ISSN 0393-0998

Maggio 1993
Supplemento al n. 5

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno XX

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

QUINDICESIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

ARITMETICA INFORMATICA LOGICA NELL'EDUCAZIONE MATEMATICA

GROSSETO, 29-30-31 OTTOBRE 1992
A cura di B. Micale e S. Pluchino

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

Fascicolo monografico stampato con un contributo finanziario del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 40%) nonchè del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint • Via del Legatore 3 • 40138 Bologna (Italia)

Maggio 1993
Supplemento al n. 5

XV CONVEGNO NAZIONALE UMI - CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

ARITMETICA INFORMATICA LOGICA NELL' EDUCAZIONE MATEMATICA

Grosseto, 29-30-31 ottobre 1992

PROGRAMMA

Giovedi, 29 ottobre 1992

ore 9.30 - Apertura del Convegno.
- Saluti del Sindaco di Grosseto e del Provveditore agli Studi di Grosseto.
- Intervento del Presidente dell'UMI, A.Figà-Talamanca.
- G.D'Amore, Direttore Generale (MPI): "Verso una nuova Scuola".
- Breve presentazione delle Mostre di matematica.

ore 11.30 - B.Scimemi: "Le frazioni continue rivisitate".

* * *

ore 15.00 - G.Barozzi: "Algoritmi per i numeri primi".
ore 16.30 - E.Borromeo, C.Maffei: "Una esperienza di informatica nella scuola media".
ore 16.50 - B.Piochi: "Problemi di minimo risolvibili con metodi elementari".
ore 17.30 - S.Deplano, G.Navarra: "Gli insegnanti ricercatori in didattica della matematica".
ore 18.00 - Videocassetta del Nucleo di Trieste.

Venerdì, 30 ottobre 1992

ore 9.00 - F.Conti: "Strumenti informatici per divulgare la matematica ... o per mistificarla?".
ore 10.40 - R.Ferro: "Iniziazione alla logica matematica".
ore 12.10 - G.Lucchini: "Banca Dati Ricerca Didattica Matematica, ASIM e IAMSI, oggi... e domani".
ore 12.30 - G.Pirillo: "Si può parlare della parola infinita di Fibonacci a studenti di Liceo?".

* * *

ore 15.00 - Tavola rotonda: "Aritmetica fra scuola media e superiore". Introducono: L.Ciarrapico, P.Locati, G.Prodi.
ore 17.00 - Gruppo di lavoro degli insegnanti elementari, guidato da F.Speranza.
ore 17.20 - C.Dapueto: "Calcolatore e insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore".
ore 17.40 - A.Maturo, G.Di Biase: "Spunti per la didattica del calcolo delle probabilità e dell'informatica a partire dai giochi".
ore 18.00 - Videocassetta di V.Villani.

Sabato, 31 ottobre 1992

ore 9.00 - E.Giusti: "Le idee e i loro segni. Piccola storia delle notazioni aritmetiche".
ore 10.30 - A.Marini: "Una proposta di presentazione congiunta di matematica e programmazione".
ore 10.50 - C.Bernardi: "Breve resoconto sull'ICME 7".
ore 11.30 - G.Lolli: "Il principio di induzione".
ore 12.40 - Dibattito conclusivo.
ore 13.00 - Chiusura del Convegno.

PARTECIPANTI

Accascina Giuseppe (Roma) – Alessi Cerioni M.Grazia (Grosseto) – Aloi Concetta (Grosseto) – Ambroggi Sergio (Verona) – Antonacci Elda (Pisa) – Arezzo Domenico (Genova) – Armienti Susanna – Baldi Morena (Grosseto) – Baldini Lucia (Grosseto) – Ballaccini Barbara (Firenze) – Banchi Maurizio (Carmignano) – Banci Buonamici Alessandra (Grosseto) – Barbanera Antonio (Terni) – Barozzi Giulio Cesare (Bologna) – Basile M.Federica (Grosseto) – Batini Grazia (Roma) – Batistini Graziana (Follonica) – Bazan M.Chiara (Castelfranco Veneto) – Bellipanni Mario – Bellissima Fabio (Siena) – Benaglia Lucio (Milano) – Benedetti Maurizio (Verona) – Bentivegna Natascia (Poggio Mirteto) – Bernardi Claudio (Roma) – Bernecoli Sandra (Rovigo) – Bernini Ivana (S.Giovanni Valdarno) – Bettella Nazarena (Padova) – Bianchi Carla (Vicenza) – Bianchini Silvana (Figline Valdarno) – Bianchini Silvana (Firenze) – Bigiarini Lea (Capalbio) – Boieri Paolo (Torino) – Bolletta Raimondo (Roma) – Bologna Simona (Pavia) – Bondi Fabrizio (Sesto Fiorentino) – Bonotto Cinzia (Padova) – Bordo Laura (Grosseto) – Bornoroni Silvana (Roma) – Borromeo Enrica (Ponsacco) – Bottazzo M.Vittoria (Grosseto) – Brenci M.Teresa (Roma) – Bruni A.Maria (Grosseto) – Bucciarelli Rossi Rossana (Levane) – Bulgheri Enrico (M. Argentario) – Buono Rosa (Noicattaro) – Caccialupi Ughetta (Livorno) – Calcagno Franco (Asti) – Camilli Oriente (Grotte di Castro) – Candela Innocente (Putignano) – Cannizzaro Lucilla (Roma) – Caponi M.Alfonsina (Subiaco) – Cappuccini Marcella (Grosseto) – Capra Paola (Mandello Lario) – Caramelli Cinzia (Grosseto) – Carboncini Claudio (Follonica) – Carli Manuela (Massa Marittima) – Casci Ceccani Giovanna (Ancona) – Castagnola Ercole (Milano) – Castelli Fabio (Verona) – Cavallaro Bruna (Roma) – Celentano Adriana (Roma) – Cerasoli Mauro (L'Aquila) – Checcacci Eda (Grosseto) – Cheli Leonardo (Follonica) – Chimetto M.Angela (Vicenza) – Chiti Alberta (Piombino) – Ciarrapico Lucia (Roma) – Ciccarelli Marcello (Latina) – Cioni Carla (Grosseto) – Colamasi Loredana (Latina) – Colombi Maida (Grosseto) – Colombo Bozzolo Clara (Lugano) – Coloni M.Luisa – Conte Sebastiano (Roma) – Conti Franco (Pisa) – Corradini Anna (Grosseto) – Crespina Elena (Roma) – Crocetti Carlo (Fabriano) – Cruciani Rosanna (Roma) – Dalè Marina (Brescia) – D'Amore Bruno (Bologna) – D'Amore Giovanni (Roma) – Dapueto Carlo (Genova) – Del Gamba Piero (Grosseto) – Del Giovane Marzia (Grosseto) – Della Rocca Giorgio (Pontinia) – Dello Sbarba Camillo (Volterra) – Del Re Isabella (Mula Asbari) – Del Vecchio Francesca (Borgo Montello) – De Salvo (Roma) – De Santis Carla (Roma) – de Socio Luciano (Roma) – Di Biase Giuseppe (Pescara) – Di Cataldo Francesco (Venezia) – Di Comite Claudio (Bari) – Diek Rosella (Roma) – Dimalio Michelina (Roma) – Di Megio Ugo (Grosseto) – Dini

Francesca (Albinia) – D'Inverno Pasquale (Grosseto) – Di Sorbo Domenica (Piana di Monte Verna) – Doretti Lucia (Siena) – Faggiano Luciano (Modugno) – Falchi Paolo (Grosseto) – Falchi Rosalba (Roma) – Fantini Loredana (Fabriano) – Fara Rina (Roma) – Fasano Margherita (Potenza) – Fazio Rocco (Acquaviva) – Fè Franca (Grosseto) – Feri Massimo (Arcidosso) – Ferrandina Tommaso (Matera) – Ferrari Mario (Pavia) – Ferro Ruggero (Lecce) – Festa Carmela (Torre del Greco) – Figà Talamanca Alessandro (Roma) – Flaminio Enzo (Grosseto) – Fontani Adriano (Buonconvento) – Forgia Daniela (Roma) – Franchitta Raico (Grosseto) – Fregosi Paola (Grosseto) – Freguglia Paolo (Siena) – Fuiani Laura – Fuligni Edo (Grosseto) – Furinghetti Fulvia (Genova) – Furini Gian Luigi (Mantova) – Gabrielli M.Domenica (Poggio Mirteto) – Gallerani Alberto (Ferrara) – Gargani Gianfranco (Grosseto) – Gavagna Barbara (Firenze) – Gazzaniga Giovanna (Vigevano) – Genovese Pier Luigi (Porto S.Stefano) – Gentili Laura (Rieti) – Giambò Antonino (Macerata) – Giovannoni Laura (Mantova) – Giuggioli Claudio (Grosseto) – Giusti Enrico (Firenze) – Goi Alessandra (Casalpusterlengo) – Grassini Paola (Pisa) – Grimaldi Angela (Noicattaro) – Grugnetti Lucia (Cagliari) – Guerra Gloria (Grosseto) – Guidi Laura (Massa Marittima) – Guidi Monica (Siena) – Iozzi Anna (Massa Marittima) – Laganà Gaetano (Roma) – Landra Luigi (Seregno) – Lania Licia (Messina) – Lantelme Lucia (Salso) – Lanzillo Daniela (Grosseto) – Latino M.Barbara (Grosseto) – La Torre Anna (Roma) – Lecis Gabriella (Monserrato) – Lemut Enrica (Genova) – Lenzi Franca (Grosseto) – Leonori Cecina M.Grazia (Arcidosso) – Lizio Angelo (Acireale) – Locati Pietro (Milano) – Lolli Gabriele (Torino) – Lombardi Vanna Maria (Roma) – Londini Gilda (Grosseto) – Lorenzelli Costanza (Roma) – Lorenzini Anna Maria (Grosseto) – Lovato Valeria (Cologna Veneta) – Lucarelli Rosella (Grosseto) – Lucchini Gabriele (Milano) – Luzi Elvira (Roma) – Machetti Rosanna (Grosseto) – Maestrucci Letizia (Grosseto) – Maffei Cristina (Pisa) – Maffezzoli Laura (Verona) – Magenes M.Rosa (Pavia) – Magi Carla (Grosseto) – Magi Carla (Roma) – Magi Lia (Roma) – Malara Nicolina (Modena) – Manca Silvana (Cagliari) – Mancini Proia Lina (Roma) – Mannucci Loris (Volterra) – Mansillo Sofia (Roma) – Marcantonio Alvisia (Roma) – Marchetti Fausto (Lana) – Marchetti Marco (Virgilio) – Marchi Mario (Brescia) – Marchini Carlo (Parma) – Marchiò Mario (Grosseto) – Marchioni Anna Rosa (Sarego) – Marini Alberto (Milano) – Marone Silvia (Montecompatri) – Martinez Annalisa (Modena) – Martini Enrica (Grosseto) – Martino Carmine (Bergamo) – Mascelloni Aldo (Grosseto) – Masetti Marzia (Pisa) – Matozzi Giuliano (Grosseto) – Meloni Patrizia (Grosseto) – Menci Lida (S.Giovanni Valdarno) – Menci Lidia (Levane) – Menghini Marta (Roma) – Micale Biagio (Catania) – Micciché M.Anna (Orbetello) – Migliasso Luciana (S.Damiano) – Migliorato Renato (Messina) – Minio Alessandro (Lazise) – Montani Mara (Grosseto) – Morelli Aldo (Napoli) – Morreale Pietro (Orbetello) – Moscucci

Manuela (Siena) – Navarra Giancarlo (Sedico) – Negrini Paolo (Bologna) – Nencioni A.Maria (Capalbio) – Nicolosi Sebastiano (Bibbiena) – Oliva Laura (Grosseto) – Olivieri Giovanni (Roma) – Pacini Roberta (Livorno) – Palladino Dario (Savona) – Papini Enzo (Grosseto) – Pedone Gaetano (Casteldelpiano) – Pellegrino Consolato (Modena) – Penco Anna Maria (Trieste) – Pennisi Mario (Catania) – Percario Zelinda (Grosseto) – Pertici Fabrizio (Grosseto) – Pesci Angela (Pavia) – Piazza Laura (Grosseto) – Pica Adelia (Terni) – Picci Vanna (Gavorrano) – Piccione Maria (Siena) – Pierangioli Luciana (Grosseto) – Piochi Brunetto (Siena) – Pirillo Giuseppe (Firenze) – Pisani Alberto (Grosseto) – Pizzati Lucio (Porto Ercole) – Plateroti Massimo (Roma) – Pluchino Salvatore (Catania) – Poli M.Fortunata (Rutigliano) – Pratelli Maria (Siena) – Pratesi Maria (Grosseto) – Priami Grazia (Casteldelpiano) – Prodi Giovanni (Pisa) – Puzzo Giovanni (Porto S.Stefano) – Raccio Rosa (Roma) – Ragagni Maria (Bologna) – Rago Gabriele (Campobasso) – Ragusa Gilli Liliana (Ostia) – Ramella Bruna (Grosseto) – Randazzo Grazia (Roma) – Ranieri Simonetta (Roselle) – Reggiani Maria (Voghera) – Renzi Marisa (Terni) – Repola Boatto Adele (Ancona) – Restagno M.Sandra (Grosseto) – Reversi Lorella (Fabriano) – Ricci Roberto (Bologna) – Ridolfi Irma (Roma) – Righi Giuseppe (Grosseto) – Righi Giuseppina (Roccastrada) – Rohr Ferruccio (Roma) – Romondini Sandro (Cagliari) – Rondanina Susanna (Livorno) – Rossi Carla (Roma) – Rossi Francesco (Grosseto) – Rossi Maria (Roma) – Rossi Patrizia (Capalbio) – Rossi Rosanna (S.Giovanni Valdarno) – Rossignoli Roberta (Paliano) – Rossini Alberto (Magliano) – Ruganti Riccardo (Pistoia) – Sabatini M.Elisabetta (Follonica) – Sacchi Francesca (Chiavari) – Salomone Lucia (Siena) – Salucci Emilia (Brescia) – Sandri Paolo (Grosseto) – Santoro Marcella (Firenze) – Schirillo Giorgio (Roma) – Scimemi Benedetto (Padova) – Sciorio Giovanni (Grosseto) – Scoppola Carlo (Trento) – Sepe Fabrizia (Roma) – Simoncioli Caterina (Grosseto) – Simonetti Carla (Firenze) – Solari Amerigo (Grosseto) – Solari M.Angela (Orbetello) – Sordini Sergio (Grosseto) – Sorresina Silvia (Grosseto) – Spagnuolo Ida (Roma) – Speranza Caterina (Roma) – Speranza Francesco (Parma) – Spilimbergo Francesca (Oderzo) – Staropoli Francesco (Tropea) – Tabarin Carla (Roma) – Taddei Lucia (Grosseto) – Talarico Giovanna (Catanzaro) – Tarassi Vera (Montorgiali) – Tassoni Teresa (Latera) – Testa Marisa (Alessandria) – Tinti Rosanna (Livorno) – Tiozzo Anna Maria (Verona) – Tongiani Antonio (S.Fiora) – Tortora Roberto (Napoli) – Tosconi Antonino (Adrano) – Tosi Giuseppe (Porto S.Stefano) – Trigiante Rocco (Acquaviva) – Urbani Anna (Grosseto) – Valentini Lucia (Roma) – Valentini Sergio (Siena) – Valla Margherita (Milano) – Varlotta Adele (Roma) – Vecchio Rosanna (Motta Visconti) – Veccia Filomena (Caserta) – Venè Michelotti Margherita (Parma) – Villani Vinicio (Pisa) – Violetti Angela (Grosseto) – Vita Vincenzo (Roma) – Vittori Massimo (Grosseto) – Vittorione Elisabetta (Castellana Grotte) – Volpe

Stefano (Roma) – Zanardo Alberto (Padova) – Zanoli Carla (Modena) – Zennaro Elio (Trieste) – Zenobi Carla (Fabriano) – Zicarelli Emilia (Cosenza) – Zito Concepita (Follonica) – Zoccante Sergio (Vicenza) – Zumpano Daniela (Cosenza).

RELAZIONI

LE FRAZIONI CONTINUE RIVISITATE

*Benedetto Scimemi**

Sette anni fa ebbi l'occasione di parlare di aritmetica al Convegno UMI di Montecatini. Mi proposi allora di attirare l'attenzione verso alcuni problemi di *aritmetica dilettevole*, come si usava dire all'inizio del secolo: scelsi come argomento centrale della conversazione le *frazioni di Farey*, un soggetto non troppo conosciuto ma decisamente ameno. Oggi che mi si invita a riparlare di aritmetica, vorrei considerare questa conversazione come una seconda puntata di quell'incontro. La dedicherò a uno strumento aritmetico che oserei chiamare *utile* e non solo dilettevole; utile, come vedremo, per certe applicazioni ad altri capitoli della matematica e delle altre discipline, ma soprattutto utile - è quanto cercherò di dimostrare - per la didattica della matematica, al punto che - se mi si dovesse offrire l'occasione di rivedere i programmi - sarei tentato di proporlo per qualche scuola secondaria a indirizzo scientifico. Non si tratta di un'idea tanto originale se è vero che l'argomento compariva già nel 1871 nei programmi dell'Istituto Tecnico, sezione Matematico-Fisica, poi nel progetto Boselli-Vailati del 1909, infine nel trattato di *Didattica della matematica* di F.Severi del 1926 (cfr. [6]). Da allora, almeno in Italia, l'attenzione alle frazioni continue si è ridotta a un gruppetto di appassionati (i quali, incidentalmente, rischiano di essere più numerosi in questa sala che negli alti ambienti accademici). Ma all'estero, in tempi recenti, soprattutto dopo la diffusione dei calcolatori e della matematica algoritmica-computazionale, l'argomento sembra riaffacciarsi nella progettazione curriculare. E' interessante, per esempio, l'opinione di Manfred R. Schröder, noto ricercatore della Bell Telephone Co., detentore di oltre 40 brevetti in vari settori della tecnologia, poi divenuto professore a Gottinga. Nel capitolo intitolato *un argomento trascurato* del suo bellissimo libro *La teoria dei numeri nelle scienze e nelle applicazioni* [5] Schröder si lamenta così: *Le frazioni continue sono uno dei soggetti più utili e divertenti dell'aritmetica, eppure sono state sempre trascurate dalle nostre fazioni scolastiche.* E più avanti si chiede: *Perché le frazioni continue sono trattate con tanta negligenza nella nostra scuola superiore (e inferiore)? Buona domanda, come vedremo studiando i loro molteplici usi.*

Dal libro di Schröder proviene la maggior parte delle notizie sulle ap-

*Dipartimento di Matematica, Università di Padova.

plicazioni delle frazioni continue che citerò in seguito.

C'è poi una domanda più imbarazzante per chi fa il mio mestiere:

Perché le frazioni continue sono ignorate nell'Università?

A questa domanda cercherò di rispondere alla fine di questa conversazione.

§ 1. Origine delle frazioni continue semplici. Che cosa sono.

Si dice che le frazioni continue fossero presenti negli algoritmi arabi del medioevo. Nella letteratura occidentale esse sono riconoscibili nell'*Algebra* del nostro Raffaele Bombelli (Venezia, 1572) e molto più diffusamente nel *Trattato del modo brevissimo di trovar la radice quadra delli numeri* di Pietro Cataldi (Bologna, 1613). Un appassionato studio di E. Bertolotti [1] intese dimostrare che il Cataldi si deve anzi considerare il vero scopritore delle frazioni continue, avendone laboriosamente enunciato e dimostrato tutte le principali proprietà. Certo è che nel secolo XVII esse ricompaiono in vari autori (Huygens le usa in uno studio sulle ruote dentate); ma sistematicamente vennero studiate per la prima volta da Euler (1737), il quale sembra essersi reso conto per primo che si trattava di uno strumento utile tanto per la Teoria dei numeri quanto per l'Analisi. L'argomento fu poi ripreso da Lagrange (1776) e Gauss (1812). Dopo di lui le frazioni continue si allontanarono dal filone principale delle ricerche matematiche restando un po' al margine per circa 150 anni. Ma negli ultimi decenni esse ricompaiono, sempre più spesso, sia negli sviluppi teorici che nelle applicazioni.

Chiedendo scusa fin d'ora ai pochi esperti dell'argomento, partirò da zero per spiegare anzitutto *che cosa sono* le frazioni continue, per poi accennare *a che cosa servono*.

Chiunque sappia *fare una divisione* sa di fatto *decomporre* una frazione *impropria* nella somma di un numero intero e di una frazione *propria*. Si tratta di scrivere

$$22/17 = \mathbf{1} + 5/17 \qquad 35/6 = \mathbf{5} + 5/6 \qquad 34/17 = \mathbf{2} + 0/17$$

per intendere *"22 diviso 17 fa 1 con l'avanzo di 5"* ecc.

Quel numero intero (quoziente) si chiama la *parte intera* della frazione; la frazione propria è il *resto* (il *rotto*, diceva Cataldi). La parte intera $[\gamma]$ di un numero reale γ è l'ultimo numero intero che precede γ nell'ordinamento naturale . Scriveremo dunque

$$[22/17] = \mathbf{1} \qquad [35] = \mathbf{35} \qquad [\pi] = \mathbf{3}\,.$$

Partendo da una frazione come 22/17 costruiamoci la sequenza di operazioni

$$22/17 = \mathbf{1} + 5/17$$
$$17/5 = \mathbf{3} + 2/5$$
$$5/2 = \mathbf{2} + 1/2$$
$$2/1 = \mathbf{2} + 0/1$$

Qui ogni riga incomincia con l'*inversa* della frazione propria che compare nella riga precedente. La sequenza si ferma quando questo inverso non esiste, perché il resto è zero. Le operazioni descritte si possono ricombinare, sostituendo ogni resto con l'espressione che si ottiene dalla riga successiva:

$$22/17 = 1 + 5/17 = 1 + \cfrac{1}{3 + 2/5} = 1 + \cfrac{1}{\mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2}}}}$$

Una scrittura di questo genere si chiama una ***frazione continua finita semplice***. La parola *finita* prelude al fatto che, più avanti, aumenteremo all'infinito il numero degli addendi; la parola *semplice* si riferisce al fatto che in altre frazioni (cui accenneremo più avanti) i numeratori potrebbero essere anche diversi da 1. Per riassumere la precedente scrittura scriveremo, d'ora in poi,

$$22/17 = \{\, 1;\, 3,\, 2,\, 2 \,\}.$$

Viceversa, da una frazione continua come {2; 1, 1, 5, 3} possiamo risalire al numero razionale che essa rappresenta calcolando, per ora con un noioso sforzo, ben familiare ai nostri studenti esperti di *espressioni*

$$\{\, 2;\, 1,\, 1,\, 5,\, 3 \} = \mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{3}}}}} = 89/35$$

E' interessante notare che cosa succede se il calcolo si interrompe ai vari stadi della frazione continua, ottenendo le *somme parziali*, o *convergenti*, come qui indicato:

$\{1;\}$	$\{1;3\}$	$\{1;3,2\}$	$\{1;3,2,2\}$
1	$1+\frac{1}{3}$	$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$	$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$

$$1/1 \quad < \quad 4/3 \quad > \quad 9/7 \quad < \quad 22/17$$

$$1*3-1*4=1 \qquad 4*7-3*9=-1 \qquad 9*17-7*22=1$$

Le somme parziali sono alternativamente minori e maggiori del risultato finale, al quale si avvicinano (ecco perché *convergenti*) con andamento oscillante; più precisamente, il confronto tra due somme parziali contigue a/b, r/s produce sempre la relazione as-br = ± 1, con segni alterni. Vedremo subito di convincerci che questi risultati (cioè l'alternanza e la relazione as-br = ± 1) non sono accidentali.

§ 2. Un algoritmo per il calcolo delle somme parziali. Perché è facile calcolarle.

Per il calcolo delle somme parziali, conviene ricorrere a un algoritmo che fa risparmiare le complicate manipolazioni delle frazioni *a molti piani*.

Nello schema seguente

	1	**3**	**2**	**2**
	1	4	9	22
	1	3	7	17

abbiamo trascritto, nelle righe successive (a destra del tratteggio) le parti intere, i numeratori e i denominatori delle somme parziali. Ma questa tabella si può costruire direttamente, a partire dalla prima riga, nel modo seguente: si preparano i dati così

		1	**3**	**2**	**2**
0	1				

poi si riempiono gli spazi della seconda riga con la seguente regola: se sono già stati scritti due numeri contigui, il successivo in quella riga si ottiene sommando il primo al prodotto del secondo per la parte intera che gli sta a Nord-Est (a destra in alto, come indica la freccia). Si calcola cioè successivamente 0 + 1 * 1 = 1 , che si scrive sotto l' **1**

		1	**3**	**2**	**2**
0	1	1			

e così di seguito si continua con 1 + 1 * 3 = 4 , 1 + 4 * 2 = 9, e infine 4 + 9 * 2 = 22 che completa la riga dei numeratori. Analogamente si compila la terza riga (dei denominatori) partendo dallo schema

		1	**3**	**2**	**2**
0	1	1	4	9	22
1	0				

e ignorando la riga dei numeratori. Si ottiene appunto

		1	**3**	**2**	**2**
0	1	1	4	9	22
1	0	1	3	7	17

Per chi volesse convincersi che l'algoritmo produce effettivamente i risultati voluti, propongo una sorta di dimostrazione basata sul nostro esempio. Ammesso di aver verificato che l'algoritmo ha funzionato per la frazione continua {1; 3, 2, 2}, supponiamo di ... prolungarla di una lunghezza, aggiungendo, per esempio, il numero 5: {1; 3, 2, 2, 5}. Se si ritorna alla definizione, si vede che questo prolungamento equivale a una sorta di correzione dell'ultima parte intera, perché si può ottenere sostituendo **2** con **2 + 1/5** . Costruiamo allora la nuova tabella

		1	**3**	**2**	**2+1/5**
0	1	1	4	9	22+9/5
1	0	1	3	7	17+7/5

La frazione finale è (22+9/5)/(17+7/5) = 119/92 . Ma questo è proprio il risultato che si otterrebbe, col nostro algoritmo, dalla tabella allungata

		1	3	2	2	5
0	1	1	4	9	22	119
1	0	1	3	7	17	92

perché 9 + 22 * 5 = 119, 7+ 17 * 5 = 92. Con poca fatica si vede anche che nell'allungare la tabella di una colonna, non è andata perduta la proprietà ad-bc = ± 1 . Infatti da 9 * 17 - 7 * 22 = -1 segue
22*92 - 119*17 = 22*(17*5+7) - (22*5+9)*17 = 22*7-9*17 = 1.

A nessuno sarà sfuggito che i calcoli precedenti adombrano vere e proprie *definizioni e dimostrazioni per induzione*: precisamente, partendo dalla frazione continua $\{a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ si definiscono i numeri $p_0, p_1, p_2, ... p_n, q_0, q_1, q_2, ..., q_n$ ponendo

$p_0 = 0+1*a_0$; $\quad p_1 = 1+p_0*a_1$; $\quad p_2 = p_0+p_1*a_2$, $\quad ...\ p_{n+2} = p_n+p_{n+1}*a_{n+2}$;
$q_0 = 1+0*a_0$; $\quad q_1 = 0+q_0*a_1$; $\quad q_2 = q_0+q_1*a_2$, $\quad ...\ q_{n+2} = q_n+q_{n+1}*a_{n+2}$;

Le tesi da dimostrare sono allora (per i= 0, 1, ..., n)

$$\{a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_i\} = p_i/q_i \qquad p_i * q_{i+1} - q_i * p_{i+1} = (-1)^{i+1}$$

e per provarle basta seguire la falsariga dell'esempio numerico. L'esperienza insegna che la formalizzazione delle ultime righe risulta agli studenti molto meno digeribile della precedente sperimentazione numerica; ma non è da sottovalutare l'occasione didattica per introdurre e utilizzare un metodo dimostrativo come la ricorrenza.

Come altro esempio, applichiamo l'algoritmo per il calcolo delle frazioni parziali alla frazione continua { 2; 1, 1, 5, 3} e otteniamo

		2	1	1	5	3
0	1	2	3	5	28	99
1	0	1	1	2	11	33

E' evidente che, dopo pochi minuti di esercizio, la probabilità di compiere un banale errore in questi ultimi calcoli risulta molto inferiore a quella di sbagliare nel manipolare, nel modo tradizionale, l'espressione a vari piani 2 + [1/ (1 + ... che definisce la frazione continua. D'altra parte, una prova della correttezza dei calcoli che ha una certa attendibilità è fornita appunto dalla relazione as-br = ± 1 , cioè dai prodotti incrociati, che devono sempre differire per ±1. La stessa relazione dimostra anche che le frazioni parziali a/b nascono tutte naturalmente *ridotte* , cioè con numeratore e denominatore primi tra loro.

§ 3. Le frazioni continue per l'equazione lineare diofantea: un metodo di Lagrange.

Come prima applicazione delle frazioni continue (un'applicazione, per ora, nell'ambito della stessa aritmetica) seguiremo un'idea di Lagrange per risolvere un classico problema di aritmetica, cioè la soluzione dell'equazione diofantea

$$ax + by = 1$$

E' ben noto che a questa equazione si riconduce una gran quantità di problemi nei numeri interi (vedi, per es. [4]).

Esempio: *Trovare, nell'ambito dei numeri interi, una soluzione (x,y) dell'equazione* $\quad 19x + 91y = 1$.

i) Sviluppiamo 91/19 in frazione continua:

91/19 = **4** + 15/19 $\qquad$ 19/15 = **1** + 4/15 $\qquad$ 15/4 = **3** + 3/4
4/3 = **1** +1/3 $\qquad$ 3 = **3** + 0 $\qquad$ da cui $\qquad$ 91/19 = { 4; 1, 3, 1, 3}

ii) Prepariamo la tabella e calcoliamo le frazioni parziali

		4	1	3	1	3
0	1	4	5	19	24	91
1	0	1	1	4	5	19

iii) Prendiamo la *penultima* frazione 24/5. Sappiamo che risulta

$$19 * 24 - 91 * 5 = \pm 1$$

e anzi, ovviamente, in questo caso = 1. Allora 1 = 19 * 24 + 91 * (-5) significa che (24, -5) è una soluzione.

Altro esempio: *risolvere* $\quad 41x + 152y = 1$

152/41 = **3** + 29/41 $\qquad$ 41/29 = **1** + 12/29 $\qquad$ 29/12 = **2** + 5/12
12/5 = **2** + 2/5 $\qquad$ 5/2 = **2** + 1/2 $\qquad$ 2 = **2** + 0

		3	1	2	2	2	2
0	1	3	4	11	26	63	152
1	0	1	1	3	7	17	41

La penultima frazione dà 41*63 - 152*17= -1. Una soluzione dell'equazione è dunque (-63, 17).
Questo metodo è citato da Gauss, che appunto l'attribuisce a Lagrange,

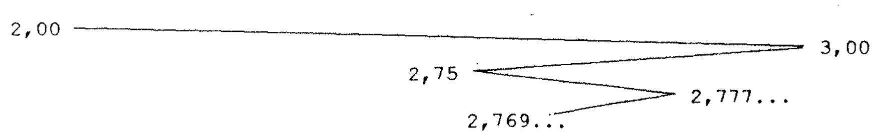
nelle primissime pagine delle *Disquisitiones arithmeticae* (Lipsia, 1801).

§ 4. Frazioni continue infinite. Come introdurre didatticamente i concetti di convergenza e di limite.

Ci proponiamo ora di spiegare meglio il nome di *convergenti* che abbiamo dato alle somme parziali. Abbiamo già visto che le somme parziali hanno andamento *oscillante*: si osserva anzi che quelle di posto dispari (la prima, la terza, la quinta ...) crescono, mentre quelle di posto pari (la seconda, la quarta,..) diminuiscono:

		2	1	3	2	1
0	1	2	3	11	25	36
1	0	1	1	4	9	13
		2,00	3,00	2,75	2,777 ...	2,774 ...

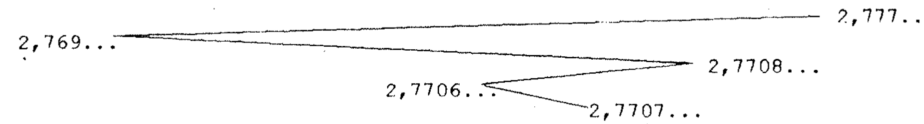
Questo andamento, evidenziato nella figura, richiama un po' quello di un pendolo smorzato dall'attrito, le cui oscillazioni si fanno sempre più piccole:



Se si dispone di una calcolatrice tascabile, le frazioni parziali si possono confrontare più facilmente, calcolandone lo sviluppo decimale approssimato. Si osserva allora che il fenomeno dell'oscillazione smorzata rimane tale e quale quando la frazione continua { 2; 1, 3, 2, 1} *si allunga* in un modo qualsiasi, per esempio, in { 2; 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1}. Ecco la continuazione della precedente tabella

	...	...	3	2	1
...	25	36	133	302	435
...	9	13	48	109	157
...	2,77777...	2,76923...	2,7708...	2,7706...	2,7707...

Si vede l'altalena rimettersi in moto, compiendo oscillazioni ancora più piccole, e arrestandosi in un numero, sempre diverso, ma vicinissimo al rimbalzo precedente (nella prossima figura è stata cambiata la scala, come se si facesse uno *zoom* di ingrandimento al centro della figura precedente).



Si può pensare di prolungare *indefinitamente* la frazione continua, per esempio calcolando { 2; 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3 ...}. L'andamento rimane lo stesso: il pendolo compie *oscillazioni* sempre più piccole, e anzi *arbitrariamente piccole*. Di questa arbitrarietà ci si può convincere facilmente osservando che l'ampiezza dell'oscillazione è la differenza tra due convergenti contigue; per esempio

$$25/9 - 36/13 = (25\cdot 13 - 36\cdot 9)/\ 9\cdot 13 = 1/\ 9\cdot 13 < 0{,}01$$

E poiché questa differenza è sempre del tipo (as-br)/bs = 1/bs, essa si può rendere piccola a piacere, visto che i denominatori delle convergenti crescono quanto si vuole. Così si perviene, in modo quasi indolore e dunque didatticamente assai interessante, a quelle nozioni di *limite* e di *convergenza* che svolgono un ruolo essenziale nella matematica. Su questo punto torneremo più avanti.

§ 5. Calcolo del limite di qualche frazione continua infinita.

Sorprendentemente, se ci chiede a quale numero *tendono* le somme parziali, in alcuni casi di notevole interesse non è difficile rispondere.
Esempio 1. Sia x il numero a cui tende la frazione continua

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}} = \{\ 1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \dots\}$$

Allora risulta

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}} \qquad 1/(x-1) = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} = 1 + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}$$

Ma quest'ultima espressione vale 1 + x e dunque risulta 1 / (x-1) = 1 + x, da cui (x - 1)(x+1)=1 e quindi $x = \sqrt{2}$.

Dunque abbiamo a disposizione un modo efficace per calcolarci approssimativamente $\sqrt{2}$. Infatti con la solita tabella si ottiene

		1	2	2	2	2	2	...
0	1	1	3	7	17	41	99	...
1	0	1	2	5	12	29	70	...
		1,00	1,50	1,4	1,4166...	1,4137...	1,4142...	...

Esempio 2. Sia x il numero a cui tende la frazione continua

$$x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} = \{1;\ 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

Allora risulta

$$x-1 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} \qquad 1/(x-1) = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}} = x$$

Dunque si ha $1 / (x-1) = x$, da cui $x^2 - x - 1 = 0$. Con le formule dell'equazione di secondo grado, si trova $x = (1+\sqrt{5})/2$. Gli antichi attribuirono a questo numero il nome di *numero d'oro* (o *rapporto aureo* o *sezione aurea*) e lo usarono per dimensionare vari elementi architettonici. Lo stesso numero compare anche nel pentagono regolare (è il rapporto tra la diagonale e il lato) e in altri problemi matematici. Con il solito algoritmo, siamo in grado di calcolarne i valori approssimati

		1	1	1	1	1	1	1	1	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	...

che oscillano smorzandosi con particolare lentezza. E' interessante notare che la successione dei numeratori è la stessa, spostata, di quella dei denominatori. Si tratta della famosa *successione di Fibonacci*, in cui ogni termine è somma dei suoi due immediati predecessori.

Entrambi gli esempi hanno fatto nascere in modo naturale un'equazione di secondo grado, di cui è soluzione il *valore limite* della frazione continua indefinita. Si vede facilmente (è un teorema di Lagrange) che questo succede ogniqualvolta la frazione continua è *periodica*, cioè si ripetono periodicamente le parti intere, come in $\{ \dots ; \dots, \dots, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, \dots \}$.

§ 6. Sviluppo in frazione continua di un numero reale qualunque.

Viceversa, è facile calcolare con questo strumento i valori approssimati di una qualunque radice quadrata. Basta usare il primo procedimento che abbiamo esposto per le frazioni, ricorrendo alla *parte intera*. Scriviamo, per esempio

$$\sqrt{11} = \mathbf{3} + (\sqrt{11}-3)$$
$$1/(\sqrt{11}-3) = (\sqrt{11}+3)/2 = \mathbf{3} + (\sqrt{11} - 3)/2$$
$$2/(\sqrt{11} - 3) = (\sqrt{11}+3) = \mathbf{6} + (\sqrt{11} - 3)$$
$$1/ (\sqrt{11}-3) = (\sqrt{11}+3)/2 = \mathbf{3} + (\sqrt{11} - 3)/2$$
$$2/(\sqrt{11} - 3) = (\sqrt{11}+3) = \mathbf{6}+(\sqrt{11} - 3)$$
$$\dots\ \mathbf{3}\ \dots$$

Allora $\sqrt{11} = \{3;\ 3, 6, 3, 6, \dots\}$ e, per brevità, scriveremo $\sqrt{11} = \{3;\ \overline{3,6}\}$.
Se ora costruiamo la solita tabella

		3	3	6	3	6	...
0	1	3	10	63	199	1257	...
1	0	1	3	19	60	379	...

nel valore 1257/379 non abbiamo soltanto *un valore approssimato* di $\sqrt{11}$; sappiamo anche valutare l'errore che commettiamo. Infatti, visto che le oscillazioni si smorzano, l'errore non può superare l'ampiezza della prossima oscillazione, che vale $| 1257/379 - p_{n+1}/q_{n+1} | = 1/ 379 * q_{n+1} < 1/379 \cdot 379 < 0{,}00001$ e quindi ben cinque cifre decimali sono esatte!

Come si vede, l'algoritmo è molto rapido, e soprattutto consente un controllo significativo dei singoli passi, controllo che è meno agevole in molti altri procedimenti di calcolo (per esempio in quello che un tempo si insegnava per estrarre la radice quadrata nelle scuole secondarie).

Con riferimento alla nozione di limite, che tradizionalmente richiede il difficile gioco degli ε, δ (*assegnato arbitrariamente* ε *si può trovare un* δ *tale che...*) il citato controllo dell'errore significa appunto che il valore δ si può in questo caso effettivamente calcolare a partire dal valore di ε. Così l'argomento torna utile per gettar luce su una delle definizioni più insidiose dell'usuale programma di liceo.

Lo sviluppo in frazioni continue di importanti numeri irrazionali porta a varie sorprese. Anzitutto, la *periodicità* che abbiamo incontrato negli sviluppi di $\sqrt{2}$ e della sezione aurea non è accidentale. Lagrange dimostrò che lo sviluppo è periodico se e solo se il numero in questione è radice di un polinomio di 2° grado a coefficienti interi.
Alcune radici quadrate hanno sviluppi con periodo breve, per esempio $\sqrt{2}=\{1;\overline{2}\}$ $\sqrt{10}=\{3;\overline{6}\}$ $\sqrt{101}=\{10;\overline{20}\}$ ... e, in generale, $\sqrt{n^2+1}=\{n;\overline{2n}\}$.
In altri casi il periodo è lungo, e non è nota una formula che ne determini la lunghezza.
Quanto ai numeri trascendenti, si nota una curiosa regolarità nello sviluppo della base naturale dei logaritmi:

$$e = \{ 2;\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 8,\ 1,\ 1, \ldots\}$$

Se invece si sviluppa π si trova

$$\pi = \{ 3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots\}$$

che non presenta alcuna regolarità. Arrestandosi alle prime convergenti si trovano i valori approssimati

$$\{3;\ 7\} = 22/7 = \pi + 0{,}00126\ldots$$

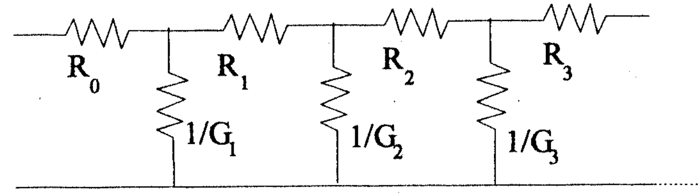
$$\{3;\ 7,\ 15,\ 1\} = 355/113 = \pi + 0{,}00000026\ldots$$

§ 7. Altre applicazioni.

1) Il problema di trovare un rapporto tra numeri interi relativamente piccoli che approssimi bene un numero assegnato ha varie applicazioni pratiche. Alla fine del XVII secolo Huygens si occupò di orologeria e ingranaggi, e applicò le frazioni continue a un problema che oggi ha un analogo nella progettazione del *cambio* di un'automobile, o di un ciclista che debba scegliere con cura i *rapporti* per sfruttare al massimo la potenza della pedalata: si tratta di scegliere con cura il numero di denti nelle due ruote dentate a disposizione.

2) In vari casi interessa trovare numeri razionali *semplici* una cui potenza (n-esima) sia una potenza (m-esima) di 2. Citiamo la progettazione di una fotocopiatrice, di una memoria di calcolatore, di una scala musicale quasi-temperata basata su intervalli naturali.

3) Un settore in cui le frazioni continue hanno avuto un'imprevista applicazione è quello dei circuiti elettrici. Tutto nasce dal fatto, di verifica immediata, che un *circuito a scala* del tipo seguente



(che rappresenta bene, schematicamente, un cavo coassiale) ha un'impedenza d'ingresso che si calcola, formalmente, come frazione continua (infinita)
$\{R_0;\ G_1,\ R_1,\ G_2,\ R_2,\ G_3, \ldots\}$
Qui i valori delle resistenze R_i e delle ammettenze G_i possono non essere numeri interi, e anzi saranno in generale, numeri complessi.

