pesci (Pavia), F. Spagnolo (Palermo)

Al gruppo hanno preso parte, oltre ai coordinatori, 19 insegnanti, di cui 15 di scuola secondaria superiore, 2 di scuola media e 2 di scuola elementare.

Allo scopo di avviare la discussione fra i partecipanti si è ripresa la parte del volume "Matematica 2001" riguardante le "Competenze trasversali" (pag. 10) e tra di esse si è concordato, in particolare, che "Comunicare", "Costruire ragionamenti", e "Formulare ipotesi" fossero quelle più strettamente collegate al nucleo di processo del nostro gruppo.

Si è subito osservato che se si vuole pensare ad "Argomentare e Congetturare" anche in riferimento alla scuola secondaria superiore sembra opportuno aggiungere esplicitamente, nel titolo, un riferimento all'attività dimostrativa e dunque si è concordato di proporre come nuovo titolo "Argomentare, Congetturare e Dimostrare".

I presenti hanno poi sottolineato, in base alla loro esperienza di insegnamento, quanto sia importante e allo stesso tempo complesso sviluppare in classe l'abitudine all'argomentazione, cioè alla giustificazione o confutazione di quanto si sia asserito o di quanto si sia svolto. Molto spesso manca la competenza linguistica, nel senso dell'abitudine a concatenare il discorso comune con gli opportuni nessi linguistici. Tutti si sono dichiarati concordi nel ritenere che tale competenza influenzi fortemente sia il ragionamento interiore sia la sua esternazione, con evidenti conseguenze sulla costruzione e manipolazione delle proprie conoscenze.

È stato messa in evidenza la necessità di un lavoro specifico progettato dall'insegnante nella direzione dello sviluppo della competenza linguistica ma si è anche sottolineato che, per il momento, non sono numerose le esemplificazioni didattiche adeguate e fruibili dagli insegnanti.

Si è inoltre osservato che un notevole contributo alla costruzione di abilità linguistiche, oltre che di competenze disciplinari, è rappresentato dalla socializzazione delle argomentazioni in discussioni ("dispute") di classe.

Alla "discussione matematica" il volume citato dedica uno spazio particolare e in riferimento ad essa i partecipanti hanno espresso il desiderio di una maggiore precisazione del suo significato ma soprattutto chiare proposte relative alle modalità della sua realizzazione in classe.

La competenza linguistica e argomentativa sono state poi unanimemente ritenute indispensabili per l'attività dimostrativa, che si è auspicato continui ad occupare un ruolo privilegiato nello sviluppo del discorso matematico nella scuola secondaria superiore.

Si è quindi passati a leggere insieme, sul volume già citato, quanto è precisato in riferimento alle competenze matematiche relative al nostro nucleo di processo.

Oltre ai punti già previsti si è concordato di suggerire l'aggiunta esplicita dei due seguenti punti:

- riconoscere argomentazioni conflittuali
- utilizzare controesempi per confutare ipotesi o argomentazioni.

Il riconoscimento di conflitti in un ragionamento espresso dai compagni non è certo una attività semplice: richiede anzitutto che si ascoltino gli altri, si comprenda la loro strategia di pensiero, mettendo quindi da parte la propria e si prendano poi decisioni motivate sull'accettazione o meno di quanto esposto. Si tratta dunque di una attività complessa, che richiede precise pianificazioni didattiche da parte dell'insegnante per essere sviluppata e interiorizzata appieno dagli studenti.

L'uso competente del controesempio, inoltre, è ritenuto essenziale nello sviluppo del pensiero matematico e dunque è importante riservargli uno spazio adeguato nel lavoro di classe, facendone cogliere il significato e l'incisività attraverso la proposta di situazioni specifiche oppure cogliendo le occasioni che si presentano spontaneamente nel corso delle lezioni.

Anche le attività di discussione e riflessione sviluppate su eventuali errori e fraintendimenti emersi durante il lavoro di classe sono state ritenute molto importanti al fine di promuovere una significativa partecipazione dei ragazzi nella costruzione delle loro competenze: alcuni partecipanti hanno dichiarato di adottare abitualmente una tale modalità di lavoro, tuttavia è emerso da parte di molti l'esigenza di avere a disposizione esempi significativi specifici di "prototipi" di situazioni didattiche da sviluppare in questo senso.

In riferimento al testo in esame si è osservato, infine, che negli "Esempi di Attività" riferiti al nucleo di processo considerato, piuttosto che itinerari di attività da proporre ai ragazzi, sarebbe interessante avere a disposizione esempi di effettivi sviluppi in classe di argomentazioni, congetture e dimostrazioni, nei quali possano essere evidenti sia i processi interattivi fra studenti, sia la natura degli interventi dell'insegnante e il suo ruolo nella gestione delle varie fasi di lavoro.

