Sped. in abbonamento postale - 45% Art. 2 - comma 20/B - Legge 662/96 - Napoli - Nuova serie - Anno 3 - Inserto allegato al n. 8 - Ottobre 2007

INNOVAZIONE EDUCATIVA

Mensile di discussione e progettazione di nuovi itinerari formativi

Clicca sul titolo per leggere l'articolo

IRRE EMILIA ROMAGNA

Il laboratorio matematico-scientifico: suggerimenti ed esperienze

a cura di *Rossella Garuti, Aurelia Orlandoni, Roberto Ricci*

Parte teorica • Sezione dedicata alle macchine matematiche
Articoli sul tema "laboratorio e software" • Esperienze di "laboratorio a cielo aperto"

IN QUESTO NUMERO
interventi di:

Marilina Ajello
Mariolina Bartolini Bussi
Guido Bartolini
Ercole Castagnola
Michele Cerulli
Giampaolo Chiappini
Domingo Paola
Franca Ferri
Mario Fierli
Rossella Garuti
Grazia Grassi
Michela Maschietto
Aurelia Orlandoni
Bettina Pedemonte
Giovanni Pezzi
Roberto Ricci
Elisabetta Robotti
Ornella Robutti
Angela Turricchia

tecnodid EDITRICE

IRRE E. R.
ISTITUTO REGIONALE DI RICERCA EDUCATIVA PER L'EMILIA ROMAGNA

Sommario

Introduzione generale

Il Laboratorio in ambito matematico-scientifico

Laboratorio e macchine matematiche

Laboratorio e software didattici

Sommario

Laboratorio e incertezza

Laboratorio all'aperto

Mettere indagine e progetto al centro della didattica delle scienze

Mario Fierli - Gruppo di Lavoro per lo Sviluppo della Cultura Scientifica e Tecnologica

Purtroppo ogni ragionamento sull'educazione scientifica, poco importa che riguardi la matematica o le scienze sperimentali, deve partire dall'evidenza degli scarsi risultati dell'Italia rispetto ad altri paesi, che emerge sia dalle indagini OCSE sia da quelle IEA. Nei due tipi di indagine cambiano la filosofia e gli strumenti (più "disciplinari" quelli della IEA e più orientati al ragionamento scientifico quelli dell'OCSE), ma non cambia la diagnosi.

Le cause, come è ovvio, sono molteplici, ma riconducibili a due grandi classi di problemi: una didattica inadeguata e una situazione strutturale e di contesto molto carente.

Cominciamo dalla didattica. Il discorso sulla qualità dell'insegnamento è chiaramente molto vasto e complesso.

Per non rimanere al livello delle opinioni e delle sole esperienze personali, vale la pena partire da qualche dato empirico e statisticamente significativo. Ecco alcuni dati forniti dall'Analisi Curricolare svolta in occasione della indagine IEA TIMS del 1999, che riguardano però solo il livello 8, cioè la secondaria di primo grado e si riferiscono alle scienze sperimentali. Il discorso è in larga parte estensibile anche alla matematica.

Tab. 1 - *Percentuale di tempo spesa in una tipico mese di lezioni (Dati forniti dai docenti)*

Compiti amministrativi	2
Correzione dei compiti a casa	10
Lezioni frontali	29
Pratica degli studenti guidata dal docente	15
Recupero	13
Pratica indipendente degli studenti	7
Prove e test	12
Dimostrazioni di esperimenti dell'insegnante	7
Esperimenti fatti dagli studenti	5

Tab. 2 - *Percentuale di studenti che dicono che le seguenti attività vengono svolte spesso*

Discutiamo i nostri compiti a casa	49
Gli insegnanti ci insegnano a risolvere problemi	56
Lavoriamo autonomamente su schede o libri di testo	38
Lavoriamo su progetti di scienze	35
Cominciamo a fare i compiti per casa	30
L'insegnante dimostra esperimenti	29
Gli studenti fanno esperimenti	18
Gli studenti usano oggetti di uso comune per problemi di scienze	31
L'insegnante usa la lavagna	73
L'insegnante usa il proiettore	9
L'insegnante usa il computer per spiegare	9
Gli studenti usano la lavagna	59
Gli studenti usano il proiettore	7

Tab 3 - *Progetti o ricerche assegnati come compiti a casa, secondo gli insegnanti*

Qualche volta o sempre	44
Raramente o mai	56

Il dato più evidente è la prevalenza, nel dato fornito dagli insegnanti sul tempo speso nelle varie attività, la prevalenza delle lezioni frontali e, simmetricamente, la scarsità di attività sperimentali.

È anche da notare, nella tabella con i dati forniti dagli studenti, che il libro di testo è poco usato in classe come strumento di lavoro: il testo non è un dispositivo didattico, ma prevalentemente un manuale da studiare. La lavagna è ancora, e di gran lunga, lo strumento più usato. Si conferma la scarsità di attività sperimentali, specialmente se autonome degli studenti.

Per questo il Gruppo di Lavoro per lo Sviluppo della Cultura Scientifica e Tecnologica, di cui si dirà alla fine, ha individuato nella promozione della didattica laboratoriale non l'unico punto, ma quello focale per il miglioramento della didattica.

Le scuole debbono essere dotate di infrastrutture e laboratori. Ma questi non possono essere luoghi separati in cui rinchiudere la pratica dell'indagine sperimentale: occorre che tutta la scuola diventi un "laboratorio" e che lo spirito dell'indagine passi attraverso tutte le discipline.

Bisogna anche rendersi conto che non bastano le risorse e gli spazi interni alla scuola. In un sistema socio-culturale aperto in cui le informazioni, le risorse, i luoghi, i problemi, le opportunità formative che riguardano la scienza e la tecnologia sono tante, la scuola non solo non le può ignorare, ma le deve assumere come aspetti di un "laboratorio allargato". Basti pensare ai Musei, ai numerosi eventi sulla cultura scientifica, al mondo della ricerca e dell'Università, alla divulgazione nei media. Qui ci sono però due problemi. Il primo è che queste "offerte" sono non sistematiche nel tempo e nel territorio, e talvolta di qualità discutibile. Tanto per fermarsi ai Musei si va dai pochi Musei e Science Centers che sviluppano una vasta attività di supporto alle scuole, a intere zone, anche importanti in cui le istituzioni museali sono scarse e, spesso, "chiuse" in tutti i sensi. Il secondo problema è che anche dove queste istituzioni sono rilevanti e disponibili, è difficilissimo trovare una vera forma di collaborazione con le scuole che offra loro non solo percorsi "paralleli", ma anche progetti, materiali, percorsi condivisi e integrabili nella didattica normale.

Ma perché nel nostro paese si debbono registrare questi limiti? Qui occorre chiamare in causa un ridardo culturale che viene da lontano e precisamente dalla tradizione idealistica che è stata egemonica per molti decenni. Essa ha modellato quella riforma nata negli anni '20 del secolo scorso, ancora oggi sostanzialmente vigente, caratterizzata da: una sostanziale sottovalutazione, se non disprezzo per la scienza (l'orgoglio dell'intellettuale che dice "io non ho mai capito niente di matematica"), la negazione del suo carattere culturale, la sua collocazione subalterna nella gerarchia dei saperi e, sopra di tutto, il disprezzo per la pratica e l'indagine empirica. Ecco perché ogni politica di sviluppo della cultura scientifica e tecnologica deve mettere in conto che non bastano i provvedimenti specifici, pure molto necessari, e che non si può ragionare solo sulla scuola. Occorre vedere il problema in tutte le sue dimensioni.

Il Gruppo di Lavoro per lo Sviluppo della Cultura Scientifica e Tecnologica, che non a caso è stato istituito da quattro Ministri (Pubblica Istruzione, Università e ricerca, Beni Culturali, Innovazione), ha affrontato appunto in modo globale il problema, elaborando un insieme di analisi e raccomandazioni che riguardano la scuola, l'università, i musei, i media, le imprese, le associazioni e la società civile. Su ciascuno di questi ambiti il Gruppo sta continuando e approfondendo l'indagine e le proposte.[1]

[1] http://www.pubblica.istruzione.it/argomenti/gst/index.shtml

Il laboratorio di matematica: storia e osservazioni

Mariolina Bartolini Bussi, Scienze della Formazione, Università di Modena-Reggio Emilia

L'idea di laboratorio in matematica si associa, di solito, all'idea di laboratorio di informatica. L'ingresso delle Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione (TIC) nella scuola ha introdotto particolari artefatti (i computer) creando attese, illusioni, delusioni, discussioni. Si va dal rifiuto ideologico all'adesione acritica. Ogni volta che in un congresso di insegnanti si propone un laboratorio su qualche (famoso) software didattico, si è certi di riempire l'aula, a scapito di sessioni parallele in cui sono in discussione argomenti più "tradizionali". Naturalmente, la storia insegna che non ci sono artefatti decisivi, in grado di cambiare il modo, i processi e gli effetti del fare scuola.

Un sicuro vantaggio del laboratorio di informatica è quello di favorire la modifica degli schemi di interazione. Spesso gli allievi sono disposti a lavorare a coppie; l'insegnante passeggia tra i banchi e deve tenere conto dei tempi individuali; è anche messo in crisi il tradizionale rapporto asimmetrico tra l'insegnante che conosce tutte le risposte e gli allievi che ne conoscono poche o nessuna.

Tuttavia, questi cambiamenti non sono, da soli, sufficienti a creare occasioni di apprendimento.

Il laboratorio di matematica è stato oggetto di una approfondita riflessione da parte della commissione dell'Unione Matematica Italiana che ha preparato i nuovi curricoli di matematica (noti come la Matematica per il Cittadino ed articolati nei volumi Matematica2001, Matematica2003 e Matematica2004, scaricabili gratuitamente dal sito http://umi.dm.unibo.it/). In questa riflessione sono stati valorizzati i molti contributi prodotti dai Nuclei Ricerca Didattica riguardanti tutte quelle situazioni in cui la tradizionale lezione di matematica è modificata dall'introduzione di particolari artefatti o di particolari attività di modellizzazione. Le ricerche sull'innovazione in didattica della matematica, sviluppate a partire dall'inizio degli anni '70, si collegavano, infatti

– alla tradizione, di origine pedagogica e didattica, dei metodi attivi, in cui l'uso di una manipolazione intelligente si accompagnava alla costruzione di significati anche molto astratti;

– alla tradizione, interna alla matematica, dell'uso di artefatti come strumenti teorici collegati alla possibilità di risolvere, in modo rigoroso, problemi classici.

I metodi attivi hanno una lunga tradizione nella pedagogia. Per citare solo alcuni nomi, ricordiamo:

– Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), che, influenzato dall'*Émile* di J.J. Rousseau e con un atteggiamento decisamente innovativo per l'epoca, sottolineò l'importanza delle attività di gruppo (contrapposte alla memorizzazione individuale) e delle attività come il disegno, la scrittura, il canto, le costruzioni, le rapprsentazioni in pianta, ecc.,

– John Dewey (1859-1952), che sottolineò gli aspetti sociali dell'educazione; partendo dalla classe tradizionale "con le sue brutte file di banchi posti in ordine geometrico, ammassati in modo da lasciare meno spazio possibile per muoversi, banchi tutti della stessa misura, con solo lo spazio per mettere i libri, le matite e la carta; un tavolo, alcune sedie, le pareti nude e forse solo qualche immagine" prese le distanze dalla "unica attività educativa che può avvenire in tale spazio", osservando che è "uno spazio fatto per ascoltare – dato che semplicemente studiare da un libro è un altro modo di ascoltare; segna la dipendenza di una mente dall'altra … significa passività".

– Maria Montessori (1870-1952), che sviluppò il metodo che porta il suo nome, nel quale i bambini imparando in modo indipendente, dal loro ambiente e da ciò che manipolano direttamente.

Gli strumenti hanno avuto spazio all'interno della matematica fino dall'antichità: la geometria di Euclide è la geometria della riga e del compasso; altri tracciatori di curve sono studiati fino dall'antichità come strumenti di soluzione di problemi e sono ripresi nel '600 come elementi essenziali dei nuovi metodi (si pensi all'appendice sulla Geometria del Discorso sul Metodo di Descartes). Modelli statici e dinamici riempiono le vetrine degli Istituti di Matematica, fino a che il programma Bourbakista sposta l'attenzione dei matematici sulle strutture fondamentali della matematica. Una testimonianza interessante del ruolo che questi modelli hanno avuto nello sviluppo delle ricerche è citata da Campedelli[1],

[1] Campedelli L. (1958), I modelli geometrici, in AAVV. *Il materiale per l'insegnamento della matematica*, Firenze, La Nuova italia, p. 168 (prima ediz. italiana 1965).

che ricorda le parole pronunciate da Guido Castelnuovo nel congresso internazionale dei matematici (Bologna, 1928), per descrivere la genesi della teoria delle superfici algebriche: “Avevamo costruito, in senso astratto s’intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito per dir così in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei modi possibili; l’analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell’altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica”. Come osserva argutamente Campedelli, “Castelnuovo parla di “modelli” e di “vetrine” e quasi soltanto casualmente precisa che non si trattava di oggetti materiali, ma solo di costruzioni della mente, presenti allo spirito, e vive dinanzi agli occhi come se avessero avuto un’esistenza fisica”. Ma, si può aggiungere oggi, proprio l’uso metaforico suggerisce la familiarità dell’autore con i modelli disposti in vere vetrine, come nelle *wunderkammern* degli istituti universitari.[2]

A queste tradizioni di origine didattica ed epistemologica, si sono aggiunti, in anni più recenti, gli studi cognitivi sui processi, che hanno mostrato l’importanza della manipolazione diretta nella costruzione dei processi di pensiero caratteristici della matematica.

Questi studi sono comunque stati avviati molto tempo prima che i computer facessero il loro ingresso nella scuola. In questo senso, credo, la commissione che ha elaborato le proposte per i nuovi curricoli non ha schiacciato in modo acritico l’idea di laboratorio sulla presenza dei computer nella scuola, sottolineando piuttosto gli aspetti metodologici che si possono applicare ad una varietà di artefatti. Nel testo si legge, ad esempio:

“L’ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all’uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall’altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l’esercizio di tali attività”.

“È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un’evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento; l’appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte.”

“La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti va vista, in questo contesto, come un possibile ed efficace strumento di laboratorio (inteso nel senso largo esposto prima) adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l’apprendimento di importanti contenuti matematici”.

“Le interazioni tra le persone nel laboratorio di matematica. La costruzione di significati è strettamente legata alla comunicazione e condivisione delle conoscenze in classe, sia attraverso i lavori in piccoli gruppi di tipo collaborativo o cooperativo, sia attraverso lo strumento metodologico della *discussione matematica*, opportunamente gestito dall’insegnante”.

Sul tema del laboratorio di matematica, il 12 maggio 2006, si è svolto presso la Domus Galilæana di Pisa un incontro di studio coordinato da chi scrive, a cui hanno partecipato vari relatori (Bartolini Bussi, Barra, Reggiani, Mariotti, Maschietto, Ferri, Paola, Cerulli) che hanno riferito su ricerche riguardanti l’insegnamento-apprendimento della matematica con l’uso di strumenti. Alcuni di loro contribuiscono anche a questo numero speciale della rivista, affiancandosi ad altre voci che portano l’esperienza del laboratorio scientifico e dell’aula senza pareti.

[2] Si veda la ricostruzione storica di questo fenomeno nell’articolo di Mueller W. (2001), *Mathematical Wunderkammern*, http://www.wmueller.com/home/papers/wund.html

Il laboratorio didattico di matematica: riferimenti teorici per la sua costruzione

Giampaolo Chiappini - Istituto Tecnologie Didattiche - CNR

La nozione di Laboratorio Didattico di Matematica

La teoria della trasposizione didattica elaborata da Chevallard (Chevallard, 1985) ha messo in evidenza i complessi processi che trasformano un determinato sapere matematico dalla sua forma de-contestualizzata, de-personalizzata, astratta e formale in sapere insegnato.

Si tratta da una parte di complessi processi sociali che trasformano i contenuti del sapere prodotto dai matematici in programmi scolastici e li fanno diventare contenuti da insegnare (trasposizione esterna) e dall'altra di processi che trasformano i contenuti dei programmi scolastici in contenuti effettivi di insegnamento e li fanno diventare sapere insegnato (trasposizione interna). Storicamente la trasposizione esterna trova reificazione nei programmi ministeriali mentre quella interna nei manuali scolastici.

La teoria della trasposizione didattica permette di giustificare sul piano teorico il carattere di necessità che accompagna la trasformazione della conoscenza per essere insegnata dentro il sistema scolastico.

In questo lavoro focalizziamo l'attenzione su un particolare tipo di trasformazione del sapere, che presenta differenze sostanziali con quelle operate in generale dai manuali scolastici.

Queste ultime consistono molto spesso in una elementarizzazione e esemplificazione del sapere ufficiale per favorirne la trasmissione da parte del docente. Notiamo che in queste trasposizioni viene preservato l'approccio metodologico disciplinare, di tipo logico-simbolico, centrato su definizioni e deduzioni e finalizzato a esibire dimostrazioni di una qualche verità matematica. È indubbio che questo approccio metodologico costituisca le fondamenta su cui si basa l'intero edificio della conoscenza matematica e il cemento che dà unità e coerenza a tutte le sue parti.

Sul piano dell'apprendimento la padronanza di tale approccio metodologico costituisce senz'altro l'obiettivo ultimo da raggiungere. Notiamo però che le ricerche in didattica della matematica che fanno riferimento a quadri di tipo costruttivista mostrano che per favorire il raggiungimento di tale obiettivo gli strumenti e i mezzi di natura logico simbolica dovrebbero essere integrati da altri (gesti, icone, grafici, rappresentazioni dinamiche…) con il fine di offrire agli studenti strumenti operativi e rappresentativi per esplorare la conoscenza matematica da apprendere e per costruire idee e significati relativi ad essa più appropriati al loro livello di sviluppo e comprensione.

Coerentemente con tali considerazioni in questo lavoro siamo interessati ad un tipo di trasposizione didattica diversa rispetto a quella che abbiamo definito di elementarizzazione e esemplificazione del sapere. La trasformazione del sapere a cui siamo interessati è finalizzata ad una ri-configurazione della conoscenza da insegnare per farla diventare un oggetto di investigazione per gli studenti e favorire la costruzione di idee e significati matematici. Come può essere realizzata una trasformazione del sapere con queste finalità? Quali riferimenti possiamo assumere per inquadrarla sul piano teorico?

Per realizzare questo tipo di trasformazione si parte da una conoscenza che la società considera importante sul piano formativo (trasposizione didattica esterna), la si stacca dall'ambiente in cui è stata sviluppata (ambiente disciplinare) e la si installa in un nuovo spazio fenomenologico, che chiameremo Laboratorio Didattico di Matematica, per assoggettarla alle condizioni di un nuovo ordine operativo, rappresentativo e sociale che presenta caratteristiche diverse da quello disciplinare in cui tale conoscenza trova giustificazione e legittimità. Ciò al fine di riconfigurare la conoscenza da insegnare (Chiappini & Reggiani, 2003) in oggetto di investigazione e permettere allo studente di costruire, in base alle condizioni di questo nuovo ordine, un proprio rapporto esperienziale con la conoscenza da insegnare, superando le resistenze che l'ordine disciplinare, di natura logico-simbolica, può offrire all'investigazione degli studenti e al loro apprendimento.

L'analisi di questo tipo di trasformazione ci porta a definire la nozione di laboratorio didattico di matematica (LDM). *Esso è quello spazio fenomenologico dell'insegnamento apprendimento della matematica che si struttura attraverso l'uso di specifici strumenti tecnologici e di articolati processi di negoziazione e in cui la conoscenza matematica viene assoggettata ad un nuovo ordine rappresentativo, operativo e sociale per essere riconfigurata in oggetto di investigazione e poter essere quindi più efficacemente insegnata e appresa.*

In questo quadro la riconfigurazione della conoscenza in oggetto di investigazione è vista come condizione necessaria affinché possa stabilirsi un diverso legame tra insegnante e alunni nel processo di insegnamento apprendimento. Tale legame è caratterizzato da una parte dalla non contrapposizione tra idee e concetti dell'insegnante relative alla conoscenza da insegnare e il vissuto e le esperienze dello studente, dall'altra parte da un'evoluzione del comportamento dello studente non in nome di qualche prescrizione disciplinare ma in virtù di pratiche più ricche e potenti permesse dal nuovo ordine del laboratorio.

Il processo di riconfigurazione della conoscenza matematica

In questo lavoro consideriamo la conoscenza matematica come il risultato di una costruzione sociale sviluppatasi sul piano storico attraverso una costante dialettica tra lo sviluppo di tecniche matematiche sul piano operazionale/procedurale e la loro concettualizzazione sul piano strutturale/relazionale.

Una tecnica matematica è innanzitutto un modo di risolvere un compito e ogni tecnica si compone di ragionamenti e di operazioni di tipo meccanico ed automatico (Chevallard, 1992; Artigue, 2002) . Le tecniche matematiche prendono vita attraverso l'uso di segni.

Una tecnica è caratterizzata da un valore pragmatico e da un valore epistemico (Chevallard, 1992; Artigue, 2002). Il valore pragmatico di una tecnica riguarda il suo potenziale produttivo in relazione al compito, cioè la sua efficacia e la sua efficienza nel produrre un risultato socialmente accettabile per il compito nonché i limiti e i costi relativi al suo utilizzo, mentre il suo valore epistemico riguarda la sua capacità di attivare quesiti e sviluppi concettuali volti a giustificarla e a inquadrarla sul piano teorico.

Notiamo che a nostro avviso il valore pragmatico e quello epistemico di una tecnica non hanno un carattere assoluto; essi dipendono dal contesto in cui la tecnica viene usata e dalle caratteristiche del soggetto che la usa. Essi infatti sono sempre dei valori per qualcuno che ha specifiche caratteristiche e bisogni e che opera in un determinato contesto. È indubbio, infatti, che un matematico possa attribuire un alto valore pragmatico alle tecniche algebriche incorporate nell'uso di un Computer Algebra System rispetto a quelle sviluppate con carta e penna. Dopo un breve periodo di auto-addestramento egli sarà in grado di avvalersene efficacemente per affrontare e risolvere compiti e problemi di natura algebrica. Lo stesso non si può dire per uno studente che non ha ancora sviluppato né una sufficiente padronanza di corrispondenti tecniche algebriche di tipo standard né una sufficiente conoscenza del dominio matematico entro il quale si colloca il compito da affrontare e da risolvere attraverso di esse. Notiamo che nel contesto educativo la padronanza di una tecnica e l'acquisizione di una buona conoscenza del suo dominio matematico di riferimento costituiscono proprio lo scopo dell'attività educativa.

Sulla base di quali riferimenti possiamo allora assumere che uno studente stia attribuendo un valore pragmatico ed epistemico alla tecnica matematica che possa essere considerato efficace per l'apprendimento?

Sul piano pragmatico se la tecnica consente l'emergere di obiettivi per il compito da risolvere e se nella soluzione del compito consente allo studente di mantenere l'attenzione concentrata solo sugli aspetti procedurali/operazionali che sono rilevanti per il perseguimento di tali obiettivi.

Sul piano epistemico se essa è in grado orientare lo studente verso l'investigazione degli aspetti strutturali e relazionali che possono consentire di giustificare e di inquadrare la tecnica sul piano teorico o di costruire significati che trascendono quelli strettamente connessi alla soluzione del compito.

Notiamo che quando questi due riferimenti si realizzano la conoscenza matematica da insegnare è concretamente riconfigurata in un oggetto di investigazione per lo studente.

Non sempre le tecniche matematiche usate nella pratica didattica tradizionale si prestano a ciò, o se si preferisce, non sempre la pratica didattica che coinvolge l'uso di una tecnica matematica consente ciò. Affinché una conoscenza matematica possa diventare un oggetto di investigazione occorre che le tecniche matematiche di riferimento per tale conoscenza siano assoggettate ad un ordine operativo, rappresentativo e sociale in grado di perseguire quanto sopra descritto relativamente al piano pragmatico ed a quello epistemico.

A tale riguardo è importante osservare che:

• l'ordine operativo di una tecnica matematica riguarda i mezzi e i modi che ne permettono lo sviluppo sul piano procedurale (come funziona), sviluppo che è finalizzato alla soluzione di compiti e/

o problemi del dominio matematico di riferimento per tale tecnica. Riteniamo che il valore pragmatico che lo studente può attribuire ad una tecnica dipenda dai mezzi, dai modi e dalle pratiche a cui è assoggettato il suo sviluppo;

• l'ordine rappresentativo di una tecnica matematica riguarda le forme e i modi che permettono l'interpretazione degli aspetti strutturali/relazionali che la caratterizzano, interpretazione che è finalizzata ad una sua giustificazione sul piano razionale (perchè funziona) e a un suo inquadramento su quello teorico. Riteniamo che il valore epistemico che lo studente può attribuire ad una tecnica dipenda dalle forme, dai modi e dalle pratiche a cui questa interpretazione è assoggettata.

• l'ordine sociale relativo all'uso della tecnica riguarda le pratiche e i modi sociali d'uso in contesto, e cioè i compiti che vengono affrontati attraverso essa e modi per esternalizzare, comunicare, condividere e negoziare idee e significati coinvolti nell'attività con tale tecnica. Da una parte l'ordine operativo e rappresentativo a cui una tecnica e assoggettata condiziona l'ordine sociale relativo al suo uso, dall'altra l'ordine sociale contribuisce a determinare i valori pragmatici ed epistemici che ad essa lo studente è in grado di riconoscere

Alla base della costruzione della nozione di LDM c'è l'idea che attraverso lo sfruttamento delle possibilità di visualizzazione, computazione, dinamicità e interattività rese disponibili dalla tecnologia sia possibile assoggettare l'uso di una tecnica matematica alle condizioni di un *ordine rappresentativo, operativo e sociale* che presenta caratteristiche diverse da quello utilizzato nella pratica didattica tradizionale.

Ciò al fine di consentire all'insegnante di riconfigurare la conoscenza da insegnare in un oggetto di investigazione per lo studente, cioè per consentire a quest'ultimo di usare le tecniche matematiche per investigare la conoscenza da apprendere, attribuendo loro un valore pragmatico ed epistemico adeguato agli scopi di apprendimento prefissati dall'insegnante.

Ruolo della tecnologia nella costruzione del nuovo ordine operativo e rappresentativo del LDM

Per meglio comprendere come la tecnologia possa essere concretamente sfruttata per costruire le condizioni di un nuovo ordine operativo, rappresentativo e sociale per le finalità precedentemente descritte è necessario analizzare più approfonditamente il ruolo dei segni nello sviluppo delle tecniche matematiche[1] . I segni matematici contribuiscono a strutturare l'ordine operativo e rapprentativo a cui la tecnica è assoggettata. In questo quadro può essere utile fare riferimento alla distinzione compiuta da Peirce tra tre generi di segni, cioè simbolo, icona e indice; tale distinzione è stata da lui effettuata in base alla relazione che ciascuno di essi stabilisce con il suo oggetto di riferimento (Peirce, 2003).

Consideriamo per esempio i simboli matematici. Per Peirce essi sono segni che possono essere messi in relazione al loro oggetto di riferimento in base a specifiche regole convenzionali.

Un'icona, invece, è un segno la cui forma e struttura riflette la struttura e le proprietà dell'oggetto di riferimento. È importante osservare che per Peirce esiste un legame molto forte tra simbolo matematico e icona. Egli infatti nota che dietro le regole che caratterizzano un simbolo matematico c'è sempre un qualche legame iconico con una qualche proprietà dell'oggetto rappresentato. Per esempio per Peirce una formula algebrica è un'icona, ed è resa tale dalle regole di associazione, commutazione e distribuzione dei simboli; una caratteristica distintiva dell'icona e infatti che attraverso la sua osservazione è possibile scoprire verità nuove rispetto al suo oggetto. E ciò è proprio quello che consente una formula algebrica. Per esempio l'espressione $2x+1$ nel dominio dei naturali ha come oggetto il generico numero dispari e stabilisce con esso uno specifico legame iconico. Essa infatti nella sua struttura segnica riflette la proprietà dell'oggetto di essere successore di un numero pari. Applicando su di essa regole associative e distributive dei simboli è possibile trasformare l'espressione in $x+(x+1)$ che mostra nella sua struttura segnica un'altra verità dell'oggetto, cioè quella di essere somma di due numeri consecutivi.

Oltre ai simboli e alle icone Peirce considera anche gli indici, cioè quel genere di segni in cui il legame con l'oggetto di riferimento è dovuto al fatto che il segno è determinato in qualche misura dall'oggetto stesso (per esempio la manica a vento è indice della direzione del vento, nel senso che la sua direzione è proprio determinata dal suo oggetto di riferimento).

[1] In questo lavoro limitiamo la riflessione all'ordine operativo e a quello rappresentativo

Per varie ragioni che non è qui possibile approfondire, nell'insegnamento della matematica l'attenzione è tradizionalmente volta all'apprendimento di regole relative l'uso dei segni matematici e, attraverso di essi, allo sviluppo di specifiche tecniche matematiche.

Notiamo che i segni matematici hanno in questa luce una funzione che è molto spesso quasi esclusivamente operativa; le tecniche matematiche sviluppate attraverso di essi sono pertanto assoggettate ad un ordine operativo di natura logico-simbolica, e vengono apprese e usate in modo normativo e prescrittivo.

Il riconoscimento di una funzione rappresentativa ai segni usati nello sviluppo delle tecniche matematiche, cioè il riconoscimento di un legame iconico nella struttura della tecnica sviluppata in riferimento alla struttura della conoscenza che si vuol far apprendere è molto spesso fuori dagli scopi soggiacenti alle pratiche di insegnamento, in quanto l'ordine rappresentativo della tecnica è collassato su quello operativo. Come conseguenza alle tecniche matematiche apprese e usate non viene attribuito un valore epistemico.

Riteniamo che la tecnologia possa essere efficacemente sfruttata per consentire di instrumentare tecniche matematiche, cioè per assoggettarle ad un ordine operativo, rappresentativo e sociale mediato dalla tecnologia in grado di rendere investigabile la conoscenza da apprendere.

I software di geometria dinamica sono un importante esempio di come ciò possa avvenire: le numerosissime esperienze condotte con questi sistemi mostrano proprio che le possibilità di visualizzazione e di dinamicità disponibili attraverso il trascinamento dei punti indipendenti consente di modificare profondamente l'ordine operativo, rappresentativo e sociale in cui assoggettare la conoscenza geometrica da insegnare. Le tecniche di costruzione geometrica vengono instrumentate attraverso il loro assoggettamento a questo nuovo ordine mediato dalla tecnologia e in questo modo si creano le condizioni affinché la conoscenza coinvolta nello sviluppo di tale tecnica possa essere riconfigurata in un oggetto di investigazione.

Più in generale osserviamo che la tecnologia permette di rendere disponibile un ordine operativo con cui sviluppare tecniche matematiche, operando con oggetti che sono governati da regole di trattamento mediate dal sistema in uso. In molti casi lo studente può controllare percettivamente lo sviluppo della tecnica in relazione al compito da risolvere, potendone controllare direttamente la sua efficacia rispetto al compito attraverso un approccio motorio, visuale e spaziale e non solo logico-simbolico. Le azioni compiute dallo studente in base a questo nuovo ordine operativo producono effetti che sono mediati anch'essi dalla tecnologia (per esempio da un programma), effetti che possono consentire di stabilire un legame più forte e stretto nell'uso di segni con funzione di simbolo, icona e indice. Ciò può consentire di modificare l'ordine rappresentativo e sociale dello spazio in cui la conoscenza da insegnare viene assoggettata.

Per esempio, è possibile sfruttare la tecnologia per coordinare tra loro differenti modi di rappresentare un numero e per individuare il legame iconico tra l'oggetto rappresentato e le sue diverse rappresentazioni e (confronta Chiappini et Al in questo volume), per fornire specifici feedback che siano indice (nel senso di Peirce) di qualche proprietà dell'oggetto di riferimento, per esplorare le regole soggiacenti alla manipolazione dei simboli matematici. Tutto ciò può creare nuove condizioni rappresentative che possono essere utili per trasformare una conoscenza da insegnare in un oggetto di investigazione e favorire la costruzione di idee e significati da parte degli studenti.

Bibliografia

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Chiappini, G. & Reggiani, M. (2003), 'Toward a didactical practice based on mathematics laboratory activities', *Proceedings of Cerme 3 (Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*)*,* Bellaria, Italy, 28.

febbraio-3 marzo (2003), http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/.

Chevallard Y., (1985), La Transposition didactique, La Pensée sauvage.

Chevallard Y. (1992), "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique." in "Recherches ede Didactique des Mathématiques." 12, 1, 73-112.

Peirce C.S. (2003), Opere, a cura di Bonfantini M, Bompiani.

Dal *laboratorio* alla *lezione*: descrizione di un esempio

Domingo Paola, Liceo scientifico A. Issel - Finale Ligure - G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

Qualche breve riflessione sul *laboratorio di matematica*

Il termine *laboratorio* rimanda al lavoro, alle dimensioni dell'agire e del fare. In qualche modo evoca anche laboriosità e quindi attenzione, coinvolgimento, partecipazione al processo di costruzione del prodotto.

Quando si parla di *laboratorio di matematica*, magari utilizzando la suggestiva metafora della bottega rinascimentale (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994), lo si fa spesso per evocare un modello di insegnamento – apprendimento diverso dalla *lectio*, ossia quello che, a partire dall'alto medioevo, in particolare dall'epoca carolingia ha sempre più contraddistinto le azioni che si esercitavano nei luoghi e nelle istituzioni preposte all'educazione e all'istruzione (Illich, 1992). Nella bottega rinascimentale, nel laboratorio dell'artigiano, ma anche in famiglia si apprendeva facendo e vedendo fare, per imitazione ed emulazione di altri principianti e dell'esperto; si comunicava con un linguaggio che Illich identifica con il termine di vernacolo (Illich, 1992) intendendo con esso un linguaggio che si impara per contatto con la madre e con il proprio nucleo familiare, strettamente legato all'ambiente in cui si vive e che prescinde da qualunque tirocinio programmato.

Nelle istituzioni preposte all'azione di istruzione ed educazione si apprende in genere mediante la *lectio*, ossia leggendo e rileggendo la pagina scritta, mettendone in rilievo gli elementi portanti; si apprende usando un linguaggio colto che viene (e deve essere) insegnato[1] .

Il *laboratorio* evoca l'idea di lavoro, fatica, operosità; la *lezione* evoca una trattazione da parte dell'esperto, un insegnamento impartito. Il *laboratorio* fa pensare a un coinvolgimento del corpo e della mente; la *lezione* evoca una partecipazione esclusivamente intellettuale. Il lavoro artigianale che si svolge nel *laboratorio* si gioca sui tempi lunghi, necessari al processo di produzione dell'artefatto; la *lezione* si svolge in tempi scanditi e ben definiti, più simili a quelli della produzione industriale che non a quelli della produzione artigianale.

Il pendolo che indica le funzioni della *lezione* oscilla tra due estremi: da una parte l'indottrinamento, dall'altra l'analisi e la riflessione sulle conoscenze, che consentono di approfondire, di vedere gli oggetti di studio da nuovi e diversi punti di vista e di aprire orizzonti di ricerca non ancora esplorati. Perché il modello della *lezione* ha avuto una diffusione così capillare, pervasiva e durevole? La fortuna della *lezione* nella tradizione del nostro sistema di istruzione ed educazione è a mio avviso dovuta a una scuola che è stata fino a oggi esplicitamente e consapevolmente selettiva. Attraverso l'azione esercitata nelle *lezioni* si cercava di garantire a numeri di studenti sempre più consistenti un'alfabetizzazione di base che consisteva essenzialmente nel leggere, nello scrivere e nel far di conto e poi si passava all'istruzione secondaria che aveva una duplice azione: da una parte "secolarizzare" gli studenti che avevano motivazioni, voglia e mezzi per proseguire negli studi; dall'altra espellere dal sistema di istruzione ed educazione tutti gli altri. I problemi sono iniziati a sorgere con la scuola di massa, con la sempre maggiore consapevolezza che non è più possibile esercitare una selezione esplicita, né una selezione nascosta (quella che manda avanti sempre e comunque, lasciando ad altri la responsabilità di una seria valutazione). I problemi si sono manifestati nel momento in cui la scuola diventa di tutti e per tutti, nel senso che la sua funzione prioritaria diviene quella di aiutare i giovani a conseguire le conoscenze e le competenze necessarie per partecipare a una cittadinanza informata e consapevole, in un mondo in cui le sfide per le giovani generazioni diventano sempre più difficili da affrontare. Oggi la scuola non può più limitarsi a garantire un'alfabetizzazione di base per tutti e una preparazione forte a un'élite. La scuola dovrebbe aiutare tutti i futuri cittadini ad acquisire competenze e conoscenze essenziali per partecipare in modo informato e consapevole alle sempre più difficili scelte che la vita pubblica impone. Il pendolo della *lezione* deve quindi essere spostato, fin dalla scuola dell'obbligo e non solo per le scuole superiori, dall'indottrinamento all'analisi, all'approfondi-

[1] D'ora innanzi utilizzerò il termine *lezione* in luogo di *lectio*.

mento, alla riflessione sulle conoscenze che via via si costruiscono. Le nuove esigenze, i nuovi obiettivi, più volte dichiarati nei documenti delle istituzioni scolastiche, si scontrano con una tradizione che è quella della *lezione*, in cui, a meno di non essere esperti dell'argomento, si è in qualche modo costretti a limitarsi ad ascoltare, a prendere appunti, a leggere testi scritti, a rielaborare ciò che si è ascoltato e letto e a riprodurlo, oralmente e per scritto, più volte, in modo da arrivare a produzioni simili a quelle del docente o del libro di testo. Vista da questa prospettiva, la *lezione* comporta modalità di insegnamento – apprendimento che non necessariamente favoriscono l'uso del pensiero critico e che non sempre richiedono una partecipazione attiva e responsabile nel processo di costruzione del sapere. Sono convinto che la scuola abbia bisogno di molto *laboratorio di matematica*, in cui si possano costruire significati degli oggetti di studio, attraverso esperienze realizzate in ambienti di insegnamento – apprendimento ricchi e adeguati, prima che le *lezioni* possano aprire nuovi orizzonti al sapere, attraverso la loro funzione di analisi critica e di approfondimento.

Non dirò altro relativamente al *laboratorio di matematica* e alle sue caratteristiche, rimandando, per tutto ciò, agli scritti di Mariolina Bartolini Bussi e di Giampaolo Chiappini presenti in questo numero della rivista. Mi limiterò a descrivere un'attività, svolta in una classe di primo anno di scuola secondaria di secondo grado, che, a mio avviso, costituisce non solo un buon esempio di che cosa si debba intendere quando si sente parlare di *laboratorio di matematica*, ma consente anche di far capire come e quando sia possibile passare dal *laboratorio* alla *lezione*.

Un esempio di attività di laboratorio di matematica in una prima liceo scientifico

Uno zoom sulla classe

Nel momento in cui è stata realizzata l'attività che qui descrivo, gli studenti frequentavano il primo anno di un liceo scientifico (sperimentazione PNI, Piano Nazionale dell'Informatica) a Finale Ligure, in provincia di Savona. La classe era formata da ventidue studenti, di cui nove femmine e tredici maschi, abituati fin dai primi giorni dell'anno scolastico a lavorare a coppie e in piccoli gruppi collaborativi[2] . La classe, inoltre, è stata scelta per la realizzazione di un progetto di ricerca internazionale che si propone di studiare i comportamenti degli studenti di scuola secondaria di secondo grado mentre lavorano in un ambiente messo a disposizione dal software TI-nspire della Texas Instrument[3] . Gli studenti, fin dal secondo mese di scuola, hanno utilizzato TI-nspire, nell'aula di informatica, per circa due o tre moduli orari alla settimana[4] . Inoltre ciascuno studente ha avuto una copia del software per lo studio individuale a casa. Si può quindi affermare che, al momento dello svolgimento dell'attività qui descritta, gli studenti potevano considerarsi buoni conoscitori di quelle risorse messe a disposizione dal software per affrontare l'attività proposta. Mi limito a descrivere a grandi linee il percorso didattico seguito dagli studenti fino al momento in cui l'attività è stata proposta[5] . La spina dorsale del corso è costituita dai concetti di funzione, modello, problema e teoria, che attraversano pervasivamente e in profondità tutti e cinque gli anni di corso. Gli studenti avevano svolto all'inizio dell'anno alcune

[2] Preferisco utilizzare, in riferimento alla tipologia di lavoro dei gruppi, l'aggettivo "collaborativi" in luogo di "cooperativi" per evidenziare che in queste attività non si prevede una suddivisione del lavoro fra individui o sottogruppi, come spesso accade fra esperti che devono realizzare un prodotto finale attraverso la cooperazione dei vari componenti (gruppi cooperativi), ma tutti i componenti del gruppo, in ogni fase, collaborano all'individuazione, alla realizzazione e alla comunicazione di strategie adeguate ad affrontare una situazione problematica (gruppi collaborativi).

[3] Il progetto è coordinato in Italia da Ferdinando Arzarello del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino ed è finanziato dalla Texas Instrument. Una quarta classe di un liceo scientifico di Torino, con la professoressa Pierangela Accomazzo, è coinvolta nello tesso progetto di ricerca. Il progetto si propone anche di studiare limiti e potenzialità dell'uso di TI-nspire nell'insegnamento – apprendimento della matematica, prima che tale software venga commercializzato.

[4] Il corso di matematica PNI consiste di 5 moduli orari a settimana. Utilizzo il termine "modulo orario", perché nel Liceo Issel le lezioni sono formate da unità di cinquanta e non di sessanta minuti, sia per facilitare la realizzazione di progetti volti a differenziare l'offerta formativa per tenere conto delle diverse esigenze, dei diversi interessi e dei diversi stili di apprendimento degli studenti, sia per evitare agli studenti l'obbligo di rientri pomeridiani che, in alcuni casi, creerebbero forti disagi a causa della conformazione territoriale del finalese.

attività con i sensori di posizione, volte a introdurre, attraverso un approccio fortemente percettivo, basato sul movimento del proprio corpo, il concetto di funzione come "grandezza che varia rispetto a un'altra". In seguito sono state loro proposte diverse attività volte ad acquisire tecniche adeguate allo studio delle variazioni di grandezze, in particolare le tecniche delle differenze finite, assai utili per studiare se una funzione cresce o decresce (se la variabile indipendente varia con passo costante, il segno delle differenze prime è proporzionale alla pendenza locale e quindi dà informazioni sulla crescenza) e su come cresce o decresce (ossia lo studio della concavità con il segno delle differenze seconde). Particolare risalto è stato dato al concetto di pendenza e di funzione lineare: relativamente a questo tipo di funzioni gli studenti avevano acquisito una discreta abilità nella determinazione dello zero e nello studio del segno, nonché nel confronto e nella composizione di due funzioni lineari. Al momento in cui è stata proposta l'attività gli studenti sapevano distinguere tra crescite polinomiali (quelle per cui esiste n tale che le differenze finite di ordine n sono costanti), in particolare le crescite lineari e quadratiche, e crescite esponenziali (quelle caratterizzate dalla costanza del rapporto tra due termini consecutivi o dal fatto che le successioni delle differenze variano anch'esse esponenzialmente, in modo direttamente proporzionale ai valori della grandezza oggetto di osservazione).

L'Attività proposta

Agli studenti è stato consegnato la seguente scheda di lavoro, che riporto integralmente e in cui sono contenute tutte le indicazioni per lo svolgimento dell'attività e il problema da risolvere[6].

Indicazioni per lo svolgimento dell'attività

L'attività che dovrete svolgere oggi richiede di studiare come variano le aree di tre successioni di rettangoli che ora verranno definite. Vi chiediamo di strutturare l'attività nel seguente modo:

1. ascoltate attentamente la lettura dell'attività da parte dell'insegnante in classe;
2. per dieci minuti pensate individualmente al problema, senza l'aiuto di carta e matita, né, tantomeno, di TI-nspire. In questi dieci minuti cercate di produrre congetture su come variano le aree dei rettangoli di ciascuna successione;
3. nei successivi dieci minuti discutete le congetture prodotte con il vostro compagno o la vostra compagna[7], usando solo carta e matita; pensate a possibili strategie di approccio al problema (di verifica o di esplorazione) da svolgersi poi con TI-nspire;
4. nei 60 minuti rimanenti potrete utilizzare TI-nspire per verificare le vostre congetture, effettuare esplorazioni e, infine, produrre una risposta al problema e ad alcune domande specifiche che abbiamo posto alla fine di questa scheda.

[5] Chi fosse interessato ad avere informazioni più dettagliate sul percorso didattico può collegarsi al sito web http://www.matematica.it/paola e cliccare sul bottone "Corso di matematica". Accederà a una pagina che descrive l'intero percorso che in genere svolgo dei primi tre anni di un corso liceale a sperimentazione PNI. Per ora le attività presenti sul sito sono ancora scritte in fogli di lavoro di TI-InterActive! (sul sito sono date le indicazioni per scaricarne una demo gratuita), un software della Texas Instrument che dovrebbe essere prossimamente sostituito con TI-nspire. In futuro cercherò di inserire sul sito anche attività costruite con TI-nspire. Chi preferisse la lettura di materiale cartaceo può far riferimento a sei articoli che, a partire da febbraio 2007, vengono pubblicati in successivi numeri della rivista *L'insegnamento della matematica e della scienze integrate,* del Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

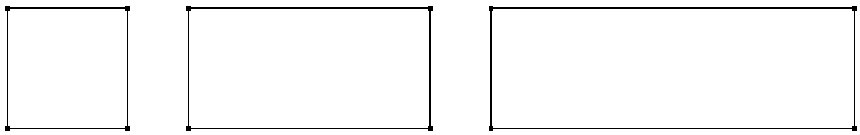
[6] Il problema è stato tratto da un lavoro presentato qualche anno fa al PME di Utrecht (Hershkowitz, R & Kieran, C., 2001). Sono debitore a Ornella Robutti per avermelo segnalato.

[7] In questa fase gli studenti dovevano lavorare in coppia, avendo a disposizione un computer per ogni coppia. La scelta suddividere gli studenti in coppie di lavoro è dettata da una duplice esigenza: da un lato garantire agli studenti un facile e frequente accesso alle funzioni del software (cosa difficile se gruppi numerosi di studenti lavorano su un solo computer); dall'altro non perdere del tutto i vantaggi didattici offerti dalle interazioni sociali nei piccoli gruppi di lavoro.

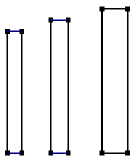
Problema

Considerate le tre seguenti successioni a), b) e c) di rettangoli:

a) l’altezza è fissata e uguale a 1 cm; la base del primo rettangolo misura 1cm, mentre i successivi rettangoli si ottengono aumentando sempre di 1cm la base, come suggeriscono le seguenti figure:



b) Il primo rettangolo ha altezza 1 cm e base 0,1 cm; i successivi rettangoli si ottengono aumentando di 0,1 cm sia la base, sia l’altezza, come suggeriscono le seguenti figure:



c) il primo rettangolo è un quadrato di base e altezza 0,01 cm; i successivi rettangoli hanno sempre altezza di 0,01 cm, mentre le rispettive basi si ottengono raddoppiando la base del precedente rettangolo considerato, come suggeriscono le seguenti figure:

Che cosa potete dire, in generale, relativamente al tipo di crescita delle aree dei rettangoli di ciascuna successione? Giustificate la risposta.

In particolare, esistono rettangoli della seconda e della terza successione che hanno area maggiore di quella del centesimo rettangolo della prima successione?

Esiste un valore di *n* a partire dal quale i rettangoli di posto maggiore di *n* della seconda successione hanno area sempre maggiore dei rettangoli di posto corrispondente della prima successione?

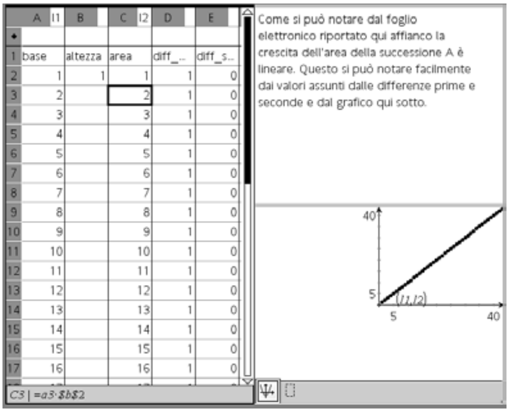
Esiste un valore di *m* a partire dal quale i rettangoli di posto maggiore di *m* della terza successione hanno area sempre maggiore dei rettangoli di posto corrispondente della prima successione? Giustificate le risposte.

DESCRIZIONE DEL LAVORO SVOLTO NEL *LABORATORIO DI MATEMATICA*

Le prime tre fasi di lavoro, senza l’uso del software, sono state utili soprattutto a far concentrare gli studenti sul testo del problema; la seconda, in particolare, è stata utile per dar modo a tutti di avere il tempo di pensare a possibili strategie risolutive.

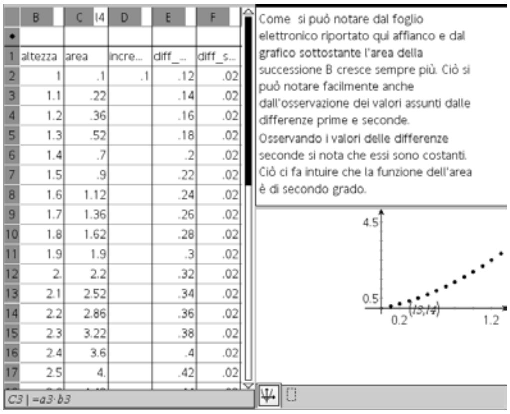
Dopo queste fasi iniziali solo alcuni studenti mostravano idee interessanti rispetto all’evoluzione delle aree dei rettangoli delle successioni b) e c); quasi tutti, però, avevano idea di come utilizzare le risorse messe a disposizione da TI-nspire per esplorare la situazione, ossia il comportamento delle successioni delle aree.