5) A loro volta, le soluzioni di questo tipo di problemi tecnici forniscono insospettato aiuto a questioni teoriche: un problema geometrico-aritmetico che resisteva da secoli era quello di *suddividere un quadrato* in un mosaico di tanti quadrati diversi i cui lati hanno misura intera. Questo antico rompicapo era così difficile che per molto tempo lo si era considerato impossibile. Ora, per merito indiretto delle frazioni continue, si conosce una soluzione: il quadrato 175x175 si suddivide in 24 quadratini, che misurano da un minimo di 1x1 fino a un massimo di 81x81.

6) E' molto recente l'utilizzazione delle frazioni continue in ottica, e precisamente nell'*interferometria del tipo Fabry-Perot*.

7) Un altro famoso problema di teoria dei numeri che le frazioni continue risolvono è *l'equazione di Pell*, un problema di 2° grado da risolversi negli interi:

$$x^2 - d\,y^2 = \pm 1 \qquad d \text{ intero}$$

Per esempio, il già descritto sviluppo per $\sqrt{2}$

		1	2	2	2	2	2	...
0	1	1	3	7	17	41	99	...
1	0	1	2	5	12	29	70	...

fornisce nei posti dispari le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - d\,y^2 = 1 \qquad (3,2) \qquad (17,12) \qquad (99,70) \qquad \ldots$$

e nei posti pari quelle dell'equazione

$$x^2 - d\,y^2 = -1 \qquad (1,1) \qquad (7,5) \qquad (41,29) \qquad \ldots$$

§ 8. Frazioni continue generalizzate. Teoria analitica

Fin dai tempi antichi si fece un uso euristico di frazioni continue diverse da quelle semplici, in cui al numeratore delle singole frazioni compaiono numeri interi diversi da 1. Per esempio le scritture

$$3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}} \qquad\qquad 4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8}}}$$

producono numeri razionali che approssimano bene rispettivamente $\sqrt{13}$ (Bombelli, 1572) e $\sqrt{28}$ (Cataldi, 1613). A riprova della notorietà di cui godevano questi problemi nell'ambiente matematico del secolo 18.o basterà dire che una frazione continua di questo tipo compare nella prima pagina del quaderno di Gauss (scritto a 18 anni, nel 1796), la stessa pagina che incomincia con la famosa risoluzione del problema della costruzione geometrica del poligono di 17 lati. La teoria di queste frazioni continue è più complicata, anche la convergenza non è garantita come nel caso delle semplici; ma il loro uso disinvolto - cioè senza dimostrazioni rigorose - portò assai precocemente a sviluppi come la formula

$$4/\pi = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\dots}}}}$$

dovuta a Lord Brouncker (Londra, 1650). Per avere un'idea di come possa nascere questo tipo di risultati occorre spendere qualche parola su una fertilissima generalizzazione delle frazioni continue semplici che si ottiene introducendo variabili in luogo di numeri, come nel seguente sviluppo (di Lambert , 1768)

$$\mathrm{tg}\, z = \cfrac{z}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\cfrac{z^2}{7-\dots}}}}$$

Se si confrontano questi sviluppi con quelli classici in serie di potenze, si trova un enorme divario di efficienza a favore dei primi. Per esempio, dopo tre passi, si trovano rispettivamente le approssimazioni

$$\mathrm{tg}\, z = z\frac{15-z^2}{15-6z^2} \quad \dots\dots \qquad\qquad \mathrm{tg}\, z = z+\frac{z^2}{3}+\frac{z^2}{5}+\dots$$

Qui l'errore introdotto per $z=\pi/4$ è 30 volte più piccolo nel primo sviluppo! Più in generale, lo sviluppo in serie di potenze di una funzione spesso la rappresenta soltanto nell'intorno di un punto, mentre, in molti casi, lo sviluppo in frazioni continue la rappresenta su tutto il piano (complesso). Questo fatto non deve sorprendere, data la presenza dei polinomi *al denominatore*. Tuttavia, a parte qualche risultato molto incoraggiante di questo tipo, una teoria generale che dia conto della situazione non è ancora stata fatta (cfr. per es. [3]).
Storicamente, questi aspetti, detti *analitici* , delle frazioni continue (perché pertinenti l'Analisi) ricevettero i primi forti impulsi da parte di Eulero, Lagrange, Gauss, Laplace, Legendre, Jacobi e quasi tutti gli altri grandi nomi della matematica dell'800. Nel nostro secolo il mago delle frazioni continue analitiche fu S.Ramanujan, genio indiano morto nel 1920 all'età di 32 anni, il cui lavoro (*Collected Papers*, Cambridge, 1927) è tuttora parzialmente incompreso e solo negli ultimi anni ha svelato alcuni dei suoi tesori nascosti.

Un'altra importante applicazione delle frazioni continue si è trovata nella *teoria dei controlli*. Nel classico problema di determinare la *stabilità* di un polinomio f(x) a coefficienti reali (se cioè la parte reale di tutti i suoi zeri è negativa) si può associare al polinomio una funzione razionale r(x)/s(x) che serve da *test di stabilità*. Per esempio

per il polinomio $\quad f(x) = a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

la funzione test è $\quad r(x)/s(x) = (a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4) \,/\, (a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0).$

Si sviluppa allora r(x)/s(x) in frazione continua (con un procedimento standard, che richiede un numero finito di passi, senza calcolare gli zeri) facendosi guidare dall'analogia tra la divisione euclidea negli interi e la divisione tra polinomi. Una volta ottenuta l'espressione

$$r(x)/s(x) = \{0;\, b_1x,\, b_2x,\, b_3x,\, \dots\}$$

tutto il problema si riduce alla verifica che i numeri b_i siano positivi.

Molto ci si aspetta da analoghi sviluppi, con riferimento a questioni di stabilità per i polinomi in più indeterminate.

§ 9. Sistemi dinamici, caos, numeri nobili.

Il concetto di *chaos* è entrato relativamente di recente nella fisica e nella matematica, per descrivere una quantità di fenomeni naturali, del tipo della turbolenza. Un capitolo della matematica che se ne occupa è quello dei

sistemi dinamici, settore attualmente in grande sviluppo.
Data una funzione f: $I \to I$ di un insieme I in sè (per esempio un intervallo reale, $I = [0,1]$), si può seguire il percorso (l'*orbita*) di un punto quando la funzione f si applica iteratamente alla sua immagine

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f} f(f(x)) \xrightarrow{f} f(f(f(x)))) \xrightarrow{f} \dots\dots \to f^n(x) \to \dots$$

La funzione f si dice *caotica* se succedono i seguenti fatti
1) (imprevedibilità). Esiste qualche $\varepsilon > 0$ tale che

per ogni $x \in I$ e per ogni intorno J di x
esistono $y \in J$ e n (numero naturale) tali che
$| f^n(x) - f^n(y) | > \varepsilon$.

Intuitivamente, pur di attendere un gran numero di iterazioni, certe coppie di punti inizialmente vicinissimi si sono allontanati abbastanza.
2) (indecomponibiltà). Per ogni coppia di sottoinsiemi aperti $I \supseteq U, V$
esiste n (numero naturale) tale che $f(U) \cap V \neq \varnothing$.
Intuitivamente, i punti si spostano da una zona, piccola a piacere, a qualsiasi altra zona.
3) (questo è un elemento di regolarità). E' denso in I l'insieme dei punti periodici, cioè di quei punti z per i quali
esiste n tale che $f^{n+k}(z) = f^k(z)$ per ogni $k>k_0$.
La teoria delle frazioni continue semplici dà una mano a quella dei sistemi dinamici, perchè fornisce un eccellente modello numerico di una funzione caotica. Si tratta della cosiddetta *funzione di Gauss*, definita come segue
$f(0) = 0$; $f(x) : (1/x) - [1/x]$ se $x \neq 0$.

Per esempio, uno sviluppo in frazioni continue del tipo già considerato

$22/17 = \mathbf{1} + 5/17$
$17/5 = \mathbf{3} + 2/5$
$5/2 = \mathbf{2} + 1/2$
$2/1 = \mathbf{2} + 0/1$

produce l'orbita $5/17 \to 2/5 \to 1/2 \to 0 \to 0 \to 0 \dots$
Sappiamo già (Lagrange) che i punti periodici sono del tipo $\sqrt{11}$, $(1+\sqrt{5})/2$ ecc. (cfr.§ 5). Con riferimento a questo contesto, tra i punti periodici risultano particolarmente interessanti i numeri del tipo

$$\{a_0; a_1, \dots a_n, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

che sono stati chiamati *numeri nobili*; tra essi *il più nobile*, come sappiamo, è il numero d'oro {1; 1, 1, 1, ...}.

Recentemente gli astronomi, consultando i loro precisissimi dati sperimentali, hanno fatto una sorprendente scoperta. Si sa che gli anelli di Saturno sono un ammasso di corpi solidi (rocce e ghiaccio) che ruotano attorno alle lune di Saturno. Se si studiano i periodi orbitali di questi corpi e si confrontano con quelli delle lune si trovano soltanto numeri nobili; infatti tutti i corpi che ruotavano con periodi diversi da quelli (per esempio con rapporti razionali) sono stati spazzati via, a un certo momento, per effetto di risonanze dinamiche. La scoperta è stata commentata dicendo (cfr. [5], pag. 323):

la stessa stabilità del sistema solare dipende dalla nobiltà di almeno alcuni dei rapporti tra i periodi orbitali.

§ 10. Un programma per il calcolatore.

Le frazioni continue si prestano bene a una serie di esercizi di programmazione per le macchine calcolatrici, perché l'algoritmo necessario è particolarmente semplice. A titolo di esempio, riportiamo qui di seguito un programma in BASIC che risolve una variante del problema posto al § 3 mediante i seguenti passi:

1) chiede l'inserimento di due numeri interi
$a = ?$ $b = ?$
2) scrive il numero a/b come frazione continua, cioè risponde con
$a/b = \{r_0 ; r_1 ; \dots , r_n \}$
3) trova un valore minimo positivo per l'espressione ax+by, e quindi scrive d = M.C.D.(a,b) nella forma ax+by.

```
REM Scrive a/b come frazione continua e risolve ax+by=(a,b)
INPUT "a="; a: INPUT "b="; b: LPRINT "a="; a; "b="; b
LPRINT: LPRINT " n      z      p      q      p/q": LPRINT:
LET x=a: y=b: s=0: t=1: u=1: v=0: n=0: i=1
10 LET z=INT(x/y): r= x MOD y: p= u*z + s: q = v*z + t
LPRINT n; "    "; z; "    "; p; "    "; q; "    "; p/q
LET x=y: y=r: s=u: t=v: u=p: v=q: n=n+1: i= -1
IF y>0 THEN GOTO 10: LPRINT: LPRINT:
LPRINT a; "*"; t; "-"; b; "*"; s; "= +- "; x : END
```

§ 11. Conclusione.

Nel § 1 ci siamo posti una domanda imbarazzante:
Perché le frazioni continue sono ignorate nell'Università?
Una possibile risposta sta nel fatto che la matematica delle nostre scuole e università è troppo *dialettica* e poco *costruttiva*. E' un'opinione discutibile e esige una spiegazione. Per *dialettica* (in senso ... platonico) intendo la mate-

matica della dimostrazione, del vero e del falso, dell'esistenza e unicità: un raffinato esercizio intellettuale in cui il vero progresso è affidato alla mente superiore di pochi eletti, e si misura spesso in termini di generalità dei risultati. La matematica dialettica ha certamente espresso un suo capolavoro, per esempio, nella geometria euclidea; si è poi assopita per millenni e si è risvegliata con l'illuminismo. Da Gauss in poi ha fatto enormi progressi, soprattutto nel nostro secolo.

Esiste però anche una matematica *costruttiva* o algoritmica, che inventa e perfeziona procedure di calcolo, spesso suggerite da problemi pratici: progetta e costruisce come fanno gli ingegneri, indaga sperimentalmente come fanno i fisici, senza troppe fisime dimostrative. Il progresso della matematica algoritmica è affidato non solo all'ingegnosità ma anche alla potenza dei suoi strumenti di calcolo. Ecco perché, dopo un periodo di apparente letargo, la matematica euristica e costruttiva sta tornando fuori, nella ricerca scientifica internazionale, spinta dagli straordinari progressi dei calcolatori, che ogni giorno si rinforzano, ridicolizzando quelli del passato anche recente. Nel nostro ambiente matematico questo argomento non è ancora molto sentito; eppure, piaccia o non piaccia, è questo tipo di matematica che ha dato il maggior contributo al progresso scientifico (si pensi, per esempio, alle esplorazioni dello spazio). Questo fatto, già di per sè, giustificherebbe una maggiore attenzione alla matematica costruttiva nei curricula universitari. Ma in realtà il matematico algoritmico, nel suo percorso euristico, non di rado incappa in vere meraviglie della natura, che rapidamente diventano oggetto dell'attenzione dei colleghi dialettici. Così nascono nuovi oggetti di speculazione astratta, che a loro volta producono nuove idee e nuovi metodi. La vitalità della matematica dipende in gran parte dalla capacità di dare e prendere dalle altre discipline. Forse il tempo proverà che la specializzazione e l'isolamento intellettuale sono stati tra i peggiori malanni del nostro secolo. Anche la scuola ne dovrebbe tener conto.

BIBLIOGRAFIA

[1] E.Bertolotti, *La scoperta delle frazioni continue*, Bollettino della Mathesis, **11**, n.5 (1919), p.101.

[2] R.M.Corless - *Continued fractions and Chaos*. Amer. Math. Monthly, Marzo 1992, p.203-214.

[3] W.B.Jones - W.J.Thron, *Continued Fractions* (Analytic theory and applications) vol.11 in *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Addison-Wesley, 1980.

[4] C.D. Olds, *Frazioni continue*, Zanichelli, 1968.

[5] M.R.Schröder, *Teoria dei numeri (nelle scienze e nelle comunicazioni)* , Muzzio, 1987.

[6] V.Vita, *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unità d'Italia al 1986*, Pitagora, 1986.

ALGORITMI PER I NUMERI PRIMI

Giulio Cesare Barozzi *

I numeri primi hanno affascinato i matematici fin dall'antichità; essi sono gli "atomi" di cui sono composti i numeri naturali rispetto all'operazione di moltiplicazione. I problemi relativi ai numeri primi sono innumerevoli; il più antico è forse quello posto già dai matematici greci:

- esistono infiniti numeri primi, oppure da un certo numero naturale in poi tutti i numeri sono composti?

Nella proposizione 20 del Libro 9 degli *Elementi* Euclide risolve la questione a favore della prima alternativa (torneremo su questo punto tra poco).

Se i numeri primi ordinati per valori crescenti costituiscono una successione, perché non esaminare la successione delle differenze tra ciascun numero primo e il suo precedente? Poiché, ad eccezione del numero 2 (il più piccolo numero primo) tutti i numeri primi sono dispari, si tratterà di una successione che contiene esclusivamente valori pari, ad eccezione del primo elemento $1 = 3 - 2$. Uno sguardo ai primi 250 termini di tale successione di differenze mostra un andamento quanto mai irregolare. Due domande si offrono spontaneamente:

- esistono coppie di numeri primi *gemelli*, cioè numeri che differiscono di 2 unità?

In corrispondenza di tali coppie l'istogramma delle differenze raggiunge il valore minimo (ad eccezione del primo elemento), che è appunto 2. Ci si chiede dunque: esistono infiniti valori uguali a 2 nella successione delle differenze? Non si conosce la risposta a tale domanda, anche se la congettura è che la risposta sia affermativa.

Altra questione: la successione delle differenze è limitata superiormente o illimitata superiormente, cioè esiste una limitazione superiore per la differenza tra due primi consecutivi, oppure al contrario si possono trovare primi consecutivi distanziati tra loro tanto quanto si vuole? La risposta corretta

---

* C.I.R.A.M., Università di Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del progetto di ricerca del MURST "Ricerche di Matematica ed Informatica per la Didattica" per l'anno 1992.

questa volta è la seconda: si possono trovare sequenze arbitrariamente lunghe di numeri consecutivi tutti composti, e dunque coppie di primi consecutivi distanziati tra loro più di una quantità prefissata ad arbitrio.

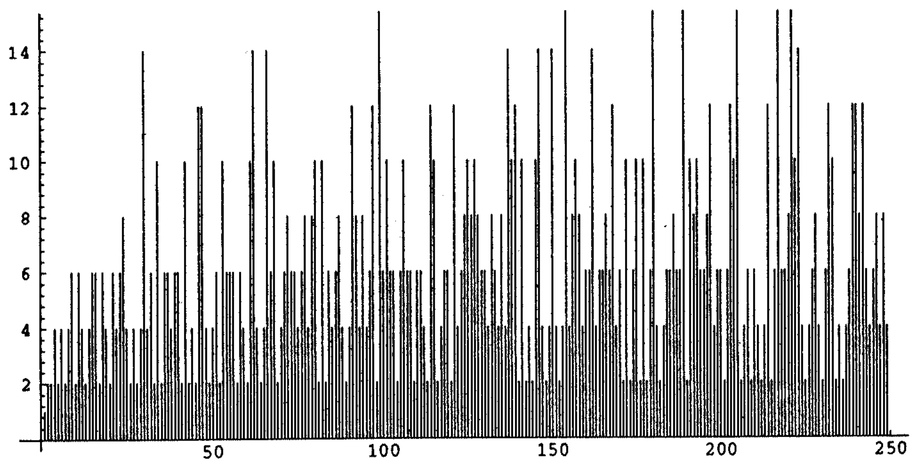


Figura 1 – Successione delle differenze tra numeri primi successivi.

La dimostrazione è così semplice che possiamo senz'altro riportarla: basta esaminare gli $n-1$ numeri consecutivi

$$n!+2,\ n!+3, \dots,\ n!+n,$$

per convincersi che essi sono tutti composti in quanto divisibili, nell'ordine, per $2, 3, \dots, n-1, n$.

Torniamo alla domanda iniziale: esistono infiniti numeri primi? Si dice di solito che la proposizione citata degli *Elementi* risponde affermativamente a tale domanda fornendo una dimostrazione per assurdo. In realtà, se si esamina il testo di Euclide, si vede che la proposizione in questione dice letteralmente

• i numeri primi sono in quantità maggiore di una qualsivoglia quantità prefissata,

proposizione da cui manifestamente discende l'esistenza di infiniti primi. Ma la dimostrazione è *costruttiva* nel senso che Euclide fornisce una procedura in base alla quale, dati k primi distinti

$$p_1,\ p_2, \dots,\ p_k$$

(non si tratta necessariamente dei primi k termini della successione dei numeri primi), viene esibito almeno un primo distinto da essi. E' ben noto che basta scomporre in fattori primi il numero

$$n := p_1 p_2 \dots p_k + 1$$

per avere uno o più primi distinti da quelli inizialmente assegnati. Ad esempio, dati i numeri primi $3, 5, 7, 11$, il numero

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 1156$$

si fattorizza come $2^2 \cdot 17^2$. Dunque a partire dai numeri primi $3, 5, 7, 11$, siamo in grado di esibire i numeri primi 2 e 17 distinti da essi. Possiamo dunque affermare che la dimostrazione di Euclide è costruttiva *modulo* la scomposizione in fattori primi di ogni naturale ≥ 2.

Si vede dunque come l'algoritmo di scomposizione in fattori primi possieda una sorta di centralità nella teoria dei numeri. Il cosiddetto *teorema fondamentale dell'aritmetica*:

• ogni numero naturale ≥ 2 si può scrivere come prodotto di numeri primi, dove la fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei fattori

non si trova esplicitamente formulato in Euclide, anche se in tale opera ci sono gli strumenti per la sua dimostrazione. Si osservi che la parola "prodotto" deve essere intesa in senso lato, dando diritto di cittadinanza anche ai prodotti di un solo fattore (questi corrispondono evidentemente ai numeri primi).

La dimostrazione dell'*esistenza* della fattorizzazione in linea di principio non ammette difficoltà, se noi ammettiamo di sapere eseguire la *divisione intera* (detta anche *divisione euclidea*): dati i naturali n e $d > 0$ ammettiamo di saper determinare q e r tali che

$$n = qd + r, \quad 0 \leq r < d.$$

La determinazione di q e r a sua volta viene ricondotta ad una sequenza di sottrazioni successive.

Se noi ammettiamo di avere nella nostra "cassetta degli attrezzi" la divisione intera, sappiamo anche decidere se n è divisibile o meno per d (basta esaminare se il resto r è nullo oppure no) e dunque possiamo determinare tutti i divisori primi di n esaminando in sequenza gli interi consecutivi a partire da 2: ogni volta che si trova un divisore si sostituisce n con $q = n/d$ e non si passa al divisore successivo prima di aver constatato che il valore attuale del dividendo non è divisibile per il valore attuale del divisore di tentativo. Di certo non occorre esaminare divisori superiori al numero n inizialmente dato, dunque l'esecuzione di un numero finito di divisioni intere consente di risolvere il problema della fattorizzazione.

E' subito visto che il procedimento sommariamente descritto è di una singolare ingenuità: se i divisori di tentativo vengono esaminati in ordine crescente, ogni numero d che effettivamente divide n fornisce una coppia di divisori: d e $q = n/d$. Dunque posso arrestare l'esame dei divisori di tentativo non appena trovo che $q \leq d$. Se un divisore d di n dà luogo ad un quoziente q minore dello stesso divisore, tale divisore è già stato trovato sotto forma di quoziente. In altri termini, posso arrestare l'esame dei divisori di tentativo quando il quadrato del divisore attuale supera il valore attuale del numero da fattorizzare.

Altrettanto ingenua è l'idea di esaminare tutti i numeri naturali a partire da 2: è sufficiente esaminare gli elementi di una successione di divisori di tentativo

$$d_0 := 2 < d_1 < d_2 < \ldots < d_k < d_{k+1} < \ldots$$

contenente tutti i numeri primi. L'idea più semplice è quella di esaminare la successione di divisori di tentativo

$$2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots,$$

cioè quella costituita da 2 e da tutti i numeri dispari, in base all'ovvia osservazione che tutti i numeri primi, ad eccezione di 2, sono dispari.

Prende dunque forma uno schema di algoritmo per la scomposizione in fattori primi di un assegnato numero naturale N, che può essere descritto mediante la seguente pseudo-codifica:

0. $n \leftarrow N, k \leftarrow 0, d \leftarrow d_0\ (= 2)$
1. finché $d^2 \leq n$, ripetere:
1.1 se $n \bmod d = 0$,
allora:
1.1.1 stampare d,
1.1.2 $n \leftarrow n/d$
altrimenti:
1.2.1 $k \leftarrow k + 1$,
1.2.2 $d \leftarrow d_k$ (* passaggio al divisore successivo *)
2. se $n > 1$, allora: stampare n
3. fine

Il problema si sposta: come costruire in maniera efficiente una successione di divisori di tentativo contenente tutti i numeri primi. Evidentemente tale successione sarà tanto migliore quanto meno numerosi saranno i numeri composti presenti in essa, in quanto ogni numero composto genera un tentativo

di divisione in realtà inutile: se la mia successione contiene sia 3 che 9, è inutile tentare di dividere per 9 ciò che è rimasto di un numero che è già stato "sgonfiato" del fattore 3.

Due sono i casi limite:

- la successione dei divisori di tentativo contiene tutti i naturali a partire da 2,
- la successione dei divisori di tentativo contiene solo numeri primi.

Qui si profila una situazione interessante dal punto di vista dell'Informatica: man mano che si passa da una successione ingenua (come quella contenente tutti gli interi) ad una successione più sofisticata, aumenta la *complessità* della generazione di tale successione. Occorre anche distinguere tra due possibilità: vogliamo tenere bassa la complessità *spaziale* (in termini meno tecnici: la quantità di memoria richiesta per la generazione della successione dei divisori di tentativo), oppure siamo disposti ad aumentare tale memoria al crescere dell'ordine di grandezza dei numeri che vogliamo fattorizzare?

E' chiaro che se abbiamo preventivamente memorizzato i numeri primi in ordine crescente da $p_1 = 2$ fino a p_k possiamo certamente fattorizzare tutti i numeri naturali fino al quadrato di p_k stesso. In questo caso la successione dei divisori di tentativo è ottimale (nessun tentativo di divisione inutile) ma l'occupazione di memoria cresce al crescere del numero n che vogliamo fattorizzare. Per contro, se una successione di divisori di tentativo può essere generata in *modo ricorsivo*, non si rende necessario un aumento di memoria per determinare quanti si vogliano termini della stessa successione.

Ad esempio, per generare la successione

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, \ldots, \tag{1}$$

cioè quella contenente tutti i naturali ≥ 2 che non sono multipli né di 2 né di 3 (dunque primi rispetto a 6), si può utilizzare il seguente schema ricorsivo, che mette in evidenza l'incremento h necessario per passare da un divisore all'altro una volta "a regime":

1. $d \leftarrow 2, h \leftarrow 2$
2. se $d \leq 3$,
allora
2.1 $d \leftarrow 2 \cdot d - 1$
altrimenti
2.2 $d \leftarrow d + h$
2.3 $h \leftarrow 6 - h$

La spiegazione del funzionamento di tale algoritmo (la cui complessità spaziale evidentemente non aumenta al crescere dei divisori di tentativo generati) sta nel fatto che, se si esamina la successione delle differenze tra i termini della successione (1), si riconosce che essa è periodica a partire dal terzo elemento, con periodo dato dalla coppia $\{2,4\}$. Infatti tale successione di differenze è

$$1,2,2,4,2,4,2,4,\ldots \tag{2}$$

Il fatto interessante è che tale fenomeno di periodicità dopo un "antiperiodo" iniziale si manifesta per ogni successione di divisori di tentativo che sia generata da partire dai naturali ≥ 2 eliminando i multipli dei primi $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Una tale successione è quella che si ottiene applicando alla successione dei numeri naturali ≥ 2 esattamente k passi del *crivello di Eratostene.*

Esaminiamo i casi seguenti:

• eliminazione dei multipli di 2:

successione: $2,3,5,7,\mathbf{9},11,\ldots$

differenze: $1,2,2,2,\ldots$

antiperiodo: $\{1\}$, periodo: $\{2\}$

• eliminazione dei multipli di 2 e di 3:

successione: $2,3,5,7,11,13,17,19,23,\mathbf{25},29,\ldots,$

differenze: $1,2,2,4,2,4,2,4,\ldots,$

antiperiodo: $\{1,2\}$, periodo $\{2,4\}$,

• eliminazione dei multipli di 2, di 3 e di 5:

successione: $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,$
$41,43,47,\mathbf{49},53,59,61,67,$
$71,73,\mathbf{77},79,83,89,\mathbf{91},97,\ldots$

differenze: $1,2,2,4,2,4,2,4,6,2,6,$
$4,2,4,2,4,6,2,6,$
$4,2,4,2,4,6,2,6,\ldots$

antiperiodo: $\{1,2,2\}$, periodo: $\{4,2,4,2,4,6,2,6\}$.

Negli elenchi precedenti i numeri composti sono stati evidenziati in grassetto. Si osservi il fatto seguente: in ogni caso la somma degli incrementi del periodo (detto anche "ruota" degli incrementi) coincide con il prodotto dei numeri primi i cui multipli vogliamo evitare. Ad esempio

$$4+2+4+2+4+6+2+6=30=2\cdot3\cdot5.$$

La programmazione di un algoritmo di fattorizzazione che utilizzi gli incrementi nel modo sopra descritto è particolarmente agevole se il linguaggio di

programmazione che si utilizza possiede buone istruzioni per il trattamento delle "liste". Ad esempio, se si vogliono utilizzare solo i divisori di tentativo primi rispetto a 30, possiamo definire una lista con tutti gli incrementi

$$\texttt{incrementi} = \{1,2,2,4,2,4,2,4,6,2,6\}$$

ed una seconda lista in cui poniamo soltanto gli incrementi della ruota:

$$\texttt{incrementibis} = \{4,2,4,2,4,6,2,6\}$$

Gli incrementi vengono prelevati inizialmente dalla lista `incrementi` a cominciare dal primo elemento; quando tale lista è stata svuotata essa viene sostituita dalla lista `incrementibis`; e così di seguito fino al termine dell'algoritmo.

Ecco una traduzione delle idee precedenti nel linguaggio del sistema *Mathematica* di S. Wolfram.

```
fattori[n_]:=
  Block[{numero = n,
    incrementi = {1,2,2,4,2,4,2,4,6,2,6},
    incrementibis = {4,2,4,2,4,6,2,6},
    divisore = 2,
    listafattori = { }
    },
  While[divisore^2 <= numero,
    If[Mod[numero,divisore] == 0,
      AppendTo[listafattori,divisore];
      numero = numero/divisore,
      If[incrementi == { }, incrementi = incrementibis];
      divisore = divisore+First[incrementi];
      Delete[incrementi,1]
    ]
  ];
  If[numero > 1, AppendTo[listafattori,numero]];
  listafattori
]
```

Inutile dire che il sistema citato dispone di una funzione già implementata, `FactorInteger`, con la quale si può sperimentare la fattorizzazione di interi di grandezza moderata. E' estremamente istruttivo sperimentare con numeri diversi: ci si rende conto del fatto che la complessità della fattorizzazione non dipende tanto dalla grandezza del numero quanto dalla sua "struttura". Alcuni esempi significativi:

```
Timing[FactorInteger[12345678900987654321]]
{3.55 Second, {{3, 2}, {11, 1}, {2153, 1},
{57920960187043, 1}}}
Timing[FactorInteger[12345678901234567890]]
{0.616667 Second, {{2, 1}, {3, 2}, {5, 1}, {101, 1},
{3541, 1}, {3607, 1}, {3803, 1}, {27961, 1}}}
Timing[FactorInteger[100!]]
{0.416667 Second, {{2, 97}, {3, 48}, {5, 24}, {7, 16},
{11, 9}, {13, 7}, {17, 5}, {19, 5}, {23, 4}, {29, 3},
{31, 3}, {37, 2}, {41, 2}, {43, 2}, {47, 2}, {53, 1},
{59, 1}, {61, 1}, {67, 1}, {71, 1}, {73, 1}, {79, 1},
{83, 1}, {89, 1}, {97, 1}}}
```

Si osservi che 100! è un numero di 158 cifre.

Tornando al caso generale, è chiaro che occorre trovare un ragionevole compromesso tra la bontà della successione dei divisori di tentativo e la difficoltà richiesta per generarla. Se si sceglie la strategia sopra delineata, i fattori primi del numero n da fattorizzare vengono determinati in ordine di grandezza crescente. Dunque numeri che siano primi, oppure prodotti di due numeri primi approssimativamente dello stesso ordine di grandezza, sono estremamente ardui da fattorizzare.

Proprio sulla inerente complessità del problema della fattorizzazione sono basati i cosiddetti *codici crittografici a chiave pubblica*. Senza addentrarci in particolari per i quali occorrerebbe maggior tempo (v. bibliografia [1], [4]), possiamo dire che l'idea di base di tali codici consiste nel costruire una *funzione di codifica*, cioè una funzione che consenta di passare dal messaggio in chiaro a quello criptato, la quale richiede soltanto la conoscenza di un numero $n = p \cdot q$, prodotto di due primi p e q "grandi" (ad esempio di un centinaio di cifre ciascuno), mentre la funzione inversa che consente la decodifica richiede la conoscenza dei due fattori p e q. Il costruttore del codice può rendere di pubblico dominio il numero n, consentendo così a chiunque di codificare un messaggio, ma mantiene riservati i fattori p e q consentendo dunque solo alle persone autorizzate la decifrazione del messaggio. La filosofia su cui si basa il tutto è proprio l'estrema difficoltà di fattorizzare un numero di 200 o più cifre che sia il prodotto di due primi di 100 cifre.

Il metodo di fattorizzazione che abbiamo descritto fino a questo punto potrebbe definirsi "amatoriale". Proprio l'interesse suscitato dai codici crittografici a chiave pubblica, con le ovvie implicazioni di carattere bancario,

militare ecc., ha risvegliato un grandissimo interesse nel campo della teoria computazionale dei numeri interi (potremmo parlare di "aritmetica computazionale").

Vorrei descrivere almeno un algoritmo più sofisticato di quello descritto in precedenza. Si tratta di un algoritmo probabilistico (o come anche si dice di un *metodo Monte Carlo*) per la determinazione di un fattore primo p di un numero "grande" n. Questo numero può essere già stato "liberato" di eventuali fattori primi "piccoli" operando su di esso con un algoritmo di fattorizzazione "amatoriale" (del tipo cioè appena descritto), arrestato ai divisori di tentativo non superiori ad una soglia prefissata. L'algoritmo probabilistico di cui voglio parlare è dovuto a H. Pollard (1975).

Ma prima di descrivere l'algoritmo di Pollard devo dedicare un po' di tempo ad un argomento apparentemente fuori tema, e cioè all'algoritmo di R.W. Floyd per la determinazione delle caratteristiche di una successione periodica.

Sia data una funzione $f : D \to D$, dove D è un insieme finito, ed un punto iniziale ad arbitrio $x \in D$. Consideriamo la successione definita ricorsivamente

$$x_0 = x,\ x_1 := f(x_0),\ x_2 := f(x_1), \ldots,\ x_{i+1} := f(x_i), \ldots.$$

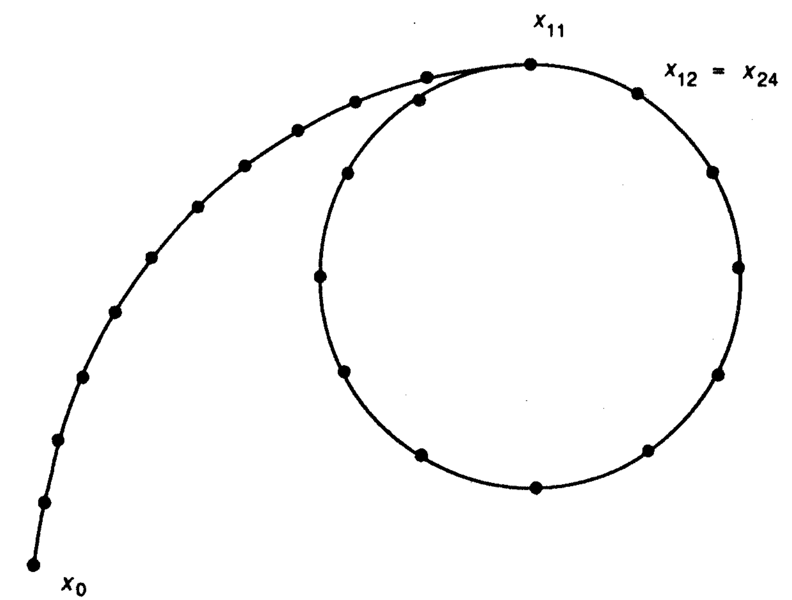


Figura 2 – Una funzione $f : D \to D$, con D finito, genera una successione $x_{i+1} := f(x_i)$ (x_0 fissato in D) che è periodica a partire da un certo termine x_t.

Prima o poi essa è periodica in base al principio della "cassettiera" (o principio della "piccionaia"): se abbiamo n cassetti e cominciamo a mettere oggetti nei cassetti, prima o poi mettiamo due oggetti nello stesso cassetto, siano l'oggetto di indice t e l'oggetto di indice $t + c$. Poiché la legge di introduzione nei cassetti è ricorsiva (il cassetto in cui metto l'oggetto di indice $i + 1$ dipende solo dal cassetto in cui ho messo quello di indice i) da t in poi oggetti i cui indici differiscono della quantità c finiscono nello stesso cassetto. Qui c è la lunghezza del periodo (o *ciclo*) e t è la lunghezza dell'antiperiodo.

Si pensi al caso della successione dei resti che vengono generati quando si determina la rappresentazione decimale di un numero razionale p/q. In questo caso è facile determinare la lunghezza dell'antiperiodo e quella del periodo a partire da un esame del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che rappresenta tale numero.

Tornando al caso generale: come si possono determinare i numeri t e c?

L'idea di Floyd è quella di percorrere il circuito in figura a partire dal punto iniziale x mettendo in competizione una tartaruga che si muove di un passo alla volta

$$y = f(y),$$

con una lepre che si muove di due passi alla volta

$$z = f(f(z)),$$

fino a quando la lepre ha nuovamente raggiunto la tartaruga sul circuito. Possiamo scrivere il seguente frammento di programma in Pascal:

```
y := x; z:=x; c:=0;
repeat
  y:=f(y); z:=f(f(z)); c:=c+1;
until y=z;
```

Quando $y = z$ la lepre ha raggiunto la tartaruga in un qualche punto del ciclo. Più precisamente esse s'incontrano quando la tartaruga ha raggiunto il valore x_n e la lepre il valore x_{2n}, dove n è il minimo multiplo intero del periodo, $n = kc$, che è maggiore o uguale a t:

$$n = kc \geq t.$$

Verifichiamo ora se $y = x$ (non dimentichiamo che x è il valore iniziale x_0). Se così è, allora $t = 0$ e la nostra successione presenta un "periodo puro" di lunghezza c. In caso contrario, poiché il valore ottenuto per c potrebbe essere un multiplo del periodo, facciamo fare ancora un giro alla tartaruga:


```
c:= 0;
repeat
  y:=f(y); c:=c+1;
until y=z;
```

A questo punto siamo certi che c è il periodo e che la tartaruga si è arrestata in corrispondenza di un termine x_n della successione, con n multiplo del periodo: $n = hc, h \in \mathbf{N}$.

Riportiamo ora la lepre al punto iniziale $x = x_0$ e azzoppiamola in modo che corra alla stessa velocità della tartaruga; facciamo ripartire entrambe: esse s'incontrano nel punto x_t.

```
z:=x; t:= 0;
repeat
  z:=f(z); y:=f(y); t:=t+1;
until y=z;
```

Il valore finale della variabile t fornisce la lunghezza desiderata dell'antiperiodo. Infatti dopo t iterazioni la lepre azzoppata ha raggiunto la posizione x_t e la tartaruga la posizione $x_{hc+t} = x_t$.

Ci manca una funzione periodica su cui sperimentare l'algoritmo. Una buona scelta è la funzione che costruisce una sequenza pseudo-casuale di naturali compresi tra 0 e $m - 1$, dove m è un modulo assegnato > 2, in base alla legge ricorsiva:

$$x \leftarrow (x \cdot x + a) \bmod m$$

Qui a è una costante $\neq 0$, ad esempio $a = 1$. In Pascal, scrivendo u al posto di x abbiamo

```
function f(u:integer):integer;
begin f:=(u*u+a) mod m end;
```

Ad esempio, per $m = 23$, $a = 1$, $x_0 = 1$, abbiamo la successione

$$1, 2, 5, 3, 10, 9, 13, 9, 13, 9, 13, 9, 13, 9, 13, 9, 13, \ldots;$$

chiaramente si ha $t = 5$, $c = 2$:

$$x_5 = x_7 = x_9 = \ldots = 9, \quad x_6 = x_8 = x_{10} = \ldots = 13.$$

Raccogliamo i frammenti precedenti e scriviamo una funzione in Pascal:

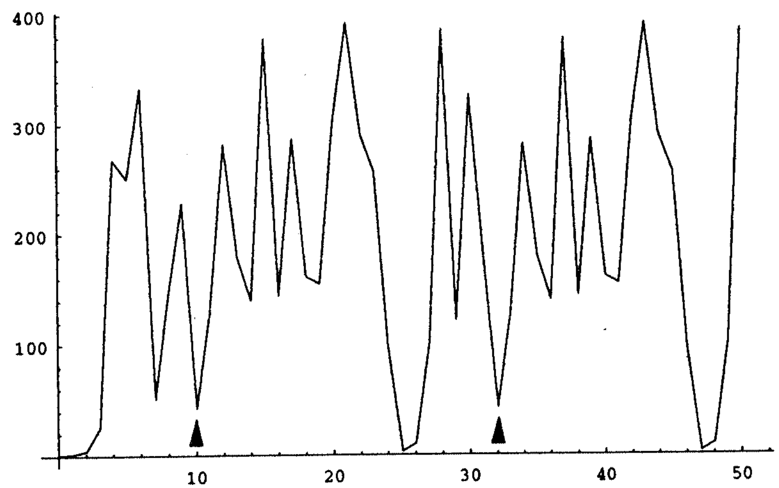


Figura 3 – Successione generata dalla funzione $f(x) = (x^2 + 1) \bmod 409$. Essa è periodica a partire dall'elemento x_{10} con periodo di lunghezza $c = 22$.

```
program CERCA_PERIODI;
var a,m,x,y,z,c,t:integer;
function f(u:integer):integer;
begin f:=(u*u+a) mod m end;
begin write('x,a,m ='); readln(x,a,m);
  y := x; z:=x; c:=0;
  repeat
    y:=f(y); z:=f(f(z)); c:=c+1;
  until y=z;
  if x=y then
  writeln('periodo puro di lunghezza c =',c)
  else
  begin
    c:=0;
    repeat y:=f(y); c:=c+1;
```



```
    until y=z;
    writeln('ciclo di lunghezza ',c)
    z:=x; t:= 0;
    repeat z:=f(z); y:=f(y); t:=t+1;
    until y=z;
    writeln('antiperiodo di lunghezza ',t)
  end
end.
```

Torniamo al problema della scomposizione di un intero, o più in generale, al problema della determinazione di un fattore primo p di un intero "grande" n. Possiamo pensare di avere già eleminato eventuali fattori "piccoli" di n mediante tecniche del tipo mostrato con l'algoritmo "amatoriale". Un modo per determinare un fattore p di n è quello di calcolare il MCD tra p ed n: tale MCD è un multiplo di p, che può ridursi a p stesso. Fortunatamente disponiamo di un eccellente algoritmo per il calcolo del MCD: l'algoritmo euclideo.

Supponiamo di sospettare che n sia composto (vedremo più oltre che disponiamo di una condizione sufficiente affinché un numero sia tale). Se disponessimo di un generatore di coppie di numeri a caso, (a, b) in modo tale che fosse $p \mid a - b$ (cioè p fosse un divisore di $a - b$) allora potremmo trovare p o un suo multiplo calcolando il $\mathrm{MCD}(a - b, n)$.