Lo spazio e le figure

Gruppo coordinato da:
M. Barra, A. Morelli, F. Brunelli, D. Merlo

"La nostra geometria si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dar corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi, di carattere generalmente non per se stesso geometrico, ma statistico, economico ecc.; è insomma, per così dire, la dottrina dello schema mentale adatto per afferrare intuitivamente tutti i problemi pratici la cui impostazione scientifica richiede lo strumento matematico" (Bruno de Finetti, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese 1959, p. 256.)

Nel gruppo di lavoro: "lo spazio e le figure" abbiamo condiviso l'essenza della precedente citazione di de Finetti.

In tale gruppo erano presenti numerosi insegnanti, per lo più della scuola media superiore e due ispettori del MIUR.

Un lavoro interattivo su alcune tassellazioni dello spazio, vecchie e nuove, anche in collegamento con la teoria dei numeri, la probabilità e le scienze, ha richiamato e posto a confronto convinzioni radicate e suscitato una discussione convinta e sovente appassionata in relazione all'insegnamento della geometria.

I più importanti temi discussi possono essere riassunti brevemente per punti, al modo seguente:

(1) si riconosce alla geometria una particolare valenza formativa
(2) si ritiene che la geometria costituisca l'interfaccia più efficiente dal punto di vista pedagogico fra ragionamento naturale e ragionamento scientifico.
(3) il linguaggio geometrico è più facilmente memorizzabile di altri linguaggi, in particolare se è accompagnato da una forte componente visiva
(4) il ragionamento geometrico è più affine allo stile cognitivo preferito dalla maggior parte dei matematici, così come risulta in particolare dalle ricerche di Hadamard (*La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Cortina Editore, 1993)
(5) la geometria può stabilire con maggiore probabilità un legame fra i diversi linguaggi della matematica: l'analisi, il calcolo delle probabilità, la teoria dei numeri e l'analisi numerica
(6) si evidenzia su quest'aspetto, inteso nel suo significato più generale, una maggiore esigenza di momenti unificanti del sapere. Momenti da istitu-

zionalizzare. Questo risulta particolarmente importante considerando che nella società moderna tutte le diverse componenti risultano sempre più interconnesse e che i loro problemi possono essere compresi e affrontati nel tentativo di risolverli, sviluppando appunto la capacità di porre in collegamento vari aspetti che vengono trattati classicamente in modo separato

(7) una particolare importanza pedagogica si riconosce alla geometria dello spazio e si richiede una sua maggiore presenza nei programmi

(8) si considera che alcuni strumenti possono essere utilizzati anche senza essere stati oggetto di dimostrazione. Nella scelta degli argomenti risulta più importante farsi guidare dalla loro "bellezza" che dalla necessità di seguire tutti i passi della sequenza ipotetico-deduttiva che li lega

(9) dal punto di vista cognitivo può risultare più importante dimostrare un argomento in più modi, che non più argomenti in un modo soltanto

(10) infine, la geometria può essere molto importante anche per l'educazione del gusto estetico

(11) Particolarmente importante viene considerata l'utilizzazione di strumenti informatici, anche perché, in relazione a questi strumenti, le risposte degli studenti risultano molto spesso più ricche delle richieste degli insegnanti

(12) per l'utilizzazione di strumenti informatici la geometria può risultare l'argomento più idoneo per le possibilità di interazione e di sviluppo del ragionamento induttivo che alcuni software didattici, del tipo di Cabri géomètre, presentano

(13) si riconosce particolare importanza alla necessità di sviluppo del ragionamento induttivo in collegamento con quello deduttivo rispetto all'esclusivo esercizio di quest'ultimo. Pur considerando le limitazioni della tradizione didattica in tal senso, si ritiene il ragionamento induttivo più utile e più in sintonia allo sviluppo di atteggiamenti creativi sempre più richiesti dalla società attuale, che delega in modo crescente la produzione di tipo routinario ai computer e agli automi

(14) si ritiene l'esercizio in analisi, e in particolare il calcolo integrale, più routinario e meno creativo di quello geometrico. A tale proposito potrebbe essere utile diminuire la presenza di esercizi e aspetti tecnici dell'analisi, accentuando invece i valori concettuali e i fondamenti storici.

Tutti i componenti del gruppo sono d'accordo sull'importanza dell'inserimento della storia della matematica per la comprensione sia delle idee e dei concetti fondamentali di questa disciplina, sia della loro evoluzione anche in collegamento con il significato che questi possono aver assunto nello sviluppo della società.

Si consiglia particolarmente la lettura di documenti storici originali.

A questo proposito si riscontra una carenza nella preparazione dei docenti. In questa evenienza si consiglia di iniziare a trattare la storia della matematica limitandosi a periodi cicoscritti.

Si considera che l'evoluzione delle idee e degli strumenti geometrici costituisca una presenza predominante e affascinante nella storia della matematica.

Come esempio è stata descritta una proposta didattica di un percorso che parte dal "metodo" di Archimede per il calcolo dell'area di un settore di parabola e del volume della sfera.