Quasi tutti i gruppi erano in grado di produrre autonomamente fogli di lavoro simili a quelli del gruppo di Luca e Serena, di cui riportiamo alcuni suggestivi frammenti (figure 1, 2, 3):



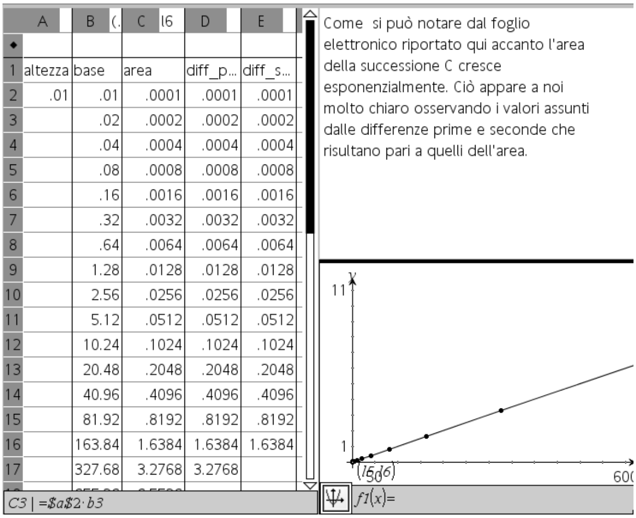
	A	B	C	D	E
1	base	altezza	area	diff_...	diff_s...
2	1	1	1	1	0
3	2		2	1	0
4	3		3	1	0
5	4		4	1	0
6	5		5	1	0
7	6		6	1	0
8	7		7	1	0
9	8		8	1	0
10	9		9	1	0
11	10		10	1	0
12	11		11	1	0
13	12		12	1	0
14	13		13	1	0
15	14		14	1	0
16	15		15	1	0
17	16		16	1	0

Fig. 1



	B	C	D	E	F
1	altezza	area	incre...	diff_...	diff_s...
2	1	.1	.1	.12	.02
3	1.1	.22		.14	.02
4	1.2	.36		.16	.02
5	1.3	.52		.18	.02
6	1.4	.7		.2	.02
7	1.5	.9		.22	.02
8	1.6	1.12		.24	.02
9	1.7	1.36		.26	.02
10	1.8	1.62		.28	.02
11	1.9	1.9		.3	.02
12	2.	2.2		.32	.02
13	2.1	2.52		.34	.02
14	2.2	2.86		.36	.02
15	2.3	3.22		.38	.02
16	2.4	3.6		.4	.02
17	2.5	4.		.42	.02

Fig. 2



	A	B	C	D	E
1	altezza	base	area	diff_p...	diff_s...
2	.01	.01	.0001	.0001	.0001
3		.02	.0002	.0002	.0002
4		.04	.0004	.0004	.0004
5		.08	.0008	.0008	.0008
6		.16	.0016	.0016	.0016
7		.32	.0032	.0032	.0032
8		.64	.0064	.0064	.0064
9		1.28	.0128	.0128	.0128
10		2.56	.0256	.0256	.0256
11		5.12	.0512	.0512	.0512
12		10.24	.1024	.1024	.1024
13		20.48	.2048	.2048	.2048
14		40.96	.4096	.4096	.4096
15		81.92	.8192	.8192	.8192
16		163.84	1.6384	1.6384	1.6384
17		327.68	3.2768	3.2768	

Fig. 3

La figura 1 è rappresenta una porzione del foglio di calcolo utilizzato da Luca e Serena per studiare la prima successione di rettangoli. Gli studenti riportano nelle prime tre colonne, rispettivamente i valori delle basi, delle altezze e delle aree dei rettangoli; nella quarta e nella quinta colonna sono riportate le differenze prime e le differenze seconde delle aree.

I valori della terza colonna (quella delle aree) sono ottenuti copiando la formula =a2*b2, ove il carattere "dollaro" ($) serve, come in excel, per rendere assoluto il riferimento alla cella (b2) che contiene il valore (costante) dell'altezza. Gli studenti nel blocco di appunti scrivono: "Come si può notare dal foglio elettronico riportato qui a fianco la crescita dell'area della successione A è lineare. Questo si può notare facilmente dai valori assunti dalle differenze prime e seconde e dal grafico qui sotto".

Luca e Serana si esprimono con buona proprietà di linguaggio; affrontano e risolvono il problema sia dal punto di vista numerico che grafico e rilevano esplicitamente che questi due piani sono fra loro in accordo, ossia dicono la stessa cosa. Per quel che riguarda il piano simbolico, si fermano alle formule definite nel foglio elettronico e alla descrizione delle caratteristiche della crescita nel linguaggio naturale, senza scrivere una formula per ricorrenza o la formula $f_a(n) = n$ che dà l'area dei rettangoli della successione *a* in funzione della base *n* o del numero d'ordine del rettangolo considerato nella successione. Altri studenti, invece, scrivono questa formula (nessuno, però, usa l'indice *a* in riferimento alla prima successione); in ogni caso, nessuno studente ha difficoltà a comprendere il significato di tale formula una volta che essa sia suggerita da interventi dell'insegnante nel piccolo gruppo di lavoro.

La figura 2 riporta una parte del foglio di lavoro costruito da Serena e Luca per studiare la seconda successione. Rispetto al foglio precedente è stata aggiunta una cella (D2) nella quale si è riportato il valore dell'incremento delle altezze e delle basi (0,1). Gli studenti hanno quindi costruito con la formula "=a2+d2" le misure delle basi dei rettangoli (a partire dal valore 0,1; con la formula "=b2+d2" le misure delle altezze dei rettangoli (a partire dal valore 1) e con la formula "=a2*b2" le relative aree.

Sul foglio di appunti scrivono: "Come si può notare dal foglio elettronico riportato qui a fianco e dal grafico sottostante l'area della successione B cresce sempre più. Ciò si può notare facilmente anche dall'osservazione dei valori assunti dalle differenze prime e seconde. Osservando i valori delle differenze seconde si nota che sono costanti. Ciò fa intuire che la funzione dell'area è di secondo grado".

Anche in questo caso, la risposta è interessante, esauriente ed espressa con un linguaggio appropriato. Anche in tal caso, però, i piani numerico e grafico sono quelli maggiormente utilizzati sia in fase di esplorazione che in fase di sistemazione da parte degli studenti. Il piano simbolico, come prima, è appena accennato e non si esplicita la relazione che lega la base all'altezza e che consente di esprimere l'area in funzione di una sola variabile. Per esempio, se si usa come variabile indipendente il numero d'ordine dei rettangoli nella successione, indicando con *n* tale variabile, abbiamo che l'area viene espressa dalla formula:

$f_b(n) = (1 + (n - 1) * 0,1) * (n * 0,1)$, o anche da $f_b(n) = 0,01 * n^2 + 0,09 * n$.

La figura 3 si riferisce al foglio di lavoro utilizzato per studiare la terza successione. Gli studenti mettono nella cella A2 il valore costante della misura dell'altezza (0,1) e nella colonna B ottengono le misure delle basi con la formula "=b2*2" a partire dal primo valore (0,1). Le aree vengono calcolate con la formula "=a2*b2". Gli studenti scrivono nel blocco di appunti: "Come si può notare dal foglio elettronico riportato qui a fianco l'area della successione C cresce esponenzialmente. Ciò appare a noi molto chiaro osservando i valori assunti dalle differenze prime e seconde che risultano pari a quelli dell'area".

Si noti che non viene fatto alcun riferimento al grafico, che è quello di una funzione lineare. Incuriosito da questo fatto ho chiesto a Luca e Serena come mai il grafico di una crescita esponenziale risultasse essere una retta: in altri termini chiedevo conto agli studenti di questo apparente paradosso. Sono rimasto piacevolmente sorpreso quando Luca mi ha spiegato che riteneva ciò assolutamente normale, in quanto quel grafico rappresenta la variazione dell'area al variare della misura della base, che è anch'essa una successione esponenziale[8] . Altri studenti che hanno seguito questa strada, sono invece rimasti prima sorpresi e poi disorientati dal fatto che l'esplorazione numerica portava a dire che si trattava di una crescita esponenziale (la maggior parte ha osservato la costanza fra i rapporti di due termini successivi) e il grafico della variazione dell'area in funzione della variazione della base era quello di una funzione lineare: solo due studenti che hanno completato il lavoro sono riusciti a risolvere l'apparente paradosso osservando, come Luca aveva già fatto, che la linearità dipendeva dal fatto che la variabile indipendente variava anch'essa esponenzialmente.

Questa è una tipica situazione nella quale è opportuno passare dal *laboratorio* alla *lezione*. Nel *laboratorio* gli studenti hanno osservato, fatto esperienza, prodotto e validato congetture, attivato processi risolutivi e comunicativi, in cui hanno utilizzato più o meno adeguatamente le risorse di uno strumento; nel *laboratorio* gli studenti hanno anche lavorato in quella nebbia necessaria a ogni significativo processo di apprendimento. Sono ormai maturi per la *lezione*, ossia una lettura con la guida dell'esperto (l'insegnante) a scopo di sistemazione e istituzionalizzazione delle conoscenze più o meno consapevolmente utilizzate e poi all'analisi e alla riflessione su di esse, all'eventuale apertura verso temi o argomenti che il docente intravede, ma gli studenti non possono ancora autonomamente riconoscere.

---

[8] Si noti che anche in questo caso Luca e Serena non producono alcuna formula del tipo $f_c(n) = 0,0001 * 2^n$ oppure, $\begin{cases} f(1) = 0,0001 \\ f(n) = 2 \cdot f(n-1) \end{cases}$ pur gestendo in modo adeguato il significato degli output del calcolatore e controllando costantemente quanto stanno facendo.

DAL *LABORATORIO* ALLA *LEZIONE*

Il primo obiettivo di una *lezione* dovrebbe essere quello della sistemazione e istituzionalizzazione. Inizialmente si sono quindi presentate e discusse alcune tipologie di diverse strategie che gli studenti hanno attuato per risolvere il problema. In seguito mi sono incaricato di produrre io stesso una mia risoluzione, però sullo stile di quelle proposte dagli studenti, cercando di:

a) utilizzare le idee che ritenevo migliori fra quelle utilizzate dai vari gruppi;

b) usare un linguaggio ancora più adeguato, preciso e appropriato di quello utilizzato dagli studenti[9].

Naturalmente, in questa fase della *lezione* mi sono anche preoccupato di far riflettere sull'importanza della ricerca di formule, per ricorrenza o chiuse che esprimessero la variazione dell'area delle successioni dei rettangoli, in particolare cercando di chiarire il perché alcuni studenti sono stati sorpresi dal grafico della terza successione. Relativamente a ciò ho fatto notare che quando si dice "l'area della terza successione di rettangoli varia esponenzialmente", bisognerebbe precisare "rispetto a che cosa varia": ossia bisogna precisare la variabile indipendente.

Ciò suggerisce una possibile fase di apertura verso nuove tematiche, relative alla questione di quale sia, se c'è, la scelta "più naturale" della variabile indipendente. Non le ho affrontate, però, con la classe, perché sentivo che gli studenti non avevano ancora l'esperienza necessaria per apprezzarle. Ho quindi preferito rinviare la discussione a quando gli studenti avranno effettuato altre esperienze di studio di grandezze che variano il cui grafico varia cambia drammaticamente a seconda della scelta della variabile indipendente.

Qui mi limito a osservare che il problema su quale sia la scelta più naturale della variabile indipendente, quella rispetto a cui diventa corretto dire che l'area varia esponenzialmente, è un problema molto simile a quello che affrontò Newton quando si chiese quale grandezza scegliere per studiare, rispetto a questa, le variazioni di tutte le altre grandezze. Newton aveva bisogno di una grandezza che variasse linearmente, con moto rettilineo uniforme e individuò tale grandezza con il tempo. Le variazioni di tutte le altre grandezze avrebbero potuto essere studiate rispetto al tempo. Come osserva Enrico Bellone (Bellone, 1989), Newton osserva in proposito che non è possibile valutare il tempo se non come *tempo* misurato mediante un movimento. Ed è proprio questa una delle principali ragioni per cui Newton avverte il bisogno di precisare che:

"in quanto segue, io non tengo conto del tempo così formalmente considerato, ma, a partire da quantità proposte che sono dello stesso genere, io suppongo che una di esse cresca con flusso equabile: a questa tutte le altre possono essere riferite come se essa stessa fosse tempo, e così, per analogia, il nome tempo le potrebbe essere conferito non impropriamente. E allora, ogni qualvolta che nel seguito incontrerete la parola *tempo* […] con questo nome non si dovrà intendere il tempo formalmente considerato, ma quell'altra quantità, grazie alla cui crescita o flusso equabile, si espone e si misura il tempo" (Newton, *Principia*, cit. in Bellone, 1989, pag. 62)

La riflessione di Newton sarebbe quanto mai opportuna per dare dignità e senso alla questione "quale è la scelta più naturale per la variabile indipendente nello studio della variazione della terza successione di rettangoli?" Si tratterebbe di una riflessione tipica della *lezione* che, quando l'esperienza e la sensibilità degli studenti consentiranno di affrontarla, consentirà approfondimenti e analisi affascinanti, al confine tra la matematica, la fisica, la loro storia e la filosofia.

Spero di essere riuscito a dare un'idea di come *laboratorio* e *lezione* possano integrarsi fortemente e significativamente, l'uno offrendo agli studenti la terra fertile per far germogliare e crescere la pianta della conoscenza, l'altra fornendo gli elementi per rinforzarne le radici attraverso l'analisi e la discussione con la guida dell'esperto.

È in questo modo che, a mio avviso, si creano davvero quelle condizioni che consentono di trasformare l'esperienza in cultura.

---

[9] Per fare evolvere verso le forme istituzionali il linguaggio degli studenti, quando mi accorgo che gli studenti hanno capito ma hanno difficoltà ad esprimersi in forma chiara e adeguata, adotto, ormai consapevolmente e volontariamente, la tecnica di usare gli stessi gesti degli studenti ma di accompagnarli con parole del linguaggio istituzionale (Arzarello & Paola, in stampa).

Bibliografia

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994), *L'algebra come strumento di pensiero. analisi teorica e considerazioni didattiche*, Quaderno 6 del CNR, Progetto strategico ITD, Pavia.

Arzarello, F. & Paola, D. (in stampa), Semiotic game: the role of the teacher, *Proceedings of the 31th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, Seul.

Bellone, E. (1989), *I nomi del tempo*, Bollati Boringhieri, Torino.

Hershkowitz, R & Kieran, C. (2001), Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: an experience with graphing calculators *Proceedings of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, v.1, p. 96 – 107, Utrecht.

Illich, I. (1992), La madre lingua insegnata (Discorso di apertura al plenum del quinto congresso mondiale del World Council of Comparative Education Societies, Parigi, 1984), in Illich, *Nello specchio del passato*, red Edizioni, (titolo originale, *In the Mirror of the Past*. *Lectures and Addresses, 1978 – 1990*, Maryon Boyars, London)

Macchine Matematiche e laboratorio

Michela Maschietto - Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia

Introduzione

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche (qui di seguito abbreviato in MMLab, http://www.mmlab.unimore.it), situato nei locali del Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia, contiene una collezione di strumenti per la geometria, chiamati macchine matematiche. Essi sono stati costruiti a scopo didattico a partire da testi storici, dalla matematica greca fino al XX secolo. Una macchina matematica, legata al campo della geometria, è un artefatto concepito e costruito con uno scopo preciso, che non dipende dal suo uso effettivo: esso obbliga un punto, un segmento o una figura piana a essere trasformata in accordo con una legge matematica definita dal costruttore. Una macchina matematica può essere un tracciatore di curve (come ad esempio un compasso), un pantografo per le trasformazioni geometriche o uno strumento per la prospettiva (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006).

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche conduce vari tipi di attività con le macchine matematiche: sono esposte in mostre, proposte in attività di laboratorio presso la sede del Laboratorio o portate in classe nell'ambito di progetti didattici di lungo termine. Pur essendo gli stessi oggetti fisici, il contesto in cui sono inseriti condiziona da un lato gli obiettivi e le attività che li vedono coinvolti, dall'altra i rapporti che i soggetti stabiliscono con gli strumenti. Questa osservazione, che può sembrare banale, è invece importante quando ci si pone dal punto di vista dell'apprendimento e dell'insegnamento della matematica. In questo articolo, si parlerà della attività svolte con le classi nei locali del Laboratorio. Si rinvia all'articolo di Franca Ferri per quanto riguarda l'utilizzo delle macchine matematiche in classe.

Le sessioni di laboratorio per le classi

Il Laboratorio è aperto alle visite delle classi durante tutto l'anno scolastico. Anche se viene spesso usato il termine "visita", quanto proposto non è organizzato in termini di "visita guidata ad una mostra", ma piuttosto come sessione di laboratorio di matematica (secondo l'accezione di "Matematica 2003" della Commissione UMI-CIIM) su un tema scelto precedentemente dagli insegnanti che accompagnano le classi. La scelta del percorso è compiuta dall'insegnante, anche se si auspica che la visita sia inserita nel percorso di matematica seguita dalla classe.

I percorsi tematici proposti sono tre: un primo tema riguarda le coniche e i conicografi, un secondo le trasformazioni geometriche e un terzo la prospettiva (fruibile a partire dal prossimo anno scolastico). Il tema delle coniche e della prospettiva si rivolge soprattutto agli allievi della scuola secondaria di secondo grado, mentre quello delle trasformazioni può essere seguito anche da allievi della scuola secondaria di primo grado (con opportuni cambiamenti). Ogni sessione di laboratorio, per la scuola secondaria di secondo grado, prevede tre fasi: introduzione al tema del percorso, lavoro di gruppo sulle macchine matematiche, presentazione del lavoro svolto da parte di ogni gruppo. Per la scuola secondaria di primo grado si svolge solo la terza fase con schede modificate.

Il formato attuale della sessione proposta alle classi concilia diverse intenzioni ed esigenze. La prima fase risponde soprattutto all'intenzione di offrire una sessione in cui siano presenti riferimenti storici, che permettano così di situare nella storia della matematica i concetti che saranno presentati e di vederne lo sviluppo. Inoltre, vi si trovano quegli elementi di geometria nello spazio che in un approccio scolastico, diciamo tradizionale, delle coniche e delle trasformazioni sono evocati e/o rappresentati e, quindi, spesso lasciati nella sfera degli esperimenti mentali degli allievi. Si presentano allora modelli di coni realizzati mediante fili tesi intersecati da piani in plexiglas (Fig. 2) o modelli di trasformazioni che mostrano corrispondenze prima tra due piani distinti poi tra due piani coincidenti (Fig. 3). Dato che una sessione di laboratorio non è una visita guidata a una mostra, la seconda fase della sessione corrisponde a un vero lavoro sulle macchine matematiche; un lavoro, cioè, di manipolazione, di esplorazione e di formulazione di congetture. Questo richiede un lavoro di gruppo su una macchina. A parte il percorso sulla prospettiva, le macchine matematiche date agli allievi sono essenzialmente macchine "bidimensionali", cioè strumenti che lavorano sul piano (come quello nella Fig. 4 a destra). Questa separazione tra spazio e piano tra la prima e seconda fase è legata al fatto che i modelli tridimensionali sono utilizzati maggiormente per illustrare elementi teorici, mentre quelli bidimensionali permettono effettivamente di disegnare curve o realizzare trasformazioni. Per la prospettiva questa suddivisione non è rispettata né potrebbe esserlo, in quanto, prima di tutto, la maggior parte dei prospettografi sono artefatti che lavorano nello spazio (come ci si attende parlando di prospettiva). Nei trattati, come "Le due regole della prospettiva pratica" di Barozzi, si trovano descrizioni di prospettografi "bidimensionali", ma il loro uso richiede conoscenze sulla prospettiva che si possono costruire con l'uso di altri prospettografi (come, ad esempio, quelli descritti da Dürer). In altri termini, non è confrontabile questo passaggio tridimensionale/bidimensionale con quello delle coniche e delle trasformazioni (che possono essere direttamente definite sul piano senza ricorso allo spazio). Prevedendo che una classe venga una sola volta nel Laboratorio, le macchine date ai gruppi sono diverse l'una dall'altra (a parte la prospettiva). Questo fatto rende allora necessaria una fase, la terza, di condivisione del lavoro svolto, in cui l'animatore del Laboratorio (indichiamo così colui che gestisce la sessione) non solo riconosca e corregga il lavoro svolto dai gruppi, ma soprattutto stabilisca un legame tra le varie macchine matematiche, incontrate nelle fasi precedenti, e situi le situi nella storia. D'altra parte, questa terza fase corrisponde anche a un'altra esigenza: quella di far conoscere all'insegnante della classe tutto il lavoro svolto dagli allievi, per un successivo reinvestimento e approfondimento. La complessa articolazione tra le tre fasi si basa su una delicata gestione del tempo di ognuna di esse rispetto al quello concesso all'intera sessione, che varia da un'ora e mezza a due ore. Il dettaglio delle tre fasi evidenzia quanto finora riportato.

Prima fase

Figura 1: presentazione della macchina per le lenti iperboliche e del compasso perfetto

La prima parte introduttiva al tema (Fig. 1) è presentata dal personale del Laboratorio (oltre a chi scrive, borsisti e membri dell'Associazione Macchine Matematiche[1]) utilizzando i modelli presenti nel Laboratorio e le animazioni, interattive e non, di tali modelli (realizzate con Cabri II Plus, Cabri 3D, Cinema4D).

Nel percorso sulle coniche, si introducono alcuni elementi dello sviluppo storico della teoria delle coniche, a partire da Menecmo e da Apollonio (Fig.1).

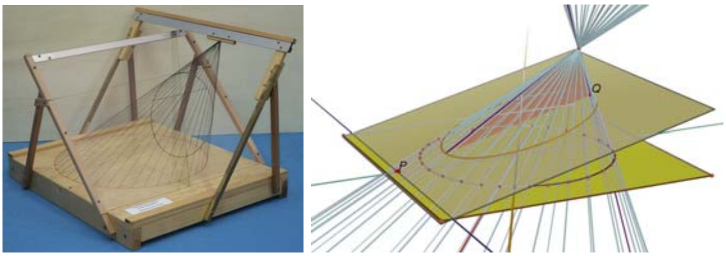


Figura 2: Cono di Apollonio (ellisse): modello a fili e animazione Cabri 3D

[1] http://associazioni.monet.modena.it/macmatem/index.htm

Si passa poi a considerare strumenti come il compasso perfetto e la macchina per le lenti iperboliche di Descartes (Fig. 1), per terminare con la presentazione dell'ellisse come sezione di un cilindro retto.

Nel percorso sulle trasformazioni, si parte dalle genesi tridimensionali dell'omotetia (Fig.3), della traslazione e dello stiramento per approdare alla presentazione di un particolare pantografo (traslatore di Kempe), che permette di precisare alcuni termini delle schede (puntatore, tracciatore, gradi di libertà,...) e fornire un esempio di esplorazione per il lavoro di gruppo.

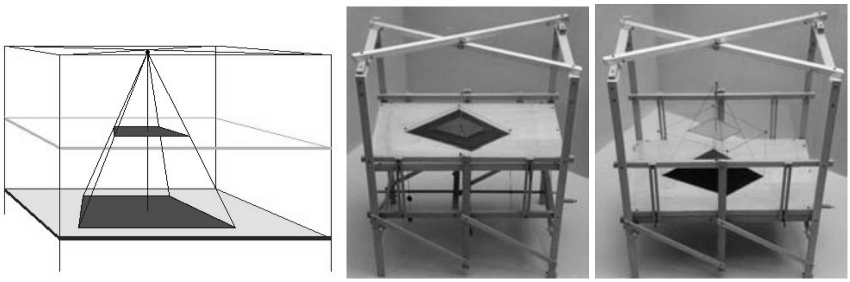


Figura 3: Genesi tridimensionale dell'omotetia: animazione CabriIIPlus e modello

Seconda fase

Nella seconda fase (Fig. 4), ad ogni gruppo di allievi viene fornita una macchina matematica e una scheda per l'esplorazione della macchina stessa (un esempio è data nella Fig. 5). Le domande della scheda permettono di portare l'attenzione prima alla struttura dello strumento, poi alle relazioni tra le varie componenti e in ultimo a ciò che esso realizza. Nel caso dei conicografi, agli allievi si chiede prima di enunciare la proprietà della curva descritta dal punto tracciatore, poi di determinarne l'equazione suggerendo la scelta degli assi coordinati, in ultimo di individuare alcune eventuali altre proprietà della conica. Sono soprattutto distribuiti gli strumenti a filo (ellisse, parabola e iperbole), l'ellissografo e l'iperbolografo ad antiparallelogramma, il parabolografo di Cavalieri. La scelta dell'assortimento dipende dalla storia della classe.

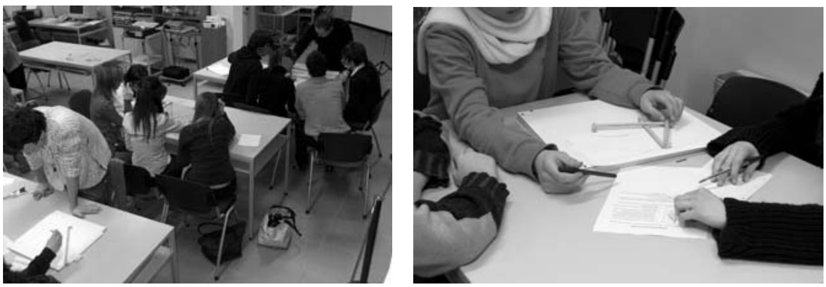
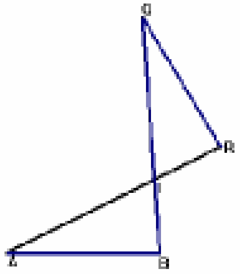


Figura 4: Lavoro di gruppo

Nel caso dei pantografi, alcune domande chiedono in un primo tempo di dare una definizione della trasformazione realizzata (localmente) dal sistema articolato e di esplicitare alcune proprietà della trasformazione, poi di determinare la forma delle regioni piane messe in corrispondenza dalla macchina, e alla fine di scrivere le equazioni della trasformazione. Le macchine matematiche su cui si lavora sono quelle per le isometrie (tranne la rotazione in quanto di difficile esplorazione), per l'omotetia e per lo stiramento.

Antiparallelogramma articolato

Osserva e muovi lo strumento. Ci sono tre tracciatori (Q, R, T). Rispondi alle seguenti domande:



1. Quali sono le curve tracciate da Q ed R?
2. Quali sono, nello strumento, gli elementi fissi (immobili sul piano in cui la macchina si deforma); quali elementi restano di lunghezza invariata durante il moto e quali invece hanno lunghezza variabile?
3. Quali segmenti di lunghezza variabile sono uguali fra loro?
4. Quali segmenti di lunghezza variabile hanno somma costante?
5. Quale è la proprietà della curva descritta dal punto T? Conosci questa curva?

Assumi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nel punto medio fra A e B e asse delle ascisse coincidente con la retta AB. Indica con *a* la lunghezza del segmento AB e con *d* quella del segmento AR.
6. Scrivi l'equazione delle curve descritte da R e da Q.
Indica con (x,y) le coordinate di T e utilizza la proprietà trovata al punto 5) per scrivere l'equazione della curva descritta da T.

Figura 5: Scheda per l'ellissografo ad antiparallelogramma

Nel caso della prospettiva, insieme alla scheda sono forniti fogli con rette disegnate in particolari posizioni. Il lavoro richiesto agli allievi consiste nel disegnare le immagini prospettiche di varie figure geometriche (tracciate in un primo momento sul piano di terra, poi su un piano parallelo al piano di terra) e nel verificare alcune proprietà della trasformazione realizzata.

La determinazione di ciò che una macchina matematica realizza avviene per approfondimenti successivi. In questo modo gli allievi sono così avviati in un processo opposto a quello dell'ideatore/costruttore. Le prime osservazioni del lavoro di gruppo hanno evidenziato una buona devoluzione della consegna in quasi tutte le classi. Gli allievi accettano di svolgere l'attività loro proposta e si impegnano nella ricerca delle risposte alle domande della scheda. Durante il lavoro, l'insegnante e l'animatore seguono i gruppi, sostenendo quegli allievi che mostrano maggiori difficoltà al fine di far loro affrontare la maggior parte delle questioni della scheda. In questo tipo di attività, gli allievi riescono a mobilizzare e reinvestire le conoscenze possedute.

Terza fase

Nella terza fase, ogni gruppo presenta ai compagni la macchina matematica su cui ha lavorato (Fig. 6). Si tratta di una fase di istituzionalizzazione importante, in quanto il lavoro di ogni gruppo è condiviso e riconosciuto all'interno del gruppo classe e dall'insegnante.

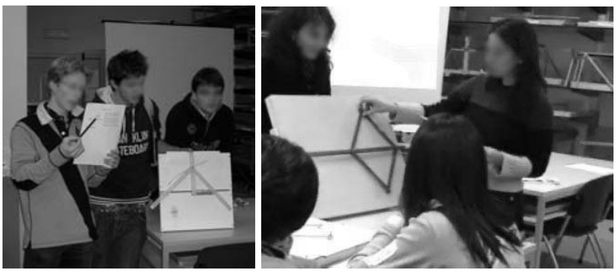


Figura 6: Presentazione del lavoro di gruppo

Dalle nostre osservazioni emerge che questa terza fase é piuttosto delicata. Anche se gli allievi non sono abituati al lavoro di gruppo, accettano, come abbiamo già indicato, solitamente bene tale modalità nella seconda fase. La richiesta di presentazione di quanto svolto trova invece maggiori resistenze, riconducibile forse in parte a fattori emotivi. Si riscontrano, in generale, scarse capacità argomentative e povertà di linguaggio matematico.

L'attività con le macchine matematiche può essere svolta non solo come approfondimento ma anche come introduzione ai concetti matematici presenti nei percorsi proposti. Infatti, la "posta in gioco" nelle attività di gruppo non è tanto scoprire o indovinare quale curva viene tracciata o quale trasformazione è realizzata, quanto argomentare e giustificare perchè una particolare macchina matematica permette di tracciare proprio quella curva o di realizzare proprio quella trasformazione geometrica. É questa la componente più importante, dal nostro punto di vista: favorire tramite la manipolazione e l'esplorazione di strumenti fisici la produzione di congetture e di argomentazioni, se non addirittura di dimostrazioni. Ovviamente, il livello di approfondimento dipende dalla classe e non si esaurisce nella sessione stessa, nel senso che l'insegnante può disporre di materiale per approfondimenti in classe.

La presentazione della tre fasi di una sessione di laboratorio mostra il coinvolgimento di tre soggetti (animatore, insegnanti e allievi) con ruoli diversi. Nella prima fase, l'animatore è la voce della storia e degli strumenti, nella seconda fase gestisce il lavoro dei gruppi, nella terza fase è colui che guida la presentazione degli allievi e valida le risposte alle schede. Allo stesso modo, gli allievi assumono ruoli diversi: visitatori, manipolatori,... L'insegnante, dal canto suo, gioca un po' il ruolo di jolly, in quanto da una parte assiste all'introduzione del tema del percorso come gli allievi, dall'altra segue e partecipa al lavoro di gruppo senza avere tuttavia la gestione del tempo didattico e delle attività.

Conclusione

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche è essenzialmente un laboratorio di ricerca in didattica della matematica che ha come obiettivo lo studio dei processi di apprendimento e insegnamento della matematica e, in particolare, della geometria. La progettazione e l'organizzazione della sessione di laboratorio qui descritta si basa da un lato sull'idea di laboratorio di matematica presente in "Matematica 2003", dall'altra sull'esperienza dei ricercatori in didattica. La sessione di laboratorio costituisce, da questo punto di vista, un dispositivo sperimentale che è oggetto di analisi. Esso è studiato in relazione ad altri dispositivi che coinvolgono le classi riguardo alla matematica. Come abbiamo precisato, non è confrontabile né con una visita guidata a una mostra, anche se ne condivide alcuni aspetti soprattutto nella prima fase, né con una lezione in classe, anche se vi sono punti in comune nella seconda e terza fase. Caratterizzare meglio il laboratorio e quanto in esso avviene contribuirà alla riflessione sull'apprendimento della matematica al di fuori dell'istituzione scolastica. In quest'ottica ci interessa da un parte entrare nel dettaglio dei processi degli allievi in atto nella seconda fase e per legarli poi alla terza (ben consapevoli che si tratta di processi di breve termine), dall'altra puntualizzare le conoscenze in gioco e quelle costruite nel corso delle varie fasi. Ci interessa inoltre studiare se e come le sessioni di laboratorio, o meglio la modalità di attività che esse propongono, sono successivamente utilizzate dall'insegnante nella sua pratica didattica. Su questi temi sono stati avviati progetti di ricerca riguardanti sia gli allievi che gli insegnanti che li accompagnano.

Riferimenti bibliografici

Commissione UMI-CIIM, *Matematica 2003 Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica - Ciclo secondario*,
http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html

Bartolini Bussi M.G., Maschietto M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana Convergenze. Milano: Springer.

Il laboratorio di matematica nella classe.
Costruzione di significati aritmetici attraverso l’uso di macchine per calcolare

Franca Ferri, Scuola primaria “P. L. da Palestrina” X Circolo Modena, NRD Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia

Introduzione

Nella società attuale l’uso di strumenti tecnologici accompagna sempre più le nostre azioni quotidiane. Di questo si ha riscontro anche nella scuola primaria con allievi molto giovani. Nello zainetto dei bambini, oltre a strumenti classici come righello, goniometro e compasso, trovano posto spesso calcolatrici tascabili ed anche giochi elettronici, di cui i ragazzi mostrano conoscerne molto bene l’uso. La scuola primaria ha una lunga tradizione didattica legata agli strumenti di calcolo, limitata però soprattutto ai primi anni, quando è necessario lavorare sulla notazione posizionale e sull’introduzione delle operazioni. Si trova qui un parallelo con la storia degli strumenti di calcolo, che ha inizio con quella delle antiche civiltà e che per lungo tempo è unita all’impiego di strumenti molto semplici, ma efficaci, per operare con numeri. L’abaco (fig.1) n’è un esempio classico e, nell’insegnamento della matematica nella scuola primaria, gode tuttora di un certo favore. L’uso di strumenti di calcolo sembra, però, terminare a fine seconda o all’inizio della classe terza, quando carta e penna hanno il sopravvento e la calcolatrice tascabile inizia a divenire un vero e proprio tabù scolastico. La scuola in questo modo sembra perdere un’importante occasione di riflessione: l’approccio al calcolo con diversi strumenti ha una forte valenza culturale, soprattutto se si lega allo sviluppo ed alle evoluzioni di tali strumenti nel corso della storia. Nella formazione matematica degli allievi è sempre importante mantenere da una parte la riflessione sulle procedure, di calcolo nel nostro caso, e dall’altra riflettere sulla non unicità di tali procedure per il raggiungimento di un certo obiettivo. In un’ottica di questo tipo, si sono svolte le sperimentazioni didattiche, che si presentano in queste pagine, su alcuni strumenti per calcolare, effettuate in un percorso a lungo termine, dalla seconda alla quarta classe della scuola primaria. Le tre sperimentazioni sono anche da intendersi come attività di laboratorio attuate con l’intera classe, poiché nel loro indice trovano posto la discussione matematica, l’uso di strumenti tecnologici e il ruolo che questi ultimi giocano come mediatori nei processi di apprendimento/insegnamento, voci fondamentali della didattica laboratoriale. Gli strumenti introdotti nel corso degli anni sono stati l’abaco, la macchina “Zero +1” (Fig.2), chiamata “pascalina” poiché in parte simile alla storica pascalina di Blaise Pascal e vari modelli di calcolatrice tascabile.

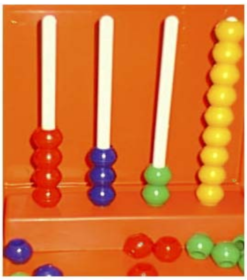


Figura 1: abaco di uso scolastico

Figura 2: macchina ZERO +1[1] chiamata “pascalina”

Quadro teorico

Queste sperimentazioni sono state condotte all’interno del quadro teorico della mediazione semiotica d’origine vygosktiana e sviluppato da Bartolini Bussi e Al. (2005). Nei suoi scritti, Vygotsky (1990) ha mostrato, tra l’altro, la funzione di diversi sistemi semiotici, come i gesti e i disegni. L’elenco dato da

[1] Si ringrazia la ditta Quercetti per averci fornito le macchine.

Vygotsky comprende il linguaggio, i diversi sistemi semiotici per contare, le mnemotecniche, i sistemi simbolici algebrici, gli scritti, i diagrammi, in generale i segni convenzionali. Questi sono tutti degli artefatti prodotti nel corso dello sviluppo storico e culturale della conoscenza. Nello stesso filone di studio, Wartofsky (1979) utilizza il termine « artefact » in un'accezione più larga, che include per esempio strumenti come il compasso, l'abaco, ma anche i testi, le fonti storiche, i discorsi, i gesti e le teorie matematiche. Quando un artefatto è introdotto in una classe con lo scopo preciso di costruire certi significati matematici, si possono identificare due tipi di legami: il primo legame è stabilito tra l'artefatto e il compito dato, mentre il secondo legame è definito tra l'artefatto e una parte del sapere. In questo senso si può parlare di polisemia dell'artefatto. Lo sviluppo parallelo di diversi sistemi semiotici (gesti, disegni, linguaggio orale e scritto) favorisce l'interiorizzazione della polisemia; questo processo è condotto dall'insegnante a partire dalle caratteristiche fisiche dell'artefatto proposto ai bambini. Questi sistemi semiotici permettono agli allievi di costruire il significato degli oggetti matematici in un progetto che inizia con un'attività di esplorazione della macchina e termina con un modello matematico.

Le sperimentazioni nella classe

Gli artefatti scelti per la sperimentazione hanno una forte dimensione storica e culturale perché appartenuti alla storia del calcolo, come l'abaco e la calcolatrice tascabile o perché evocano, come "ZERO +1", la macchina costruita da B. Pascal nel 1645, la quale ha rappresentato una tappa importante nello sviluppo delle macchine automatiche di calcolo. Confrontandola con l'abaco, privo di automatismi meccanici, la pascalina contiene un automatismo fondamentale: il riporto o prestito, inoltre, incorpora la definizione dell'operazione di addizione come operatore « +1 » (Peano, 1957). Le sperimentazioni attuate tutte nella stessa classe, sono iniziate, con l'introduzione dell'abaco, nel mese di gennaio 2005 e sono tuttora in corso. La documentazione del lavoro giunge sino al marzo 2007. L'intero percorso può essere suddiviso in tre grandi tappe:

- *Abaco,* ovvero, la notazione posizionale (classe II)
- *"Pascalina",* ovvero, diversi algoritmi di calcolo (Classe III e classe IV)
- *Calcolatrice tascabile*, ovvero, l'automatismo del calcolo (Classe IV)

L'abaco

L'introduzione dell'abaco a gennaio della classe seconda ha come fine la costruzione del significato della notazione posizionale per la scrittura dei numeri in base dieci. I bambini, al primo contatto con l'artefatto, sembrano ripercorrere gli schemi d'uso emersi nel percorso storico: da strumento per contare a strumento per fare operazioni.

"Serve per contare. Tu conti delle cose e ogni cosa metti una pallina. È un conta punti". (Chiara)

"*Si possono fare delle addizioni. Tre palline da una parte, due dall'altra e poi conti e vedi che sono cinque. Puoi anche fare le sottrazioni. Metti delle palline e poi le togli e vedi quante ne restano. Insomma serve per fare le operazioni".* (Orlando)

L'appropriazione del significato dell'abaco come strumento per rappresentare i numeri in base dieci è colto successivamente, dopo aver sperimentato che i modi trovati per addizionare permettevano poche operazioni e in un campo numerico ristretto.

"È troppo corto il bastone! Tu puoi fare troppe poche operazioni. Ce ne stanno solo nove!" (Giacomo)

"Qua tre bastoni e allora tu metti due palline qua e scrivi due, cambi posto e metti qua e hai venti, cambi posto ancora e hai duecento. Cambia posto, cambia numero. ... Con questo noi possiamo fare novecentonovantanove. Numero più grande". (Wang Ping)

"Vero. Allora l'abaco serve per scrivere i numeri e li puoi scrivere tutti, se aggiungi dei bastoncini. E poi il posto dove metti le palline è importante, perché cambia il numero". (Orlando)

Sono programmate diverse attività di scrittura di numeri con l'abaco e, sempre usando l'artefatto, i bambini si appropriano poco alla volta e con tempi diversi del significato della notazione posizionale in base dieci. È quasi spontaneo da parte degli allievi il passaggio dallo strumento fisico alla rappresentazione solo grafica dell'abaco. Nel momento in cui l'abaco fisico è interiorizzato, completando così il suo percorso come strumento di mediazione semiotica, esso scompare ed è sostituito da un sistema di rappresentazione, che può essere compreso e descritto a prescindere dallo strumento fisico che l'ha generato. L'abaco, artefatto costruito nella storia per contare e calcolare, diviene strumento di mediazione semiotica per la rappresentazione polinomiale dei numeri, mantenendo le tracce del suo percorso storico (contare, calcolare, scrivere i numeri, dare significato allo spazio vuoto – zero).

La "pascalina"

In classe terza, dopo aver visto casualmente la macchina "Zero +1" della ditta Quercetti, si è pensato di introdurla nella classe, in continuità, in quanto macchina per il calcolo, con le attività sull'abaco. La macchina "Zero + 1" evoca la "Pascalina", costruita da B. Pascal nel 1645 e la sua introduzione avrebbe permesso di riscoprire e riutilizzare strumenti del passato per costruire significati matematici. Le "pascaline" sono macchine costituite da ruote dentate il cui moto è determinato dal movimento di una di esse; realizzano operazioni e, in particolare, facilmente addizioni e sottrazioni. Inoltre, l'addizione sulla "pascalina" fa riferimento alla nozione di operatore: a + suc b = suc (a + b). Al momento dell'introduzione della macchina, fine terza, gli allievi avevano abbastanza consolidate l'operazione binaria e le procedure di calcolo in colonna sui numeri naturali e decimali. È sembrato quindi, che il momento fosse particolarmente propizio per proporre un lavoro di riflessione sulle operazioni e sugli algoritmi. Si era inoltre previsto che nella costruzione degli schemi d'uso da parte degli allievi, un eventuale ostacolo fosse dato proprio dalla conoscenza e dall'uso consolidato dell'operazione di addizione binaria. Il percorso, tra la fine terza e i primi tre mesi della quarta, si è svolto in più tappe che riguardavano: l'esplorazione della macchina, l'eseguire operazioni con l'artefatto, il confronto tra l'algoritmo dell'addizione con la "pascalina" e l'algoritmo dell'addizione in colonna, la scrittura delle istruzioni d'uso della "pascalina" per le operazioni di addizione e di sottrazione, il confronto di testi quali le istruzioni Quercetti per addizione e sottrazione e pagine scelte di Pascal e, come ultima tappa, la scrittura con i segni della matematica di due diversi modi per addizionare con la "pascalina". La documentazione di questo lavoro, come anche quella degli altri, si fonda sui dati raccolti: protocolli degli allievi, sbobinature di discussioni, registrazioni video delle attività proposte, fotografie e annotazioni dell'insegnante. L'analisi di tutte le tappe richiederebbe uno spazio non compatibile con quest'articolo, pertanto si considerano solamente elementi di alcune tappe, per mostrare il percorso realizzato dagli allievi.

Nella prima tappa, dopo l'esplorazione della macchina, gli allievi relazionano sulle loro scoperte. Alcuni di loro mettono in evidenza le difficoltà incontrate:

"*Allora, a noi c'è stata molta difficoltà perché all'inizio non capivamo come si riuscisse a fare questo lavoro". (Giacomo) "Noi all'inizio avevamo avuto un po' di difficoltà e non riuscivamo a capire come si facevano le addizioni, perché, anche se noi le sapevamo, non riuscivamo comunque a farle con la macchina". (Tommaso)* Il primo intervento evidenzia una difficoltà legata o all'interpretazione della consegna o alla costruzione degli schemi d'uso, mentre il secondo, pur evidenziando anch'esso una difficoltà legata agli schemi d'uso *"non riuscivamo a capire come si facevano le addizioni"*, mostra come la difficoltà dipenda anche dalla conoscenza mobilizzata sull'addizione *"anche se noi le sapevamo"*. In altri termini Tommaso evidenzia come la conoscenza dell'addizione, in termini di operazione binaria, crei un ostacolo all'esecuzione dell'addizione con la pascalina, che si basa sull'operatore +1. Lo stesso ostacolo si può ben vedere nel resoconto dei due soli allievi che non sono stati in grado di eseguire alcun'addizione con la pascalina:

"Noi non riuscivamo a trovare come si fa a fare le addizioni con la pascalina… Mettevamo il 9 e poi il 3, ma non riuscivamo a trovare il risultato, non ci veniva il 12". (Vanessa e Joseph) I bambini sono stati generalmente in grado di eseguire addizioni, di fare considerazioni interessanti sulle modalità di esecuzione e sui limiti della macchina:

"Ogni volta che fai un'operazione e arrivi a zero la decina cambia, poi, se la decina arriva a zero (Indica la ruota centrale), la centinaia cambia ... il centinaio cambia. Sempre così ... Solo che non può andare più di 999". (Christian) "La sottrazione e la divisione vanno in senso antiorario e, invece, le moltiplicazioni e le addizioni vanno in senso orario. In senso orario verso sinistra così ... (Fa vedere) In senso antiorario verso destra, così (esegue) ". (Orlando)

Le lezioni successive hanno permesso la costruzione di schemi d'utilizzo da parte di tutti i bimbi. Nella tappa riguardante la redazione d'istruzioni d'uso i bambini hanno mostrato di possedere con sicurezza le procedure d'esecuzione di addizione e di sottrazione. Contemporaneamente si è preso in carico la costruzione dei significati matematici e il superamento dell'ostacolo dato dalla conoscenza pregressa. La consegna data nell'ultima tappa (fig. 3) aveva proprio il fine di far esplicitare ai ragazzi le conoscenze matematiche inerenti alle diverse procedure per addizionare.

Durante una delle tante discussioni matematiche sulle pascaline, vi ho chiesto di eseguire l'addizione **28 + 14** e di descrivermi il procedimento seguito operando con la macchina.
Ecco le affermazioni di due bambini.

- **Christian: -** Ho scritto il primo addendo, 28, poi ho aggiunto il secondo, ruotando in senso orario la rotella delle unità quattro volte e la rotella delle decine una sola volta. Il risultato è 42.
- **Orlando: -** Ho scritto il numero 28, poi ho girato in senso orario 14 volte la ruota in basso a destra, quella delle unità. Il risultato è 42.

Prova a scrivere le espressioni matematiche che rappresentano i due diversi procedimenti.

Figura 3: consegna dell'insegnante

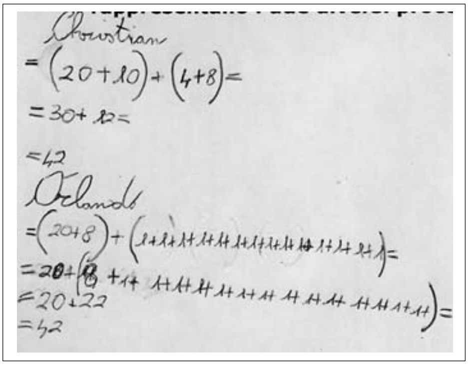


Figura 4: protocollo di Ning

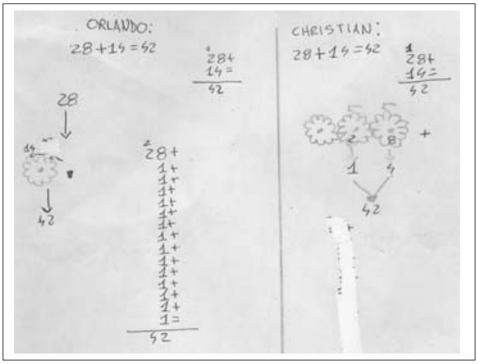


Figura 5: protocollo di Vanessa

Nei protocolli si vede come gli allievi siano riusciti con diverse modalità a formalizzare gli aspetti matematici dei due tipi di operazione. (fig. 4) Documenta bene il percorso realizzato dagli allievi il protocollo di Vanessa (fig. 5), che all'inizio della sperimentazione aveva mostrato difficoltà nel superamento dell'ostacolo tra operazione binaria ed addizione con l'operatore +1. Nel suo testo i segni matematici sono accompagnati da disegni di ruote con funzioni esplicative. Una sola ruota per far vedere come l'operatore +1 agisca solo sulla ruota delle unità, e tutte tre per mostrare come esse siano necessarie quando si applica lo stesso operatore sul numero scomposto in decine e unità. L'insolita addizione in colonna è scritta per rafforzare l'uso dell'operatore +1.

La calcolatrice tascabile

In classe quarta, durante il confronto tra algoritmo dell'addizione in colonna e quello dell'addizione con la "pascalina" un'allieva introduce una nuova variabile alla discussione: la calcolatrice tascabile.

"Con la calcolatrice è molto più semplice che con la pascalina" (Laura)

La provocazione è subito raccolta da altri bambini che confrontano i vari artefatti, riprendendo anche l'abaco, e riproducendo così a grandi linee la storia degli strumenti di calcolo.

"Il primo strumento è stato l'abaco, che è il più antico, poi la Pascalina e adesso c'è la calcolatrice". (Michael)

Con l'abaco dovevi saper fare i calcoli bene e dovevi saper fare tutto, poi con la pascalina tu dovevi sapere che operazione fare, muovevi le ruote, ma la macchina faceva da sola il cambio da unità a decine o da decine a centinaia. Con la calcolatrice tu digiti solo i numeri e i segni e ti viene il risultato, ma non sai cosa fa la macchina e non capisci niente dei cambi.(Federico)

Si decide di preparare un'unità di lavoro specifica sulla calcolatrice (d'ora in poi CT) per permettere agli allievi di conoscerne il funzionamento ed anche per riflettere su significativi contenuti matematici. I ragazzi, muniti tutti di CT varie e con diverse funzioni, sono invitati a descrivere la loro CT e a disegnarla. La duplice consegna ha il compito di condurre il bambino ad usare il linguaggio verbale in un contesto con vincoli, dati dalla realtà fisica dell'oggetto tecnologico dal suo funzionamento e quindi dai suoi possibili usi, mentre la richiesta di disegnare la propria CT richiede abilità d'organizzazione spaziale. L'attenzione alla propria CT costruisce una base di conoscenze individuali che permetterà in seguito di discutere collettivamente sulle somiglianze e differenze tra le varie calcolatrici presenti in classe, somiglianze e differenze che riguardano sia il loro aspetto esteriore sia il funzionamento interno. Nelle tappe successive si passa alla scrittura di numeri naturali e decimali, introducendo uno schema (fig. 6) per la rappresentazione dell'interazione bambino – calcolatrice.