L'idea è quella di generare in modo ricorsivo una successione pseudo-casuale di numeri in modo da avere una buona probabilità di ottenere, dopo un numero limitato di iterazioni, due valori congrui modulo p.

Riprendiamo in considerazione la funzione che abbiamo mostrato a proposito dell'algoritmo di Floyd, scritta utilizzando il modulo n (il numero di cui vogliamo trovare un fattore p):

$$f(u) := (u * u + 1) \bmod n.$$

Sia (x_k) la successione definita ricorsivamente a partire da $x_0 = 1$ mediante la f:

$$x_1 := f(x_0),\ x_2 := f(x_1),\ x_3 := f(x_2), \ldots.$$

Sappiamo che si tratta di una successione "definitivamente periodica", con antiperiodo di lunghezza t e periodo di lunghezza c con $t + c \le n$, in quanto l'insieme dei resti possibili modulo n contiene gli n numeri $0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Consideriamo nuovamente la tartaruga (cioè la variabile pseudo-aleatoria x che assume in sequenza i valori x_k) e la lepre (cioè la variabile analoga y che assume in sequenza i valori x_{2k}). Introduciamo infine la variabile $z := |x - y|$.

Consideriamo una nozione più debole della periodicità: quella di periodicità modulo p, dove p è un divisore del modulo n. Con tale dizione intendiamo dire che, a partire da un indice t', si ha

$$x_{t'} \equiv x_{t'+c'} \bmod n$$

e quindi una relazione analoga sussiste per tutte le coppie seguenti di termini della successione (x_k) i cui indici differiscano di c'.

L'ultima implicazione non è del tutto banale. In realtà si ha, per ogni coppia di numeri naturali x e y,

$$x \equiv y \pmod p$$
$$\Downarrow$$
$$x^2+1 \equiv y^2+1 \pmod p$$

in quanto

$$y^2+1-(x^2+1) = (y-x)(x+y),$$

e $y-x$ è un multiplo di p per ipotesi.

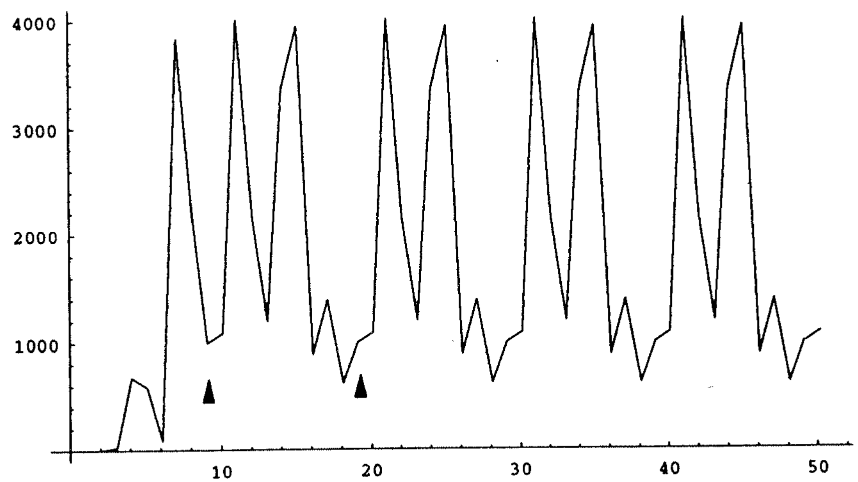


Figura 4 – Successione generata dalla funzione $f(x) = (x^2+1) \bmod 4087$. Essa è periodica a partire dall'elemento x_9 con periodo di lunghezza $c = 10$. Si osservi che $4087 = 61 \cdot 67$.

D'altra parte si ha

$$x^2+1 \equiv y^2+1 \pmod p$$
$$\Downarrow$$
$$(x^2+1) \bmod n \equiv (y^2+1) \bmod n \pmod p$$

in quanto il passaggio da un numero al suo resto modulo n equivale a sottrargli un multiplo intero di n, dunque un multiplo intero di p, che è un divisore di n.

Ora, mentre occorre arrivare al termine x_t per incontrare un valore che si ripete c indici più avanti, basterà, in generale, arrivare ad un indice $t' < t$ per incontrare un valore che è congruo modulo p rispetto ad un valore successivo della successione x_k. Con un'analisi probabilistica (simile a quella relativa al cosiddetto "problema dei compleanni") si può dimostrare che, se n ha effettivamente un divisore primo p, dopo aver calcolato circa $1.3 \cdot \sqrt{p}$ termini della successione, la probabilità di incontrare un termine che è congruo modulo p ad un termine seguente è molto prossima a 1. Non appena l'indice k assume un valore $\geq t'$ (punto dal quale la successione diventa periodica modulo p) e multiplo di c' (periodo modulo p), la differenza $x_{2k} - x_k$, cioè la differenza tra i valori assunti dalle variabili y e x è multiplo di p, e dunque p può essere rivelato calcolando il MCD tra $z = |y-x|$ e n.

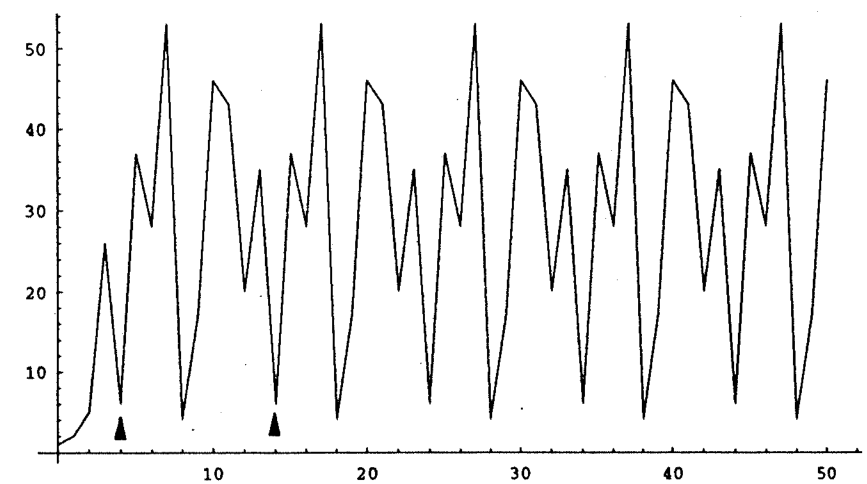


Figura 5 – Prendendo i resti modulo 61 dei termini della successione mostrata nella figura precedente, si trova che essa è periodica modulo 61 a partire dal termine x_4, con periodo di lunghezza $c' = 10$.

Ecco una pseudo-codifica dell'algoritmo implicito nella discussione precedente:

```
t ← x ← y ← 1;
while t = 1 do
```

```
begin
   x ← (x*x+1) mod n;
   y ← (y*y+1) mod n;
   y ← (y*y+1) mod n;
   z ← abs(x-y) mod n;
   t ← MCD(z,n)
end;
writeln(t);
```

L'algoritmo scritto è veramente tale, cioè termina in ogni caso dopo un numero finito di iterazioni, anche se il fattore p non viene trovato (si pensi al caso in cui p non esiste in quanto n è in realtà primo). Noi sappiamo infatti che quando k assume il minimo valore per cui $t \leq k = h \cdot c$, si ha $x_k = x_{2k}$ cioè $x = y$, dunque $z = 0$. A questo punto t assume il valore n e l'algoritmo termina senza aver prodotto alcun risultato.

Se disponiamo di un metodo per la fattorizzazione dell'intero n, sappiamo anche decidere se n è primo oppure no. Tuttavia il problema della primalità o meno di n è ben distinto da quello della fattorizzazione e meno complesso di esso; in termini più semplici: per dire se un numero è primo oppure composto non è necessario tentarne la fattorizzazione.

L'ideale sarebbe di poter disporre di una condizione e necessaria e sufficiente affinché n sia primo. Una tale condizione in realtà esiste ed è espressa dal cosiddetto *teorema di Wilson*:

- p è primo se e solo se $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p \iff (p-1)! \bmod p = p - 1$.

Si tratta di un teorema pubblicato nel 1770 da Waring nel libro *Meditationes algebraicae* e da lui attribuito a John Wilson (1741-1793); una dimostrazione completa si deve a Lagrange nell'anno seguente la pubblicazione. Sfortunatamente il teorema di Wilson non è di alcuna utilità per verificare se un numero n è primo oppure composto, non appena n è "moderatamente grande".

Supponiamo, ad esempio, di voler verificare il quinto numero di Fermat:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

Noi sappiamo che, contrariamente alla congettura dello stesso Fermat, si tratta di un numero composto

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$$

Se volessimo tentare di dimostrare ciò usando il teorema di Wilson dovremmo eseguire $(F_5 - 1)!$ prodotti e, per evitare la manipolazione di interi troppo grandi, altrettante congruenze modulo F_5 per verificare che il risultato finale non è $F_5 - 1$.

Ironicamente, un teorema dovuto allo stesso Fermat, gli avrebbe consentito di verificare che la sua congettura era falsa *senza fattorizzare* il numero F_5, impresa ardua se compiuta a mano. Il cosiddetto *piccolo teorema di Fermat* afferma infatti:

- Se p è primo e a non è un multiplo di p, allora $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Nel caso del numero F_5 la scelta $a = 3$ risulta decisiva, nel senso che 3 elevato a $F_5 - 1$ non dà resto 1 una volta diviso per F_5. Il teorema di Fermat dà una *condizione sufficiente affinché un numero sia composto*, e questo non è esattamente ciò che sarebbe desiderabile. In altre parole, se si sospetta che un numero p sia primo, lo si può sottoporre al test di Fermat con diverse scelte di $a < p$. Se il test non viene superato, il numero è certamente composto, se il test viene superato si dice che p è un *pseudo-primo* in base a. Dunque p potrebbe essere primo, ma potrebbe anche essere composto.

Si utilizza tale teorema per costruire dei test probabilistici di primalità. La filosofia consiste nel sottoporre il numero p, sospetto di essere primo, ad un numero sufficiente di test di Fermat con valori diversi di a, scelti in modo casuale. Poiché si riesce a valutare la probabilità che uno *pseudo-primo* sia in realtà composto, in base al teorema della probabilità degli eventi indipendenti, si può ridurre a valori molto prossimi a 0 la probabilità che un numero p che ha superato un numero considerevole di test di Fermat (ad esempio 50) sia in realtà composto.

Potremmo spiegare la filosofia dei test probabilistici di primalità con una metafora. Il test di Fermat equivale a sparare con una pistola ad un oggetto lontano, ad esempio un vaso, che può essere fatto di materiale fragile (di coccio) oppure molto resistente (di ferro). I diversi oggetti sono indistinguibili alla vista, in quanto dipinti dello stesso colore. Il bersaglio è abbastanza lontano, quindi non si riesce a capire se esso è stato colpito oppure no, ma si vede soltanto se esso va in frantumi. Se così è, vuol dire che esso era di coccio; se non va in frantumi, il vaso non è necessariamente di ferro: può darsi che non sia stato colpito. I test probabilistici di primalità consistono nel far sparare allo stesso bersaglio a più tiratori, scelti in modo casuale: se alla fine il vaso non s'è rotto, è molto probabile che sia di ferro.

La parabola è chiara: i vasi di coccio sono i numeri composti, quelli di ferro i numeri primi.

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

Monografie in italiano:

[1] G.C. Barozzi: *Aritmetica – Un approccio computazionale*, Zanichelli, Bologna (1987);

[2] N. Pintacuda, *Algoritmi elementari*, Muzzio, Padova (1986);

[3] M.R. Schroeder: *La teoria dei numeri*, Muzzio, Padova (1986); [nel frattempo il testo originale è uscito in seconda edizione: M.R. Schroeder: *Number Theory in Science and Communications*, Springer, New York-Berlin (1986)].

Articoli o raccolte di articoli:

[4] R. Schoof, *Fattorizzazione e criptosistemi a chiave pubblica*, Didattica delle Scienze e Informatica nella Scuola n. 137 (1988), 48-54;

[5] G. Lolli, C. Mangione: *Matematica e calcolatore*, Quaderni de Le Scienze n. 14 (1984);

[6] E. Picutti: *Uomini e numeri*, Quaderni de Le Scienze n. 18 (1984);

[7] R. Magari: *Numeri, caso e sequenze*, Quaderni de Le Scienze n. 45 (1989);

[8] F. Luccio, L. Pagli: *La matematica della complessità*, Quaderni de Le Scienze n. 67 (1992).

Monografie in lingua straniera:

[9] R. Allenby, E. Redfern, *Introduction to Number Theory with Computing*, E. Arnold, London (1989);

[10] A. Engel: *Mathematisches Experimentieren mit dem PC*, E. Klett, Stuttgart (1991).

Un classico riferimento per la teoria dei numeri è

[11] G.H. Hardy, E.M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, The Clarendon Press, Oxford (1968).

INIZIAZIONE ALLA LOGICA MATEMATICA

*Ruggero Ferro**

1) LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA COME DISCIPLINA MATEMATICA.

Sono convinto che l'efficacia di un'azione didattica dipenda essenzialmente dall'atteggiamento adottato dal docente nei suoi rapporti con lo studente.

Se fosse necessaria una riprova di ciò, citerò una esperienza personale che feci alcuni anni fa quando cercavo di valutare la convenienza di introdurre l'analisi classica attraverso i metodi non standard di Robinson. Per due anni il corso di Istituzioni di Matematiche per studenti di chimica fu diviso in due sezioni parallele: in una l'argomento fu presentato in forma tradizionale, nell'altra usando i metodi non standard. Ebbi così la possibilità di analizzare i test che volevano valutare l'apprendimento degli studenti ogni tre settimane. Ciò che l'osservazione evidenziò oltre ogni dubbio fu la dipendenza dei risultati dalla preparazione precedente degli studenti e dal tipo di dedizione ed attenzione offerta dai docenti nei singoli periodi, più che da ogni altro fattore.

Sicché, per migliorare l'insegnamento, ci si dovrebbe impegnare nel campo dell'organizzazione scolastica per dare a tutti la stessa preparazione, e nel campo psico-pedagogico affinché i docenti adottino il giusto atteggiamento nei rapporti con gli studenti. Così dovremmo rivolgerci a managers, psicologi e pedagoghi che conoscano la matematica, o, se ciò non è possibile, a matematici esperti nei campi del management, o della psicologia, o della pedagogia. Comunque, da questo punto di vista, la didattica della matematica non sarebbe una disciplina strettamente matematica. E ciò lo dico senza voler sminuire l'effettiva importanza della problematica appositamente appena sottolineata.

Ma non penso che questo punto di vista esaurisca il panorama della didattica della matematica.

Supposto di avere dei docenti con la dovuta preparazione psico-pedagogica per l'insegnamento, questi cosa dovranno fare per insegnare bene la matematica? Anzitutto cosa vuol dire insegnare bene la matematica?

Per rispondere a queste domande bisogna addentrarsi nel tema della

* Dipartimento di Matematica, Università di Lecce.

natura e del significato della matematica, di quali sono le sue motivazioni e i suoi punti fondamentali, quali gli sviluppi caratterizzanti. Di più, per agganciarsi alla didattica, bisogna precisare quali sono i molti problemi e le difficoltà principali, di carattere contenutistico, che gli studenti incontrano nell'avvicinarsi e nel comprendere certi concetti fondamentali.

Il mio compito ora non è certo quello di rispondere alle domande appena poste, che, d'altra parte, sono variamente affrontate sia da scuole di pensiero diverse che da diversi atteggiamenti pragmatici dei matematici. Tuttavia ho voluto notare questi aspetti anzitutto per rimarcare che, quando affronta i temi appena esposti, la didattica della matematica è, anche dal punto di vista della ricerca, una disciplina squisitamente matematica strettamente collegata con l'epistemologia della matematica; e poi per precisare che è proprio in quest'ottica che intendo svolgere la mia relazione.

A quest'ottica è di fatto legato anche l'insegnante quando prepara il suo piano didattico, ed anche nel presentare la singola lezione e nel dialogo con lo studente, perché in quei momenti deve aver già risposto alle domande sul senso della matematica, almeno per sè ed in prima approssimazione, fors'anche in maniera non esplicita e pienamente consapevole, non necessariamente la più sofisticata, la più esatta, la più completa. L'aver raggiunto una posizione in proposito è molto importante per l'insegnante perché l'idea che lo studente si fa della matematica è largamente influenzata da quella che l'insegnante gli trasmette.

Forse è proprio partendo da una analisi di come si trasmette una nozione di matematica che si può cercare di risalire alle difficoltà di presentazione di un valido concetto di matematica per arrivare a determinare quale approssimazione accettare almeno dal punto di vista operativo.

Una nozione di matematica si trasmette forse dando una definizione esplicita del suo campo d'azione o dei problemi che affronta o delle metodologie che utilizza? Non credo che si possa proporre una tale definizione di matematica, fosse altro perché la matematica è in continua evoluzione: oggi studia certi problemi, domani ne studierà degli altri, chissà con quali tecniche, essa si sviluppa e cambia di interessi. Una definizione esplicita congelerebbe i suoi confini che invece debbono essere labili e continuamente oltrepassabili.

Un tentativo per aggirare il problema può essere il seguente: la matematica è ciò che fanno i bravi matematici. Ma se i bravi matematici si mettono a giocare a scacchi, la matematica è giocare a scacchi? E poi, chi sono i bravi matematici? Coloro che fanno una buona matematica? Per evitare questo circolo vizioso si potrebbe pensare che la matematica sia quanto viene riconosciuto come tale della comunità dei matematici di professione che sono stati adeguatamente istruiti in materia. Una tale posizione sottolinea la dipendenza storica del concetto di matematica da quanto sviluppato nel passato e trasmesso attraverso l'istruzione, e una dipendenza, direi sociale, anche se limitata al gruppo degli specialisti, per il futuro riconoscimento delle evoluzioni attuali. Così si ribadisce il ruolo centrale dell'insegnamento nell'elaborazione del concetto di matematica, e la conseguente responsabilità degli insegnanti.

Ripeto che ora il mio compito non è quello di esplorare la natura della matematica. Tuttavia penso che qualche idea su come intendere la matematica possa emergere anche da certe osservazioni che cercherò di fare sul tema che mi è stato chiesto di svolgere: la logica matematica.

2) INIZIAZIONE.

Dopo questa premessa, vorrei chiarire cosa intendo per iniziazione. Sicuramente non sono i riti iniziatori di appartenenza a un club, o qualcosa del genere. Però, forse, ci andiamo un pò vicini.

L'esperienza che mi ha spinto a pensare all'iniziazione è questa: mi sono spesso trovato a parlare con varie persone di logica matematica, di qual è il ruolo della logica matematica, e cosa può fare la logica matematica per la didattica. Nonostante che costoro avessero letto e studiato alcuni testi riconosciuti come usuali e fondamentali per affrontare la tematica, c'erano delle difficoltà di dialogo: infatti interpretavano le cose che avevano studiato in modo totalmente diverso da come le avevo lette io, e si faceva fatica a capirsi. Magari si dicevano perfettamente d'accordo su di una affermazione, ma non appena si andava a vedere cosa si intendeva con quella affermazione, ci si accorgeva che i significati attribuiti erano totalmente diversi. In effetti il linguaggio naturale è molto ambiguo e sorge l'esigenza di chiarire meglio, di precisare il significato delle frasi usate. La massima chiarezza possibile viene raggiunta quando si possono definire esplicitamente le parole usate in una frase rifacendosi alla conoscenza precisa del significato dei termini usati nel definiente. Ma questa direzione non può essere seguita più che tanto perché porterebbe ad un regresso definitorio all'infinito. Pertanto ci dobbiamo accontentare di arrestare il processo definitorio a certi termini, detti primitivi, il cui significato è supposto noto anche senza una definizione.

Come comunicare il significato di un termine primitivo? In genere esso è ambiguo, e il suo significato è molto legato al contesto.

Per portare l'interlocutore a cogliere il significato di un termine che non possiamo definire bisogna familiarizzarlo con il contesto, fargli vivere le esperienze, anche solo mentali, che hanno portato all'individuazione di un certo significato espresso con quel termine: in una parola, bisogna iniziare l'interlocutore ad un certo ambito di osservazioni, ad una certa disciplina.

Ecco cosa intendo per iniziazione: quel complesso di operazioni atte a togliere, per quanto possibile, i fraintendimenti su certi termini primitivi, precisando cosa si vuol fare, chiarendo qual è il modo in cui leggere certe parole.

Per esemplificare, cercherò di indicare come iniziare alla logica matematica.

Il termine logica matematica (come il termine matematica) a buon diritto può essere considerato un termine primitivo, non definibile esplicitamente, ed anche ambiguo.

Vorrei allora iniziare con un elenco di modi con cui viene usata la parola logica, giusto per delineare il tipo di fraintendimenti a cui faccio riferimento.

Sicuramente l'elenco che sto per presentare non è completo.

Si sente dire "la logica del problema". Cosa vuol dire "la logica del problema"? Probabilmente è una frase che si potrebbe riformulare dicendo: "i dati del problema", "la situazione in cui ci troviamo".

Che dire della frase, già sentita, "entrare nella logica (di un problema)"? Vuol dire "considerare la situazione in cui ci troviamo".

"C'è una logica per", "c'è una logica in un certo comportamento", equivale a "ci sono delle motivazioni".

"E' logico che", può essere letto come "per me è evidente", "non capisco come possa essere diversamente".

Sto presentando usi della parola logica che hanno significati diversi e in cui la parola logica potrebbe essere facilmente eliminata.

"E' logicamente vero" è un'altra frase che si trova spesso che si potrebbe ridire come: "è vero", oppure come: "ci credo al di là di ogni possibilità di dubbio".

Ecco una frase che si trova spesso nei giudizi sugli studenti: "mostra buone (scarse) attitudini logiche". Che vuol dire? La mia prima risposta a cosa vuol dire la parola logica in questo contesto è: non so cosa vuol dire. Pensandoci un po e cercando delle approssimazioni potrei tentare con "è riflessivo", "è consapevole di ciò che dice", "ha un atteggiamento critico", "afferma a ragion veduta", oppure questa frase che è di moda: "si ricorda di collegare il cervello prima di mettere in azione la lingua". Sono tutte affermazioni sostanzialmente diverse, e tutte vogliono approssimare l'affermazione "ha buone capacità logiche". Però devo confessare di non sapere cosa vuol dire esattamente questa frase anche dopo averci pensato un pò.

Ma oltre alle frasi in cui occorre la parola logica, domandiamoci cos'è la logica.

Allora si sentono varie risposte. Alcuni dicono che la logica è la scienza del pensare, del ragionare. Certo, storicamente la logica è sorta come un tentativo di rispondere alla domanda come ragiona l'uomo. Però poi ci si è accorti che questo problema era mal posto, e che andava precisato più attentamente. La logica sicuramente non è psicologia, non è neurologia, non è il funzionamento fisico del cervello, nè il comportamento della psiche. Cos'è, allora? Cos'è il ragionare?

Molto spesso la logica viene vista anche come fondamento, giustificazione della conoscenza. Ma con un approccio di questo tipo andiamo subito incontro ad un circolo vizioso: se e fondamento della conoscenza come si fonda la conoscenza della logica? Su sè stessa?

Non credo che sia questo il modo di pensare alla logica. Possiamo chiaramente individuare le difficoltà che verrebbero dal considerare la logica come fondamento esaminando un esempio molto concreto. Nei testi scolastici spesso il programma di logica viene affrontato partendo dall'introduzione dei connettivi attraverso le tavole di verità. Mi pare che sotto sotto ci sia un'idea del tipo: attraverso questo metodo finalmente si riesce a dare un significato ai connettivi (e, o, se... allora..., eccetera), quasi che la logica spiegasse, fondasse, il significato dei connettivi. Niente di più falso! Infatti, per dare significato ai connettivi attraverso la tavola di verità, si ricorre ad una spiegazione che afferma che in certe situazioni di valori di verità delle componenti si ottiene un certo valore di verità mentre in altre situazioni si ottiene un altro valore. Cioè, per dare significato ai connettivi mediante le tavole di verità, si sono usati nel linguaggio che descrive le tavole di verità l' "e", il "se ... allora ...", l' "o", e, se non si sa già cosa vogliono dire queste parole (parole che hanno varie accezioni con vari significati, e bisognerà cercare di essere chiari su qual è l'accezione che si sta usando), non si è dato alcun significato alle tavole di verità e a quello che esse vogliono spiegare.

Questo approccio non spiega assolutamente il significato dei connettivi, ed eventualmente dei quantificatori.

C'è una grande aspettativa dall'insegnamento di logica che si può cogliere da esclamazioni come questa: "finalmente i ragazzi devono affrontare un insegnamento di logica: quegli zucconi che non capivano niente, ora studiando la logica, cominceranno ad imparare, perché cominceranno a saper ragionare!"

Questo atteggiamento si rifà proprio a quel circolo vizioso che pretende che la logica fondi la conoscenza. Qual è la base del ragionare? Non può essere la logica, altrimenti ricadiamo nel circolo vizioso già descritto.

Il guaio è che spesso ci si imbatte in queste aspettative da parte della gente. Ecco perché ci vuole un'iniziazione, per sgombrare il campo da queste aspettative, per mettersi d'accordo su ciò che si intende fare.

Non è il manuale di logica che spiega ciò. Nel manuale di logica c'è tutt'altro. Una volta sgombrato il campo da queste false aspettative, da queste mistificazioni, allora possiamo affrontare il manuale di logica, altrimenti prendiamo pan per focaccia.

Abbiamo visto alcuni usi, direi, impropri della parola logica, ma cos'è la logica?

Per i motivi spiegati non daremo una risposta esaustiva e completa, come non si dà una risposta esaustiva e completa alla domanda "che cos'è la matematica?". Però vorrei dare almeno certe indicazioni, mostrare certe esigenze ed illustrare certi atteggiamenti che possano inquadrare il campo della logica, e possano offrire spunti per una corretta didattica di questo tema.

3) LE ESIGENZE.

Per aiutarci proviamo a dare una rapida occhiata allo sviluppo storico della logica (non sono uno storico e non voglio fare storia, ma solo accennare a certe tappe fondamentali). Possiamo partire dal pensiero greco che propone davvero la logica come modo di ragionare, coglie certe forme di ragionamento, di argomentazione: atteggiamento ambizioso nel voler rispondere all'esigenza di spiegare e di fondare il ragionamento, ma, appunto perciò, criticabile, come ho già cercato di giustificare.

Successivamente Leibniz e Boole pensano alla "characteristica universalis", al "calculemus", cioè ad un modo quasi automatico per raggiungere certi risultati, certe conclusioni, in qualsiasi ambito. In un certo senso c'è questa aspettativa, la logica vorrebbe, se fosse possibile, costruire un calcolo, un modo indiscutibile per mettersi d'accordo su come ottenere e controllare i risultati mediante regole molto semplici. Ma cosa sono queste regole? C'è un atteggiamento abbastanza diffuso nella mentalità corrente legato al problema del conoscere la natura, e quasi sembra che se uno argomenta in un certo modo ebbene la natura deve seguire quell'argomentazione. Ma quali sono i risultati del nostro argomentare? Quelli che si ottengono per mezzo di certe regole? Quasi che le regole producessero le cose buone, le cose vere. Secondo questo punto di vista si direbbe che la natura si comporta in un certo modo perchè ci sono delle regole del pensiero che lo prescrivono. Questa mentalità non era neppure del tutto estranea a Galilei. La sua frase "Il libro della natura è scritto in caratteri matematici" è non mettere in risalto qual è il ruolo dell'uomo. Io vedrei bene questa frase un pò corretta dicendo "lo strumento matematico è il mezzo con cui gli uomini organizzano le loro conoscenze della natura". Questa affermazione è tutt'altra cosa, rappresenta una mentalità completamente diversa. Io auspicherei che questa mentalità fosse insita nei concetti di matematica e di logica, e che fosse oggetto di trasmissione da parte dell'insegnante.

Ma il vero problema per cui si è sviluppata la logica come la conosciamo attualmente è la crisi dei fondamenti della matematica della fine del secolo scorso.

La costruzione dalle geometrie non euclidee, l'antinomia di Russell e simili questioni hanno messo in crisi l'edificio matematico facendo emergere il seguente problema: a partire da certe premesse, cosa si può dedurre, si può dedurre una contraddizione o no? Impostata la geometria in un certo modo (cioè scelti certi assiomi propri per la geometria), cosa ne segue? Impostata la teoria degli insiemi in un certo modo, cosa ne segue? Si può dire che non seguirà alcuna contraddizione? Come si fa a determinare questo? Cos'è una contraddizione? Una contraddizione è asserire sia una espressione che la sua negazione. Si osservi che gli oggetti cercati in tutte queste domande sono espressioni del linguaggio. Entra nella logica, direi in modo fondamentale, il ruolo del linguaggio, e la capacità di poter prevedere quali sono le frasi che sono conseguenza di certe affermazioni. Ma conseguenza in che senso? Direi nel senso che usualmente viene chiamato conseguenza logica, cioè quell'espressione che è vera in tutte le situazioni possibili concesse, cioè in tutte le situazioni in cui sono vere le premesse. Ma, come tutti i problemi inversi, anche il problema di determinare cosa non è conseguenza di certe affermazioni è particolarmente difficile. Una cosa è dire cosa si riesce ad ottenere, a far seguire da certe premesse date, altra cosa è dire cosa non si può far seguire. Il problema inverso è sempre di gran lunga più difficile. Nel caso del problema diretto, per determinare se una affermazione segue da altre, basta trovare una argomentazione che faccia vedere in che modo segue dalle altre: una volta trovata tale argomentazione il problema è risolto. Ma se non si è riusciti a trovare un'opportuna argomentazione non vuol dire che non ci si possa riuscire nel futuro. Quindi il problema inverso non si risolve semplicemente dicendo non ce l'abbiamo fatta ad ottenere una certa conseguenza, ma richiede di garantire che mai la otterremo, il che implica la determinazione dell'intero campo delle possibili conseguenze.

E naturalmente, come tutti i problemi inversi, anche questo ha soluzione o meno non in assoluto, ma relativamente agli strumenti che ci concediamo. La quadratura del cerchio non è ottenibile con retta e compasso, però è un esercizio di geometria analitica. Il problema di trovare un numero che corrisponde alla lunghezza della diagonale del quadrato di lato unitario si risolve facilmente con i numeri reali, ma non con i razionali. I problemi negativi hanno sempre soluzione o meno in funzione degli strumenti che ci concediamo.

4) IL LINGUAGGIO.

Così, poter dire cosa si deduce o cosa non si deduce da certe premesse dipende da cosa ci concediamo come strumento per dedurre. Ecco quindi la necessità di chiarire esattamente cosa si può dedurre. Ma, poiché si deducono espressioni da espressioni, ciò comporta precisare cos'è il linguaggio, in quale linguaggio ci muoviamo, quali strumenti ci concediamo nel linguaggio. Allora il linguaggio naturale non è più l'ambiente adatto perché non è preciso, perché non si conosce esattamente com'è fatto.

Ecco allora l'idea di costruire un linguaggio formale, cioè di costruire un linguaggio ideale, ad imitazione del linguaggio naturale, definito rigorosa-mente precisando esplicitamente come si comportano i suoi elementi. Direi che il passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio formale non è un passaggio di astrazione, non si considerano solo certe caratteristiche, ma è un vero passaggio di idealizzazione, se ne costruisce uno che si comporti in modo ideale, cioè in modo da superare quelle imprecisioni, quelle irregolarità che ha il linguaggio naturale.

Ecco che allora diventa importante la distinzione e il rapporto tra il linguaggio e il suo significato, perché ogni linguaggio, anche il linguaggio formale, deve permetterci di parlare di qualcosa. Vogliamo che le espressioni che accettiamo nel nostro linguaggio abbiano un significato, che ci dicano cosa succede in un certo mondo, o ci determinino in quale mondo possono essere vere. Quindi c'è questo rapporto tra linguaggio e suo significato, detto altrimenti fra sintassi e semantica.

Credo che questa distinzione tra sintassi e semantica sia uno dei punti direttamente utilizzabili in un'azione didattica, pur senza proporre una lezione di logica (come d'altra parte e giustamente detto nei programmi ministeriali) ma presentando la logica come una materia trasversale, cioè una materia che deve fornire all'insegnante un certo tipo di atteggiamento da usare anche nel presentare altri argomenti.

Una volta mi è stato chiesto di andare in una classe, una terza di un istituto tecnico professionale, a parlare di logica. Non mi sono rivolto ai ragazzi tentando di dire cos'è la logica, ma ho cercato di sottolineare la distinzione tra linguaggio e suo significato. Ho considerato un esempio che era familiare a tutti i ragazzi, partendo da una domanda a cui ho avuto risposte strane. La domanda era: cosa vuol dire digitale? E importante che un certo oggetto sia digitale, come vuol far credere la pubblicità? I ragazzi mi hanno sorpreso dicendo che per loro digitale vuol dire che può essere toccato, manovrato, con le dita, e non avevano la minima idea che questa parola potesse essere collegata essenzialmente con la parola inglese digit, che vuol dire cifra. Chiarito questo, sono emersi, come mi proponevo, tutti i problemi sul rapporto tra cifre e numeri, su cos'è la cifra rispetto al numero, la scrittura rispetto al significato. Questo itinerario didattico è facilmente percorribile, l'importante è inserire le dovute osservazioni. Dopo aver introdotto la scrittura posizionale e le successioni di cifre che rappresentano un numero proprio mediante la scrittura posizionale, uno sviluppo interessante è quello di considerare la somma di numeri naturali. Alla domanda cos'è la addizione tra due numeri naturali normalmente si ottiene una risposta che non individua una operazione tra i numeri (quella di associare ai numeri dati il numero che conta gli elementi dell'unione di due insiemi disgiunti ciascuno di cardinalità pari ad un numero dato), ma un algoritmo tra le cifre, metterle in colonna, operare sulle cifre in un certo modo, per arrivare ad una certa scrittura come risultato. A questo punto si può sottolineare la differenza tra le due nozioni di operazione tra numeri e di algoritmo sulle cifre, e notare

come il linguaggio delle cifre, con la sua notazione posizionale, è un linguaggio costruito molto bene, in modo da poter rappresentare con certe operazioni sul linguaggio, sull'espressione, le operazioni da fare sui significati. Ed è molto più facile operare sulla forma che non sul significato: ecco un altro aspetto del linguaggio formale. Ecco l'aspirazione al calculemus di Leibniz e di Boole: effettuare (se possibile) un facile controllo sulla forma delle espressioni, piuttosto di affrontare le difficoltà dell'operare sui significati. Non è che manchi un significato soggiacente. Però, tutte le volte che è possibile, perché non costruire un linguaggio formale le cui regole di trasformazione formale corrispondono ai passaggi di significato che si vogliono effettuare? Così si potrà eseguire il solo passaggio formale e non ripetere ogni volta le considerazioni su cosa stiamo effettivamente facendo, sfruttando il fatto che certi ragionamenti li abbiamo già fatti una volta per tutte nell'osservare la correttezza dei passaggi formali nel seguire i corrispondenti passaggi di significato.

Ritengo sia molto importante sottolineare la correttezza dei passaggi formali rispetto ai passaggi di significato, e in questo spirito vanno introdotte le regole formali. Queste non sono un a priori che implica la validità del passaggio tra i significati corrispondenti alle espressioni cui sono state applicate le regole. Le regole formali non sono la ricetta che l'insegnate ha detto di usare: si applica la ricetta e si risolve il problema. Non si può applicare una ricetta se non si sa cosa significa, almeno se si vuole proporre un insegnamento consapevole della matematica. Questa, secondo me, e uno di quelle attenzioni importanti che l'insegnante dovrebbe avere nel trasmettere un adeguato concetto di matematica.

Abbiamo parlato di sintassi e semantica, e, come attualizzazioni didattiche, la cifra e il numero. Credo siano temi facilmente presentabili anche nella nostre scuole. Uno potrebbe dire che cifre e numeri sono argomenti da scuole elementari! E vero, però io ritengo che, almeno all'inizio della scuola superiore, certi temi, anche della scuola elementare, vadano ripresi brevemente per raggiungere una consapevolezza, che è del tutto diversa dall'obiettivo dell'insegnamento della scuola elementare. Credo che un obiettivo dell'insegnamento nella scuola superiore sia proprio la consapevolezza di ciò che si fa. Così se alla scuola elementare certi argomenti si potevano anche presentare glissando su certe osservazioni (per l'impossibilità di proporre certi approfondimenti) per proseguire verso un atteggiamento operativo e applicativo, all'inizio della scuola superiore quegli stessi argomenti vanno ripresi introducendo le osservazioni che prima erano fuori posto, affinché lo studente ne sia consapevole; così anche temi estremamente elementari possono essere ripresi all'inizio della scuola superiore.

Un'altra via che porta all'esigenza di un linguaggio formale è l'esperienza con i computers.

5) RAPPORTI CON L'INFORMATICA.

In precedenti interventi è già stato considerato il ruolo dei computers nella didattica. Approfitto ora, aprendo una parentesi, per intervenire in quella discussione.

Io vedo il computer molto simile al telefono e al libro: tutti sono mezzi di comunicazione. Nessuno si sogna di dire parlo con il telefono, ma parlo con la persona che sta all'altro capo della linea attraverso il telefono. Perché allora pensare di parlare con il computer, anche se è una macchina molto più sofisticata, e non con la persona che ha organizzato un certo modo di collaborare con l'utente attraverso quella macchina. Quando si legge un libro non si pensa di leggere l'idea che ha la carta, ma si legge l'idea dell'autore di quel libro. Perché la situazione non deve essere analoga con i computers? Perché il computer è diventato uno strumento che è personalizzato? Sembra quasi che sia lui che ci parla, e se lui dice qualcosa, certo, l'ha detto il computer e di conseguenza è sicuramente vero.

Ricordo di aver visto tempo fa un programmino che voleva spiegare cosa vuol dire assurdo per mezzo di un computer (così lo studente avrebbe acquisito meglio il concetto). Era un programmino molto banale che trasformava la scritta "si" nella scritta "no" e la scritta "no" nella scritta "si" al premere di un tasto: così premendo un tasto appariva la scritta "si", premendolo ancora si vedeva la scritta "no", ripetendo ancora l'operazione tornava la scritta "si", e poi ancora no", e così via finché uno voleva. Questa era la spiegazione del concetto di assurdo. Direi che questa spiegazione era assurda.

Prima il prof. Prodi ha lanciato un problema che penso sia molto serio: dopo una decina d'anni che stiamo usando i computers qual è l'effetto che questi hanno avuto sulla didattica. La mia risposta è: non siamo pronti a rispondere. Perché per rispondere avremmo bisogno di costruire dei test che verifichino l'effetto di quanto fatto, ma non abbiamo ancora un criterio per costruire i test. Cosa vogliamo scoprire come effetto dei computers sull'insegnamento scolastico?

Nella precedente discussione era stata usata un'analogia tra la carrozza e la vettura di formula uno: non credo che sia un'analogia molto precisa. Nello sviluppo dell'automobile, subito dopo la carrozza è venuta la carrozza a motore: non c'era ancora un vero concetto di automobile come lo conosciamo ora. Dopo le carrozze a motore si è capito che si poteva uscire da certi schemi, ed ecco allore le automobili che non erano più costruite con l'artigianalità delle carrozza in cui si sostituiva il motore al posto del cavallo. Credo che non ci siamo ancora liberati da certi schemi a cui eravamo abituati prima per poter valutare appieno (e quindi elaborare un test adeguato per vedere) se gli studenti davvero stanno apprendendo qualcosa di più o di meno. Proprio un paio di settimane fa registrai una conferenza di Keith Devlin, editor della colonna computer review sul notiziario dell'American Mathematical Society. Lui osservava che non è che i computer abbiano reso più bravi o meno bravi certi ragazzi, ma ha cambiato l'atteggiamento verso la matematica: adesso non si è più di fronte ad una matematica, diciamo, sequenziale, dimostrativa, ma certi fenomeni si vedono, si nota una certa situazione. Attraverso le potenzialità espressive del computer cambiano i modi di apprezzare certe cose, cambia il linguaggio di trasmissione. Così, potremmo trovarci a dover valutare se questo nuovo linguaggio di trasmissione è adeguato, cosa permette di trasmettere. Quindi il test si strutturerebbe in modo profondamente diverso da quello che poteva essere un test normale di matematica. Ecco il motivo della mia affermazione: non so se siamo davvero pronti per valutare l'effetto dei computers nella didattica della matematica. Qui chiudo la parentesi.

Sicuramente il computer ci ha fatto apprezzare degli aspetti della matematica che forse prima erano poco valutati, in particolare la consapevolezza del ruolo del linguaggio. Per parlare ad un'altra persona attraverso il computer non basta usare una lingua che l'altro capisce, ma una lingua precisa, esattamente definita, perché deve essere meccanizzata, comunicata ed elaborata attraverso una macchina: ecco di nuovo la necessità di un linguaggio formale. Non è un linguaggio qualsiasi quello che mi permette di comunicare attraverso il computer.

Ancora, il computer permette di cogliere i limiti del linguaggio comunicativo, anche formale, limiti che sono insiti in qualsiasi linguaggio formale, ma in particolare nel linguaggio del computer. In altre relazioni sono stati mostrati vari esempi di uso del computer per fare certi esercizi, per affrontare certi problemi del corso di matematica, ma nessuno ha ricordato il problema della correttezza dei programmi, cioè il difficile problema di garantirsi che il programma faccia esattamente quello che si vuole; nessuno ha sottolineato i limiti della programmazione, limiti posti dalla macchina, dal concetto di macchina, e che non sono il programma fatto più o meno bene (anche facendo un programma molto bene ci sono dei limiti intrinseci in ogni macchina). Perché non spiegare agli studenti che le funzioni sui numeri naturali sono in una quantità non numerabile (anche se il concetto di non numerabilità non viene presentato normalmente nelle scuole superiori, penso che non sia difficile introdurlo anche se richiede l'argomento diagonale di Cantor che è molto originale e molto interessante)? Una volta detto che le funzioni sono una quantità così vasta da non essere numerabile, perché non mostrare che gli algoritmi sono in numero numerabile e che, quindi, solo una minima frazione delle funzioni tra numeri naturali potrà essere computabile? Questo ragionamento non dice quali, non è ancora l'affrontare il problema di quali sono le funzioni computabili che ha, direi, una trattazione abbastanza più complessa tanto che non so se è il caso di presentarla nelle scuole superiori. Comunque già il primo argomento evidenzia i limiti del linguaggio, pone il problema di determinare quali sono le funzioni computabili. D'altra parte, dobbiamo considerare seriamente il problema della correttezza dei programmi, anche se qui l'ho solo menzionato.