Il numero

Gruppo coordinato da Maria Reggiani e Marina Gilardi

Ai lavori del gruppo "Il numero" hanno preso parte 18 insegnanti di cui uno solo di scuola elementare, 6 di scuola media, 10 di scuola secondaria superiore e un universitario, oltre ovviamente ai coordinatori.

Uno dei coordinatori, che ha partecipato al seminario "Viareggio 2001" e quindi alla stesura dei materiali contenuti nel volume Matematica 2001, ha proposto una sintesi delle pagine relative al nucleo tematico "Il numero" in tale volume, sottolineando alcune differenze rispetto ai programmi vigenti ed approfondendo in particolare gli aspetti relativi alla scuola primaria, sia per la sua competenza specifica, sia per l'interesse manifestato da parte dei colleghi presenti per il livello base.

Dalla discussione seguita sono emerse varie osservazioni condivise dalla maggior parte dei partecipanti che sintetizziamo qui distinguendo fra osservazioni di carattere "generale" e osservazioni più strettamente legate al nucleo tematico.

Tutti i partecipanti considerano molto importante che si adotti un insegnamento di tipo elicoidale che consenta di riprendere gli stessi temi a diversi livelli di approfondimento.

Gli insegnanti di scuola media superiore apprezzano l'uso di contesti significativi per la presentazione dei diversi temi, ma sottolineano la difficoltà di individuarli quando nella scuola superiore i contenuti diventano più impegnativi. Viene riconosciuto che occorrerebbe individuare differenti contesti a seconda degli indirizzi scolastici in cui si opera, anche in collegamento con le altre discipline e in particolare con le discipline caratterizzanti i diversi indirizzi, specialmente nelle scuole tecniche.

Un altro tema di carattere generale affrontato è quello del raccordo fra i diversi livelli scolari, essenziale per rendere possibile un effettivo insegnamento a spirale. Su questo punto si ritiene che sarebbe importante un effettivo coordinamento anche per ridurre il condizionamento delle aspettative degli insegnanti di un livello rispetto a quelli dell'altro, che si esprime nel timore che gli alunni "non siano preparati". Analogo condizionamento esercita l'esame di maturità specialmente per il liceo scientifico dove le scelte di contenuto sono spesso finalizzate alla preparazione alla prova scritta di matematica.

Viene da tutti sottolineato il problema-esigenza di formazione-aggiornamento per adeguare il proprio insegnamento agli esempi proposti sia a livello di contenuti che di metodologia. L'esigenza di formazione sul piano metodologico è particolarmente avvertita dagli insegnanti di scuola superiore che riconoscono la loro carenza su questo punto.

Riguardo al tema specifico si è dato particolare rilievo all'importanza del "senso del numero", osservando che le difficoltà su questo punto sono "verticali" dalle elementari alle superiori...agli adulti.

Si è inoltre sottolineata l'importanza della costruzione dei significati e l'utilità di modalità di insegnamento che privilegino la partecipazione degli alunni per realizzare questo obiettivo. Fra queste viene considerata particolarmente efficace la discussione fra pari, opportunamente coordinata dall'insegnante.

Il lavoro del gruppo si è poi più specificamente focalizzato sull'individuazione dei punti da approfondire alla scuola superiore.

Fra questi sono stati individuati come rilevanti:

- l'approfondimento della conoscenza degli insiemi numerici con particolare attenzione al passaggio dai numeri razionali ai numeri reali (frazioni, numeri razionali, rappresentazione decimale, numeri irrazionali...)
- il problema del "segno" del numero, anche tenendo conto di alcuni fraintendimenti che si riscontrano frequentemente nel calcolo algebrico o quando una espressione contiene un modulo.
- il ruolo della calcolatrice e del software in aritmetica, in algebra e nell'approccio all'analisi.

Le relazioni

Gruppo coordinato da E. Bulgarelli e R. Iaderosa

Partecipanti: 39, prevalentemente docenti di scuola superiore

L'attività si è svolta in due fasi.

Durante la prima fase le coordinatrici hanno presentato alcuni nodi concettuali e alcuni aspetti didattici, ritenuti rilevanti rispetto all'acquisizione delle competenze relative al tema Le Relazioni.

Come emerge dal documento della commissione UMI, le principali competenze individuate in questo nucleo sono le seguenti:

- costruire ragionamenti;
- generalizzare;
- inventare;
- porre in relazione;
- rappresentare.

Aspetti culturali e didattici, evidenziati nella parte introduttiva, sono stati i seguenti. Le relazioni possono essere definite e analizzate nel loro duplice aspetto: tra elementi di uno stesso insieme, o di due insiemi diversi. Nel primo caso la loro analisi porta a definire relazioni d'ordine e di equivalenza, che costituiscono uno strumento chiave per individuare classi e studiare enti e proprietà da un punto di vista strutturale. Si tratta di riconoscere e ritrovare nei contesti più vari ciò che caratterizza numeri, proprietà, strutture,...e caratterizzare così concetti chiave nell'ambito della disciplina stessa.