BATTO	**VEDO**	**COSA SIGNIFICA**
ON	compare 0.	la C.T. è accesa
9	compare 9.	il "9" diventa numero: 9 unità
3	compare 93.	il numero diventa: 9 decine e 3 unità
7	compare 937.	il numero diventa: 9 centinaia, 3 decine e 7 unità

Figura 6 (Schema da Unità F Progetto SET)

Per la scrittura di numeri decimali l'attenzione è posta principalmente sulla funzione dello "0" e del tasto  ed i ragazzi sono invitati a riflettere sulle differenze che s'incontrano a scrivere i numeri a mano e quando si usa la CT.

"Il primo zero che si vede non è il numero zero, ma vuole solo dire che la calcolatrice è accesa. Se vuoi il numero zero devi digitarlo e dopo metterci la virgola. Se non la metti, il numero zero scompare". (Laura)

"La calcolatrice fa prendere il posto lei ai numeri, spostandoli mentre li digiti. Quando li scrivi tu, sai già cosa scrivere e se, per esempio, devi scrivere 800, parti dall'otto, che sono le centinaia, e poi ci aggiungi i due zeri". (Lorenzo)

L'esecuzione di singole operazioni aritmetiche porta i ragazzi a riflettere sul segno "=" che nella calcolatrice perde il suo significato di uguaglianza aritmetica per assumere quello di comando per l'esecuzione del calcolo impostato. Con queste attività, inoltre, è messa in atto una forte produzione di ipotesi previsionali ed interpretative, poiché ogni qualvolta si chiede ai ragazzi *"Cosa succede se…"*, oppure *"Perché è scomparso lo zero?"* essi sono forzati ad anticipare o ad interpretare l'azione della CT, riflettendo sul significato di ciò che vanno facendo.

Conclusioni

Nel corso degli anni tutte le attività con questi strumenti di calcolo hanno evidenziato la messa in atto dei due processi che sottendevano alle tre diverse sperimentazioni. Il primo processo riguarda la costruzione degli schemi d'uso dell'artefatto introdotto nella classe. La realizzazione di questo è stata diversa nei modi e nei tempi in quanto legata alla specificità dell'artefatto ed anche al livello degli allievi. Si può affermare, comunque, che la gran parte degli allievi ha costruito dei buoni schemi d'uso. Il secondo processo riguarda il passaggio dallo strumento mediatore alla matematica e lo possiamo vedere composto di due momenti. Il primo momento ha coinciso con la costruzione di artefatti secondari, come le istruzioni d'uso per la "pascalina" o lo schema per visualizzare le azioni della CT. Il secondo momento ha riguardato la formalizzazione matematica come la scrittura posizionale in base dieci con l'abaco, o la scrittura dei due tipi d'operazione con la pascalina. L'analisi dei diversi protocolli ha messo in evidenza l'interiorizzazione, sotto la guida dell'insegnante, della polisemia degli artefatti nella maggioranza degli allievi.

Bibliografia

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A. & Ferri F. (2005), Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass. In Hoffmann H., Lenhard J. & Seeger F. (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers: 77-90.

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F. (1995)*, Interazione sociale e conoscenza a scuola,* rapporto tecnico n. 10, Centro di Documentazione Educativa, Modena.

Ferri F. (2002)*, L'abaco e lo zero*, in Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo, 103 – 113, Pitagora Editrice, Bologna.

Maschietto M. (2006), Le attività del Laboratorio delle Macchine Matematiche. *Treccaniscuola*. marzo 2006

"Matematica 2001", Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica

Peano G. (1957-1959), *Opere scelte*, a cura di Ugo Cassina*,* Roma: Cremonese.

Progetto SET, Unità F da I LINGUAGGI della matematica e delle scienze e la RAZIONALIZZAZIONE di fenomeni ed esperienze comuni

Vygotsky L.S. (1990-1934), *Pensiero e linguaggio: ricerche psicologiche* (ed. L. Mecacci), Bari, Laterza.

Wartofsky M. (1979), Perception, Representation, and the Forms of Action: Towards a Historical Epistemology. In: *Models. Representation and the Scientific Understanding.* D. Reidel Publishing Company: 188-209.

Funzionalità Didattiche: uno strumento operativo per progettare ed analizzare esperienze di laboratorio

Michele Cerulli, Bettina Pedemonte, Elisabetta Robotti - Istituto Tecnologie Didattiche – C.N.R. di Genova

Introduzione

L'utilizzo del computer, e della tecnologia in generale, nella didattica della matematica, ha subito un'evoluzione che è partita da approcci basati su modelli pedagogici puramente trasmissivi, per poi concentrarsi sull'utente secondo approcci "learner centered", ed infine giungere ad impostazioni che pongono particolare attenzione agli aspetti di interazione sociale (Bottino, 2001).

Nel corso di questa evoluzione sono nati nuovi punti di vista, e sono proliferate le interazioni con teorie di vario genere (per esempio le teorie didattiche), che hanno contribuito notevolmente allo sviluppo del settore. Sono comparse numerose intuizioni vincenti, come ad esempio il concetto di micromondo, l'idea di usare linguaggi di programmazione per introdurre il formalismo matematico, l'invenzione dei software di geometria dinamica, ecc..

Questo panorama molto variegato, presenta però approcci didattici che spesso fanno riferimento a condizioni molto specifiche. Ciò può risultare disorientante agli occhi dell'insegnante che voglia utilizzare degli strumenti tecnologici per raggiungere un obiettivo didattico specifico proprio.

Come farà questo insegnante a decidere che tipo di tecnologia utilizzare e come utilizzarla? Come potrà confrontare le diverse proposte sia tecnologiche che didattiche e decidere quale possa essere più adatta, o adattabile, alla sua situazione specifica? Il problema non è triviale in quanto le presentazioni dei software, sia in articoli di ricerca che tramite divulgazione pubblicitaria, non usano linguaggi omogenei, e mettono in luce solo alcuni aspetti delle proposte che presentano, lasciando spesso implicite certe informazioni che potrebbero invece risultare fondamentali per l'insegnante che voglia mettere in pratica una proposta con quel software adattandola alla propria situazione specifica.

In questo articolo presentiamo un approccio al problema basato sul costrutto di *Funzionalità Didattica* (Cerulli et al., 2005) di un software, che permette di definire una chiave di lettura comune al fine di confrontare diversi approcci didattici basati sulla tecnologia.

Funzionalità didattica di un artefatto

In questo articolo ampliamo parzialmente l'originale definizione di Funzionalità Didattica riferendola ad un generico artefatto[1] e non esclusivamente ad un *ICT tool*. La definizione originaria prendeva in esame esclusivamente *ICT tool* perché i diversi approcci didattici che si dovevano confrontare si basavano tutti su strumenti tecnologici. Riteniamo tuttavia, che questa definizione possa essere efficace anche per artefatti di natura diversa. Così, diciamo che, dati un artefatto ed un obiettivo didattico da perseguire, è possibile identificare le sue *funzionalità didattiche*:

Con funzionalità didattiche dell'artefatto intendiamo quelle proprietà (o caratteristiche) dell'artefatto insieme alle sue modalità di impiego che possano favorire o arricchire processi di insegnamento/apprendimento in relazione all'obiettivo didattico considerato.

In altre parole una funzionalità didattica di un artefatto è individuata da una terna di elementi chiave:

1. Un insieme di *caratteristiche dell'artefatto* stesso;
2. Un *obiettivo didattico* specifico;
3. Una *modalità d'impiego* dell'artefatto in processi di insegnamento/apprendimento riferiti all'obiettivo didattico.

L'idea chiave di questo approccio è che per poter identificare l'efficacia e le potenzialità didattiche di un artefatto non si possa considerare singolarmente l'artefatto, o l'obiettivo didattico, o il modo in cui l'artefatto entra nelle attività, piuttosto è necessario prendere in esame l'insieme dei tre elementi nello stesso momento. Secondo questa prospettiva non si potrà ad esempio affermare in generale "Il tale artefatto è buono" o "Il tale artefatto è cattivo" piuttosto si potranno fare affermazioni del tipo "Il

[1] Con la parola artefatto intendiamo riferirci ad un oggetto costruito ad arte dall'uomo.

tale artefatto, usato mediante questa modalità di impiego può aiutare a raggiungere il tale obiettivo didattico, ma non il tale altro", oppure "Se si cambia la modalità di impiego l'artefatto considerato avrà minori possibilità di risultare utile per raggiungere il tale obiettivo didattico".

Di fronte alla descrizione di un'esperienza di laboratorio ci si può dunque porre la seguente domanda: "In questa esperienza, quali funzionalità didattiche dell'artefatto sono state utilizzate?". Ciò corrisponde a chiedersi quale sia l'obiettivo didattico perseguito, quali caratteristiche dell'artefatto entrino realmente in gioco in maniera determinante, e come l'artefatto sia impiegato dall'insegnante per raggiungere l'obiettivo didattico. La risposta a queste domande, dovrebbe consentire di avere una buona base per valutare se l'esperienza in questione è in qualche modo "replicabile" nel nostro contesto e quali siano le condizioni che la possano rendere adattabile efficacemente. La nostra idea è che, a prescindere dalla finezza della descrizione dei dati forniti per descrivere un'esperienza didattica che usi un artefatto, potrebbe risultare utile cercare di filtrare tali dati, per individuare solo quelli pertinenti alla "replica" della sperimentazione. La nostra proposta è quella di individuare le funzionalità didattiche dell'artefatto che entrano in gioco nell'esperienza considerata. Questa individuazione potrebbe inoltre essere utile per analizzare come e se sia possibile esportare una funzionalità didattica da un contesto ad un altro, in maniera da valutarne l'adattabilità a situazioni specifiche, o in maniera da trovare nuove soluzioni a problemi didattici specifici adattando le soluzioni elaborate altrove.

Confrontare ed esportare artefatti ed approcci didattici

La prospettiva che presentiamo è basata sull'esperienza di TELMA (Technology Enhanced Learning in MAthematics[2]), un progetto europeo che raccoglie alcuni gruppi di ricerca specializzati nel settore dell'uso della tecnologia in didattica della matematica, ma appartenenti a paesi diversi. Uno degli obiettivi di TELMA è l'integrazione tra gruppi di ricerca, al fine di sviluppare un approccio comune al tema dell'uso della tecnologia in didattica della matematica. Questo obiettivo ha subito rivelato, come problema fondamentale, la definizione dei modi con cui poter confrontare i diversi approcci, al fine di distinguerli, delinearne analogie e differenze e definire infine un livello di integrazione. La soluzione al problema elaborata dal gruppo di TELMA si è basata sull'idea di definire delle chiavi di lettura comuni su cui focalizzare il confronto. Tali chiavi di lettura sono state incorporate nella definizione di *funzionalità didattica* di un artefatto che abbiamo descritto nel paragrafo precedente. Tale costrutto è stato utilizzato in TELMA non solo per confrontare ed analizzare le esperienze pregresse dei gruppi di ricerca, ma anche per definire ed analizzare una sperimentazione incrociata in cui i diversi gruppi di ricerca hanno sperimentato nel proprio contesto scolastico/sperimentale i software sviluppati dagli altri gruppi di ricerca, adattandoli quindi ad un nuovo contesto (Artigue M., & al., 2007).

Qualche esempio esplicativo

In questo paragrafo descriveremo in modo operativo l'idea di *Funzionalità didattica* proponendo alcuni esempi che illustrano attività di classe progettate da un insegnante con il supporto di un artefatto tecnologico per perseguire un certo obiettivo didattico.

Supponiamo per esempio che un insegnante voglia progettare una situazione didattica che preveda l'uso di un manipolatore simbolico nella quale venga richiesto agli studenti di manipolare una espressione simbolica, cioè di trasformare una espressione algebrica in un'altra producendo una catena di trasformazioni. Supponiamo inoltre che l'obiettivo didattico sia quello di far apprendere il ruolo delle parentesi nelle espressioni algebriche e supponiamo che l'insegnante consideri i diversi tipi di feedback che il manipolatore simbolico può fornire quando lo studente cerca di rimuovere parentesi in una espressione algebrica. Per individuare le funzionalità didattiche del manipolatore simbolico preso in esame rispetto all'obiettivo didattico descritto sopra, deve essere definita la modalità d'impiego del manipolatore. Ciò consiste nel definire una situazione didattica che sfrutti i tipi di feedback forniti dal manipolatore. Possiamo supporre che il manipolatore fornisca feedback molto triviali o di tipo più complesso, per esempio, feedback che semplicemente informino l'utente di una rimozione scorretta di una coppia di parentesi, oppure feedback che forniscano anche una spiegazione sul perché questa

[2] TELMA è un progetto supportato dalla rete di eccellenza di Kaleidoscope (IST-507838).

rimozione sia corretta o scorretta. Potrebbero inoltre essere forniti feedback che consentano la rimozione errata di una coppia di parentesi segnalando semplicemente l'errore con un messaggio, oppure feedback che non segnalino affatto l'errore. Comunque vengano considerati tali feedback, osserviamo che le modalità con cui l'insegnante sfrutta, nella progettazione della sua esperienza, le caratteristiche del software dipendano fortemente dalle assunzioni generali o teoriche che l'insegnante si pone per progettare la sua esperienza.

Così, se l'insegnante sviluppa la sua esperienza sulla base di assunzioni teoriche che presuppongono, per esempio, la Teoria delle Situazioni Didattiche di Brousseau (1986), il feedback fornito dal sistema dovrebbe essere una retroazione del sistema ad un'azione eseguita dall'utente sul sistema stesso. L'adattamento messo in atto dallo studente nel corso dell'esperienza consente così l'apprendimento. Per esempio, possiamo pensare che l'insegnante definisca un'attività sfruttando il feedback che consente di rimuovere in modo scorretto una coppia di parentesi senza fornire alcun tipo di messaggio, al fine di costruire una situazione paradossale nella quale dare evidenza dell'errore della rimozione di parentesi sotto certe condizioni.

Se invece l'insegnante sviluppa l'esperienza sulla base di assunzioni teoriche che riguardano, per esempio, l'Activity Theory (Cole and Engeström, 1991), il sistema non è più considerato un sistema antagonista al soggetto che lo usa, ma viene considerato come ambiente di cooperazione. Quando uno studente usa il manipolatore per raggiungere un certo obiettivo prefissato per l'attività, i suoi elaborati sono considerati strutturati dalla natura dell'attività stessa e dal ruolo giocato in essa da tutti i suoi componenti (compresi, dunque, le modalità con cui l'insegnante ha deciso di sfruttare i feedback del sistema). Le modalità d'impiego dei feedback forniti dal sistema vengono sfruttati dall'insegnante per definite attività di collaborazione di tutti i partecipanti. Per esempio, l'insegnante potrebbe pensare di sfruttare il feedback che segnala l'errore nella rimozione scorretta di parentesi (quale si ha su Aplusix a seguito di una rimozione scorretta di parentesi in una trasformazione) per avviare una discussione di classe dalla quale far emergere la ragione dell'errore.

Dagli esempi riportati in questo paragrafo emerge il ruolo essenziale che nel costrutto di funzionalità didattica assume l'idea di modalità d'impiego dell'artefatto. Nel paragrafo seguente cercheremo di chiarirne il ruolo e la portata.

Aspetti importanti delle modalità di impiego per definire una funzionalità didattica

L'elemento certamente più interessante e complicato della terna del costrutto di *funzionalità didattica* è la *modalità di impiego* dell'artefatto per ottenere l'obiettivo didattico. Al fine di rendere più operativo il costrutto, possiamo precisare ulteriormente cosa intendiamo per *modalità di impiego* di un artefatto:

Dato una esperienza dove determinate caratteristiche di artefatto sono utilizzate per raggiungere un obiettivo didattico, diciamo che le modalità d'impiego dell'artefatto (per ottenere l'obiettivo dato), sono quelle caratteristiche, o elementi peculiari dell'esperienza che, secondo le ipotesi teoriche o assunzioni su cui si basa l'esperienza, sono da considerare condizioni necessarie per il raggiungimento dell'obiettivo didattico.

In breve, nel descrivere le modalità di impiego di un artefatto non ci interessa dare esaustivamente tutti i dettagli che descrivono il contesto, ma solo quelli senza i quali riteniamo che l'obiettivo didattico non possa essere raggiunto[3] tramite la funzionalità didattica presa in considerazione.

Per illustrare come alcune delle diverse condizioni che definiscono l'esperienza possano essere considerate strettamente necessarie per il raggiungimento dell'obiettivo didattico prefissato, possiamo considerare diverse variabili, ne esemplifichiamo alcune qua sotto.

Interazione fra gli attori

Una situazione in cui gli studenti usano lo strumento da soli a casa per svolgere il compito assegnato è certamente molto diversa da una situazione in cui il compito viene svolto in classe collettivamente e sotto l'orchestrazione dell'insegnante. Per cui si può distinguere tra situazioni con: uno stu-

[3] Osserviamo che non intendiamo che esso non possa essere raggiunto in generale, magari lo si raggiunge, ma tramite un'altra funzionalità didattica dell'artefatto.

dente solo, molti studenti, uno studente ed un insegnante, molti studenti ed un insegnante, più studenti e più insegnanti in copresenza, studenti con insegnanti e ricercatori. Ad esempio, per l'insegnante che fa riferimento alla teoria delle situazioni didattiche può essere molto importante la fase adidattica in cui lo studente lavora individualmente con l'artefatto senza l'intervento dell'insegnante (che magari interviene successivamente). Per contro, una funzionalità didattica basata sulla teoria vigotskiana (Vygotskij, 1978) potrà ritenere fondamentale la continua interazione tra gli alunni e tra gli alunni e l'insegnante in ogni fase dell'attività. Senza voler esprimere giudizi in merito, pensiamo sia importante che se un insegnante vuole "replicare" un'esperienza del primo tipo, dovrà necessariamente prevedere momenti in cui l'alunno interagisce da solo con l'artefatto; per contro se vorrà "replicare" un'esperienza del secondo tipo, dovrà necessariamente prevedere un'interazione tra tutti gli attori in ogni fase dell'attività. In entrambe i casi il mancato rispetto di tali vincoli potrebbe portare al fallimento dell'esperienza.

Dove viene utilizzato l'artefatto?

Uno dei fattori che permettono di sfruttare efficacemente un artefatto è l'ambiente dove questo viene inserito. Esso può risultare molto complicato da descrivere ma è sempre possibile pensare ad alcune caratteristiche di cui tenere conto in modo particolare. Ad esempio, riteniamo che sia diverso se l'artefatto viene utilizzato in classe, a casa, on-line, off-line, in laboratorio, etc. Almeno per quanto riguarda le implicazioni pratiche sull'applicabilità o esportabilità di una funzionalità didattica è importante sapere se si ritiene fondamentale che l'attività con l'artefatto si svolga in un certo luogo oppure un altro.

Chi usa l'artefatto?

Ci possono essere situazioni in cui gli studenti stessi usano direttamente l'artefatto considerato, e situazioni in cui l'unico ad usarlo veramente è l'insegnante, magari per mostrare agli alunni qualcosa. Ad esempio, considerando il software di geometria dinamica Cabri, potremmo sia chiedere agli alunni di realizzare delle costruzioni geometriche, che realizzare noi stessi delle costruzioni e poi illustrarle agli alunni oppure fargliele esplorare. In quest'ultimo caso l'insegnante userebbe il software per realizzare la costruzione, e gli alunni per esplorarlo. Entrambe le situazioni possono essere fruttuose, ma sono profondamente differenti, quindi potremmo pensare ad alcune opzioni come: ogni alunno usa l'artefatto; gruppi di alunni usano l'artefatto; la classe come gruppo usa l'artefatto; l'insegnante utilizza l'artefatto e mostra il risultato agli alunni; gli alunni usano l'artefatto per svolgere un compito e contemporaneamente l'insegnante lo utilizza per svolgere un altro compito. Tutte queste possono essere caratteristiche determinanti per il successo di una esperienza specifica.

Impiego diretto o indiretto dell'artefatto

Un artefatto può essere impiegato direttamente in classe, oppure si può fare riferimento ad esperienze passate di uso dell'artefatto senza che questo sia effettivamente a disposizione o presente al momento. Nel secondo caso, ad esempio, un insegnante potrebbe parlare durante la lezione di classe di un software precedentemente usato in laboratorio, o utilizzare segni che si riferiscono ad esso, al fine di sfruttare le conoscenze degli alunni riguardanti l'artefatto come mezzi per sviluppare qualche significato disciplinare che sia collegato all'uso dell'artefatto. Questa tecnica è particolarmente popolare nelle ricerche di stampo vigotskiano. La stessa tecnica può essere utilizzata per stimolare la riflessione su un artefatto (magari precedentemente usato dagli alunni) allo scopo di svincolare le conoscenze degli alunni dal contesto specifico dell'uso dell'artefatto. Anche in questo caso, alcuni quadri vigotskiani ritengono fondamentale inserire delle fasi in cui l'artefatto è appositamente sostituito da segni che lo rappresentano. In altri casi, potrebbe essere richiesto l'uso diretto dell'artefatto da parte degli alunni, almeno in alcuni momenti dell'esperienza, per raggiungere un certo obiettivo didattico (per esempio, al fine di definire la differenza fra figura geometrica e disegno mediante Cabri-géomètre, potrebbe essere indispensabile, sotto certe condizioni, l'esperienza diretta degli alunni di costruzione geometrica di una figura con Cabri-géomètre).

Sulla base di queste considerazioni riteniamo che possa essere importante specificare se e quando è richiesto un utilizzo diretto o indiretto dell'artefatto.

Uno strumento operativo

Per concludere, proponiamo agli insegnanti uno strumento operativo per identificare funzionalità didattiche di un artefatto e, in particolare, le modalità d'impiego dell'artefatto. Si tratta di una serie di domande derivate da quelle efficacemente utilizzate nella sperimentazione incrociata del progetto TELMA. Esse hanno consentito ai ricercatori del progetto di operare poi un confronto fra i risultati delle sperimentazioni eseguite nell'ambito del progetto stesso. Le domande della serie (Tabella 1) vengono suddivise in categorie relative: alle ipotesi che supportano la sperimentazione, agli obiettivi didattici della sperimentazione, all'artefatto e alle caratteristiche che si intendono sfruttare nell'ambito della sperimentazione, al contesto nel quale tale sperimentazione viene collocata.

Tabella 1: Strumento operativo per identificare funzionalità didattiche
di un artefatto in un contesto di esperienza

Ipotesi:

Quale è il quadro teorico di riferimento dell'esperienza, oppure quali sono le principali assunzioni/ipotesi su cui esso si basa?

Obiettivi

Quali sono gli obiettivi didattici specifici dell'esperienza?

Artefatto

Quali caratteristiche dell'artefatto usate per l'esperienza risultano particolarmente efficaci (o non efficaci) rispetto all'obiettivo didattico prescelto?

Modalità d'impiego

Descrivere brevemente l'esperienza, indicando le principali tipologie di attività e le principali strategie Didattiche o caratteristiche dell'esperienza impiegate per raggiungere l'obiettivo didattico prefissato.

- Quali tipologie di attività risultano particolarmente efficaci (o non efficaci) rispetto all'obiettivo didattico prescelto?

- Quali elementi del contesto risultano particolarmente efficaci (o non efficaci) rispetto all'obiettivo didattico prescelto?

- Quali scelte/strategie didattiche risultano particolarmente efficaci (o non efficaci) rispetto all'obiettivo didattico prescelto?

Le domande sopra riportate dovrebbero essere di supporto per definire la modalità d'impiego dell'artefatto scelto:

Se dovessi progettare un'esperienza analoga, mantenendo lo stesso obiettivo didattico e le stesse caratteristiche dell'artefatto, quali elementi caratteristici dell'esperienza manterresti invariati? Quali di questi elementi caratteristici ritieni che, secondo le tue assunzioni/ipotesi o quadro teorico, siano condizioni necessarie affinché l'esperienza abbia successo?

Precisiamo che le domande sopra riportate hanno il solo scopo di fornire all'insegnate uno strumento operativo di spunto per identificare le funzionalità didattiche nell'ambito dell'esperienza che si accinge a riprodurre o a progettare.

Negli articoli seguenti illustreremo esperienze di classe che forniscono esempi operativi di relativi alle funzionalità didattiche. In particolare, mostreremo come date certe caratteristiche di un artefatto tecnologico ed un determinato obiettivo didattico, alcune esperienze si sono differenziate per le diverse modalità di impiego di esso. Il confronto fra queste esperienze consentirà di mettere in evidenza diverse funzionalità didattiche di uno stesso software (cfr. Pedemeonte, Robotti).

Verranno in seguito presentati due articoli in cui due diverse esperienze vengono descritte e quindi analizzate tramite lo strumento operativo fornito precedentemente (Tabella 1). In questo modo si individueranno le caratteristiche fondamentali delle due esperienze che potranno eventualmente renderle replicabili. In un caso si tratterà di un'esperimento svoltosi nell'ambito di un progetto di ricerca (cfr.

Cerulli [2]), nell'altro caso si tratterà di un'esperienza svolta ed analizzata da insegnanti in formazione (cfr. Bartolini, Cerulli).

In ultimo, verrà presentata un'esperienza nella quale, considerato come obiettivo didattico l'introduzione al pensiero teorico matematico (in particolare quello algebrico) e considerata una certa modalità d'impiego del software L'Algebrista, verranno messe in evidenza le caratteristiche peculiari del software che consentono di raggiungere l'obiettivo prescelto (cfr. Cerulli [1]). Si identificheranno inoltre quelle caratteristiche che, più in generale, un software dovrebbe possedere al fine di raggiungere quell'obiettivo didattico sulla base delle modalità d'impiego descritte. Saranno quindi oggetto di indagine gli artefatti e le loro caratteristiche rispetto ad un obiettivo didattico trasversale al contesto matematico.

Bibliografia

Artigue M., Bottino R., Cerulli M., Georget J.P., Maffei L., Maracci M., Mariotti, M. A., Pedemonte B. Robotti E., Trgalova J. (2007), Technology Enhanced Learning in Mathematics: the cross-experimentation approach adopted by the TELMA European Research Team. *La matematica e la sua didattica* Anno 21, n. 1 (2007), Numero speciale/Special Issue, Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF "Mathematics and its applications" Panel on Didactics of Mathematics ISSN 1120-9968, pp. 67-74

Bartolini G., Cerulli M.: "*Introduzione alla statistica con il fantacalcio*" in questo fascicolo.

Bottino R.M. (2001), *Advanced Learning Environments: Changed Vies and Future Perspectives*. In "Computers and Education Towards an Interconnected Society", pp. 11-26. Edited by M. Ortega, J. Bravo. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques *Recherche en Didactiques des Mathématiques,* Vol. 7, 2, pp. 33-115 Ed. La Pensée Sauvage

Cerulli M. [1]: "*Una funzionalità didattica per introdurre all'idea di teoria*".

Cerulli M. [2]: "*Un gioco per introdurre il concetto di equivalenza tra spazi di campionamento*".

Cerulli M., Pedemonte B., Robotti E. (2005): "An integrated perspective to approach technology in mathematics education". *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4 (2005)*. Ed. Bosh, M.. IQS, Fundemi Business Institute. ISBN: 84-611-3282-3. (http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/11/Cerulli%20Pedem.pdf).

Cole and Engeström (1991), A cultural-hystorical approach to distributed cognition. In G. Salomon (ed.), *Distributed Cognition,* pp. 1-47, Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Pedemeonte B., Robotti E.: "*Diverse modalità di impiego del micromondo Frazioni di ARI-LAB 2*".

Vygotskij L.S. (1978), *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Il Laboratorio Didattico di Matematica: riferimenti concreti per la sua costruzione mediante l'uso di ARI-LAB 2

Giampaolo Chiappini, Bettina Pedemonte, Elisabetta Robotti

Introduzione

In questo lavoro useremo la nozione di Laboratorio Didattico di Matematica presentata e discussa in questo volume (cfr. Chiappini) per evidenziare come la tecnologia possa concretamene contribuire alla costruzione di un laboratorio didattico in campo aritmetico. A tale fine basandoci sul sistema ARI-LAB 2 mostreremo attraverso alcuni esempi come le funzionalità operative e rappresentative di questo sistema consentano di strutturare uno spazio fenomenologico nel quale aspetti importanti della conoscenza aritmetica da insegnare possono essere riconfigurati in oggetto di investigazione per gli alunni.

La tecnologia di riferimento per la costruzione del laboratorio didattico: il sistema ARI-LAB 2

ARI-LAB 2 (Chiappini, Bottino, 2005; Chiappini, 2005; Bottino, Chiappini, 2002) è un sistema per l'insegnamento e l'apprendimento in campo aritmetico che permette l'uso integrato di differenti tipi di ambienti per supportare la visualizzazione, la rielaborazione e la comunicazione di conoscenza aritmetica in un quadro pedagogico di tipo socio-costruttivista. Il sistema è progettato per essere usato stand alone su PC o in un laboratorio attrezzato di PC collegati in rete locale.

ARI-LAB 2 mette a disposizione degli studenti 10 Micromondi[1] , per elaborare la soluzione del problema assegnato loro dall'insegnante, e un sistema di Comunicazione che consente pratiche di tipo collaborativo. Osserviamo che i Micromondi di ARI-LAB 2 modellano risorse e vincoli di specifici campi di conoscenza matematici o extramatematici attraverso specifici oggetti computazionali resi disponibili con l'interfaccia. Gli studenti possono interagire con tali oggetti per affrontare e risolvere compiti aritmetici. L'interazione è governata da un ordine operativo e rappresentativo che è mediata dal programma del micromondo attraverso la sua interfaccia. Ad ogni azione operativa dello studente, il sistema risponde con un qualche feedback rappresentativo. Tali feedback sono espressione di un qualche fenomeno aritmetico collegato all'azione compiuta dallo studente con gli oggetti computazionali, feedback che l'alunno può interpretare facendo riferimento alla propria esperienza culturale, percettiva e motoria.

Come vedremo alcuni dei micromondi di ARI-LAB 2 sono stati progettati per modellare risorse e vincoli di un campo di conoscenza a carattere strettamente matematico, (per esempio il Micromondo di Manipolazione Aritmetica) altri, invece, sono stati progettati per modellare risorse e vincoli che caratterizzano un campo di conoscenza extramatematico (per esempio, il Micromondo Euro che modella risorse e vincoli del campo di conoscenza della compravendita).

In questo lavoro è nostra intenzione mostrare attraverso alcuni esempi come le risorse e i vincoli di alcuni micromondi di ARI-LAB 2 possano essere sfruttati per lo sviluppo di una pratica didattica di laboratorio di matematica. A tale fine prenderemo in esame le seguenti conoscenze da insegnare:

- Contare con le monete e comprendere l'equivalenza monetaria
- Scrivere i numeri in forma posizionale
- Manipolare simbolicamente espressioni numeriche

Mostreremo inoltre come alcuni micromondi di ARI-LAB 2 consentano di strutturare un nuovo ordine rappresentativo, operativo e sociale volto a creare nuovi spazi fenomenologici per tali conoscenze con lo scopo di riconfigurarle in oggetti di investigazione per gli studenti.

Il laboratorio didattico di conta con le monete e dell'equivalenza monetaria

Il Micromondo Euro modella risorse e vincoli del campo di conoscenza della compravendita per mezzo di oggetti computazionali costituiti dalle monete del sistema monetario dell'Euro.

---

[1] Micromondo Euro, Micromondo Abaco, Micromondo Calendario, Micromondo dei Numeri, Micromondo Retta dei Numeri, Micromondo Operazioni, Micromondo Foglio Elettronico, Micromondo Tabelle e Grafici, Micromondo Frazioni , Micromondo di Manipolazione Aritmetica

Le possibilità operative e rappresentative di questo micromondo sono in larga misura simili a quelle che caratterizzano l'attività con monete vere o con loro rappresentazioni iconiche e cioè possibilità di generare monete virtuali in uno spazio di lavoro, muoverle e raggrupparle per ottenere una rappresentazione adeguata al compito da affrontare, eventualmente cancellare le monete generate.

Osserviamo però che questo micromondo rende disponibile una possibilità operativa e una rappresentativa che nella pratica con monete vere o con loro rappresentazioni iconiche possono emergere solo nell'interazione sociale con il maestro o con un pari più capace. Tali possibilità sono:

• cambiare una moneta o un gruppo di monete potendo contare, in caso di errore nel cambio, su un messaggio di feedback del sistema in grado di orientare lo studente nella correzione (sono troppi, sono pochi)

• selezionare una moneta o un gruppo di monete potendo ricevere come feedback dal sistema la pronuncia orale del valore della/e moneta/e selezionata/e mediante sintesi vocale.

Limitiamo l'attenzione a quest'ultima possibilità cercando di riflettere sulla sua importanza dal punto di vista didattico. Essa consente di sviluppare una pratica didattica in cui lo studente possa concretamente esplorare il sistema di regole soggiacente alla conta con le monete e pervenire alla comprensione dell'equivalenza monetaria. Questa pratica didattica può essere basata su compiti finalizzati alla rappresentazione di un determinato ammontare monetario espresso in modo verbale (es. trentasei euro). Il micromondo offre allo studente la possibilità di:

• apprendere o migliorare la conta con le monete sfruttando in modo opportuno la sintesi vocale attraverso una modalità d'uso di questa centrata sulla selezione di una prima moneta, l'anticipazione del suo valore da parte dello studente, la validazione tramite sintesi vocale di quanto anticipato, la selezione di una seconda moneta e cosi via.

• fare esperienza di differenti strategie di costruzione del valore monetario, potendone validare la correttezza attraverso la sintesi vocale.

Notiamo che il feedback fornito dal sistema attraverso la sintesi vocale è indice (nel senso di Peirce) del valore monetario della moneta o delle monete che lo studente ha selezionato. Se gruppi di monete diverse forniscono lo stesso feedback per mezzo della sintesi vocale, ciò è indice del fatto che tali gruppi hanno lo stesso valore. L'equivalenza monetaria trova quindi nella sintesi vocale una valido strumento per la sua investigazione. La funzione di sintesi vocale del Micromondo Euro permette di costruire lo spazio fenomenologico in cui ad un gruppo di monete è automaticamente associato il suo valore in forma orale. L'assoggettamento dell'equivalenza monetaria, intesa come conoscenza da insegnare, all'ordine rappresentativo di questo nuovo campo fenomenologico permette di riconfigurare tale conoscenza in un oggetto di investigazione per lo studente.

Il laboratorio didattico di scrittura del numero in forma posizionale

L'uso integrato di tre micromondi di ARI-LAB 2 e più specificatamente il Micromondo Euro, il Micromondo Abaco e il Micromondo Numeri, possono consentire la costruzione di un nuovo spazio fenomenologico in grado di favorire l'esplorazione del sistema di regole soggiacente alla scrittura posizionale del numero e favorire il passaggio da una concezione additiva del numero, coinvolta nella conta orale con le monete, ad una concezione posizionale, coinvolta nella scrittura in cifre del numero.

Per mostrare ciò consideriamo il seguente problema:

"Nel portafoglio di papà ci sono due banconote da 100 Euro, tre da 50 Euro, quattro da 10 Euro, una da 5 Euro, tre monete da 2 Euro, sei da 1 Euro. Usa il Micromondo Euro per contare quanti soldi papà ha in tutto. Copia nel foglio soluzione quanti soldi ha papà in tutto. Rappresenta poi con l'abaco il valore contato. Usa infine il Micromondo Numeri per scrivere lo stesso valore in cifre."

Osserviamo che lavorando nel Micromondo Euro, l'alunno risolve il problema generando monete nello spazio di lavoro del micromondo, organizzandole in modo opportuno per poterle contare agevolmente. Dopo aver contato il valore e aver ricopiato nel foglio soluzione la rappresentazione iconica dei soldi posseduti da papà, lo studente prova ad esprimere il valore corrispondente attraverso la scrittura in cifre del numero. Nel fare ciò possono emergere errori, per esempio 4007 invece di 407; si tratta di errori piuttosto comuni nell'approccio alla scrittura in cifre dei numeri, ma che spesso persistono ancora alla fine della scuola elementare. Nell'errore presentato si riflette infatti una concezione additiva del numero, radicata nel linguaggio verbale; questa concezione additiva può ostacolare la costruzione di una concezione posizionale coinvolta nella scrittura in cifre del numero.

Nel rappresentare il numero “quattrocentosette” sull’abaco, l’alunno deve ristrutturare la soluzione realizzata nel Micromondo Euro (non ci sono aste corrispondenti a banconote da 50 euro o a monete da 2 euro) e tenere conto dei vincoli e delle regole che caratterizzano questo ambiente di rappresentazione dei numeri (su ogni asta non si possono inserire più di 9 palline). Rispetto agli abachi materiali o a quelli disegnati su carta l’abaco del miromondo di ARI-LAB 2 offre nuove e importanti possibilità operative e rappresentative. Ci limitiamo qui a considerare la funzione rappresentativa di sintesi vocale che permette all’alunno di avere come feedback la rappresentazione verbale orale del numero rappresentato in quel momento sull’abaco. Questa funzione può essere considerata da una parte come lo strumento di rappresentazione che consente di coordinare il registro di rappresentazione delle monete e quello dell’abaco durante la soluzione del compito e, dall’altra, come lo strumento per validare le ipotesi che lo studente costruisce sulle regole coinvolte nella rappresentazione di un numero sull’abaco. Attraverso la sintesi vocale la conoscenza della rappresentazione numerica posizionale sull’abaco è ri-configurata in una conoscenza esplorabile e investigabile da parte dello studente.

Nel Micromondo Numeri, lo studente può generare in uno spazio di lavoro cifre del sistema numerico decimale, muoverle, legarle tra loro per mezzo di uno specifico comando per formare un numero con più cifre (il comando “colla”). Anche questo micromondo rende disponibile un comando di sintesi vocale che consente di coordinare l’attività di costruzione del numero in cifre con le altre due rappresentazioni (quella con gli Euro e quella con l’ Abaco) e di esplorare le regole soggiacenti alla costruzione del numero in cifre

Abbiamo verificato in varie sperimentazioni che l’uso integrato di questi tre micromondi può favorire il passaggio da una concezione additiva del numero ad una posizionale. Sfruttando le possibilità di azione, rappresentazione e di feedback disponibili con i tre micromondi, gli studenti possono appropriarsi e condividere il sistema di scrittura posizionale dei numeri attraverso un approccio didattico esplorativo, caratterizzato da processi di anticipazione, validazione e giustificazione delle regole di scrittura dei numeri in cifre.

Analizzare, trasformare, interpretare espressioni numeriche in N

Una delle maggiori difficoltà che presenta il primo approccio ad aspetti di matematica di tipo teorico con alunni della scuola elementare è il passaggio da attività di aritmetica pratica caratterizzata dalla soluzione di problemi concreti che possono essere giustificate in base a significati che sono specifici del concreto della situazione, ad attività di esplorazione e dimostrazione di proprietà dei numeri che, invece, fanno riferimento ad un insieme di principi e regole che sono giustificabili solo su un piano teorico. Non è assolutamente facile gestire tale passaggio sul piano didattico. In questo quadro riteniamo che l’uso del manipolatore simbolico di ARI-LAB 2 possa consentire la costruzione di nuove fenomenologie attraverso le quali sia possibile per gli alunni esplorare le conoscenze coinvolte nella manipolazione di espressioni aritmetiche e sfruttarle per dare l’evidenza di specifiche proprietà dei numeri naturali (Chiappini, Pedemonte, Robotti, 2003).

Consideriamo il seguente problema nel quale si richiede l’analisi, la trasformazione e l’interpretazione di una espressione numerica in N.

Problema

Considera il numero corrispondente al risultato di questa espressione numerica: 420+168+63

Mostra che i tre numeri contenuti nell’espressione sono divisibili per 7 e per 3 e che questi sono anche divisori del risultato dell’espressione.

Notiamo che in generale questo tipo di compito può costituire l’occasione per introdurre e usare in un contesto significativo le proprietà di addizione e moltiplicazione (proprietà associativa e commutativa, proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione). Nella pratica didattica normale tali proprietà vengono introdotte da parte dell’insegnante all’inizio del calcolo formale, ma ad esse nel prosieguo dell’attività didattica non viene più fatto riferimento, in quanto quasi subito sostituite da regole e convenzioni usate nel calcolo con espressioni.

Il Micromondo di Manipolazione Aritmetica di ARI-LAB 2 può consentire di sviluppare la manipolazione simbolica di espressioni numeriche e letterali mantenendo un riferimento costante alle proprietà di base delle operazioni.

La Figura 1 riporta l'interfaccia del Micromondo di Manipolazione Aritmetica con l'esempio di trasformazione dell'espressione numerica 420+168+63 richiesta per la soluzione del problema. La trasformazione dell'espressione è localizzata nello spazio di lavoro a sinistra dell'interfaccia mentre nella parte destra della finestra è localizzata la lista dei comandi disponibili per realizzare la trasformazione. Tali comandi incorporano sia proprietà delle operazioni di addizione e moltiplicazione che regole di calcolo. Per la soluzione del compito preso in esame sono stati utilizzati tre comandi: il comando che fattorizza un numero naturale $n \longrightarrow p*q*\ldots$, il comando che incorpora la proprietà commutativa della moltiplicazione $a*b \longrightarrow b*a$ e il comando che incorpora la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione $(a+b+\ldots)*x \longleftrightarrow a*x+b*x+\ldots$

Figura 1: Interfaccia del Micromondo di Manipolazione Aritmetica di ARI-LAB 2

I comandi dell'interfaccia e la soluzione riportata mostrano che l'ordine operativo e rappresentativo che caratterizza il manipolatore simbolico è l'ordine logico-simbolico dell'algebra. Notiamo però che attraverso lo sfruttamento delle potenzialità di visualizzazione, interattività, computazione questo ordine logico-simbolico si arricchisce di nuove possibilità operative e rappresentative che permettono:

• allo studente di esplorare le conoscenze di manipolazione simbolica sfruttando la propria esperienza cinestetica, percettiva e spaziale

• all'insegnante di introdurre concetti matematici astratti collegandoli strettamente agli aspetti fenomenologici che emergono a livello di interfaccia nell'interattività tra studente e micromondo.

A sostegno di queste affermazioni notiamo che i comandi possono essere applicati dopo che l'utente ha selezionato la parte di espressione che intende trasformare. La selezione dell'espressione o di una sua parte si realizza attraverso il mouse ed è sotto il controllo del sistema che fornisce due tipi di feedback.

Il primo feedback è connesso all'esplorazione della struttura gerarchica dell'espressione. Questa esplorazione è resa possibile dal fatto che quando il puntatore del mouse è posizionato sopra un operatore, una parentesi o un elemento numerico dell'espressione il sistema dinamicamente fornisce una visualizzazione grafica della parte significante dell'espressione corrispondente a ciò che il mouse punta in quel momento. Muovendo il mouse su operatori e parentesi dell'espressione si evidenzia dinamicamente la struttura gerarchica dell'espressione.

Il secondo feedback riguarda l'esplorazione del campo di applicazione dei comandi e dell'effetto che la loro applicazione produce. Selezionata una parte di espressione solo i comandi dell'interfaccia che possono essere applicati su di essa vengono resi attivi e messi in evidenza nell'interfaccia (sfondo rosso, vedi Figura 1). L'applicazione di un comando produce la visualizzazione sullo schermo della trasformazione simbolica ad esso associata. La visualizzazione tiene traccia sia della regola applicata sia della parte dell'espressione su cui tali regole vengono applicate (vedi la trasformazione in Figura1).

Diverse modalità di impiego del micromondo Frazioni di ARI-LAB 2
Bettina Pedemonte, Elisabetta Robotti - Istituto Tecnologie Didattiche - C.N.R. di Genova

Introduzione

L'obiettivo principale di questo articolo è mostrare come il costrutto teorico di *funzionalità didattica* (cfr. Cerulli, Pedemonte, Robotti) permetta il confronto di diversi approcci didattici ad uno stesso concetto matematico.

In questo articolo vengono confrontati tre diversi approcci didattici relativi al concetto di numero razionale, basati sull'uso del Micromondo Frazioni di ARI-LAB 2.

Due approcci sono tratti da due sperimentazioni sviluppate nell'ambito della *cross-experiment* del progetto TELMA (Technology enhanced learning in mathematics)[1] da due dei gruppi partecipanti al progetto: IMAG (Grenoble, Francia) ed ETL-NKUA (Grecia). Nella cross-experiment (Artigue M., & al., 2007), ogni gruppo doveva costruire e portare in classe una sperimentazione che utilizzasse uno fra i sistemi tecnologici sviluppati dai gruppi partecipanti di TELMA, ad esclusione del proprio (un alien ICT). L'obiettivo della cross-experiment era l'integrazione tra le diverse ricerche dei vari gruppi, ed in particolare il confronto diretto di approcci diversi basati su uno stesso strumento tecnologico.

La terza sperimentazione che si prende in esame in questo articolo è stata sviluppata dall'ITD (Istituto per le Tecnologie Didattiche del CNR di Genova) in anni precedenti.

Le tre sperimentazioni vengono confrontate tramite il costrutto della funzionalità didattica per evidenziare alcuni aspetti teorici soggiacenti la loro diversità. In particolare, questo articolo mostra come l'uso di uno strumento didattico, come il Micromondo Frazioni di ARI-LAB 2, non sia scontato e soprattutto non sia deciso a-priori da chi ha progettato e sviluppato lo strumento. Al contrario, il ventaglio dei possibili suoi usi didattici risulta essere estremamente ampio e variegato. L'ipotesi di partenza è che la *modalità di impiego* (cfr. Cerulli, Pedemonte, Robotti) di uno strumento sia influenzata almeno in parte dal quadro teorico nel quale l'utilizzatore si pone, dalla ricerca che vuole sviluppare e dal bagaglio culturale che possiede. L'articolo vuole mostrare come tali fattori determinino tre diverse modalità di impiego del Micromondo Frazioni. Partendo da un obiettivo didattico e da specifiche caratteristiche dello strumento, presenteremo e confronteremo le tre diverse modalità di impiego sperimentate.

Prima di operare il confronto forniamo alcune indicazioni relative allo strumento.

Micromondo frazioni di ARI-LAB 2

Il micromondo Frazioni (Chiappini, Pedemonte, Robotti, 2003; Chiappini, Pedemonte, Molinari, 2005) consente di esplorare proprietà dei numeri razionali interagendo con un modello di rappresentazione grafica basato sul teorema di Talete e centrate sul concetto di partizione. L'utente può costruire frazioni sulla semiretta dei numeri e fare operazioni con frazioni lavorando con lunghezze selezionate sulla semiretta dei numeri. Queste lunghezze possono essere divise in parti, riportate, aggiunte e sottratte. La notazione frazionaria viene automaticamente costruita dal sistema secondo l'operazione svolta dall'utente.

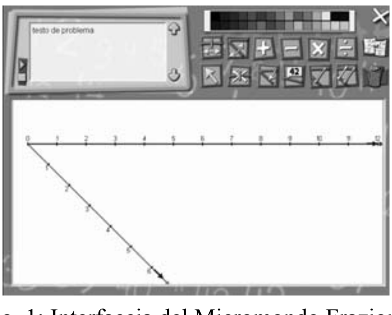


Fig. 1: Interfaccia del Micromondo Frazioni

[1] TELMA è un progetto supportato dalla rete di eccellenza di Kaleidoscope (IST-507838).

Nel Micromondo Frazioni una frazione viene costruita mediante il tasto della divisone selezionando una lunghezza sulla semiretta dei numeri (semiretta orizzontale in rosso) e il numero di parti in cui viene divisa la lunghezza sulla semiretta ripartitrice (semiretta obliqua in verde).

Per esempio le figure seguenti mostrano la costruzione del punto corrispondente alla frazione 3/4 sulla semiretta dei numeri. La tecnica di costruzione consiste nel selezionare, con il mouse, la lunghezza 3 sulla semiretta dei numeri e la lunghezza 4 sulla semiretta ripartitrice.

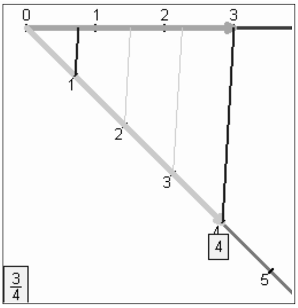


Fig. 2: Costruzione della frazione 3/4

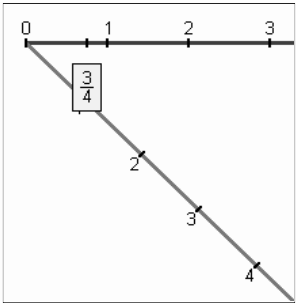


Fig. 3: Visualizzazione della frazione 3/4

Scelta la ripartizione (click del mouse sul punto 4 della semiretta ripartitrice) l'effetto grafico di ripartizione scompare e risulta visualizzato il punto corrispondente alla frazione 3/4 sulla semiretta dei numeri e l'etichetta contenente la notazione simbolica della frazione costruita (figura 3).

Osserviamo che la tecnica di costruzione di una frazione possiede un effetto dinamico: una volta selezionata la lunghezza 3 sulla semiretta dei numeri, è possibile spostare il mouse su punti diversi della semiretta ripartitrice. Il sistema visualizza in tal modo le diverse ripartizioni associate alle diverse selezioni. La figura 4 mostra per esempio la ripartizione della lunghezza 3 in 5 parti.

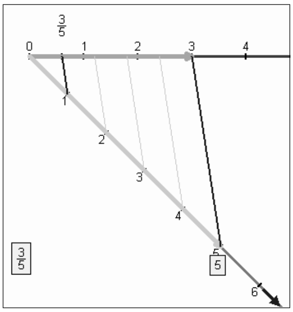


Figura 4: Costruzione della frazione 3/5

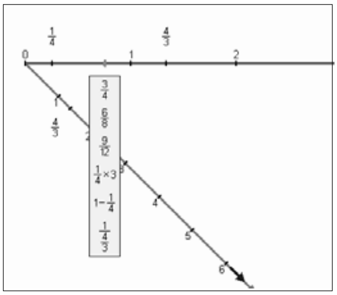


Figura 5: Post-it associato ad un punto contenente tutte le frazioni o espressioni costruite

Osserviamo inoltre, che ad un punto possono corrispondere diverse costruzioni di espressioni. In questo caso, tutte le espressioni simboliche relative ai processi operativi di tipo geometrico realizzati in relazione a tale punto vengono visualizzati in un post-it associato al punto. Per esempio, il post-it di figura 5 associato al punto corrispondente a 3/4, riporta anche una serie di espressioni simboliche che sono state ottenute attraverso differenti processi costruttivi di tipo geometrico per mezzo dei comandi del micromondo.