L'informatica ci può anche suggerire un'altro aspetto di un nuovo concetto di matematica: la matematica come organizzazione di dati, la matematica come trasmissione organizzata di informazioni. Qui non intendo l'informazione come quantità di bit, che è una misura in un certo senso, ma secondo un concetto che ora cercherò di precisare. Mediante delle espressioni si può cercare di descrivere un ambiente in cui ci si trova; quelle espressioni portano informazione se limitano gli ambienti in cui ci sono vere, più informazione si ha più è ridotto il numero dei possibili ambienti che soddisfano quelle espressioni; espressioni che non portano informazione sono quelle vere in qualsiasi ambiente.

Tutto sommato i passaggi logici tendono proprio a questo: proporre e inferire affermazioni che non cambiano l'informazione sugli ambienti altrimenti dati, affermazioni che sono vere in tutte le strutture indicate dalle informazioni disponibili.

I calcoli matematici invece superano i passaggi logici, nel senso che presuppongono e accettano certe informazioni particolari sulla molteplicità. Queste sono le informazioni contenute negli assiomi propri della matematica, che ci conducono a considerare solo certe situazioni. Queste stesse informazioni, inoltre, ci permettono di affermare anche che certe altre proposizioni sono vere in tutte quelle situazioni a cui si applica la matematica. Ma queste altre affermazioni sono proprio quelle che si deducono logicamente, nel senso prima precisato, che non aumentano l'informazione, che non restringono ulteriormente l'ambito delle situazioni in cui sono vere.

Attenzione, però, che, se i passaggi logici non aumentano l'informazione, ciò non è vero della logica che ci informa su come funziona il linguaggio artificiale da noi costruito e su come vanno eseguiti i passaggi logici perché siano corretti. In effetti la logica parla del linguaggio formale. Così lo studio della logica è il metastudio del linguaggio, è lo studio di come si comporta il linguaggio. Sicuramente a questo livello ci sono informazioni, si possono manifestare ed esprimere posizioni diverse. Analogamente la matematica parla del molteplice, non è il molteplice. Il matematico non è il ragioniere che sa far di conto, ma la persona che capisce la correttezza di certi calcoli, che giustifica il modo di procedere.

Queste ultime osservazioni ci fanno tornare all'interrogativo iniziale di cos'è la logica, pur avendo contribuito nel frattempo a precisarne alcuni aspetti.

6) LA LOGICA MATEMATICA.

In base a quanto fin qui considerato vorrei proporre un punto di vista circa il concetto di logica dicendo che è lo studio delle potenzialità e dei limiti di un linguaggio formale per descrivere delle situazioni. Penso che questa sia una discreta approssimazione di ciò che oggi si intende per logica.

Quanto qui ho indicato con la parola situazione si traduce poi nel concetto matematico di struttura: è relativamente ad una struttura che si parla di verità di una espressione del linguaggio formale.

6.1) LA VERITA'.

Ora vorrei prestare un pò di attenzione alla parola verità. Anche questa parola è fonte di equivoci e di fraintendimenti.

In logica classica, quando si parla di verità, si parla di verità di una espressione, tecnicamente di una formula, si chiede cioè che quanto viene asserito dalla formula corrisponda, attraverso una fissata interpretazione degli elementi della formula, a ciò che succede in una certa struttura. Ma cosa succede in quella struttura è dato per noto, non deve essere scoperto. La logica classica non fa scoprire cosa succede. La logica, eventualmente, dice come descrivere quel che succede.

Possiamo vedere, molto approssimativamente, il concetto di verità in due modi, direi secondo due linee, che chiamerei del giudice e del notaio. Il notaio registra, dice come sono andate le cose; è bene per uno, è male per quell'altro, è interesse, convenienza di uno e non dell'altro, non importa, lui registra come stanno le cose. Il notaio conosce lo stato delle cose, per lo meno si assume che conosca lo stato delle cose, e dichiara cosa sta avvenendo, qual è l'accordo tra le parti. Altra cosa è la posizione del giudice. Egli deve stabilire chi dei testimoni ha ragione, cioè deve stabilire come sono andate effettivamente le cose, e l'avvocato cercherà di far credere che le cose sono andate esattamente nel modo che conviene al suo assistito. Il giudice compie un tentativo di capire, di determinare cos'è successo in realtà. Questo non è il vero della logica.

La logica si comporta più come il notaio. Essa lascia, in qualche modo, alle altre discipline il compito di indagare su come è effettivamente la situazione, di spiegare il perché le cose vanno in un certo modo, per limitarsi a controllare la correttezza delle affermazioni che si fanno su una situazione chiarita dalle altre discipline, o supposta nota.

In gran parte anche la matematica svolge un ruolo analogo a quello della logica. Consideriamo ad esempio la caduta di un grave. Il fisico sarà tenuto a dire perché, come mai succede così, qual è l'immagine che noi ci facciamo della natura per spiegare questo fenomeno. Il matematico si accontenta di dire dov'era il grave in ciascun istante, fornisce la funzione che descrive il moto senza dover dire perché. Chiarire il perché sarà compito dell'esperto della disciplina.

6.2) GLI ASSIOMI PROPRI.

Indicata la posizione nei confronti del concetto di verità, si può affrontare anche il tema degli assiomi propri di una teoria. Questi sono espressioni linguistiche (formule) che descrivono una certa situazione. Non si caratterizzano gli assiomi dicendo che sono affermazioni vere. Quando si vuole determinare un certo contesto, si usano delle affermazioni per precisare che il contesto in cui ci si vuole situare le deve soddisfare, le deve rendere vere. Poi eventualmente si può passare alle conseguenze logiche di quelle affermazioni. In tutte quelle situazioni in cui sono veri certi assiomi, valgono anche delle altre espressioni, quelle che si possono dedurre dagli assiomi: si può dire che la deduzione esplicita ciò che è implicito negli assiomi.

Qui nasce anche un problema: se esplicitando si ottiene una affermazione che non va bene (per descrivere la situazione a cui ci si riferiva), la si deve accettare, si devono cambiare gli assiomi o che altro si deve fare? A priori, per quanto detto, ciò non dovrebbe succedere, ma di fatto accade perché, nello scegliere un assioma proprio per caratterizzare certe situazioni, non si coglie appieno tutta la portata di quell'espressione. Tante volte i matematici cambiano gli assiomi, perché l'assioma dice qualcosa della struttura che si vuol descrivere, ma non lo dice in modo esplicito, e non si sa se tutte le conseguenze che sono implicite saranno vere nelle strutture che si vogliono descrivere. Gli assiomi vengono accettati in prima approssimazione per descrivere una situazione che interessa, poi esplicitando ci si può accorgere che non era quello che si voleva dire esattamente (sicuramente Cantor nel presentare la sua teoria degli insiemi non voleva dare una situazione impossibile, contraddittoria). In tali casi si modificano gli assiomi in modo che colgano davvero la situazione che si voleva precisare.

Ma è difficile riconoscere le conseguenze logiche, non è facile esplicitare quello che è implicito. Se ciò è ovviamente vero dal punto di vista semantico per l'innumerevole quantità di verifiche da effettuare per vedere quando una formula quantificata è vera in una certa struttura, le cose non vanno molto meglio neppure quando facciamo ricorso al controllo sintattico delle conseguenze logiche attraverso la deduzione. Questo è uno dei risultati fondamentali della logica a proposito dei limiti del linguaggio: detto tecnicamente, non è decidibile in un linguaggio del primo ordine, dire quali sono le formule implicite negli (cioè deducibili dagli) assiomi se questi sono almeno di una certa forza.

Questa difficoltà ci spinge ad accontentarci di interessanti risultati parziali. Ancora sfruttando il controllo delle conseguenze logiche che ci viene fornito da un opportuno linguaggio con la sua sintassi e con le regole deduttive da questa previste, invece di voler ottenere tutte le formule deducibili ci limitiamo a dedurre un insieme decidibile sufficientemente vasto da essere

utile per le applicazioni.

Proprio in virtù della decidibilità di un tale insieme di formule da dedurre, si può pensare di programmare un computer perché esegua automaticamente le deduzioni, e fornisca automaticamente le conseguenze: il computer diventa un theorem prover.

Voglio ribadire che ciò è possibile sempre nell'ottica di considerare le regole di deduzione come corretto controllo sintattico sulle conseguenze logiche (nel senso che ho già cercato di illustrare, anche attraverso l'esempio elementare dell'uso delle cifre per eseguire le operazioni tra numeri), e non come taumaturgiche norme aprioristiche del pensiero cui la realtà deve obbedire. Queste regole non sono piovute chissà da dove, ma sono regole che trovano la loro validità, tecnicamente la loro correttezza, proprio nella corrispondenza con le trasformazioni corrette di significato che producono. Queste regole agiscono sulla forma, sulla scrittura e quindi richiedono un linguaggio formale, e non uno qualunque, ma uno ben fatto (come sono ben fatte le notazioni arabe dei numeri naturali e non quelle romane) in modo da agire sulle forme rispettando l'azione sul significato.

7) CONCLUSIONE.

In quanto ho esposto spero di aver dato da una parte un'idea di cosa voglio dire con la parola iniziazione, e dall'altra parte un'idea approssimativa, una prima approssimazione di cosè la logica proprio cercando di iniziarci ad essa.

Ma ciò può essere di giovamento per un'azione didattica? In altre occasioni ho detto che la mia proposta didattica per la scuola è non fare alcuna lezione di logica, non trattare, a livello scolare, la logica come una disciplina autonoma. E' importante che la logica sia conosciuta in modo approfondito dagli insegnanti sapendone cogliere i temi portanti, per usarli nei vari momenti del corso di matematica. Credo la differenza tra linguaggio e significato, sia un momento importante, come ho cercato di mostrare con l'esempio che ho presentato usando l'aritmetica. Altri momenti importanti sono stati indicati dal prof. Ferrari quando ricordava i problemi di coerenza e di calcolabilità. Indubbiamente questi sono temi a cui è importante che il docente porti lo studente nello sviluppo delle varie teorie matematiche, in modo che si renda conto che non sono banali. Questo non è fare una lezione di logica, ma preparare alla logica, ecco di nuovo, se volete, una iniziazione: anche lo studente, in qualche modo, deve essere iniziato. La logica sostanzialmente vive su astrazioni di astrazioni, siamo ad un livello davvero molto alto. Non credo che allo studente vadano presentate soluzioni o concettualizzazioni di problematiche che non coglie, di cui non ha esperienza, forse semplicemente perché non conosce il problema. Prima va presentato il problema, poi la generalizzazione, poi l'analogia con altri, poi il passaggio ad un'astrazione, e così via fino ad avere eventualmente le basi per richiedere l'intervento della logica. Quando c'è l'esigenza di un linguaggio formale, quando c'è l'esigenza di mostrare la coerenza di certi sistemi, allora forse potrà intervenire la formalizzazione della logica, non credo prima. No dunque alla lezione di logica fino all'ultimo anno delle superiori, si, invece, ad una continua e graduale esposizione degli studenti ad acute osservazioni (suggerite dalle conoscenze di logica degli insegnanti) durante il normale svolgimento del corso di matematica, si ad una iniziazione graduale alla logica.

C'è anche dibattito su quando inserire l'insegnamento di logica nel corso di laurea in matematica: mi pare che stia bene al terz'anno e non prima perché allora lo studente può aver raggiunto quella maturità matematica che è l'unico prerequisito per un corso di logica. Ma, contrariamente a quanto previsto dall'attuale ordinamento, penso, che non debba essere uno dei complementari che pochi studenti vedono, ma conoscenza comune a tutti i laureati in matematica.

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

*Gabriele Lolli**

Gli esempi più genuini per il principio della induzione completa
sono il triangolo aritmetico e la torre di Hanoi.
A. M. Hinz

«L'idea magica che sta dietro l'induzione, l'idea che ce la fece apparire scorretta quando la incontrammo per la prima volta nella scuola superiore, è che nel corso della dimostrazione si assumono casi della congettura stessa da dimostrare. Come può l'induzione essere corretta?»[1]. A molti studenti il principio di induzione continua ad apparire misterioso. Lo svolgimento di una dimostrazione per induzione porta spesso a ingarbugliarsi tra la tesi da dimostrare e quella che viene chiamata ipotesi induttiva; la difficoltà non è solo di notazione e di esposizione, ma anche concettuale.

Tuttavia ormai l'induzione fa parte del bagaglio di tecniche indispensabili per affrontare le dimostrazioni; nei testi introduttivi, sempre più frequenti, che prevedono anche un addestramento propedeutico al ragionamento matematico, la dimostrazione per induzione è inclusa ad integrazione delle regole logiche[2]. Ricordiamo qualche esempio.

La dimostrazione per induzione di una affermazione $\forall n\, A(n)$, dove $A(n)$ è una proprietà dei numeri naturali, n una variabile numerica, si articola nei seguenti passaggi:

(i) si dimostra $A(0)$, detto *base* dell'induzione (o $A(1)$ se la proprietà la si vuole dimostrare per tutti i numeri maggiori di 1);

* Dipartimento di Informatica, Università di Torino.

[1] R.S. Boyer, J.S.Moore, *A Computational Logic*, Academic Press, New York, 1979.

[2] Come esempio, citiamo soltanto S. Galovic, *Introduction to Mathematical Structures*, HBJ, New York, 1989, con il capitolo introduttivo intitolato *Tools*, comprendente le sezioni 1.1 *Logic*, 1.3 *Formal Thinking: Methods of Proofs*, che include un paragrafo sulla induzione matematica, pp. 50-58, e 1.4 *Informal Thinking: Methods of Inquiry*. Del principio di induzione, si dice peraltro solo che è una proprietà dei numeri naturali, senza giustificarla. Una ottima introduzione all'induzione è in R. M. Young, *Excursions in Calculus*, Dolciani Math. Expositions 13, MAA, 1992, capitolo 1, *Infinite Ascent, Infinite Descent*, pp. 3-56.

(ii) si dimostra $A(n) \to A(Sn)$, dove Sn è il successore di n, indicato anche talvolta con $n+1$; questa parte è detta *passo induttivo*, e nella sua dimostrazione l'assunzione $A(n)$, in vista di ottenere $A(Sn)$, è chiamata ipotesi induttiva;

(iii) si conclude $\forall n\, A(n)$[3].

Come giustificazione, si afferma di solito che, assicurati (i) e (ii), per ogni numero naturale k si può dimostrare $A(k)$, iterando k volte la regola di *modus ponens*:

$$A(0),\ A(0) \to A(1),\ A(1),$$
$$A(1) \to A(2),\ A(2),$$
$$A(2) \to A(3),\ A(3), \ldots$$

L'osservazione è corretta, ma non sufficiente; la confusione talvolta obnubila anche le menti più eccelse, come mostra l'esempio di D. Knuth[4] che, dopo aver messo il procedimento descritto in forma di algoritmo, osserva: «siccome è chiaro che l'algoritmo fornisce per ogni k una dimostrazione di $A(k)$, siamo sicuri che la tecnica dimostrativa basata su (i) e (ii) è logicamente valida». Niente di tutto ciò, *quandoque dormitat*...; Knuth ha appena detto che l'induzione è una tecnica fondamentale per la dimostrazione della correttezza degli algoritmi, e non può proporre un algoritmo come giustificazione della induzione[5]. Inoltre "per ogni k una dimostrazione di $A(k)$" è diverso da "una dimostrazione di $\forall n\, A(n)$".

Esempi

Gli esempi di dimostrazione per induzione sono innumerevoli, in ogni campo. I più semplici sono dati dalle formule aritmetiche, come

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

[3] Altre forme di induzione saranno richiamate più avanti.

[4] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 1, *Fundamental Algorithms*, Addison Wesley, Reading, 1968, dopo aver introdotto gli algoritmi in par. 1.1, al primo posto tra i preliminari matematici mette subito l'induzione matematica, par. 1.2.1, pp. 11-21.

[5] Cinque pagine più avanti, a pag. 17, Knuth ammette la circolarità, e fa appello alla inevitabile fondazione assiomatica del concetto di numero, inclusa l'induzione. Resta il fatto che la tecnica non è appunto "logicamente valida", ma subordinata ad assiomi specifici, che vedremo oltre.

La base dell'induzione, per $n = 1$, è ovvia; ammessa la formula per n, aggiungendo $2n + 1$ da entrambi i lati, si avrà

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

e quindi

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

La proprietà A, pur contenendo una variabile numerica, non deve necessariamente riferirsi solo ai numeri naturali; ad esempio si dimostra per induzione che, per $0 \le x \le \pi$ si ha

$$|\sin(nx)| \le n \sin(x).$$

Per il passo induttivo, si osserva che, con le formule di addizione, e tenendo conto delle limitazioni su x,

$$|\sin(n+1)x| \le |\sin(nx)| + \sin(x),$$

da cui per l'ipotesi induttiva

$$|\sin(n+1)x| \le n \sin(x) + \sin(x) = (n+1)\sin(x).$$

Talvolta il passo induttivo non è una semplice trasformazione di formule; occorre fare un ragionamento a parole, come nella dimostrazione del fatto, tratto dalla combinatoria finita, che il numero di sottinsiemi di un insieme finito di cardinalità n è 2^n. Se l'insieme X ha 0 elementi, è l'insieme vuoto, il suo unico sottinsieme è X stesso, e ce ne è $1 = 2^0$; se X ha $n + 1$ elementi, sia a un suo elemento; $X-\{a\}$ ha n elementi; i sottinsiemi di X si ripartiscono in due categorie, quelli che contengono a e quelli che non lo contengono; questi sono sottinsiemi di $X-\{a\}$, e per ipotesi induttiva ce ne sono 2^n; gli altri sono in corrispondenza biunivoca con i primi, togliendo a loro a, e quindi ce ne sono ugualmente 2^n; in totale, $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Come ultimo esempio, in cui la proprietà da dimostrare ha una certa complessità logica, ricordiamo il teorema per cui se a e b sono numeri positivi, esistono due numeri q ed r, con $0 \le r \le b - 1$, per cui

$$a = bq + r$$

L'induzione è su a, vale a dire che la proprietà $A(a)$ che si considera è "per ogni b positivo esistono due numeri q ed r, con $0 \le r \le b - 1$, per cui $a = bq + r$".

Base: se $b = 1$, prendiamo $q = 1$ e $r = 0$; se $b > 1$, prendiamo $q = 0$ e $r = 1$; così la proprietà è dimostrata per ogni b, con $a = 1$.

Passo induttivo: ammettiamo A(a) e consideriamo $a+1$; dato b, noi sappiamo che $a = bq + r$ per qualche q ed r con $0 \le r \le b-1$. Quindi $a+1 = bq + r + 1$. Se ora $r < b-1$, poniamo $q_1 = q$, $r_1 = r+1$ e abbiamo $a+1 = bq_1 + r_1$, con $0 \le r_1 \le b-1$. Se invece $r = b-1$, allora $a+1 = bq + b$; poniamo $q_1 = q+1$ e $r_1 = 0$ e abbiamo la stessa conclusione $a+1 = bq_1 + r_1$, con $0 \le r_1 \le b-1$.

Si vede che nella dimostrazione del passo induttivo si possono usare tutte le strategie logiche, come la distinzione di casi, e talvolta altre applicazioni della induzione, ad altre formule[6].

Siamo così abituati allo stretto legame tra numeri naturali e induzione matematica, che usiamo quest'ultima sistematicamente, anche quando altre dimostrazioni sono magari disponibili, perché abbiamo interiorizzato l'apprezzamento della eleganza di questo metodo. Ci sembra strano che sia concepibile il concetto di numero senza anche quello della induzione; per qualcuno potrà essere una sorpresa il riconoscimento che invece questo principio è piuttosto recente, nell'uso innanzi tutto, e recentissimo nella teorizzazione: poco più di cento anni fa, insieme alla definizione dei numeri naturali; un intervallo minimo, rispetto alla storia dell'uomo, che invita alla modestia.

Storia

I numeri sono un fedele indicatore degli stadi della evoluzione della civiltà; la storia incomincia, anche se l'evidenza archeologica ed etnologica è frammentaria, con le prime espressioni rudimentali del contare fatte con segni, sbarrette o tacche, raggruppati per 7, e più nettamente per 28, perché forse erano le fasi della luna. Si contava senza parole, facendo dei segni e con una organizzazione spaziale, se non vogliamo dire geometrica. Le parole per i numeri non c'erano ancora; le parole per usare i numeri, nei primi linguaggi che le contengono mostrano strani fenomeni; ce ne sono di solito solo per alcuni, i primi, piccoli, e spesso a seconda di quello che si conta o misura

[6] Altri esempi, anche tratti dalla geometria, si trovano nel libretto, molto elementare, di I.S. Sominskii, *Il metodo di induzione matematica*, Progresso Tecnico Editoriale, Milano, 1964, in Knuth, *cit.*, in Young, *cit.* e in G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, vol. 1, *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1954, cap. 7. Invece esempi del tipo

$$\frac{\begin{array}{l}0 \text{ è piccolo,}\\ \text{se } n \text{ è piccolo, anche } n+1 \text{ è piccolo}\end{array}}{\therefore \text{ tutti i numeri sono piccoli,}}$$

sono fatti per confondere le idee, e verrebbe da dire: scherza coi fanti...

le parole per i numeri sono diverse; quindi non sono parole per i numeri, ma per quantità di balle di grano, o quantità di chili di olio, e così via. C'è voluto un po' per avere parole che fossero per i numeri e per nessun'altra cosa, come nelle nostre lingue (salvo per "uno" che conserva una duplice funzione)[7]. Sembra che abbia giocato un ruolo anche l'aspetto sacrale, con l'elenco o la chiamata dei fedeli.

Al tempo di Aristotele, da cui iniziano le nostre informazioni più complete, era già nata la filosofia della matematica; Aristotele ci racconta le difficoltà, che non ritiene superabili, dei suoi oppositori con la generazione dei numeri, perché non riconoscono che gli oggetti della matematica non sono separabili dalle cose sensibili, e che non sono i primi principi. Era iniziata la guerra infinita con Platone, l'oppositore, per cui l'Uno e la diade, la divisione in due, erano la base del numero, e delle forme, precedenti le cose.

Nonostante le discussioni sulla natura del numero, non è ancora il caso di parlare della infinità dei numeri; Aristotele afferma che ai matematici basta l'infinito potenziale; Euclide sembra confermarlo, dal momento che il suo teorema sulla infinità dei primi è formulato dicendo che i numeri primi sono più di ogni assegnata moltitudine di numeri primi (Libro IX, Prop. 20)[8].

In un tale contesto, l'idea della induzione è quindi altamente improbabile; in verità una dimostrazione (per noi equivalente a una) per induzione si trova in Euclide, quando mostra che ogni numero composto ha un divisore primo (Libro VII, Prop. 31): Euclide usa il cosiddetto metodo della discesa infinita, concludendo "che è impossibile per i numeri".

Tentativi di trovare forme di ragionamento per induzione nella storia della matematica premoderna sono stati fatti, in modo poco convincente[9]. I due candidati più sponsorizzati sono Levi Ben Gershon, del Trecento, e Maurolico (1494-1575), entrambi influenzati dagli arabi[10]. Ci sono due spe-

[7] Un libro di utile riferimento è quello di J. N. Crossley, *The emergence of numbers*, World Scientific, Singapore, 1987; ma i testi di etnomatematica sono numerosi; due indicazioni tra le tante: G. Ifrah, *From One to Zero: A Universal History of Numbers*, Viking Penguin, New York, 1985[2], trad. it. *Storia universale dei numeri*, Mondadori, Milano, 1983, e D.F. Lancy, *Cross-Cultural Studies in Cognition and Mathematics*, Academic Press, New York, 1983.

[8] Pare che Agostino sia tra i primi ad aver affermato chiaramente che la classe dei numeri è infinita; la parola "naturale" si trova in Nemorario, nel tredicesimo secolo, dove una serie di numeri è chiamata "naturale" se il calcolo dei suoi membri è fatto per aggiunta di uno.

[9] Si veda H. Freudenthal, "Zur Geschichte der vollständige Induktion", *Arch. Internationales d'Histoires des Sciences*, **6** (1953), pp. 17-37.

[10] Sul primo si veda N.L. Rabinovitch, "Rabbi Levi Ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction", *Archive for the History of Exact Sciences*, **6** (1969), pp. 237-248; il secondo è stato proposto con insistenza da G. Vacca, intorno al 1909, ma già segnalato come precursore da Pascal in una lettera, ed è discusso in Freudenthal, *cit.*

cie di argomenti, usati ora per stabilire formule o proposizioni generali sui numeri, che incominciano ad accumularsi. Alcune volte sono verificati alcuni casi, per i numeri piccoli, e la conclusione è affermata con una sorta di induzione sperimentale; altre volte i primi casi mostrano uno schema che si ripete; sono i casi in cui noi mettiamo le dimostrazioni nella forma induttiva; ma negli autori antichi, non solo quelli citati, anche numerosi altri, come Fibonacci, ci sono i puntini, l'affermazione che si può continuare, "e così via", ma niente di più; e non sempre si usano le variabili.

Ad esempio Fibonacci così descrive come i quadrati nascono dall'addizione regolare dei numeri dispari: «l'unità è un quadrato, e da esso è prodotto il primo quadrato; l'aggiunta di 3 produce il secondo quadrato, vale a dire 4; la cui radice è 2; se a questa somma è aggiunto un terzo numero dispari, vale a dire 5, si otterrà il terzo quadrato, 9, la cui radice è 3 ; e così la serie dei numeri quadrati continua a crescere attraverso la regolare addizione di numeri dispari». Sinteticamente, afferma anche che la serie dei quadrati si ottiene aggiungendo i dispari «iniziando con 1 e andando avanti all'infinito»[11].

Ben Gershon dimostra la proprietà associativa per tre fattori, poi come nuova proposizione la proprietà associativa per quattro fattori, quindi osserva che con questo modo di "sollevarsi passo per passo" (*Hadragah* in ebraico) la si dimostra all'infinito.

E' in Pascal che si trova per la prima volta formulato esplicitamente il principio di dimostrazione per induzione. Nel *Traité du triangle arithmétique* del 1654 (pubblicato nel 1665) egli avverte coscientemente che una sua dimostrazione che involverebbe infiniti casi è divisa nei due momenti che oggi chiamiamo della base e del passo induttivo. Il secondo passo è che «se la proporzione vale in qualche base arbitraria, allora vale anche nella base successiva» [12].

---

[11] Si veda Freudenthal, *cit.* Per la stessa proprietà, come per altre, Maurolico usa una organizzazione bidimensionale dei dati, che qualcuno chiama dimostrazioni progressive:

1
3 ___ 4
5 _____ 9
....

Solo in un caso, a proposito di Maurolico, Freudenthal accetta che ci sia una impostazione che ammetterebbe il ragionamento induttivo. Peraltro, secondo Freudenthal, anche il teorema 8 del libro IX di Euclide è dimostrato con un autentico, seppur episodico, passo induttivo.

[12] Si tratta di una proprietà del triangolo di Pascal, che riguarda il rapporto dei coefficienti binomiali. Nella citazione, le basi sono le righe dei vari triangoli troncati: «Quoy que cette proposition ait une infinité de cas, j'en donneray une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

Le 1., qui est évident de soy-mesme, que cette proposition se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que ϕ est à σ comme 1 est à 1.

Le 2., que si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécéssairement dans la base suivante. D'ou il se voit qu'elle est necéssairement dans toutes les bases: car elle est dans la seconde par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatriesme, et à l'infiny», Pascal, *Œuvres*, ed. Brunschwicg-Boutroux, III (1908), 456.

All'incirca nello stesso periodo Fermat usava nuovamente, dopo tanti secoli, il principio della discesa infinita. Nelle "Osservazioni su Diofanto"[13] è riportata «la dimostrazione di questo teorema da noi scoperto, dimostrazione che abbiamo trovato non senza lunga e faticosa meditazione. Certamente questo tipo di dimostrazione farà compiere mirabili progressi alla scienza dei numeri». Il teorema afferma che l'area di un triangolo rettangolo le lunghezze dei cui lati sono numeri interi non può essere un quadrato (ne segue una immediata dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat nel caso $n = 4$). La dimostrazione, assumendo che tale triangolo esista, si svolge osservando che ne seguirebbe l'esistenza di due quadrati la cui somma e la cui differenza sarebbero dei quadrati; quindi con ulteriori facili considerazioni si arriva ad osservare che un altro «triangolo rettangolo sarà formato da due quadrati, la cui somma e la cui differenza saranno dei quadrati. Ma si proverà che la somma di questi due quadrati è minore di quella dei primi due quadrati, per i quali si è supposto inizialmente, che tanto la loro somma quanto la loro differenza siano dei quadrati. Quindi, se si danno due quadrati la cui somma e la cui differenza siano dei quadrati, saranno dati, in numeri interi, due quadrati della stessa natura, la somma dei quali sarà minore della somma precedente. Con lo stesso ragionamento, si troverà inoltre una somma minore di quella ottenuta per mezzo della prima. E così all'infinito si troveranno numeri interi, sempre più piccoli, che godranno della stessa proprietà. Ma ciò è impossibile perché, dato un qualsiasi numero intero, non possono esistere infiniti numeri interi minori di esso. L'esiguità del margine impedisce di inserirvi una dimostrazione completa e più ampiamente spiegata»[14].

L' enunciazione che ha più influito sui matematici è stata quella di J. Bernoulli, in una lettera del 1686. Bernoulli riprende una dimostrazione di Wallis, che il rapporto tra la somma dei primi n numeri e la somma di n+1 addendi uguali a n è 1/2. Chiamata a la prima somma, essa per induzione è uguale a $(aa + a)/2$. Quindi aggiunge a questa a + 1 e procede algebricamen-

---

[13] P. de Fermat, *Osservazioni su Diofanto* (1670), Boringhieri, Torino, 1959, pp. 105-106.

[14] In una lettera a Carcavi, Fermat ripete la dimostrazione: «La preuve se fait par 'απαγωγην εισ αδυνατον. S'il y avoit aucun triangle rectangle en nombres entiers qui eût son aire égale à un quarré... Or est-il donné qu'étant un nombre, il y en a point infinis en descendant moindres que celui-là...», *Œuvres*, ed. Tannery-Henry, II, 431.

te a metterla nella forma $(a+1)(a+2)/2$[15]. La circostanza che Bernoulli usi questo metodo in contrapposizione a Wallis è significativo, e permette di chiarire l'uso della parola, in quanto Wallis si presenta come un sostenitore della induzione sperimentale, contro la dimostrazione.

La parola "induzione" è stata usata dai matematici, prima e durante la rivoluzione scientifica, nel senso scientifico generale, per indicare il procedimento di ricerca basato sulle osservazioni, gli esperimenti, la ripetizione delle prove. La parola ha una storia lunga, risale ad Aristotele, che intende con essa definire il procedimento che dai particolari porta all'universale[16]. Aristotele lo contrapponeva al sillogismo necessario, e lo indicava come una forma inferiore di inferenza, non in grado di fornire una conclusione necessaria, cioè relativa alla sostanza. Dopo di allora le dispute si sono susseguite, tra gli Epicurei che la consideravano l'unica forma di inferenza possibile, e gli Stoici che ne negavano il valore; era stata introdotta la distinzione tra induzione completa, per enumerazione, e incompleta: quella incompleta non garantita mai, quella completa impossibile.

L'argomento era tornato alla luce con Bacone, che in verità criticava «il passaggio al volo dai dati del senso e dalle cose particolari alle generalissime... E' questa una scorciatoia, ma troppo scoscesa, per la quale non si incontra mai la natura, ma soltanto questioni». Tuttavia la induzione ben intesa è il metodo scientifico, che procede per gradi, e determinazioni successive, sceverando e raffinando le esperienze finché non portino a cogliere la "differenza vera, o natura naturante", in altre parole la sostanza di Aristotele. L'induzione di Bacone è un metodo complesso che consiste nel predisporre tavole per classificare gli esperimenti e istituire nuovi esperimenti di controllo, finché non si arriva con certezza alla sostanza.

Il cartesianesimo rifiutava l'induzione, soprattutto con esempi tratti dalla matematica: i singoli triangoli sono solo occasione di riflessione, ma si può concludere con una affermazione di piena generalità sui triangoli solo sulla base della idea di triangolo. Nella seconda metà del Seicento il problema della induzione diventa con Hume il problema centrale, continuo e irrisolto, del dibattito filosofico. Nello stesso tempo, l'induzione viene assunta come codifica ufficiale del metodo sperimentale, ma spesso proprio nella forma ingenua del "passaggio al volo".

15 «Pono, rem examinatam esse aliquosque: terminumque ultimum, in quo examinando substiti, appello a: eritque numerus terminorum ob initialem cyphram, unitate major, nempe a + 1: adeoque summa totidem ultimo aequalium aa + a, cui cum summa progressionalium inductione supponatur reperta fuisse subdupla... Augeatur jam series progressionis uno termino, eritque adjectus terminus a + 1, qui junctus summae praecedentium...», J. Bernoulli, Excerpta ex iisdem literis, *Acta Eruditorum* V (1868), pp. 360-361.

16 Si veda la voce "Induzione" in N. Abbagnano, *Dizionario di Filosofia*, Utet, Torino, 1963.

I matematici si sentivano coinvolti in questo discussione, in quanto si consideravano parte della comunità degli scienziati naturali, e in quanto ovviamente portati a cercare conclusioni generali sui numeri, partendo da casi singoli. Tra la celebrazione della induzione, come si trova esplicita in Wallis[17], e le correzioni apportate da Bernoulli, c'è ampio spazio per confusione ed imbarazzo: la parola "induzione", inserita da Bernoulli nella sua dimostrazione, non ha nulla a che vedere con l'induzione sperimentale; questa continuerà in seguito ad essere indicata con tale termine presso i matematici che ne riconosceranno solo il valore euristico[18].

Gli usi della dimostrazione per induzione incominciano a diventare più frequenti dopo Bernoulli, ma non ancora generalizzati; in Eulero ad esempio (Algebra, 1770) non ce ne è traccia; le formule che richiedono l'induzione sono dimostrate con qualche caso particolare e argomenti per convincere che si tratta di uno schema generale. L'induzione matematica, attribuita a Bernoulli e chiamata "il passaggio da n a $n+1$", o "il metodo di Bernoulli" (da A.G. Kästner ad esempio, verso la fine del secolo diciottesimo[19]), è considerata una *specie* di induzione.

Gauss tra gli altri parla di una specie di induzione che si può facilmente trasformare in una dimostrazione rigorosa, secondo un metodo ben noto[20]. Jacobi si riferisce al metodo di Gauss di «arrivare ai suoi risultati con una difficile induzione, che attraverso il cosiddetto metodo di Kästner, di dimo-

17 «Those Propositions in my Aritmetick of Infinites are (some of them) demonstrated by way of Induction: Which is plain, obvious and easy; and where things proceed in a clear regular Order... and shews the true natural Investigation. Which to me, is much more grateful and agreeable, than the Operose Apagogical Demonstrations, (by reducing to Absurdities or Impossibilities,) which some seem to affect; and which was much in use amongst the Ancients, for reasons which now (in great measure) are ceased since the introducing the Numeral Figures, and (much more) since the way of Specious Arithmetick», J. Wallis, *Opera Mathematica*, Oxford, 1699, pag. 298.

18 «Es gibt sogar viele Zahleneigenschaften, die uns gut bekannt sind, die wir aber noch nicht beweisen können; Beobachtungen allein haben zu ihrer Kenntnis geführt... Die Art des Wissens, die nur von Beobachtungen gestützt wird und noch nicht bewiesen ist, mub sorgfältig von der Wahrheit unterschieden werden; sie wird, wie wir gewöhnlich sagen, durch Induktion gewonnen», Euler, "Specimen de usu observationum in mathesi pura", *Opera Omnia*, Ser. 1, Bd. 2, pag. 459, citazione usata in apertura da Polya, *cit.*, che è dedicata alla induzione sperimentale nel senso di Eulero.

19 E' ancora così chiamata da E. Mach nel nostro secolo, citato da Polya, *cit.*, intestazione del cap. 7.

20 «Haece inductio facile in demonstrationem rigorosam convertitur per methodum vulgo notam... Haece quoque inductio facillime ad plenam certitudinem evehitur... cui inductioni facile est demonstrationis vim conciliare», C. F. Gauss, "Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi", *Comment. Soc. reg. Sci. Gottingensis*, 3 (1816), citato da Freudenthal, *cit.*

strare, quando qualcosa vale per il numero n, che allora vale anche per $n+1$, può essere sollevata a piena generalità»[21]. La parola "induzione" sembra ancora vista con sospetto in matematica, ma con la fiducia che il ragionamento si possa mettere a posto. Qualcuno incomincia a chiamarla "induzione dimostrativa"[22], poi de Morgan "induzione matematica"[23], anche se continuerà a lungo a essere usata, fino ai giorni nostri, impropriamente, la dizione "induzione completa"; tale dizione è impropria perché allude alla validità generale della conclusione, ma non richiede, anzi esplicitamente esclude, l'osservazione di tutti i casi.

La parola "induzione" conserva una traccia della storia dei rapporti con l'induzione sperimentale, e dell'emergere della dimostrazione, e ci tramanda una morale: parafrasando Knuth possiamo dire che, con tutta la sua ambiguità, la parola è giustificata perché «bisogna prima decidere cosa si vuole dimostrare, prima di poter applicare la tecnica della induzione matematica»[24]. Secondo alcuni, la decisione avviene con una preliminare induzione sperimentale, ma il luogo più naturale della induzione è rappresentato dalle definizioni ricorsive, che devono ancora venire.

Il primo uso sistematico ed esplicito dell'induzione è in un trattato di aritmetica di H. Grassmann, nel 1861[25]; l'obiettivo dichiarato del rigore è ottenuto dando ampio e sistematico spazio alle dimostrazioni per induzione; queste si impongono in modo naturale perché si appoggiano alle equazioni che caratterizzano le operazioni attraverso una ricorsione primitiva. L'importanza di Grassmann nella nostra storia è duplice: l'aver messo in evidenza il ruolo delle definizioni ricorsive, e il loro legame con le dimostrazioni induttive, e il fatto che egli teorizza proprio la esistenza di un tipo di dimostrazione per l'aritmetica che chiama *induktorisch*, e che affianca a quelle "in avanti", "all'indietro", e indirette, della tradizione logica; le affianca, non le riduce ad esse, come sembra si debba intendere fosse nello spirito di chi parlava di "convertirle in dimostrazione rigorosa".

Il problema del rigore

Sarebbe molto interessante che Gauss si fosse esposto di più nella giustificazione della induzione; nel generale disorientamento dei matematici a

[21] C.G.J. Jacobi, "Über Gauss' neue Methode, die Werte der Integrale naherungsweise zu finden", *Crelle J.*, 1 (1826), citato da Freudenthal, *cit.* Il "metodo di Bernoulli" è diventato il "metodo di Kästner", che come storico lo ha reso popolare.
[22] G. Peacock, 1830.
[23] A. de Morgan, 1838; si veda anche F. Cajori, "Origin of the name 'Mathematical Induction'", *Amer. Math. Monthly*, **25** (1918), pp. 197-201.
[24] Knuth, *cit.*, pag. 13.
[25] H. Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, Verlag Enslin, Berlin, 1861.

proposito delle dimostrazioni, nella prima metà dell'Ottocento, che si associa di solito alle difficoltà della Analisi, e che ha portato alla cosiddetta esigenza del rigore, un posto di rilievo hanno le dimostrazioni delle proposizioni aritmetiche; non si può dire che conosciamo bene il ricco dibattito che si è svolto, soprattutto in Germania, sia per le lacune degli studi di storia, sia perché, e le cose sono collegate, conosciamo questa vicenda soprattutto attraverso il filtro di G. Frege, che pur nella profondità della sua analisi è inevitabilmente condizionato dal suo interesse per una fondazione logica della matematica.

Frege[26] parte dalla, per lui, scandalosa concezione di Kant, secondo cui le proposizioni aritmetiche singolari, come $7 + 5 = 12$, non sono dimostrabili, perché sono sintetiche. Anche secondo Mill, esse esprimono fatti concreti sperimentali. Invece Leibniz si era preoccupato di dimostrare che $2 + 2 = 4$, con una dimostrazione in cui Frege mette in luce una lacuna, che consiste nell'appello alla proprietà associativa[27]; il problema si sposta allora a come si dimostrano, se si dimostrano, le cosiddette leggi generali. Non è esagerato affermare che non si aveva la minima idea di come dimostrarle; che Frege non esageri nel quadro che descrive può essere confermato da un solo esempio; E. Schröder poteva proporre una dimostrazione di questo tipo[28]:

$$a + (b + c) = a + b + c = (a + b) + c$$

Beweis

$$\begin{aligned} 2 + (4 + 3) &= (1 + 1) + \{(1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1)\} \\ &= (1 + 1) + \{ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \} = \\ &= 1 + 1 + \ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \\ &= (1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 2 + 4 + 3. \end{aligned}$$

....

Ebenso zeigt man, dass $(2 + 4) + 3 = 2 + 4 + 3$ ist. Daraus folgt dann:

$2 + (4 + 3) = 2 + 4 + 3 = (2 + 4) + 3,$

q.e.d.

Sulla dimostrazione delle proprietà generali si confrontano posizioni estreme che vogliono aggirare l'ostacolo, e di fatto negano che siano da dimostrare: l'innatismo di Leibniz; l'idea di molti, tra cui Frege cita Lipschitz, che le assunzioni di base, come l'indipendenza del numero dal modo di con-

[26] G. Frege, *Grundlagen der Arithmetik* (1888), trad. it. *I fondamenti dell'aritmetica*, in *Logica e aritmetica* (a cura di C. Mangione), Boringhieri, Torino, 1965, pp. 207-349, in particolare pp. 236 sgg.
[27] La dimostrazione consiste nel passaggio da $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$ a $2 + 2 = (2 + 1) + 1$, quindi a $2 + 2 = 3 + 1$ e a $2 + 2 = 4$; nel primo passaggio interviene la proprietà associativa.
[28] E. Schröder, *Abriss der Mathematik und Algebra*, Teubner, Leipzig, 1874, pag. 26, all'inizio del § 41.

tare, sono date da una intuizione interna; e anche la concezione che le considera generalizzazioni induttive, contro cui Frege argomenta in dettaglio.