Nel secondo caso, dall'analisi di relazioni tra enti di diversa natura, soprattutto se messi in relazione con insiemi numerici, si perviene a caratterizzare il loro aspetto funzionale e si ottiene uno strumento essenziale del linguaggio e del sapere matematico, che in ambiti disciplinari diversi consente di matematizzare e modellizzare la realtà.

La ricchezza del concetto di relazione, in ogni caso, consiste anche nella molteplicità di rappresentazioni cui si presta: le rappresentazioni in questo caso ne facilitano la comprensione e l'utilizzo e ad un tempo arricchiscono il concetto stesso. Ne è un esempio il grafico di una funzione matematica.

Lo studio delle relazioni, visto in continuità sui vari ordini di scuola, costituisce un ambito privilegiato per curare un approccio precoce al linguaggio algebrico e per ridurre gli elementi di discontinuità tra Aritmetica e Algebra.

Nella seconda fase si sono formati tre gruppi di lavoro, con il compito di analizzare rispettivamente tre esempi di attività: "Gli amici del cinque", "Quante sono le camicie di Diofanto?", e "La classificazione degli insiemi numerici". Tali spunti sono stati dati proprio per stimolare la riflessione sugli aspetti strutturali del tema Relazioni, di pari importanza rispetto a quello funzionale, di cui il documento UMI contiene già numerose e significative esemplificazioni, sin dai primi anni della scuola di base.

Relativamente agli esempi si sono individuati elementi di condivisione e di criticità e spunti per possibili sviluppi nel successivo ordine di scuola. Dalle considerazioni emerse dai lavori di gruppo si rileva l'importanza dell'uso dei modelli e dell'interazione tra simbolizzazione matematica e linguaggio naturale per il controllo sia della situazione problematica, sia della relativa procedura di soluzione.

Sono stati inoltre evidenziati "nodi" che richiedono una particolare attenzione da parte dell'insegnante nella traduzione didattica delle conoscenze da far acquisire agli studenti:

- l'introduzione precoce e graduale delle lettere e dei segni, per condurre gli allievi alla consapevolezza del senso del simbolo;
- il passaggio dal discreto al continuo nelle rappresentazioni grafiche, man mano che si evolve la loro complessità e si estendono i contesti in cui si analizzano;
- il confronto tra vari tipi di ordinamenti;
- il passaggio ai numeri razionali;
- l'introduzione e lo studio di funzioni matematiche, anche finalizzate alla modellizzazione.

MISURARE

Gruppo coordinato da: Ornella Robutti

Il gruppo era composto di una ventina di persone, per lo più provenienti dalla scuola secondaria, un paio dalla scuola media e tre universitari. Sono state affrontate due ampie tematiche: una riflessione sul nucleo alla luce dei materiali per la scuola elementare e media, e un approfondimento sull'evoluzione che può avere tale nucleo nella scuola secondaria. Vengono presentati sinteticamente i punti di discussione sulla prima tematica:

1. Le attività di misura servono a costruire il senso del numero, quindi concorrono a formare competenze in comune con il nucleo dei numeri, come per esempio:
   - Utilizzare numeri in vari contesti
   - Fare calcoli
   - Determinare ordini di grandezza
   - Rappresentare numeri in modi vari
   - Effettuare stime
   - Operare con cambiamenti di scala
   - Gestire gli errori, sia di misura, che di calcolo (pensiamo per esempio alle problematiche legate alla rappresentazione dei numeri nella macchina, sia essa computer o calcolatrice).

2. Misurare significa stabilire proporzioni, sia interne (pensiamo a unità di misura, problemi di scala, rappresentazioni), sia esterne, che conducono a porsi domande fondamentali, come per esempio: Perché misuro? Al fine di rispondere a tali domande, è determinante il compito dell'insegnante nella fase di progettazione di attività motivanti e significative.

3. In generale in tutti i nuclei, e in particolare per il nucleo Misurare, è importante, per un apprendimento efficace, partire da esperienze legate al corpo e agli aspetti percettivi. Ci riferiamo qui agli studi di Nunez e Lakoff per quanto riguarda l'embodied cognition, e agli studi di Berthoz per quanto riguarda le modalità che ha il nostro cervello di gestire ed elaborare le percezioni. Questi studi ci indicano che noi ragioniamo in un certo modo perché abbiamo caratteristiche fisiche di un certo tipo. Quindi, occorre potenziare le capacità di cui siamo dotati: per giungere all'astrazione, è indispensabile partire da esperienze concrete, in cui siamo coinvolti fisicamente. Pensiamo per esempio al concetto di velocità: fin da piccoli

abbiamo idea di che cosa sia la velocità, senza ancora sapere che è la derivata dello spazio nel tempo.