La descrizione completa delle possibilità di azione di questo micromondo esula dagli scopi di questo lavoro. Ci interessa invece osservare le diverse modalità di impiego che sono state fatte di esso ed in particolare osservare come specifiche sue caratteristiche sono state usate in maniera diversa nelle tre sperimentazioni condotte.

Sperimentazioni condotte col Micromondo Frazioni

Qui di seguito vengono riportati alcuni dati relativi alle tre diverse sperimentazioni del Micromondo Frazioni di ARI-LAB 2. Per ragioni di spazio la stesura della descrizione delle tre sperimentazioni non risulta esaustiva (per maggiori approfondimenti sulle sperimentazioni rimandiamo ad articoli corrispondenti). Ci proponiamo tuttavia di fornire gli elementi necessari per poter affrontare la discussione inerente le diverse modalità di impiego del micromondo in esame.

Le sperimentazioni condotte dal gruppo IMAG e dal gruppo ETL-NKUA sono state presentate in classi corrispondenti all'ultimo anno della Scuola elementare, mentre la sperimentazione condotta da ITD è stata proposta all'inizio di una classe di prima media.

In tutti i casi le sperimentazioni si sono svolte in un laboratorio informatico in cui era presente su ogni macchina il software ARI-LAB 2. I bambini lavoravano a coppia (massimo gruppi di tre persone) su ogni macchina.

L'obiettivo didattico generale delle tre sperimentazioni era l'apprendimento di numero razionale e di alcune delle sue proprietà.

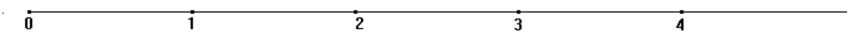
Sperimentazione del gruppo IMAG

Obiettivi didattici specifici della sperimentazione condotta dal gruppo IMAG erano: Frazioni equivalenti (Riconoscere diverse espressioni rappresentanti una stessa espressione, e proporre diverse espressioni di una data frazione), Ordinamento e confronto di Frazioni (situare una frazione tra due numeri interi dati)

Caratteristiche del Micromondo Frazioni usate: Costruzione di una frazione sulla retta dei numeri, etichetta rappresentante la frazione costruita, post-it contenente frazioni equivalenti. Osserviamo che tutte le attività proposte erano prima svolte su carta e successivamente verificate nel micromondo.

Attività proposte:

1) Usando una penna blu, indica dove sono situate le seguenti frazioni: 3/4, 8/5, 32/7, 26/11, 16/10.



Verifica la risposta costruendo le frazioni in Ari-Lab2, e correggi gli eventuali errori con una penna rossa.

2) Tra le seguenti espressioni, circonda con una penna blu quelle che rappresentano lo stesso numero.

i)	3/4	9/12	15/16	6/10	45/60
ii)	2+1/3	3/5	7/3	21/9	1+5/3

Verifica la risposta costruendo le frazioni in Ari-Lab2, e correggi gli eventuali errori con una penna rossa.

3) Scrivi tre espressioni di 7/3 e verifica la risposta col micromondo

4) Situa ognuna delle seguenti espressioni tra due numeri interi consecutivi:

… < 18/10 < …
… < 3/4 < …
… < 17/3 < …
… < 45/100 < …
… < 356/100 < …
… < 25/2 < …

Verifica la risposta costruendo le frazioni in Ari-Lab 2, e correggi gli eventuali errori con una penna rossa.

5) Tra i 5 bambini seguenti,
- chi ha più cioccolata ?
- chi ha meno cioccolata ?
- ci sono bambini che hanno la stessa quantità di cioccolata?

Tom : 8/3 kg Théo : 7/2 kg Lou : 14/4 kg Léo: 7/5 kg Lola : 8/5 kg

Ordina le quantità di cioccolata dalla più piccola alla più grande.

Verifica la risposta col micromondo frazioni di ARI-LAB 2 e correggi gli eventuali errori con una penna rossa.

Sperimentazione del gruppo ETL-NKUA (Psycharis G., Latsi M., Kynigos C., 2007)

Obiettivi didattici specifici della sperimentazione condotta dal gruppo ETL-NKUA erano: l'acquisizione del concetto di numero razionale inteso come misura in cui particolare enfasi viene data al contesto della situazione (vengono scelti problemi che collegano il numero razionale al concetto di misura) e alla rappresentazione sul computer (la retta dei numeri spinge a legare il concetto di numero a quello di misura).

Caratteristiche del Micromondo Frazioni usate: Costruzione di una frazione sulla retta dei numeri, etichetta rappresentante la frazione costruita, post-it contenente frazioni equivalenti, possibilità di modificare l'unità di misura sulla retta dei numeri. Si osserva che in questa sperimentazione il punto della frazione costruita e la relativa etichetta rappresentano in realtà la distanza dallo zero.

Attività proposte:

Sono divise in due parti:

Prima parte

1) La casa di Gorge è distante 1 Km dalla scuola. Sulla via per la scuola, a 1/2 di Km incontra una piazza, la casa del suo amico Chronis a 1/3 di Km e il negozio di dolci a 1/6 di Km. In che ordine Gorge incontra questi posti tornando a casa?

2) La scuola di Costantina dista 1 Km da casa sua. Sulla via verso la scuola incontra un negozietto a 6/7 di Km, un supermercato a 2/5 di Km e un campo di pallone a 3/4 di Km. In che ordine Costantina incontra questi posti andando a scuola?

Lazaro è il miglior amico di Costantina. La sua casa si trova tra il campo da pallone e il supermercato. Riesci a determinare alcune frazioni che indicano la posizione della sua casa?

Seconda parte

3) Efi e Costantina sono amiche. Si incontrano al campo di pallone. Efi dice a Costantina "Sei fortunata. Casa tua è più vicina al campo di pallone rispetto alla mia". Cosa puoi dire sulla posizione della casa di Efi?

4) Costantina dice a Efi "Penso che tu sia più fortunata. Tu cammini solo 2/3 di Km per arrivare a scuola". Perché Efi è fortunata? Puoi trovare la posizione esatta della casa di Efi? Qual è la distanza delle case delle due amiche?

5) Maria è un'amica di Efi e Costantina. Maria dice "Credo che la più fortunata di voi sia quella che cammina meno nell'andare sia a scuola che al campo da pallone ogni pomeriggio". Chi credi sia la più fortunata?

Osserviamo che in questi problemi si vuole integrare l'uso di frazioni per misurare quantità in situazioni di vita concreta. Il movimento dei punti sulla retta corrisponde al movimento di una persona che copre certe distanze.

Sperimentazione di ITD (Chiappini G., Pedemonte B., Molinari M., 2004)

Obiettivi didattici specifici della sperimentazione condotta da ITD erano: Concetto di frazione inteso come ripartizione di una lunghezza in parti, Frazioni equivalenti (basate sul concetto di ripartizione), Ordinamento di Frazioni.

Caratteristiche del Micromondo Frazioni usate: costruzione di una frazione sulla retta dei numeri, etichetta rappresentante la frazione costruita, post-it contenente frazioni equivalenti, possibilità di modificare l'unità di misura sulla retta dei numeri. Rispetto alle altre sperimentazioni è stata usata la possibilità di costruire manualmente frazioni mediante gli appositi bottoni che consentono di collegare due punti posti rispettivamente uno sulla retta dei numeri e l'altro sulla semiretta ripartitrice e il bottone che consente di costruire segmenti paralleli. Tale approccio manuale consente di riflettere sul significato di frazione come ripartizione di una lunghezza in un certo numero di parti. Infatti, una delle ipotesi di fondo era che sulla base di un approccio motorio-percettivo, lo studente potesse costruire i significati legati al concetto di frazione come ripartizione di una lunghezza in parti.

Attività proposte[2] :

Sono attività divise in 4 moduli (Ripartizione di una lunghezza, Frazioni, Ordinamento di frazioni, Frazioni equivalenti) ciascuno dei quali intercalato da interventi di discussione e rafforzamento da parte dell'insegnante.

1) Ripartisci manualmente la lunghezza unitaria della semiretta dei numeri in 4 parti.

Ripartisci manualmente la lunghezza 5 della semiretta dei numeri in 3 parti.

In entrambi i casi osserva cosa rimane invariato cambiando l'unità di misura.

2) Quali frazioni corrispondono ai punti della ripartizione di 1 in 4 parti realizzata nell'attività precedente? Verificare l'ipotesi fatta. Prova poi a determinare una costruzione che cada nei punti 2*1/4, 3*1/4, 4*1/4.

Questa attività vuole far riflettere sulla proprietà a/b=a*1/b

3) Secondo te 1/5 è più grande o più piccolo di 1/7, cioè 1/5 cadrà prima o dopo di 1/7 sulla semiretta dei numeri?

Costruisci un certo numero di frazioni aventi numeratore unitario.

Attraverso questa attività si vuole portare lo studente all'appropriazione della seguente relazione d'ordine delle frazioni: se a<b e a>0, b>0, allora 1/a>1/b.

(Vi sono poi alcune domande relative a proprietà di frazioni proprie e improprie per determinare altre proprietà relative all'ordinamento di frazioni)

4) Determina, mediante una esplorazione, alcune frazioni equivalenti ad alcune frazioni assegnate.

Osserviamo che in generale, nella sperimentazione sviluppata da ITD, le caratteristiche dell'artefatto sono direttamente utilizzate dagli studenti per esplorare e determinare congetture e non solo come strumento di verifica.

Modalità di impiego del Micromondo Frazioni

Sulla base delle tre sperimentazioni, possiamo osservare che, una volta determinato un obiettivo didattico, e un insieme di caratteristiche di uno specifico artefatto, molteplici sono le modalità di impiego che possono essere sfruttate per il raggiungimento dell'obiettivo.

Nel caso specifico delle tre diverse sperimentazioni, le caratteristiche del sistema usate sono state: la costruzione di frazioni, l'etichetta che rappresenta la notazione simbolica della frazione, il post-it che contiene più etichette nel caso di frazioni equivalenti, e la possibilità di modificare l'unità di misura.

L'obiettivo didattico generale era l'apprendimento del numero razionale e delle sue proprietà, ma osserviamo che nel caso del gruppo greco ETL-NKUA, l'obiettivo è stato in parte condizionato dalle modalità di impiego usate: i testi delle attività didattiche proposte legano strettamente il concetto di numero razionale a quello di misura. È verosimile pensare che questa non sia stata una scelta dettata dalla attuale normativa curriculare greca, ma probabilmente condizionata dall'uso dello strumento. Sembra infatti che alcune caratteristiche del sistema abbiano spinto il gruppo greco verso un'interpretazione orientata al numero razionale come misura, interpretazione giustificata dalla presenza della retta dei numeri come proprietà base dello strumento. Le frazioni infatti sono costruite sulla retta che da un punto di vista epistemologico spinge a considerare il concetto di numero strettamente legato a quello di misura. L'obiettivo didattico del gruppo greco è stato in parte modificato rispetto a quello originale restringendo quest'ultimo all'apprendimento del numero razionale inteso come numero-misura (Psycharis G., Latsi M., Kynigos C., 2007).

Per quanto riguarda le modalità di impiego osserviamo che risultano profondamente diverse nelle tre sperimentazioni svolte.

Innanzitutto osserviamo che il gruppo ITD costruisce le attività proponendo un percorso didattico innovativo sulle frazioni in cui lo strumento ne è l'attore principale. D'altra parte ITD ha progettato e sviluppato il Micromondo Frazioni di ARI-LAB 2. Quando si progetta un software per scopi didattici, le sue potenzialità didattiche sono necessariamente legate ai suoi possibili modi d'uso. Le scelte del progettatore sono quindi condizionate da questi modi d'uso. Inoltre, nel caso specifico del Micromondo Frazioni di ARI-LAB 2, l'idea soggiacente il modello geometrico basato sul teorema di Talete era già

[2] Un'analisi più accurata delle seguenti attività si trova in Chiappini, Pedemonte, Molinari, 2004.

stato più volte sperimentato su carta (Chiappini, Molinari, 1977). Irrimediabilmente quindi, le modalità di impiego pensate in una ipotetica sperimentazione durante la fase di progettazione dello strumento hanno fortemente condizionato le modalità di impiego messe in atto durante la sperimentazione, per sfruttare al massimo le funzionalità didattiche volutamente implementate nello strumento. La modalità di impiego del micromondo, rispetto all'obiettivo didattico prefissato, si allontana molto da un normale approccio trasmissivo perché fortemente influenzata dall'approccio centrato sulla costruzione diretta di significati dei concetti matematici in gioco da parte dello studente in modo interattivo con il sistema.

Il gruppo IMAG propone invece un percorso didattico ancora su carta e usa alcune caratteristiche del sistema solo come feedback alle risposte già fornite da parte dello studente. Lo strumento è principalmente usato per verificare ipotesi o congetture costruite dallo studente secondo il percorso curricolare e didattico standard. L'idea di frazione non è costruita sulla ripartizione di una lunghezza in parti.

Il gruppo greco usa invece il micromondo come strumento di esplorazione ma per dare un'idea di frazione strettamente legata al concetto di misura.

In questo quadro di diverse modalità di impiego dello strumento viene naturale porsi la domanda relativa alle ragioni che possono aver condizionato questi diversi utilizzi.

Oltre all'aspetto culturale specifico di ogni nazione, e a quello legato alla diversità tra sperimentazione svolta dal progettatore dello strumento e sperimentazione sviluppata da un qualsiasi utilizzatore, riteniamo che non vada sottovalutato l'aspetto legato alla ricerca e al quadro teorico nel quale ciascun gruppo sperimentatore era situato. Probabilmente questi sono i fattori davvero condizionanti le modalità di impiego di uno strumento.

Per esempio il gruppo ITD pone particolare importanza all'aspetto sociale e alla costruzione del sapere come prodotto di un'attività in cui tutte le componenti di interazione risultano fondamentali. Il quadro teorico di riferimento dell'ITD è principalmente quello dell'Activity Theory, in cui l'attività è un'azione, o una catena di azioni dirette verso un obiettivo, oggetto dell'attività. L'attività è mediata da mutue relazioni tra soggetto e oggetto, tra soggetto e comunità, tra comunità e oggetto (Cole and Engeström, 1991). Fondamentale è l'aspetto sociale dell'attività, in cui il sapere individuale si sviluppa socialmente. Ecco allora che viene giustificata la scelta di costruire un percorso didattico in cui le attività possano consentire allo studente di costruire significati partendo dall'interazione con lo strumento e interagendo con i compagni mediante discussioni. In questo approccio anche il ruolo dell'insegnante, risulta essere una presenza fondamentale per mediare il sapere in gioco.

Profondamente diverso è invece l'approccio teorico su cui si basano le ricerche del gruppo IMAG. La sperimentazione condotta dal gruppo francese è stata guidata da due teorie: la teoria delle situazioni didattiche e la teoria antropologica. Secondo la teoria delle situazioni didattiche l'apprendimento dello studente si sviluppa interagendo con il milieu. Il milieu, e in particolare il feedback che fornisce, è un aspetto cruciale poiché il feedback dovrebbe essere ricco abbastanza da consentire allo studente di lavorare in modo autonomo e costruire la conoscenza adattando la propria alla situazione fornita dal milieu. In questo approccio il ruolo dell'insegnante è quindi minimizzato. La teoria antropologica è stata usata per descrivere i tipi di compiti che possono essere usati per l'approccio alle frazioni (e quindi concordi con le norme curriculari) e che siano contemporaneamente significativi rispetto allo strumento usato. Queste considerazioni spiegano la ragione per cui il software viene usato principalmente nella sua funzione di feedback senza perturbare troppo la situazione sperimentale.

Per la costruzione della propria sperimentazione il gruppo ETL-NKUA si riferisce principalmente al quadro teorico delle Situated Abstraction (Noss et al 1997). Sulla base di questo quadro viene data particolare enfasi all'importanza della situazione costruita in modo appropriato per consentire allo studente di costruire i significati interagendo direttamente con gli strumenti disponibili, e questo mentre si prendono decisioni e si esprimono idee e giudizi, durante la risoluzione di un problema. Il concetto di frazione come misura non è preso in considerazione di per sé, ma è legato alle situazioni in cui esso può essere usato e alle rappresentazioni disponibili. Nella costruzione della sperimentazione quindi, la scelta dello strumento guida la progettazione del compito che viene fatto con esso. Ecco perché riteniamo che a partire dalla retta dei numeri contenuta nel Micromondo Frazioni il gruppo greco abbia pensato alla frazione come misura e quindi abbia costruito situazioni appropriate per consentire allo studente di costruire significati interagendo con gli strumenti disponibili del micromondo stesso.

Conclusioni

Il costrutto teorico delle funzionalità didattiche ha consentito di confrontare tre sperimentazioni sviluppate con lo stesso strumento, il Micromondo Frazioni di ARI-LAB 2. L'aspetto cruciale del costrutto teorico in esame è il fatto di consentire di esplicitare gli elementi necessari per un efficace confronto tra le tre modalità d'impiego descritte.

L'analisi presentata nell'articolo ha mostrato che partendo da uno stesso obiettivo didattico e dall'uso di stesse caratteristiche del sistema le sue modalità di impiego nei tre paesi possono essere profondamente diverse. Abbiamo cercato di evidenziare questa diversità. Tra i vari fattori condizionanti sembra che il quadro teorico di riferimento che il gruppo sperimentatore assume nella propria ricerca e in particolare nella fase della sperimentazione, influenzi particolarmente la modalità di impiego dello strumento e di conseguenza la funzionalità didattica ad essa associata. Questo aspetto potrà forse essere preso in esame per ricerche future.

Bibliografia

Artigue M., Bottino R., Cerulli M., Georget J.P., Maffei L., Maracci M., Mariotti, M. A., Pedemonte B. Robotti E., Trgalova J. (2007) Technology Enhanced Learning in Mathematics: the cross-experimentation approach adopted by the TELMA European Research Team. *La matematica e la sua didattica* Anno 21, n.1, 2007, Numero speciale/Special Issue, Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF "Mathematics and its applications" Panel on Didactics of Mathematics ISSN 1120-9968, pp. 67-74

Cerulli M., Pedemonte B., Robotti E. Funzionalità didattiche: uno strumento operativo per progettare e analizzare esperienze di laboratorio

Cerulli M., Pedemonte B., Robotti E. (2005) An Integrated perspective to approach technology in mathematics education, *Proceeding of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4,* Sant Feliu de Guíxols, Spain

Chiappini, G., Molinari M., (1997): Approccio alle frazioni. Uso delle lettere nella riflessione sui numeri frazionari, *Atti di SFIDA 8* (Drouard J.P., Maurel M. eds), IREM, Nice.

Chiappini G., Pedemonte B., Molinari M. (2004) Le tecnologie didattiche nell'approccio ai numeri razionali, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, C.R.D. "U. Morin" edizioni, Vol. 25 A-B, N.5, settembre/ottobre, pp. 479-512, ISSN 1123-7570.

Chiappini G., Pedemonte B., Robotti E. (2003) Mathematical Teaching and learning environment mediated by ICT. C. Dowling, K-W. Lai (eds.), *Information and Communication Technology and the Teacher of the Future, Kluwer Academic Publishers*, pp. 217-228.

Cole M. & Engeström Y. (1991) *A cultural-historical approach to distributed cognition*. Ed G. Salomon, Distributed cognition (pp. 1-47), Cambridge MA: Cambridge University Press.

Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*: *Learning Cultures and Computers.* Dordrecht: Kluwer. Kluwer.

Psycharis G., Latsi M., Kynigos C. (2007) Meanings for fractions as number-measure by exploring the number line *Proceeding of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 5,* Larnaca, Cyprus

Una funzionalità didattica per introdurre all'idea di teoria

Michele Cerulli - Istituto Tecnologie Didattiche - C.N.R. di Genova

Micromondi ed artefatti come strumenti di mediazione semiotica

La ricerca sull'uso della tecnologia a scopi didattici ne ha mostrato potenzialità e limiti (Cerulli, 2004). Una delle idee più interessanti che troviamo in letteratura è quella dei Micromondi, ambienti dove sia possibile praticare attività rilevanti a domini di conoscenza incorporati nei micromondi stessi. Agli studenti è infatti data la possibilità di esperire, fenomenologicamente, domini di conoscenza, come la matematica, che sarebbero altrimenti percepiti come astratti e lontani dalle esperienze pratiche degli alunni. Grazie ai micromondi è possibile realizzare dei campi di esperienza (Boero et al., 1995) pratici per la matematica che possono essere sfruttati per sviluppare attività che possano favorire l'apprendimento della matematica. Tuttavia, la ricerca ha anche mostrato che, nonostante le attività con tali micromondi risultino sempre in qualche apprendimento, non è affatto scontato che tale apprendimento coincida con gli obiettivi didattici matematici perseguiti dall'insegnante. Un alunno che lavora con un micromondo apprende certamente delle conoscenza relative al micromondo stesso, ma la relazione tra tali conoscenze, e la matematica non sono affatto scontate, ne automaticamente costruite (Cerulli, 2004): nei casi più estremi, senza particolari accorgimenti, non è neanche detto che l'alunno colleghi l'attività con il micromondo alla matematica, e se lo fa, non è detto che lo faccia correttamente.

Un modo per affrontare questo problema ci viene suggerito dal quadro vigotskiano proposto da Mariotti (Mariotti, 2002) secondo cui l'apprendimento è radicato nell'esperienza pratica, ma i concetti appresi possono raggiungere una coerenza con la matematica evolvendosi sotto la guida dell'insegnante tramite particolari strategie comunicative. Assumendo questo quadro un micromondo può essere utilizzato come *strumento di mediazione semiotica*: esso viene introdotto volutamente dall'insegnante nella pratica di classe, ed è sfruttato per sviluppare strategie comunicative atte a far sviluppare i significati matematici a cui si riferiscono gli obiettivi didattici dell'insegnante. Nell'ambito di questa prospettiva due linee di ricerca sono state sviluppati sul tema dell'introduzione di alunni di 1 e 2 liceo scientifico all'idea di teoria e dimostrazione. La prima linea di ricerca riguarda il caso della geometria euclidea (Mariotti 2002), con il software Cabri, ed è stata ripresa e ri-adattata al caso dell'algebra e del software L'Algebrista. Nel passaggio da un contesto all'altro, e nel confronto tra i due, è stato possibile individuare quali fossero gli aspetti comuni e caratterizzanti il tema del pensiero matematico teorico, indipendentemente da se si tratti di algebra o geometria. In questo articolo richiameremo alcune idee chiave per il caso dell'algebra, quindi ci soffermeremo su una particolare *modalità d'impiego* (cfr. Cerulli, M.,Pedemonte, B., Robutti, E.) de L'Algebrista che lo rende associabile a Cabri come strumento di mediazione semiotica impiegato per introdurre gli alunni all'idea di teoria e dimostrazione.

Un software per introdurre gli alunni all'algebra come teoria

Nel passaggio dall'aritmetica all'algebra un punto fondamentale è che le espressioni algebriche debbano essere considerate come oggetti su cui agire piuttosto che solo come procedure di calcolo da eseguire: il modo algebrico di agire sulle espressioni consiste nel manipolarle e trasformarle per mezzo di un insieme di assiomi, definizioni e teoremi. Di conseguenza è possibile progettare un approccio alla manipolazione simbolica interpretandola come attività di confronto di espressioni e dimostrazione della loro equivalenza o meno (Prodi, 1975). Il fuoco quindi si sposta sugli aspetti teorici dell'algebra, e nella nostra ricerca abbiamo sfruttato questo contesto per introdurre gli alunni all'idea di teoria e di dimostrazione (Cerulli, 2000 e 2004). A tale fine abbiamo progettato, realizzato e sperimentato un software, L'Algebrista che potesse fornire agli alunni un campo di esperienza sugli aspetti teorici dell'algebra. In tale micromondo infatti è possibile trasformare espressioni tramite comandi che corrispondono ad assiomi, definizioni e teoremi, così che la pratica con L'Algebrista può essere interpretata in termini di attività di dimostrazione di equivalenze nell'ambito di una teoria algebrica.

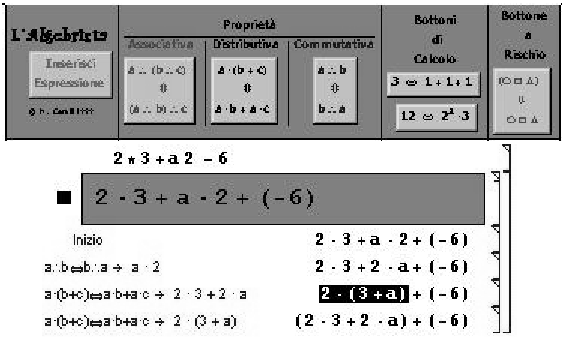


Fig 3. - Nell'esempio vengono applicate prima la proprietà commutativa e poi due volte la distributiva; di ogni passaggio vengono indicati sulla destra i dettagli, di conseguenza è possibile interpretare la sequenza come una dimostrazione dell'equivalenza delle 4 espressioni ottenute.

Descrizioni dettagliate de L'Algebrista possono essere trovate in Cerulli (2000 e 2004), qui ci limitiamo a descrivere alcuni aspetti chiave in relazione all'obiettivo didattico di introdurre gli alunni all'idea di teoria e di dimostrazione:

• L'algebrista è un micromondo per le espressioni algebriche in cui l'utente può agire trasformando le espressioni stesse in base alle proprietà fondamentali delle operazioni che funzionano da assiomi della teoria in cui ci si muove.

• Gli assiomi sono rappresentati dai **bottoni delle proprietà** i quali non hanno nessun comportamento implicito, eseguono solo ed esclusivamente ciò che l'assioma che rappresentano dice, e lo applicano passo passo su richiesta dell'utente, senza ritorsioni automatiche.

• I bottoni che rappresentano relazioni di equivalenza sono reversibili e contengono in sé i propri inversi. In questo modo rende esplicito ed operativo il significato di **equivalenza** tra espressioni eliminando l'unidirezionalità del simbolo «uguale» («=»), che è solitamente indotta dalle normali pratiche scolastiche.

• Ogni qualvolta un utente dimostra un teorema, questo può essere aggiunto al sistema sotto forma di bottone di teorema. Tale bottone/teorema potrà quindi essere usato per nuove dimostrazioni.

• Il manipolatore **non è in grado di effettuare alcuna trasformazione** se non guidato dall'utente tramite l'uso dei bottoni di cui sopra. In questo modo l'utente è costretto a ricostruire quelle trasformazioni che in ambiente carta e penna sono generalmente divenute *automatiche* esplicitando tutti i passaggi impliciti. A differenza dei normali manipolatori che lasciano poco controllo all'utente, L'Algebrista è un ambiente in cui l'utente controlla ogni trasformazione.

• Il manipolatore tiene traccia ad ogni passo del comando che è stato usato e della sotto espressione su cui è stato applicato.

L'interazione avviene sempre selezionando un pezzo di espressione a cliccando su un bottone. Nell'esempio abbiamo trasformato la prima espressione selezionando il termine **a•2** e cliccando sul bottone della proprietà commutativa; la nuova espressione prodotta presenta il termine **2•a** al posto di **a•2,** mentre, sulla sinistra è indicato quale bottone è stato utilizzato e su quale sotto espressione è stato applicato. Andando avanti abbiamo trasformato una parte dell'espressione con la proprietà distributiva, e nel passaggio successivo, utilizzando lo stesso bottone[1] abbiamo invertito la trasformazione precedente; coerentemente con le nostre ipotesi didattiche i bottoni condensano tutte le funzionalità delle proprietà delle espressioni senza privilegiare alcuna direzione di calcolo. Infine, i bottoni de' L'Algebrista producono sempre scritture corrette, ovvero espressioni equivalenti a quelle su cui sono stati applicati

[1] Il bottone decide cosa fare a seconda della struttura dell'espressione che si trova davanti. Nel caso che non riconosca alcuna struttura, su cui applicare l'assioma che rappresenta, riscrive l'espressione senza cambiarla.

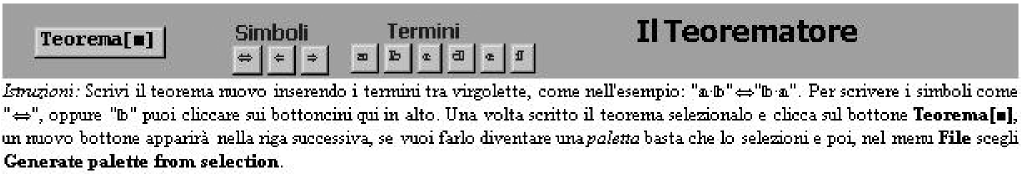


Fig. 3 - Il Teorematore

Una particolare caratteristica de L'Algebrista è il Teorematore ovvero un particolare ambiente che permette all'utente di creare nuovi bottoni. La modalità per creare un nuovo bottone è molto semplice e consiste essenzialmente nello scrivere la nuova regola di trasformazione (usando la normale simbologia matematica), selezionarla, e cliccare sul bottone *Teorema*. Di conseguenza è possibile far crescere la teoria incorporata ne L'Algebrista parallelamente con le conoscenze dell'alunno o con la teoria condivisa dalla classe.

Punti chiave del percorso didattico seguito

L'Algebrista è stato sperimentato più volte, sempre per periodi di 1 o 2 anni scolastici, seguendo un percorso che a grandi linee ogni volta prevedeva le seguenti fasi:

- *Introduzione della pratica di dimostrazione di equivalenze tra espressioni numeriche tramite trasformazioni basate sugli assiomi di una teoria*;

- *Estenzione alle espressioni letterali della pratica di dimostrazione di equivalenza tra espressioni tramite trasformazioni basate sugli assiomi*;

- *Dimostrazione di nuovi teoremi*: data la generalità delle espressioni letterali (ogni lettera può essere interpretata come un'espressione) è possibile interpretare la dimostrazione dell'equivalenza di due espressioni specifiche come la dimostrazione di un teorema sull'equivalenza di due qualsiasi espressioni aventi la stessa struttura delle espressioni considerate. Di conseguenza, tra le molte equivalenze dimostrate in classe, ad alcune viene dato lo status di teorema della teoria che la classe sta costruendo; tali teoremi possono essere utilizzati per produrre nuove dimostrazioni. Di fatto molte regole di trasformazione comuni (es.: i prodotti notevoli; le regole di somma e moltiplicazione delle frazioni; le proprietà delle potenze), vengono introdotte in classe direttamente come teoremi dimostrati dagli alunni stessi.

- *Equazioni*: il problema del confronto di espressioni può essere utilizzato per introdurre le equazioni (Cerulli, 2004), ma in questa sede ne omettiamo la trattazione per motivi di spazio.

Il paradigma didattico generale

Nella nostra sperimentazione si intrecciano attività con L'Algebrista, attività su carta e penna ed attività di verbalizzazione orale, secondo uno schema ciclico.

Le attività pratiche sono verbalizzate sotto forma di resoconti scritti e di discussioni matematiche di classe (Bartolini) che portano alla produzione di una *quadernino* di algebra della classe ad all'aggiornamento della lista dei comandi de L'Algebrista.

Il *quadernino* di classe è un elemento chiave di questa sperimentazione, esso contiene tutti i risultati principali raggiunti dalla classe, ma è redatto personalmente da ciascun alunno. In altre parole esso rappresenta la cultura della classe, ma in quanto personale, è in ogni momento accessibile ad ogni alunno. Inoltre, contenendo la lista di assiomi, definizioni e teoremi, esso rappresenta anche la teoria algebrica condivisa dalla classe che evolve durante tutto il percorso.

Il quadernino e l'insieme di comandi de L'Algebrista evolvono e si ampliano seguendo la cronologia delle attività, tuttavia essi sono ciclicamente revisionati al fine di riformulare la loro struttura logica in base alle dipendenze logiche tra gli assiomi ed i teoremi delle teorie (Cerulli Mariotti 2003?)

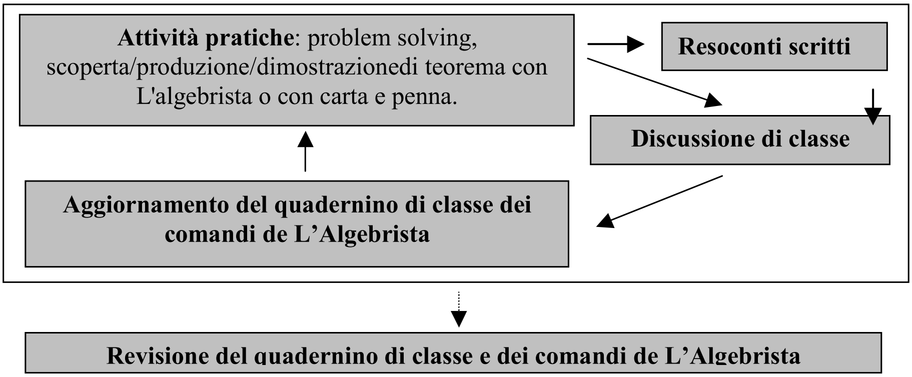


Figure 1 - Le attività pratiche vengono verbalizzate come resoconti scritti e/o tramite discussioni di classe che portano alla produzione del quaderno di classe e dell'aggiornamento comandi de L'Algebrista. Questi ultimi vengono ciclicamente revisionati per riformulare la loro struttura logica in termini di dipendenze logiche tra assioma e teoremi.

Questo paradigma generale è stato utilizzato in ogni fase dell'esperimento, quindi in riferimento a diversi obiettivi didattici specifici, in quanto segue descriveremo in che modo è stato accompagnato da particolari strategie comunicative per costruire sia il significato operativo che teorico dell'idea di teorema.

Una modalità di impiego particolare

L'idea di "dimostrazione" che si cerca di sviluppare in questa sperimentazione è quella di "dimostrazione in una teoria", quindi ogni passaggio di una dimostrazione deve essere prodotti tramite gli elementi di una teoria. Nell'Algebrista gli "elementi della teoria", che possono essere usati come strumenti per dimostrare, sono i bottoni a disposizione dell'utente. Di conseguenza, se vogliamo sviluppare dei significati di dimostrazione fuori dal micromondo, dobbiamo sviluppare un'idea di teoria come insieme di assiomi (e teoremi) esterna al micromondo. A tale fine introduciamo il *quadernino di algebra di classe*, che contiene gli assiomi ed i teoremi condivisi dalla classe, e di cui ogni alunno redige una copia personale. In altre parole tale quadernino rappresenta la teoria algebrica condivisa dalla classe. A questo punto, *dimostrare* "fuori" dall'Algebrista ha senso in termini di dimostrare usando gli assimo ed i teoremi contenuti nel *quadernino di algebra di classe*.

La relazione tra L'Algebrista ed il *quadernino di algebra di classe* è sfruttata al fine di originare significati pratici nell'Algebrista e guidarne l'evoluzione verso i significati algebrici rappresentati nel quadernino. Ad esempio in Cerulli (2004) si descrive come tale relazione può essere sfruttata dall'insegnante per sviluppare due particolari significati associati alla parola "teorema". Un teorema infatti è sia un elemento di una teoria (collocabile nella sua struttura logica), che uno strumento matematico che può essere utilizzato per dimostrare nuovi teoremi.

Nella nostra sperimentazione il significato "strumentale" della parola "teorema" viene sviluppato in relazione alla pratica dimostrativa con l'algebrista, e viene associato alla parola "bottone" (dell'Algebrista), in riferimento al comando ad esso corrispondente. Parallelamente, il significato di "elemento di una teoria" viene sviluppato collocando il teorema nel quadernino ed associando ad esso la parola "teorema". Nella pratica di classe quindi, in riferimento ad uno stesso teorema, si utilizza la parola "teorema" quando ci si riferisce alla sua natura di elemento di una teoria, e si utilizza la parola "bottone" quando ci si riferisce alla sua natura di strumento per dimostrare. Le attività di classe relative al primo significato corrispondono all'inserimento di teoremi nel quadernino ed alla revisione dello stesso. Le attività relative al secondo significato corrispondono alle dimostrazioni fatte in L'Algebrista.

Una volta sviluppati questi due significati è tuttavia necessario riunirli, in quanto l'obbiettivo didattico è che entrambe siano associati all'idea di teorema. Questo nella nostra sperimentazione viene fatto dall'insegnante utilizzando parole ibride come il termine "bottone/teorema" che viene usato in riferimento ad uno stesso teorema per spostare l'attenzione dei ragazzi dal suo utilizzo nell'Algebrista alla sua collocazione nel quadernino e vice versa (Cerulli 2005). Tale parola, nelle fasi finali dell'esperimento sparisce gradualmente via via che per gli alunni diventa obsoleta, viene sostituita con la parola "teorema" che finalmente comprende sia il significato strumentale che quello teorico. Al fine di realizzare questa evoluzione, nella nostra sperimentazione, riteniamo che sia fondamentale:

- introdurre due pratiche diverse per i due significati di teorema, ed assegnare una parola ad ogni pratica, in maniera da far sviluppare a pieno entrambe i significati
- introdurre delle parole ibride (ex. "bottone-teorema") che permettano di riunire e confrontare i due significati e permettano di costruire una relazione tra la pratica con L'Algebrista e la pratica con il *quadernino di algebra di classe*.
- Introdurre dei "territori" di frontiera dove i due significati si possano incontrare e dove trovino spazio i termini ibridi. Nel nostro caso questo avviene sia nelle discussioni di classe, che nelle consegne di dimostrazione su carta e penna dove agli alunni è permesso sia richiamare i teoremi del quadernino che i bottoni dell'algebrista. Man mano che il significato di teorema si consolida, gli alunni abbandonano i riferimenti espliciti all'Algebrista riferendosi direttamente ai teoremi piuttosto che ai bottoni.

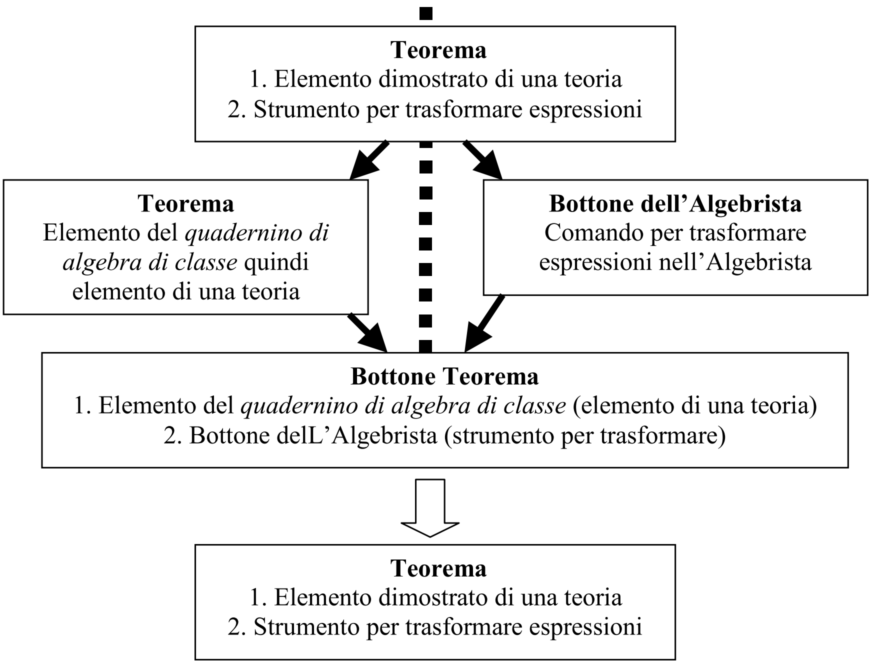


Figure 2 - I significati teorico e strumentale dell'idea di teorema vengono sviluppato tramite due pratiche distinte, quella della redazione del quadernino e quella dimostrativa nell'Algebrista; tramite strategie communicative e l'utilizzo di parole ibride, tali significati vengono ricongiunti nella parola unica "teorema".

Funzionalità didattiche per introdurre all'idea di teoria e dimostrazione

A nostro avviso questo tipo di approccio può essere utilizzato in altre situazioni in cui l'obiettivo didattico consiste nell'introdurre gli alunni all'idea di teoria e dimostrazione, e più in particolare ai due significati teorico e strumentale della parola "teorema" di cui abbiamo discusso sopra. Ricordiamo che un approccio simile è stato utilizzato, secondo la stessa prospettiva teorica, in sperimentazioni basate su Cabri nell'ambito della geometria (Mariotti ….), e tentiamo quindi di estrapolarne le caratteristiche principali comuni alle due esperienze esprimendole utilizzando il costrutto delle *funzionalità didattiche* (cfr. Cerulli, Pedemonte, Robutti).

Supponiamo di avere un micromondo con le seguenti caratteristiche (**caratteristiche dell'artefatto**):

1. gli oggetti del micromondo possono essere interpretabili come oggetti matematici e come tali possono essere manipolati

2. I comandi del micromondo, che permettono di manipolare gli oggetti, corrispondono agli assiomi, ai teoremi, alle definizioni, di una teoria

3. ci sia una corrispondenza tra il manipolare gli oggetti con i comandi, e l'applicare gli assiomi (teoremi, definizioni) ai corrispondenti oggetti matematici.

4. si possibile aggiungere nuovi comandi o oggetti corrispondenti in qualche modo a teoremi.

Supponiamo di avere il seguente **obiettivo didattico**: *introduzione degli alunni all'idea di teoria e dimostrazione, e più in particolare ai due significati teorico e strumentale dell'idea di teorema.*

Allora si possono pensare delle **modalità di impiego** del micromondo mirate al suddetto obiettivo didattico, sulla base dei seguenti elementi chiave:

- Introduzione di una pratica "strumentale" basata sul micromondo, in cui i comandi vengano utilizzati per manipolare gli oggetti matematici.
- Introduzione di pratiche di verbalizzazione che permettano di interpretare dale pratica come pratica dimostrativa.
- Introduzione di un *quadernino di classe* che rappresenti gli aspetti teorici dell'attività e contenga gli assiomi, le definizioni ed i teoremi dimostrati e che venga ciclicamente aggiornato/revisionato.
- I significati sviluppati nelle due diverse pratiche potranno essere associati a terminologie, quindi potranno esserci parole diverse per indicare la rappresentazione di uno stesso concetto matematico nel *micromondo* oppure nel *quadernino*.
- Le terminologie derivate dalle due diverse pratiche potranno essere messe in relazione l'una con l'altra, questo potrà essere fatto tramite l'uso di parole ibride che permetteranno di convogliare in un'unica parola entrambe i significati.
- Per favorire il consolidamento delle singole pratiche, ma anche il loro ricongiungimento, è necessario creare territori di frontiera dove si possa riflettere sulle due pratiche verbalizzandole ed eventualmente mescolando le diverse terminologie.
- Il micromondo ed il quadernino devono svilupparsi in stretta relazione l'uno con l'altro, nutrendosi vicendevolmente con attività che sfruttino termini ibridi e si sviluppino in un territorio di frontiera (ex. Discussione in classe) portando ad:
- inserire nuovi elementi nel quadernino a partire da riflessioni sulle pratiche effettuate con il micromondo
- identificare o introdurre nel micromondo comandi o oggetti corrispondenti agli elementi del quadernino.
- I significati "teorici" e "strumentali" emersi dovranno gradualmente essere ricongiunti tramite i territori di frontiera e le parole ibride di cui sopra, convogliandoli entrambe in un'idea unificata del concetto di teorema sia come strumento pratico che come elemento di una teoria strutturata.

Bibliografia

Bartolini Bussi M.G. (1996), Mathematical *Discussion and Perspective Drawing in Primary School*. In Educational Studies in Mathematics, 31 (1-2), 11-41.

Boero P., Dapueto C., Ferrari P., Ferrero E., Garuti R., Lemut E., Parenti L., Scali, E. (1995), *Aspects of the Mathematics-Culture relationship in mathematics Teaching-Learning in compulsory school*. Proc. of PME-XIX, Recife, Brasil.

Cerulli M., Pedemonte B., Robotti E., *Funzionalità didattiche: uno strumento operativo per progettare e analizzare esperienze di laboratorio*.

Cerulli M. (2004), *Introducing pupils to algebra as a theory: L'Algebrista a san instrument of semiotic mediation*. Tesi di Dottorato in Matematica presso "Università degli Studi di Pisa". http://telearn.noe-kaleidoscope.org/warehouse/Michele_Cerulli_PhD_Thesis_2004.pdf.

Cerulli M., Mariotti M.A. (2003),*"Building theories: working in a microworld and writing the Mathematical Notebook"*. In "Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA". Vol.

II, pp. 181-188. Edited by Neil A. Pateman, Barbara J. Dougherty, Joseph Zilliox. CRDG, College of Education, University of Hawai'i, Honolulu, HI, USA.

M. Cerulli, M.A. Mariotti (2000), *"L'Algebrista: un manipolatore simbolico elementare*", in "DIDAMATICA 2000 Informatica per la Didattica", Atti del convegno, Vol. 1 "Lavori Scientifici", a cura di A.Andronico-G.Casadei-G.Sacerdoti. Società Editrice "Il Ponte Vecchio", 2000.

Mariotti M.A., Cerulli M. (2003), "*Espressioni numeriche ed espressioni letterali: continuità o rottura?*". In "La matematica e la sua didattica", n. 1-2003, pg 43-63. Pitagora Editrice. ISSN 1120-9968.

Mariotti M.A. (2002), *Influence of technologies advances on students' mathematical learning*. In corso di pubblicazione in "Enlgish L. (ed.) Handbook of international research in mathematics education", LEA.

Noss R., Hoyles C. (1997), *Windows on mathematical meanings (learning cultures and computers)*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Prodi G. (1975), *Matematica come scoperta, 1,* (Prima Edizione). Casa editrice G. D'Anna, Messina-Firenze.

Area e perimetro. Una proposta per la Scuola secondaria di 1° grado

Grazia Grassi - SSIS Bologna, ITIS Majorana, San Lazzaro di Savena

1. Premessa

Il tema "area e perimetro" è considerato talvolta elementare; in realtà, presenta difficoltà concettuali che sono presenti anche negli studenti dei corsi di scuola secondaria, fino all'università, e persino negli adulti. I concetti di perimetro ed area sono spesso confusi dagli allievi e ciò dipende dal fatto che, nella prassi didattica più comune, l'attenzione è posta più sulla linea disegnata come contorno che non sulla superficie al suo interno, insistendo sulle diversità tra perimetro ed area piuttosto che sulle loro reciproche relazioni.

A ciò si affiancano le difficoltà correlate con il concetto di misura di una lunghezza e di una superficie; in particolare, la misura di una superficie, in quanto misura prodotto di misure lineari, coinvolge le relazioni che le unità di superficie mantengono con le unità di lunghezza, essendo le prime sussidiarie alle seconde come prodotto di misure . Tali relazioni possono essere comprese solo a partire da relazioni spaziali che a loro volta devono essere coordinate con relazioni moltiplicative[1] .

La consapevolezza della diversità concettuale tra area e perimetro va acquisita attraverso molteplici esperienze che coinvolgano anche modelli dinamici che aiutino a visualizzarne le relazioni , in quanto gli ostacoli che si frappongono all'acquisizione dei concetti di perimetro ed area non sono solo di natura epistemologica, ma anche di natura didattica.

2. Considerazioni didattiche

Le Indicazioni per il curricolo di cui al D.M. n. 68 del 31/07/07 riferite al primo ciclo dell'istruzione sottolineano come " *Ad ogni livello scolastico, il risolvere problemi, anche con strumenti e risorse digitali, offra occasioni per acquisire nuovi concetti ed abilità per arricchire il significato di concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza*".

In relazione all'introduzione dei concetti di area e perimetro, nella scuola primaria e secondaria di I grado è prassi didattica usuale affrontare inizialmente la misura di perimetri e superfici mediante il ricorso a misure dirette (ad esempio, con geopiani, quadrettature …), a cui fare seguire, in una fase immediatamente seguente, il ricorso a misure indirette, soprattutto nel caso delle superfici, con l'uso di formule che a loro volta richiamano misure lineari. Si ritiene spesso scontato che, se uno studente è in grado di compiere una misura diretta, allora è già in grado anche di formalizzare il risultato in formule più o meno complesse. Si presuppone che lo studente sappia gestire scritture come, ad esempio: $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ per il calcolo dell'area del trapezio, cioè che sappia gestire il registro algebrico in modo consapevole e cogliere il significato delle scritture in esame, superando gli aspetti legati alla sola sintassi.

L'alto numero di errori che si hanno frequentemente negli elaborati degli allievi però evidenzia spesso negli studenti la presenza di *conoscenze* solo *strumentali,* cioè l'uso di regole senza giustificazioni, piuttosto che di *conoscenze relazionali* intese come l'abilità di sapere motivare correttamente le regole usate.

D'altro canto, il limitato ricorso a trasformazioni di figure, in modo da conservare o modificare area e perimetro, e l'uso di figure standard crea misconcezioni sul termine stesso di trasformazione inteso frequentemente come rimpicciolimento o ingrandimento o spostamento nel piano, con tutte le ambiguità connesse con l'uso ingenuo di tali termini.

Per dare senso e significato alla matematica appresa, un ruolo centrale può essere assunto dal Laboratorio di matematica che nel volume Matematica 2003[2] è così definito: "*Il laboratorio di mate-*

---

[1] D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. [Bologna, Italia]. 2, 165-190.

Chamorro M. C. (2001-02). Le difficoltà nell'insegnamento – apprendimento delle grandezze nella scuola di base. *La matematica e la sua didattica*. I parte: 4, 2001, 332-351. II parte: 1, 2002, 58-77.

[2] A cura dell'Unione Matematica Italiana e rivolto al Primo ciclo di istruzione

matica non costituisce un nucleo di contenuto né di processo, ma si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici".

Si tratta quindi di proporre attività didattiche significative per la costruzione del senso e del significato degli oggetti matematici che gli studenti incontrano nello studio della geometria, nel caso in esame dei concetti di area e di perimetro.

Si tratta di un'altra faccia di quello che, già nella Scuola secondaria di I grado, si chiama insegnamento/apprendimento sensato dell'algebra.

3. Problemi su area e perimetro di figure piane

Le già citate Indicazioni Nazionali di cui al D.M. n.68 del 31/07/07 dichiarano che "*caratteristica della pratica matematica è la soluzione di problemi*". Con il termine problema si intendono "*questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola*".