Innanzi tutto, se si accettasse tale concezione, ci si scontrerebbe di nuovo con il problema di come si dimostrano le verità singolari, se invece di dedurle da, o per mezzo di, quelle generali, sono queste che si ottengono per induzione da quelle particolari. Ma «il terreno aritmetico si mostra tutt'altro che favorevole all'induzione. Manca qui, infatti, quell'uniformità che in altri casi può rendere molto ammissibile un tale metodo». Frege ricorda che già Leibniz aveva osservato che i numeri «risultano non soltanto diversi tra loro per grandezza, ma pure dissimili. Infatti un numero pari è divisibile per due, mentre non lo è uno dispari; 3 e 6 sono numeri triangolari; 4 e 9 sono quadrati; 8 è un cubo, ecc.».

Secondo Frege, «senza dubbio noi ci siamo abituati a considerare i numeri come enti sotto molti aspetti omogenei, ma ciò proviene soltanto dal fatto che noi conosciamo una gran quantità di teoremi generali che valgono per tutti i numeri. Qui però dobbiamo porci dal punto di vista di chi non conosce ancora alcuno di tali teoremi. Allora ci sarebbe difficile trovare un esempio di ragionamento induttivo che facesse al caso nostro». Dopo un paragone con lo scavo di vari strati di terreno, per cui non si sa che cosa ci aspetta, Frege discute l'obiezione che nello scavo gli strati sono incontrati, mentre «i numeri invece vengono proprio creati, determinati in tutto il loro essere, dall'aggiunta di una unità. Rispondiamo: questo può significare soltanto che è possibile dedurre tutte le proprietà di un numero, per esempio di 8, dal modo con cui esso è formato dall'aggiunta di successive unità. Ma con ciò si viene proprio a concedere quanto volevamo, cioè che le proprietà dei numeri derivano dalle loro definizioni; e questo apre la possibilità di dimostrare le leggi generali dei numeri dal metodo di produrli comune a tutti, mentre le proprietà speciali di ciascuno di essi dovrebbero ricavarsi dal modo speciale con cui ogni singolo numero si origina per l'aggiunta di successive unità».

Che i numeri debbano essere definiti attraverso la aggiunta progressiva di una unità, che si caratterizzino come quelli che si ottengono esattamente in questo modo era sensazione diffusa, ma anche difficile da esporre in modo non circolare, come pure basare le dimostrazioni su questo fatto, e conciliarlo con altre definizioni naturali. Schröder ad esempio, nella dimostrazione sopra riportata, inserisce una illustrazione "a parole", dove è detto che dal concetto di addizione segue la possibilità di eliminare le parentesi ove si tratti di somme di unità, e che i passaggi di sopra mostrano come questo si estenda a somme di numeri arbitrari. Schröder tuttavia, pur trattando i numeri come somme di unità, li definiva attraverso la astrazione dalla equinumerosità. Anche Leibniz, nella sua dimostrazione di $2 + 2 = 4$, considerava ogni numero come ottenuto dal precedente per aggiunta di "+1"; ma i numeri come somme di unità si "vedevano" solamente nei casi piccoli.

La trattazione di Grassmann era la prima a sfruttare sistematicamente la definizione dei numeri come somme di "+1", anche se era inevitabilmente ancora imprecisa, perché nella trattazione della ricorsione si rischia davvero la circolarità; Frege vedeva solo quella, e glie la rimproverava, nella dimostrazione della proprietà associativa[29]. La stessa rigidità rivelava Frege per quello che riguarda il metodo assiomatico, e le definizioni implicite, che come quelle ricorsive non rispettavano i canoni della definizione logica esplicita. Frege non considera importante Grassmann, perché gli sembra che non abbia giustificato il suo metodo dimostrativo. Nell'ansia della definizione di Frege c'è una traccia di una disposizione filosofica, che risale a Platone, e si ritrova in Hegel, secondo cui nelle singole scienze vengono assunti come assiomi quelli che altrove, per lo più nella logica, o nella dialettica, sono invece teoremi[30]. Tuttavia anche un matematico come R. Dedekind sentirà il bisogno di «spogliare queste proprietà [fondamentali di N] del loro carattere specificamente aritmetico in modo che esse siano sussunte sotto concetti più generali e attività di comprensione senza le quali non sarebbe possibile alcuna comprensione»[31]. La necessità di una definizione dei numeri nasce dall'interno della matematica.

La definizione dei numeri

Le forme di ragionamento sui numeri, in particolare l'induzione, quest'ultima con cautela e lentamente, hanno preceduto la risposta precisa, e l'analisi stessa di che cosa sono i numeri, da parte dei matematici; tentativi filosofici di definizione, anche i più recenti, come quello empirista alla Mill, possono essere trascurati proprio in quanto non legavano la definizione con la giustificazione delle dimostrazioni relative.

Il fatto è che, per i numeri come per le figure dello spazio, si ragionava come su cose esistenti esternamente, o ricavate dall'esperienza, interna o esterna. Il ragionamento si configurava allora come la scoperta di certe proprietà oggettive, in cui giocava un ruolo fondamentale la deduzione intellet-

---

29 «[Grassmann] cerca di farci aggiungere, per mezzo di una definizione, la legge $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, e scrive a tale scopo»: "Se a e b sono termini qualunque della serie numerica fondamentale, intenderemo per somma $a + b$ quel termine di essa per cui è vera la formula $a + (b + e) = (a + b) + e$, dove e denota l'unità positiva". Contro un tale modo di procedere si possono però elevare due obiezioni. In primo luogo, che esso pretende spiegare la somma per mezzo di sé medesima... In secondo luogo si può muovere l'obiezione che il segno $a + b$ risulterebbe vuoto, qualora non esistesse alcun termine della serie naturale con la proprietà assegnata», Frege, *cit.*, pag. 229.

30 Su Hegel, si veda V. Verra, *Letture Hegeliane*, Il Mulino, Bologna, 1992, pag. 50.

31 R. Dedekind, lettera a Keferstein del 1890, si veda oltre.

tuale. Il ragionamento in sé non era messo in discussione, si trattava del ragionamento in senso lato, non di un ragionamento specificamente matematico; inoltre non c'era né la necessità né la possibilità di dimostrarne la correttezza, al di là delle giustificazioni delle inferenze logicamente valide; una forma di ragionamento come l'induzione matematica non rientrava in questa categoria; possiamo immaginare che anche Gauss con la sua riduzione volesse solo dire che per ogni numero fissato la dimostrazione si poteva ottenere con passaggi logici.

Una giustificazione di un argomento non è possibile al di fuori del contesto della logica moderna, con le sue distinzioni di livello, di semantica e sintassi e simili. Prima sopperiva il consenso, o l'intuizione partecipata. Il ragionamento di Euclide e Fermat per discesa infinita era basato su una proprietà accettata, che ogni numero ha un numero finito di predecessori; ma questa proprietà non costituisce una definizione dei numeri naturali, perché contiene una evidente circolarità; Dedekind la risolverà infatti definendo prima il concetto di infinito. Nello stesso tempo, anche per gli sviluppi in geometria e in algebra, è sempre più difficile, se non impossibile, parlare degli oggetti matematici come se fossero oggetti esistenti nello stesso senso degli oggetti materiali.

Oggetti e ragionamento sono interconnessi in un modo molto forte, sono due momenti della stessa strategia, la definizione degli oggetti e il ragionamento su di essi. Per Grassmann l'unità della teoria emergeva organicamente dalla natura stessa degli oggetti. E' risultato chiaro però anche che gli oggetti sono diversi a seconda di come si ragiona su di essi; perché la logica ha un ruolo fondamentale. Come dice Frege "le proprietà dei numeri derivano dalla loro definizione".

Leibniz definiva ogni numero uno per volta: 2 è 1 + 1, 3 è 2 + 1, 4 è 3 + 1, e così via; altri usavano l'addizione di una unità, con i puntini; a questo Frege sostituisce una definizione generale, collettiva ma in senso distributivo: "un numero naturale è... "; Dedekind definirà l'insieme dei numeri naturali. Dedekind afferma che al di là delle difficoltà di confronto, sembra abbastanza chiaro che Frege si muove nella sua direzione.

La definizione di Frege

L'induzione ha un ruolo decisivo ma non fondante nella definizione di Frege, per quanto la cosa sembri contraddittoria; la spiegazione è che egli crede di ridurre l'induzione alla logica: Frege definisce dapprima "numero associato a un concetto F" come l'estensione del concetto "equinumeroso con F". Inizialmente sembra dunque che non definisca i numeri, ma il concetto di "avere lo stesso numero di"; poi individua alcuni numeri, come lo 0 che è associato al concetto che diremmo vuoto, o contraddittorio, e poi 1, associato

al concetto "essere uguale a 0". Sembrerebbe così non andare oltre a Leibniz; prima di ogni singolo numero deve individuare un concetto; se ci va è per una geniale idea sulla iterazione, o chiusura transitiva di una relazione: definita la relazione di successore immediato, che si può dare indipendentemente dal fatto che esistano numeri arbitrari, egli considera la sua chiusura transitiva. La chiusura transitiva di una relazione è la relazione che si ottiene iterando un numero finito arbitrario di volte la relazione, così come si passa da "genitore" ad "antenato". Così presentata, la nozione di chiusura transitiva presuppone quella di numero naturale arbitrario, e quindi non sembra possibile usarla per definire la serie dei naturali. Ma Frege definisce la chiusura transitiva come la più piccola relazione transitiva che estende quella data, o come l'intersezione di tutte le relazioni transitive che la estendono. E' una definizione per così dire "dall'alto", che evita la nozione di numero naturale, e che permette subito le dimostrazioni per induzione, anche se Frege non le chiama così. Frege in tal modo riesce a parlare in generale dei numeri, invece che solo di concetti a cui sono associati numeri. Attraverso il concetto di chiusura transitiva Frege mette anche una pezza al baco iniziale, dovuto al fatto che sembra supporre di trattare solo concetti con estensioni finite, e quindi con una apparente circolarità. Si noti che, come Schröder, Frege concepisce il numero come misura della numerosità, ma ha bisogno della induzione, che santifica il "+1", per dare la definizione generale.

Le definizioni che hanno successo sono quelle di Dedekind[32] e di Peano[33]; Peano esplicitamente si ispira a Grassmann, e lo riconosce, Dedekind racconta nella lettera a Keferstein come è arrivato alla sua soluzione, dove non c'è traccia inizialmente della equinumerosità, ma solo proprietà strutturali dell'insieme N[34]. La impostazione di Dedekind non è as-

---

[32] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, Leipzig, 1888, trad. it. in R. Dedekind, *Scritti sui Fondamenti della Matematica*, Bibliopolis, Napoli, 1983.

[33] G. Peano, *Arithmetics Principia, novo methodo exposita*, Bocca, Torino, 1889, in *Opere Scelte*, vol. II, Cremonese, Roma, 1958.

[34] In una lettera a H. Keferstein, del 1890, R. Dedekind spiega come il suo saggio sui numeri naturali sia una sintesi di una riflessione sulla «successione dei numeri naturali come si presenta nell'esperienza, per così dire, alla nostra considerazione. Quali sono le proprietà fondamentali mutuamente indipendenti della successione N?... E come potremmo spogliare queste proprietà del loro carattere specificamente aritmetico in modo che esse siano sussunte sotto concetti più generali e attività di comprensione senza le quali non sarebbe possibile alcuna comprensione, ma con le quali invece è fornito un fondamento per la affidabilità e completezza delle dimostrazioni...». Messisi in questa disposizione, si osserva che 1) la successione N è un *sistema* di individui..., 2) gli elementi del sistema stanno tra loro in una certa relazione..., 3) elementi diversi hanno successore diverso..., e così via fino a quando si tratta di esprimere il fatto che gli elementi di N si ottengono iterando un numero fi-

siomatica, si svolge in una logica che non è quella di Frege, ma è una specie di teoria degli insiemi; noi tendiamo a presentare il suo lavoro nella forma assiomatica data da Peano.

La definizione di Dedekind

Dedekind concepisce l'insieme dei numeri naturali come il più piccolo insieme infinito; definisce direttamente un insieme infinito come un insieme che ammette una iniezione non suriettiva in sé stesso; di qui seguono i primi assiomi su zero e sul "successore"; zero è un elemento che non appartiene alla immagine della iniezione, la funzione "successore" è l'iniezione:

$$\mathbf{0} \neq Sx$$
$$Sx = Sy \rightarrow x = y.$$

Quindi esprime il carattere di minimalità alla Frege, con l'intersezione di tutti gli insiemi X che contengono 0 e sono chiusi rispetto alla funzione S. Ne segue che per l'insieme dei numeri vale, e che esso è caratterizzato dal *principio di induzione*:

$$\mathbf{N} = \cap \{ X : 0 \in X \wedge \forall y(y \in X \rightarrow Sy \in X)\}$$

o anche

$$\forall X(0 \in X \wedge \forall y(y \in X \rightarrow Sy \in X) \rightarrow \forall x(x \in X)),$$

come assioma per **N**.

La dimostrazione per induzione di una proprietà A per tutti i numeri, la dimostrazione cioè di $\forall x\, A(x)$, si ottiene da quella di $A(\mathbf{0})$ e di $\forall x(A(x) \rightarrow A(Sx))$ considerando l'insieme $X = \{x \mid A(x)\}$:

$A(\mathbf{0})$	base dell'induzione
$\forall x(A(x) \rightarrow A(Sx))$	passo induttivo, A(x) ipotesi induttiva
$\therefore\ \forall x\, A(x)$	

nito di volte l'operazione di "successore", espressione inaccettabile per l'ovvia circolarità. La lettera, molto profonda e istruttiva, è tradotta in inglese in J. van Heijenoort (a cura di), *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Harvard, 1965, pp. 99-103; trad. it. in *Scritti sui Fondamenti della Matematica, cit.*

Osserviamo che, applicando la forma originaria di induzione all'insieme $\{x \mid \forall y(y < x \rightarrow y \in X)\}$, otteniamo

$$\forall X(\forall x(\forall y < x \rightarrow y \in X) \rightarrow x \in X) \rightarrow \forall x(x \in X)),$$

che si chiama anche induzione ***sul decorso dei valori***. Trascuriamo le varianti in cui si considerano due o alcuni dei predecessori, invece di tutti o di quello immediato. Se contrapponiamo quest'ultima, dopo aver messo il complemento di un insieme X, otteniamo

$$X \neq \varnothing \rightarrow \exists\, x\, (x \in X \wedge \forall y(y < x \rightarrow y \notin X)$$

il cosiddetto ***principio del minimo***, classicamente equivalente al principio di induzione. La relazione < che soddisfa tale principio del minimo si chiama, dopo G. Cantor, un buon ordine. Il tipo d'ordine di un insieme bene ordinato si chiama ordinale; la struttura dei numeri naturali, con <, in questa ottica, si vede come un ordinale che estende tutti quelli finiti, e si indica con ω.

Possiamo così rispondere alla domanda iniziale su cosa è che rende l'induzione corretta; la dimostrazione per induzione è giustificata dal fatto che i numeri sono definiti come quel sistema che soddisfa il principio di induzione.

Logica e intuizione

Fu vera definizione?[35]. Ammettiamo pure di aver definito una nozione, che si chiama "numero naturale", senza usare circolarmente la nozione di numero naturale, ma sfruttando la definizione della chiusura transitiva come la intersezione di tutte le classi con le opportune proprietà di chiusura. Chi ci autorizza a dire che così sono stati definiti i numeri naturali? Per precisare il discorso, conviene supporre che la definizione sia stata data in una teoria, o in un sistema di logica, come sono i sistemi moderni, in cui sono disponibili nel linguaggio descrizioni precise, tecnicamente termini, e più precisamente numerali, per i numeri. Di solito si usano linguaggi con una co-

[35] Ancora adesso continuano le discussioni, con gli argomenti sotto riportati; per una versione recente della diatriba, si veda Ch. Parsons, Frege's Theory of Numbers (1965), in Ch. Parsons, *Mathematics in Philosophy*, Cornell Univ. Press, Ithaca, 1983, pp. 150-75; M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, Cornell Univ. Press, Ithaca, 1975, pp. 28-41.

stante **0** per l'elemento speciale 0 e un simbolo funzionale S per il successore. Tra i termini, si individuano i cosiddetti numerali $\mathbf{n}$, della forma S.....S0 con n ripetizioni del simbolo S. Si noti la differenza tipografica tra $\mathbf{n}$ ed n: $\mathbf{n}$ è un termine della teoria, che intuitivamente descrive il numero n, e che è costruito in riferimento al numero n, ed n è un numero della metateoria con cui si descrive il sistema di logica, il linguaggio innanzi tutto; n è un numero intuitivo, o anche prematematico, se vogliamo. Se io decido di fare *due* applicazioni del simbolo S, costruisco il termine SS**0**, che abbrevio **2**, e dimostro che $\mathbf{2} \in \omega$. Lo stesso se faccio tre applicazioni di S; posso andare avanti così indefinitamente; ma cosa significa indefinitamente? Per ogni n dato, si può costruire, per così dire con le mani, il corrispondente numerale $\mathbf{n}$, e dimostrare che appartiene a ω. Ma quale certezza si ha che questa possibilità valga per tutti? E tutti chi? I numeri intuitivi? Per la dimostrazione, occorre una induzione nella metateoria intuitiva. Questo però significa che l'induzione è un prerequisito ineliminabile della costruzione matematica.

La questione non è del tutto oziosa, come pretenderebbe uno dei possibili rifiuti della stessa; la si incontra anche nella pratica dello sviluppo della teoria. Ad esempio si definiscono le coppie con un esplicito e concreto termine funzionale $\{x, y\}$; poi si dimostra che coincidono con le immagini delle funzioni definite su **2**, iniettive; lo stesso per le terne; è sempre così? E' possibile definire le n-uple per n qualunque, e in modo uniforme? In sostanza si trovano sovrapposizioni con la metateoria anche nello sviluppo puramente matematico della teoria.

Il viceversa, che per ogni $x \in \omega$ esiste n tale che x è uguale a $\mathbf{n}$, è ancora più dubbio, perché l'induzione che si dimostra valere per ω nella teoria non può certo riferirsi a cose esterne, come la *scrittura* delle formule con cui si presentano i numerali. Tenendo distinte teoria e metateoria, quello che si può ottenere è un metateorema affermante che per ogni asserzione dimostrata del tipo $t \in \omega$, t termine chiuso, esiste un n per cui si dimostra anche $t = \mathbf{n}$, cioè t può essere calcolato, ridotto a forma normale. Ma questo è un teorema della metateoria, che si dimostra per induzione sulla complessità dei termini, presupponendo quindi nella metateoria un sistema di naturali ben definito con la proprietà dell'induzione. Nella teoria, dove l'induzione su ω è giustificata, si dimostra che per ogni $x \in \omega$ esiste una successione di x applicazioni della funzione successore allo zero, che è uguale a x. Gli elementi di ω sono in effetti definiti in questo modo. Quello che si dimostra nella teoria è la versione interna della affermazione sulla corrispondenza tra elementi di ω e iterazione del successore, versione che rivela il procedimento seguito per la definizione, la sua idea guida, e che trasforma in un teorema

quello che inizialmente sembrava una circolarità insuperabile[36].

La risposta dei logicisti si attacca a questo risultato; se non c'è la dimostrazione di adeguatezza senza presupporre una forma di induzione, questo non importa, perché quello che fa il logicismo è proporre una definizione usando la quale si può procedere logicamente nella teoria, e tutto funziona, con le versioni interne del tipo di quella sopra illustrata. Si tratta di una definizione matematica di una nozione intuitiva, e come al solito in questi casi non è possibile dimostrazione di adeguatezza della definizione, per la disomogeneità dei due corni del confronto, uno intuitivo e uno formale.

Ma è una scappatoia un po' troppo facile, che allunga qualche ombra sugli obiettivi del logicismo. E' diverso dire che si vuole definire una nozione dal dire che la si vuole sostituire con una precisa. Il logicismo non vuole precisare l'idea di numero; l'idea di numero l'abbiamo, ne è prova il grande sviluppo della matematica; quello che non riusciamo a fare è mettere a posto le dimostrazioni in forma logica, perché non c'è una definizione puramente logica dei numeri; ma i numeri ci sono, non li dobbiamo creare adesso, come se prima della definizione non ci fossero, e non devono neanche essere una cosa diversa; diverse, o finalmente possibili, devono risultare le dimostrazioni, che una volta messa in luce la vera natura logica del numero possono svolgersi in forma logica; quindi una dimostrazione di adeguatezza non è fuori luogo. Altrimenti la definizione in una teoria logica precisa si riduce a una proposta formalista: se si usa questo sistema, senza uscirne, vi si trova il corrispondente di tutto quello che ci si aspetta. Se dunque l'obiezione non è devastante, getta tuttavia dei dubbi sul senso della operazione logicista.

---

36 La difficoltà non si risolve pensando di identificare teoria e metateoria. Innanzi tutto ai fini della definizione la metateoria non dovrebbe essere la stessa, nel senso di contenere già disponibili i numeri con l'induzione, perché è questa che deve essere giustificata logicamente. Ad ogni modo, se la metateoria, contenente espressioni e nozioni insiemistiche, è proprio la teoria degli insiemi, ad esempio ZF; allora la teoria-oggetto si costruisce attraverso la cosiddetta aritmetizzazione, cioè le definizioni sintattiche iniziali precise sono definizioni di insiemi: si definisce prima l'alfabeto con una scelta di insiemi per i simboli di base, e poi si costruiscono termini e formule per concatenazione di questi insiemi. In questo linguaggio, non si possono descrivere le formule della metateoria, al massimo costruirne con la stessa struttura di quelle della metateoria. Una formula costruita perché corrisponda a $x \in \omega$ è in effetti un termine della metateoria, che denota un insieme, e che si indica con $\lceil x \in \omega \rceil$. Una formula della teoria che dica che per ogni x di ω esiste un numero della metateoria al cui numerale x è uguale, dovrebbe essere del tipo $\lceil x \in \omega \rightarrow \exists n\ (x = \mathbf{n} \wedge \ldots) \rceil$, con al posto dei puntini la formula corrispondente alla affermazione "n appartenente ai naturali della metateoria"; eppure a destra non posso mettere altro che ω; non si può scrivere $\lceil x \in \omega_1 \rightarrow \exists\, n\ (x = \mathbf{n} \wedge n \in \omega_2 \rceil$, perché $x \in \omega$ è una abbreviazione per la formula che esprime la definizione dedekindiana dei naturali, ed è uguale nella teoria e nella metateoria.

Le critiche più pesanti alla definizione dei numeri sono state mosse da H. Poincaré, sia ai logicisti che a Hilbert. Perché una definizione sia accettabile, occorre un teorema di esistenza, quello la cui mancanza Frege rimproverava al metodo assiomatico; per Frege la esistenza era garantita dalle proprietà del suo sistema di logica, finché la contraddittorietà dell'assioma di comprensione (cioè appunto di esistenza), non lo ha mandato in pezzi. Per Hilbert la non contraddittorietà degli assiomi era sufficiente, ed anche per Poincaré lo era, in tutti gli altri contesti, esclusa l'aritmetica; infatti la non contraddittorietà delle teorie matematiche del tempo era dimostrata riducendola a quella dei numeri naturali, ma per questi nessuna altra riduzione sembrava possibile; restava disponibile, e affascinante, solo l'idea di Hilbert di sfruttare la formalizzazione per dimostrare la non contraddittorietà con un ragionamento esterno, sulle dimostrazioni, che provasse combinatoriamente l'impossibilità di due dimostrazioni con conclusioni opposte; ma Poincaré intuiva che un simile ragionamento, ammesso che riuscisse, non avrebbe potuto che essere di tipo induttivo: il ragionamento per induzione non è riducibile alla logica.

Unicità e modelli non standard

La definizione di Dedekind e Peano ha avuto un grande successo, definitivo, soprattutto per due teoremi dimostrati da Dedekind: il primo giustifica le definizioni per induzione, che sono le definizioni ricorsive primitive, nella terminologia moderna; il secondo è la dimostrazione di unicità, a meno di isomorfismi, di questi sistemi "semplicemente infiniti", come li chiama Dedekind, o modelli degli assiomi aritmetici, come sono chiamati ora. Vediamo prima questo, anche se dipende dalla giustificazione delle definizioni ricorsive, perché Dedekind ritiene di aver dato una definizione soddisfacente e completa, proprio in quanto ha un teorema di esistenza e di unicità. Siamo al livello della teoria-oggetto, senza affrontare il problema del rapporto con il metalivello.

Il teorema di esistenza è la parte caduca, Dedekind pensava di esibire come insieme infinito l'insieme dei pensieri. Il teorema di unicità è molto facile e naturale, perché basato di nuovo sulla induzione, ed è per questo che è all'origine di una incomprensione tra matematici e logici posteriori, che introdurranno *distinguo* linguistici limitativi.

Dati due sistemi semplicemente infiniti, o due modelli degli assiomi di Dedekind-Peano[37], siano M_1 e M_2, con rispettivamente 0_1 e 0_2 come loro

[37] Presentiamo le dimostrazioni relative al sistema di Dedekind nella forma più spedita e attuale, senza preoccupazioni di fedeltà e attribuzione storica dei vari con-

primo elemento e s_1 e s_2 come funzioni successore, si definisca la funzione

$$f(0_1) = 0_2$$
$$f(s_1(x)) = s_2(f(x))$$

e si ha una funzione da M_1 in M_2 che si può dimostrare facilmente essere suriettiva, e un isomorfismo, per induzione. Si consideri infatti $M_2 - \mathrm{im}(f)$, o più esplicitamente, che è utile, $M_2 - \{x \mid \exists\, y \in M_1,\ x = f(y)\}$. Questo insieme dovrebbe avere un minimo z, se non è vuoto; ma $z = s_2(u)$, e $u = f(v)$ per qualche v; sicché $z = f(s_1(v))$, assurdo. L'induzione si usa in M_1 per la definizione di f, e in M_2 per la dimostrazione della suriettività.

L'accettabilità o no del teorema è un caso di quale logica si usa. In particolare con logica si intendono qui le assunzioni di esistenza di insiemi. Il principio del minimo si applica a tutti gli insiemi; ma che tipo di insieme, sottinsieme di M_2 è questo, a cui si deve applicare il principio del minimo in M_2? E' un insieme che dipende da M_1; se M_1 non ci fosse, non avrebbe neanche senso; se non ci fosse, certo si avrebbe l'unicità, ma l'osservazione serve a far capire che la sua esistenza, che dipende da un'altra struttura, è un fatto delicato.

Il problema è di decidere se si vuole una trattazione autonoma dell'aritmetica come teoria assiomatica, così come si trattano altre teorie, per esempio le geometrie, o se la si vuol vedere immersa in una teoria degli insiemi; nel primo caso si usa un minimo di teoria degli insiemi, solo per parlare delle strutture che ne sono modelli; si accetta solo l'ipotesi di un insieme infinito; nel secondo caso la teoria degli insiemi serve da teoria unica fondamentale, con tutta la forza e la delicatezza delle sue assunzioni; bisogna accettare anche la nozione dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(\omega)$, più che numerabile. Se si accetta tutto quello che è esprimibile in linguaggio insiemistico, e che comprende non solo la matematica, ma la semantica generale, siamo sicuri che non debba essere accettato anche il concetto di "piccolo", e la dimostrazione induttiva che ogni numero è piccolo?

Se l'induzione è voluta per dimostrare proprietà aritmetiche, è plausibile che si applichi solo alle proprietà che parlano dei numeri; e quindi che gli insiemi che si considerano per il principio del minimo siano insiemi definibili nella struttura di cui si parla. Di fatto non si considerano insiemi, ma le loro definizioni.

Se si restringono le proprietà a cui si applica l'induzione a quelle defini-

tributi; chi è interessato a un approfondimento può vedere L. Henkin, "On mathematical induction", *American Math. Monthly*, **67** (1960), pp. 323-38, dove sono discusse le interessanti differenze dovute alla presenza o meno, accanto all'assioma di induzione, dei due assiomi sul successore.

bili nel linguaggio del primo ordine dell'aritmetica[38], la dimostrazione di unicità non vale più; non solo, ma esistono proprio modelli non isomorfi. La dimostrazione esplicita si può fare in tanti modi, la si può fare discendere da fatti logici generali, ma una costruzione esplicita, quella dei cosiddetti modelli non standard dell'aritmetica, è stata fatta da Th. Skolem nel 1934. La costruzione è una costruzione algebrica (diventata) abbastanza canonica, quella dell'ultrapotenza.

Preso un insieme di indici I, si considerano tutte le funzioni da I in **N**, e su di esse le operazioni sono definite per punti. I sottinsiemi di I formano un'algebra di Boole, $\mathcal{P}$(I), che può servire ad assegnare dei valori, valutazioni in un'algebra diversa da {Vero, Falso}, alle proposizioni: ad esempio la misura in cui f = g sarà l'insieme $\{i \in I: f(i) = g(i)\}$; poi la valutazione si estende a tutte le formule, con le operazioni booleane. Si possono identificare le funzioni in relazione a un ultrafiltro non principale $\mathfrak{I}$, ponendo

$$f \approx g \Leftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathfrak{I}$$

e si ottiene una struttura a due valori che è in generale una estensione elementarmente equivalente, ma non certo isomorfa, a quella di partenza. Quella di partenza è immergibile in essa, facendo corrispondere a ogni n la funzione costante $f(i) = n$; e se I è **N** stesso la (classe della) funzione identica $f(i) = i$ è diversa da tutte queste.

Intuizionismo

Che gli oggetti siano condizionati dalla logica che si usa si vede anche considerando la posizione degli intuizionisti; per gli intuizionisti come E. Brouwer, ispirato da Poincaré, i numeri sono dati da una intuizione primaria, che ha a che fare con un principio di bi-unità che ricorda la diade di Platone; ne segue che l'induzione è ammessa senza problemi di giustificazione. Al massimo si osserva che se si ha una dimostrazione di A(**0**) e di $A(x) \rightarrow A(Sx)$ allora con la costruzione di ogni numero n si può anche trasportare passo passo la affermazione della proprietà A fino a n. E' da notare però che per gli intuizionisti l'induzione non è equivalente al principio del minimo, che vale solo per le proprietà decidibili; non è difficile far vedere che dal principio del minimo si riesce a ricavare il principio del terzo escluso. Classicamente molte dimostrazioni per induzione si fanno passando al principio del minimo, e spesso l'induzione è giustificata con il principio del minimo, perché si è diffusa e imposta dopo Dedekind la nozione

[38] Si intende con ciò che le variabili del linguaggio variano solo sugli elementi, e non sui sottinsiemi, dell'universo di discorso.

di buon ordine. Per gli intuizionisti non è così; le dimostrazioni per induzione degli intuizionisti devono sempre essere proprio per induzione[39]. Anche con le relazioni di buon ordine, o ben fondate, gli intuizionisti hanno dei problemi, devono sempre rovesciare l'ordine in cui si muovono, accettando solo una direzione; per esempio il lemma di König classicamente afferma che in un albero finitario senza confini superiori per la lunghezza dei rami esiste un ramo infinito; per gli intuizionisti vale solo la formulazione, classicamente equivalente, che in un albero finitario in cui ogni ramo è finito esiste un confine superiore alla lunghezza dei rami.

Induzione e ricorsione

Con la restrizione alle proprietà definibili nel linguaggio del primo ordine dell'aritmetica, il principio di induzione non si può più esprimere con un unico assioma, ma diventa uno schema, una formula

$$A(\mathbf{0}) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(Sx)) \rightarrow \forall x A(x)$$

per ogni formula A.

Con tale restrizione si perde il teorema di unicità, ma non la giustificazione delle definizioni ricorsive. Anzi, tale giustificazione, ottenuta con metodi ristretti, diventa una giustificazione non solo della esistenza delle funzioni così definite, ma anche della loro calcolabilità; non si perde quindi, e anzi si guadagna, capacità di calcolo, si vede che potenza computazionale e capacità dimostrative procedono mano nella mano. Infatti si vede che ulteriori, più fini restrizioni introdotte nello schema di induzione, ammettendo non tutte le proprietà del primo ordine, ma solo quelle esprimibili con formule di tipo particolare, dalle più semplici alle più complesse, corrispondono a diversi livelli di complessità delle funzioni ricorsive; non tutte le funzioni ricorsive lo sono allo stesso modo. Tali restrizioni caratterizzano dunque le teorie che si ottengono non solo in un senso logico, ma anche matematico, in relazione alle funzioni ricorsive che si possono introdurre e controllare nella teoria. Si tratta di rispondere alla obiezione mossa da Frege a Grassmann, secondo cui potrebbe non esserci il valore indicato dalla definizione ricorsiva, dimostrando invece che c'è. Ricordiamo prima come si dimostra il secondo importante teorema di Dedekind, la giustificazione delle definizioni ricorsive primitive.

Per semplicità di notazione, non consideriamo parametri. Data una coppia di equazioni

[39] Si veda A.S. Troelstra, D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, North Holland, Amsterdam, 1988.

$$f(0) = n_0$$
$$f(s(x)) = k(x, f(x)),$$

dove n_0 è un numero e k una funzione supposta data, si considerano le funzioni finite, definite solo su segmenti dei naturali $\{0,..., n\}$ e tali che per ogni i appartenente al loro dominio soddisfano le equazioni di cui sopra. Ce ne sono, perché si possono costruire con le mani, ad esempio la funzione definita sul solo 0 data dalla coppia $\{<0, n_0>\}$. Dopo di che si dimostra che due di queste coincidono sulla intersezione dei loro domini, e quindi se ne può fare l'unione, e che questa unione è una funzione, che ha come dominio l'insieme di tutti i naturali, e che soddisfa le equazioni di cui sopra. Tutte queste dimostrazioni si fanno per induzione.

Se tuttavia si vuole restare nel linguaggio aritmetico, e non fare intervenire linguaggio e costruzioni insiemistiche, come l'unione infinita, si possono interpretare le equazioni come regole per il calcolo dei valori della funzione f, e dimostrare che tali regole, aggiunte alle regole logiche usuali e agli assiomi dell'aritmetica, sono sufficienti per calcolare per ogni n il valore $f(n)$, cioè trovare un numero per cui nella teoria si dimostra $f(n) = m$. Si dice anche che $f(n)$ viene messo in forma normale. Veramente si dovrebbe lavorare più formalmente con i numerali, ma teniamo le notazioni usuali.

Per una tipica ricorsione primitiva, la dimostrazione di questo fatto si può condurre per induzione. Bisogna dimostrare per induzione che per ogni n esiste un procedimento finito, che chiamiamo riduzione a forma normale, che ci dà il valore di $f(n)$. Di questo procedimento si può parlare nell'aritmetica, perché quello che produce, la traccia che lascia e che bisogna asserire che esiste, è una successione di valori progressivi $a_0,..., a_i$, che parte da $a_0 = f(0) = n_0$ e poi è tale che ogni numero è ottenuto dal precedente con la seconda equazione, quindi l'i+1 esimo numero a_{i+1} è uguale a $k(i, a_i)$. Per restare nel linguaggio aritmetico, bisogna codificare con numeri le n-uple di numeri, ma questo si può fare con operazioni elementari; se s codifica un numero, con $(s)_i$ si indica la sua i-esima componente.

La proprietà da dimostrare per induzione è della forma $\exists$ s(s è una successione di riduzione...) come dalla descrizione precedente.

Ora non è difficile dimostrare il passo induttivo:

$\exists$ s (s riduzione per n...) $\rightarrow \exists$ s(s riduzione per s(n)...),

ovvero, con leciti spostamenti e trasformazioni di quantificatori,

$\forall$r (r riduzione per n... $\rightarrow \exists$ s (s riduzione per s(n)...));

ma la dimostrazione di questo fatto è costruttiva: aggiungendo alla successione r data per n la coppia $<n+1, k(n,(r)_n)>$ si ha una s che soddisfa la condizione. La dimostrazione è completata se vale il principio di induzione per le cosiddette Σ_1 formule, della forma $\exists x\ \phi$, dove ϕ è priva di quantificatori.

Questa è considerata la dimostrazione che le funzioni ricorsive primitive sono giustificate, nella teoria con la Σ_1-induzione.

Si consideri invece la definizione ricorsiva della seguente funzione, del tipo di quella di Ackermann:

$$f(0, y) = 2y$$
$$f(s(x),0) = 1$$
$$f(s(x),s(y)) = f(x, f(s(x),y))).$$

E' una funzione ricorsiva, ma non ricorsiva primitiva, perché il suo saggio di crescita è maggiore di quello di una qualunque funzione ricorsiva primitiva. L'esistenza di una riduzione si dimostra con una doppia induzione: prima si dimostra per $f(0,n)$, per induzione su n; poi si deve fare per $f(s(m),n)$, n qualunque, assumendo l'ipotesi induttiva per $f(m,n)$, n qualunque; l'ipotesi induttiva è che "per ogni n, $f(m,n)$ si riduce a un numerale". La formula è del tipo Π_2, ovvero della forma $\forall x \exists y \phi$, dove ϕ è priva di quantificatori.

Se si indebolisce invece il principio di induzione secondo rigorosi dettami predicativisti, si ottiene un sistema in cui neanche l'esponenziazione è ovunque definita[40].

Hilbert voleva dimostrare la non contraddittorietà dell'aritmetica lavorando progressivamente su sottosistemi più forti. La sua idea di misurare la complessità in base ai quantificatori era sensata, come si sapeva già da altri risultati della logica e come si vede dal collegamento con le funzioni ricorsive. J. Herbrand nel 1931 ha ottenuto la non contraddittorietà per il sistema con l'induzione su formule prive di quantificatori, e la ha dimostrata nel sistema stesso, spiegando anche perché non si applica il secondo teorema di Gödel: nella classe delle funzioni di cui si può dimostrare la esistenza nella teoria non c'è la funzione universale rispetto alla classe stessa.

Il secondo teorema di Gödel

La non dimostrabilità della non contraddittorietà dell'aritmetica di Peano nella teoria stessa, che abbiamo menzionato, è dovuta proprio alle caratteristiche dell'induzione; il fatto che l'induzione riduca a due passi una infinità di casi fa sì che se si vuole espandere una dimostrazione aritmetica, che contiene l'induzione, magari nidificata, in una successione di passi più elementari, logici o basati sugli altri assiomi, si ottenga una struttura infinita. La dimostrazione che nessuna di queste "dimostrazioni" infinite può ter-

[40] E. Nelson, *Predicative Arithmetic*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1986.

minare con una contraddizione richiede a sua volta una forma di induzione generalizzata, transfinita. Questo tipo di induzione non è altro che la induzione sul decorso dei valori, riferita a una relazione $<$ che non è la solita relazione tra numeri naturali, ma una relazione di buon ordine. Per esempio, per dimostrare qualche fatto generale su tutte le coppie di numeri, si può usare l'induzione rispetto all'ordine lessicografico

$$\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \ldots, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \ldots, \langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \ldots$$

Il tipo d'ordine di questa successione è l'ordinale transfinito $\omega \times \omega = \omega^2$, ma l'induzione fino a ω^2 è una regola derivata aritmetica, perché la relazione di sopra è definibile dalla formula

$$\langle x, y\rangle \angle \langle u, z\rangle \Leftrightarrow x < u \lor (x = u \land y < z),$$

ed è rispetto a questa formula che si prova nell'aritmetica la proprietà di buon ordine.

Il fatto curioso è che nella aritmetica si giustificano, e quindi si possono usare, le induzioni transfinite, su buoni ordini definibili, fino a tutti gli ordinali minori di quello che serve per concludere la dimostrazione di non contraddittorietà. E' proprio solo al punto critico individuato dall'ordinale ε_0 che viene meno la possibilità dimostrativa. E' questo un caso in cui dalla (comprensione dei motivi della) impossibilità della dimostrazione di non contraddittorietà esce rafforzata la confidenza nella stessa; la dimostrazione di non contraddittorietà in effetti sappiamo come deve essere e in un certo senso la vediamo, solo non possiamo proiettarla dentro all'aritmetica. Pensare in questa situazione che l'aritmetica sia contraddittoria, a parte il conforto sperimentale induttivo di millenni di esperienza, vorrebbe dire accettare che la natura, o qualche demone, si diverta a prenderci in giro.

Ma perché le capacità dimostrative dell'aritmetica si fermino proprio al limite a cui la non contraddittorietà diverrebbe dimostrabile (perché non dovrebbe occorrere una induzione fino a $\varepsilon_0 + \omega$, per dirne uno, superiore al limite per l'aritmetica, per la dimostrazione di non contraddittorietà?) è un fatto per nulla intuitivo. Ci sono altre proposizioni aritmetiche non dimostrabili nell'aritmetica, per cui è facile però farsi una ragione della loro indimostrabilità; per esempio una funzione ricorsiva che cresca più velocemente di tutte quelle dimostrabili nella teoria, e per così dire le diagonalizzi. Ma perché non si debba poter dimostrare proprio la non contraddittorietà è un fatto che non si vede se non si studia con attenzione il primo teorema di incompletezza di Gödel.

Né bastano le versioni superficiali, in cui si afferma che esiste una pro-

posizione vera ma indimostrabile; in tali formulazioni non si vede il ruolo della non contraddittorietà. Gödel ha dimostrato per la sua proposizione ϕ che se ϕ fosse dimostrabile allora sarebbe dimostrabile anche la negazione. Dunque la non contraddittorietà dell'aritmetica implica la non dimostrabilità di ϕ. Fin qui non ci sarebbe nulla di male; se una teoria è non contraddittoria, qualcosa di non dimostrabile ci deve essere, e se ci fosse davvero qualche proposizione indimostrabile, la teoria sarebbe certamente non contraddittoria. Gödel non ha dimostrato che ϕ è indimostrabile, bensì solo che la non contraddittorietà implica la sua non dimostrabilità. Il fatto è che ϕ è una proposizione costruita in modo così perverso, usando le possibilità tecniche dell'autoriferimento, che ϕ è uguale (nella codifica aritmetica della sintassi) a "non è dimostrabile ϕ", ed allora la non contraddittorietà non è dimostrabile perché il ragionamento del tutto plausibile di sopra porterebbe a dimostrare non la non dimostrabilità di ϕ ma ϕ stessa[41].