4. Un punto cruciale dell'attività della misura è senz'altro la rappresentazione di dati di misura. In genere, a scuola, si effettuano prima le misure e successivamente si passa alla loro rappresentazione grafica. Occorre anche sviluppare il passaggio inverso, dalle rappresentazioni grafiche alle misure, in quanto le due attività vanno integrate il più possibile al fine di raggiungere competenze durature in entrambe. Per fare un esempio, si possono richiedere ai bambini ancora molto piccoli (in età pre-scolare o di inizio scuola) grafici di fenomeni che vivono di persona o a cui sono legati particolarmente, come il grafico della pazienza della mamma nelle varie ore della giornata. In tali rappresentazioni si possono evidenziare aspetti statici e dinamici, coinvolgere la variazione nel tempo delle grandezze, e così via.

5. Un nodo concettuale legato all'attività del misurare è la trasduzione, ossia lo stabilire un accoppiamento tra due fenomeni. Un chiaro esempio può essere il contachilometri, altri esempi possono essere trovati nella vita quotidiana, oppure con riferimento alla tecnologia, oppure si possono progettare e costruire insieme agli studenti.

6. Un altro nodo, che collega questo nucleo alle discipline sperimentali e in modo particolare alla fisica, è la distinzione tra grandezze estensive, come per esempio il volume di un oggetto, a grandezze intensive, come per esempio la densità, che è un rapporto tra due grandezze, la massa e il volume. Attorno a questo nodo si possono affrontare attività che evidenziano diverse problematiche, legate non solo alla misura, ma ai calcoli, all'incertezza e alla sua propagazione, alle unità di misura e agli strumenti di misura.

7. Quando si tratta una grandezza da un punto di vista teorico, si dice solitamente che è confrontabile e sommabile con altre grandezze del suo stesso tipo, cioè ad essa omogenee. Inoltre, da un punto di vista sperimentale, si indicano le tecniche per misurarla, gli strumenti di misura ecc. Occorre mettere in evidenza, a questo proposito, che, a parità di grandezza, possono essere diverse le procedure per misurarla: per esempio, per misurare la lunghezza di un virus oppure il raggio di una galassia (che sono entrambe lunghezze) le tecniche sono profondamente diverse.

8. Un nodo particolarmente delicato dell'insegnamento, ma fondamentale, è la distinzione tra il calcolare e il misurare, che spesso viene lasciato sottinteso, o poco

esplicitato, sia sui libri che nelle spiegazioni. La differenza tra le due attività è fondamentale, e va sottolineata agli allievi sempre nello sviluppo di questo nucleo. Per esempio, ponendo un oggetto in un cilindro graduato contenente acqua, si misura il suo volume, con un'incertezza data dalla taratura del cilindro. Invece, dato un parallelepipedo e misuratene le dimensioni, si può calcolare il suo volume, con un'incertezza data dalla propagazione delle incertezze sulle misure dei tre lati.

I punti di discussione sulla seconda tematica (gli sviluppi del nucleo nella scuola secondaria) sono stati i seguenti:

1. Le metodologie didattiche attivate in classe dovrebbero procedere con continuità con la scuola elementare e media, seguendo con progressività lo sviluppo delle tappe evolutive degli studenti ed evitando discontinuità o rotture troppo forti. Quindi, per esempio, è utile sviluppare attività nell'ambito di contesti di apprendimento, procedere con una didattica elicoidale, puntare anche nella scuola secondaria sulla manualità e sull'operatività degli studenti, per raggiungere livelli teorici a partire da esperienze concrete.

2. Nella scuola secondaria l'insegnamento della misura ha come fine, a livello di biennio, lo sviluppo delle capacità di effettuare misure e di rielaborare dati di misura (in contesti matematici e non), utilizzando diverse modalità rappresentative o di calcolo, gettando le basi per due tipi di attività da sviluppare nel triennio: la modellizzazione da una parte, legata a interpretare matematicamente situazioni della realtà circostante e la costruzione di una teoria dall'altra. Nel triennio infatti, occorre potenziare negli allievi la padronanza del significato della misura, riferita a contesti matematici o a contesti esterni, insieme con la capacità di operare con numeri reali o decimali. Di nuovo quindi, come nei livelli scolari precedenti, la misura è strettamente connessa al nucleo dei numeri e concorre a formare il senso del numero, sia in ambiente di numeri decimali finiti (ambiente legato al contesto sperimentale delle misure), sia in ambiente di numeri reali (quello che fa riferimento alla teoria matematica della misura).

3. Non solo la misura concorre a formare il senso del numero, ma anche il senso del simbolo, in quanto segue all'attività del misurare lo studio di andamenti, rappresentazioni, relazioni e correlazioni tra grandezze, che possono essere generalizzate con l'utilizzo di simboli al posto di numeri, quindi rappresentate come modelli di situazioni studiate. L'introduzione del simbolo costituisce un passaggio tutt'altro che semplice o scontato, e va trattato con particolare attenzione, in continuità con il

livello scolare precedente e facendone vedere le peculiarità dal punto di vista matematico e fisico. Per esempio, il coefficiente angolare, facilmente sintetizzabile in matematica come y/x per una retta passante per l'origine (dando per scontato che si tratta di assi cartesiani monometrici), non è altrettanto semplificabile in fisica, laddove nei grafici va tenuto conto dell'unità di misura degli assi, onde non incorrere in confusioni grossolane legate alla pendenza o all'angolo della retta con l'asse x.