Si tratta di un superamento del tradizionale problema scolastico (che in molti casi già contiene quesiti su perimetro ed area di figure piane). Infatti, nei problemi che gli studenti si trovano ad affrontare di solito a scuola si possono riconoscere le seguenti caratteristiche: il problema ha una ed una sola risposta, per ottenere tale risposta: devono essere utilizzati tutti i dati, non è necessaria alcuna ulteriore indicazione, un uso lecito dei dati è tale da attivare procedure e regole familiari (aritmetiche o algebriche) che devono essere combinate nei modi consentiti.

Risolvere problemi e scegliere strategie di risoluzione deve invece diventare un mezzo estremamente efficace per la formazione dei concetti della matematica (ad esempio, concetto di rapporto, di misura di una lunghezza o di una superficie).

Si consideri a tale proposito il seguente problema:

In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un secondo quadrato PQRS. Studiare come varia l'area di questo secondo quadrato nei casi in cui la distanza di P da D varia, con P appartenente al lato DC.

In un ambiente di geometria dinamica, si costruisce il quadrato ABCD, di dato lato AB, e si prende un punto P a piacere su DC. Al variare del punto P sul lato DC del quadrato si costruisce la tabella (misura di DP, area del quadrato PQRS).

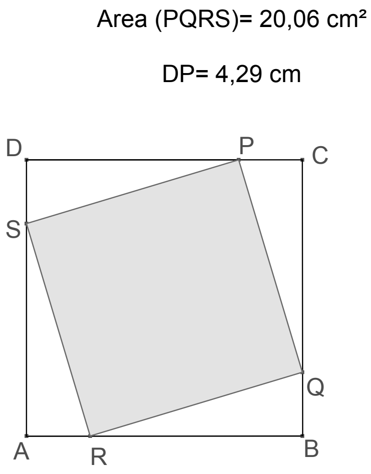


Fig. 1

	DP=	Area (PQRS)=
1	0,97	22,16
2	0,84	23,15
3	1,29	20,06
4	1,74	17,78
5	2,24	16,17
6	2,53	15,70
7	2,95	15,61
8	3,32	16,12
9	3,58	16,81
10	3,87	17,89
11	4,26	19,91
12	4,53	21,60
13	4,89	24,43
14	5,18	27,03
15	5,58	31,12
16		
17		

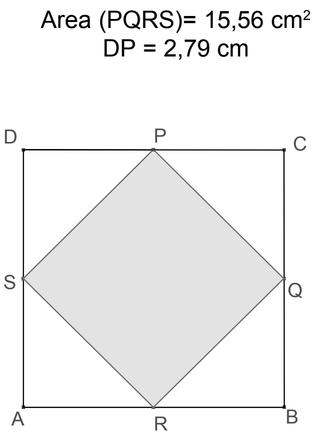


Fig.2

Si chiede agli studenti di formulare ipotesi su come varia l'area del quadrato PQRS al variare del punto P sul lato DC del quadrato. Si perviene alla costruzione della tabella (comando *Tabella*) di cui alla Fig.1. Si può congetturare che l'area di PQRS, prima decrescente e poi crescente, sia minima in un corrispondenza di un punto interno al segmento DC.

La successiva congettura riguarda la posizione del punto P su DC. Compilando una seconda tabella per un numero maggiore di coppie di valori, si può supporre che tale punto corrisponda al punto medio di DC.

La verifica di tale ipotesi avviene ancora in ambiente di geometria dinamica (*Punto medio* del segmento DC) come si vede in Fig. 2.

Si può chiedere a questo punto agli allievi quando l'area di PQRS è massima e pervenire a verificare che l'area di PQRS è massima quando P coincide con gli estremi del segmento DC.

Per gli studenti della scuola secondaria di I grado è possibile rappresentare la situazione nel registro cartesiano (comando *Mostra gli assi*) e, usando il comando *Traccia*, rappresentare nel piano cartesiano le coppie di valori riportate nella tabella (Fig.3).

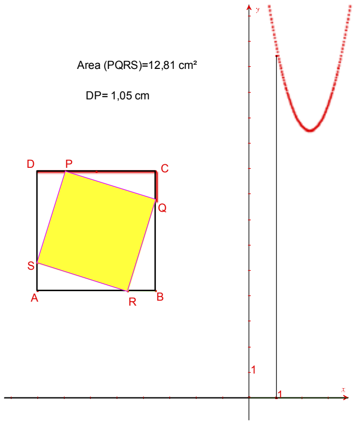


Fig. 3

Si può anche pervenire all'equazione della curva luogo dei punti tracciati che hanno come ascissa la lunghezza del segmento DP e come ordinata il valore dell'area del quadrato PQRS. Con gli strumenti della geometria analitica, indicando con x la lunghezza del segmento DP e con *10-x* la lunghezza del segmento DS, l'area y di PQRS è espressa dalla seguente relazione: $y = 100 - \frac{4x(10-x)}{2}$, cioè $y = 2x^2 - 20x + 100$

Un esempio riconducibile al precedente si trova nel volume Matematica 2001 a cura dell'Unione Matematica Italiana[3]

Il quesito riguarda come varia l'area del triangolo isoscele al variare dell'angolo al vertice.

Il triangolo è una delle figure poligonali usuali della geometria elementare ed è associato a classiche misconcezioni relative al calcolo dell'area che si ottiene, per prassi consolidata, con la formula $A = \frac{b \cdot h}{2}$, dove la base b è il lato in posizione orizzontale. In questo modo é messo in secondo piano il concetto di retta perpendicolare da un punto esterno ad una retta che sta alla base del concetto di altezza relativa ad un lato qualsiasi, non necessariamente da denominare *base* né da porre in posizione orizzontale.

[3] Scaricabile dal sito dell'UMI in formato Pdf.

Nel caso particolare del triangolo isoscele, inoltre il disegno che rappresenta tale figura solitamente si colloca la base in posizione orizzontale e l'angolo al vertice ha ampiezza minore di un angolo retto. Si tratta di stereotipi che l'uso di un software di geometria dinamica può aiutare a superare.

In tal modo anche il calcolo dell'area si può fare ricorso alla formulazione di congetture che gli allievi dovranno sostenere o confutare con opportune argomentazioni e verifiche per giungere, solo come momento conclusivo, dopo una significativa fase di esplorazione, alle ben note relazioni algebriche quale è, per il triangolo, la formula $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Si consideri il seguente problema (tratto dal volume Umi - Matematica 2001):

È dato un segmento di lunghezza k (in cm). Costruire un triangolo isoscele che abbia i due lati uguali della stessa lunghezza del segmento dato. Come si modifica il triangolo trascinando i punti della costruzione che di possono muovere?(tratto da Matematica 2003. Unione Matematica Italiana)

Soluzione sintetica

In un ambiente di geometria dinamica si costruisca un triangolo isoscele ABC. Si disegni poi una circonferenza di centro A, di raggio assegnato uguale al segmento dato (comando *Compasso*) e si disegni un triangolo con il vertice nel centro A e avente gli altri due vertici B e C sulla circonferenza. (comando *Triangolo, Punti A e B su un oggetto*).(Fig.4)

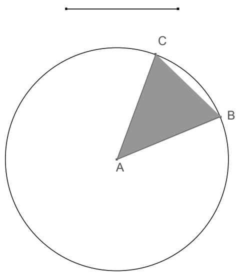


Fig. 4

Si può studiare come varia l'area del triangolo al variare di uno dei vertici del triangolo che stanno sulla circonferenza. Si possono formulare ipotesi circa quando l'area del triangolo ABC è massima oppure su quali coppie di triangoli (con il vertice in A) hanno uguale area? (Fig.5 e Fig.6).

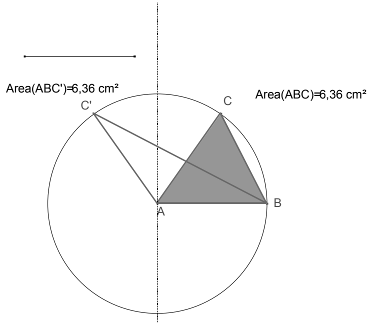


Fig. 5

La risposta a tali domande è preceduta da un'attività di esplorazione della situazione problematica e di formulazione di congetture da verificare o meno in un ambiente di geometria dinamica.

L'area di ABC è, in questo caso, calcolata con il comando *Area*.

Tracciando le rette perpendicolari dai punti C' e C alla retta che contiene AB e designando i rispettivi punti di intersezione H' e H, si possono calcolare le aree di ABC e di ABC' anche come semiprodotti della misura della lunghezza di AB con C'H oppure con CH (comando *Calcolatrice*). (Fig.8). L'uso del comando *Calcolatrice* coinvolge in modo esplicito il concetto di altezza e di perpendicolarità tra rette.

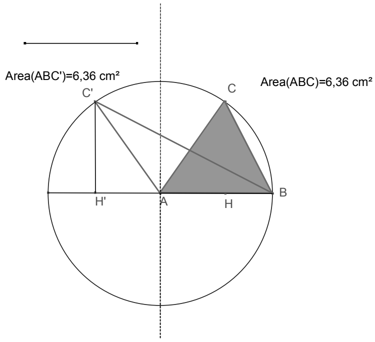


Fig.6

I procedimenti di risoluzione descritti, che richiedono conoscenze di geometria elementare, coinvolgono il registro delle rappresentazioni geometriche che ben si presta ad evidenziare . relazioni di perpendicolarità tra rette, di equiestensione tra figure piane, di simmetria nel piano.

Soluzione algebrica

La scelta del registro di rappresentazione non è neutra rispetto alle proprietà della figura geometrica che si desidera evidenziare. L'interpretazione del problema proposto nel registro algebrico consente di evidenziare relazioni di tipo funzionale, ad esempio, tra l'altezza relativa ad uno dei lati uguali e l'area del triangolo.

Con l'uso di un software di geometria dinamica, inserendo gli assi cartesiani e definendo opportunamente le relazioni tra l'area e la variabile scelta come variabile indipendente si può costruire il relativo grafico$y = f(x)$.

Il riferimento allo studio delle relazioni è presente nelle Indicazioni nazionali di cui al D.M. 31/07/07 n. 68. Per la classe terza della Scuola Secondaria di I grado si legge

- *Costruire, interpretare e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.*
- *Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni e per conoscere in particolare le funzioni del tipo:* $y = ax, y = \frac{a}{x}, y = ax^2$ *e i loro grafici.*

Si consideri il caso in cui l'area del triangolo è espressa in funzione dell'altezza relativa ad uno dei lati uguali. Sia, ad esempio, $BH = x$ (Fig.7).

L'area del triangolo ACB è, quindi:

Con un opportuno software di geometria dinamica, è possibile calcolare l'area di ABC (comando *Area*), costruire una tabella di valori (x,y) (comando *Tabella*), fino a giungere a disegnare il luogo dei punti (comando *Luogo*) che soddisfano la relazione $y = \frac{kx}{2}, \quad k > 0$ (fig.4).

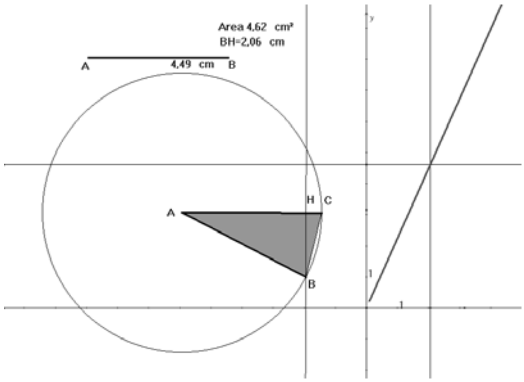


Fig. 7

Si può anche considerare il caso con x si indichi metà del lato disuguale del triangolo isoscele; in tal caso l'altezza relativa a tale lato si esprime come $\sqrt{k^2 - x^2}$. La relazione funzionale che esprime l'area del triangolo in tal caso è: $y = \sqrt{k^2 - x^2}$

Si passa quindi dal disegno geometrico, alla rappresentazione con una tabella di valori (x,y) al diagramma cartesiano per poi pervenire all'equazione del luogo dei punti del piano che soddisfano una relazione matematica che nel caso prima esaminato è una funzione lineare nella variabile x. La rappresentazione algebrica utilizzata pone in evidenza la relazione che esiste tra grandezze geometriche (base e superficie) e tra le loro misure.

4. Conclusioni

L'uso di un software di geometria dinamica, in una situazione di laboratorio di matematica, consente di evitare l'uso di figure stereotipate che portano lo studente a convincersi che se gli viene posto un quesito riguardante l'area di in figura piana questa debba essere in una posizione ritenuta usuale nella prassi scolastica e ci debba essere sempre una ben precisa formula per calcolarla. Un'altra convinzione errata è che le relazioni tra area e perimetro siano sempre del tipo "*Se il perimetro aumenta, l'area aumenta*".

Il ricorso a congetture, alla loro verifica o meno e a diversi registri rappresentativi è pertanto alla base della corretta costruzione dei concetti duali di perimetro e area.

I tre punti sono allineati? Una proposta per la Scuola Secondaria di 2° grado

Marilina Ajello e Ercole Castagnola***

* Liceo Scientifico Cannizzaro di Palermo, SISIS Palermo ** NRD Università di Napoli "Federico II"

Questo articolo si propone di illustrare, attraverso un'attività Laboratoriale (nell'accezione più ampia del termine), quello che la Commissione Scientifica incaricata di elaborare le proposte per un curricolo di matematica per la Scuola Secondaria ha chiamato "uso consapevole delle tecnologie".

L'attività qui svolta prende spunto da quella presentata nel volume Matematica 2003[1] (Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica – ciclo secondario) in cui sono raccolte proposte elaborate da insegnanti di Scuola Secondaria di secondo grado nell'ambito delle finalità previste da un Protocollo d'Intesa fra MPI, UMI (Unione Matematica Italiana) e SIS (Società Italiana di Statistica), con la collaborazione di Mathesis.

La proposta è rivolta studenti del primo biennio e viene qui sviluppata utilizzando una calcolatrice grafico-simbolica

Di seguito sono riportate le abilità, le conoscenze e i nuclei coinvolti.

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti
Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure con particolare attenzione alle cifre significative.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. Rappresentazione dei numeri sulla retta. Lunghezze. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza fra due punti. Relazioni d'ordine.	Misurare Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi

Si lavora sul piano cartesiano, con particolare attenzione al calcolo delle lunghezze dei segmenti. È importante che gli studenti che utilizzano strumenti tecnologici come le calcolatrici grafico-simboliche affrontino, proprio ai fini di un uso consapevole di tali tecnologie, anche le questioni riguardanti il problema delle approssimazioni.

Un primo esempio di attività

Questa attività mette in evidenza le difficoltà che possono incontrare gli studenti che usano uno strumento che consente loro di lavorare sia in modalità simbolica sia in modalità numerica. Si lavora sul piano cartesiano e inizialmente si utilizza unicamente una funzione distanza costruita insieme agli studenti sfruttando le potenzialità di programmazione della calcolatrice.

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti di rappresentare i seguenti tre punti sul piano cartesiano utilizzando il foglio a quadretti del quaderno: $A(-4, -2)$, $B(2, 3)$, $C(4, 5)$. Pone poi la seguente domanda: i tre punti sono allineati?

Ricorda loro che tre punti A, B, C sono allineati (e B è compreso tra A e C) se

$$\mathrm{dist}(A, B) + \mathrm{dist}(B, C) = \mathrm{dist}(A, C) \qquad (1)$$

[1] Il volume che presenta le proposte di curricoli elaborate dalla Commissione e gli esempi di attività è interamente scaricabile all'indirizzo: http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2003/matematica2003.html

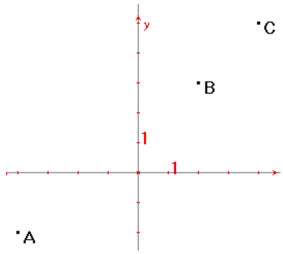


Figura 1

Per dist (A, B) si intende la distanza tra i punti A e B calcolata con il Teorema di Pitagora nel piano cartesiano, facilmente implementabile su una calcolatrice grafico-simbolica, come risulta dalla seguente schermata.

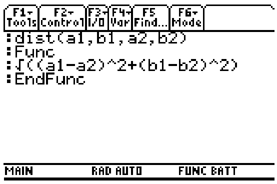


Figura 2

Gli studenti, che hanno a disposizione una calcolatrice grafico-simbolica, vengono divisi in due gruppi: al primo gruppo viene data la consegna di eseguire i calcoli in modalità esatta, il secondo gruppo dovrà invece approssimare ciascun risultato alla prima cifra decimale. A quel punto l'insegnante chiede ai due gruppi la risposta al quesito.

I Gruppo

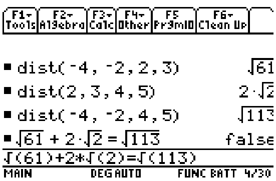


Figura 3

II Gruppo

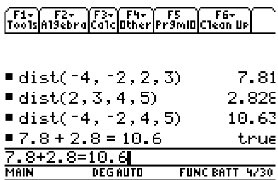


Figura 4

I risultati sono chiaramente in contrasto e quindi è necessario approfondire la questione dell'allineamento, solo in apparenza semplice.

OSSERVAZIONE. Questi primi esempi sono già sufficienti a mettere in evidenza una caratteristica importante dello strumento tecnologico utilizzato. È possibile da parte dell'utente definire nuove funzioni che da quel momento in poi diventano utilizzabili allo stesso modo delle funzioni inserite di "default" nella calcolatrice. Questo permette allo studente di crearsi una propria libreria di funzioni che gli consente di affrontare in modo adeguato gli argomenti proposti dall'insegnante. Altro vantaggio di non trascurabile importanza è il fatto che ogni funzione così costruita è facilmente condivisibile con i propri compagni di classe.

Seconda fase

• A questo punto l'insegnante interviene presentando le due seguenti figure, che sfruttano le diverse possibilità di rappresentazione dello strumento: nell'ambiente "Home", cioè l'ambiente di calcolo (figura a sinistra), si inserisce il comando "Line" che permette di rappresentare nell'ambiente grafico (figura a destra) il segmento i cui estremi hanno le coordinate specificate nel comando Line.

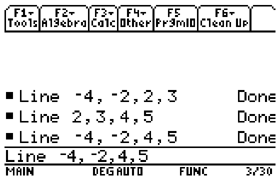


Figura 5

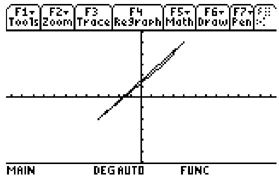


Figura 6

Osservando la Figura 6 gli studenti si convincono facilmente che i tre punti sono i vertici di un triangolo molto "schiacciato" e probabilmente arrivano alla conclusione che ha giocato un ruolo negativo l'approssimazione introdotta.

• L'insegnante propone allora la stessa questione con un'altra terna di punti sicuramente allineati: $A(-1, -1)$, $B(2, 2)$, $C(15, 15)$, (tutti gli studenti riconosceranno i punti della bisettrice $y = x$) e si tratta solo di verificare un risultato noto, precisando agli studenti che, quando lavorano in modalità approssimata, possono scegliere il numero di cifre decimali da utilizzare. Inizialmente gli studenti scelgono di visualizzare 8 cifre e ottengono il risultato riportato in Figura 8.

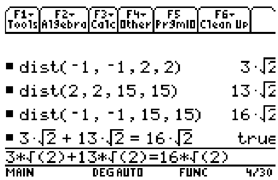


Figura 7

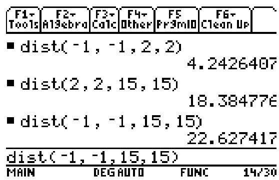


Figura 8

Ma, utilizzando la modalità approssimata, la verifica dell'allineamento fornisce una risposta negativa (Figura 9), che permane anche quando gli studenti decidono di utilizzare il massimo numero di cifre consentito dalla calcolatrice. La freccia che compare sulla destra dello schermo indica che esistono altre cifre da visualizzare su quella riga e ciò si può fare molto semplicemente tramite il cursore (come mostra la Figura 10).

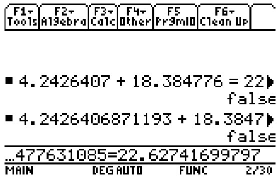


Figura 9

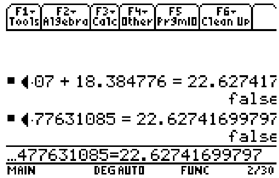


Figura 10

• Si invitano quindi gli studenti a riflettere sulla domanda "Quante sono le cifre decimali significative?". I ragazzi, che al termine della prima fase erano convinti che l'errore fosse dovuto al fatto che si era considerata una sola cifra decimale, ora, invece, rivedranno le loro convinzioni alla luce dell'ultimo risultato e l'insegnante potrà affermare in modo categorico che l'unica risposta veramente corretta è: "Dipende!".

Certamente questa prima proposta di lavoro non ha come obiettivo quello di confondere le idee agli studenti o di lasciare aperta la questione dell'allineamento di tre punti. Vuol essere, invece, il punto di partenza per due tipi di riflessione: una di carattere più prettamente matematico ed una di carattere più applicativo. In primo luogo occorre che gli studenti facciano riferimento al significato dell'allineamento nel contesto della geometria analitica: tre punti distinti sono allineati se uno di essi appartiene alla retta che passa per gli altri due e potrebbero utilizzare questa informazione per la verifica. Ma si può indirizzarli alla scelta della distanza, secondo la relazione (1) di natura più prettamente geometrica. In secondo luogo, volendo verificare questa relazione facendo uso di uno strumento di calcolo automatico, occorre prestare attenzione all'ambiente e alle modalità di lavoro in cui si opera. Come si è visto nella prima terna di punti (opportunamente scelta), in modalità esatta la relazione (1) non è soddisfatta, mentre lo è in modalità approssimata, invece nella seconda terna di punti la situazione è ribaltata. Tutto questo dovrebbe indurre gli studenti a far sempre riferimento alla teoria che soggiace all'ambiente scelto e alla modalità di calcolo utilizzata, per poter essere sicuri dell'attendibilità dei risultati.

Altri esempi di attività da svolgersi nel biennio

Questa nuova attività utilizza ancora la funzione distanza vista precedentemente e permette agli studenti di indagare la natura di un triangolo note le coordinate dei suoi vertici. L'insegnante lascia liberi gli studenti di scegliere le coordinate dei vertici, avendo cura di raccomandare loro di non limitarsi a un solo quadrante del piano cartesiano e nello stesso tempo di scegliere punti per i quali non sia agevole la visualizzazione su un comune foglio a quadretti. Una possibile terna di punti potrebbe essere A(-1, -7), B(2, -5) e C(104, 15). Se si utilizza il comando Line per la visualizzazione [come è stato fatto nell'attività precedente] si ottiene una rappresentazione di difficile interpretazione, come mostra la schermata riportata in Figura 12. In altre parole è praticamente impossibile dedurre la natura del triangolo attraverso il semplice esame della figura.

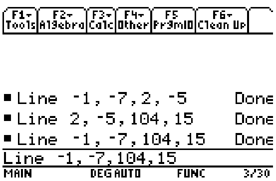


Figura 11

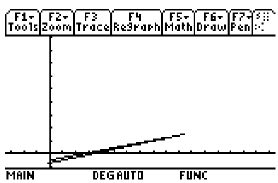


Figura 12

Utilizzando invece la funzione distanza si ottiene immediatamente il seguente risultato

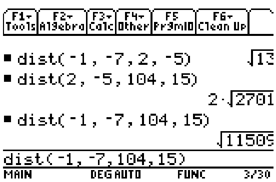


Figura 13

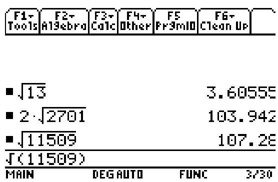


Figura 14

cioè $\overline{AB} = \sqrt{13}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{2701}$ e, $\overline{AC} = \sqrt{11709}$ con $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$. Si può quindi dedurre che il triangolo in esame è scaleno. Ma i triangoli si possono classificare anche in base agli angoli: è possibile dire qualcosa in tal senso per il nostro triangolo? È immediato verificare se DABC è rettangolo oppure no: basta applicare il Teorema di Pitagora (o, meglio, il teorema inverso). Cioè verificare se 13 + 4×2701 = 11509. La calcolatrice fornisce immediatamente la risposta al nostro quesito: il triangolo *non* è rettangolo (Figura 15).

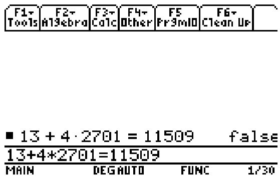


Figura 15

Se il nostro triangolo fosse rettangolo di cateti *AB* e *BC*, che misura avrebbe l'ipotenusa? Sempre per il Teorema di Pitagora l'ipotenusa dovrebbe avere una lunghezza pari a $\sqrt{13+4\cdot 2701}=\sqrt{10817}$ e chiaramente $\sqrt{10817}<\sqrt{11509}$

In altre parole il lato più lungo del triangolo D*ABC* ha lunghezza mag-giore dell'ipotetico triangolo rettangolo avente i due cateti congruenti ai rimanenti due lati del nostro triangolo. Intuitivamente si è portati a supporre che l'angolo opposto al lato *AC* è ottuso. Ma vale la pena di far presente agli studenti che esiste un teorema, detto anche Teorema della "Cerniera" (di non facile dimostrazione), che, assieme al relativo teorema inverso, permette di concludere che il nostro triangolo è ottusangolo.

OSSERVAZIONE. Il teorema citato con il relativo teorema inverso hanno i seguenti enunciati.

TEOREMA (*Il Teorema della Cerniera*). Se due lati di un triangolo sono congruenti, rispettivamente, a due lati di un secondo triangolo e l'angolo compreso tra i due lati del primo triangolo ha ampiezza maggiore dell'angolo compreso nel secondo triangolo, allora il terzo lato del primo triangolo è più lungo del terzo lato del secondo triangolo.

Riformulazione. Sono dati due triangoli D*ABC* e D*DEF*, con $\overline{AB}=\overline{DE}$ e $\overline{AC}=\overline{DF}$

Se Ð*A* > Ð*B*, allora $\overline{BC}>\overline{EF}$.

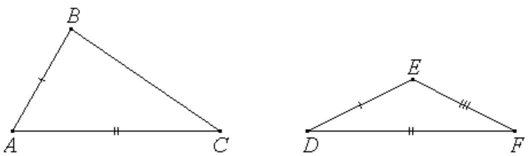


Figura 16

TEOREMA (*Il Teorema Inverso del Teorema della Cerniera*). Se due lati di un triangolo sono congruenti, rispettivamente, a due lati di un secondo triangolo e il terzo lato del primo triangolo è più lungo del terzo lato del secondo, allora l'angolo compreso tra i due lati del primo triangolo ha ampiezza maggiore dell'angolo compreso tra i due lati del secondo triangolo.

Riformulazione. Sono dati due triangoli D*ABC* e D*DEF*, con $\overline{AB}=\overline{DE}$ e $\overline{AC}=\overline{DF}$

Se $\overline{BC}>\overline{EF}$, allora Ð*A* > Ð*B*.

OSSERVAZIONE. A questo punto l'insegnante può anticipare agli studenti che nel corso del triennio, applicando la trigonometria, essi saranno in grado di assegnare un valore ben preciso all'ampiezza di ognuno degli angoli del loro triangolo.

Possiamo a questo punto calcolare il valore dell'area del nostro triangolo utilizzando una formula che utilizza solamente le lunghezze dei lati, cioè la Formula di Erone. Precisamente

Teorema (Formula di Erone). *L'area di un triangolo qualsiasi* D *ABC è data da*

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dove a, *b*, *c sono le lunghezze dei lati e* $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ *rappresenta il semiperimetro*.

Come si intuisce facilmente, è possibile implementare su una calcolatrice grafico-simbolica una funzione che, sfruttando la formula di Erone, prenda come valori di ingresso le lunghezze dei lati e dia in uscita l'area del triangolo. Le figure seguenti mostrano come realizzare tale funzione e qual è il risultato del calcolo per il nostro triangolo.

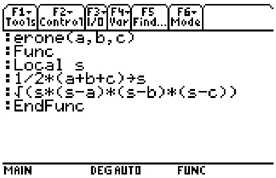


Figura 17

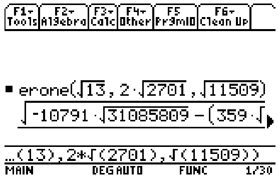


Figura 18

Il risultato sembra molto complicato (e di difficile visualizzazione!) a causa della presenza di un gran numero di radici quadrate, tuttavia se si passa alla modalità numerica si ottiene come risultato addirittura un numero intero (Figura 18).

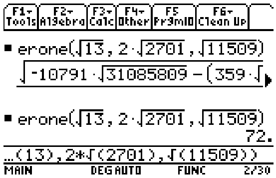


Figura 19

È possibile giustificare questo risultato per altra via (cioè, senza ricorrere a un laborioso lavoro di semplificazione tramite un lungo "calcolo coi radicali")? In effetti esiste una formula che permette di calcolare l'area di un triangolo note le coordinate dei suoi vertici. Precisamente risulta

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left|\left(x_1y_2 - x_2y_1\right) + \left(x_2y_3 - x_3y_2\right) + \left(x_3y_1 - x_1y_3\right)\right|$$

Tale formula, che è il risultato del calcolo di un determinante, si può giustificare geometricamente mediante l'applicazione ripetuta della formula che fornisce l'area di un trapezio ed è di facile applicazione e facilmente implementabile. Le figure seguenti mostrano sia la sua definizione che l'utilizzo per il calcolo dell'area.

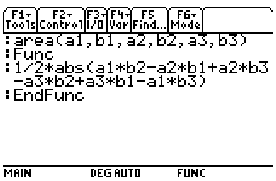


Figura 20

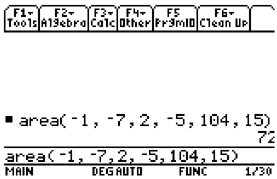


Figura 21

Il risultato è ovviamente in accordo con quanto ottenuto precedentemente. Avendo ora a disposizione il valore dell'area del triangolo, è possibile calcolare l'altezza relativa al lato *BC* e verificare che tale altezza è poco più dell'1% della base, giustificando in tal modo la "difficile" visualizzazione del triangolo.

Possibili attività al triennio

Al triennio, dopo aver dedicato qualche lezione alla programmazione sulla calcolatrice grafico-simbolica, è possibile preparare due programmi tra loro molto simili in grado di verificare l'allineamento di tre punti date in ingresso le loro coordinate. L'unica differenza tra i due programmi sta nel fatto che il primo lavora in modalità simbolica e il secondo in modalità numerica. Riportiamo qui di seguito i due programmi su due colonne per meglio evidenziare le differenze.

```
:allin()
:Prgm
:Local a1,b1,a2,b2,a3,b3,l1,
l2,l3,l,te
:ClrIO
:Disp "Inserisci le
coordinate"
:Disp "del primo punto"
:Input "a1 = ",a1
:Input "b1 = ",b1
:Disp "Inserisci le
coordinate"
:Disp "del secondo punto"
:Input "a2 = ",a2
:Input "b2 = ",b2
:Disp "Inserisci le
coordinate"
:Disp "del terzo punto"
:Input "a3 = ",a3
:Input "b3 = ",b3
:dist(a1,b1,a2,b2)!l1
:dist(a2,b2,a3,b3)!l2
:dist(a1,b1,a3,b3)!l3
:If l1>l2 Then
:l1!te: l2!l1: te!l3
:EndIf
:If l1>l3 Then
:l1!te: l3!l1: te!l3
:EndIf
:If l2>l3 Then
:l2!te: l3!l2: te!l3
:EndIf
:{l1,l2,l3}!l
:If l[1]+l[2]= l[3] Then
:Disp "I punti sono allineati"
:Else
:Disp "I punti non sono
allineati"
:EndIf
:EndPrgm
```

```
:allin1()
:Prgm
:Local a1,b1,a2,b2,a3,b3,l1,
l2,l3,l,te
:setMode(„Exact/Approx",
"APPROXIMATE")
:ClrIO
:Disp "Inserisci le
coordinate"
:Disp "del primo punto"
:Input "a1 = ",a1
:Input "b1 = ",b1
:Disp "Inserisci le
coordinate"
:Disp "del secondo punto"
:Input "a2 = ",a2
:Input "b2 = ",b2
:Disp "Inserisci le
coordinate"
:Disp "del terzo punto"
:Input "a3 = ",a3
:Input "b3 = ",b3
:dist(a1,b1,a2,b2)!l1
:dist(a2,b2,a3,b3)!l2
:dist(a1,b1,a3,b3)!l3
:If l1>l2 Then
:l1!te: l2!l1: te!l3
:EndIf
:If l1>l3 Then
:l1!te: l3!l1: te!l3
:EndIf
:If l2>l3 Then
:l2!te: l3!l2: te!l3
:EndIf
:{l1,l2,l3}!l
:If l[1]+l[2]= l[3] Then
:Disp "I punti sono allineati"
:Else
:Disp "I punti non sono
allineati"
:EndIf
:setMode("Exact/Approx","AUTO")
:EndPrgm
```

Come si può osservare l'unica differenza sta nel fatto che il secondo programma contiene due istruzioni in più: la prima fissa la modalità di calcolo in forma numerica e la seconda riporta alle condizioni di "default". Tuttavia i risultati sono completamente diversi! Di seguito vengono riportati la prima schermata al momento dell'inserimento dei dati e la schermata finale per il primo programma (che lavora in modo simbolico).

Figura 22

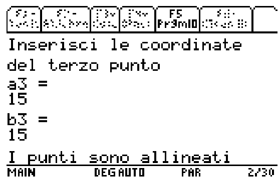


Figura 23

Vediamo ora le corrispondenti schermate nel caso del secondo programma.

Figura 24

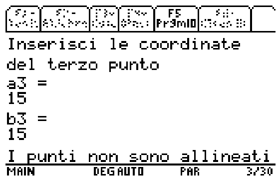


Figura 25

Anche in questo caso ha giocato un ruolo fondamentale la modalità di calcolo. Questo ulteriore esempio dovrebbe convincere gli studenti sulla necessità di aver sempre presenti le potenzialità e le limitazioni degli strumenti di calcolo impiegati nel risolvere un certo problema e sul fatto che tali potenzialità devono comunque essere adattata al problema che si intende affrontare.

OSSERVAZIONE. Qualche insegnante potrebbe considerare eccessivamente complesso il programma precedentemente illustrato e quindi scarsamente utilizzabile nella comune pratica didattica. Proporre agli studenti i primi elementi di programmazione (utilizzando un linguaggio notevolmente agile e ricco) in modo da metterli in grado di individuare un opportuno algoritmo che risolva il problema in esame può risultare estremamente utile anche dal punto di vista della comprensione degli aspetti matematici coinvolti nel problema stesso. In ogni caso, se l'insegnante ritiene che un dato programma sia eccessivamente complesso per poter essere elaborato da propri allievi (ma non è certo il caso di quello precedentemente illustrato!), può sempre prepararlo in modo autonomo e distribuirlo (in modo molto veloce) agli studenti, che lo useranno come una specie di "scatola nera".

Volendo proseguire con l'aspetto analitico del problema dell'allineamento, si può far costruire agli studenti una funzione che, date in ingresso le coordinate di due punti (espressi in questo caso come liste formate da due elementi), fornisca in uscita la relativa equazione. Le due schermate seguenti mostrano la relativa implementazione.

Figura 26

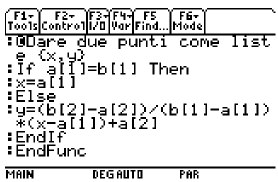


Figura 27

Si può a questo punto riprendere il problema iniziale che esaminava l'allineamento dei punti *A*(-4, -2), *B*(2, 3), *C*(4, 5) e ricavare l'equazione della retta passante per i primi due e poi verificare l'appartenenza del terzo punto a tale retta utilizzando uno speciale comando della calcolatrice che permette di valutare la validità di una certa uguaglianza sotto date condizioni.

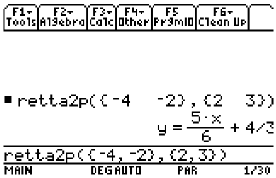


Figura 28

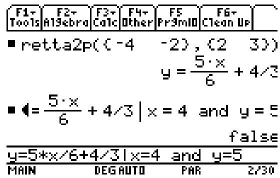


Figura 29

La risposta in questo caso è immediata e permette allo studente di apprezzare come, in questo caso, l'utilizzo dello strumento analitico (cioè l'equazione della retta) si dimostri superiore all'uso della distanza per verificare l'allineamento dei punti. Tutto questo lavoro dovrebbe far capire che, prima di affrontare la risoluzione di un problema, è opportuno riflettere su quali sono gli strumenti che si hanno a disposizione e quindi scegliere quella che si ritiene la migliore strategia da adottare.

Bambini-con-tecnologie alla scuola primaria*: il contapassi per descrivere grafici di moti*

Ornella Robutti, Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Ciò che un giovane deve domandare alla scuola è di essere messo in grado che la scienza la cerchi e la trovi lui.
Perciò ***la scuola è un laboratorio****, dove tutti siano compagni di lavoro, maestro e discepoli,*
e il maestro non esponga solo e dimostri, ma cerchi ed osservi insieme con loro,
sì che attori siano tutti ... Una scuola così fatta non vale solo a educare
l'intelligenza, ma, ciò che è più, ti forma la volontà. Vi si apprende
la serietà dello scopo, la tenacità dei mezzi, la risolutezza
accompagnata con la disciplina e con la pazienza,
vi si apprende innanzi tutto ad essere ***un uomo****.*

Francesco De Sanctis, 1872

Riferimenti teorici e didattici

Questo lavoro è nato sia con scopi di ricerca che di pratica didattica. Per quanto riguarda la ricerca, si usano studi che provengono dalla psicologia, dall'educazione matematica e dalle scienze cognitive; per quanto riguarda la pratica didattica, il lavoro si colloca in sintonia con le proposte di revisione curricolare che da alcuni anni hanno toccato la scuola in vari Paesi del mondo e in particolare in Italia (AAVV UMI, 2003).

La base di partenza è proprio l'idea di laboratorio proposta dall'UMI, come "un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti." (AAVV UMI, 2004).

Un laboratorio così inteso fa uso di esperienze percettivo-motorie, attuate fuori o dentro la classe, con l'uso di artefatti. Ritenere importanti per l'insegnamento le esperienze di tipo percettivo-motorio non è certamente una novità, e spesso si associa all'idea di far utilizzare agli allievi artefatti e materiali (Nemirovsky & Borba, 2003). Tale idea si colloca nella tradizione di educatori famosi, come Maria Montessori, Georges Cuisenaire, Caleb Gattegno, e Zoltan Dienes. Questi educatori osservarono, nella loro esperienza, che molti studenti coinvolti a lavorare con artefatti che potessero manipolare, usare, azionare con le loro mani si impegnavano con una intensità non presente quando dovevano semplicemente osservare una lavagna, o ascoltare un docente, o leggere un testo. D'altro canto, nella ricerca in didattica della matematica i risultati confermano che gli artefatti di per se stessi non possono apportare miglioramenti nella qualità dell'apprendimento, ma che occorre una profonda riflessione per inserire il loro uso nei processi di apprendimento. Occorre quindi una programmazione dettagliata dell'insegnante per introdurre gli artefatti nell'attività didattica.

Un recente libro (Borba & Villareal, 2006) costituisce un tentativo di rispondere al perché si utilizza la tecnologia nei processi educativi. E tale risposta ci consente di superare la dicotomia, assai radicata culturalmente e storicamente e anche supportata dai mass-media, tra la tecnologia da una parte e l'essere umano dall'altra: gli uomini utilizzatori, costruttori e sviluppatori di tecnologia, e gli strumenti tecnologici in quanto usati dall'uomo. La prospettiva di Borba ci suggerisce invece che la conoscenza è sempre prodotta collettivamente dagli uomini e tale idea supera quegli studi in ambito psicologico ed ergonomico, che si concentrano principalmente sulla relazione individuo-macchina. Riesce a superare tali studi in quanto vede la conoscenza (inclusa quella matematica) come prodotta insieme da *humans-with-media*, uomini-con-tecnologie. Nel fare ciò, Borba assume che l'apprendimento sia un processo sociale collettivo, di interazione tra esseri umani e include in questa collettività anche gli strumenti. Superata la dicotomia, Borba analizza le reciprocità del rapporto: l'influenza dell'uomo sulla tecnologia da una parte, e quella della tecnologia sull'uomo dall'altra. Qui sta la novità della sua ricerca: poichè i computer e i prodotti software che utilizziamo ci influenzano nella riorganizzazione del pensiero matematico, non si pongono solo come sostituti dell'uomo, ma piuttosto come "attori" nel pensiero collettivo, partecipando alla collettività *humans-with-media*. In tal modo uomini e tecnologia interagiscono, nel senso che gli uomini continuamente trasformano la tecnologia e la tecnologia trasforma e modifica il pensiero umano. Sta a noi ricercatori e insegnanti studiare come e in quali situazioni. Se progettiamo attività didattiche in cui gli studenti si mettano in gioco con artefatti in contesti problematici, allora possiamo osservarli come collettività nel senso di Borba e individuare i punti salienti della costruzione di significati matematici. Potremo analizzare così i *bambini-con-tecnologie*.

Nell'interazione tra allievi e tecnologie osserviamo la produzione collettiva di segni come: parole, azioni, gesti, sguardi, per seguire i processi di pensiero. Ci sono studi recenti che ci dicono che i gesti sono indicatori di costruzione di pensiero, non soltanto di comunicazione (Goldin-Meadow, 2003). In particolare, possiamo individuare ogni nuovo segno, che costituisca un passo verso la costruzione di nuovi significati. Succede spesso che questo nuovo elemento venga influenzato dall'attività fatta, o dall'artefatto utilizzato, o più in generale dall'ambiente in cui si opera, non soltanto dalla matematica coinvolta. La successione e l'evoluzione di tali segni ci dà indicazioni di come procede la costruzione del sapere: spesso non gradualmente, ma a salti, ogni qualvolta un bambino "vede" qualcosa di nuovo nell'attività che sta facendo.

Sperimentazione e metodologia

Gli elementi teorici descritti precedentemente sono stati utilizzati sia nella fase di progettazione che in quella di realizzazione della sperimentazione, e infine nell'analisi dei risultati. Nella fase di progettazione si è fissato come nodo concettuale, punto di arrivo della sequenza di attività basate sul moto, la proporzionalità diretta tra grandezze (spazio e tempo principalmente), da esplorare negli ambienti numerico, tabellare e grafico, sia in carta e matita che con l'utilizzo della calcolatrice. Gli artefatti usati dagli allievi erano la calcolatrice e un contapassi, ossia uno strumento che conta i passi fatti da una persona in movimento, e fornisce lo spazio percorso e il tempo impiegato.

Contapassi modello PE319 Oregon Scientific

Calcolatrice grafica modello TI-83 Plus Texas Instruments

La progettazione didattica dell'intero teaching experiment è stata effettuata a inizio anno scolastico, in modo da poterlo inserire nel piano di lavoro dell'insegnante e integrarlo nell'offerta formativa della scuola (Robutti & Ghirardi, 2004). Gli allievi (si tratta della classe quinta a tempo pieno di una scuola primaria di Chieri, in provincia di Torino) hanno utilizzato le varie esperienze non solo durante l'anno scolastico, ma anche all'esame finale.

L'insegnante di italiano e quella di matematica hanno partecipato alla realizzazione del progetto. Le attività di per sé hanno occupato un totale di circa 25 ore, ma essendo integrate nel percorso curricolare della classe e coinvolgendo le discipline di matematica e di italiano, hanno avuto ulteriori sviluppi e allargamenti per l'intero anno scolastico, sia per quanto riguarda la simbolizzazione matematica che la verbalizzazione.

Il campo di esperienza del moto, sempre ricco e stimolante perché vicino all'esperienza quotidiana dei bambini, offre un'ampia gamma di occasioni per la costruzione di concetti matematici. Modellizzare un moto, tramite la realizzazione del grafico cartesiano che rappresenta le relazioni tra le grandezze spazio e tempo ha costituito il momento cruciale dell'esperienza, a seguito di molte attività preparatorie e soprattutto di una forte motivazione creata con la proposta di tipo non strettamente scolastico.

Obiettivi didattici a livello cognitivo sono: l'esplorazione di situazioni problematiche, la formulazione di congetture, la validazione di congetture, l'argomentazione, la raccolta di dati e la loro gestione. A livello più operativo, era importante: conoscere il funzionamento del contapassi, individuare il significato di passo, misurare il passo, utilizzare il passo medio di una persona come unità di misura, determinare la media aritmetica, rilevare il numero di passi effettuato, il tempo impiegato e la distanza percorsa.

La metodologia di tipo laboratoriale (nel senso dell'UMI), che favorisce un apprendimento percettivo-motorio, è stata realizzata tramite lavori di gruppo con e senza gli artefatti, discussioni coordinate dalle insegnanti o dall'autrice, momenti collettivi e individuali di uso degli artefatti. In tutte le fasi il ruolo dell'insegnante è stato determinante, non come trasmettitore di un sapere, ma come coordinatore dell'attività, mediatore nelle discussioni, figura di riferimento per sintetizzare e istituzionalizzare le conquiste cognitive, e anche come osservatore.

Percorso e attività

L'esperienza si può suddividere in due momenti distinti: conoscenza e familiarizzazione con il contapassi e costruzione del significato di proporzionalità diretta, attraverso l'attività sul moto uniforme. Il pretesto per l'esperienza è stato fornito proprio dal contesto cittadino: la Biblioteca Civica era stata spostata da poco nella nuova sede, perciò abbiamo pensato di coinvolgere i bambini nella misurazione della distanza tra la scuola e la biblioteca nella sua nuova collocazione (figura 1). Questa situazione è stata sentita dai bambini come un vero problema, in quanto è stata proposta loro tramite una lettera inviata dalla bibliotecaria stessa, che li ha "sfidati" ad effettuare la misura. Nel seguito descrivo sinteticamente le principali attività del teaching experiment (non essendo possibile descriverle tutte), mettendo in rilievo i nodi concettuali coinvolti.

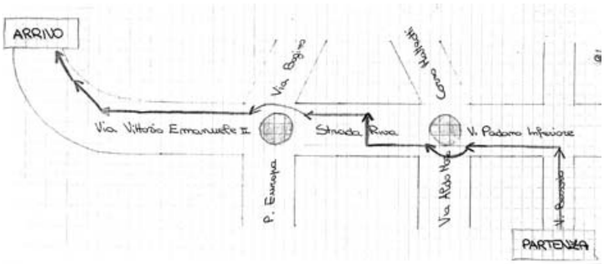


Figura 1

Dopo aver lasciato discutere gli allievi sulle varie strategie (usare la bicicletta, formare una catena umana, contare i passi, …) da affrontare e sugli strumenti (metro corto, metro lungo, tachimetro, mappa con scala, …) che potevano essere sfruttati, è stato donato loro un contapassi. I bambini hanno avuto la curiosità di studiarlo e di capirne il funzionamento, in quanto simile al contachilometri della bicicletta, che qualcuno di loro aveva tirato in ballo nelle discussioni.

Capito che il contapassi necessita della lunghezza del passo come input e fornisce la distanza percorsa come output, nuova occasione di discussione è stata lo studio dell'inserimento della misura del passo e del funzionamento durante la camminata. Subito gli alunni si sono accorti dell'esigenza di chiarire che cosa significasse misurare il passo, quindi sono state effettuate delle prove di misura su un bambino, riflettendo sul fatto che i passi misurati non erano tutti uguali.

È stato utile misurare il passo di altri bambini, per verificare che in generale il passo non è sempre lo stesso. Si sono riportate alla lavagna le misure dei passi di alcuni bambini, come in tabella 1:

	Un passo	**Un secondo passo**	**Un terzo passo**
Alessio	45 cm	57 cm	49 cm
Valentina	60 cm	44 cm	54 cm

Tabella 1

Abbiamo cercato a questo punto di far emergere nei bambini la necessità di usare il passo medio, domandando quale tra le misure raccolte poteva essere inserita nel contapassi. In effetti è sorta l'esigenza di cambiare punto di vista: non misurare più le singole falcate, ma l'intera distanza percorsa con più passi, perché la misura del passo ha senso solo se inserita nella camminata. Quindi l'attenzione si è focalizzata sulla camminata e sulla determinazione del passo medio, utilizzando la media aritmetica. Alcune attività a questo punto hanno consentito la familiarizzazione con il contapassi.

I bambini erano ormai pronti per eseguire il percorso che collega la scuola con la biblioteca, utilizzando il contapassi. Altre attività sono state eseguite a piccoli gruppi: un bambino di ogni gruppo effettuava un breve percorso in cortile, indossando il contapassi e camminando in modo da mantenere un passo costante.

Gli alunni sono stati poi invitati a raccogliere i dati di misura in tabelle numeriche come la tabella 2, allo scopo di riflettere sulla variazione delle grandezze in gioco.

Bambino	**Passo medio**	**Distanza fissata**	**Numero passi**
Elisa	49 cm	Lunghezza del cortile	?
Filippo	55 cm	Lunghezza del cortile	?
Alessio	60 cm	Lunghezza del cortile	?

Tabella 2

I bambini erano coinvolti nella formulazione di ipotesi relativamente ai seguenti quesiti:
- *Quanto è lungo il cortile?*
- *Chi farà il numero maggiore di passi?*
- *Chi farà il numero minore di passi?*
- *Quanti passi circa dovrà fare Alessio per percorrere il tragitto?*

In attività di questo tipo, prima gli allievi erano impegnati a discutere sui possibili risultati, poi a effettuare l'esperimento e a confrontare i risultati con le loro previsioni, discutendone le eventuali differenze e giustificandole.

Il percorso verso un'altra esperienza è stata condotta durante l'incontro successivo. Abbiamo proposto ai bambini la seguente consegna:

Completate la tabella 3 inserendo nelle caselle vuote il numero di passi effettuato da un bambino del gruppo ogni 10 secondi leggendolo dal contapassi:

Tempo	**10 secondi**	**20 secondi**	**30 secondi**	**40 secondi**	**50 secondi**	**60 secondi**
Passi						

Tabella 3

Ogni gruppo di bambini ha effettuato l'esperienza in cortile, suddividendo i compiti tra i componenti del gruppo. Terminata l'attività e tornati in aula è stato utilizzato un grafico cartesiano, dove il tempo e il numero passi occupavano rispettivamente l'asse delle ascisse e quello delle ordinate. I dati raccolti dai vari gruppi sono stati rappresentati sul grafico, ottenendo un insieme di punti, e quindi la retta più vicina possibile ad essi. Si è quindi avviata una discussione sulla lettura del grafico (posizione dei punti, significato della retta, inclinazione della retta), per guidare i bambini a comprendere la relazione di proporzionalità diretta sia in forma grafica che simbolica.