La proposizione indecidibile di Gödel è un esempio di proposizione $\forall n\ A(n)$ per cui non esiste dimostrazione nell'aritmetica di Peano, mentre per ogni k esiste una dimostrazione di $A(\mathbf{k})$. Non è possibile trovare altri esempi in modo più semplice, anzi è giusto dire che l'obiettivo del teorema di incompletezza è proprio quello di dimostrare l'esistenza di una simile proposizione[42]. La sorpresa che suscita l'incompletezza non avrebbe ragione di essere se ci si ponesse in un'ottica strettamente sintattica, dal momento che $\forall n\ A(n)$ è chiaramente una proposizione diversa da $A(\mathbf{k})$ e anche dall'insieme delle $A(\mathbf{k})$. "Ma $\forall n\ A(n)$ *dice* che per ogni $\mathbf{k}$ vale $A(\mathbf{k})$": "dire che" ci sposta al livello semantico, ai numeri di cui si parla; "$\forall n\ A(n)$" parla dei numeri della teoria, come sono visti dalla teoria, mentre "per ogni k, $A(\mathbf{k})$" parla dei numeri della metateoria; la discrepanza che si manifesta, l'impossibilità di dimostrare che sono uguali, è la stessa discussa sopra a proposito della adeguatezza delle definizioni logiciste.

Generalizzazioni in algebra e informatica

Il merito della presentazione assiomatica delle teorie, come è noto, è che non interessano gli oggetti di cui sembra che si parli, ma le proprietà che si usano e sono codificate negli assiomi. La considerazione degli assiomi sugge-

41 Si veda G. Lolli, *Incompletezza*, Il Mulino, Bologna, 1992.

42 "Per ogni k, una dimostrazione di $A(\mathbf{k})$" implica "una dimostrazione di $\forall n\ A(n)$" solo se le infi-nite dimostrazioni di $A(\mathbf{k})$ hanno la stessa struttura e una lunghezza contenuta, in un senso che si può precisare.

risce in genere altre situazioni, oltre a quelle che li hanno originati, in cui si applicano, così come sono o in forma generalizzata.

Una prima generalizzazione importante della induzione è stata l'estensione agli insiemi bene ordinati qualunque, l'induzione transfinita; non ha avuto molto successo fuori della teoria degli insiemi, perché per applicarla occorreva prima individuare un buon ordinamento, magari artificiale, del dominio; ha avuto successo invece un'altra ulteriore generalizzazione che è stata chiamata induzione noetheriana, dall'uso fattone da E. Noether, 1921, nello studio dell'ordine tra Z-moduli finiti che ha portato alla nozione di anello noetheriano. La relazione d'ordine in questi casi non era introdotta estrinsecamente, ma era un dato naturale degli oggetti in questione. La novità è che la relazione d'ordine è una relazione di ordine parziale, con la proprietà di buona fondatezza, che generalizza quella di buon ordine. Una relazione ben fondata è una relazione in cui ogni sottinsieme non vuoto ha un elemento minimale, non necessariamente minimo.

Bourbaki[43] espone il principio di ricorrenza noetheriana in questi termini: in un insieme noetheriano E (cioè parzialmente ordinato e tale che ogni insieme non vuoto ha un elemento massimale), sia F un insieme con la proprietà che per a $\in$E, se la relazione x > a implica x $\in$F, allora a $\in$F; allora F = E. Il principio è formulato in termini di relazioni verso l'alto, come nelle prime applicazioni noetheriane.

In Cohn[44], il principio di induzione generalizzato, o induzione noetheriana, è formulato così: se A è un insieme ordinato in cui ogni insieme non vuoto ha un elemento minimale, e B è un sottinsieme che contiene a, ogni volta che contiene tutti gli elementi x < a, allora B = A.

In Grätzer[45] si trova anche un'altra forma di induzione generalizzata: dopo aver definito un sistema di chiusura come una famiglia di sottinsiemi di un insieme A, chiusa rispetto ad arbitrarie intersezioni, e dopo aver introdotto l'insieme generato da X, denotato da [X], come l'intersezione di tutti i sottinsiemi che contengono X, pone: dato un sistema di chiusura su A, per dimostrare che una proposizione P vale per tutti gli elementi di [M] basta dimostrare che (i) l'insieme degli elementi che soddisfano P contiene l'insieme generatore M e (ii) appartiene al sistema di chiusura.

Gli informatici chiamano "strutturale" l'induzione noetheriana, secondo la terminologia introdotta da Curry e Feys[46]. Parlano di induzione struttu-

43 N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Théorie des Ensembles*, Ch. 3, 6.5, Hermann, Paris, 1963[2], pag. 76. A partire da Poincaré, "ricorrenza" è la parola preferita dai francesi per l'induzione,

44 P.M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper&Row, New York, 1965, pag. 20.

45 G. Grätzer, *Universal Algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1968, pag. 27.

46 H.B. Curry, R. Feys, *Combinatory Logic*, North Holland Amsterdam, 1958, pag. 48.

rale nel caso che il dominio sia una classe di oggetti definita induttivamente; la precisazione della induzione ha portato anche a una maggior chiarezza su quelle che sono le definizioni induttive, non di funzioni, ma di insiemi.

Definizioni induttive

La definizione per induzione di un insieme si articola attraverso il passo di base, che pone nell'insieme gli oggetti di base, e il passo induttivo, che afferma la chiusura dell'insieme rispetto a determinate operazioni.

Tutti i tipi di dati sono definiti induttivamente, i numeri, le liste, gli alberi, i linguaggi; si tratta di strutture che, in termini algebrici, sono le algebre libere di particolari categorie di strutture. L'algebra universale è la disciplina in cui tali nozioni sono studiate nella massima generalità. Una categoria di strutture è individuata da una "segnatura", che specifica per le algebre il numero delle operazioni e dei loro argomenti: le operazioni a zero argomenti sono identificate con gli oggetti. L'algebra libera della categoria è una algebra che è immergibile in ogni altra algebra, nozione che generalizza quella di minimalità. Un altro modo di presentare le cose è quello di vedere l'algebra libera come costituita dai termini formati con le costanti e i simboli di operazione, generalizzando la definizione di polinomio. L'algebra libera di una categoria di strutture è individuata da ω livelli: nel livello 0 ci sono le costanti; nel livello (n+1)-esimo ci sono tutti i termini che si ottengono da quelli del livello n-esimo applicando ad essi in tutti i modi possibili i simboli delle operazioni.

Ad esempio, per una segnatura che contempli:

- oggetti di base $c_0, c_1, \ldots$
- operazioni $\sigma^{(2)}$, $\tau^{(3)}$, rispettivamente a due e tre argomenti,

l'algebra libera è definita da

1) $c_i \in X$
2) se $t_1, t_2 \in X$, anche $\sigma(t_1,t_2) \in X$
   se $t_1, t_2, t_3 \in X$, anche $\tau(t_1, t_2, t_3) \in X$
3) nient'altro appartiene a X, o
3') X è il più piccolo insieme che soddisfa 1) e 2).

Con la clausola restrittiva 3), o 3'), si intende affermare che una parola dell'alfabeto è un numerale solo se si ottiene iterando un numero finito di volte le clausole di base e induttive. Si ritrova qui la alternativa della costruzione dal basso, per iterazione appoggiata ai numeri naturali, e definizione dall'alto per intersezione, che si presentava ai tempi di Frege per la chiusura transitiva. Solo che ora, avendo la definizione dedekindiana dei numeri, la equivalenza delle due definizioni è dimostrabile.

Esempi si trovano nelle definizioni delle varie categorie sintattiche nella costruzione di un linguaggio, per esempio alla definizione dei numerali, a partire da una costante **0** e un simbolo S; allora la definizione dei numerali è data secondo questa tipica definizione induttiva:

- **0** è un numerale (base)
- se *t* è un numerale, allora *St* è un numerale (clausola induttiva), e, se non la si dimentica, la clausola restrittiva: null'altro è un termine.

Automazione

All'inizio gli informatici hanno fatto il loro incontro con la induzione come se si trattasse di una meravigliosa scoperta, con l'entusiasmo dei neofiti. Secondo Burstall[47] l'induzione strutturale è molto semplice, può essere giustificata facilmente in termini delle proprietà d'ordine delle strutture di dati «usando un noto principio di induzione dell'algebra», ed è facile da usare. Ci si esprime ancora come se le strutture di dati non fossero strutture algebriche; come sempre con i neofiti, non sono mancate le ingenuità, come quando Curry e Feys distinguono l'induzione strutturale da quella deduttiva, usata per dimostrare qualcosa per tutti i teoremi, nonostante abbiano detto che le derivazioni sono un caso particolare di definizione induttiva, con gli assiomi come oggetti di base e le regole come costruzioni.

Burstall afferma che i principi su cui regge l'induzione strutturale si giustificano mettendoli in relazione con "il noto principio di induzione dell'algebra", che prende nella formulazione di Cohn. La spiegazione della magia dell'induzione è sempre basata sul principio del minimo: «in generale, il principio di induzione... permette di assumere casi arbitrari della congettura da provare, purché questi casi facciano decrescere qualche misura in qualche ordine ben fondato»[48].

Gli usi più frequenti riguardano la terminazione e la correttezza dei programmi: un metodo generale[49] consiste nel presentare i programmi sotto forma di diagrammi di flusso, e nel preparare la dimostrazione di correttezza associando a ogni freccia una asserzione sullo stato delle cose (relazioni tra i valori delle variabili) al momento dell'attraversamento della freccia; per la freccia di uscita, la relazione tra le variabili di *output* è la descrizione della funzione calcolata dal programma; si dimostra poi, per ogni *box*, che la validità della asserzione di entrata, insieme alla esecuzione delle operazioni

[47] R.M. Burstall, "Proving properties of programs by structural induction", *Comput. J.*, **12**(1)(1969), pp. 41-8.
[48] Boyer-Moore, *cit.*
[49] Si veda la descrizione in Knuth, *cit.*, pp. 15-6.

indicate nel *box*, implica la validità della asserzione di uscita; questo è il passo induttivo, per induzione sul tempo di esecuzione, che permette di affermare la validità di tutte le asserzioni in ogni istante della esecuzione.

Si osserva ancora che la forma delle dimostrazioni di correttezza dei programmi, per cui si propone di usare l'induzione, risulta molto simile a quella del programma a cui si riferiscono. A definizione induttiva corrisponde in modo naturale e privilegiato la dimostrazione induttiva[50].

Le osservazioni degli informatici vanno inserite nel quadro della loro ricerca di dimostratori automatici di correttezza e di un servizio di *debugging* meccanizzato, però in modo che le dimostrazioni non siano più difficili da leggere di altre parti della matematica. La correttezza di un programma è una affermazione di tipo aritmetico; tutti i dimostratori basati su calcoli logici devono per forza aggiungere informazioni di carattere aritmetico, nella forma di assiomi, o di lemmi, che tuttavia non fanno parte della dimostrazione automatica vera e propria. Per ovviare agli inconvenienti di tale situazione, per cui spesso le dimostrazioni sono complete solo *modulo* la accettazione di impegnativi lemmi aritmetici, Boyer e Moore hanno implementato un dimostratore che incorpora la regola di induzione.

Il sistema di Boyer e Moore è una teoria aritmetica in un linguaggio di λ-termini senza quantificatori; si potrebbe dire che è la versione contemporanea e raffinata della aritmetica di Grassmann; questa era stata ripresa già negli anni Venti da Skolem, che aveva presentato un sistema tutto basato solo sulle definizioni ricorsive (primitive), senza necessità del discorso usuale coinvolgente i quantificatori; il successivo perfezionamento dei linguaggi funzionali permette oggi di presentare sistemi adeguati per tutta la logica e l'aritmetica. Ogni affermazione esistenziale è sostituita da una funzione esplicita (ad esempio nella dimostrazione della completezza del programma TAUTOLOGY.CHECKER, il sistema di Boyer-Moore introduce FALSIFY per la affermazione che se il TAUTOLOGY.CHECKER non afferma la tautologicità di una formula, allora FALSIFY le assegna una interpretazione per cui vale F).

La induzione è messa nella forma noetheriana, su relazioni qualsiasi purché ben fondate, e quindi con la necessità di verificare, ogni volta che si introduce con una definizione ricorsiva una nuova funzione, che rispetto a qualche misura ben fondata la ricorsione diminuisce la complessità. Gli oggetti trattati non sono naturalmente solo i numeri naturali, ma qualunque tipo di oggetto ammetta una definizione induttiva.

Per rendere efficiente il dimostratore, si deve capire quando e come, a

[50] Un'altra forma di induzione è considerata nella teoria della calcolabilità, chiamata induzione da ricorsione: è una strategia che si applica quando si vuole dimostrare che due funzioni sono uguali e si mostra che entrambe soddisfano la stessa equazione ricorsiva, per cui si è dimostrato che implica l'unicità.

quale formula, applicare l'induzione, si deve rispondere a domande di questo tipo:

-quando dovrebbe essere usata l'induzione
-come ci si inventa un argomento induttivo appropriato
-quando si deve espandere una definizione.

Perché il dimostratore possa decidere, anche automaticamente si badi, oltre che interattivamente, quando e come applicare l'induzione, è proposta una serie di euristiche per preparare la formula per l'induzione. Le strategie generali sono familiari dalla analoga trattazione dell'argomento in matematica: talvolta conviene sostituire termini dati con altri, come I e I-J con K+J e K, con K+J al posto di I; se si ha una equazione è utile sostituire un termine all'altro in qualche occorrenza ed eliminare l'equazione, che nella parte logica della dimostrazione aumenterebbe il numero di applicazioni delle regole; talvolta è meglio dimostrare un teorema più generale, perché così l'ipotesi induttiva è più forte. Questa è una caratteristica molto istruttiva della dimostrazione per induzione: talvolta è meglio, o più facile, dimostrare un teorema più forte. Un caso facile da immaginare è quando si debba dimostrare la convergenza di un procedimento, per ogni *input*, e si riesce a valutare una maggiorazione, un confine superiore, alla possibile lunghezza dei calcoli; allora questa maggiorazione incorporata nella ipotesi induttiva è utile nel passo induttivo, dove però bisogna ricordarsi di verificarla. Negli esempi sviluppati da Boyer e Moore, la strategia è realizzata solo come una specie di generalizzazione, sostituendo variabili per termini che hanno svolto il loro ruolo. Il dimostratore di Boyer-Moore ha avuto successo oltre le più rosee previsioni.

Riflessioni didattiche

Applicazioni come quelle di Boyer-Moore mostrano come l'induzione sia un metodo che si sposa in modo naturale e sistematico, al punto da poter essere meccanizzato, agli oggetti definiti induttivamente. C'è da osservare tra l'altro che è proprio nei formalismi dei linguaggi di programmazione, con le assegnazioni, che l'espressione dell'induzione può assumere la forma più ambigua, con la ipotesi induttiva che isolata dal contesto è proprio uguale alla tesi da dimostrare.

Se le macchine possono fare dimostrazioni per induzione, è uno scandalo che non le possano fare gli studenti; bisognerà riportare nell'insegnamento le euristiche accaparrate dalle macchine. A giustificazione degli studenti, va detto che la loro mente non è vergine come quella dei calcolatori; nella loro mente si combattono due nature e due concezioni del numero, quella aristotelica e quella platonica. Il loro problema è il raccordo tra i numeri per cui vale l'induzione e i numeri che conoscono dalla esperienza precedente, che non sono gli stessi; e le prime presentazioni dei numeri lasciano una forte traccia, difficile da modificare in seguito.

I numeri si imparano contando, ma le operazioni aritmetiche sono acquisite con una sorta di intuizione geometrica, o spaziale, in cui gioca un ruolo decisivo il raggruppamento. La somma è definita insiemisticamente, nella sostanza, come numero della unione disgiunta, o in versioni equivalenti; la moltiplicazione è già qualche volta una iterazione della somma, che si avvicina alla definizione ricorsiva, ma la sua presentazione è piuttosto quella della abbreviazione della addizione, nel calcolo dell'area del rettangolo.

La separazione tra numeri e cose non è mai stata totale e priva di ambiguità. Quando le parole per i numeri sono entrate stabilmente ed efficacemente nel linguaggio, con i vari sistemi di rappresentazione posizionale, si è recuperato quello che c'era all'inizio, cioè una visione spaziale di raggruppamento, naturalmente e ingegnosamente realizzata nell'accostamento delle lettere nelle parole. La fonte della rappresentazione in una base è pur sempre il raggruppamento; è la visione spaziale che ha dato origine alla espressione formale. La giustificazione [illegible] delle regole di calcolo sui numeri in base dieci, per essere spiegata, fa riferimento essenziale ai raggruppamenti in dieci o multipli di dieci.

Gli assiomi, le assunzioni di base del ragionamento, le regole sono costitutive della realtà; quando l'intuizione geometrica si traduce in regole di calcolo per le operazioni, anche le regole per i numeri in base dieci diventano costitutive, i numeri sono identificati con quella rappresentazione decimale; si dimentica la motivazione spaziale, si dimentica la domanda su cosa sono i numeri, si smette anche il gioco del "+1".

L'intuizione platonica e intuizionista della generazione dei numeri attraverso il "+1", che porta alla intuizione dell'infinito e dell'induzione, viene momentaneamente soffocata. Il succo della induzione è, come diceva Pascal, di riassumere una infinità di casi in due soltanto; prima bisogna apprezzare la (necessità della) infinità.

La intuizione geometrica più che tanto non può dare: arriva alla moltiplicazione, con l'area del rettangolo, ma non all'esponente, dove si tratta di contare il numero di funzioni[51]. A questo punto è salutare e necessario un arretramento della intuizione geometrica e la sua sostituzione con una intuizione di livello superiore, che sia anche capace di fare vedere analogie strutturali tra vari campi diversi.

Per trovare un raccordo tra i due tipi di induzione, può esser utile rical-

[51] Può essere interessante notare che, mentre in ogni modello dell'assioma di induzione, anche senza assiomi per S, addizione e moltiplicazione esistono e sono univocamente determinate, non è così per l'esponenziazione, che richiede anche gli assiomi per S; si veda Henkin, *cit.*

care quello che è successo nella storia, quando agli albori dell'età moderna si è incominciato a disegnare *pattern*, Maurolico con le dimostrazioni progressive, altri con i puntini, che indicavano la comprensione di un *pattern* da ripetere; è sempre una intuizione geometrica, ma affiancata a nostre costruzioni. Poincaré affermava che nell'insegnamento si deve ripercorrere la storia, attraversando magari rapidamente certi passaggi, ma senza sopprimerne nessuno[52].

Un'altra via per introdurre l'induzione è suggerita invece dalle applicazioni più recenti, e da quello che ci hanno insegnato, vale a dire le definizioni induttive di altri sistemi di enti, più generali. Potrebbero essere i linguaggi, se si introducono elementi di informatica, o altri tipi di dati. La necessità di fare ragionamenti su tutti gli enti di un insieme definito induttivamente, che sono chiaramente infiniti, può far capire l'opportunità di aver una tecnica adatta, una struttura a cui appoggiarsi, e questa struttura è disponibile ed obbligata dalla definizione induttiva: l'insieme è affettato in livelli, e si vede la possibilità di una padronanza induttiva degli stessi. In questo modo si usano ancora i numeri ma come strumento, come in effetti si è abituati a fare, per le dimostrazioni relative ad altre cose, piuttosto che in ragionamenti interni verso i numeri stessi.

52 H. Poincaré, "La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignment", *L'enseignement mathématique*, **1** (1889), pp. 157-62.

TAVOLA ROTONDA

ARITMETICA FRA SCUOLA MEDIA E SUPERIORE

*Intervento di **Lucia Ciarrapico****:

Non esiste un netto confine tra aritmetica e teoria dei numeri, branca della matematica molto vasta. Per aritmetica si può intendere la teoria relativa all'insieme dei numeri naturali, con tutti i problemi ad essa connessi (questioni sui numeri primi, sulla divisibilità, problemi irrisolti e così via) o, più ampiamente, la teoria sui vari insiemi numerici. Mi atterrò a quest'ultima interpretazione limitando il mio intervento - non è possibile parlare di tutto - al modo di introdurre i vari insiemi numerici che si studiano e alle operazioni in essi, con alcune osservazioni sui salti di qualità che via via si devono compiere, se non si vuole che l'insegnamento a spirale di cui molto si parla oggi - ritornare sugli stessi argomenti più volte - collassi in un cerchio, come dice, con una immagine molto suggestiva, il prof. Villani.

Leggendo i programmi già riformati della scuola elementare e media e quelli proposti per la scuola secondaria superiore, si osserva che l'aritmetica è presente, pur con diversa denominazione, in tutti i gradi di scuola.

Essa appare con questo nome - Aritmetica - nei programmi della scuola elementare, con il nome di "Insiemi numerici e calcolo" nei programmi del biennio e del successivo triennio della scuola superiore.

Gli obiettivi di apprendimento proposti - in termini di competenze da acquisire - subiscono una grande evoluzione, passando da una conoscenza in cui l'intuizione gioca un ruolo fondamentale ad una conoscenza razionale e consapevole ed, infine, ad un ripensamento critico dei concetti via via appresi ed utilizzati nel corso degli anni.

I contenuti di studio in parte si ripetono, con livelli di maggiore approfondimento, in parte si ampliano.

La formulazione dei vari programmi è caratterizzata da una stretta continuità tra i vari livelli scolastici: una continuità di proseguimento e di sviluppo che richiederebbe una programmazione coordinata, a lungo termine, dalla scuola elementare alla superiore. Anche perché sono profondamente convinta che certe sintesi finali sono possibili solo se lungo il cammino didattico sono fatte certe osservazioni, sono ripresi di tanto in tanto temi e problemi incontrati, facendo emergere quanto rimane sedimentato nelle varie esperienze di apprendimento degli alunni.

Ma una programmazione a lungo termine è molto difficile da realizzare all'interno della scuola italiana, nella quale è già molto se si effettua una buona programmazione nel medesimo istituto.

Tuttavia qualcosa i docenti possono fare: conoscere, e non superficialmente, le linee proposte per gli altri gradi di scuola: ciò che precede (se c'è) e ciò che segue (se c'è).

E veniamo al tema. Nella scuola media sono ripresi ed ampliati alcuni

---

* Ministero della Pubblica Istruzione, Roma.

dei concetti considerati nelle scuola elementare. Ad esempio si parla ancora di operazioni sui numeri naturali.

Nel presentare queste sarà bene far osservare che l'OPERAZIONE è un procedimento che associa a due numeri di un insieme un elemento dello stesso insieme e che ciò nell'ambito dei numeri naturali è sempre possibile per le operazioni dirette (la somma e il prodotto). Ciò condurrà poi al concetto di operazione interna ad un insieme.

Le proprietà formali delle operazioni, introdotte nella scuola elementare a livello intuitivo, vanno presentate in maniera più sistematica facendo via via notare - per ora - che esse valgono ancora negli insiemi ampliati.

Nel parlare delle operazioni inverse (sottrazione e divisione) è bene chiarire il significato del termine "operazione inversa" e l'impossibilità di poterle sempre eseguire nell'insieme dei numeri naturali. Di qui la necessità di passare ad ampliamenti numerici:

dai naturali agli interi relativi per la sottrazione,

dai naturali a razionali per la divisione con divisore $\neq 0$.

L'opportunità e l'utilità di usare numeri ordinati in due versi sono abbastanza ovvie e gli esempi utili da presentare agli allievi sono tanti (d'altra parte già qualche cenno dovrebbe essere stato fatto nella scuola elementare).

Tradizionalmente i numeri relativi sono l'insieme costituito da un numero naturale e da uno di due segni prefissati. Perciò se a è un numero naturale, i relativi possono essere indicati con:

$$\overrightarrow{a} \quad , \quad \overleftarrow{a}$$

oppure:

$$\bar{a} \quad , \quad \underline{a}$$

oppure, evitando di introdurre nuovi simboli, con:

$$+a \quad , \quad -a$$

con l'intesa che +0 e -0 sono lo stesso numero.

I relativi sono pertanto:

.... -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 ....

Naturalmente possono sorgere delle perplessità negli alunni perché questi simboli, (+ e -) sono stati già usati per indicare le operazioni di addizione e di sottrazione dei naturali. In verità, come ben si sa, l'aritmetica che su essi si costruisce è così ben congegnata da non generare confusione tra il duplice aspetto dei due simboli, con opportuno uso delle parentesi, economizzando invece in sforzo mentale.

Più delicata è l'introduzione dei numeri razionali e cioè il passaggio dai frazionari, come operatori, ai razionali, intesi come numeri che rappresentano una frazione e tutte quelle ad esse equivalenti: 1/2, 2/4, 3/6 sono solo modi diversi per rappresentare lo stesso numero. Si tratta pur sempre di un salto d'astrazione, anche se si è ben lontani dal concepire, per ora, i razionali come elementi di un insieme quoziente.

I naturali vanno visti come sottoinsiemi dei relativi e dei razionali, e a

questo proposito riescono particolarmente significative le rappresentazioni di Venn, rimandando ad altro momento considerazioni più sofisticate. I numeri +1, +2, +3, ... e 1, 2, 3,... sono - per ora - la stessa cosa.

Nella scuola media si introducono altre operazioni sui numeri naturali:

- una nuova operazione diretta, l'operazione di potenza, che associa ad una coppia di numeri naturali (la base può anche essere un numero razionale o un relativo) un altro numero naturale. $3^2 = 9$ sta a significare che alla coppia ordinata (3,2) si associa il numero 9. E' opportuno far rilevare che la potenza è la prima operazione diretta che non gode della proprietà commutativa, ma la cosa non sconvolge perché è abbastanza evidente che base ed esponente giocano un ruolo diverso;

- ed una nuova operazione inversa, anzi una delle operazioni inverse della potenza, l'estrazione di radice come ricerca della base, dati la potenza e l'esponente. L'altra operazione inversa (l'esponente da dare ad una base per ottenere un'assegnata potenza) e cioè il logaritmo, avverrà in ben altro momento. Se l'operazione di potenza è visualmente ben presentata - ad esempio usando colori diversi per i tre numeri, base, esponente e potenza - è abbastanza agevole far intuire che le operazioni inverse della potenza sono due.

Vale la pena di introdurre l'algoritmo della radice quadrata (così noioso!)? Ritengo che serva essenzialmente come avvio ai numeri reali, previsto nella scuola media: per far vedere, cioè, che la ricerca di quel numero il cui quadrato è, ad esempio 2 conduce ad un insieme di operazioni che non ha termine, tale che la risposta alla domanda "Qual è quel numero il cui quadrato è 2" non è possibile darla se non si esegue un ulteriore ampliamento dei numeri che si farà in seguito.

Gli alunni affrontano molti problemi, soprattutto geometrici, che conducono all'operazione di estrazione di radice, ad esempio il calcolo della misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele nota quella del lato. La misura esatta, in questo momento, non può essere data: si utilizzano i valori approssimati e si opera su questi.

Con ciò si apre un nuovo capitolo, quello del calcolo approssimato, non in contrapposizione, ma in sostituzione del calcolo esatto quando questo non è possibile: lo sviluppo della relativa teoria è rinviato al biennio.

Vorrei a questo punto sottolineare alcuni aspetti in ordine didattico che a me sembrano fondamentali:

- l'attenzione al calcolo mentale che, seppure con il progresso della tecnica non ha più l'importanza pratica di un tempo, ha sempre una forte valenza formativa sia per l'acquisizione di capacità atte a formulare ipotesi sull'ordine di grandezza dei risultati delle operazioni, sia perché nell'eseguire mentalmente il calcolo l'alunno fa uso quasi istintivamente delle proprietà formali delle operazioni giungendo alla comprensione del loro significato;

- l'abitudine all'uso intelligente delle calcolatrici tascabili nei riguardi delle quali non ho prevenzione. Su questo uso vi sono contrastanti opinioni.

Ritengo, in proposito, che gli alunni debbano dapprima padroneggiare gli algoritmi delle operazioni, anche sotto l'aspetto puramente meccanico (le tabelline devono essere conosciute); successivamente debbano comprendere i ragionamenti che sottostanno a tali algoritmi (incolonnamenti, addizioni parziali ecc.). Altrimenti sentiremo ancora quell'alunno che, annoiandosi a fare una divisione, chiedeva al professore: "Perché si dice sempre abbasso il 4, abbasso il 5 e non evviva il 4, evviva il 5"!

A questo punto sia liberamente consentito l'uso, soprattutto per il calcolo con numeri a molte cifre, della calcolatrice tascabile. La quale, tra l'altro, se dotata di qualche memoria, consente l'esecuzione di espressioni numeriche senza scrivere niente sul foglio. Ma bisogna aver capito bene l'ordine delle operazioni ed il significato delle parentesi.

Passando ad un discorso sul biennio l'osservazione che nasce immediata alla lettura del tema "Insiemi numerici e calcolo" dei programmi proposti, è che quasi tutti gli argomenti che ne fanno parte sono già inclusi nel programma della scuola media. Sembra quasi che nel biennio siano previsti pochi passi avanti.

E' bene che sia così. Perché il biennio in cui convergono alunni provenienti da scuole classi differenti, con disomogeneità di preparazione, nonostante la scuola media unica, deve rappresentare un momento di consolidamento dei concetti appresi in precedenza, che ora vengono ripensati in maniera consapevole e sistematica.

Alcuni salti di qualità possono comunque essere fatti.

- E' il momento di far rilevare che l'insieme dei numeri naturali non è un sottoinsieme dei razionali o degli interi relativi, ma è isomorfo aritmeticamente a un loro sottoinsieme: 3 e +3 non sono la stessa cosa. Per comprare delle mele dirò "Dammi 3 mele" e non "Dammi +3 mele". Analogamente 3 e la frazione 6/2 non sono la stessa cosa: 3 implica l'operazione del contare mentre 6/2 implica l'operazione del dividere e raggruppare.
- Così è il momento di far rilevare che gli insiemi numerici più ampi via via incontrati sono definiti proprio in modo che permangano le proprietà formali : non ci può essere un'aritmetica diversa tra i naturali e i razionali e i relativi.
- I numeri razionali possono ora essere visti come elementi di una classe quoziente rispetto alla nota relazione di equivalenza, anche per dare qualche esempio di un insieme quoziente, concetto previsto dai programmi del biennio.
- Gli alunni conoscono il valore posizionale delle cifre nella scrittura usata e dovrebbero aver compreso il grande salto di qualità che si è compiuto con l'introduzione della numerazione posizionale per la determinazione degli algoritmi delle operazioni. Sanno che la rappresentazione dei razionali in forma decimale porta a decimali finiti e a decimali illimitati periodici. Ora è tempo di far vedere che l'apparente diversità tra questi è dovuta solo alla base di numerazione scelta per rappresentarli. I due tipi di numeri hanno la stessa natura: basta passare dalla base 10 alla base 3 perché un decimale finito abbia una rappresentazione decimale periodica.

Nel biennio è prevista l'introduzione dei numeri reali, seppure in maniera intuitiva. Sia che gli irrazionali siano presentati come un ampliamento legato alla necessità di dare significato universale all'estrazione di radice di un numero naturale, sia che siano presentati come rapporto di grandezze incommensurabili, i cui possibili esempi sono sempre ricondotti all'estrazione di radice (ancora non si è parlato di lunghezza di una circonferenza), occorre dimostrare e non solamente osservare che $\sqrt{2}$ non è esprimibile con una frazione. Pertanto al fine di dare a tale espressione un significato occorre introdurre una nuova entità numerica che permetta di individuare $\sqrt{2}$ attraverso le coppie di valori approssimati per difetto e per eccesso deducibili da un allineamento illimitato di numeri decimali, con la dovuta attenzione agli allineamenti con tutti 9, e dando, sia pure in forma intuitiva la possibilità di confrontarli, addizionarli e moltiplicarli.

Nella pratica si opera con i valori approssimati. In questo momento è necessario portare l'attenzione degli alunni sull'ordine di grandezza delle approssimazioni e sulla propagazione degli errori, quantomeno nelle operazioni di addizione e moltiplicazione. Soprattutto occorre portare l'attenzione sulle risposte che fornisce la calcolatrice e sulla giusta interpretazione di esse; altrimenti l'alunno non capirà perché il risultato del calcolo, effettuato diciamo manualmente, di $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$ dà, come risultato aritmetico, 4, mentre lo stesso calcolo, eseguito con la calcolatrice, porta ad un altro numero.

Nel triennio i numeri reali vanno riconsiderati in modo rigoroso: solo ora, infatti, si può pensare ad una introduzione definitoria.

Pienamente convinta che la motivazione dell'introduzione di nuovi numeri debba scaturire dalla necessità di risolvere questioni sospese - e questo lo si è fatto nel biennio - e che esistono molti modi per definire i numeri reali, alla Peano, alla Weierstrass ad esempio, che, tuttavia richiedono concetti come quelli di estremo, superiore e inferiore, o di limite, non ancora noti agli studenti, suggerirei di far ricorso alla teoria delle classi contigue o alle partizioni di Dedekind.

In un caso, fatto osservare che un numero razionale è sempre elemento di separazione di classi contigue di numeri razionali - classi soddisfacenti cioè alle proprietà della separazione e dell'avvicinamento indefinito - e che non sempre una coppia di classi contigue di razionali ha in questo insieme un elemento di separazione, il numero reale può essere definito come coppia di due classi contigue di razionali, salvo poi a dimostrare, una volta introdotti il confronto e le operazioni dirette su tali classi, che un numero reale, comunque sia, è elemento di separazione della coppia di classi contigue che lo individuano.

Questa teoria consente la costruzione di un'algebra che soddisfa al principio della permanenza delle proprietà formali, ma ha l'incoveniente di non definire in modo univoco i numeri reali, in quanto esistono infinite coppie di classi contigue che definiscono lo stesso numero reale. Il limitarsi alle classi contigue dei decimali approssimati per difetto e per eccesso a meno di 1, 1/10, 1/100 elimina questo inconveniente ma richiede una costruzione artificiosa dell'aritmetica su di essi (la somma degli approssimati per difetto e per eccesso a meno di unità, di un decimo, di un centesimo di due numeri reali conduce a due classi contigue del numero somma, che però non sempre sono gli approssimati a meno di 1, 1/10, 1/100 ecc.). Per giungere a tali classi occorre compiere delle operazioni alquanto artificiose, con la solita attenzione agli allineamenti decimali con tutti 9.

La definizione formalmente più corretta è quella delle classi di partizione di razionali dovuta a Dedekind ed è quella, peraltro, suggerita dai nuovi pogrammi. In essa un numero reale è definito da una sola partizione ed è possibile costruire una perfetta algebra delle partizioni, anche se poi, dal punto di vista pratico, non mancano le difficoltà.

A questo punto si potranno introdurre le operazioni di potenza a base reale non negativa e ad esponente prima razionale e poi reale e l'operazione di logaritmo.

Non mi pare il caso, a livello di scuola secondaria, parlare della distinzione tra numeri algebrici e trascendenti. E' invece il caso - ed i programmi ne parlano - di porre attenzione a ciò che distingue e non distingue gli insiemi numerici infiniti conosciuti: naturali, razionali, reali. Ovviamente non è pensabile di sviluppare un'aritmetica dei transfiniti, ma alcune idee si possono dare parlando di numerabilità dei numeri naturali e dei razionali (la dimostrazione per questi ultimi è abbastanza agevole), di densità dei razionali, e ovviamente dei reali, della non numerabilità di questi ultimi, la cui dimostrazione è più delicata, e della loro completezza, intesa come possibilità di risolvere tutti i punti rimasti in sospeso nello sviluppo dell'artimetica.

L'ultimo ampliamento numerico considerato è quello dei numeri complessi, al fine di dare significato generale all'operazione di estrazione di radice con radicando negativo: modalità didatticamente corretta ma storicamente errata. E' facile costruire un'algebra su questi numeri in cui si conservano tutte le proprietà delle operazioni. Il discorso diventa un pò delicato per quanto riguarda l'ordinamento che per questi numeri non è archimedeo. L'insieme dei reali è, infatti, l'ultimo ampliamento archimedeo. Ma non è affatto necessario parlare di ordinamento dei complessi nella scuola secondaria.

A questo punto dal numero naturale conosciuto in prima elementare bisogna, dopo un lungo cammino, chiudere il ciclo con considerazioni sul medesimo numero.

E' ben noto che la sistemazione rigorosa dell'artimetica è avvenuta solo nel secolo scorso. Quando oramai erano ben note le basi formali dell'aritmetica e dell'algebra, l'attenzione degli studiosi si rivolse alla critica dei fondamenti dell'aritmetica stessa, cioè alla critica delle ragioni che giustificano le definizioni delle varie classi di numeri godenti delle note proprietà formali. L'affinamento di una scienza porta sempre a ridiscutere questioni di principi, e come si sa, ciò non è avvenuto solo per l'aritmetica.

Appare giusto al termine degli studi secondari, seguendo il processo storico, portare l'attenzione degli alunni su alcune considerazioni di ordine critico in aritmetica, quanto meno in alcuni indirizzi di studio.

Gli studenti conoscono i vari insiemi numerici, le motivazioni degli ampliamenti, la conservazione delle proprietà. Detti insiemi, tranne i naturali, sono stati introdotti geneticamente servendosi di classi di numeri precedentemente definiti. Il discorso può essere ripreso e reso più rigoroso, con un cammino a ritroso, attraverso definizioni degli enti numerici che si avvalgono unicamente di enti già introdotti, senza postulare l'esistenza di altri oggetti matematici.

I complessi possono essere presentati come coppie ordinate di reali: il numero complesso a+ib è la coppia (a,b). Le operazioni di addizione e moltiplicazione possono essere definite nel modo seguente:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$$
$$(a,b) \times (c,d) = (ac-bd,ad+bc)$$

L'uguaglianza di due numeri è ovviamente l'identità.

I razionali a loro volta possono essere presentati come coppie ordinate di naturali o di interi: la frazione a/b con $b \neq 0$ è la coppia ordinata (a,b) con l'intesa che le coppie (a,b) e (c,d) sono lo stesso numero se $a\ d = b\ c$. In altri termini, la relazione R ora detta è una relazione di equivalenza e, pertanto, induce sul prodotto cartesiano ZxZ_0, dove Z è l'insieme degli interi e $Z_0 = Z - \{0\}$, una partizione in classi di equivalenza: si può definire numero razionale l'elemento della classe quoziente ZxZ_0/R.

L'aritmetica è quella nota.

Per quanto riguarda gli interi relativi è indubbio che la presentazione tradizionale (l'unione di un numero naturale e di uno di due segni) è logicamente corretta e naturalmente intuitiva, didatticamente efficace. Viene però postulata l'esistenza di due segni e, come dice Bertrand Russell "il metodo di postulare l'esistenza di ciò di cui si ha bisogno presenta certo molti vantaggi, ma sono vantaggi identici a quelli del ladro rispetto all'onesto lavoratore: è come andare a rubare qualcosa invece di procurarsela onestamente".

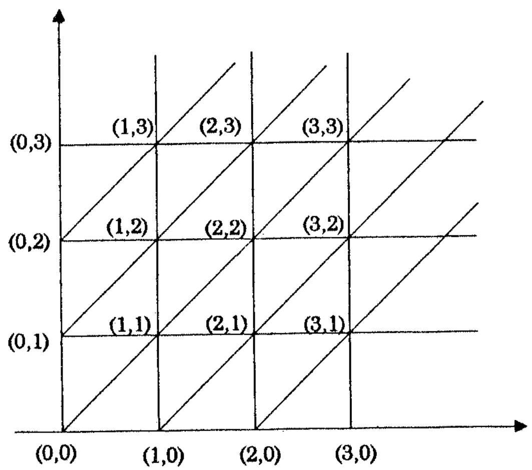
E' il caso, allora, di far vedere come anche gli interi relativi possono essere introdotti come coppie ordinate (a,b) di naturali considerando lo stesso numero due coppie (a,b) e (c,d) quando a+d=b+c. Al fine di avere una definizione univoca di numero relativo si può osservare che la relazione suddetta, chiamiamola R', è anch'essa una relazione di equivalenza che induce nell'insieme di tutte le coppie, cioè nel prodotto cartesiano NxN una suddivisione in classi di equivalenza. Si può pertanto dire, per fugare ogni ambiguità, che i numeri relativi sono gli elementi della classe quoziente NxN/R'.

Tutto ciò può apparire abbastanza complicato, ad un primo approccio; in effetti però, non appena si osserva che la coppia (a,b) è equivalente ad:

(a-b,0) , (0,0) , (0,b-a)

a seconda che $a \gtrless b$, si possono scegliere come rappresentativi delle classi di equivalenza le coppie (n,0), (0,0), (0,n). Nel primo caso la coppia (e la classe che rappresenta) la diremo numero relativo positivo, nel secondo nullo, nel terzo negativo: l'aritmetica che si costruisce su essi risulta abbastanza agevole.

Una rappresentazione grafica molto efficace di essi è la seguente:



Le coppie sulle diagonali sono equivalenti: ogni diagonale rappresenta pertanto un elemento dell'insieme quoziente, mentre le coppie situate sugli assi coordinati sono quelle scelte come rappresentative delle classi.

Si vede così che i diversi numeri con i quali lo studente ha operato nel corso degli studi sono ricondotti al numero naturale, per il quale non è possibile una introduzione genetica.

E' vero che Kronecker, per significare la non opportunità di definire i numeri naturali, diceva che "I numeri naturali li ha fatti Iddio, il resto è opera dell'uomo", ma è pur necessaria una loro definizione rigorosa, presentandoli come cardinali attraverso considerazioni di puro ordine logico (l'astratto di insiemi equipotenti o la classe delle classi equivalenti) oppure - come è suggerito nei nuovi programmi - assiomaticamente, alla Peano, modalità da cui scaturisce la concezione di numero come ordinale (numero d'ordine in una successione).