3. Ancora nella scuola secondaria, come nelle medie ed elementari, occorre continuare a distinguere tra la misura e il calcolo di misure. L'evoluzione di questo nodo a livello secondario può essere costituito dai modelli matematici, rappresentati in forma simbolica e grafica, mettendo in evidenza le relazioni tra le varie grandezze coinvolte. In questo aspetto, il nucleo è strettamente connesso con il nucleo delle relazioni. Per esempio, quando si esprime con $y = x^2$ l'area y di un quadrato di lato x, è importante consentire agli studenti esplorazioni varie sul tipo di variazione di una grandezza in funzione dell'altra, e riflessioni su come si propaga l'incertezza dalla grandezza indipendente a quella dipendente.

4. Lo strumento di misura teorico per eccellenza è l'integrale. Ci si può chiedere sia è opportuno, nella matematica per il cittadino, introdurre il calcolo infinitesimale e gli integrali. La riflessione del gruppo a questo proposito è stata di utilizzare appieno il supporto delle nuove tecnologie (software CAS, o calcolatrici grafico-simboliche), al fine di fondare il concetto di integrale, molto più importante dei suoi aspetti teorici (definizione e dimostrazione di teoremi) o applicativi (calcoli di integrali di vario genere con metodi vari).

5. Ultimo, ma non meno importante, è il legame tra la misura e la probabilità, analogo a quello del punto precedente (tra la misura e le funzioni), in quanto si riferiscono entrambi a una teoria, quella della misura, che se anche non trattata nei suoi dettagli teorici, è opportuno citare nei suoi aspetti fondamentali: per esempio, l'additività.

RISOLVERE E PORSI PROBLEMI

Gruppo coordinato da G.Anichini, L.Cannizzaro, M.Menghini

(circa 20 partecipanti, quasi tutti di scuola media superiore)

È stato chiesto ai partecipanti di affrontare, in gruppi di lavoro, due problemi.

Il primo problema, aperto, dato a tutti "Ho diversi rettangoli di carta. Traccio le bisettrici dei quattro angoli. Che figura ottengo?".

E un secondo problema "abbastanza" chiuso:

- per le elementari *La cioccolata* (cfr. L. Streefland, "Fractions in Realistic Maths Education", Kluwer 1991)
- per le superiori *Il semaforo* (da W. Maraschini, M. Menghini, M.Palma "Strategie Matematiche: formalizzare per risolvere", Pitagora 1997, p.18-19)

(un gruppo delle superiori ha preferito continuare a lavorare su estensioni del primo problema)

Sono emersi i diversi approcci degli insegnanti delle scuole elementari e superiori rispetto a:

- uso del materiale
- metodi di verifica della congettura
- analisi di casi particolari
- estensione a problemi più ampi o collegati
- ....

Abbiamo poi chiesto ai partecipanti di mettere a confronto i problemi analizzati (tenendo eventualmente a mente altri problemi, noti o di cui era stato dato il testo) e il loro modo di operare, con le "competenze specifiche" elencate nel documento "Matematica 2001".

In effetti tali competenze sembrano adeguarsi abbastanza bene alla trattazione dei problemi a tutti i livelli scolari, comprese le superiori. C'è addirittura un dubbio, da parte degli insegnanti delle superiori, sull'ultima competenza delle medie: "Realizzare formalizzazioni ...."

I partecipanti ritengono però che, nell'ambito delle competenze, debba essere sottolineata l'importanza di:

- essere consapevoli dell'obiettivo che si vuole raggiungere
- farsi un'immagine mentale di quello che accade.

Su altre competenze andrebbe trovato un equilibrio; ad esempio, da una parte lo studente deve essere in grado di rispondere con esattezza a quella che è la domanda posta, dall'altra deve essere in grado di esplorare, di ampliare la prospettiva, di trovare altri elementi ....

Venendo poi alla premessa, dello stesso documento, che riguarda le indicazioni generali da dare agli insegnanti relativamente alla conduzione in classe, si osserva che anche qui occorre trovare degli equilibri:
da una parte si ritiene che il lavoro di gruppo (o anche attività di gioco) sia da privilegiare, perché favorisce la discussione, toglie le ansie (che comunque la parola "problema" sembra scatenare), ecc..
dall'altra occorre tenere conto che gli studenti che hanno difficoltà ad esprimersi sono penalizzati nelle attività di gruppo, e soprattutto andando verso i livelli scolari superiori, c'è necessità di lasciare all'alunno il tempo e lo spazio per una formalizzazione persònale del problema.

Tali osservazioni sono emerse proprio dal modo in cui i gruppi hanno lavorato sui problemi assegnati.