A questo punto si è presentato il problema di esprimere la velocità in termini matematici, perciò abbiamo stimolato i bambini con la domanda:
come possiamo dire in altro modo che un bambino cammina più lento o più veloce di un altro?

Attraverso la discussione collettiva, si è giunti ad esplicitare il concetto di velocità come rapporto tra il numero di passi eseguito e l'intervallo di tempo trascorso.

Gli ultimi due incontri sono stati dedicati a una rappresentazione grafica, con l'uso della calcolatrice grafica.

La modellizzazione con la calcolatrice TI-83 Plus è avvenuta attraverso le seguenti fasi:
1. individuazione con la calcolatrice dei punti sul grafico (valori misurati);
2. individuazione con la calcolatrice della retta sul grafico (modello teorico);
3. sovrapposizione di due grafici ed analisi;
4. introduzione della distanza in luogo del numero di passi con la calcolatrice TI-83 Plus;
5. rappresentazione con la calcolatrice della tabella e del grafico, nella situazione reale e nella situazione teorica, esprimendo la distanza in metri (e non più in passi).

Alcuni risultati

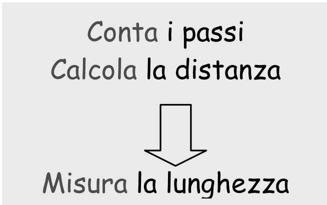


Figura 2

Lo schema in figura 2 sintetizza uno dei momenti di familiarizzazione con l'artefatto: contare i passi e calcolare la distanza sono funzioni del contapassi, ma leggere la lunghezza misurata presuppone un intervento dell'allievo che lo usa. Infatti, lo schema precisa che il risultato del processo eseguito dal contapassi è la misura della lunghezza (che l'allievo potrà leggere sul display), ma occorre da una parte il conteggio dei passi e dall'altra il calcolo di una distanza. In tal modo, l'azione del camminare effettuando passi viene tradotta simbolicamente e operativamente da operazioni che deve fare l'allievo (introdurre il passo medio) e calcoli eseguiti dall'artefatto (il prodotto del numero di passi per il passo medio). I momenti mediati dall'insegnante sono stati i seguenti:

• la descrizione della struttura e delle funzioni del contapassi, attraverso la lettura e spiegazione delle istruzioni;

• il collegamento con il sapere che si intende trasmettere (in che modo il contapassi richiama i concetti matematici di misura e media aritmetica)

• l'utilità dell'artefatto nel raggiungimento dell'obiettivo fissato di misurare la distanza tra la scuola e la biblioteca (quest'ultima fase si sviluppa lungo l'intero percorso didattico).

Nel processo di comunicazione tra gli alunni e l'artefatto, le unità di misura coinvolte (numero di passi, metri, secondi) hanno un ruolo cruciale nell'interpretazione dei dati numerici di input e output.

Di seguito presentiamo alcuni estratti dalle attività dei ragazzi (in maiuscolo i nomi degli insegnanti o osservatori).

1. SILVIA*: cosa intendi per misura un passo?*
2. Federica*: intendo quanto…* (indica con le mani una lunghezza) *la lunghezza del passo.*
3. SILVIA*: ma attenzione, secondo voi questo strumento è in grado di misurare la lunghezza di un passo, cioè io lo metto lì* (lo dispone vicino alla cintola) *e misura la lunghezza di un passo?*
4. Livia*: che magari sì, conta i passi, ma se io ne faccio uno più lungo e uno più corto e se ne faccio uno un po' più lungo magari lo mette insieme ad un altro un po' più corto…*
5. SILVIA*: e allora?*
6. Livia*: e allora si vede che … di più magari.*
7. Federica*: per ogni passo …magari conta …vede quanti centimetri sono, ogni passo conta…*

Al #2, Federica intuisce il processo di funzionamento del contapassi e lo esplicita. La bambina non accenna al passo medio, tuttavia probabilmente pensa ad un passo standard, infatti usa la preposizione "del" per riferirsi a un passo particolare e lo esplicita con la gestualità delle mani. Livia invece (#4) avverte il problema pratico di non poter fare passi tutti uguali in una camminata e dalle sue parole si vede che tenta di fornire una spiegazione del funzionamento del contapassi per ovviare al problema.

Anche Federica (#7) comprende il problema e fa propria la spiegazione di Livia. In questa prima fase di approccio all'artefatto, gli allievi quasi umanizzano il contapassi, usando verbi come "vede", "conta", "mette insieme": la trasparenza dello strumento va ancora costruita, e ciò può essere fatto sulla base dell'esperienza.

Il momento successivo vede l'esplicitazione del doppio passaggio: da "noi" alla "macchina" e viceversa, dalla "macchina" a "noi". Esso consiste nelle due fasi: inserimento dei dati (la lunghezza in cm del passo "normale", inteso come passo regolare) e rilevazione dell'output (numero dei passi effettuati e distanza percorsa in metri). Resta ancora da risolvere il problema di determinare la misura del passo da inserire, visto che non tutti i passi sono uguali, come rilevato da Livia (#4). Quindi gli allievi sentono la necessità di avere a disposizione un passo medio. Qui il momento cruciale consiste dunque nella determinazione del passo medio. Gli alunni vengono invitati a riflettere sulla convenzione da adottare per il passo medio. Insieme si giunge a concordare una regola condivisa (figura 3), dopo una discussione su varie tecniche possibili (punta-tacco, tacco-tacco, punta-punta).

Figura 3

33. ORNELLA: *con la tecnica punta-punta io adesso faccio un passo e misuro qua, (fa un passo e disegna con il gessetto i due tratti davanti alle punte dei piedi) traccio le linee e poi prendo la mia misura con un metro e vediamo un po'* (misura il passo) *è venuto 56 cm. Adesso io faccio un altro passo, misuro il mio passo, è venuto 57 cm, adesso ne faccio un altro e …vedere quanto è, 75! Pazzesco, e non me ne sono proprio accorta. Allora quanto ho detto di misure? …Problema: la stessa persona può fare passi diversi. …*

34. Enrica*: tu hai fatto tre passi* (fa il gesto tre muovendo la mano aperta perpendicolare al piano del banco)*, così uno di 56 (ogni volta che esprime una misura agita la mano aperta con il palmo voltato verso l'alto), uno 57, uno 75 cm, li hai fatti diversi* (pone la mano perpendicolare al piano del banco)*, poi li sommiamo* (racchiude le mani) *e facciamo la media* (apre le mani) *e ci viene in media la lunghezza dei passi.* (apre e chiude più volte le mani)

35. ORNELLA*: questa è una buona idea.*

36. Alunna*: fai un passo e poi lo moltiplichi per tre.*

37. ORNELLA*: faccio un passo e poi lo moltiplico per tre, sì questa è un'altra idea. E c'è ancora una tecnica…cioè noi possiamo sforzarci per fare i passi tutti uguali?*

38. Qualcuno*: no!*

39. Enrica*: possiamo provarci.*

40. ORNELLA*: […] Allora il consiglio è questo, provare a fare delle misure in ogni gruppo dei vostri passi in movimento, cioè un passo mi fermo, un passo mi fermo, e poi di fare nostra l'idea di Enrica, che era quella di…cosa ha detto Sara?*

41. Sara*: fare la media.*

Enrica (#34) propone subito la soluzione: calcolare la media aritmetica dei tre passi per trovare il passo medio. La bambina accompagna il suo ragionamento con la gestualità: si evidenzia nell'atto del contare con il movimento della mano perpendicolare al tavolo e con quello parallelo al tavolo, la volontà di differenziare gli oggetti del conteggio: nel primo caso i passi, nel secondo la misura degli stessi. Un altro tipo di gestualità invece caratterizza la seconda fase del ragionamento: l'alternanza delle mani divaricate e chiuse indica il passaggio attraverso i diversi tipi di operazioni: la somma, la media, il risultato. Mentre il primo gruppo di gesti si riferisce al fenomeno osservato (si chiamano iconici in questo caso), il secondo gruppo di gesti va verso l'astrazione esprimendo i concetti di somma e di media (si chiamano metaforici in quest'altro caso).

***42. Enrica**: allora tu parti dalla riga, Claudia, con la punta sulla riga, la punta un po' più avanti, a posto, adesso fai tre passi.* (Claudia ripete i tre passi, questa volta li esegue in successione, senza fermarsi)

***43. Tutti:** uno, due, tre.*

***44. Enrica:** ed è arrivata qui* (posiziona la penna sul punto di arrivo) *ed è partita da qui,* (Babak e Enrica misurano la lunghezza percorsa con tre passi da Claudia) *vai un metro fino alla punta del suo piede, ecco stop.*

Un momento fondamentale dell'esperienza consiste nell'uso del contapassi come mediatore delle conoscenze relative alla relazione tra spazio e tempo. La riflessione su queste grandezze viene sviluppata attraverso esperienze di utilizzo del contapassi in brevi camminate; l'intenzione è di far riflettere sulle relazioni che intercorrono tra il passo medio, il numero di passi, il tempo impiegato e la distanza percorsa. Al #42 vediamo gli allievi impegnati ad effettuare passi e misure, con un grande coinvolgimento e controllo delle procedure. Enrica in particolare (#44) con azioni e parole ("qui", "arrivata", "partita", "vai") ripercorre tutte le tappe.

Una delle attività è centrata sulla misura del numero di passi con il contapassi, fatta con bambini che hanno un passo medio diverso. Nella tabella 4 sono riportati i dati del passo medio, determinato in precedenza dai bambini, e, a parità di distanza (la lunghezza del cortile), i bambini devono inserire in essa i dati sul numero di passi:

Bambino	**Passo medio**	**Numero passi**
Elisa	49 cm	?
Filippo	55 cm	?
Alessio	60 cm	?

Tabella 4

Prima di completare la tabella, si chiede ai bambini di formulare ipotesi relativamente alle seguenti problematiche:

- *Chi farà il numero maggiore di passi?*
- *Chi farà il numero minore di passi?*
- *Secondo voi quanto è lungo il tragitto?*
- *Chi impiegherà meno tempo per percorrere il tragitto?*
- *Chi impiegherà più tempo?*

Si discute insieme sulle loro risposte, come si vede nel protocollo seguente:

***29. SILVIA:** Filippo ne farà meno di tutti (passi), perché secondo te?*

***30. Davide S.:** Filippo ne farà di più perché ha le gambe più corte.*

***31. SILVIA:** secondo te Elisa, perché?*

***32. GIULIANA**: ragionate sui numeri in tabella. Sentiamo Eleonora. Uno alla volta. Allora Eleonora dice che ne fa di meno perché Alessio cosa fa?*

***33. Eleonora**: da gigante!*

***34. GIULIANA:** da quanto?*

***35. Eleonora:** da 60 centimetri.*

***36. GIULIANA:** tu dici quello, chi dice un'altra cosa? Chi è che ragiona…?*

***37. Eleonora:** Elisa, perché fa i passi più corti, perciò ne fa di più.*

Successivamente si procede alla verifica delle ipotesi, effettuando brevi percorsi in cortile. Infine si raccolgono le conclusioni dell'esperienza vissuta e si avvia una discussione di bilancio:

45. ORNELLA: *allora i dati che abbiamo trovato vi soddisfano dal punto di vista della ipotesi?*
I bambini parlano tutti insieme poi prende la parola Alessio.
46. Alessio: *le osservazioni erano venute giuste perché infatti io dovevo fare meno passi di Filippo e di Elisa perché la mia media era 60, mentre Filippo era 55, ed era la metà tra me ed Elisa che ha 49.*
50. Alessio: *stavo dicendo che dalle ipotesi che abbiamo fatto prima più o meno erano giuste, perché io avevo il passo che era minore…maggiore di tutti, infatti sono stato quello che ha fatto meno passi, Filippo era quello che…*
51. ORNELLA: *riusciamo a dire una regola? Su una stessa distanza, più un bambino ha il passo lungo e meno passi fa.*
52. Davide S.: *invece il bambino con il passo più corto fa più passi, però nella stessa distanza.*

Alessio avvia (#46, #50) il passaggio dal particolare al generale: esprime la regola sulla relazione tra passo medio e numero di passi facendo riferimento alla situazione particolare da lui sperimentata, argomenta con un linguaggio frammisto di termini matematici e del linguaggio naturale ("la mia media" sta per "passo medio", "era la metà tra me e Elisa" sta per "sta in mezzo"). Al #50 Alessio comincia a distaccarsi dal caso particolare ed esprime la regola, ancora legata all'esperienza della camminata. Davide S. (#52) riporta l'attenzione alla condizione di fondo: ciò che hanno formulato è vero se tutti percorrono la stessa distanza.

La attività successive sono mirate all'introduzione della grandezza tempo, che, seppur presente sullo sfondo, non era ancora stata presa in considerazione. Tramite nuove camminate, precedute da tabelle su cui fare congetture, e seguite da discussioni di bilancio per verificarne la correttezza, gli allievi rispondono con considerazioni che sono condivise, come per esempio:

67. Federica: *chi ha i passi più corti ci metterà più tempo e chi ha i passi più lunghi meno tempo.*
71. Giorgio: *un bambino con i passi più lunghi ci impiega meno tempo, un bambino con i passi più corti più tempo, forse perché ha una falcata minore.*
73. Giorgio: *ad andatura normale deve andare.*
75. Livia: *secondo me ogni passo è circa un secondo e siccome loro hanno fatto 60, 55, secondo me i passi … lo stesso numero dei secondi.*
77. Giorgio: *devi proprio andare a cronometro fisso.*

Giorgio si esprime inizialmente in modo confuso ed è ancora incerto sulla sua proposta, poi (#71) sembra chiarirsi la situazione e opta per la regola espressa da Federica (#67), sottolineando il fatto che è necessario tenere in considerazione il passo medio di ogni bambino. I bambini condividono la condizione espresse da Giorgio sull'"andatura normale" (#73): Livia (#75) cerca di esplicitare l'idea dell'andatura costante che, nella sua esperienza sembra essere quella di fare un passo al secondo. La metafora di Giorgio (#77) del "cronometro fisso" è usata ad hoc per spiegare questa andatura costante: qui si intende che sia costante (uguale a un secondo) l'intervallo di tempo del passo. Questa metafora sorge dall'utilizzo del cronometro (sull'orologio o sul contapassi), per misurare istanti di tempo o intervalli di tempo nelle varie esperienze.

Si arriva infine all'attività che ha permesso di formalizzare le conoscenze sulla relazione tra spazio e tempo come proporzionalità diretta: i bambini a gruppi, dopo l'esperienza della camminata a passo costante per 60 secondi, devono completare la tabella 5. Il punto cruciale dell'attività consiste nella lettura del numero di passi sul contapassi ogni dieci secondi, durante la camminata.

Tempo	10 secondi	20 secondi	30 secondi	40 secondi	50 secondi	60 secondi
Passi di Eleonora	17	32	47	62	78	93
Passi di Filippo	19	40	60	80	100	121

Tabella 5

Terminata l'attività con il contapassi si torna in aula e si costruisce insieme il grafico cartesiano del moto di Eleonora (figura 4), a partire dalla tabella precedentemente completata. Si avvia quindi una discussione matematica osservando e interpretando il grafico ottenuto.

74. ORNELLA: *ecco qua, questi sono i dati che riguardano Eleonora. Potete osservare qualche cosa su questi dati?*
75. Elisa*: s'ingrandisce sempre di più, diventa sempre più maggiore.* (Elisa fa il gesto di trattenere qualcosa nella mano destra, poi progressivamente stringe il pollice e l'indice e poi apre nuovamente la mano, mentre allude alla retta)
76. ORNELLA*: che cosa?*
77. Elisa*: il numero…dei passi.*
78. ORNELLA*: il numero dei passi**,** certo.*
79. Federica C. *: più … grande è il tempo, più passi si fanno.*
80. ORNELLA*: sì, più grande è il tempo, più ci sono passi.*
I ragazzi provano ad intervenire insieme, stimolati dalla questione da affrontare.
81. GIULIANA*: dai Yuri!*
82. Yuri*: sono allineati.* (intanto fa cenno più volte, in avanti e indietro, con il braccio, tracciando con la mano alzata e la penna in mano una linea immaginaria)
83. ORNELLA*: sono allineati! Questa è una bella idea sono allineati, sembrano stare tutti sulla stessa retta vero?*
84. Giorgio*: io ho un'idea che se ognuno fa veramente andatura normale ogni intervallo di 10 secondi dovrebbero essere dello stesso numero di passi.*

Elisa esprime in gesti il suo pensiero (#75): la mano aperta indica l'apertura progressiva delle rette e lo stringere il pollice e l'indice come per trattenere qualcosa, allude ai punti sul grafico. Quindi la bambina legge il grafico secondo due chiavi: in forma globale (vede le rette) e in forma discreta (analizza i punti). Il grafico qui è trasparente, nel senso che i bambini leggono attraverso ad esso, sanno che i punti si riferiscono a un ben preciso numero di passi ad un dato istante. Non solo essi sanno "leggere" il grafico nel senso delle coordinate dei punti, ma ne individuano una relazione di crescita, subito seguita da quella di allineamento su una retta. Questo fa sì che acquisiscano competenze relative al *senso del grafico* (Robutti, 2003), che permettano loro di vederlo anche in maniera dinamica ("s'ingrandisce"; "diventa"; "sono allineati", accompagnato dal gesto ripetuto della mano).

Giorgio distingue tra movimento reale e movimento ideale (moto uniforme) con le parole: "fa veramente un'andatura normale", dove l'avverbio "veramente" si riferisce a una situazione ideale. Il passo di Giorgio verso la simbolizzazione è decisivo: richiamando la situazione ideale, esplicita la relazione di linearità come incremento spaziale costante ("stesso numero di passi") per ogni incremento costante di tempo ("ogni intervallo di 10 secondi").

Il passaggio concettuale successivo, guidato dal disegno sul grafico della camminata di Filippo, consiste nel confronto tra due camminate (rappresentate entrambe nel grafico in figura 5), per capire quali differenze ci sono e come si possono esprimere.

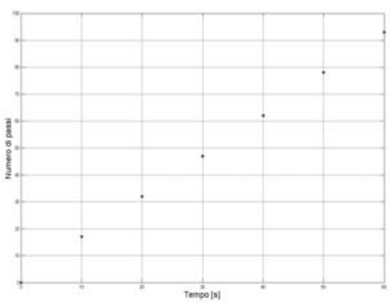


Figura 4

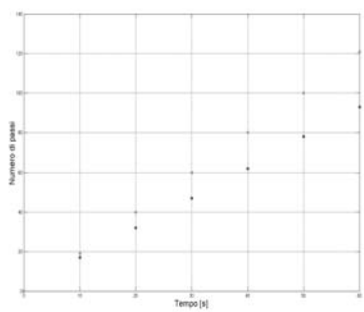


Figura 5

130. Giorgio*: partono vicinissime poi più lontane.* (intanto quando dice vicinissime sembra trattenere qualcosa di piccolo tra il pollice e l'indice, poi quando dice lontane divarica gli avambracci a ventaglio e improvvisamente li richiude battendo le mani insieme)

131. ORNELLA*: ecco qua, Giorgio ha detto partono vicinissime e poi arrivano lontane. Possiamo esprimere questo fatto a parole con una regola? Una regola che riguarda il camminare, il camminare di Eleonora e il camminare di Filippo.*

132. Alessio*: Eleonora ha il passo più grande di Filippo.*

134. Giorgio*: il tempo, quanti passi fai nello stesso tempo.* (mentre parla dei passi sembra contarli con le dita della mano, mentre parla del tempo fa il gesto "uno" con il pollice)

Giorgio (#130) osserva la disposizione dei punti sul grafico del moto di Eleonora e di Filippo: nota che non si tratta della stessa disposizione, ma che i punti prima sono vicini, poi divergono. Il gesto in questo caso è più efficace delle parole: la vicinanza rappresentata con due dita ravvicinate, mentre la lontananza con l'apertura e la chiusura a ventaglio degli avambracci. Alessio riporta l'attenzione al passo (#132), ma non tiene conto del tempo e la sua analisi resta legata solo al fatto che i passi medi dei due bambini sono diversi. Invece Giorgio (#134) coglie la necessità di introdurre il tempo, richiamandosi alle cose che aveva già detto prima. A questo punto rappresenta con i gesti l'intervallo di tempo costante, differenziandolo dalla ritmicità del passo. Questo fatto viene condiviso dagli allievi durante la discussione finale. Si noti che fin qui, pur parlando di allineamento, non si sono tracciate rette, ma soltanto punti, che vengono visti allineati per questioni di trasparenza del grafico, conquistata grazie all'attività e alla discussione collettiva.

Successivamente si vuole generalizzare tale fatto in modo simbolico, affrontando una questione ulteriore relativa al grafico: la pendenza. Si tracciano allora le rette dei vari moti osservati (figura 6), quindi si avvia una discussione il cui scopo è far fare congetture sulla pendenza, senza più fare l'esperienza della camminata e del rilevamento di dati con il contapassi e il cronometro.

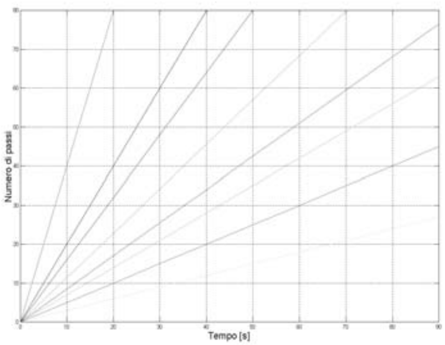


Figura 6

6. SILVIA*: allora in termini "geometrici" come esprimiamo il fatto che questa linea è più schiacciata verso il basso e questa meno?*

7. Francesca*: perché se uno cammina più veloce la linea sarà più … alta* (alza la mano verticalmente davanti al viso)*, invece se cammina più lentamente…se cammina normale sarà a metà* (sfrega le due mani davanti a sé)*, se invece cammina a passi grandi, la linea è più bassa* (abbassa le dita della mano destra sulla sinistra).

Francesca (#7) accompagna con la gestualità il suo pensiero: una sola mano alzata davanti a sé evidenzia il tentativo di esplicitare l'inclinazione quasi verticale dell'unica retta che rappresenta il modo di muoversi più velocemente; le due mani avvicinate ricordano l'operazione del calcolo della media: mettere insieme due dati e dividere per due; abbassare le dita della mano destra sulla sinistra richiama l'andamento quasi piatto, orizzontale della retta che rappresenta il moto più lento.

Bella occasione per spingersi oltre è offerta da Giorgio nella discussione:

104. ***Giorgio****: senti ma…se ce n'è uno che è campione del mondo di velocità e ti fa in dieci attimi…non so i secondi come li conti, fa… una retta che è esattamente come l'angolo retto, in dieci secondi quanti passi fa? (…) È velocissimo e fa un angolo retto, la sua retta corrisponde ad un angolo retto identico, quanti passi farà in 10 secondi?*

Se la retta del moto coincide con l'asse delle ordinate, l'alunno si pone il problema di determinare il numero dei passi in 10 secondi, ossia la pendenza della retta del moto. Il problema viene rivolto a tutta la classe, qualcuno tenta di fornire dei risultati numerici, comunque finiti. L'occasione viene sfruttata dall'insegnante per accennare al concetto di infinito e alla non applicabilità, in questo caso limite, della regola dei passi determinata precedentemente.

Il secondo strumento tecnologico introdotto è la calcolatrice grafica TI-83 Plus. Il suo utilizzo, sotto la guida dell'insegnante, ha favorito la modellizzazione di moti, sfruttando gli ambienti di lavoro disponibili: numerico, tabellare e grafico.

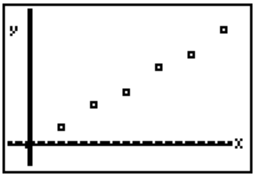


Figura 7 a

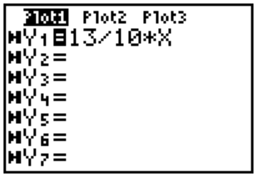


Figura 7 b

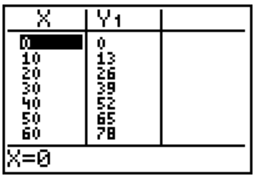


Figura 7 c

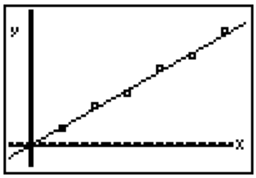


Figura 7 d

I passaggi concettuali verso la costruzione di un modello sono scanditi dalle figure raffiguranti lo schermo della calcolatrice: la 7a rappresenta i punti di una camminata, su un grafico dello spazio coperto (in metri) nel tempo (in secondi); la 7b una forma simbolica più astratta: la funzione dello spazio nel tempo; la 7c la tabella dei dati relativi a questa funzione, che è il modello del moto; la 7d la rappresentazione di questa funzione, che passa molto vicino ai punti sperimentali. Ora commentiamo brevemente un estratto della discussione:

53. ***SILVIA****: La calcolatrice che cosa ci ha fornito?*
54. ***Alunna****: Il grafico ideale.*
55. ***Elisa****: Con la linea…non solo con i punti ma ha anche fatto… la linea.*
56. ***Livia****: Che forse siccome lì abbiamo messo sempre 1,3 (allude alla velocità media di un ragazzo:1,3 passi al secondo), la tabella virtuale ci ha messo sempre il ritmo, cioè…una…il…i passi regolari…che ha mantenuto sempre il ritmo.*

La domanda dell'insegnante ("che cosa ci ha fornito la calcolatrice?") avvia una discussione nella quale è sottolineata la differenza tra situazione reale e modello, e l'uso della calcolatrice diventa occasione per approfondire il concetto. Elisa evidenzia la differenza tra il grafico precedentemente prodotto (come punti) e quello attuale (costituito dalla retta). Livia richiama il collegamento tra l'esperienza vissuta con il corpo (camminare in cortile, i passi) e la sua modellizzazione (la tabella virtuale). Le sue parole ("la tabella virtuale ci ha messo sempre il ritmo") sono la sintesi della camminata a passo costante, dell'uso del contapassi, della rappresentazione grafica, dell'uso della calcolatrice, e dipendono tutte dalle precedenti parole ("lì abbiamo messo sempre 1,3"). Ma sono anche un esempio di influenza dell'artefatto sui processi di pensiero che costruiscono significati matematici. I bambini hanno "messo" 1,3 nella calcolatrice, e questo numero che esprime la pendenza del grafico, ma anche la velocità, e il coefficiente della variabile indipendente riassume tutta l'esperienza del camminare, racchiudendo in sé molteplici significati. Però l'hanno messo una volta sola, non "sempre": il "sempre" di Livia rappresenta la regolarità, che si ripete ovunque, per ogni secondo, sono sempre 1,3 metri ad essere percorsi nel nostro modello, e questi sono anche il nostro "passo regolare", perché abbiamo sempre "mantenuto il ritmo".

Conclusioni

La ricerca qui descritta ha parecchi risvolti e possibili ampliamenti che mettono in evidenza le relazioni tra la didattica della matematica e altre discipline quali la psicologia, le scienze cognitive, la linguistica o la semiotica (Robutti & Ghirardi, 2004). In particolare, l'intreccio tra bambini e strumenti tecnologici risulta evidente nell'analisi della costruzione di sapere matematico, laddove gli strumenti influenzano la produzione di segni che mediano i concetti (gesti per indicare il passo medio, la pendenza, la crescita, o parole per indicare la regolarità, l'invarianza, la legge, …). La costruzione di sapere nasce dal lavoro collettivo di bambini e strumenti, che interagiscono durante l'attività, coordinati dall'insegnante. Da questa ricerca emergono risultati che possono essere d'aiuto agli insegnanti nella loro pratica didattica, per capire meglio i processi di pensiero dei loro studenti e l'interazione con gli strumenti che utilizzano.

Ringraziamenti

Programma di ricerca MIUR e Università di Torino e Università di Modena e Reggio Emilia (PRIN n. 2005019721).

Bibliografia

AAVV. UMI (2003), Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., & Robutti O. (Eds.), *Matematica 2001. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Scuola Primaria. Scuola Secondaria di primo grado)*. Lucca: Matteoni stampatore.

AAVV. UMI (2004), Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., & Robutti O. (Eds.), *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario).* Lucca: Matteoni stampatore.

Borba M. C. & Villarreal M. E. (2005), *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies*, Modeling, Visualization and Experimentation, Springer.

Goldin-Meadow S. (2003), *Hearing gesture: How our hands help us think*. Cambridge, MA: Belknap.

Nemirovsky R. & Borba M. (2003), Research Forum 1: Perceptuo-motor activity and imagination in Mathematics Learning. In: N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J. Zilliox (eds.), *Proceedings of PME 27*, Hawai-I, 1, 103-104.

Robutti O. (2003), Il senso del grafico con la mediazione delle tecnologie: metafore attivate e significati costruiti, *La matematica e la sua didattica*, 2, 173-195.

Robutti O & Ghirardi S. (2004), Dai moti alle rappresentazioni simboliche: un'esperienza nella scuola elementare, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 27A-B, n.5, 577-616.

Laboratorio e incertezza
Aurelia Orlandoni, Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica - Ex I.R.R.E. - E.R. Gestione Commissariale

Introduzione
Abbiamo voluto riservare una sezione specifica a questo ambito in quanto non esistono prassi consolidate e diffuse sull'insegnamento di Statistica e probabilità nella scuola italiana, come, d'altra parte in molti paesi europei.

Negli ultimi anni si avverte sempre più che nella formazione del futuro cittadino questi temi abbiano una rilevanza significativa.

In questi ultimi anni si sono però moltiplicate le esperienze e le proposte e, sempre di più, nei documenti nazionali e internazionali viene sottolineata l'importanza di questi temi nella formazione del futuro cittadino. In particolare è utile ricordare, in ordine cronologico, alcuni documenti che hanno suscitato grande interesse e dibattito:

• Il documento americano sugli Standard Matematici del 2000 del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)[1], in cui lo Standard 5: "Analisi dei dati, statistica e probabilità" viene sviluppato a partire dalle prime classi fino al termine della Scuola superiore.

• Il volume *La Matematica dalla scuola materna alla maturità*[2] , in cui il tema "Statistica e probabilità" viene ampiamente sviluppato con numerosi esempi di attività possibili a partire dalla scuola primaria.

• La proposta di nuovi curricoli elaborata da una Commissione dell'UMI (Unione Matematica Italiana) nel corso degli anni passati, che individua fra i nuclei di contenuto "*Dati e previsioni*". Congiuntamente con la SIS (Società Italiana di Statistica) è stata elaborata una proposta di percorso corredata da attività sia per il ciclo primario che per quello secondario[3].

• Il progetto PISA (Programme for International Student Assessment) indica questo tema fra le quattro idee chiave per la Matematica: Quantità, Spazio e forma, Cambiamento e relazioni, Incertezza, sottolineando che "*Alcune osservazion relativamente recenti circa i curricoli scolastici concordano sul fatto che la statistica e la probabilità oggi dovrebbero occupare un posto molto più importante che nel passato*"[4].

All'interno di tutti si trovano riferimenti espliciti ad una "Matematica per il cittadino", intendendo che la formazione matematica deve mettere in grado i futuri cittadini di possedere conoscenze in grado di *generarne* altre, sviluppando in ciascuno un atteggiamento intellettuale attivo. Questo comporta la necessità di abbandonare una pratica di insegnamento della matematica in cui si deve trovare l'*unica risposta corretta* con l'*unico metodo corretto*, cercando invece di affrontare problemi aperti che partano da contesti significativi per gli studenti e che mirino ad un'attività di modellizzazione della realtà attraverso strumenti matematici di complessità crescente nel corso degli anni.

Per quanto riguarda la Statistica e la Probabilità in tutti i documenti citati ricorrono termini come: *descrivere, analizzare, interpretare dati, formulare inferenze e previsioni, imparare ad eludere le "trappole", prendere decisioni*.

---

[1] La traduzione italiana, curata da IRRE-ER del documento "*Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft-october 1998*" prodotto dal National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), è scaricabile dal sito Fardiconto, all'indirizzo: http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/

[2] Il testo contiene un progetto di percorso globale per l'insegnamento della matematica a partire dalla scuola materna fino al termine della scuola secondaria, commissionato nel 1993 dal Ministero dell'Educazione del Belgio francofono al CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques)

[3] Per approfondimenti vedere i volumi prodotti da UMI, SIS, Mathesis, MPI: Matematica 2001, Matematica 2003 e Matematica 2004 scaricabili all'indirizzo: http://umi.dm.unibo.it/italiano/Didattica/didattica.html

[4] Dal volume PISA 2003 Valutazione dei quindicenni, Armando Editore, Roma, 2004

Viene inoltre sottolineato che proporre attività significative in campo statistico comporta quasi sempre avere a che fare con molti dati, costruire ed analizzare diverse rappresentazioni, insomma dovere fare calcoli che, svolti manualmente, risulterebbero lunghi, noiosi e demotivanti sia per l'insegnante che per gli studenti. Oggi, però, la grande diffusione di tecnologie informatiche rende possibili attività impensabili nella scuola solo 15-20 anni fa.

Viene infine ricordato che le attività di modellizzazione richiedono la presenza, come per le scienze sperimentali, di attività laboratoriali in cui deve essere assegnato un posto fondamentale a calcolatrici e computer. A seconda del livello scolare gli strumenti utilizzati saranno diversi (da carta e penna e calcolatrici elementari a software e calcolatrici via via più potenti) adeguati all'età e alla complessità delle attività proposte, cercando sempre di partire da situazioni reali e dati significativi.

Introduzione alla statistica con il fantacalcio

*Guido Bartolini, Michele Cerulli**

** Collegio Emiliani, Genova Nervi ** Istituto Tecnologie Didattiche – C.N.R. di Genova*

Introduzione

L'esperienza che presentiamo riguarda l'introduzione ad alcuni concetti base della statistica grazie all'utilizzo del *software* Excel. Essa è stata svolta durante le normali ore di lezione della classe, ed è stata progettata e condotta da due tirocinanti della Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Superiore (SSIS) di Genova nell'ambito del loro intervento di tirocinio.

Il percorso didattico si è sviluppato nell'arco di due incontri, il primo, prettamente introduttivo, avente lo scopo di vagliare le conoscenze pregresse degli allievi e i loro possibili misconcetti riguardo agli argomenti statistici che ci si era prefissati di toccare (media aritmetica, campo di variabilità e osservazioni a riguardo), il secondo, svolto in laboratorio informatico, avente il compito di fare chiarezza e di fornire l'adeguata formalizzazione. La classe in cui si è svolto tale intervento (una prima istituto tecnico ad indirizzo scientifico) ha grossi problemi disciplinari così, al fine di evitare una lezione frontale che avrebbe potuto non catturare l'attenzione degli alunni, si è optato per un tipo differente di didattica, più accattivante e vicina agli interessi degli studenti, ma non per questo esente dal rigore necessario. Lo scenario allestito prevedeva che i ragazzi assumessero il ruolo di allenatore di una squadra di calcio a cinque, alle prese con la scelta della formazione da schierare in campo, avendo a disposizione una rosa di dieci giocatori. A parte i nomi dei calciatori, che sono stati scelti tra i titolari delle squadre più blasonate d'Europa, ciò che avrebbe dovuto pesare nella fase di scelta della formazione da far scendere in campo era la tabella di voti[1] che questi avevano preso nelle ultime dieci partite giocate. Si è cercato, inoltre, di dare al tutto un aspetto il più coinvolgente possibile, realizzando un torneo tra tutti gli alunni fatto di scontri ad eliminazione diretta; a tale fine, è stato realizzato un foglio Excel contenente le formazioni, ed un simulatore di scontri che permettesse di "giocare" le partite tra le squadre coinvolte. In quanto segue daremo una descrizione dell'esperienza e concluderemo delineandone gli aspetti fondamentali di cui tener conto per sviluppare un percorso simile.

Descrizione classe

La classe, composta da 25 studenti (tutti maschi, due ripetenti), è ritenuta poco disciplinata ed indisponente. Si tratta di alunni italiani, anche se i cognomi denotano origini di varie regioni, eccezion fatta per un ragazzo albanese ed uno di origine sudamericana. Un paio di elementi risultano "spacconi", e polemizzano molto frequentemente con gli insegnanti. Inoltre, solo pochi studenti sembrano svolgere diligentemente i compiti assegnati per casa. Il livello di preparazione in matematica, forse anche per questo, è assai scadente. I docenti sono talmente preoccupati da questi alunni che evitano di lasciare la classe scoperta anche solo per pochi attimi. Tuttavia, si rileva che:

- nonostante un costante rumore di fondo, durante le lezioni i ragazzi non si lasciano andare in comportamenti negativi particolarmente rilevanti e, generalmente, partecipano alle attività;
- nei confronti dei tirocinanti tutti i ragazzi hanno mostrato un atteggiamento piuttosto positivo.

L'esperienza

L'esperienza ha preso spunto dalla necessità del docente di matematica di una lezione introduttiva alla statistica, l'idea è stata di rendere tale lezione il più appetibile possibile, vista la natura problematica della classe, facendo riferimento al gioco del *fantacalcio*[2] . A tale proposito precisiamo che l'intervento è stato progettato appositamente per la classe in questione (formata interamente da studenti di sesso maschile, più o meno tutti appassionati di calcio) e che trasferito, senza un eventuale riadattamento, in un'altra classe potrebbe non risultare ugualmente efficace.

---

[1] I voti, assolutamente fittizi, sono stati scelti in modo da mettere in risalto i concetti che più si era interessati trattare.

[2] Informazioni sul gioco si possono trovare sul sito ufficiale della Lega Fantacalcio (www.fantacalcio.it). In particolare, è possibile visionare il regolamento ufficiale al seguente URL: http://lfc.altervista.org/Regolamento.pdf.

Partendo dall'idea che non tutti gli indici statistici diano le stesse informazioni, per cui a seconda della situazione convenga riferirsi ad uno di essi piuttosto che ad un altro, l'intervento è stato progettato con il seguente obiettivo didattico:

• introduzione del concetto di media, o di altri indici statistici, come strumenti nella risoluzione di specifici problemi; in particolare evidenziare la diversità delle informazioni fornite da ogni indice osservando come il loro uso e la loro efficaci dipendano dal contesto della situazione e dal problema affrontato;

• richiamo e formalizzazione del concetto di media;

• introduzione del concetto di media parziale;

• introduzione e formalizzazione del concetto di campo di variabilità.

Per perseguire tale obiettivo didattico era necessario presentare ai ragazzi una situazione in cui gli indici potessero veramente essere utilizzati come strumenti per risolvere efficacemente un problema. Tale situazione doveva essere strutturata in maniera tale da presentare diversi sottoproblemi, che richiedessero l'uso di indici statistici differenti. Infine, doveva essere una situazione che coinvolgesse i ragazzi, in modo da rendere significativa ai loro occhi l'introduzione degli strumenti (statistici) necessari: il fantacalcio, come gioco, sembrava poter essere una buona base su cui appoggiarsi. Per tale fine è stato realizzato, con il calcolatore, un simulatore di fantacalcio, che, sulla base delle statistiche indicanti il rendimento dei giocatori (costanza e stato di forma, il tutto quantificato mediante "voti" assegnati dall'estensore del foglio di calcolo), simulasse probabilisticamente la prestazione di ognuno di essi in una partita, simulando in tal modo "reali" partite di fantacalcio. Ad ogni giocatore è stata associata una successione di 10 voti per rappresentare il loro rendimento passato: tali voti[3] sono stati scelti *ad hoc*, in maniera da avere giocatori con caratteristiche diverse per poter rendere più significativo il confronto degli stati di forma, costanza e punte di rendimento[4] (in positivo o in negativo). Ad ogni squadra (ne sono state pre-costituite quattro), viene assegnata una rosa di dieci giocatori (2 portieri, 2 difensori, 4 centrocampisti, 2 attaccanti), solo cinque dei quali possono essere schierati in campo (1 portiere, 1 difensore, 2 centrocampisti, 1 attaccante): per ciascuna partita, lo studente-allenatore deve scegliere quali elementi schierare in ogni ruolo.

Le scelte effettuate dei ragazzi per quanto riguarda le formazioni rivestono estrema importanza ai fini del gioco in quanto influenzano realmente l'esito degli scontri (il simulatore implementato, infatti, teneva conto di tutti i parametri sopra indicati), e quindi le *chance* di vittoria nel torneo.

L'intervento, nello specifico, si è svolto con la seguente modalità di impiego (cfr. Cerulli, Pedemonte, Robotti) del foglio excel: alla conclusione di una lezione di matematica è stata fornita ad ogni ragazzo una tabella contenente la rosa (con i voti) di una delle quattro squadre precedentemente create. È stato chiesto di scrivere la formazione preferita da schierare ed i criteri utilizzati nelle scelte fatte. Dopo aver ritirato gli elaborati, sono state catalogate le risposte per progettare la lezione successiva. I ragaz-

[3] A titolo esemplificativo, si riporta la tabella contente la rosa di una squadra, con i voti associati ai singoli giocatori:

Portiere	Dida	6,0	6,5	5,5	7,0	5,0	5,5	6,5	4,0	7,0	7,0
Portiere	Frey	5,0	7,0	5,0	6,0	5,0	5,5	5,0	7,5	7,5	7,0
Difensore	Nesta	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
Difensore	Cannavaro	8,0	8,0	4,0	4,0	4,0	8,0	4,0	8,0	8,0	4,0
Centrocampista Destro	Pirlo	6,5	6,0	6,0	5,0	6,0	6,0	6,5	5,0	5,0	5,0
Centrocampista Destro	Ambrosini	5,0	5,0	5,5	5,5	6,0	6,0	6,0	6,0	6,5	5,5
Centrocampista Sinistro	Mancini	4,5	5,0	5,5	6,0	6,0	6,0	6,5	6,5	7,0	8,0
Centrocampista Sinistro	De Rossi	6,0	6,5	6,5	6,5	7,0	7,0	7,0	6,5	6,5	4,5
Attaccante	Toni	8,0	7,0	6,5	6,0	6,0	6,5	6,5	7,0	7,0	8,0
Attaccante	Adriano	7,0	7,0	7,0	6,5	6,5	6,5	6,5	7,0	6,5	7,0

[4] Come si può notare nella tabella contenuta nella nota precedente, Nesta e Cannavaro, hanno la stessa media (6.0), ma il primo è più costante, quindi converrebbe schierarlo sempre durante l'arco di un intero campionato; se però si trattasse di una partita secca, in cui si debba assolutamente vincere, potrebbe convenire schierare Cannavaro in quanto, avendo punte di rendimento più alte, potrebbe prendere sulla singola prestazione un voto maggiore. Se consideriamo, invece, i giocatori Mancini e De Rossi, il secondo ha la media un po' più alta (6.4 contro 6.1), però il secondo ha voti decisamente più alti nelle ultime partite, risultando quindi in un migliore stato di forma, risultando quindi più conveniente da schierare.

zi, probabilmente interessati da un differente modo di fare scuola, hanno affrontato il compito con impegno, fornendoci, in generale, risposte e spiegazioni esaurienti. In particolare, la varietà dei criteri utilizzati per scegliere i giocatori è stata abbastanza ricca da permetterci di organizzare una fruttuosa discussione per la fase successiva. Tali criteri decisionali, seppur espressi in forme diverse, possono essere riassunti come segue

- *media*: viene preferito il giocatore con la media dei voti più alta;
- *qualità*: si sceglie il calciatore che **nella realtà** ha certe capacità (ad esempio, è veloce, sa fare un buon gioco di squadra, etc.);
- *simpatia*: si sceglie il giocatore che **nella realtà** risulta più simpatico;
- *costanza*: si sceglie il giocatore con rendimento più costante, in base ai voti;
- *fama*: si sceglie il giocatore più famoso **nella realtà**;
- *più forte*: si sceglie il calciatore che si ritiene migliore nella realtà.

Si osservi che su ognuno dei principi espressi dai ragazzi si potrebbe costruire una lunga discussione, e che ognuno di essi ha una sua valenza in un particolare contesto[5] , ma non necessariamente in quello del fantacalcio (in particolar modo, in quello simulato). Nella tabella sottostante riportiamo i criteri e consideriamo alcune situazioni esemplari, indicando in quali di esse i singoli criteri risultino rilevanti o meno.

Principio \ Situazione	Fantacalcio reale	Fantacalcio simulato	Calcio reale
Media	Rilevante	Rilevante	Rilevante
Qualità	Irrilevante	Irrilevante	Rilevante
Simpatia	Irrilevante	Irrilevante	Rilevante
Costanza	Rilevante	Rilevante	Rilevante
Fama	Irrilevante	Irrilevante	Rilevante
Più forte	Rilevante	Irrilevante	Rilevante

Osserviamo, inoltre, che tra questi criteri manca quello dello stato di forma, che è certamente rilevante per il fantacalcio, sia reale che simulato (oltre che per il calcio reale). Infine, rileviamo che in tutti i casi i ragazzi si sono espressi (anche per iscritto) con un linguaggio verbale che non facesse riferimento esplicito a quello matematico. Si è quindi progettata la seconda fase dell'intervento tenendo conto dei seguenti sotto obiettivi didattici:

a. individuare e discutere tutti i criteri rilevanti per il fantacalcio simulato;

b. discutere ed eliminare i criteri non rilevanti per il fantacalcio simulato;

c. introdurre una simbologia, o comunque un linguaggio matematico-statistico, per descrivere i criteri rilevanti per il fantacalcio.

L'attività successiva è stata svolta in un laboratorio di informatica ed è stata organizzata in maniera da alternare delle fasi di discussione collettiva con fasi di lavoro al computer con i ragazzi divisi a coppie, una per ogni calcolatore. Inizialmente gli alunni sono stati tutti raggruppati davanti alla lavagna del laboratorio, che si presentava divisa in due parti, come rappresentato nella tabella sottostante.

Criteri	Situazioni
Media	
Fama	
Qualità	
Più forte	
Simpatia	
Costanza	

In questa prima parte l'attività è stata gestita facendo discutere ai ragazzi i criteri elencati sulla sinistra della lavagna, chiedendo per ciascuno di essi:

- chi di loro lo aveva usato

[5] Ad esempio, la *fama* può essere importante per il presidente di una squadra vera, in quanto un giocatore famoso può attirare tifosi allo stadio, tuttavia nel fantacalcio questa proprietà risulta essere del tutto ininfluente, così come il fatto che un calciatore sia "*forte*" può essere rilevante nel fantacalcio reale, in quanto ci si aspetta che un giocatore di qualità farà una buona stagione (e, quindi, buoni voti sulle pagelle redatte settimanalmente dai giornali), tuttavia questa proprietà è irrilevante per il fantacalcio simulato che si basa su un programma al computer che è, quindi, totalmente indipendente dalle prestazioni del giocatore reale. Caratteristiche come *simpatia*, *fama* e *qualità* possono essere rilevanti per il presidente e l'allenatore di una squadra reale, ma sono irrilevanti per il fantacalcio, in quanto non incidono né sulla simulazione, né (almeno in linea di principio) sulle pagelle stilate dai giornalisti.

• eventuali commenti anche da parte degli altri compagni (ex. se il criterio è valido o meno)
• in quale situazione il criterio fosse rilevante oppure no
• se il criterio fosse rilevante per il fantacalcio simulato

A mano a mano che i criteri venivano discussi, si scrivevano sulla lavagna le situazioni in cui questi erano più rilevanti. Alla fine della discussione abbiamo cancellato tutto ciò che non era risultato rilevante per il fantacalcio. Con questa discussione i ragazzi hanno potuto riconoscere l'importanza dei voti associati ad ogni calciatore (piuttosto che il nome del calciatore) e della disposizione temporale dei voti nelle tabelle.

A questo punto è stato introdotto, tramite una spiegazione frontale, la cartella Excel per la simulazione, ed i ragazzi per una decina di minuti hanno lavorato individualmente provando e simulando partite di fantacalcio. La consegna chiedeva annotare osservazioni su eventuali cambiamenti dei risultati delle partite al cambiare delle formazioni. In questo modo volevamo che gli studenti si rendessero conto in prima persona di come le scelte fatte influenzassero gli esiti delle partite.

Dopo 10 minuti i ragazzi sono stati richiamati davanti alla lavagna per raccogliere le loro prime osservazioni e per discutere come formalizzare alcuni criteri, come quello della media e quello dello scarto massimo. Durante la discussione, sono emersi in modo spontaneo i concetti statistici di media aritmetica e di campo di variabilità. Dopo aver formalizzato matematicamente i suddetti concetti, ed averne esplicitato potenzialità e limiti (si osservi che in questo caso si è realmente trattato della sola formalizzazione di ciò che i ragazzi avevano potuto scoprire da soli attraverso il semplice "gioco"), è stato chiesto agli studenti di iniziare il torneo, basato su partite al meglio dei cinque incontri e ad eliminazione diretta. Per lo svolgimento di ogni partita non sono stati necessari più di cinque minuti, il torneo, quindi, ha necessitato poco più di un quarto d'ora per l'intero svolgimento. Ai perdenti, l'onere di svolgere gli esercizi di algebra assegnati dall'insegnante come compiti per il fine settimana, ai vincitori l'onore di proseguire il cammino verso la finale.

In conclusione, seppure all'apparenza sia stata un'esperienza semplice e, probabilmente agli occhi del lettore, poco significativa, confessiamo che essa abbia riscosso più interesse e successo (inteso in termini didattici e disciplinari) di quanto fosse stato pronosticato: i concetti trattati sembrano esere stati assimilati ed anche lo svolgimento dei compiti, per coloro che avevano perso gli scontri, è stato vissuto con serenità e sufficiente dedizione (tanto che è stato richiesto dal docente di lasciare i *file* contenenti la totalità del progetto, installati sui vari computer, al fine di poterli utilizzare anche durante il successivo anno scolastico). Lungi da noi l'affermare di aver mostrato ***il*** sentiero per spiegare la statistica, quanto ci si sente di poter dire, però, è di aver trovato ***una*** via in grado di suscitare quel coinvolgimento emotivo che riteniamo sia in grado di favorire l'apprendimento. I ragazzi, infatti, sono stati stimolati dal gioco e sembrano aver compreso abbastanza bene i concetti di media aritmetica e di campo di variabilità. Inoltre, i risultati del compito in classe svolto dopo la sperimentazione, hanno mostrato che gli studenti sembrano aver acquisito consapevolezza delle potenzialità e dei limiti dei concetti matematici trattati.