Così il ciclo si chiude: lo studio dell'aritmetica che inizia in prima elementare con l'introduzione del numero naturale si conclude con una riflessione critica sul medesimo concetto.

Intervento di Pietro Locati

Una premessa: dato che non appartengo alla categoria dei "cattedratici", ma a quella degli insegnanti della scuola media superiore, il mio contributo non consisterà in una lezione, ma nell'esposizione di come presento un argomento di aritmetica ai ragazzi di I liceo scientifico.

Evidentemente l'esposizione scritta di un processo didattico che si svolge attraverso il dialogo con la classe rischia di rendere scialbo l'argomento; mi scuso e faccio appello all'esperienza di insegnante dei lettori.

Tutti noi sappiamo che le somme dei numeri dispari danno come risultato la successione dei quadrati. I ragazzi invece no. Non voglio tuttavia "comunicarlo" a loro, ma farlo "scoprire" attraverso esempi e ragionamenti.

Gli argomenti di aritmetica si prestano in modo particolare ad esercitare i ragazzi nel lavoro di scoperta, perché presentano proprietà che spesso si "leggono" con una certa immediatezza.

Nel nostro caso io di solito cerco di introdurre l'argomento scrivendo sulla lavagna, senza dire niente, le prime somme:

1 = 1
1+3 = 4
1+3+5 = 9
1+3+5+7 = 16
1+3+5+7+9 = 25
....

Osservando queste somme i ragazzi riescono a "leggere" (se si ha un po' di pazienza) una prima proprietà: sommando numeri dispari successivi, si ottengono dei quadrati. Sollecitando altre osservazioni, i ragazzi scoprono altre proprietà:

- la somma dei primi 5 numeri dispari dà il quadrato di 5 ...
- la somma dei primi .... numeri dispari dà il quadrato della media aritmetica tra il primo e l'ultimo
- la somma dei primi .... numeri dispari dà il quadrato del numero centrale o della semisomma dei due numeri centrali ecc.

La prima osservazione è quella più significativa, le altre un po' meno; mi pare tuttavia importante non deprezzare nessuna delle proprietà "scoperte", che hanno significato proprio perché trovate direttamente dai ragazzi.

Si pone ora il problema della generalizzazione del discorso, e la prima difficoltà che si presenta è quella di come scrivere i numeri dispari.

Mi pare opportuno far presente ai ragazzi, in questo contesto, che la matematica insegna a "leggere" e a "scrivere". Anzi, enfatizzando, si potrebbe dire che insegna solo a leggere e a scrivere. In effetti il lavoro che essi stanno facendo si potrebbe interpretare come un lavoro di lettura e di scrittura.

Se si chiede ai ragazzi come pensano di scrivere i numeri dispari, talvolta propongono di indicare un numero dispari con d e un numero pari con p. La prima volta che venne formulata, essa mi sembrò decisamente sciagurata: mi era chiaro che il suggerimento era sbagliato; sapevo come si scrivono i numeri dispari; però mi trovavo spiazzato nel formulare, così all'improvviso una spiegazione esauriente.

D'altra parte è sempre stato mio convincimento che gli errori non devono essere accantonati, ma valorizzati, perché spesso costringono a rimettere in discussione il modo di insegnare e il modo con cui i ragazzi comprendono un argomento (in questo caso l'uso della notazione letterale).

Allora la proposta formulata dagli alunni non è da annoverare tra le sciagure, ma tra gli eventi fortunati, al punto che quando non emerge dagli studenti, sono io stesso a presentarla per poter avere occasione di fare una discussione in proposito.

In questo caso preferisco non dare subito una risposta al problema, sia per costringere i ragazzi a riflettere su di esso, sia per avere altro materiale su cui fondare la spiegazione.

Penso inoltre che i ragazzi si debbano abituare a non avere tutte le spiegazioni subito e "gratuitamente", ma a cogliere la necessità di una fatica mentale per superare le difficoltà.

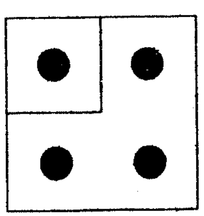
In questo caso è forse opportuno affermare che la proposta è sbagliata e avviarli alla soluzione del problema proponendo un problema più semplice: come indicare numeri pari. Solitamente la risposta è corretta: 2n. Allora la scrittura dei numeri dispari viene immediatamente: 2n+1 o 2n-1.

I ragazzi, sollecitati, si accorgono che la scelta più opportuna è 2n-1: in questo modo sostituendo ad n il numero 1 si ottiene il primo numero dispari; sostituendo 2 si ottiene il secondo, e così via.

$$1+3+5+7+9+....+2n-1 = n^2$$

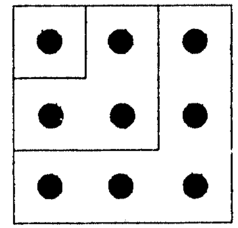
Questa è la scrittura, ma il risultato sarà valido in generale?

I ragazzi si sono già abbastanza smaliziati in situazioni precedenti per accettare il risultato in modo acritico; tuttavia questa volta la scoperta è troppo interessante perché si debba rinunciare ad accettarla in generale. Bisogna riuscire a dimostrarlo e la dimostrazione non è immediata.



Si può cominciare con una dimostrazione "grafica". Si disegna sul piano un punto, corrispondente al numero uno. Poi si collocano intorno ad esso altri tre punti. La figura che si ottiene è riprodotta a sinistra ed è un quadrato.

Se adesso collochiamo altri cinque punti disponendoli lungo il lato destro e



lungo il lato inferiore del quadrato, si ottiene di nuovo un quadrato (si veda la figura di sinistra). Se poi collochiamo, in modo analogo altri sette punti ... otteniamo di nuovo un quadrato, e così via.

La "dimostrazione grafica" non è brutta, anzi. Ha una lontana ascendenza (i Pitagorici) ed inoltre è meno banale di quanto possa sembrare, perchè può essere interpretata.

Se la somma dei primi 4 numeri dispari dà 4^2, il 5° numero dispari si "dispone", si "adagia" su due lati del quadrato, fino a dare uno nuovo quadrato.

Cerchiamo di descrivere il fatto con i numeri:

$$\begin{array}{lcl} 1 & & = 1^2 \\ 1 + 3 & & = 2^2 \\ 2^2 + 5 & & = 3^2 \\ 3^2 + 7 & & = 4^2 \\ 4^2 + 9 & & = 5^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

Adesso cerchiamo di far scrivere dai ragazzi la generalizzazione:

se $1 + 3 + 5 + ... + 2n\text{-}1 = n^2$

n^2 + il successivo di 2n-1 =...

il successivo di 2n-1 è 2n+1

$n^2 + 2n+1 = (n + 1)^2$!!

Evidentemente c'è il problema
- di far scrivere il successivo di 2n-1
- di "leggere" il quadrato di un binomio

sollecitando i ragazzi, anche in questo caso, e non fornendo noi i risultati.

Si sta applicando il principio di induzione: a questo livello non va enunciato esplicitamente, ma si può "forzare" i ragazzi a descriverlo con le loro parole, anche in modo rozzo:

"Se un risultato, che vale per i primi n termini, si può ricavare per il termine n+1 , ... si può dire che...."

Va fatta, evidentemente, la verifica per un caso particolare (cioè si ha bisogno di un caso di partenza) e la "regola" vale da quel caso in poi.

A questo punto può essere opportuno far costruire dai ragazzi un semplice programma per l'elaboratore elettronico che visualizzi i risultati ottenuti. Si tratta di un facile esercizio, che viene abitualmente svolto da ragazzi di I liceo scientifico circa due mesi dopo l'inizio dell'anno scolastico. La sua versione in linguaggio Pascal è la seguente:

```
program sommadis;
var d,s,i,n:integer;
begin
  clrscr;
  Write('somma dei primi n numeri dispari  n = ');
  readln(n); writeln;
       s:=0;
       for i:=1 to n do
            begin
            d:=2*i-1;
            writeln(s:8,'  + ',d:8,'  = ',s+d:8);
            s:=s+d;
            end;
end.
```

Il listato del programma può suggerire alcune osservazioni (in generale ritengo necessario non lasciar perdere queste occasioni per sottolineare la valenza matematica di talune istruzioni).

1) s:=s+d; si tratta di un procedimento di tipo ricorsivo. E' un' istruzione che esprime il procedimento della dimostrazione "grafica", e, più ancora, della sua interpretazione: dal risultato ottenuto si ricava il risultato successivo. Vale forse la pena di osservare che la ricorsione viene molte volte presentata come un accorgimento dell'informatica, dimenticandone la valenza matematica.

2) come far scrivere al calcolatore i numeri dispari? Si tratta di riprendere la questione lasciata in sospeso precedentemente, per cercare, con i ragazzi, una risposta.

Mi limito ad alcuni accenni in proposito.

Ho usato volutamente la variabile d per indicare i numeri dispari; ma perché d risulti efficace abbiamo dovuto porre d:=2*i-1. Il calcolatore "non capisce" il significato della lettera d; capisce invece d:=2*i-1. E' un problema di linguaggio: d, in quanto abbreviazione di dispari, appartiene alla lingua italiana; d:=2*i-1 è invece scritto in "linguaggio matematico". Si può dire, in prima approssimazione, che la matematica ha un suo linguaggio e,addirittura, che la matematica è un linguaggio. Si potrebbe far notare ad esempio, in questo contesto, che la parola cinque nella lingua italiana è un aggettivo, mentre in matematica è un numero.

I ragazzi sono invincibilmente attratti dalla possibiltà di richiedere l'uscita su video delle somme dei primi 100 numeri dispari, poi dei primi 1000... e così via. E' opportuno abituarli a non limitarsi all'entusiasmo per l'effetto "dinamico" di tali uscite, ma ad osservare con curiosità le somme stampate dalla macchina, ad esempio, dei primi 20 numeri dispari. Alcune righe evocano qualcosa di noto, un teorema che essi già conoscono.

Osserviamo le righe

$16+9=25$

....

$144+25=169$

....

Se abbiamo la pazienza di lasciarli riflettere un tempo sufficiente, la risposta viene spontanea: il teorema di Pitagora.

E' un'occasione che ci si presenta per accennare alle terne pitagoriche. E' questo un argomento che ritengo doveroso insegnare agli studenti: in terza media e in prima liceo vengono proposti i cosiddetti problemi di algebra applicata alla geometria. Il 90 per cento di essi si risolvono con il teorema di Pitagora, e, di questi, il 100 per cento utilizzano le terne pitagoriche. Perché non "raccontarle" e non porre di conseguenza il problema di costruirle?

Basta apportare una piccola modifica al programmino precedente:

.... quando 2*i-1 è un quadrato ... scrivi ...

Bisogna però avvertire i ragazzi che questo procedimento non dà tutte le terne pitagoriche: ad esempio non si ottengono terne come

8	15	17	
12	35	37	ecc.

Le terne che si ottengono sono appunto quelle dei Pitagorici.

Qui il discorso sembra giunto alla fine.

Ma se chiediamo ai ragazzi di osservare con attenzione le uscite seguenti:

$$\begin{array}{rcrcr} 4^2 & + & 3^2 & = & 5^2 \\ 12^2 & + & 5^2 & = & 13^2 \\ 24^2 & + & 7^2 & = & 25^2 \\ 40^2 & + & 9^2 & = & 41^2 \\ 60^2 & + & 11^2 & = & 61^2 \\ 84^2 & + & 13^2 & = & 85^2 \end{array}$$

probabilmente nascerà la domanda: come mai in ogni riga il primo quadrato e l'ultimo sono di numeri consecutivi?.

.... E la ricerca riprende da capo.

Intervento di ***Giovanni Prodi*** * :

SPUNTI DIDATTICI TRATTI DALLA GEOMETRIA DEI NUMERI

Il fascino dell'aritmetica sembra dipendere da questi due aspetti contrapposti: da un lato è la sorgente delle strutture matematiche più generali, dall'altro è un tipico campo di problemi singolari, che non si lasciano ricondurre a teorie generali o a procedimenti standard. Alludo a certi problemi aritmetici che si risolvono per separazione di casi, e con strategie diverse per ciascun caso: quasi un preludio alle proposizioni vere, ma indecidibili....

Ma per rendere più appetibile l'aritmetica nella nostra scuola io proporrei un approccio di tipo parzialmente geometrico. Non si tratta certamente di novità: i "numeri quadrati" i "numeri triangolari" avevano attratto già i pitagorici. Questo approccio ha continuato nei secoli: in epoca a noi più vicina abbiamo avuto i risultati molto profondi ed eleganti di Minkowski, con la sua *Geometria dei numeri* (1910).

Ho utilizzato gli spunti di geometria dei numeri che ora presento in forma sintetica nell'attività di un *Club Matematico*, rivolto ai ragazzi della scuola secondaria superiore che desiderano (come dice la nostra pubblicità) *divertirsi con la matematica*. Vorrei far presente, una volta tanto, la necessità di fare qualcosa anche per gli allievi bravi: nel nostro paese si fa sperpero di tutto, anche dei talenti... .
Ma questo discorso rischia di portarci troppo lontano; mi basterà aggiungere che le proposte che seguono, anche se non possono essere realizzate nella loro interezza in una classe normale, possono fornire agli insegnanti alcuni spunti abbastanza elementari e forse anche gradevoli.

1- Il punto di partenza è la presentazione ai ragazzi dell'insieme G dei punti del piano con entrambe le coordinate intere. Questo oggetto matematico offre vari aspetti: l'occhio può fissarsi sulle rette orizzontali e verticali che collegano i punti, oppure sulle maglie quadrate che ricoprono il piano. Paragonerei questo insieme G ad un attrezzo ginnico, per la ginnastica della mente. I ragazzi lo conoscono già in forma concreta sotto l'etichetta di *geopiano*, che è ben diffuso nella scuola elementare e media. Potremo chiamarlo *griglia dei punti a coordinate intere*.

Una prima domanda: (Vd. fig 1) *esistono rette che passano per l'origine: e che non passano per alcun altro punto di* G*?*

* Dipartimento di Matematica, Università di Pisa.

I ragazzi hanno tutti gli elementi per rispondere: è evidente che le rette che passano per qualche altro punto di G sono tutte e sole quelle che hanno il coefficiente angolare razionale. Dunque vi sono infinite rette che non incontrano altri punti di G. Tuttavia è raro che i ragazzi - anche se bravi - sappiano rispondere rapidamente: hanno bisogno di essere un po' orientati.... Il fatto è che la nozione di numero razionale e irrazionale fa parte di un altro settore della loro cultura e non si aspettano che possa giocare qui.

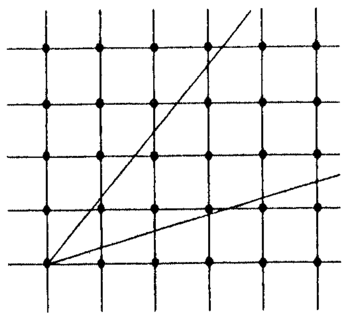


fig. 1

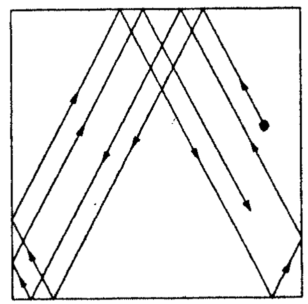


fig. 2

Chiarito questo punto, si propone un quesito abbastanza vicino, che mette a prova le loro capacità di transfert: consideriamo un quadrato (di lato unitario, per intenderci) e immaginiamo una pallina che lo percorra senza attrito e che venga respinta dalle pareti secondo le solite leggi della riflessione elastica; oppure pensiamo ad un raggio luminoso che venga riflesso da pareti speculari. In altre parole, consideriamo un *biliardo quadrato*. (Vd. fig.2). Poniamo allora la domanda: *possono esserci orbite chiuse?* Potremo spiegare, per chiarire, che parlando di orbite chiuse intendiamo che la pallina ritorni al punto iniziale con la stessa direzione e lo stesso verso, così da ripercorrere poi nuovamente e indefinitamente lo stesso cammino.

Lo studio dei singoli pezzi della traiettoria riesce meglio se i ragazzi conoscono già l'equazione parametrica della retta sotto la forma:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v\,t\cos\theta \\ y &= y_0 + v\,t\sin\theta \end{aligned} \qquad (2)$$

dove (x_0,y_0) è il punto iniziale, v è la velocità, t il tempo, θ è l'angolo che la traiettoria fa con l'asse X (orientato).

Lasciando da parte il caso banale in cui la pallina sia diretta secondo l'asse Y, la risposta è che le orbite si chiudono quando e soltanto quando la direzione iniziale è tale che

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{è razionale.}$$

Questo primo studio può essere completato da un'attività al calcolatore: la realizzazione di un programma che tracci le traiettorie per il biliardo quadrato. Occorre disporre di un calcolatore con una buona scheda grafica; il programma può risultare abbastanza grazioso, pur senza essere complicato. E' interessante contare il numero delle riflessioni su ciascun lato, quando tanθ è razionale, con numeratore e denominatore non troppo grandi. Il complesso delle orbite è, specialmente per certi valori di tanθ, molto piacevole, tanto che può suggerire eleganti disegni di stoffe.

2- Tralascio di parlare della successiva attività riguardante i numeri razionali e irrazionali, che riprende i noti temi dei rapporti fra grandezze e che porta a sottolineare la grande importanza che ha avuto la scoperta degli irrazionali nello sviluppo della scienza. Possiamo chiederci: questa distinzione fra numeri razionali e irrazionali ha una base "reale" o ha solo senso matematico? E' evidente che nessun procedimento fisico può permetterci di stabilire se una grandezza ha, rispetto ad un'unità fissata, misura razionale o irrazionale; tuttavia, a questo dilemma netto si può sostituire un passaggio continuo che ha anche senso fisico: possiamo considerare numeri razionali, ma tali da essere espressi con una frazione irriducibile avente numeratore e denominatore molto grande. Se prendiamo un numero di questo tipo nell'esempio del biliardo, la traiettoria si chiude, ma dopo un cammino molto lungo!

3- Ritorniamo al nostro insieme G e poniamoci nuovamente nell'origine. Supponiamo che G rappresenti la pianta di un bosco illimitato e che in ogni punto diverso dall'origine sia piantato un albero con sezione circolare di raggio r. Possiamo chiederci: *vi sarà ora un raggio luminoso che parte dall'origine e non viene intercettato da alcun albero?* Si intuisce - ed anche i ragazzi lo intuiscono facilmente - che questo non sarà possibile: tutte le rette - non solo quelle con coefficiente angolare razionale, ma anche quelle a coefficiente angolare irrazionale - finiscono per trovarsi a distanza minore di r da qualcuno dei punti di G. Questo fatto è una conseguenza di un risultato molto bello e profondo che riguarda il modo con cui i numeri irrazionali possono essere approssimati con i razionali. Procederemo - anche se ciò potrà apparire un po' strano - per via geometrica, a varie tappe.

A) Consideriamo un parallelogrammo **K** con centro nell'origine del nostro piano cartesiano; preso poi un qualunque elemento V dell'insieme **G** che abbiamo prima definito, contrassegnamo con $\mathbf{K}_V$ il parallelogrammo ottenuto traslando K di un vettore uguale a V; così, ad esempio, con $K_{(2,3)}$ si indicherà il parallelogrammo con centro nel punto (2,3) che è ottenuto per traslazione dal parallelogrammo K. Dunque, considerando anche $\mathbf{K}=\mathbf{K}_0$, avremo, in corrispondenza di ogni elemento di **G** un parallelogrammo con centro in esso. Ed ecco una proposizione molto intuibile:

Se l'area di **K** *supera* 1, *vi sono certamente diversi parallelogrammi che hanno punti interni in comune.*
Infatti, sia $\delta > 1$ l'area di ciascun parallelogrammo e sia r la misura della semidiagonale maggiore (cioè il massimo delle distanza dei punti di **K** dal centro); fissiamo un intero N e consideriamo l'unione di tutti i parallelogrammi che hanno centro in un punto (x,y), con $|x| \leq N$, $|y| \leq N$; i parallelogrammi così indicati sono in numero di $(2N+1)^2$ e pertanto l'area complessiva di questa figura composta sarà uguale a $\delta(2N+1)^2$; d'altra parte, questa figura è certamente contenuta in un quadrato con centro nell'origine e semilato N+r . Dovrà dunque essere

$$\delta(2N+1)^2 \leq (2N+2r)^2$$

ma si vede facilmente che una tale relazione è assurda non appena si prenda N abbastanza grande, essendo $\delta > 1$: infatti il termine "dominante" del primo membro è $\delta 4N^2$, mentre il termine "dominante" del secondo membro è $4N^2$. Dunque ci devono essere due diversi parallelogrammi che hanno un punto interno in comune.

B) Possiamo supporre, compiendo eventualmente una traslazione, che questi due parallelogrammi siano **K** e K_V con V = (n,m), V non nullo; si vede allora che *il punto* $\frac{1}{2}$V *appartiene all'intersezione di* **K** *e* K_V.
Di questo fatto si può dare una dimostrazione molto semplice ed elegante che utilizza le proprietà delle isometrie. La traslazione espressa dal vettore V può essere rappresentata dal prodotto di una simmetria con centro O per una simmetria con centro $\frac{1}{2}$V; ma il parallelogrammo **K** è simmetrico rispetto all'origine; pertanto la simmetria con centro $\frac{1}{2}$V manda **K** in K_V.
L'insieme $K \cap K_V$ non è vuoto, come abbiamo visto, esso è simmetrico rispetto a questo al centro; esso è anche convesso e perciò contiene il suo centro, che è $\frac{1}{2}$V.

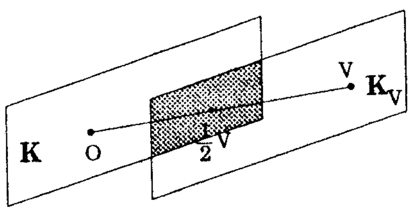


fig.3

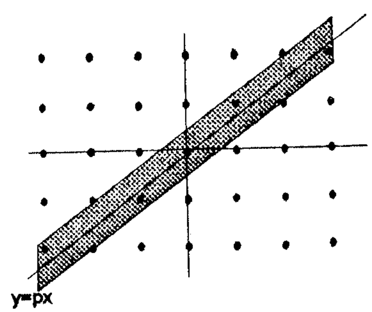


fig.4

In conclusione: *c'è in* G *un punto* V *tale che* $\frac{1}{2}$V *è interno a* **K**. Ciò equivale a dire che *c'è un punto* V *di* G *che è interno a* **2K** , dove abbiamo indicato con **2K** il parallelogrammo ottenuto da **K** mediante un'omotetia di coefficiente 2.
Poiché **K** era un *qualunque* parallelogrammo con centro nell'origine ed area δ, **2K** può essere un *qualunque* parallelogrammo con centro nell'origine ed area 4δ.
Abbiamo allora dimostrato, con intuitive costruzioni geometriche questo elegante risultato:
ogni parallelogrammo con centro nell'origine del piano cartesiano ed area maggiore di 4 contiene al suo interno qualche altro punto dell'insieme G.

Quello che abbiamo esposto è un elegante risultato della *geometria dei numeri* di Minkowski, con la sola differenza che Minkowski considera, anziché un parallelogrammo, una qualsiasi figura convessa e simmetrica rispetto all'origine (ma la dimostrazione non ha bisogno di alcun cambiamento).

C) Questo teorema ci permette di dare una risposta immediata al problema del bosco.
E' data una retta per l'origine: y = px ; fissiamo un intero positivo N e costruiamo attorno a questa retta un parallelogrammo definito da queste disuguaglianze (Vd. fig.4):

$$-(N+\tfrac{1}{2}) \leq x \leq (N+\tfrac{1}{2}) \qquad (3)$$

$$px - \frac{1}{N} \leq y \leq px + \frac{1}{N}$$

Questo parallelogrammo ha area maggiore di 4 ed è simmetrico rispetto all'origine; perciò esso contiene all'interno un punto (n,m) diverso da (0,0).
Per motivi di simmetria possiamo naturalmente assumere n>0 ; prendiamo ora N maggiore di $\frac{1}{r}$, ricordando che si è indicato con r il raggio delle piante del bosco. Risulterà:

$$n \leq N \quad ; \quad |pn-m| < \frac{1}{N} < r \qquad (4)$$

Perciò la retta y=px passa a distanza minore di r dal punto (n,m). Dalla (4), dividendo per n, si ottiene la disuguaglianza

$$\left| p - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{nN} \leq \frac{1}{n^2} \qquad (5)$$

Dunque, *dato un qualsiasi numero reale p, si possono trovare infinite frazioni* $\frac{m}{n}$ *che lo approssimano a meno di* $\frac{1}{n^2}$.
Questo risultato classico va assaporato bene. E' chiaro che, considerando,

per un denominatore n fissato, tutte le frazioni del tipo $\frac{k}{n}$ con $k = 0,1,2,3,...$ si può ottenere un'approssimazione di p (per difetto o per eccesso) a meno di $\frac{1}{2n}$; il nostro enunciato ci garantisce un'approssimazione ben migliore, anche se non per tutti i denominatori n, ma soltanto per una successione di valori di n che tende all'infinito.
La dimostrazione che si fa più comunemente di questo teorema è basata sulle *frazioni continue* ed ha il vantaggio di mettere in evidenza un *algoritmo* che fornisce le successive frazioni approssimanti. Ma noi abbiamo preferito impiegare una dimostrazione geometrica, che è più in sintonia con lo scopo della nostra esposizione.

4- La nostra griglia G ci suggerisce anche un'altra attività interessante. Come abbiamo visto, le uniche rette $y = px$ che passano per punti di G diversi dall'origine sono quelle per cui p è razionale. Queste passano per infiniti punti di G: il primo che si incontra è quello tale che $(n,m)=1$ (Indichiamo, secondo le notazioni usuali, con (n,m) il massimo comune divisore di n ed m). Potremmo dire, con linguaggio espressivo, che questi punti (n,m), con $(n,m)=1$ sono quelli che *si vedono* dall'origine. Ed ecco il nostro compito: *costruire un algoritmo che scriva, in un certo ordine, tutte le frazioni irriducibili comprese fra 0 ed 1.* Veramente, costruzioni di questo tipo non sono nuove: è nota quella che si impiega comunemente per dimostrare la numerabilità dell'insieme dei numeri razionali: si passano in rassegna a zig-zag tutte la frazioni $\frac{m}{n}$ aggruppandole secondo il valore di m+n, e cancellando quelle per cui $(m,n) > 1$. Invece noi vogliamo prendere direttamente in considerazione solo le frazioni irriducibili.

Allora possiamo servirci di un'operazione particolare: quella che associa a due frazioni $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ la frazione $\frac{a+a'}{b+b'}$ (si tratta proprio di quella frazione che, istintivamente, gli studenti meno sagaci assumono come somma delle due frazioni....). Chiameremo *composizione* l'operazione che abbiamo così definito. E' immediato mostrare che la frazione così ottenuta per composizione è *intermedia* rispetto alle due assegnate:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'} \qquad (6)$$

Vediamo ora un'altra proprietà particolarmente importante per noi. Supponiamo che valga questa relazione:

$$a'b - ab' = 1 \qquad (7)$$

In questo caso diremo che le due frazioni sono associate: dimostriamo allora che:

la frazione composta di due frazioni associate fra loro è associata sia con l'una che con l'altra .
Dovremo dunque far vedere che tanto le frazioni

$$\frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{a+a'}{b+b'} \qquad (8)$$

quanto le frazioni

$$\frac{a+a'}{b+b'} \quad ; \quad \frac{a'}{b'}$$

sono fra loro associate.
Basta verificare che valgono le due relazioni:

$$a'(b+b') - (a+a')b' = 1 \qquad (a+a')b - a(b+b') = 1 \qquad (9)$$

La verifica si riduce ad una banale semplificazione. Queste relazioni che abbiamo messo in evidenza diventano geometricamente espressive se rappresentiamo una qualsiasi frazione $\frac{m}{n}$ con il punto (n,m) del piano cartesiano, punto che apparterrà alla griglia G. In questa prospettiva, l'operazione che abbiamo definito tra le frazioni diventa la *somma* dei vettori che le rappresentano nel piano cartesiano. L'espressione $a'b-ab'$ non è altro che l'*area* del parallelogrammo individuato dai vettori (b,a), (b',a').
Ecco allora un risultato importante:
ogni frazione irriducibile si può ottenere in un solo modo per composizione da due frazioni irriducibili, fra loro associate.

Sia dunque $\frac{m}{n}$ la frazione assegnata, con $(m,n)=1$, $n>1$. Essa è rappresentata nel piano cartesiano dal punto $P= (n,m)$ (Vd. fig.5). Si tratta allora di costruire un parallelogrammo che abbia come diagonale il segmento OP, abbia area unitaria e i vertici a coordinate intere.

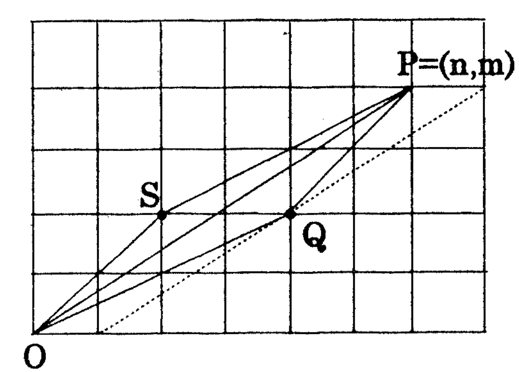


fig. 5

Cerchiamo dapprima il vertice Q che si trova *al di sotto* della retta $y = \frac{m}{n}x$

congiungente l'origine con il punto P. Il fatto che il parallelogrammo OQPS deve avere area unitaria si traduce nel fatto che Q deve stare sulla retta $y = \frac{m}{n} x - \frac{1}{n}$; ma questa equazione si può scrivere:

$$mx - ny = 1 \qquad (10)$$

che ha certamente soluzione, essendo (m,n) =1; e poiché tutte le soluzioni possibili sono del tipo:

$$x = \bar{x} + kn \qquad y = \bar{y} + km \qquad (k=0,\pm1,\pm2, \pm3, ..)$$

risulta che la soluzione (x,y) tale che $0 < x < n$ è unica.
E' ora facile trovare il quarto vertice S = (x',y') del parallelogrammo: basta prendere il simmetrico di Q rispetto al punto medio del segmento OP; si hanno immediatamente le due relazioni:

$$x + x' = n \qquad y + y' = m$$

da cui:

$$x' = n-x\ , \qquad y' = m-y\ .$$

Così abbiamo ottenuto la decomposizione cercata. E' anche facile verificare che ogni frazione irriducibile minore di 1 si decompone in due frazioni associate che non superano 1.
Poiché sia x che x' sono minori di n, la decomposizione ci porta a frazioni con denominatore minore di n e, pertanto, proseguendo nelle successive decomposizioni, finiremo per ottenere denominatori uguali ad 1; così risalendo alle frazioni componenti a partire da una frazione non superiore ad 1 si giunge a due sole frazioni: $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$.
E' allora evidente che
per generare tutte le frazioni irriducibili che non superano 1 basta applicare ripetutamente l'operazione di composizione a partire dalle due frazioni

$$\frac{0}{1}\ ,\ \frac{1}{1}$$

Si otterranno dunque, procedendo per i successivi livelli di applicazione dell'operazione di composizione, questi gruppi di frazioni irriducibili:

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

. . . .

In pratica, per trasformare questo algoritmo in un programma di calcolo, occorrerà decidere fino a quale livello si vuole arrivare. L'unica difficoltà del programma sta nell'inserire in modo opportuno nuovi termini in una successione.
Questo che abbiamo presentato è un tema classico di teoria dei numeri: si usa il termine di "Serie di Farey" di ordine r per indicare l'insieme ordinato di tutte le frazioni irriducibili di valore non superiore ad 1, *con denominatore che non supera* r. Noi abbiamo invece raccolto queste frazioni secondo quello che potremmo chiamare il *livello di generazione*, cioè il massimo numero di applicazioni di quell'operazione che abbiamo chiamato *composizione*. Naturalmente, basta una assai lieve variazione del programma di calcolo che abbiamo indicato per ottenere le Serie di Farey classiche.

Arrivati alla conclusione di questa esposizione, molti ci chiederanno quali sono state le difficoltà incontrate e quali i risultati ottenuti. Mi pare di poter dire che i ragazzi (naturalmente...quei ragazzi!) hanno seguito con interesse e profitto l'esposizione, che prevedeva anche fasi di esercizi e di problemi collaterali, su cui non ho potuto ora soffermarmi. Occorre aggiungere che l'esposizione può essere ulteriormente elementarizzata rispetto al testo qui presentato. Ad esempio, il teorema di Minkowski può essere dimostrato usando un linguaggio e un metodo ancora più vicini a quelli della geometria elementare, che la gran maggioranza dei ragazzi conosce. Stranamente, l'unico punto in cui rimango un po' deluso, è l'attività col calcolatore. Non mi è quasi mai capitato di trovare ragazzi che, dopo avere ricevuto una suggestione, portassero alla riunione successiva un programma costruito da loro. Occorre dire, peraltro, che l'attività del *Club Matematico* si svolge durante l'anno scolastico e i ragazzi sono già sovraccarichi dei loro normali compiti.

COMUNICAZIONI

UNA ESPERIENZA DI INFORMATICA NELLA SCUOLA MEDIA

*Enrica Borromeo, Maria Cristina Maffei**

Introduzione

Il rapido sviluppo dell'informatica e la straordinaria evoluzione delle applicazioni del computer nella società non potevano non farsi sentire nella scuola attraverso numerose iniziative che hanno coinvolto studenti, famiglie, insegnanti, istituzioni private e pubbliche.

A differenza di altri sussidi didattici quali il televisore, il proiettore, la lavagna luminosa, la macchina fotografica o il videoregistratore, che assolvono funzioni precise, ben note e ben sfruttate, il computer ha alcune caratteristiche che lo contraddistinguono:

-è veloce ed efficiente,

-è programmabile, utilizzabile cioè in differenti campi con molteplici applicazioni, risultando così uguale e differente a se stesso,

-ha trovato, per queste sue caratteristiche, largo impiego nel mondo del lavoro e nella vita di tutti i giorni.

C'è un quarto fondamentale aspetto che attira, affascina l'utente, in special modo i giovani, l'interattività. I ragazzi di oggi *manipolano* queste macchine con abilità e disinvoltura, possiedono il dominio assoluto sul loro *micromondo simulato*, ne manipolano tutti gli aspetti, decidendone e amministrandone le leggi fino a sovvertire a piacimento l'ordine naturale delle cose.

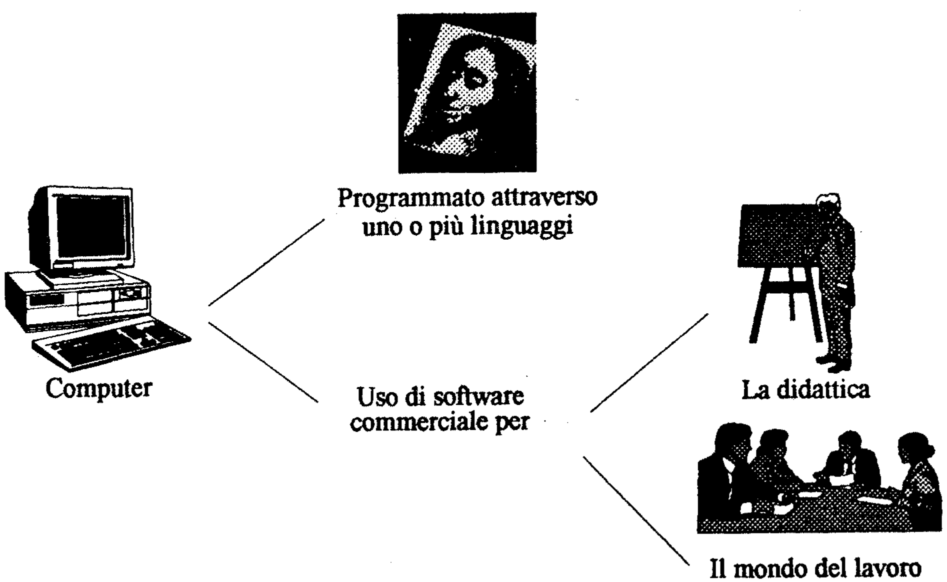
E' facendo leva sugli stimoli e sulla motivazione all'apprendimento che la macchina e l'interazione suscitano nei ragazzi che si profila un inserimento particolarmente valido del computer in un ordine di scuola, la secondaria di primo grado, che non si pone lo scopo di formare operatori né programmatori, ma di educare culturalmente dei ragazzi e prepararli ad affrontare un mondo in cui l'informatica e la telematica rappresentano un'attualità sempre più viva e presente.

* Scuola Media Marchese Lapo Niccolini Ponsacco, Pisa.

Il computer a scuola: la sperimentazione I.M.P.A.R.A.

Mentre per la scuola media superiore il *Piano nazionale per l'introduzione dell'informatica* [2, 3] ha gettato le basi normative e garantito una copertura finanziaria per un adeguato ingresso del computer nell'istituzione scolastica, per la scuola media inferiore tale inserimento è tuttora affidato solo alle sperimentazioni. C'è chi propone e sperimenta l'uso dei linguaggi e la programmazione, chi sostiene l'utilizzo degli strumenti dell'*office automation*, chi lusinga gli insegnanti con l'idea di sistemi di istruzione *intelligenti* e via dicendo. Questa varietà di punti di vista, mentre da un lato rappresenta una ricchezza, dall'altro è la spia del senso di confusione che provano gli operatori scolastici di fronte a questo nuovo mezzo.

La nostra scuola ha cercato di risolvere il problema dell'introduzione dell'informatica attraverso la realizzazione di una sperimentazione organica iniziata in due classi prime a tempo prolungato nell'anno scolastico 1990/91, proseguita lo scorso anno nelle seconde ed attualmente in corso nelle rispettive terze, ideata e coordinata da due insegnanti delle scuola stessa (Enrica Borromeo e Paolo Carosi) .



Dopo aver ricercato, sperimentato e verificato attraverso le precedenti esperienze le due possibili modalità di approccio al computer nella didattica, la via migliore ci è sembrata quella di inserire le conoscenze e le competenze da acquisire nel contesto del curricolo già esistente secondo il collaudato

Modello Integrativo [9] ed usare, a seconda degli scopi, entrambi le modalità di approccio: studiare il computer, programmato dagli studenti stessi; studiare con il computer, utilizzandolo come macchina per insegnare e per imparare, attraverso differenti tipi di software commerciale suggeriti dalle esigenze delle varie discipline.

E' nata così la sperimentazione I.M.P.A.R.A. (Informatica: Metodologia Pluridisciplinare in Attività di Recupero ed Approfondimento) [5, 6] che si basa dunque sul sinergismo instaurantesi quando un alunno sviluppa attraverso il computer una applicazione di una qualsiasi disciplina, apprendendo contemporaneamente sia i contenuti di quella stessa disciplina che le tecniche informatiche.

Delineata la possibilità e la necessità del coinvolgimento di tutte le materie attraverso tale approccio trasversale dell'informatica, abbiamo definito i campi di intervento raggruppando le discipline in quattro aree che concorrono in maniera inscindibile e con egual peso alla realizzazione del progetto:

Aree di intervento	***Discipline interessate***	***Unità Didattiche***
Area Linguistica	*Italiano*	*Comunico*
(Comunicazione,Interlinguistica)	*Storia e Geografia*	*Acquisisco*
	Lingua Straniera	*Comprendo*
	Insegnamento Religione Cattolica	*Capisco*
Area Logico Matematica e delle Scienze Sperimentali	*Scienze Matematiche*	*Calcolo*
	Scienze Chimiche, Fisiche, Naturali	*Osservo*
Area Tecnologica	*Educazione Tecnica*	*Costruisco*
Area Artistico-Espressiva	*Educazione Musicale*	*Compongo*
	Educazione Artistica	*Disegno*
	Educazione Fisica	*Procedo*

I contenuti di ogni area di intervento sono affrontati seguendo due vie parallele: in aula vengono svolti gli argomenti teorici programmati per una determinata unità didattica secondo l'*iter* tradizionale arricchito delle metodologie logico-analitiche proprie dell'informatica. In laboratorio, con la collaborazione di uno dei due coordinatori, vengono trattate quelle parti più strettamente legate alla macchina, le esemplificazioni e le esercitazioni pratiche, l'eventuale approfondimento e recupero per un minimo di due ore settimanali (normalmente tre) nell'ambito delle ore curricolari delle discipline interessate. Per venire incontro a problemi didattico-organizzativi, tutte le discipline si alternano in laboratorio secondo una turnazione di due/tre mesi circa.

Si è rivelata pressante la necessità di ulteriori spazi in laboratorio destinati al recupero degli alunni in difficoltà e ad attività che per loro natura debbono protrarsi per tempi piuttosto lunghi (immissione di dati in archivi, uso di *word processor, debug* di programmi, ecc...). Sono state perciò istituite delle ore di ***Laboratorio Aperto (Lap)*** che si svolgono parallelamente a quelle curricolari o al di fuori dell'orario scolastico, ore in cui le classi, i gruppi o i singoli alunni hanno a disposizione le attrezzature della stanza di informatica e l'assistenza di un coordinatore. Il Laboratorio Aperto risulta particolarmente proficuo soprattutto per il più favorevole rapporto alunno-macchina e per la possibilità di intervento individualizzato.

I contenuti dei piani di lavoro di ogni materia non subiscono notevoli variazioni, ma viene introdotto il computer come nuovo strumento, come metodologia didattica, per quegli argomenti (e solo per quelli) che, dall'essere svolti elettronicamente traggono evidenti benefici in chiarezza e immediatezza nella comprensione, pronto riscontro dei risultati e stimolazione all'apprendimento. L'uso del calcolatore non vuole perciò essere una forzatura, un'intrusione o quanto meno uno stravolgimento dei contenuti curriculari, ma per ogni area possono delinearsi delle attività dove effettivamente esso aiuta a produrre in modo più semplice e veloce, favorendo l'evoluzione logica e creativa dell'alunno.