Sono state poi proposte alcune affermazioni sui problemi ("liberamente" tratte da P. Ernest, "Il problem solving: sua assimilazione nella prospettiva degli insegnanti", La Matematica e la sua Didattica, Anno VI, n. 3, 1992, 13-21):

- Risolvere problemi significa adempiere a compiti assegnati dall'insegnante – eventualmente non di routine –, con determinate risposte corrette. Si tratta di un'attività che prosegue la trasmissione di contenuti matematici.
- I problemi sono mezzi per motivare gli studenti; l'insegnante se ne serve per comunicare conoscenza, applicare e rinforzare l'apprendimento.
- Con la soluzione di problemi gli studenti sviluppano le strategie e i processi della matematica, e ne scoprono le strutture.
- La soluzione dei problemi è il modo migliore per apprendere perché favorisce la scoperta di conoscenza matematica. La conoscenza emerge dalle esperienze degli allievi; il ruolo dell'insegnante è dirigere e aiutare.
- La soluzione di problemi è la pedagogia appropriata da applicare in classe.

È un processo socialmente mediato, che ha bisogno di discussioni per condividere significati e strategie.
- Nell'ambiente adatto, la soluzione di problemi esalta l'autonomia dell'allievo. I problemi possono sorgere da indovinelli, da situazioni matematiche, dall'ambiente culturale e sociale degli allievi.

La più gettonata è stata la quarta affermazione.

Però, nonostante questa che sembra essere una convinzione, c'è una differenza nell'atteggiamento da una parte delle insegnanti elementari, che operano quasi sempre per problemi, dall'altra degli insegnanti della scuola superiore, che comunque continuano a vedere la difficoltà del tempo portato via ad altri argomenti. Per cui l'uso del problema è occasionale, oppure introduttivo a un nuovo argomento (e in tal caso più frequente).

La concezione del termine problema è vissuta in modo diverso, e ciò si ricollega alle due diverse definizioni "linguistiche" di problema date nel documento "Matematica 2001". Il documento sembra voler ricucire tra le due posizioni, sostanzialmente ripercorrendo tutta la scaletta "Ernest") ma, col salire del livello scolastico si va non solo verso la prima accezione "matematica", ma addirittura verso l'accezione "numerica" di problema.

GRUPPO TECNOLOGIE

Gruppo coordinato da G.P.Chiappini, D.Gouthier

Nella presentazione dei partecipanti al gruppo viene messo in evidenza che:

⋆ L'uso della tecnologia con funzione comunicativa in classe da parte dell'insegnante è molto utile.
Molti insegnanti usano la tecnologia con questa funzionalità in modo costante.
Avere una calcolatrice grafica in classe porta gli studenti a partecipare maggiormente: chiedono all'insegnante di utlizzare lo strumento secondo certe loro ipotesi, di attivare specifiche strategie - "usano" maggiormente l'insegnante.

⋆ Non bisogna aspettare di essere completamente padroni di uno strumento per cominciare a svolgere alcune attività mediante delle tecnologie con gli alunni. Si impone anche con gli studenti e dagli studenti.
Usando la tecnologia c'è un cambiamento di ruolo importante dell'insegnamente.
C'è maggior incertezza.
La Lezione non può essere completamente definita a priori. Si imboccano strade nuove.

⋆ C'è un uso della tecnologia per sviluppare competenze trasversali di alfabettizzazione informatica. In molte situazioni sono stati costruiti ipertesti nell'ambito di progetti che coinvolgono diverse discipline. In questi progetti la matematia ha una funzione strumentale e concorre insieme alle altre discipline allo sviluppo del progetto. Gli studenti sono molto coinvolti da queste attività. Sviluppano competenze notevoli.

⋆ L'uso della tecnologia nell'apprendimento della matematica si espirme attraverso:

(1) – uso di excel per attività di tipo statistico
(2) – uso di Cabri Geometre in ambito geometrico
(3) – uso di calcoatrici grafico-simbolico per attività di tipo algebrico di analisi numerica.

⋆ Un tempo gli insegnanti usavano molto i linguaggi di programmazione tipo Pascal.
Oggi non li usano più. Gli alunni, che un tempo erano interessati alla

programmazione, oggi non sono più interessati.

- ⋆ Vengono espressi molti dubbi e preoccupazioni sul fatto che se si fa attività con la tecnologia anche nell'esame di maturità si dovrà tenere conto di ciò e permettere agli studenti di utilizzarla in sede di esame.
- ⋆ Internet viene usata autonomamente dagli studenti. A scuola talvolta viene usata per trovare materiale in rete.
- ⋆ Le attività di laboratorio richiedono molto tempo e strutture adeguate. Ciò si scontra spesso con i tempi dello svolgimento del curriculum che sono stretti. Nell'ultima classe si usa molto poco il laboratorio con gli studenti.
- ⋆ Viene sottolineata l'importanza della comunicazione in rete per la formazione degli insegnanti. Ciò è particolarmente proficuo per la formazione su come usare le tecnologie informatiche a supporto dell'apprendimento in campo matematico.