Considerazioni sulla funzionalità didattica di Excel impiegata

In questo articolo, non è stato citato alcun quadro teorico di riferimento in quanto sia la progettazione che l'implementazione dell'esperienza descritta sono state realizzate senza riferimenti teorici espliciti. Non si tratta di una dimenticanza, ma di una caratteristica dell'intervento che può essere ripetuto da quei docenti che poco si occupano delle teorie didattiche e che prediligono un approccio più personale per la propria progettazione. Secondo questo punto di vista, il tipo di lezione che è stata qui presentato può essere definito *theory free*. Tuttavia, ci si è basati su varie assunzioni, come l'idea che l'apprendimento matematico possa essere favorito da:

• da esperienze pratiche basate sull'uso di qualche strumento tecnologico;
• da esperienze di verbalizzazione in cui si parli (o scriva) di quanto fatto nella pratica;
• da esperienze sociali come le discussioni di classe opportunamente dirette dall'insegnante.

A posteriori, queste assunzioni possono essere associate alla teoria della reificazione di Sfard (1991) ed alle teorie vigotskiane sull'uso della tecnologia in didattica della matematica (Mariotti, 2002; Bartolini Bussi, 1998); queste teorie appartenenti al bagaglio culturale delle persone coinvolte nello sviluppo dell'esperienza e presumibilmente ne hanno implicitamente influenzato la realizzazione.

Precisato questo, ci possiamo chiedere gli aspetti principali che hanno caratterizzato questa esperienza, e che potrebbero renderla esportabile/adattabile ad altri contesti; per fare questo assumiamo la chiave di lettura suggerita dal costrutto delle *funzionalità didattiche* (Cerulli et. al).

Fissato un obiettivo analogo al nostro ci possiamo chiedere che caratteristiche debba avere il *software* per implementare una simile esperienza. A questo proposito vorremmo osservare che, nonostante Excel non sia un *software* didattico ma professionale, esso gode delle seguenti caratteristiche, che sono risultate fondamentali per il nostro approccio:

• ***ampia diffusione***: quindi disponibile a scuola, e non estraneo agli alunni;

• ***rapidità di calcolo e di esecuzione***: per poter simulare un gran numero di incontri in un breve intervallo di tempo;

• ***funzione di generare numeri casuali***: utilizzata per rendere i risultati delle partite soggetti anche ad un fattore aleatorio, rendendo la simulazione più verosimile ed avvincente;

• ***immediata lettura dei risultati***: vista la natura problematica della classe, è importante evitare tutto ciò che possa risultare poco chiaro e, quindi, fonte di polemica durante il torneo;

In quest'ottica, non è obbligatorio utilizzare Excel, ma basta un qualsiasi *software* con le caratteristiche sopra elencate, e che sia abbastanza versatile da ***permettere di realizzare una simulazione*** che abbia le seguenti caratteristiche che riteniamo necessarie:

• ***tenga conto di tutte le caratteristiche di ogni giocatore schierato*** (espresse mediante i voti contenuti nelle tabelle di riferimento);

• ***opportune tabelle dei voti dei giocatori***: esse devono avere sequenze numeriche talvolta molto differenti, talvolta comparabili, ma diverse, e che possano mettere in evidenza diversi stati di forma, costanza e punte di rendimento (in positivo o in negativo).

• ***contenga solo lo stretto necessario per lo svolgimento dell'esperienza***, per evitare la presenza di elementi di distrazione all'interno dell'applicativo utilizzato;

• ***facilità d'uso***: non doversi forzare a capire il modo di utilizzare il simulatore permette di calarsi immediatamente nel ruolo di allenatore, ovvero nell'attività didattica vera e propria;

Osserviamo che nell'elencare le caratteristiche che abbiamo ritenuto essere necessarie non sono state trattate, in generale, quelle dell'intero *software*, ma solo quelle che abbiamo sfruttato durante la costruzione della simulazione. Siamo inoltre convinti che il supporto del foglio di calcolo (nello specifico, Excel), permetta di esplorare moltissimi aspetti della matematica delle scuole secondarie (inferiori e superiori), ma che sia necessario creare per ognuno di essi uno scenario *ad hoc*: il foglio di calcolo preparato per la nostra esperienza si adatta ai concetti basilari della statistica, ma risulta totalmente inutile nel caso si vogliano trattare, ad esempio, concetti quali "limite" o "derivata"!

Il foglio elettronico da noi sviluppato ha certamente giocato un ruolo fondamentale per il successo dell'esperienza, ma non è stato la fonte principale di apprendimento. Esso è stato piuttosto lo strumento delegato a far sorgere dubbi e domande per le quali sono state cercate risposte comunitarie di classe. Esso è stato costruito al fine di stimolare le libere osservazioni degli studenti ed inserito in un contesto di gioco all'interno del quale sviluppare una didattica dinamica, che prendesse spunto dagli interessi della classe cui è indirizzata. Tale didattica si è avvalsa di *modalità di impiego* (cfr. Cerulli, Pedemonte, Robotti) del *software* basate sui seguenti elementi, ritenuti indispensabili, e sui quali si potrebbero costruire esperienze analoghe:

• ***uno scenario di "gioco"***: l'aver inserito del sapere disciplinare in un'esperienza che apparentemente nulla aveva di scolastico ha permesso anche ai ragazzi di non avere timore nell'esprimere le proprie opinioni ed idee, favorendo quindi una discussione produttiva e ricca di spunti, anche in ottica di futuri approfondimenti;

• ***chiarezza*** con gli studenti sul fatto che con le scelte fatte è davvero possibile influenzare gli esiti degli scontri. In questo modo si rende la simulazione più realistica, favorendo il coinvolgimento emotivo degli alunni;

• un ***contesto dove i concetti matematici emergano come strumenti*** funzionali allo svolgimento del gioco, ovvero alla risoluzione del "problema" affrontato dagli alunni;

• il ***passaggio dal gioco ai concetti matematici*** sottesi deve avvenire ***tramite una fase di discussione, sotto la direzione dell'insegnante***, in cui questi vengono evidenziati, esplicitati e formalizzati (se ciò non accade, si ha solo un'esperienza ludica da ricordare, ma non ci può essere l'apprendimento desiderato);

• il fatto che gli ***studenti possano manipolare i dati e riflettere su di essi, pur non disponendo***

delle tecniche di calcolo adeguate, che possono essere introdotte di conseguenza. Riteniamo, che per gli alunni sia più produttivo, e stimolante, dover risolvere un problema senza disporre già di una tecnica per farlo, e dovendo quindi costruirla collettivamente.

Conclusioni

Pensando a possibili applicazioni future, riteniamo che questa esperienza potrebbe essere usata come elemento di partenza per costruire un percorso più lungo, che vada progressivamente a toccare nozioni più complesse e loro possibili applicazioni. A tal fine potrebbe essere opportuno implementare all'interno della stessa cartella anche qualche rappresentazione grafica (ad esempio un diagramma cartesiano rappresentante lo stato globale della squadra a seconda della formazione selezionata) al fine di fornire un iniziale ponte per ciò che verrà trattato in seguito, ovvero la rappresentazione per via grafica dei dati raccolti. Crediamo che la presenza dei grafici possa essere fonte di studio importante, anche per stimolare lo studente a comprendere il significato di ciò che ivi è rappresentato, rendendoli non solo l'appendice di uno studio statistico, ma materiale contenente informazioni su cui riflettere a fondo. In questa prospettiva potrebbe essere interessante chiedersi con quali *modalità di impiego* tali grafici potrebbero essere fruttuosamente introdotti nella pratica didattica per arricchire l'esperienza da noi descritta.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M.G. (1998), *Verbal Interaction in Mathematics Classroom: a Vygotskian Analysis*, in Steinbring H., Bartolini Bussi M. & Sierpinska A. (eds.), Language and Communication in the Mathematics Classroom, Reston VA: NCTM, 65-84.

Cerulli, M., Pedemonte, B., Robutti, E. (in press): "*Funzionalità Didattiche: uno strumento operativo per progettare ed analizzare esperienze di laboratorio*". *.Articolo su questa rivista*.

Mariotti, M.A. (2002), *Influencies of technologies advances in students' math learning*. In "Handbook of Interantional Research in Mathematics Education", chapter 29, pp. 757-786. Edited by L. D. English. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.

Sfard A. (1991), *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, 22 (pg. 1-36).

Alcune riflessioni sul laboratorio di statistica

Roberto Ricci, Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica - Ex I.R.R.E. - E.R. Gestione Commissariale

Alcune considerazioni didattiche

Le proposte presentate desiderano fornire alcune suggestioni di riflessione sulle modalità d'introduzione della statistica a scuola, specie in un momento come quello attuale in cui si fatica a trovare un saldo filo di coerenza nei diversi processi di cambiamento degli ultimi anni.

La ricerca nazionale ed internazionale nell'ambito della didattica della statistica (Ottaviani, 2003) mostra con chiarezza la strada da seguire: la statistica deve essere introdotta a scuola privilegiando il valore interpretativo della disciplina per favorire la formazione di un cittadino che disponga anche di adeguati strumenti di analisi quantitativa per comprendere la realtà che lo circonda (Scardovi, 1986). Realizzare questo obiettivo è un'impresa non facile, ma certamente possibile e la tecnologia fornisce un valido aiuto e supporto in questa direzione (Ricci, 2001).

Le attività di seguito proposte fanno riferimento ad un concetto ampio ed allargato di laboratorio, inteso come una sorta di bottega artigianale nella quale docenti e discenti formulano ipotesi, propongono soluzioni ed interpretazioni e mediante un processo di tipo ricorsivo giungono a conclusioni che sono il punto di partenza per nuove analisi e ricerche.

Di grande utilità nella costruzione del percorso sono stati i volumi Matematica 2001, Matematica 2003, Matematica 2004[1] in cui sono raccolte le proposte fatte dalla Commissione UMI-CIIM e SIS per i nuovi curricoli e un'ampia serie di attività sviluppate da docenti nell'ambito di un protocollo di intesa fra MPI, UMI-CIIM, SIS e Mathesis.

Il foglio elettronico[2]

Il foglio elettronico si caratterizza per la sua notevole flessibilità e duttilità per le applicazioni, pur non essendo uno strumento specifico per l'insegnamento delle discipline scientifiche. Molteplici sono le possibilità di utilizzo nei diversi ordini di scuola, ma vi sono alcune attività che con gradi diversi di approfondimento possono trovare impiego per studenti di età molto differenti. Un esempio emblematico è fornito dalle potenzialità grafiche del foglio elettronico che possono favorire l'acquisizione e la sistemazione di concetti tradizionalmente presentati nell'insegnamento delle discipline scientifiche, ma anche di altre materie come storia e geografia.

Certamente l'elaborazione dei dati rappresenta un'attività trasversale a molti contesti di apprendimento e può aiutare il docente e gli allievi a creare un ambiente di apprendimento cooperativo in cui il foglio elettronico costituisce uno strumento molto utile ed importante. In particolare, i momenti di riflessione sui limiti e le semplificazioni talvolta fuorvianti del foglio elettronico consentono un guadagno in termini formativi difficilmente ottenibile in altri modi (Galmacci, 2002).

Di seguito si propone un'attività trasversale che vuole fornire un esempio utilizzabile in ordini scolastici diversi. L'analisi proposta può essere infatti compiuta anche solo in parte per gli allievi più giovani, mentre può essere condotta integralmente per gli allievi della scuola secondaria.

Come detto in precedenza, il foglio elettronico ben si presta all'elaborazione dei dati. Attività che inoltre offre il vantaggio di contestualizzare l'azione di insegnamento all'interno della realtà vissuta dagli allievi, aspetto che, come noto, presenta notevoli vantaggi dal punto di vista motivazionale (Galliani, 1996).

---

[1] I volumi prodotti da UMI, SIS, Mathesis, MPI: Matematica 2001, Matematica 2003 e Matematica 2004 sono scaricabili all'indirizzo: http://umi.dm.unibo.it/italiano/Didattica/didattica.html

[2] Il presente paragrafo è un estratto da Orlandoni A., Ricci R., (2006), "I fogli elettronici", *Nuova Secondaria*, 43-47, 10, 2006.

Si consideri una semplice distribuzione di frequenza come la seguente:

Anno	Iscritti
1996	341
1997	352
1998	312
1999	299
2000	324
2001	321
2002	352
2003	365
2004	371
2005	383

Tabella 1: iscritti alla I classe di una scuola primaria

Il foglio elettronico permette molto rapidamente di "esplorare" i dati e di introdurre in modo semplice e diretto alcuni concetti statistici senza alcun bisogno di formalizzazione. Ciò può essere molto utile se i destinatari sono allievi della scuola primaria, mentre per allievi della scuola secondaria può rappresentare una prima fase, propedeutica ad ulteriori approfondimenti.

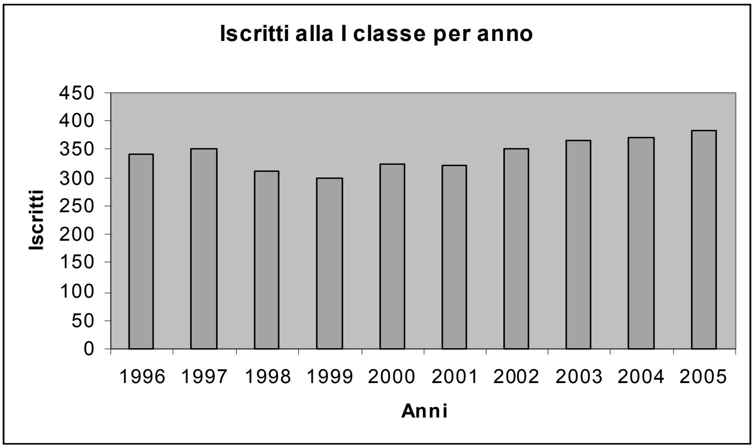


Figura 1

Il grafico della figura 1 risulta molto semplice da ottenere e può essere realizzato anche da allievi della scuola primaria. Infatti il foglio elettronico permette di costruire dei grafici in modo guidato e, soprattutto, in modo che risulti sempre evidente il collegamento con i dati da rappresentare. Questa peculiarità può risultare molto interessante sotto il profilo didattico perché consente di ricorrere a gradi di generalizzazione molto differenziati. Si può passare da una rappresentazione molto semplificata ed intuitiva per la scuola primaria ad una più rigorosa per la scuola secondaria.

Inoltre il foglio elettronico è strutturato in modo tale che una modifica dei dati comporta automaticamente il conseguente aggiornamento del grafico. Tale potenzialità risulta molto utile per favorire la creazione di un ambiente di apprendimento cooperativo, dove il foglio elettronico diviene un supporto all'esplorazione dei concetti. Vedere cosa accadrebbe in seguito ad una variazione di uno degli elementi oggetto d'interesse permette agli allievi di accostarsi gradatamente a concetti anche articolati e talvolta complessi. Inoltre un approccio, per così dire grafico, permette al docente di far maggiormente leva sull'immaginazione degli allievi, aspetto particolarmente importante per i soggetti che presentano alcune difficoltà di vario tipo ad accostarsi a determinati concetti, specie in ambito scientifico.

Ad un livello di approfondimento maggiore il grafico come quello della figura 1 può essere modificato come in figura 2. In questo modo gli studenti possono essere sollecitati a riflettere sulla differenza tra un diagramma a barre come il primo ed uno ad aste come il secondo.

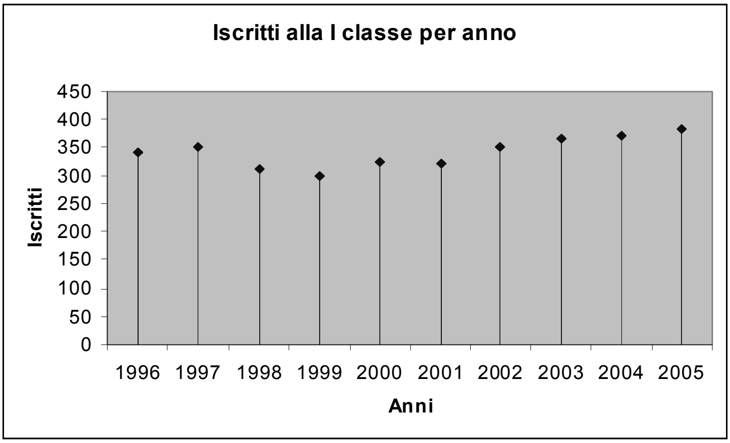


Figura 2

Inoltre può essere richiamata l'attenzione degli allievi sull'uso improprio che il foglio elettronico propone del termine *istogramma*. Sovente anche in diversi testi non si riflette adeguatamente sul valore interpretativo dei grafici e, per certi versi, il foglio elettronico potrebbe costituire un ulteriore elemento di diffusione di usi impropri, proprio per la facilità di realizzazione grafica che esso consente. La discussione in classe circa le differenza tra un istogramma propriamente realizzato e la soluzione proposta automaticamente dal foglio elettronico è certamente un momento didattico molto ricco e denso di significato.

Se si prende in considerazione la seguente distribuzione di frequenza:

Età	**Individui per classe**
15 **p—**25	27895
25 **p—**30	21758
30 **p—**35	23715
35 **p—**40	23198
40 **p—**45	19961
45 **p—**50	17780
50 **p—**55	19276
55 **p—**60	19292
60 **p—**65	17242
Totale	**187217**

Tabella 2: popolazione in età attiva nella provincia di Rimini (1.1.2001)

In un caso come quello riportato nella tabella 2 la predisposizione di un istogramma richiede particolare attenzione. Il grafico corretto sotto il profilo statistico-interpretativo è quello riportato in figura 3.

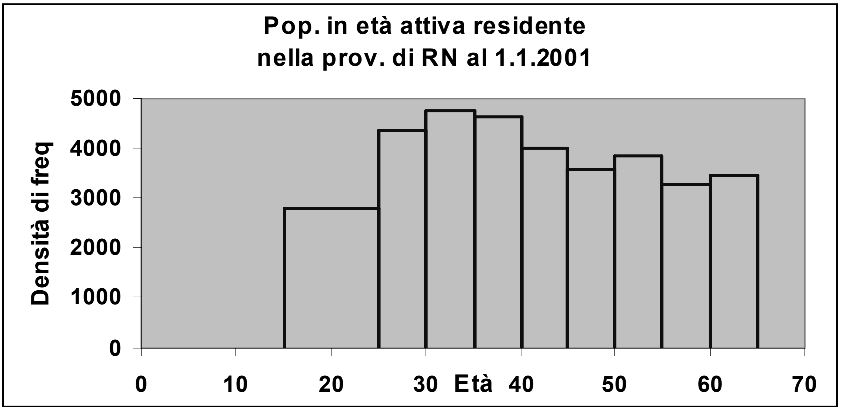


Figura 3

La realizzazione del grafico della figura 3 permette al docente di far riflette gli allievi sui problemi derivanti dall'utilizzazione acritica del foglio elettronico. Infatti per realizzare un istogramma corretto è necessario utilizzare il tipo di grafico *a dispersione* poiché la tipologia indicata dal foglio elettronico come *istogramma* non consente di prendere in considerazione adeguatamente il concetto di densità di frequenza, fondamentale quando si fa riferimento a classificazioni basate su classi di ampiezza variabile.

Sempre ad un livello di approfondimento maggiore, le tabelle *pivot* possono rappresentare uno strumento di analisi numerica e grafica di notevoli potenzialità. Infatti esse permettono di considerare distribuzioni doppie di frequenza, ovvero dati tabulati secondo due criteri di classificazione.

Conclusioni

Sovente l'analisi delle modalità per realizzare una certa elaborazione con un determinato software è un pretesto per riflettere o per introdurre *ex novo* alcuni contenuti statistici spesso utilizzati in maniera inappropriata, se non addirittura fraintesi nel loro valore interpretativo. In questo modo gli stessi docenti apprendono o migliorano le loro conoscenze e competenze con un approccio costruttivista ed è quindi immaginabile che, a loro volta, essi le proporranno ai loro studenti secondo questa modalità che, come osserva Ottaviani (1996), così bene si adatta all'insegnamento della statistica.

Quest'ultimo aspetto deve essere valutato con molta attenzione poiché conferma quanto già sostenuto da diversi ricercatori che si occupano di didattica della statistica. Un'oculata introduzione delle tecnologie informatiche può rappresentare un valido strumento per superare, almeno in parte, le difficoltà e le resistenze di molti docenti ad inserire temi di statistica nei loro programmi a causa di una preparazione non sempre adeguata e solida. Vi è inoltre l'apprezzabile vantaggio di poter presentare un concetto statistico proprio in un contesto interpretativo in cui esso trova applicazione. Ciò consente di proporre ai docenti non solo il contenuto disciplinare della statistica, intesa come strumento per l'analisi quantitativa dei fenomeni collettivi, ma anche il modo più adatto per fare acquisire tali contenuti agli studenti. Troppo spesso, infatti, nella scuola la statistica viene presentata solo sotto il suo aspetto tecnico-formale, impedendo quindi ai discenti di intenderne il significato e la sua peculiarità.

Le tecnologie possono rappresentare un momento di crescita determinante per lo sviluppo del sistema formativo, a patto però che sia prestata un'adeguata attenzione alla conoscenza ed all'approfondimento sia dell'aspetto didattico sia di quello più propriamente tecnologico (Galliani, 1996). Queste paiono essere sfide e opportunità poste dalle nuove tecnologie che, se colte adeguatamente, potrebbero rappresentare un'importante occasione per inserire realmente la statistica nel bagaglio culturale delle nuove generazioni (Orlandoni e Ricci, 2006).

Le attività proposte in questo breve lavoro non costituiscono un percorso organico, ma vogliono solo fornire alcuni spunti di riflessione dai quali gli insegnanti, in funzione delle specificità in cui operano, possano partire per progettare percorsi che facilitino un apprendimento della statistica e della matematica coerente con una visione ormai consolidata a livello internazionale.

Bibliografia

Galliani L. (1996), Comunicazione multimediale e modelli di didattica, in M. G. Ottaviani (a cura di) *Atti della giornata di studio "Multimedialità e nuove forme di didattica. Statistici ed esperti a confronto"*, (p. 13-27).

Galmacci G. (2002), Statistica ed informatica, *Induzioni*, 25, (p. 69-84).

Orlandoni A., Ricci R. (2006), "I fogli elettronici", *Nuova Secondaria*, 10, (p. 43-47).

Ottaviani M.G. (1996), Il computer nella didattica della statistica, in M. G. Ottaviani (a cura di) *Atti della giornata di studio "Multimedialità e nuove forme di didattica. Statistici ed esperti a confronto"*, (p. 29-39).

Ottaviani M.G. (2003), Didattica della statistica: un campo di ricerca in evoluzione, *Induzioni*, 26, (p. 65-71).

Ricci R. (2001), La statistica nella scuola secondaria superiore: un problema culturale e didattico, *Statistica*, 61, n. 2, (p. 213-229).

Scardovi I. (1986), La legge statistica, la sua natura inerziale, la sua genesi induttiva, *Nuova Secondaria*, 10, (p. 29-31).

Un gioco per introdurre il concetto di equivalenza tra spazi di campionamento

Michele Cerulli - Istituto Tecnologie Didattiche - C.N.R. di Genova

Introduzione

L'introduzione alla probabilità presenta varie difficoltà, come mostrato dalla letteratura di ricerca (Fischbein, 1975; Pratt, 1998), che testimonia i fallimenti degli approcci classici. In questo articolo presentiamo un episodio tratto da un approccio innovativo basato su esperienze di laboratorio e sull'uso in generale di strumenti tecnologici per introdurre gli alunni ai concetti di "caso" e "probabilità". Il percorso sviluppato (nell'ambito del progetto Webelabs[1]) è composto di tre fasi: le prime due riguardano il concetto di "caso", e coinvolgono l'uso di robot LEGO (Cerulli et al., 2006). La terza fase, sulla quale ci soffermiamo in questo articolo, riguarda espressamente il concetto di probabilità, con particolare attenzione a: 1) lo sviluppo negli alumni del concetto spazio di campionamento, ed "equivalenza" di spazi di campionamento; 2) La costruzione, da parte degli alunni, di teorie per confrontare spazi di campionamento; 3) La costruzione da parte degli alunni dei concetti di frequenza, frequenza relativa, e probabilità. In particolare ci soffermeremo su un episodio cruciale per la questione 1) illustrando come è stato impiegato il micromondo "Random Garden" e quindi identificandone una funzionalità didattica specifica per l'obiettivo didattico dell'introduzione degli alunni al concetto di equivalenza di spazi di campionamenti. Tale funzionalità si basa sull'assunzione secondo cui l'apprendimento può risultare dalla partecipazione attiva sia in attività pratiche che in attività sociali. Tuttavia tali attività non garantiscono che i significati costruiti dagli alunni siano coerenti con la Matematica o con gli obiettivi didattici dell'insegnante. Tale coerenza può essere ottenuta tramite *discussioni matematiche di classe* orchestrate dall'insegnante (Mariotti, 2002; Bartolini Bussi, 1996). L'esperienza si basa quindi su una fase "pratica" in cui gli alunni interagiscono con il micromondo, e su una fase di riflessione culminante in una discussione di classe. Le due fasi si incentrano su un gioco, da noi chiamato "*Indovina il mio giardino*", su cui si focalizzerà questo articolo.

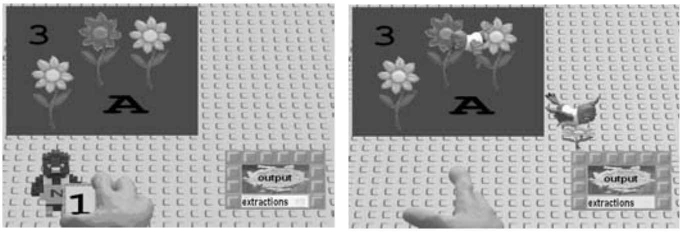


Figura 1. Un numero N viene dato all'uccellino per richiedere l'estrazione di N oggetti. Un uccellino deposita nel nido gli oggetti estratti.

Il *Random Garden*

Il *Random Garden* è un micromondo, realizzato nell'ambiente di programmazione ToonTalk (Kahn 2004), progettato per rappresentare estrazioni casuali con rimbussolamento. Esso consiste di uno spazio di campionamento (il *Giardino*), un *Uccellino* ed un *Nido* [2]. Quando l'utente da un numero **N** all'*Uccellino*, questi va nel giardino dal quale esce un nuovo uccellino che deposita nel *Nido*, uno alla volta, gli N oggetti estratti (Figura 1). L'utente può modificare il giardino aggiungendo o rimuovendo oggetti, i quali possono essere numeri, stringhe di testo, o immagini qualsiasi. Questo implica che può essere utilizzato per rappresentare un qualsiasi fenomeno casuale discreto.

Gli elementi estratti dal giardino vengono raccolti, uno sopra l'altro, in un nido (Figure 1, and 2). Per visualizzare la sequenza dell'estrazione degli oggetti, è possible convertire il nido in una scatola

[1] IST-2001-32200, "WebLabs: new representational infrastructures for e-learning" (http://www.weblabs.eu.com/).

con tante buche quanti gli oggetti estratti (Figura 2). Quindi è possibile avere una visione qualitativa d'insieme della sequenza e delle sue proprietà.

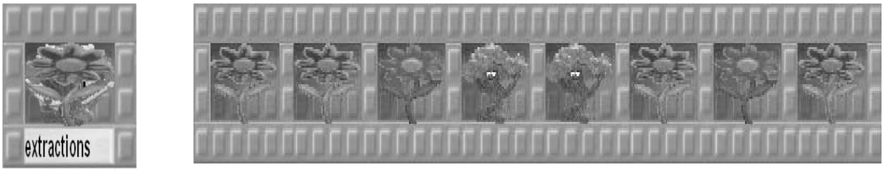


Figura 2. Solo il primo elemento di otto estrazioni raccolte in un nido; La scatola corrispondente mostra tutte le estrazioni.

Se il numero delle estrazioni è elevato, e/o si necessita di una più dettagliata analisi qualitativa e quantitativa dei dati, si possono usare altri strumenti associati al Random Garden: il *Grafico a Barre* ed i *Contatori* (Figura 3). Questo sono strumenti dinamici: sia i numeri che le barre cambiano mentre l'estrazione è in corso. In particolare le barre oscillano molto all'inizio dell'estrazione, ma si stabilizzano quando il numero degli oggetti estratti diventa elevato.

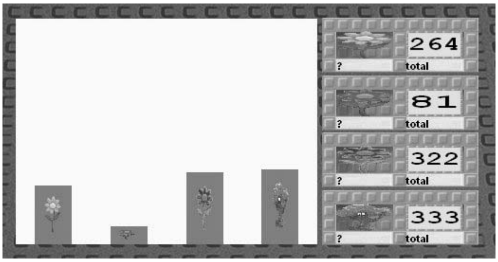


Figura 3. Il grafico a barre ed i contatori

Indovina il mio giardino

Dato un nido, o una scatola con una sequenza di estrazioni (Figura 2), è possibile interrogarsi sulla composizione del giardino che ha generato la sequenza data. Questa domanda chiave è alla base del gioco "Indovina il mio giardino" che viene condotto come segue.

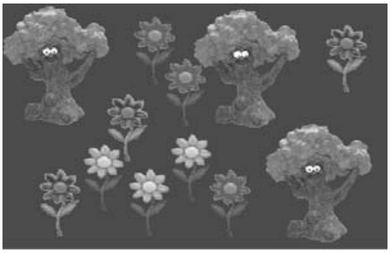
Una squadra di alunni, un gruppetto, crea un giardino (usando non più di 12 oggetti), ovvero definisce uno spazio di campionamento; dopodiché la squadra produce un insieme di scatole che contengono un numero crescente di estrazioni, ad esempio 2 scatole con 100 estrazioni, e 2 scatole con 1000 estrazioni. Le scatole vengono quindi pubblicate sul web, come sfida per le squadre avversarie.

Un'altra squadra può quindi scaricarsi i dati (le scatole) generati dalla prima squadra e può analizzarli al fine di provare ad indovinare la struttura del giardino che li ha generati. Questa squadra può sia osservare ad occhio le sequenze di estrazioni, che studiarle utilizzando i *contatori* ed il *grafico a barre*. Una volta formulata una congettura sulla struttura del primo giardino, la squadra può produrre un nuovo giardino ad essa corrispondente e può utilizzarlo per produrre nuovi dati da confrontare con quelli distribuiti dalla prima squadra. Una volta che la seconda squadra è soddisfatta del giardino congetturato, può pubblicarlo sul web ed aspettare la sua validazione da parte degli avversari. A questo punto la prima squadra esamina il giardino congetturato dagli avversari e pubblica dei commenti per comunicare loro se hanno indovinato il giardino oppure no. Se il giardino non è stato indovinato, lo scambio di dati e congetture continua fino a che le due squadre non trovano un accordo.

Un episodio

Una classe di 21 alunni, di Milano, ha partecipato all'intero esperimento, quindi giocando a "Indovina il mio giardino" in terza Media, dopo le prime due fasi del percorso che si erano svolte quando la classe era in seconda media. Di conseguenza gli alunni avevano confidenza con il concetto di “caso”, e stavano per iniziare un percorso di introduzione alla probabilità. Gli alunni, suddivisi in squadre, hanno pubblicato le loro sfide, ed hanno ricevuto risposte da studenti coetanei appartenenti a classi Portoghesi e Svedesi partecipanti al progetto. L’episodio che riportiamo, riguarda il caso di una squadra Milanese che ha costruito il proprio giardino seguendo una strategia basata su una particolare ambiguità tra giardini diversi. Questo ha portato gli opponenti svedesi a rispondere con un giardino compatibile a quello originale, ma non identico ad esso. Di conseguenza la classe italiana ha sviluppato una discussione tesa a decidere se dichiarare corretta o meno la risposta degli svedesi.

I primi protagonisti dell’episodio sono i membri della squadra di Jeka: Jeka (Jk), Jè (Je) e Rossana (R). Questi decidono di utilizzare un giardino composto da 3 fiori gialli, 3 fiori rossi, 3 fiori rosa, e 3 alberi. La loro idea è che, vedendo i risultati delle estrazioni ottenute con questo giardino, gli avversari pensino ad un giardino composto da 1 fiore giallo, 1 fiore rosso, 1 fiore rosa, ed 1 albero. La risposta degli opponenti svedesi rivela che la strategia è stata vincente (per indurli in errore), infatti il giardino congetturato contiene proprio 1 solo elemento di ogni tipo, come la squadra di Jeka aveva sperato.



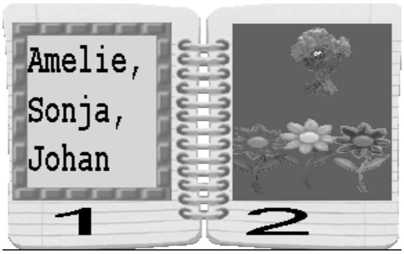


Figura 4. Sulla sinistra si può vedere il giardino realizzato dalla squadra di Jeka, mentre sulla destra si può vedere quello congetturato dagli avversari svedesi.

Dopo aver risposto agli avversari, agli alunni italiani viene presentata la sfida di M, che viene analizzata da due squadre che ottengono il grafico a barre di Figura 5.

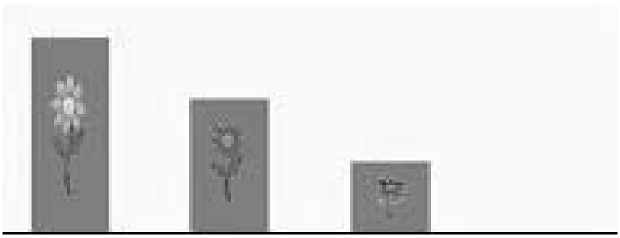


Figura 5. Il risultato di 1200 estrazioni del giardino di M.

Le due squadre che rispondono alla sfida danno risposte diverse: a) 2 fiori rossi, 4 fiori rosa, 6 fiori gialli (squadra di Jeka); b) 1 fiore rosso, 2 fiori rosa, 3 fiori gialli (squadra di Lollo). *Quale delle due risposte è corretta?* L’insegnante pone questa domanda ai ragazzi due settimane più tardi durante una discussione di classe in cui non era possibile accedere al computer e quindi al micromondo del Random Garden. Al fine di favorire la discussione, l’insegnante fornisce delle schede che rappresentano le due risposte fornite dalle due squadre (Figura 6).

Figura 6. A destra: la risposta della squadra di Lollo; a sinistra quella della squadra di Jeka.

L'insegnante richiama le risposte delle due squadre e chiede alla classe quale delle due sia corretta, o se sono entrambe corrette/sbagliate. Segue una breve discussione in cui gli alunni si trovano d'accordo nel sostenere che le possibilità di pescare un fiore rosso dai due giardini è la stessa, come espresso da C1:

C1: secondo me è uguale perché è tutto il doppio….nella B i fiori rossi diventano 2 i fiori viola diventano 4 e i fiori gialli diventano sei…è uguale!

I giardini sono ora trattati dagli alunni come oggetti e le loro caratteristiche costitutive vengono confrontate: il giardino B è considerato come una versione raddoppiata del giardino A. Nella discussione Jeka fa notare che questa idea richiama il caso della sfida con la squadra svedese.

A questo punto sembra esserci un terreno fertile per impiantare l'idea di equivalenza e l'insegnante coglie l'occasione per introdurre esplicitamente il termine "equivalente":

Ins: … della sfida agli svedesi dobbiamo parlare a parte. Quindi questi due giardini, sulla carta, sono equivalenti?

Seguono varie risposte che si sovrappongono, in cui emergono sia la parola "equivalenti" che la parola "uguali", c'è quindi bisogno di chiarire e trovare un accordo:

C2: equivalenti!

Jeka: equivalenti con intonazione come molto decisa

Si sente qualche "uguale" in sottofondo

C2: equiv…equivalenti …un po' incerto

Ins: mi spiegate cosa volete dire con equivalenti? Non vi ricordate …

Jè: uguale no perché non ci sono gli stessi elementi nei due giardini.

Ins: quindi sicuramente M aveva uno o aveva l'altro.

Jè: equivalenti perché il valore dei due è lo stesso…in pratica…diciamo così…

La posizione di Jè crea lo spazio per l'introduzione di nuovi criteri per confrontare giardini, che non siano la pura e semplice "uguaglianza". L'alunna infatti introduce un suo criterio di equivalenza, basato sui "valori" dei giardini. A questo punto non è chiaro cosa intenda con "valori", ma dal contesto possiamo dedurre che Jè si riferisca ad un qualche "risultato" prodotto dai giardini, ad esempio i grafici a barre o i numeri sui contatori, o le sequenze di elementi estratti. Nel frattempo altri alunni, come C3, propongono la loro "definizione" alternativa di equivalenza di giardini.

C3: le percentuali vengono le stesse se si fa…secondo me è perché la percentuale è più o meno la stessa

Ins: di?

C3: di…di dodici …di tutti i fiori…per esempio

Ins: fammi un esempio

C3: li nel primo giardino, nel giardino A, è 6 la percentuale …nel primo giardino la percentuale è sei, il sei sareb…che sarebb…

Ins: la percentuale? Il totale?!

C3: si, il totale, il 6, sarebbe il 100, il rosso è 1, quindi sarebbe…il rosso sarebbe 1 su 6 …uh mamma...

Ins: 1 su 6 conferma

C3: 1 su 6 e il secondo è 2 su 12 che comunque è 1 su 6

Ins: uhm, quindi tu dici “sono equivalenti come sono equivalenti le due frazioni” che dai?

C3: si

Ins: giusto?

Ins: Però non sono uguali, quindi noi possiamo dire che queste risposte sono equivalenti…tra l’altro io non mi ricordo se la sfida di M era la prima o la seconda, devo dire la verità…. allora di questi due possiamo dire che sono equivalenti, quindi senza sapere qual è il giardino originale non possiamo…(dare un verdetto finale)…ok?

C3: perché anche se facessimo le estrazioni magari non verrebbero…sicuramente i numeri non verrebbero uguali, quasi uguali!

Ins: verrebbero quasi uguali, e le colonne come te le aspetti?

C3: …con l’altezza uguale secondo me.

Ins: nei due giardini?

C3: nei due giardini l’altezza delle colonne è uguale ma i valori son diversi.

L’idea di equivalenza di C3 è diversa da quella di Jè. Essa si basa sull’analisi degli elementi costitutivi del giardino e c’è un tentativo di formalizzarla associando delle frazioni ai singoli giardini. Il fatto che questa idea sia coerente con la definizione classica di probabilità è solo un caso, nel senso che tale definizione è ancora sconosciuta agli alunni. Tuttavia, C3 afferma anche che i due giardini dovrebbero produrre dei grafici a barre uguali con la stessa “altezza delle colonne”. Questa sua convinzione si ricollega all’idea espressa da Jè, e viene chiarita ed istituzionalizzata più avanti nella discussione dopo che l’insegnante sposta nuovamente il fuoco sulla sfida tra la squadra di Jeka e la squadra svedese. La discussione riprende a più riprese le due idee di equivalenza espresse da C3 e da Jè, e si conclude con una presa di posizione finale riguardo alla risposta da proporre agli svedesi

Ins: la frase che vuoi scrivere agli svedesi per spiegare…. ?

C: Gli scriverei avete sbagliato….devo dire pure la soluzione?

Ins: supponi che quello che dici M lo scrive e lo spedisce agli svedesi.

C: avete…avete sbagliato…allora, non avete scoperto il nostro giardino, però ne avete trovato un altro che comunque di valore è uguale a quello che avevamo fatto noi tranne….

La parola “valore” ed “euqivalente” appaiono legate durante tutta la discussione, e la loro relazione viene definitivamente chiarita da C:

Ins: che intendi “di valore”?

C: cioè i grafici che vengono fuori dalle estrazioni sono uguali a quelli del giardino che abbiamo fatto noi.

Ins: perfetto.

C: solo che il nostro giardino aveva quantità di fiori, quantità di oggetti diverse.

Ins: allora, che danno le stesse estrazioni ci sono tanti giardini equivalenti.

C: ci sono 3 giardini equivalenti…ci sono 2 giardini equivalenti…ci sono il nostro, 3 rossi, 3 viola, 3 gialli e 3 alberi, il vostro, uno di ognuno, e un terzo che contiene due esemplari di ogni oggetto[2].

A questo punto i significati delle parole “valori” ed “equivalenti” sono chiari per la classe, ed è stato trovato un accordo sul seguente criterio di validazione delle risposte alle sfide: la risposta è corretta se il giardino proposto è *uguale* a quello originale; la risposta è *quasi corretta* se il giardino proposto è equivalente a quello originale nel senso che producono lo stesso grafico. Rimane tuttavia da chiarire la relazione tra questa idea di equivalenza, e quella basata sulle frazioni proposta da C. L’argomento viene discusso in seguito dalla classe, ma a questo punto ormai il “seme” è stato piantato.

Di questa storia riteniamo interessante il fatto che un “seme” dell’idea di equivalenza sia apparso sotto forma di strategia usata da una squadra, quella di Jeka, per vincere la sfida. Tale seme riappare poi nella discussione della sfida di M che si era avvalsa dello stesso tipo di strategia basata sull’ambiguità e sul fatto che più giardini possono produrre lo stesso tipo di grafico. Nella discussione analizzata questo seme di equivalenza riappare e si sviluppa intorno alla necessità di stabilire un criterio (lasciato appositamente ambiguo nelle regole del gioco proposto) per decidere se una risposta è corretta o meno. Ognuno di questi passaggi corrisponde ad una evoluzione dell’idea di equivalenza di giardini,

[2] Per motivi pratici nel gioco è stato posto come 12 il limite massimo di oggetti contenuti nel giardino, quindi giardini con un numero superiore di oggetti non vengono presi in considerazione dai ragazzi.

ottenuta tramite riflessioni e discussioni di classe chiaramente guidate e spinte da due "necessità" intrinseche del gioco proposto: la necessità di trovare un criterio per stabilire il vincitore; la necessità di creare sfide "difficili".

Una funzionalità didattica basata sul gioco

Il *Random Garden* può avere diverse funzionalità didattiche, e nella nostra sperimentazione stessa è stato utilizzato in riferimento a più obiettivi didattici. Tuttavia in questo articolo ci siamo soffermati su una funzionalità particolare, basata sul gioco "Indovina il mio giardino" e che può essere identificata seguendo lo schema proposto da Cerulli, Pedemonte e Robotti (cfr):

Ipotesi

Alla base di questo approccio ci sono alcune assunzioni a carattere generale che possono essere riassunte come segue:

• l'apprendimento può risultare dalla partecipazione attiva sia in attività pratiche che in attività sociali.

• è possibile far praticare agli alunni attività di manipolazione e studio di fenomeni casuali utilizzando delle rappresentazioni, e prima che la probabilità sia stata formalmente studiata. In questo modo si potranno costruire delle conoscenze basate sull'esperienza pratica.

• la conoscenza pratica costruita può evolvere tramite attività sociali orchestrate dall'insegnante.

Tuttavia, ci siamo basati anche su alcune assunzioni specifiche relative alla tematica del "gioco":

• il gioco competitivo può facilitare un coinvolgimento attivo da parte degli alunni

• è possibile incorporare concetti matematici direttamente nelle regole dei giochi

• il lasciare ambigue tali regole necessarie allo svolgimento del gioco può favorire/motivare la discussione regole stesse. Tali discussioni possono quindi essere utilizzate dall'insegnante come mezzo per introdurre/discutere/approfondire i concetti matematici in questione

Obiettivo didattico

Introduzione dell'idea di equivalenza tra spazi di campionamento al fine di porre le basi per introdurre successivamente il concetto di probabilità.

Artefatto

Le caratteristiche del *Random Garden* che riteniamo essenziali per questo tipo di esperienza sono:

• La capacità del Random Garden di rappresentare spazi di campionamento e fenomeni casuali

• La possibilità di studiare tali fenomeni tramite *grafici a barre* e *contatori*.

• La manipolabilità degli spazi di campionamento che possono essere creati dagli alunni stessi.

Modalità d'impiego

• Gli alunni sono coinvolti in un gioco competitivo in cui devono inventarsi uno spazio di campionamento dal quale ricavare delle estrazioni da mostrare agli avversari. Gli avversari, sulla base delle estrazioni, devono indovinare lo spazio di campionamento

• Una volta effettuati gli scambi, tramite discussione di classe, si analizzano le varie sfide, e si stabilisce chi ha vinto ciascuna sfida: l'attenzione viene posta sul criterio di validazione delle risposte, che è lasciato appositamente ambiguo nelle regole, e deve essere deciso dalla classe.

• Durante la discussione, al momento opportuno, l'insegnante introduce appositamente il termine "*equivalente"* per fare esprimere i criteri di validazione delle sfide usando questo termine per dire che due spazi di campionamento non sono uguali, ma che hanno qualcosa in comune.

• La discussione prosegue facendo esprimere ai ragazzi i diversi modi in cui loro possono stabilire l'equivalenza o meno degli spazi di campionamento, ovvero stabilendo in che senso possano essere considerati diversi ma equivalenti.

• La discussione si conclude quando la classe ha un accordo sul criterio per stabilire chi ha vinto una sfida anche nel caso in cui gli spazi di campionamento risultino diversi ma equivalenti.

• Il criterio trovato viene scritto formalmente su un cartellone di classe o un qualsiasi supporto che possa contenere e rappresentare le regole ufficiali del gioco.

Osserviamo che scegliendo modalità di impiego simili, si può pensare a progettare altre esperienze in cui ci si occupi del concetto di equivalenza in generale, o specifico di altri contesti. Ad esempio, in un'esperienza precedente a questa, nell'ambito dello stesso progetto, è stato proposto il gioco "Indovina il mio robot" in cui i ad ogni squadra era richiesto di programmare (sempre con ToonTalk) una procedura (eseguita da un robot di ToonTalk) che producesse una successione numerica; e le squadre avversarie, vedendo i primi termini della successione, dovevano programmare loro stessi una procedura che riproducesse la stessa successione. Anche in questo caso, il confronto di robot diversi (quindi di procedure diverse) che sembravano produrre la stessa successione numerica, è sfociato in una discussione ed un apprendimento sui criteri per stabilire quando due successioni possono essere considerate equivalenti o meno.

Bibliografia

Bartolini Bussi M. G.: 1996, *Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School*. In Educational Studies in Mathematics, 31 (1-2), 11-41.

Cerulli M., Pedemonte B., Robotti E.: "*Funzionalità didattiche: uno strumento operativo per progettare e analizzare esperienze di laboratorio*" in questo fascicolo.

Cerulli M., Chiocchiariello A., Lemut E. (2006): Randomness and Lego Robots. Presented at CERME 4, Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, Spain, 17-21 February 2005 (2005) 591-600. ISBN 84-611-3282-3. http://cerme4.crm.es/Papers definitius/5/Cerulli-Chioccariello-Lemut.pdf

Fischbein, E.: 1975, *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Reidel, Dordrecht.

Kahn, K.: 2004, *ToonTalk-Steps Towards Ideal Computer-Based Learning Environments*. In 'A Learning Zone of One's Own: Sharing Representations and Flow in Collaborative Learning Environments', Tokoro, M. & Steels, L. eds., Ios Pr Inc.

de Lacerda Matos, J. F., Mor, Y., Noss, R., Santos, M. (2006): "*Sustaining interaction in a mathematical community of practice*". Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4 (2005), pg. 1041-1050. Edt. Bosh, M.. IQS, Fundemi Business Institute. ISBN: 84-611-3282-3. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/9/mor.pdf

Mariotti, M. A.: 2002, *Influences of technologies advances in students' math learning*. In "Handbook of International Research in Mathematics Education", chapter 29, pp. 757-786, English, L. D. eds.. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.

Pratt, D.: 1998, The Construction of Meanings IN and FOR a Stochastic Domain of Abstraction, Unpublished Ph.D. thesis, Univ. of London, Institute of Education.

Dal lancio di dadi a un gioco con tre dadi

Aurelia Orlandoni - Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica - Ex I.R.R.E. – E.R. Gestione Commissariale

Alcune considerazioni didattiche

Il percorso che viene proposto è stato, in parte, sperimentato per diversi anni nella Scuola Secondaria di secondo grado, ma si presta ad essere adattato sia alla Scuola Secondaria di primo grado sia ad approfondimenti per le classi terminali della Secondaria di secondo grado.

È utile ricordare che le Indicazioni per il curricolo appena uscite individuano tra gli obiettivi di apprendimento nel tema *Misure, Dati, previsioni*: "Rappresentare insiemi di dati, anche facendo uso di un foglio elettronico …." " In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, discutere i modi per assegnare ad essi una probabilità ….". Le attività qui proposte perseguono questi obiettivi e propongono una metodologia laboratoriale, intesa nella sua accezione più ampia.

Si partirà da un'attività carta e penna per passare poi all'utilizzo del foglio elettronico fino ad arrivare all'utilizzo della programmazione, sempre utilizzando situazioni-problema che, da un lato, attraverso il gioco possano suscitare curiosità e interesse negli allievi, dall'altro consentano la costruzione di concetti a partire dallo sviluppo dell'attività stessa.

Di grande utilità nella costruzione del percorso sono stati i volumi Matematica 2001, Matematica 2003, Matematica 2004[1] in cui sono raccolte le proposte fatte dalla Commissione UMI-CIIM e SIS per i nuovi curricoli e un'ampia serie di attività sviluppate da docenti nell'ambito di un protocollo di intesa fra MPI, UMI-CIIM, SIS e Mathesis.

Sulle definizioni di probabilità

Si propone di iniziare il percorso con un'attività di circa due ore in piccoli gruppi. Viene proposta agli studenti la scheda riportata di seguito senza farla precedere da alcuna lezione introduttiva sul concetto di probabilità, facendo unicamente riferimento al suo significato nel linguaggio comune.

Titolo: La regolarità del caso
Obiettivo: Analizzare la frequenza di un esito al variare del numero delle prove eseguite.

Situazione 1
Abbiamo lanciato 200 volte una puntina da disegno ed abbiamo indicato con:
- 1 l'esito "la puntina cade sulla parte tonda",
- 0 " " " di lato".

Abbiamo ottenuto la seguente sequenza di risultati (raggruppati in gruppi di 5 per una più facile leggibilità):
10001 11101 11101 11111 11100 01110 10101 01000 01001 11111
01110 01001 10111 10011 11101 10010 01010 01111 11010 10010
10001 10011 00101 11100 01101 10111 01110 01101 11010 11000
11001 10100 11110 11111 11101 11000 10100 11111 11101 11111

Costruite il grafico della distribuzione delle frequenze relative:
a) dopo 10 lanci; b) dopo 25 lanci;
c) dopo 50 lanci; d) dopo 100 lanci;
e) dopo 200 lanci; f) Come vi aspettate che sia la distribuzione di frequenza dopo un milione di lanci??

È possibile prevedere, prima del lancio, gli esiti dell'esperimento?

[1] I volumi prodotti da UMI, SIS, Mathesis, MPI: Matematica 2001, Matematica 2003 e Matematica 2004 sono scaricabili all'indirizzo: http://umi.dm.unibo.it/italiano/Didattica/didattica.html

Situazione 2
Provate a fornire una o più definizioni di probabilità che consentano di rispondere alle seguenti domande:

- qual è la probabilità che esca 6 lanciando un dado ?
- qual è la probabilità che lanciando una moneta esca testa?
- " " " " domenica il Bologna vinca ?
- " " " " un tappo da birra (tappo a corona) cada a terra sulla parte piatta?

In generale gli studenti non hanno difficoltà a fornire una risposta per i primi due casi (*numero di casi favorevoli su numero di casi possibili*), utilizzando una definizione che corrisponde abbastanza bene a quella classica. Nell'ultimo caso tutti concordano sul fatto che *è necessario fare tante prove perché più prove si fanno più si è sicuri che la frequenza relativa rappresenti la probabilità*, avvicinandosi così alla definizione frequentista.

La terza domanda è quella che, in generale, suscita le discussioni più grosse sia all'interno del gruppo (spesso non si arriva ad una conclusione comune) sia nella discussione fra i gruppi. Una parte consistente, spesso la stragrande maggioranza, associa questa situazione alle due precedenti e sostiene che *tre sono i casi possibili, uno solo quello favorevole, quindi la probabilità è 1/3*. Per fortuna c'è sempre qualcuno che interviene affermando che *dipende con chi giocherà il Bologna, se giocherà in casa, ...* In ogni modo è sufficiente che l'insegnante chieda loro se quando giocano la schedina si attengono al principio enunciato per scatenare una discussione. Qualcuno sostiene che *quando si gioca la schedina non si ragiona matematicamente e non sarebbe possibile farlo perché la matematica ha delle risposte precise*. A questo punto l'insegnante ha materiale più che sufficiente per introdurre tre definizioni di probabilità: classica, frequentista e soggettiva:

• Definizione classica (Laplace):. *La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili,* sottolineando il vizio logico contenuto in questa definizione: supporre che tutti i casi siano egualmente possibili implica di avere definito in precedenza la probabilità nel momento stesso in cui la si definisce.

• Definizione frequentista (Von Mises): *La probabilità di un evento il limite al quale tende la frequenza relativa di quell'evento quando il numero dei termini della successione cresce indefinitamente*, ovviamente in casi in cui questo limite esiste. È bene precisare che il termine "limite" usato in questo contesto non è il preciso concetto dell'analisi matematica, bensì il concetto impreciso che ciascuno di noi usa quando nel linguaggio di tutti i giorni si serve di questa parola. Questa definizione ha un carattere di generalità maggiore della precedente, anche se non viene superata l'insufficienza logica. Infatti non possiamo affermare che il limite si presenterà con certezza, ma con grande probabilità.

• Definizione soggettiva o soggettivista (De Finetti, Savage, Ramsey): *La probabilità di un evento è fornita secondo l'esperienza personale e le informazioni disponibili.*

A proposito della partita si può sempre ricordare l'esempio che faceva De Finetti:

• secondo la definizione classica esiste 1 probabilità su 3 che il Bologna vinca

• secondo la definizione frequentista ci si può dotare di un almanacco e controllare tutte le partite precedenti e calcolare la frequenza di vincita

• oppure, secondo la teoria soggettiva, ci si può documentare sullo stato di forma dei calciatori, sul terreno di gioco e così via fino ad assegnare un valore soggettivo alla probabilità.

A questo punto si possono proporre esempi e problemi per introdurre la teoria della probabilità, cercando di abituare gli studenti a rappresentare le situazioni attraverso diagrammi di Venn, tabelle e grafi ad albero, strumenti che risultano un supporto fondamentale sia nella modellizzazione delle situazioni sia nella risoluzione dei problemi facilitando la comprensione dei costrutti teorici.

A puro titolo esemplificativo vengono elencati alcuni esempi di problemi tratti da vari testi:

1. Dalle tavole di mortalità pubblicate dall'ISTAT per l'anno 1985, si rilevano i seguenti dati, relativi ad un insieme fittizio di 100000 individui:

età	n.ro viventi all'età specificata		età	n.ro viventi all'età specificata		età	n.ro viventi all'età specificata	
	maschi	femmine		maschi	femmine		maschi	femmine
0	100000	100000	15	98903	98676	20	97095	98541
1	98753	99014	16	98246	98653	25	97436	98392
5	98582	98860	17	98174	98627	50	92709	95592
10	98450	98764	18	98089	98599	80	33698	56828

Stimare la probabilità dei seguenti eventi:
A = "un sedicenne sopravvive per un anno"
B = " un venticinquenne arriva al 50° anno di età"
C = "un neonato sopravvive fino al compimento dell'80° anno di età"

2. In Cina esiste un gioco basato sul lancio di due dadi in cui il giocatore A vince se esce complessivamente 7 o 11, il giocatore B vince se esce complessivamente 2, 3 o 12. È indifferente la possibilità di vincita di A e di B? Perché?

3. Si sceglie a caso una famiglia dall'insieme di tutte le famiglie che hanno 2, e solo 2 figli non gemelli. Qual è la probabilità che in quella famiglia ci siano 2 maschi se si sa che in essa ce n'è almeno uno ? E se si sa che il primo figlio è maschio ?

4. Uno psicologo, che studiava i procedimenti secondo i quali gli studenti pervengono alla soluzione dei problemi, notò che, spesso, si sforzavano di trovare eventuali simmetrie in corrispondenza ad un certo quesito. Per approfondire le conseguenze di questa osservazione, propose di risolvere il seguente problema. Due urne contengono complessivamente 50 palline, 25 bianche e 25 nere; il numero delle palline contenute nella prima urna e quello delle palline contenute nella seconda urna non sono necessariamente uguali fra loro.

Quale deve essere la distribuzione delle palline nelle due urne affinché, scelta a caso un'urna ed estratta da questa una pallina, sia massima la probabilità di ottenere una pallina nera? La maggior parte degli intervistati rispose che, proprio in virtù della simmetria del problema, il valore ottimale della probabilità cercato era 1/2, valore che si può ottenere mettendo in ogni urna lo stesso numero di palline bianche e di palline nere. Questo non è vero! Si può infatti ottenere un valore più alto della probabilità .... (come ??)

Computer e simulazione

I software dedicati alla matematica e i fogli elettronici consentono di sviluppare, con estrema facilità, simulazioni utilizzando numeri pseudocasuali. Questa è un'opportunità di grande rilievo nell'insegnamento della probabilità. Prendendo ampio spunto da un'attività proposta nel già citato volume "Matematica 2003", poi riproposta all'interno del piano M@t.abel, viene presentata un'esemplificazione dell'utilizzo della simulazione.

Si inizia ponendo agli studenti il seguente problema:

Un gioco con tre dadi: lancia tre dadi e, ad ogni lancio, elimina il dado con maggiore punteggio annotando la somma dei risultati ottenuti dai due dadi rimasti (se il punteggio maggiore si ottiene su due dadi distinti, eliminane uno qualsiasi dei due). I risultati sono gli stessi che nel lancio di due dadi?

Lancio di due dadi

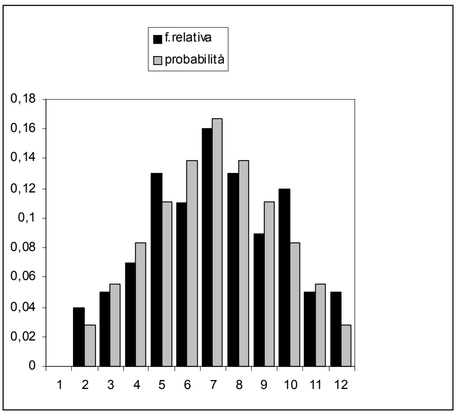
È facile per gli studenti rendersi conto che è necessario, anzitutto, avere chiarezza su quanto accade lanciando due dadi. Quindi si può utilizzare il foglio elettronico per simulare il lancio di due dadi. Per prima cosa gli studenti dovranno individuare quali sono i casi possibili attraverso la compilazione di una tabella del tipo della seguente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	..											
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

L'analisi dei risultati consentirà loro di calcolare la probabilità di ognuna delle somme possibili.
A questo punto si può passare alla costruzione:
• del foglio elettronico, seguendo, ad esempio, lo schema seguente:

	A	B	C	D	E	F	G
1	esito sim. dado 1	esito sim. dado 2	somme dadi 1 e 2	somme possibili	f.assoluta	f.relativa	probabilità
2	...	....	A1+B1	2	...	...	2/36
3	...	....	A2+B2	3	...	...	...
4	...	....	....	4	...	...	...
5	...	....	....	5	...	...	...
6	...	....	....	6	...	...	...
7	...	....	....	7	...	...	...
8	...	....	....	8			
9	...	....	....	9			
10	...	....	....	10			
11	...	....	....	11			
12	...	....	....	12			

• della rappresentazione grafica dell'andamento delle frequenze relative e delle probabilità. Nella figura una simulazione relativa a 100 lanci.

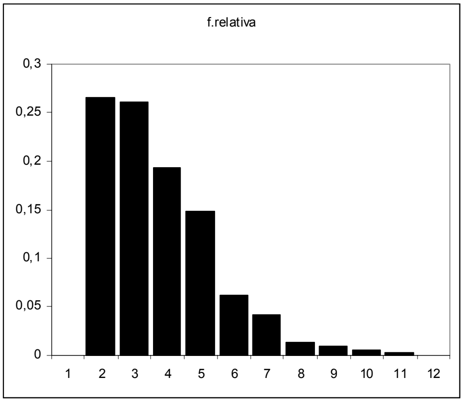


La costruzione del foglio di lavoro richiede la conoscenza e l'utilizzo delle funzioni: CASUALE[2], CONTA.SE).

Si possono porre agli studenti alcune domande:
• *Cosa succede ripetendo la simulazione?*
• *Perché il grafico delle frequenze relative non risulta perfettamente simmetrico a differenza di quello delle probabilità?*
• *Il grafico delle frequenze relative ha un andamento più vicino a quello delle probabilità se si aumenta il numero di lanci? Perché?*

Gioco con tre dadi

Ora si può proporre agli studenti di costruire un foglio elettronico che simuli la situazione proposta inizialmente[3]. A titolo puramente esemplificativo si riporta il grafico per una simulazione di circa 500 lanci.



Si possono porre agli studenti alcune domande:
• *L'andamento delle frequenze relative è lo stesso del caso precedente?*
• *Provate sia a ripetere la simulazione sia ad aumentare il numero di lanci, quali sono le differenze fra il grafico relativo al lancio di due dadi e questo? Date una giustificazione alle vostre affermazioni*

Gli studenti, anche attraverso una discussione collettiva coordinata dall'insegnante arriveranno ad individuare che, anche se gli esiti possibili sono ancora da 2 a 12, le relative probabilità sono molto differenti e quindi saranno in grado di calcolarle, confrontarle col caso precedente e con l'andamento delle frequenze relative, fornendo una giustificazione alle osservazioni fatte in precedenza.

Approfondimenti con un linguaggio di programmazione

La situazione precedente poteva anche essere affrontata utilizzando un software specifico per l'insegnamento della matematica e un linguaggio di programmazione. A puro titolo esemplificativo si riportano alcune schermate sviluppate con TI-nspire:

Lancio di due dadi

Innanzitutto possiamo definire una "funzione" che determini la frequenza relativa e una che determini quella assoluta delle somme dei valori relativi ad ogni lancio. Per simulare i singoli lanci utilizzeremo la funzione predefinita RANDINT (1,6) che genera un numero casuale compreso fra 1 e 6. Creeremo anche una lista in cui inserire le frequenze col comando newList (n) che crea una lista composta inizialmente da n zeri. La lista deve contenere 12 elementi in quanto le somme possibili sono 1, 2....., 12

Funzione per il calcolo della frequenza assoluta:

Define lanci2(n)=Func

---

[2] Per simulare correttamente il lancio di un dado si possono usare sia la funzione INT che TRONCA applicate a CASUALE()*6+1, in modo da ottenere una distribuzione i cui valori sono uniformemente distribuiti fra 1 e 6.

[3] È sufficiente modificare il foglio precedente eliminando la colonna delle somme e inserendo tre nuove colonne: una per il terzo dado, una per l'individuazione del massimo per ogni lancio e una che calcoli la differenza fra la somma dei tre lanci e il massimo.

```
:local l,i,r
:r:=newList(12)
:for i,1,n
: l:=RANDINT(1,6)+RANDINT(1,6)
:  r[l]:=r[l]+1
:endfor
:Return r
:endfunc
```

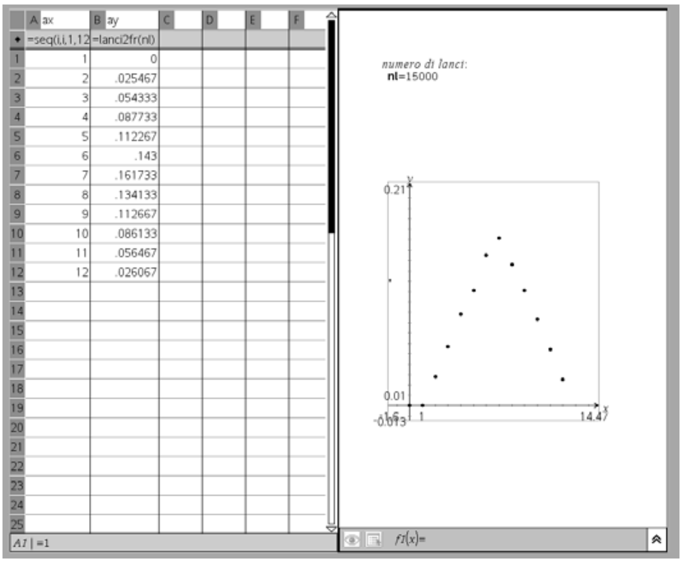
L'algoritmo utilizzato si può schematizzare così:
per i che va da 1 a n (numero dei lanci)
assegna alla variabile l il valore ottenuto sommando due casuali
incrementa di 1 il valore nella posizione della lista corrispondente alla
somma ottenuta
alla fine del calcolo restituisci la lista delle frequenze

Funzione per il calcolo della frequenza relativa

```
Define lanci2fr(n)=Func
:local l,i,r
:r:=newList(12)
:for i,1,n
: l:=RANDINT(1,6)+RANDINT(1,6)
:  r[l]:=r[l]+1
:endfor
:for i,2,12
:  r[i]:=approx(r[i]/n)
:endfor
:Return r
:endfunc
```

L'algoritmo utilizzato, dopo avere calcolato la lista delle frequenze assolute, calcola le frequenze relative:
per i da 1 a 6
dividi il valore della lista precedente per n
alla fine restituisci la nuova lista

I risultati che si ottengono sono illustrati nella figura:



Un gioco con tre dadi

Innanzitutto possiamo definire una “funzione” che determini la frequenza relativa e una che determini quella assoluta delle differenze fra le somme dei valori e il massimo relativamente ad ogni lancio.

Funzione per il calcolo della frequenza assoluta:

```
Define lanci(n)=Func
:local l,i,r,s
:r:=newList(12)
:for i,1,n
: s:={RANDINT(1,6),RANDINT(1,6),RANDINT(1,6)}
: l:=sum(s)-max(s)
:  r[l]:=r[l]+1
:endfor
:Return r
:endfunc
```

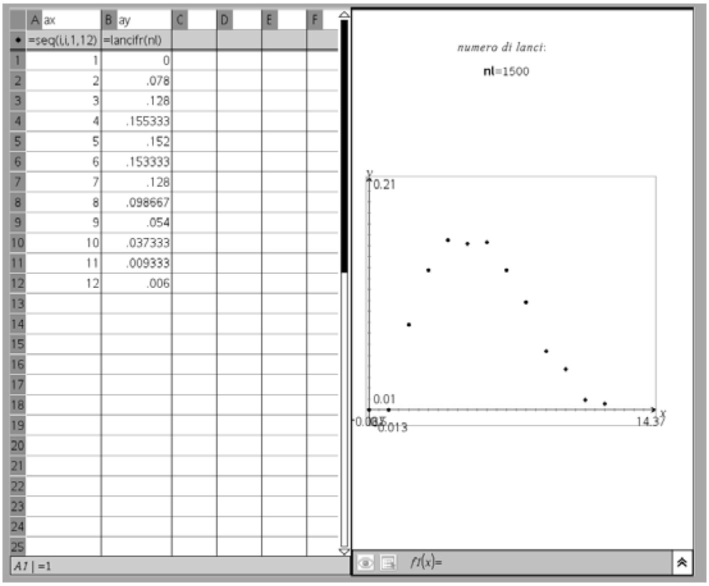
L’algoritmo utilizzato si può schematizzare così:
per i che va da 1 a n (numero dei lanci)
nella lista s memorizza le facce ottenute con RANDINT(1,6)
assegna ad l la differenza fra la somma dei valori contenuti in s e il valore
massimo contenuto
incrementa di 1 il valore nella posizione (indicata da l) della lista r
alla fine del calcolo restituisci la lista delle frequenze

Funzione per il calcolo della frequenza relativa:

```
Define lancifr(n)=Func
:local l,i,r,s
:r:=newList(12)
:for i,1,n
: s:={RANDINT(1,6),RANDINT(1,6),RANDINT(1,6)}
: l:=sum(s)-max(s)
:  r[l]:=r[l]+1
:endfor
:for i,2,12
:  r[i]:=approx(r[i]/n)
:endfor
:Return r
:endfunc
```

L’algoritmo utilizzato si può schematizzare così:
per i che va da 1 a n (numero dei lanci)
nella lista s memorizza le facce ottenute con RANDINT(1,6)
assegna ad l la differenza fra la somma dei valori contenuti in s e il valore
massimo contenuto
incrementa di 1 il valore nella posizione (indicata da l) della lista r
per i che va da 2 a 12
nella lista r memorizza i risultati approssimati del valore contenuto diviso n
alla fine del calcolo restituisci la lista delle frequenze relative

I risultati che si ottengono sono illustrati nella figura:



Conclusioni

Le attività proposte non costituiscono un percorso organico, ma vogliono solo fornire spunti e stimoli utili che poi gli insegnanti possano adattare alle loro classi e a diversi livelli scolari selezionando quanto c'è di significativo e utilizzabile nel loro contesto.

L'intenzione era quella di sottolineare che attività laboratoriali costituiscono un valore aggiunto nella trattazione del tema e nella costruzione dei concetti teorici.

Bibliografia

Orlandoni A., Ricci R. (2006), "I fogli elettronici", *Nuova Secondaria*, 10, (p. 43-47).

MPI, UMI, SIS, MATHESIS "Un gioco con tre dadi", *Matematica 2003*

Mirabilandia: l'esperienza di un'aula senza pareti
Giovanni Pezzi - Liceo "Torricelli", Faenza

Sono passati ormai vari anni da quando, nel settembre 2001, un gruppo di insegnanti del Liceo "Torricelli" di Faenza scriveva alla direzione del Parco divertimenti di Mirabilandia chiedendo collaborazione per la realizzazione di un progetto il cui "…scopo è di contribuire ad "allargare" i confini della scuola, facendo uscire la fisica dalle mura dell'edificio scolastico per collegarla al mondo reale. Gli studenti verranno coinvolti in un'attività di "ricerca sul campo" in cui, divertendosi, possano imparare ad osservare la realtà con gli occhi dello scienziato e ad applicare i concetti appresi a situazioni reali."

Il progetto fu sperimentato per la prima volta nel 2002, realizzando al parco di Mirabilandia "Le giornate della Fisica" con alcune classi del Liceo "Torricelli" di Faenza, del Liceo "Oriani " di Ravenna e delle scuole medie di Faenza. Negli anni successivi il progetto si è allargato a un ambito nazionale e da allora molte migliaia di studenti provenienti da ogni parte d'Italia ogni anno sperimentano cosa vuol dire vivere un'esperienza di apprendimento in un' "Aula senza pareti".

Oltre il laboratorio scolastico, in un laboratorio all'aria aperta

Molti studenti di scuola secondaria hanno purtroppo poche possibilità di svolgere attività sperimentali di fisica nelle loro scuole e meno che mai in un laboratorio all'aria aperta come un parco divertimenti. Ecco quindi che la possibilità di effettuare un percorso di fisica come quello disponibile al parco di Mirabilandia diventa un'esperienza unica: una disciplina come la fisica, troppo spesso ritenuta ostica, noiosa, ridotta a un insieme di formule da imparare a memoria, si può finalmente associare nella loro mente a un'esperienza gradevole nella quale i concetti acquistano tutta la concretezza legata all'esperienza percettiva. Ecco che Mirabilandia diventa un luogo dove vedere all'opera le leggi della fisica, applicare la teoria a situazioni concrete e personalmente vissute, ridurre la separazione tra ciò che si studia a scuola e la vita reale, un luogo quindi per una "full immersion" nella fisica. L'effetto positivo legato all'esperienza di vedere la fisica "al lavoro" si somma alla possibilità, offerta dalle attrazioni, di confrontare la propria percezione dei fenomeni con la descrizione e l'interpretazione date dalla fisica.

Quanto detto non vale solo per la fisica, nel corso degli anni l'aula senza pareti di Mirabilandia si è allargata ad altri ambiti disciplinari, come scienze naturali.

Ma che cosa si fa a Mirabilandia?

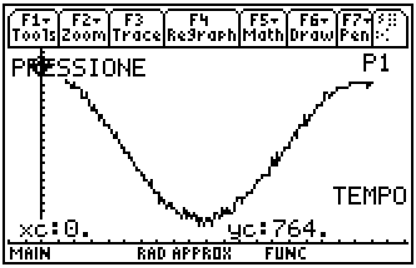
Gli studenti, sotto la guida di tutor (studenti universitari o laureati in discipline scientifiche) appositamente addestrati, si cimentano in una serie di attività di fisica riguardanti alcune delle attrazioni presenti nel parco. Eurowheel (ruota panoramica), Sierra Tonante, Katun, Niagara (roller coaster), Carousel (giostra coi cavalli), Discovery e Columbia (Torri di lancio) offrono un'ampia gamma di possibilità di sperimentazioni concernenti argomenti di meccanica: da misure di tempi, velocità e accelerazioni, a variazioni di pressione atmosferica, a studi del moto da diversi sistemi di riferimento, e ancora bilanci energetici e molto altro. Agli studenti viene fornito un quaderno di lavoro e utilizzano strumenti di misura sia tradizionali sia on-line portatili, come la ormai mitica valigetta nera della Texas Instruments™ contenente un'interfaccia CBL2 per la raccolta dati, una calcolatrice grafica TI-83 Plus o TI-84, sensori di accelerazione e pressione atmosferica. Alcuni strumenti sono stati costruiti ad hoc, come gli accelerometri a molla o ad ago, il pendolo di Foucault e la fontana di Coriolis usati sul Carousel.

Il "valore aggiunto": questo lo posso fare solo a Mirabilandia

Ciò che rende unica l'attività di fisica nel parco è il fatto che certe esperienze si possono fare solo in un parco di divertimenti. Vediamone qualcuna un po' particolare.

Sulle torri di lancio Discovery e Columbia gli studenti vengono fatti salire con un bicchiere in mano: non capita tutti i giorni di stare seduti e vedere ad un certo punto l'acqua uscire dal bicchiere e ….salire verso l'alto. Animate discussioni si accendono a questo proposito per capire le ragioni di quanto si è visto.

Il famoso esperimento del pendolo che Foucault eseguì nel 1851 nel Pantheon di Parigi, come prova della rotazione terrestre, viene eseguito in modo molto convincente con un pendolo posto sulla giostra a cavalli del Carousel. Gli effetti della forza di Coriolis, tanto difficile da spiegare quanto potente nei suoi effetti su larga scala (basta pensare alla dinamica atmosferica) può essere analizzata con molta semplicità studiando il getto d'acqua di una fontana di Coriolis collocata sul Carousel. A Mirabilandia basta un giro sulla ruota panoramica Eurowheel muniti della valigetta per le misure on line per ottenere un bel grafico e vedere come cambia la pressione atmosferica in funzione dell'altezza.



Tra gli studenti che salgono sulla Sierra Tonante spesso ci si chiede se è più emozionante stare in testa o in coda in un treno sulle montagne russe di Mirabilandia. Anche rispondere a una domanda di questo genere richiede riflessioni di fisica interessanti. E che cosa c'è di più interessante di un ottovolante per ragionare sulla conservazione dell'energia o di quello che si prova a testa in giù in un loop come quello del Katun?

A scuola, prima e dopo

Il valore dell'esperienza e la ricaduta didattica sono ancora più alti quando la giornata al parco non rimane un evento isolato nel corso dell'anno scolastico, ma è programmata all'interno del curriculum annuale comprendendo una fase di preparazione con attività teoriche e anche sperimentali prima di andare al parco e una di riflessione e rielaborazione dei dati una volta ritornati a scuola. Il quaderno di lavoro comprende molto materiale per ogni attrazione, con proposte e suggerimenti di attività per casa e scuola.

Bibliografia

Foschi A., Guerrini G., Paglialonga L., Pezzi G., Resta L., "Esperimenti di fisica *online* nel parco giochi di Mirabilandia", *Ipotesi* anno 5, n. 3/2002

Facchini M., "Il ruolo dell'apprendimento informale nel curriculum di fisica: l'esperienza di Mirabilandia", Università degli studi di Bologna, Tesi di Laurea in Fisica, anno accademico 2004/5

Alberghi S., Foschi A., Ortolani F., Pezzi G., "Which is more thrilling - Front or back of roller coaster? " *The Physics Teacher* (in corso di pubblicazione)

http://www.mirabilandia.it/scuole_it.htm

http://www.cartesionline.it/argomenti/fisica_ud_mirabilandia.cfm

Ombre del sole: laboratorio di geometria

Rossella Garuti - Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica - Ex I.R.R.E. – E.R. Gestione Commissariale

Introduzione

Dal punto di vista della geometria il campo di esperienza delle *ombre del sole* pare assai produttivo per

- la rappresentazione bidimensionale delle situazioni spaziali
- relazioni fra perpendicolarità, verticalità e orizzontalità
- direzione come proprietà comune ad un fascio di rette parallele
- lo sviluppo del concetto di angolo: angolo come "ampiezza di rotazione" e angolo come "porzione di piano"
- lo sviluppo della padronanza delle misure di lunghezza e della riduzione in scala
- l'approccio alla modellizzazione geometrica delle relazioni fra sole-ombra-oggetto
- l'approccio al ragionamento proporzionale in ambito geometrico

È quindi possibile strutturare un percorso verticale dai primi anni della scuola primaria alla secondaria di primo grado.

Di seguito si presentano due esempi di percorso didattico, uno per la scuola primaria e uno per la secondaria di primo grado, che esemplificano possibili attività di laboratorio geometrico a "cielo aperto".

Maggiori informazioni su attività didattiche ampiamente sperimentate nel campo di esperienza delle ombre del sole sono reperibili nel sito dell'ex INDIRE sui progetti SeT http://www.bdp.it/set/area1_esperienzescuole/cm131/5.htm.[1]

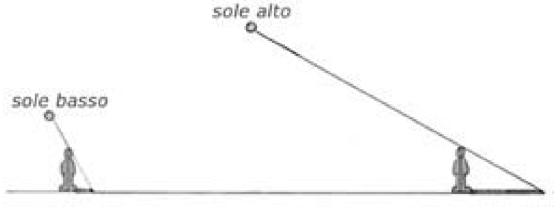
Un esempio per la scuola primaria: altezza angolare del sole

Il percorso didattico porta alla misurazione dell'altezza angolare del sole. Il problema della determinazione di questa altezza costituisce un'occasione importante per lo sviluppo della padronanza del concetto di angolo, in quanto in particolare: richiede di considerare l'angolo, già esperito sul piano orizzontale, in un piano verticale, che cambia continuamente in relazione al movimento apparente del sole; questo passaggio non è affatto banale, in quanto la posizione orizzontale è quella privilegiata per disegnare, costruire, misurare angoli. Inoltre conduce a riflettere sul fatto che l'angolo non dipende dalla lunghezza dei lati utilizzati per rappresentarlo.

1. Il problema di Stefano

All'inizio del lavoro sulle ombre del Sole, Stefano, un bambino di I media, è convinto che l'ombra sia più lunga quando il sole è più alto e più forte.

Altri bambini sostengono il contrario. Per sostenere la sua ipotesi Stefano fa il seguente disegno e scrive:



[1] Nell'aprile 2000 il MIUR lanciò, l'iniziativa "*Materiali per l'educazione scientifica e tecnologica*" (C.M. 131/2000). L'invito era rivolto a Reti di Istituzioni scolastiche in collaborazione con Enti Pubblici (in particolare Università ed Enti di Ricerca) ed Enti Privati interessati alla didattica e alla divulgazione scientifica. Nell'ambito degli obiettivi generali del SeT si potevano presentare progetti finalizzati alla produzione di materiali e servizi per l'educazione scientifico-tecnologica. I progetti selezionati e finanziati a livello nazionale sono stati 27 e sono attualmente presenti sul sito dell'INDIRE alla pagina sopra indicata.

Come si vede dal disegno, il sole fa l'ombra più lunga quando è più alto, cioè vicino a mezzogiorno, quando è anche più forte.

Noi invece sappiamo bene che l'ombra è più lunga quando il sole è più basso (cioè la mattina presto e nel tardo pomeriggio).
Quindi nel ragionamento di Stefano c'è qualcosa che non va.
Cosa c'è che non va nel ragionamento, e in particolare nel disegno, di Stefano? Prova a spiegarlo in modo preciso e comprensibile a Stefano.

Il "sole basso" e il "sole alto" di Stefano sono inseriti in due percorsi diversi del sole, uno più piccolo in cui il sole sembra più vicino a terra, e l'altro più ampio in cui il sole risulta di conseguenza più lontano da terra. Questo è possibile sul piano del disegno in cui il sole può essere spostato a proprio piacimento. Inoltre Stefano valuta l'altezza del sole sull'orizzonte non come inclinazione, ma come distanza lineare dall'orizzonte, senza tener conto che essa cambia a seconda del punto in cui viene misurata. Lo scopo di questa attività è di portare i ragazzi a spiegare qual è l'errore contenuto nell'argomentazione di Stefano interpretandolo in base alle esperienze fatte e alle conoscenze acquisite.

2. Discussione collettiva sulle ipotesi dei ragazzi

Riportiamo uno stralcio di discussione preso dal percorso di T. Gazzolo che ha curato l'unità di lavoro per il progetto SeT, per dare un'idea della ricchezza di questa situazione problematica

Da: La distanza tra il bambino e il sole non cambia, invece l'altezza sull'orizzonte sì, perché il sole fa nella giornata un percorso sull'orizzonte.
Ins: Allora distanza e altezza non sono la stessa cosa?
Se: Sì , ma non possiamo sapere precisamente quanto è l'altezza del Sole, perché se facciamo quel metodo, vediamo solo l'inclinazione, non l'altezza.
Ma: ...però noi l'altezza del sole la vediamo sull'orizzonte, invece nello spazio c'è solo la distanza. Sulla Terra noi vediamo che il sole si sposta, ma in realtà è la Terra che si muove ...quindi l'altezza cambia dalla visuale della Terra, perché è la distanza tra sole e orizzonte.
Si: Ma allora distanza e altezza dicono ...si dice ...
Va: Noi abbiamo tre punti di vista, uno è dall'astronave, uno dalla terra e uno nel disegno: dallo spazio la distanza sole-terra non cambia.
Ma: Sul disegno devi disegnare la distanza giusta tra terra e sole in modo che quando il sole è sopra al bambino deve essere alto, ma quando è di fianco deve essere più basso.
Fe: Stefano ha fatto quell'errore perché non ha fatto i due "soli" nello stesso arco e poi non ha guardato l'inclinazione dei raggi.

3. Costruzione di uno strumento per misurare l'altezza angolare del sole

Lo scopo di questa parte dell'attività è quello di portare i ragazzi a progettare uno strumento per misurare l'altezza del sole. All'inizio è bene che i ragazzi siano liberi di "inventare" possibili strumenti di misurazioni. In seguito, guidati dall'insegnante, si arriva a stabilire quale materiale è necessario per la costruzione di un "goniometro verticale":

• goniometro grande a mezzaluna con lo zero al centro in modo che a 0 gradi corrisponda la posizione di partenza, cannocchiale orizzontale, dell'attività di misurazione
• filo a piombo
• tubo-cannocchiale di plastica, con diametro di 2 cm, lungo non meno del goniometro, con un'estremità chiusa da pellicola fotografica non impressionata

L'insegnante procura il materiale necessario perché ogni bambino costruisca il proprio strumento oppure ne costruisce uno per tutta la classe. Il vantaggio della prima modalità è che durante la costruzione vengono evidenziate alcune proprietà e procedure riguardanti l'angolo (necessità che il filo a piombo sia perfettamente allineato allo zero del goniometro e che il cannocchiale combaci perfettamente con la base del goniometro). Inoltre non è trascurabile il fatto che costruire realmente qualcosa sia un momento affettivamente molto coinvolgente per i bambini. Il vantaggio della seconda modalità è che richiede meno tempo e lo strumento risulta più preciso.

Con gli strumenti o lo strumento costruiti si effettua all'aperto la prima misurazione dell'altezza del sole sull'orizzonte. È opportuno che ciascun bambino usi lo strumento, ma anche che osservi gli altri mentre lo usano:

• nell'uso personale il gesto significativo di ruotare il proprio cannocchiale verso il sole e di bloccare con le dita il filo a piombo nella posizione raggiunta, per poi leggere l'ampiezza, dà il senso dinamico dell'angolo che si forma e il senso statico dell'angolo che si legge.

• nel guardare gli altri si possono osservare dall'esterno le stesse operazioni acquisendo maggiore consapevolezza dello spostamento del filo a piombo che scorre man mano sul goniometro che ruota.

La stessa attività viene ripetuta in ore diverse della giornata per rilevare varie altezze del sole. Dopo la prima misurazione si rientra in aula per registrarla con rappresentazioni grafiche e verbali e per avviare l'attività di riflessione successiva.

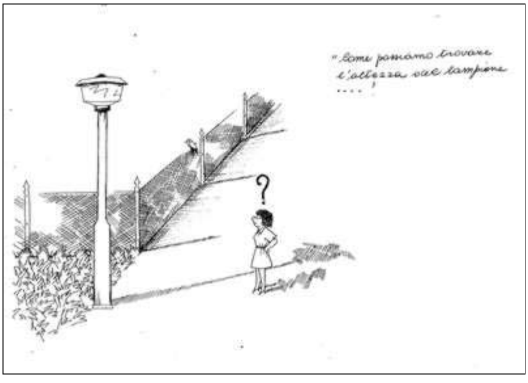
In questo articolo l'esperienza viene descritta in maniera molto sintetica solo per dare il senso della ricchezza del campo di esperienza delle Ombre del sole e e del suo utilizzo in situazioni di laboratorio di geometria. L'esperienza è descritta in modo molto più dettagliato nel progetto SeT sopra citato (Modelli e Dimostrazioni) e in particolare nell'unità di lavoro *Altezza angolare del sole.*

Un esempio per la scuola secondaria di primo grado: l'altezza del lampione

L'esempio che si descrive riguarda un argomento centrale nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di primo grado: la proporzionalità. I problemi di proporzionalità sono stati ampiamente studiati negli ultimi decenni da vari punti di vista, prevalentemente per problemi di tipo aritmetico; meno frequenti le indagini su problemi relativi a situazioni geometriche. Sia negli uni che negli altri si è evidenziata una elevata percentuale di strategie additive nella fascia di età 9/14 anni e si sono identificate possibili varie ragioni di ciò: immaturità cognitiva; imprinting additivo, conseguente all'ordine col quale vengono affrontati a scuola i problemi aritmetici; scarsa padronanza dei significati della moltiplicazione e della divisione; mancata distinzione a livello di linguaggio comune fra modelli additivi e modelli moltiplicativi.

I risultati delle ricerche finora condotte non sembrano però scalfire le pratiche didattiche più diffuse nella scuola che consistono, per i problemi di proporzionalità -in Italia e in altri paesi- nell'addestramento all'applicazione dello schema A:B=C:X, con prevalenza dell'ambito aritmetico. Ciò pone il problema del collegamento tra le ricerche "di laboratorio" sul problem solving e lo studio delle loro possibili implicazioni didattiche

1. Il problema del lampione



Gli studenti escono per osservare le ombre del sole. Durante l'uscita l'insegnante pone il problema di determinare l'altezza di un lampione, alto quasi 4 metri, di cui si vede l'ombra sul terreno. Nelle vicinanze del lampione si osservano varie ombre prodotte da oggetti di altezza accessibile, in particolare da sostegni di una recinzione, alti poco più di un metro.

Si tratta di un problema verbale, senza i dati numerici espliciti e con la presenza di un referente geometrico che consente agli allievi di affrontare il problema senza preoccuparsi del calcolo effettivo del risultato numerico.

La presenza di una situazione fisico-geometrica reale e direttamente esperita dà consistenza al problema posto, inoltre l'assenza di dati numerici espliciti è fatta nell'ipotesi che il lavoro con i valori numerici e i significati della divisione costituiscano di per sé elementi di difficoltà.

2. Confronto di strategie: moltiplicativa vs additiva

La fase successiva richiede una grande attenzione da parte dell'insegnante nel selezionare le strategie prodotte dagli allievi con la consapevolezza che la maggioranza di essi produrrà strategie di tipo additivo. La sfida sta proprio nel guidare i ragazzi verso la conquista stabile e interiorizzata di una strategia moltiplicativa e nel valorizzare le argomentazioni degli studenti a supporto di questo tipo di startegia.

Conclusioni

I due esempi sopra riportanti hanno lo scopo di illustrare, in modo non certo esauriente, alcune attività che si possono mettere in campo nel primo ciclo all'interno di un percorso di tipo laboratoriale che non richiede, in questo caso, l'impiego di particolari strumentazioni o particolari ambienti didattici, se non la presenza di una bella giornata di sole.

Bibliografia

A.A.V.V. (1992), Uomo natura, uomo società, uomo cultura, Rapporto Tecnico, Dip. di Matematica, Università di Genova.

Boero P. (1989), 'Mathematical Literacy for All: Experiences and Problems', *Proceedings of PME-XIII*, Paris, vol. 1, pp. 62-76.

Boero P., Dapueto C., Ferrari P., Ferrero E., Garuti R., Lemut E., Parenti L., Scali E. (1995), 'Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School', *Proceedings of PME-XIX*, Recife, Brazil, Universitade Federal de Pernambuco, Recife, 1995, vol. 1, pp. 151-166.

Garuti R., Boero P. (1992), A sequence of proportionality problems" Proceedings PME XVI, Durham.

Reportage dal piano ISS. Una discussant racconta

Angela Turricchia - docente dell'Aula Didattica Planetario- Settore Istruzione- Comune di Bologna

Presentazione

Piano ISS? Discussant? Parole un po' ermetiche, ma che hanno un loro significato all'interno della formazione per insegnanti.

Il piano ISS , acronimo di Insegnare Scienze Sperimentali, è un piano gestito dal Ministero alla Pubblica Istruzione, in collaborazione con le tre associazioni insegnanti (AIF, DDCI, ANISN) e con il Museo della Scienza e della Tecnica di Milano e di Città della Scienza di Napoli. Obiettivo è quello di costruire presidi (con accento sulla i) territoriali che costituiscano centri di coinvolgimento e di supporto per gli insegnanti di materie scientifiche che lo richiedano. I presidi dovrebbero essere costituiti da almeno tre insegnanti dei diversi livelli scolari.

Discussant è la persona che, assieme al conduttore, ha guidato i seminari iniziali svolti a Milano(due sessioni rivolti a docenti delle regioni del nord Italia) e Napoli (due sessioni per i docenti delle regioni del Sud Italia e delle Isole) con ruoli a metà tra gli esperti disciplinari e persone con competenze didattiche. In particolare il discussant ha il ruolo di "amico critico" che suggerisce, richiama, ricorda…

Quattro le tematiche: trasformazioni; leggere l'ambiente; Terra ed Universo; luce, colore e visione coinvolgenti gruppi di dieci dodici insegnanti selezionati in base al curriculum presentato.

Il tutto si è svolto in una situazione non di formazione, ma di ricerca-azione in cui fondamentale è la metodologia con cui viene affrontato un argomento scientifico nelle classi. Gli insegnanti che hanno partecipato a questi seminari, scelti dietro presentazione di un curriculum, sono i tutor. Costoro al termine di questo seminario dovevano ritornare nelle classi, progettare una attività, sperimentarla nelle classi e contemporaneamente coinvolgere altri colleghi dell'importanza dell'insegnare scienze in modo diverso[1] . Questi gruppi di tutor dovranno poi costruire i presidi territoriali.

La situazione si è presentata sicuramente molto complicata, i tempi ristretti, anche a causa della necessità di presentare un prodotto finale.

Il gruppo di Terra e universo- Napoli 2

Quattordici le persone che hanno fatto parte del gruppo e che hanno lavorato per tre giorni e mezzo e che poi hanno continuato a sentirsi, quando possibile, attraverso la piattaforma Indire o anche altre situazioni, ad esempio mail, telefonate ed anche phone-conferences. Sono docenti provenienti dalla Campania, dalla Sardegna, dalla Sicilia, dalla Calabria, dalla Puglia.

Obiettivo era quello di invitare i tutor a rivedere il proprio modo di fare didattica nelle classi e di porsi criticamente di fronte alle proprie attività per modificarle e razionalizzarle, il tutto con la meta finale di portare altre persone a fare altrettanto con lo scopo ancora più ampio ed ambizioso di interessare gli studenti allo studio delle materie scientifiche.

Il concetto di presidio si è rivelato poco chiaro e le problematiche ad esso correlate tante, in particolare "come fare a far sì che colleghi della nostra stessa zona mi riconoscano competenze da esperto, tali comunque da rivolgersi a me per aiutarli a risolvere dei problemi?". Questo è sicuramente il problema più complicato e, per chi consoce la diffidenza enorme degli insegnanti sarà anche l'ostacolo maggiore che queste persone incontreranno nel momento in cui i presidi diventeranno davvero una realtà.

La scelta che abbiamo fatto, conduttore e discussant in accordo, è stata quella di fornire oltre ad una semplice introduzione all'astronomia, la costruzione di due strumenti semplici sì, ma che fanno tanto Astronomia e che coinvolgono tanto i ragazzi e non solo loro: lo spettroscopio e il cannocchiale galileiano oltre che ad affrontare con i tutor stessi un momento di osservazione delle ombre prodotte dal Sole e della posizione del Sole su un vetro.

L'osservazione della posizione del Sole sul vetro della finestra ha permesso la messa in situazione dei tutor che si sono trovati nella stessa posizione degli studenti, con gli stessi errori e le stesse diffi-

---

[1] Conduttore del gruppo di cui io ero discussant è stato Leopoldo Benacchio di Inaf-Osservatorio Astronomico di Padova.

coltà. Va riconosciuto a questo gruppo di persone la capacità di sapersi mettere in gioco, di affrontare gli argomenti proposti con la gioia della scoperta e la voglia di studiare.

Attorno a questi due strumenti, costruiti con materiale povero, si possono poi elaborare unità didattiche, unità di apprendimento o sceneggiature per attività più complessive avendo ben chiaro che sono due strumenti che , con il loro utilizzo, hanno costituito un momento di svolta per l'osservazione in Astronomia. Il cannocchiale galileiano ha consentito il passaggio dall'osservazione ad occhio nudo ad una osservazione più dettagliata e quindi dalla situazione dell'osservazione della posizione di un corpo all' osservazione della sua superficie (almeno per quanto riguarda i corpi più vicini). Lo spettroscopio ha segnato il passaggio all'astrofisica moderna con lo studio della composizione dei corpi celesti.

Il gruppo ha lavorato molto bene, discutendo passo passo tutte le difficoltà e la possibilità di coinvolgere i ragazzi in ulteriori ipotesi di lavoro.

Al termine di queste giornate sicuramente coinvolgenti ognuno se ne è tornato alla propria sede di lavoro e alla quotidianità e il tutto si sarebbe potuto considerare terminato.

L'andamento del lavoro durante l'anno

Il problema che si è posto immediatamente al rientro è stato quello di mantenere i contatti.

Per mia esperienza lavorativa so che i gruppi, perché continuino nella produzione e nel lavoro comune, devono essere stimolati e coinvolti in ulteriori iniziative. Ma se questo è semplice se si è "vicini di casa" diventa più complicato quando le distanze diventano quelle tra noi e i nostri tutor. Si è così deciso di utilizzare la chat settimanale: ogni settimana alle 22 di sera ci siamo incontrati nella chat messa a disposizione da Indire per discutere, affrontare i singoli problemi e fornire reciprocamente supporto.

Abbiamo anche deciso di affrontare alcune esperienze tutti assieme ed è così nata la partecipazione alla giornata dell'astronomia che ci ha fatto lavorare attorno ad un tema comune nella stessa giornata: l'osservazione del mezzogiorno solare. L'esperienza, già ampiamente sperimentata e teorizzata, si presta per la sua semplicità ad essere affrontata a tutti i livelli scolastici ed anche a porre i docenti che la eseguono nelle classi a porsi il problema di quali conoscenze devono essere in possesso i loro studenti per poterla affrontare.

La proposta nasce dal fatto che questa esperienza può essere utilizzata:

1. come momento di interesse, eseguita cioè senza alcuna preparazione precedente, permette di far sì che i ragazzi che la eseguono si pongano problemi che costituiranno poi il punto di partenza da cui essi stessi, con la guida dell'insegnante procederanno poi per ulteriori acquisizioni e scoperte in campo scientifico.

2. come momento finale di un lavoro che i ragazzi hanno eseguito laboratorialmente in classe e che quindi costituisce il momento in cui tirare le fila, ragionare assieme e, assieme ad altre classi lontane, ragionare sui risultati delle osservazioni e verificare le ipotesi fatte in modo collettivo ed allargato.

3. come momento intermedio di una attività già in corso e che si inserisce quindi come momento laboratoriale all'interno di un percorso già preparato.

Come raccogliere poi i risultati dei lavori di tutti, di tutti coloro che hanno lavorato? Una semplice pubblicazione che stiamo preparando e che fornisca il risultato di un lavoro che, partito collettivamente, ha poi seguito binari diversi a seconda delle competenze, delle situazioni, delle problematiche delle singole realtà ma che ritorna a vedere una collaborazione cooperativa per la revisione dei lavori.

Difficoltà incontrate

Va subito detto che, al di là delle difficoltà, è la prima volta che[2] prende corpo un piano di portata così vasta e che prevede una formazione di un numero molto elevato di docenti su tutti e tre gli ordini di scuola contemporaneamente, una formazione metodologica e disciplinare che dovrebbe permettere quindi una maggiore omogeneità e un maggior colloquio anche tra le diverse scuole.

Per la maggior parte le difficoltà incontrate sono state dovute ad una non idonea comunicazione tra i vertici di questa attività e i tutor e i discussant. Sono in gioco una quantità molto grande di livelli: il

[2] Il precedente piano nazionale risale all'ormai lontano 1986.

comitato tacnico scientifico, il gruppo di pilotaggio nazionale, i gruppi di pilotaggio regionale, discussant e conduttori ed infine i tutor. Le persone che fanno parte dei singoli gruppi non sono conosciute da che gestisce in pratica l'operazione e spesso i piani si sono mescolati tra di loro: ad esempio il comitato scientifico è sì comitato scientifico, ma in parte i componenti sono anche persone che fanno i conduttori e i discussant e questo non sembra coerente con una impostazione di una operazione così vasta ed importante.

Un esempio tra gli altri: a ormai fine lavoro è stata chiesta una rendicontazione attraverso il diario di bordo. Ora il diario di bordo è una struttura tipica della scuola primaria, ma non lo è altrettanto nella scuola secondaria di primo e secondo grado. Chiedere una rendicontazione così dettagliata a ormai fine lavoro è inutile oltre che dannoso perché i tutor, non sapendo dall'inizio quello che avrebbero dovuto fare, non sempre hanno introdotto questo diario e , scriverlo alla fine, vuol dire rendere assolutamente nulla la validità di questo strumento metodologico che pure è importantissimo se compilato appena terminata la lezione, con le osservazioni a caldo e con le osservazioni dei ragazzi ancora chiare nella mente. Fatto a fine lavoro non è un diario, ma un resoconto finale che contiene già quindi anche le rielaborazioni personali, anche se inconsce, dell'insegnante.

Un problema che trovo essere di importanza notevole è il basso numero di insegnanti della scuola primaria che sono stati coinvolti nel seminario di formazione; troppo pochi rispetto a quelli delle scuole secondarie superiori. È vero che i docenti della scuola secondaria superiore hanno competenze disciplinari nelle singole materie, ma è altrettanto vero che il numero degli insegnanti della scuola primaria è molto più elevato e che sarebbe importante che la loro presenza fosse garantita in quanto presidi che manchino di rappresentanti di questo ordine di scuola risultano squilibrati e fanno sicuramente molta più fatica a sopravvivere nel tempo.

Idee che si sono modificate in itinere, non si capisce bene per quale motivo, una mancanza di direttive chiare ed univoche rendono la situazione in cui ci si muove molto fluida.

Il piano ISS continuerà per altri due anni, ma è una ricerca-azione, come tale si prevede che ci sia una modifica, un miglioramento, una discussione che faccia evolvere le singole individualità fino a giungere ad una competenza (?) di livello superiore sia da un punto di vista disciplinare che da un punto di vista di metodologia di insegnamento-apprendimento. Inizialmente non si è parlato di valutazione dei lavori prodotti dai tutor, poi via via invece questa situazione è emersa. Esistono sicuramente alcune incongruenze che non ho alcun dubbio verranno correttamente superate, ma che per il momento gettano ombre sull'evoluzione di questo piano.

Finito di stampare nel mese di ottobre 2007 per conto della TECNODID Editrice srl
Piazza Carlo III, 42 - 80137 Napoli (NA) dalla Editor Tipografia - Melito di Napoli (NA)