  Questo è un settore dove non ci sono moltre certezze e la rete è più efficace della comunicazione su carta.
- ⋆ La comunicazione in rete potrebbe essere usato anche con gli studenti: rapporto con esperti esterni alla scuola, scambio con altre classi.

  Viene evidenziata l'importanza di iniziative tipo Flatland. Sarebbe bello se si moltiplicassero e differenziassero.

  I servizi resi disponibili dalla "Sissa" (Progetto Ulisse) che prevedono la possibilità di porre domande ad esperti potrebbero essere molto utili.

I DATI E LE PREVISIONI

Gruppo coordinato da A.Militerno, G.Ottaviani, M.P.Perelli

Su 13 prenotati erano presenti 9 docenti di cui 2 non prenotati.
I 9 presenti erano: 2 docenti universitari, 1 maestro e 6 insegnanti delle superiori.

Sono stati illustrati competenze e contenuti del nucleo . Motivazioni e modalità della strutturazione in diversi livelli del curriculum. Problemi psicopedagogici dell'insegnamento della statistica e della probabilità.

Osservazioni sulle competenze

La prof. C.Rossi osserva che per il III, IV, V anno va inserito: In situazioni concrete, riconoscere eventi veri e falsi (pag. 17).
Mentre per la I, II, III media vanno inseriti eventi esaustivi da aggiungere a: Riconoscere eventi complementari, eventi incompatibili, eventi indipendenti.

Per quanto riguarda le proposte di attività didattiche l'unica maestra presente si dichiara soddisfatta del materiale proposto, in particolare ritiene utile il diagramma ramo-foglia da lei utilizzato in classe con buoni risultati, per altro consolidati dal fatto che i suoi alunni hanno trovato un esempio di reale di applicazione di questo tipo di rappresentazione nell'orario del tram esposto alle fermate. Vede anche positivamente l'eventualità di una anticipazione dei primi rudimenti di probabilità, purché ci si limiti ad inserire, nell'ambito linguistico, l'uso di precisazioni linguistiche.

I docenti delle superiori si sono mostrati favorevoli alle proposte fatte per le elementari e le medie e alla scansione dei curricula proposte. Essi hanno mostrato una ragionevole propensione alla statistica. Ma è emerso che occorre distinguere la posizione del docente a seconda della tipologia di studente al quale egli si rivolge.

Il docente dell'IPSIA e quello del liceo pedagogico e del liceo di scienze sociali ritengono che il basso livello di preparazione matematica dei loro studenti renda addirittura adatto per essi il programma di dati o previsioni della scuola di base. Questi studenti sembrano muoversi meglio in attività pratiche che nascono dal reale - offerte dalla statistica - dove per altro i docenti dichiarano di trovare maggiore difficoltà; mentre si muovono con difficoltà nell'ambito della probabilità nel quale i docenti si trovano invece a proprio agio.

Il docente del liceo scientifico ritiene che far manipolare dati in classe sia vitale, tra l'altro consente di fare "calare la matematica nella realtà delle cose". Per altro ciò avviene sulla sollecitazione anche dei mass-media. La realtà offre insomma spunti pratici per il calcolo di proprozioni, medie, relazioni. Va tuttavia tenuto presente che gli studenti tendono sempre più a rifiutare gravosi calcoli manuali e che è di ostacolo all'insegnante la necessità di mirare la preparazione dell'ultimo anno all'esame di maturità.

La docente del classico sottolinea l'esperienza positiva dell'uso di statistica e probabilità in classe, avvalendosi fra l'altro dell'uso del computer, o più specificatamente, del foglio elettronico. Sottolinea il vantaggio della simulazione per far più rapidamente comprendere la distribuzione binomiale (gioco di testa e croce), la valenza didattica del calcolo della probabilità introdotto col diagramma ad albero -che è a suo dire migliore rispetto all'uso del calcolo combinatorio. L'uso del diagramma ad albero, poi con l'introduzione delle probabilità condizionate conduce con facilità all'enunciazione del Teorema di Bayes.

Ancora si pone in risalto l'uso di grafici, anche sulla stampa e il problema delle scale per una loro corretta interpretazione e l'uso interdisciplinare con la storia delle piramidi delle età.

Particolare la posizione del giovane insegnante precario presente. Non ha avuto modo di insegnare probabilità e statistica, ma ricorda gli insegnamenti ricevuti alle medie, dove gli furono insegnati elementi di statistica fino agli scarti dalle media aritmetica e dove fu molto interessato alle rappresentazioni grafiche.

Da parte di uno dei docenti universitari si segnala, per quanto riguarda le superiori, di porre attenzione quando si tratta della regressione "a gioco" delle unità di misura, dei caratteri, quando si tratta dei coefficienti di regressione. Si evidenzia inoltre l'importanza dell'uso pratico delle distribuzioni teoriche in particolare della binomiale e della normale.