Calcolo

I nuovi programmi, orari di insegnamento e prove di esame per la Scuola Media Statale (D.M. 9/2/1979) citano all'inizio dei suggerimenti metodologici per le *Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali*:

Il processo di avviamento al metodo scientifico dovrà muovere da ciò che potrà stimolare la curiosità degli alunni e la loro intuizione, da esperienze facilmente comprensibili, dalla operatività e indirizzare alla sistematicità, grazie alla progressiva mutazione dei processi astrattivi. [1]

Questo periodo, insieme agli obiettivi indicati dal Ministero, mostra come l'introduzione del calcolatore nell'insegnamento della matematica sia del tutto ovvio non solo in quanto rispecchia il naturale mezzo per il raggiungimento di quegli obiettivi ma anche considerando le principali finalità storico- applicative dell'elaboratore.

E' scaturita quindi la seguente programmazione per le attività svilup-

pate con l'ausilio dell'elaboratore.

Obiettivi Specifici, Contenuti, Verifiche.
anno scolastico 1090/91 e 1991/92

Obiettivi	Contenuti	Metodologia	Verifiche
1) Conoscere il sistema di immagazzinamento e trattamento dei dati.	Organizzazione delle *strutture dati.*	Spiegazioni ed uso del metodo induttivo.	Verifiche orali e scritte sulla effettiva acquisizione dei contenuti.
2) Conoscere e saper usare i comandi e la sintassi del linguaggio di programmazione BASIC.	Istruzioni del BASIC e loro sintassi.	Lavoro al calcolatore.	La macchina esegue la verifica della sintassi, l'insegnante controlla l'appropriato uso della terminologia e della correttezza formale.
3) Interpretare i dati presenti in un problema e formalizzarli in linguaggio matematico. Saper impostare razionalmente il procedimento risolutivo di un problema e portarlo a termine in modo sistematico.	Uso delle variabili adatte. Algoritmi e diagrammi di flusso. Costruzione di programmi in BASIC, debug alle macchine.	Spiegazione ed uso del metodo induttivo e successivamente deduttivo. Lavoro di gruppo ed individuale alle macchine.	Verfiche di tipo tradizionale e alle macchine eseguendo i programmi risolutivi delle classi di problemi rappresentati da quelli specifici richiesti ai ragazzi.
4) Saper operare con i numeri reali positivi.	Frazioni e numeri decimali. Numeri irrazionali. Approssimazione Istruzioni BASIC Problemi di carattere aritmetico.	Da situazioni concrete portate in classe, al lavoro individuale e di gruppo in aula di informatica utilizzando i calcolatori sia esaminando il loro modo di calcolare che costruen-	Verifiche di tipo tradizionale con inserimento di esercizi di progettazione di programmi BASIC da far eseguire in un secondo tempo ai computer. Inoltre ogni lavoro alla macchi-

		do programmi BASIC a carattere aritmetico.	na rappresenta una verifica, confrontando i risultati attesi con quelli ottenuti dalla elaborazione dei programmi implementati dai ragazzi.
5) Analisi delle forme geometriche piane e delle loro proprietà.	Nozioni di geometria piana. Istruzioni BASIC e LOGO Problemi di carattere geometrico.	Studio di analogie e differenze in esempi concreti. Uso prima del metodo induttivo e poi deduttivo. Lavoro di gruppo ed individuale alle macchine eseguendo i programmi risolutivi delle classi di problemi rappresentati da quelli specifici richiesti ai ragazzi.	

Come si può osservare, gli obiettivi da perseguire si distinguono in due tipi: quelli puramente informatici, atti ad acquisire una minima abilità nell'uso della macchina, e quelli specifici della matematica, il cui raggiungimento è stato facilitato dall'utilizzazione del calcolatore. Si è evitato di appesantire eccessivamente i contenuti della disciplina con argomenti strettamente legati alla *computer science*, oltre alla necessaria introduzione degli elementi fondamentali dei linguaggi prescelti (BASIC, LOGO e PASCAL), privilegiando invece alcune tematiche quali l'uso delle variabili, gli algoritmi e la logica nei suoi aspetti fondamentali. Bisogna inoltre tenere presente che, grazie alla trasversalità della sperimentazione, ogni disciplina ha contribuito all'acquisizione delle tecnologie e metodologie informatiche necessarie.

L'uso della macchina che evidenzia inclemente la correttezza sintattica del linguaggio usato, abitua i ragazzi ad una rigorosità e precisione difficilmente raggiungibile in modo tradizionale, conducendo l'utente lungo un percorso *a correzione d'errore* che lo porta sicuramente a risultati molto proficui. Ogni lavoro al computer si trasforma in verifica anche delle capacità di formalizzare ed impostare il procedimento risolutivo confrontando i risultati

attesi con quelli ottenuti eseguendo il programma implementato dall'alunno per la classe di problemi rappresentata da quello specifico richiesto. Per sua natura infatti l'informatica ed il computer sono ambiti culturali e operativi che *non funzionano* senza questo *feedback* costante: la verifica è la modalità stessa di lavoro; non si può utilizzare la macchina senza che questa verifichi immediatamente i processi e i prodotti dell'interazione. L'acquisizione di un abito mentale informatico conduce alla capacità di costruire modelli della realtà che intersecano necessariamente gli ambienti teorico e operativo e porta ad un atteggiamento sperimentale continuo di cui la verifica è strumento.

La scrittura di un programma, infine, attraverso la minuziosa sequenza delle istruzioni, fornisce all'alunno l'occasione di puntualizzare quegli aspetti di una questione aritmetica o geometrica ritenuti acquisiti ma talvolta non consapevolmente assimilati.

Nell'ambito nella geometria non si afferma nulla di nuovo, visto le numerose esperienze anche nelle scuole elementari, quando si sostiene che il linguaggio LOGO [8] offre ampie possibilità nel fare acquisire all'alunno la consapevolezza delle proprietà delle figure geometriche e quindi una conoscenza del piano e dello spazio di cui anch'egli è elemento. Questo linguaggio, infatti, attraverso semplici ma potenti comandi (in italiano) apre una finestra su *Matelandia*, un mondo affascinante, tutto da esplorare che, a parte i contenuti palesemente collegati alla matematica, non è che un pretesto per l'indagine epistemologica: un obiettivo così ambizioso, almeno per un bambino, raggiunto tramite l'immedesimarsi con la tartaruga e sfruttando così i meccanismi più vicini alla sua esperienza quali i rapporti del corpo con lo spazio. Si può aggiungere ancora che il LOGO offre tutti i vantaggi di un linguaggio strutturato: è possibile dividere il problema in sottoproblemi più semplici che possono essere richiamati digitando semplicemente il nome della procedura. E' stato grazie a questo tipo di metodologia (top-down e bottom-up) che, nell'ambito delle attività della sperimentazione I.M.P.A.R.A., sono stati realizzati col computer alcuni disegni del pittore olandese M. C. Escher.

Osservo

L'insegnamento della disciplina *Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella scuola media inferiore*, come specifica la dizione, prevede anche lo studio delle scienze sperimentali. Sono state quindi programmate, nell'ambito della sperimentazione delle attività anche in questo settore.Le tematiche privilegiate riguardano la fisica e la biologia.

Lo studio del processo di riproduzione cellulare, nelle sue varie fasi, ha trovato nel computer un sistema semplice ed assai efficace per essere riprodotto attraverso una animazione realizzata dagli stessi alunni.

Per l'anno in corso, inoltre, il lavoro riguardante la Terra ed i pianeti con i loro moti relativi, sarà arricchito dalla realizzazione di programmi di animazione ed ipertestuali sul sistema solare, utilizzando sia software grafico che il liguaggio Pascal introdotto all'inizio del presente corso scolastico.

Conclusione

Di fronte alla domanda se l'introduzione dell'uso del computer elimina tutte le difficoltà incontrate dai ragazzi, è venuto spontaneo il paragone dell'elaboratore con le vitamine: non risolvono tutti i problemi, ma, nella forma e nelle dosi consigliate, aiutano ad evitare quelli di alcune categorie e ad affrontare con maggiore efficacia gli altri. Naturalmente, come ogni farmaco, presenta delle controindicazioni (l'apprendimento di un linguaggio è da qualcuno considerato tale) e viene prescritto solo in quei casi in cui i benefici curativi superano di gran lunga i *danni* prodotti dalle controindicazioni. Questo confronto ci è stato confermato dagli attuali risultati della nostra sperimentazione. Infatti nonostante non abbia ancora concluso il ciclo triennale con la prova ufficiale dell'esame di licenza, ci sentiamo in grado di formulare un positivo giudizio sulle scelte operate e sull'andamento della sperimentazione in generale, confortati anche da quei docenti universitari che con grande disponibilità l'hanno seguita da vicino e dai colleghi di lunga esperienza didattica che con noi l'hanno vissuta. Gli studenti hanno dimostrato un vivo interesse ed una notevole disponibilità ai lavori affrontati secondo queste nuove metodologie, trascorrendo a scuola anche del tempo aggiuntivo che avrebbero potuto dedicare ad altre attività. Verifiche scritte e orali condotte su classi parallele hanno confermato che i ragazzi delle classi sperimentali sanno affrontare le situazioni problematiche in modo più sistematico e rigoroso, riuscendo a scegliere di volta in volta le tecniche risolutive più adatte.

Bibliografia

[1] AA.VV. *Nuovi Programmi di Insegnamento per la Scuola Secondaria di Primo Grado*, D.M. 9/2/'79

[2] AA.VV. *Piano Nazionale per l'Informatica* Atti del Seminario Pubblica Istruzione/C.E.E. 7-10 maggio 1985

[3] AA.VV. Programmi della *Commissione Brocca* per il Biennio ed il Triennio delle Superiori., Le Monnier Editrice, Firenze 1992

[4] Bocchetti C. L., Bottazzi M. *Laboratorio di Matematica* Ed. Giunti Marzocco, Firenze 1989

[5] Borromeo E., Carosi P. *Sostegno e recupero nella sperimentazione I.M.P.A.R.A.*, Atti del II Convegno Nazionale *Informatica, Didattica e Disabilità*, vol. III, pgg.796-799, Pisa 1991

[6] Borromeo E., Carosi P. Testi del *Progetto sperimentale I.M.P.A.R.A. 1, 1.2, 1.3*, Documenti di richiesta art.14 legge 270/82, Provveditorato agli studi di Pisa, 1990, 1991, 1992

[7] Lollini P. *Didattica e computer* Editrice La Scuola, Brescia, 1985

[8] Papert S. *Mindstorm* EMME Edizioni, 1986

[9] Pellerey M. (a cura di) *L'informatica nella scuola media come e perché* SEI, Torino 19989, ricerca promossa dal Centro studi IBM Italia

PROBLEMI DI MINIMO RISOLVIBILI CON METODI ELEMENTARI

*Brunetto Piochi**

La proposta di "apprendimento per problemi" appare come un atteggiamento didattico consolidato per quanto riguarda il lavoro matematico con gli alunni della scuola dell'obbligo. Nella scuola secondaria tale metodologia è meno diffusa, per vari motivi; fra questi la convinzione di una non immediata applicabilità degli argomenti insegnati, dovuta al fatto che la maggior parte dei problemi interessanti coinvolgono tecniche matematiche almeno al livello di derivate e integrali, e questi sono affrontati (e non in tutti i tipi di scuola) solo al termine del ciclo di studi.

Esistono tuttavia problemi, di indubbio interesse per le applicazioni, i quali sono risolvibili anche con tecniche elementari; mediante questi si può tentare di coinvolgere anche gli alunni della scuola secondaria in una ricerca matematica reale. In [1] abbiamo proposto questo problema :

Problema A *"Si deve costruire un oleodotto che porti il petrolio da una piattaforma in mezzo al mare ad un porto sulla costa. Sapendo che le spese di costruzione sono pari a N \$/m sulla terraferma ed M \$/m in mare, si determini il percorso di minor costo".*

In questa sede voglio invece occuparmi dei due seguenti:

Problema B *"Una tipografia deve stampare dei fogli di simboli, in cui il testo occupa un'area rettangolare A (da disporre a piacere, in quanto priva di direzioni privilegiate). Conoscendo i margini da lasciare in alto, in basso, a destra e a sinistra, si determino le dimensioni ottimali del foglio per minimizzare l'impiego di carta".*

Problema C *"Si determinino le proporzioni fra le dimensioni di una lattina cilindrica, in modo che risulti minimo il consumo di metallo, a parità di volume V di contenuto".*

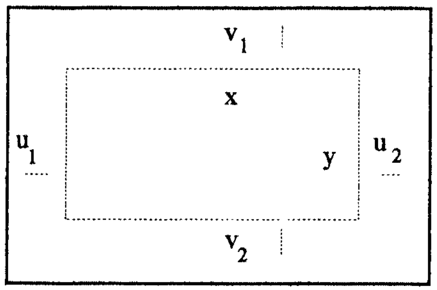
Tutti questi problemi conducono alla ricerca del minimo di una funzione y=F(x); tale minimo è immediatamente calcolabile con l'uso delle derivate. Supponiamo però di non aver ancora introdotto tale strumento matematico e cerchiamo una soluzione per via elementare.

* Dipartimento di Matematica dell'Università, via del Capitano 15, 53100 SIENA

Per quanto riguarda il problema A, rimando ad [1], dove si mostra come, se x rappresenta un opportuno tratto di percorso, il problema si riduce a cercare il minimo di una funzione del tipo $F(x) = \sqrt{a^2x^2+b^2} - c^2x$. I metodi suggeriti coinvolgono lo studio della positività di un discriminante, oppure l'uso di un "modello" geometrico che interpreta le grandezze in gioco come lunghezze e aree di opportuni parallelogrammi, sviluppando quindi alcune considerazioni a partire dai criteri di equivalenza fra questi ultimi.

Tratterò invece con maggior dettaglio gli altri due problemi sopra citati.

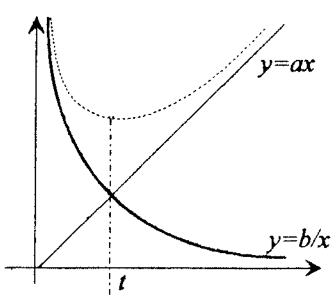
Problema B La funzione da minimizzare risulta del tipo $F(x) = ax + b/x$ (dove $a,b>0$) , se x rappresenta una delle dimensioni della parte stampata :



$$\begin{aligned}\text{Superf.} &= (x+u_1+u_2)(y+v_1+v_2)\\ &= xy+(u_1+u_2)(v_1+v_2)+\\ &\quad +x(v_1+v_2)+y(u_1+u_2)\\ &= A+(u_1+u_2)(v_1+v_2)+\\ &\quad +x(v_1+v_2)+(u_1+u_2)A/x\end{aligned}$$

Posto $F(x)=z$, l'equazione $z = ax + b/x$, cioè $ax^2-zx+b=0$, è risolvibile rispetto a x (cioè permette di realizzare il foglio desiderato) se il discriminante z^2-4ab è positivo o nullo, cioè (poiché $z\geq 0$) se $z\geq 2\sqrt{ab}$. Il valore minimo della funzione sarà dunque $F(x)=2\sqrt{ab}$, il quale corrisponde a $x=z/2a=\sqrt{b/a}$.

Una soluzione più convincente per gli studenti viene però da considerazioni sul grafico della funzione, vista come somma (ancora per $x\geq 0$) della retta $y=ax$ e dell'iperbole equilatera $y=b/x$.



E' "ragionevole" aspettarsi che il minimo della somma lo si trovi nel punto di incontro, dove ciascuna delle due funzioni fornisce un "contributo piccolo" al totale. Tale intuizione viene effettivamente confermata da un semplice calcolo, notando che per $x=\sqrt{b/a}$ (soluzione positiva di $ax=b/x$) si ha $F(x)=2\sqrt{ab}$ e davvero $F(x)-2\sqrt{ab} = ax + b/x - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{ax} - \sqrt{b/x})^2$ è sempre ≥ 0.

Problema C Si indichi con x il raggio di base del cilindro, di volume noto V, e sia h la sua altezza. L'area della superficie totale sarà pari a $S = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi xV/\pi x^2 = 2\pi x^2 + 2V/x$ e dunque dovremo minimizzare

una funzione del tipo: $F(x) = ax^2 + b/x$ $(a,b>0)$.

Qui i metodi indicati per il problema precedente non funzionano; risulta però estremamente istruttivo l'esame dell'analogo meccanismo di geometria analitica, alla ricerca del "perché" esso non funziona, nonostante in modo altrettanto "ragionevole" si possa dedurre che un punto di minimo per la nostra funzione deve esistere. Questa intuizione tuttavia ci può portare alla soluzione effettiva, con il semplice aiuto del metodo di scomposizione secondo Ruffini.

Sia infatti t il valore della x corrispondente al minimo e sia $F(t)$ $(=at^2+b/t)$ il valore della funzione in tale punto; dovrà allora essere $F(x)= ax^2 + b/x \geq F(t)$, ovvero $ax^3 - xF(t) +b \geq 0$ per ogni x (>0). Poiché per definizione $ax^3-xF(t)+b=0$ per $x=t$, allora $x-t$ dovrà dividere il trinomio $ax^3 - xF(t) +b$; è del resto facile provare che $at^3-tF(t)+b=0$. Scomponendo mediante il metodo di Ruffini otterremo:

	a	0	$-F(t)$	$+b$
t		at	at^2	$-tF(t)+at^3$
	a	at	$-F(t)+at^2$	0

Sarà allora $ax^3 - xF(t) + b = (x-t)(ax^2 + atx -F(t)+at^2)$. Ora, se il secondo fattore non fosse divisibile per $(x-t)$, il trinomio dato non potrebbe essere sempre ≥ 0. Perciò t deve essere anche soluzione di $ax^2 + atx -F(t)+at^2=0$, cioè dovrà essere $3at^2=F(t)(=at^2+b/t)$ da cui $t=(b/2a)^{1/3}$; per tale valore di t :

	a	at	$-F(t)+at^2$
t		at	$2at^2$
	a	2at	0

da cui infine si ottiene $ax^3 - xF(t) + b = (x-t)(ax^2 + atx -F(t)+at^2) = (x-t)^2(ax + 2at) \geq 0$ per ogni x positiva.

(Si noti che il metodo qui proposto è generalizzabile senza difficoltà alla ricerca del minimo di una funzione $F(x) = ax^n + b/x^m$, con $a,b>0$ ed m,n interi positivi.)

Sostituendo i valori del problema alle costanti a e b, si ricava che la superficie totale del cilindro è minima quando il raggio di base x è pari a $(V/2\pi)^{2/3}$, ovvero quando l'altezza $(=V/\pi x^2)$ è uguale al diametro di base.

I vari metodi qui presentati hanno il vantaggio di richiamare costantemente lo studente alla necessità di applicare in modo corretto le diverse definizioni, guidandolo ad un ragionamento che ha tutte le caratteristiche di una *dimostrazione* applicata ad un caso reale. E' proprio la "trasparenza" di questi metodi che a mio avviso li rende preferibili (nel senso fin qui richiamato, naturalmente) ad altri più sintetici, quali sono ad es. quelli esposti in

[2], da cui pure si possono ricavare con notevole eleganza i risultati precedenti.

[1] R. Bianchi, B. Piochi - Una via geometrica elementare per la ricerca del minimo su una famiglia di funzioni, *Archimede* , Fasc. 1, 1992, pp. 30-35.

[2] D. Palladino - Massimi e minimi per via elementare, *Nuova secondaria*, vol V (5), 1988, pp. 67-69.

GLI INSEGNANTI RICERCATORI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA:

PROBLEMATICHE E PROSPETTIVE DOPO LA LEGGE 341 SULLA RIFORMA DEGLI ORDINAMENTI DIDATTICI UNIVERSITARI

*Sandro Deplano**, *Giancarlo Navarra***

1. PREMESSA.

Uno dei nodi più delicati - e di fatto in larga misura irrisolti - della scuola italiana è senza dubbio la mancanza per gli insegnanti di una formazione nella sua duplice articolazione: ***all'origine*** (universitaria) e ***in itinere*** (varie forme di aggiornamento). Formazione tanto più necessaria se si tiene conto che la nostra professione è una delle più esposte ai rischi dell'***obsolescenza***.

Soffermiamoci brevemente su alcuni dati Unesco del 1981[1] sui contenuti della formazione degli insegnanti in Europa, Stati Uniti, Canada, Giappone (in percentuale della durata totale degli studi):

Insegnanti di:	Formazione generale e materie specialistiche:	Preparazione pedagogica e pratica didattica:
SCUOLA PRIMARIA	60%	40%
SCUOLA SECONDARIA	73%	27%

Un confronto con il nostro paese, soprattutto per quanto concerne l'insegnamento delle discipline scientifiche, è evidentemente sconfortante (<u>100% di sole materie specialistiche</u>).

Possiamo infatti affermare, in accordo con quanto scritto nel documento n.10 del CIRD[2] di Genova e del CIRE[3] di Bologna, che, all'interno dei corsi di laurea delle facoltà di Lettere, Magistero, Scienze, né gli insegnamenti di tipo istituzionale né quelli di tipo monografico sono adatti alla **formazione**

* Nucleo di Ricerca Didattica di Cagliari.
** Nucleo di Ricerca Didattica di Modena.
[1] Elaborati da: Maria Corda Costa, La formazione degli insegnanti, IRES CGIL Ricerche / 2, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1988.
[2] Centro interdipartimentale per la ricerca didattica dell'Università di Genova.
[3] Centro interdipartimentale per la ricerca educativa dell'Università di Bologna.

pluridisciplinare degli insegnanti. L'impostazione di questi insegnamenti è tale che quanto verrebbe appreso sarebbe in ampia misura sovrabbondante, e perciò estraneo, e per altri versi sottodimensionato, rispetto ai compiti professionali specifici dell'insegnante al quale non si deve richiedere il possesso per intero del "sapere" proprio del matematico, del fisico, dello storico, ma il dominio di alcuni nodi essenziali in funzione dell'insegnamento e delle attività formative da esercitare.

I futuri insegnanti quindi avrebbero bisogno di un corso universitario di formazione i cui obiettivi fossero *la rilettura critica, il consolidamento scientifico e l'integrazione delle conoscenze* acquisite nella scuola superiore, generalmente molto diverse fra loro a seconda dell'istituto frequentato.

In ogni caso, è necessario intervenire *ab origine* sulla impostazione culturale del futuro docente; ricordiamo a questo proposito una affermazione contenuta nel documento conclusivo elaborato dal Comitato nazionale del MPI per la ricerca sperimentale relativa alla formazione iniziale degli insegnanti in cui si afferma tra l'altro che:"...Nessuna integrazione professionale, per quanto ricca e accurata, potrà supplire ad eventuali carenze di base della formazione culturale [degli insegnanti]."

2. LA LEGGE 341.

Finalmente una legge, la **341** del 19 novembre 1990 sulla Riforma degli ordinamenti didattici universitari, dovrebbe (o è il caso di dire: "avrebbe dovuto"?) introdurre delle modifiche sostanziali in tale situazione.

Com'è noto, la L.341 prevede all'Art.1 che le università rilascino i seguenti titoli:

a) il diploma universitario (durata due/tre anni)
b) il diploma di laurea (durata quattro/sei anni)
c) il diploma di specializzazione (durata non inferiore ai due anni)
d) dottorato di ricerca (durata regolata da specifiche disposizioni di legge)

Per poter accedere alla professione, i futuri insegnanti della scuola materna ed elementare dovranno conseguire il Diploma di laurea, quelli della scuola secondaria anche il Diploma di specializzazione.

Vogliamo sottolineare due fra gli argomenti più importanti sui quali la Legge insiste in molti articoli:

> 1. Entro due anni dalla data di entrata in vigore della legge le università dovranno precisare, anche **attraverso attività di tirocinio didattico**, modalità e contenuti dei corsi di laurea e in particolare della SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE destinata alla formazione degli insegnanti delle scuole secondarie, che sarà articolata in indirizzi, cui contribuiranno le facoltà e i dipartimenti interessati.
>
> 2. Il Ministro della pubblica istruzione e quello dell'università e della ricerca scientifica e tecnologica dovranno **attuare ogni opportuna forma di intesa e di collaborazione** al fine di realizzare un idoneo coordinamento tra l'istruzione universitaria e l'istruzione di ogni altro ordine e grado. Dovranno inoltre favorire, anche mediante lo stanziamento di appositi fondi, le iniziative dell'università rivolte alla **preparazione all'insegnamento, allo sviluppo della ricerca ed alla sperimentazione di metodologie e tecnologie didattiche nelle scuole** di ogni ordine e grado.

In particolare a proposito delle Scuole di specializzazione, un'apposita commissione voluta dalla legge - composta da quindici esperti fra i quali i matematici Vinicio Villani e Giunio Luzzato - ha approvato il 24.1.1992 un documento in cui fra l'altro si sottolinea l'opportunità che:

> 1) gli insegnamenti di didattiche disciplinari, siano integrati con specifici **laboratori e con tirocini** mediante i quali preparare il futuro docente a didattiche a carattere multidisciplinare;
>
> 2) gli studi nella Scuola si concludano con la discussione di una Tesi di specializzazione valutata da una Commissione giudicatrice composta, fra gli altri, da **uno dei docenti secondari che svolgono attività nella Scuola stessa**;
>
> 3) alle attività di tirocinio siano preposti **docenti secondari di ruolo che fruiscano di esonero temporaneo dall'insegnamento a tempo pieno o parziale**. Una loro rappresentanza farebbe parte a pieno titolo del Consiglio della Scuola.

L'introdurre nel corso di laurea, oltre a studi pedagogici e didattici di tipo teorico, anche le attività di tirocinio, risponde alla necessità che gli studenti acquisiscano competenze legate all'esercizio effettivo dell'insegnamento; per esempio, la padronanza dei linguaggi e dei processi di comunicazione, l'uso valido delle procedure e delle tecnologie dell'insegnamento, dell'osservazione e della valutazione, lo sviluppo di comportamenti e di atteggiamenti costruttivi e di collaborazione nelle diverse e complesse iterazioni sociali richieste dall'attività professionale.

Le attività del tirocinio assumono quindi un'importanza centrale decisiva nell'intero piano di studi, e possono costituire un potente strumento di verifica dell'efficacia dell'intero processo formativo del corso di laurea.

E' evidente quindi da questi riferimenti che la legge 341, per organizzare in modo efficace la formazione dei docenti, apre (ancora una volta è meglio dire "dovrebbe" aprire) spazi operativi completamente nuovi e, di conseguenza, dovrebbe prevedere *nuove figure professionali di cerniera* tra il mondo della scuola e quello dell'Università.

3. GLI INSEGNANTI RICERCATORI.

Anticipando per molti aspetti tali figure professionali, da una quindicina d'anni operano dei gruppi di docenti (Insegnanti Ricercatori, d'ora in poi IR) facenti capo a una trentina di dipartimenti di Matematica, impegnati nella ricerca sulla didattica di questa disciplina (Nuclei di Ricerca Didattica, d'ora in poi NRD).

I NRD, nati dall'incontro fra docenti universitari interessati alla didattica della disciplina e insegnanti disponibili a sperimentare nelle classi i loro progetti, si sono evoluti nel tempo, conducendo gli IR a partecipare direttamente alla ideazione e alla strutturazione dei progetti di sperimentazione da sviluppare nelle proprie classi, sino a diventare quasi sempre centri di formazione e di aggiornamento.

All'interno di parecchi NRD si sta sviluppando ora - o si sente l'esigenza di sviluppare - una nuova fase, legata alla "formazione dei formatori", con l'obiettivo di preparare nuovi sperimentatori, e quindi di poter allargare i temi della ricerca, divulgare le sperimentazioni e infine aiutare gli insegnanti ad applicare i Nuovi Programmi utilizzando anche le "scoperte" fatte dai NRD in tutti questi anni. L'esperienza ci permette infatti di affermare che spesso il ricercatore diventa il formatore specialista nel suo campo di ricerca.

Attualmente gli IR sono circa 200/250, impegnati a vario titolo, appartenenti prevalentemente alla scuola dell'obbligo, che svolgono nelle loro classi delle attività costruite - del tutto o in parte - su schemi di riferimento teorico e lungo itinerari sviluppati in collaborazione con docenti universitari all'interno di progetti di ricerca finanziati dal CNR e/o dalle Università.

I NRD si occupano di temi e di strategie anche molto diversi fra loro; periodici seminari e convegni nazionali annuali, generalmente separati per livelli di scuola, consentono di confrontare gli indirizzi e i contenuti delle varie ricerche anche attraverso la pubblicazione dei Quaderni del Progetto Strategico *Tecnologie e Innovazioni Didattiche* nelle due serie *Innovazioni didattiche per la matematica* e *Formazione e aggiornamento degli insegnanti in matematica.*

Esistono indubbiamente molti motivi di arricchimento professionale per

gli IR, legati alla possibilità di migliorare la qualità del loro insegnamento, di mantenere contatti nazionali e internazionali con il mondo della ricerca, di accedere a materiale bibliografico spesso introvabile normalmente, di comunicare i propri lavori ai convegni, di pubblicarli, di svolgere il ruolo di formatori o esperti.

Ma a fronte di queste chances gli IR trovano notevoli ostacoli alla loro attività, soprattutto:

¤ nei *rapporti con i capi d'Istituto:* sono necessari patteggiamenti continui per ottenere il consenso agli allontanamenti dal servizio - spesso oltretutto gli IR vengono invitati a partecipare come relatori o responsabili di laboratori a convegni anche di livello diverso da quello cui appartengono, ma dispongono - come gli altri - solo di quegli striminziti cinque giorni all'anno per l'aggiornamento previsti dalla legge. E si tenga presente inoltre che se la maggior parte dei corsi di aggiornamento o dei convegni ha l'esonero ministeriale, molte delle attività organizzate dall'università, non lo hanno, e questo complica ulteriormente la vita degli IR.

¤ nei *rapporti con gli IRRSAE*: teoricamente gli IR dovrebbero rappresentare una base fortemente accreditata per la individuazione dei formatori o degli aggiornatori, ma spesso gli IRRSAE non sanno neppure che gli IR esistono. *Vi sono ancora evidenti barriere fra il mondo della ricerca e quello dell'aggiornamento.*

¤ nello *status:* essere ricercatore o esperto dell'IRRSAE o del CNR fa titolo; essere membro - anche da cinque o dieci anni o più anni - di un NRD, no.

Ma anche questi sono effetti negativi della *totale mancanza di flessibilità all'interno della configurazione giuridica della professione insegnante.*

Nell'attesa che la legge 341 diventi completamente operante (se mai lo diventerà) riteniamo che sarebbero necessari degli interventi destinati a consentire nel prossimo futuro agli IR uno svolgimento adeguato del loro lavoro. Chiediamo quindi che UMI e CIIM si facciano portavoci presso il MPI in modo che:

1) tutte le ore di lavoro all'interno dei nuclei siano riconosciute alla stregua delle ore di aggiornamento o autoaggiornamento;

2) l'invito a partecipare agli incontri dei NRD a livello regionale, nazionale o internazionale, o in qualità di esperto o formatore, sia reso equivalente almeno alla partecipazione ai corsi del Piano Nazionale di Informatica, quindi con l'esonero automatico e non condizionale e l'autorizzazione a svolgere la missione. In sostanza, si chiede una estensione dei cinque giorni per l'aggiornamento (previsti per tutti gli insegnanti) fino ad un tetto di venti giorni per anno scolastico;

3) che siano considerati titoli didattici "significativi" per eventuali graduatorie dell'IRRSAE e/o del MPI che riguardino nuove figure quali formatori, aggiornatori, animatori, ricercatori, esperti, ecc., le seguenti attività de-

gli IR:

a) la pubblicazione di quaderni;

b) la pubblicazione di articoli, saggi, relazioni di didattica su riviste italiane o straniere;

c) conferenze, laboratori, comunicazioni tenute in occasione di convegni e seminari organizzati direttamente dai NRD, dalle Università e dalle altre agenzie operanti nel campo della cultura della scuola, in ambito nazionale o internazionale;

d) i corsi di formazione e di aggiornamento ai quali si è partecipato in qualità di responsabili, esperti, coordinatori, ecc.

4. CONCLUSIONI.

Ringraziamo l'attuale CIIM per l'opportunità offertaci in questo convegno di aprire su queste questioni un dibattito a livello nazionale, rispecchiando in tale modo una continuità con le scelte della CIIM e dell'UMI che già nel 1975 avevano promosso la nascita dei NRD.

Riteniamo peraltro che sia ormai realistico (vedi Legge 341) un modello di IR non più basato sul volontariato puro, anche se rigettiamo (e per certi aspetti temiamo) un modello di IR *funzionariale* e *burocratico* che mortifichi proprio quelle premesse vitali e culturalmente significative che hanno determinato sin dall'origine il nostro desiderio di lavorare nei NRD.

Riteniamo inoltre che sarebbe un ingiustificabile spreco di risorse umane e di energie intellettuali se non dovesse essere presa nella giusta considerazione una struttura operativa di collegamento fra la scuola e l'università che nei fatti ha dimostrato in tuti questi anni la sua validità.

Vogliamo infine sottolineare, per quanto concerne l'individuazione di un possibile ruolo futuro, che gli IR si riconoscono in un tipo di figura quasi **completamente nuova** rispetto a quelle previste sinora nei contratti di lavoro (ipotizzata peraltro dalla Commissione per il Coordinamento Università-Scuola, che prefigura per docenti del tipo degli IR un "esonero temporaneo dall'insegnamento a tempo pieno o parziale"): **un insegnante ricercatore impegnato part-time nella scuola e contemporaneamente con un ruolo istituzionalizzato nel mondo della ricerca.** Non si ricono-scono invece nelle attuali possibilità, che consentono solamente il distacco totale dall'insegnamento. In definitiva, si identificano in un ruolo in cui si abbia la possibilità di mantenere il contatto con gli allievi e quindi di collegare la propria attività quotidiana in classe con l'attività di ricerca in ambito universitario.

In generale, possiamo concludere dicendo che gli IR esprimono delle esigenze molto più avanzate - rispetto alla *povertà della cultura della scuola* espressa sinora dalla nostra classe dirigente - che rischiano di naufragare nel mare magnum delle cose da modificare e nel generale clima di sfiducia e di pessimismo.

Esigenze avanzate legate anche alla convinzione di fondo che i mondi della ricerca della sperimentazione, della formazione e dell'aggiornamento dovranno trovare necessari punti di contatto e che figure come gli IR potranno rappresentare in futuro, evidentemente in tutti gli ambiti nei quali verrà organizzata la trasmissione del sapere e non soltanto in quello matematico, dei fondamentali anelli di congiunzione fra l'università e la scuola, il giorno in cui, finalmente, verrà dedicata da parte dei nostri governanti una reale, concreta, *lungimirante* attenzione alla formazione professionale degli insegnanti e ai modi per realizzarla.

BANCA DATI RICERCA DIDATTICA MATEMATICA (BDRDM), ASIM E IAMSI, OGGI ... E DOMANI

*Gabriele Lucchini**

La proposta di BDRDM ha le sue radici nel verbale della riunione della CIIM dei giorni 7-8 settembre 1987: "Si rinnova l'incarico a Lucchini di procedere nel lavoro di preazione di un archivio sulla Didattica della Matematica, ..." [1].
Di qui la preparazione delle proposte per BDRDM, ASIM, IAMSI.

1. Che cosa è, oggi, BDRDM.

1.1 - Presentazione.

BDRDM è una *banca dati* al servizio di ricercatori e insegnanti (in attività o in formazione), organizzata in *archivi* per la documentazione e la ricerca con *personal computer MS-DOS compatibile* di dati su pubblicazioni e attività relative alla didattica della Matematica, con particolare riferimento all'Italia [2].
BDRDM è:
— liberamente utilizzabile, nella versione *b* del programma (cfr. § 1.2);
— articolata in *programma* (cfr. S 1.2) e *archivi* (cfr. § 1.3),
— collegata a ASIM (cfr. § 2) e a IAMSI (cfr. § 3).

1.2 - Programma.

Il programma, realizzato con *db Master V. 2.0 della Infomark SaS*:

---

* Dipartimento di Matematica, Università degli Studî di Milano.
Lavoro svolto nell'ambito dei contratti CNR "La Matematica nella formazione integrale della persona" e dei progetti 40% MURST "Ricerche di Matematica ed In-formatica per la Didattica".
Per esigenze di tempo, in sede di convegno l'esposizione è stata limitata a alcune informazioni essenziali.

1 Notiziario della Unione Matematica Italiana, Gennaio-Febbraio 1988, pag. 87, righe 8-10.

2 BDRDM è realizzata anche come risposta al problema di *gestire l'accumulo* del patrimonio di testi e informazioni al quale attingere nella costruzione, nella documentazione, nella utilizzazione del sapere.

— è disponibile in due versioni:
  a) per la banca dati centrale,
  b) per le banche dati decentrate;
— richiede:
  — *personal computer* con disco fisso di almeno 20 Mb e RAM di almeno 640 Kb,
  — MS-DOS 3.10 o successivo (o MS-DOS compatibile equivalente),
  — stampante a 80 o a 132 colonne (alcune stampe sono previste su 132 colonne, in *condensed),*
  — monitor monocromatico o a colori;
— consente:
  — immissione di dati da maschere o da miniprogrammi,
  — aggiunta di *file* di dati da dischetto con controllo non automatico per ripetizioni e saturazione,
  — gestione degli archivi,
  — consultazione e ricerca per singoli archivi con risposta su video o su carta o su *file*,
  — correzioni (da parte di persone autorizzate),
  — trasferimento di archivi su dischetti,
  — cancellazione di archivi dal disco fisso,
  — aggiunta di programmi di ricerca su archivi.

NB - La preparazione di nuovi archivi è consentita solo nella versione *a* del programma.

1.3 - Archivi.
Il *piano degli archivi* prevede:
a) PUBB (libri, articoli, tesi, testi non pubblicati), già disponibile in versione sperimentale (cfr. § 4.2),
b) PER (Persone, Enti, Riviste), in preparazione [3],
c) MATDID (MATeriali DIDattici),
d) CONV (CONVegni, congressi, ...),
e) LEGISCI (LEGIslazione SColastica Italiana).

Per ogni *archivio* sono previsti:
— maschere per immissione di dati,
— schemi di ricerca,
— stampe.

NB - Sono previste *convenzioni di scrittura*, indicate per i singoli archivi, e *programmi di servizio*, generali o particolari, per sistemazioni e elaborazioni.

NB - Sussistono i consueti *problemi di compatibilità* relativi a *layout* e *code page*.

[3] E' disponibile il *file* ENTI.DBF per DBIII con gli indirizzi di più di trecento Enti.

2. Che cosa è, oggi, ASIM.

2.1 - Presentazione.
ASIM, *Archivio per la Storia dell'Insegnamento della Matematica in Italia*, è una raccolta di pubblicazioni, audiovisivi, *software*, materiali, schede presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.
ASIM prevede uno *schedario cartaceo* (cfr. § 2.2) e uno *schedario su personal computer MS-DOS* (cfr. § 2.3).

2.2 - Schedario cartaceo.
Lo *schedario cartaceo* prevede:
— schede a impostazione libera (formato massimo del testo: 16x25 cm),
— schede a maschera, predisposte per collegamento con BDRDM,
— indici delle schede.

2.3 - Schedario su personal computer MS-DOS.
Lo *schedario su personal computer MS-DOS* comprende:
— *file* a impostazione libera,
— schede a maschera, predisposte per collegamento con BDRDM,
— indici a impostazione libera.

3. Che cosa è, oggi, IAMSI [4].

3.1 - Presentazione.
IAMSI, *Insegnamento Apprendimento della Matematica nella Scuola Italiana*, è un *codice* di classificazione di contenuti matematici o professionali basato su programmi di insegnamento e programmi di concorso per le scuole della Repubblica Italiana.
IAMSI è articolato in *temi, argomenti, livelli scolastici.*

3.2 - Temi, argomenti, livelli scolastici.
Attualmente IAMSI comprende:
— 17 temi matematici, articolati in 247 argomenti,
— 8 temi pedagogico-didattici o giuridico-sociali, articolati in 82 argomenti,
— 9 livelli scolastici.

[4] Su IAMSI è in prepazione un *Quaderno* MAFIP.

4. Il materiale disponibile per libera duplicazione [5].

4.1 - Il programma.
Come si è già accennato (cfr. § 1.1), la versione *b* del programma è liberamente utilizzabile e duplicabile [6].

4.2 - L'archivio PUBB.
Per l'*archivio PUBB* sono disponibili:
— una maschera per l'immissione dei dati,
— schemi di ricerca,
— programmi di stampa.

4.3 - Altri dischetti.
Gli altri dischetti disponibili per duplicazione presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studî di Milano sono, con piccole variazioni, quelli già segnalati al *XIV Congresso UMI* (Catania, 1991) [7].

4.4 - Testi e documenti.
Testi e documenti sono consultabili presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica della Università degli Studî di Milano.

5. Possibilità di sviluppo.

5.1 - Le dimensioni di BDRDM.
BDRDM è, attualmente, un fatto locale e sperimentale, con possibilità di sviluppo limitate presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studî di Milano.
Ritengo auspicabile che BDRDM divenga un fatto nazionale, attraverso la CIIM (possibilmente, in collaborazione con BDP, IRRSAE e MPI, MURST, CNR o altri Enti), come sviluppo del fatto locale o come suo assorbimento in una iniziativa più ampia o con una nuova e più autorevole iniziativa.
NB - In condizioni adeguate di sviluppo potrà essere studiato un collegamento con MATHDI [8].

[5] La duplicazione può essere fatta presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studî di Milano o da qualunque copia.
[6] Gli interessati all'acquisizione della versione *a* possono rivolgersi alla Infomark Sas (Piazza Sraffa, 4 - 20136 Milano).
[7] Cfr. *Sunti delle comunicazioni*, pag. 287.
[8] MATHDI (MATHematical DIdactics) è un servizio computerizzato di informazioni sulla didattica della Matematica e delle scienze dell'informazione, accessibile via *STN International* (The Scientific and Technical Information Network).

5.2 - Richieste e collaborazioni.
Indipendentemente dal tipo di sviluppo, verranno considerate richieste e disponibilità di collaborazione di enti, riviste, ricercatori, insegnanti.

6. Ringraziamenti.

Ringrazio la CIIM per l'occasione di studio e per la possibilità di presentazione al convegno e negli atti e ringrazio, fin d'ora, chi vorrà collaborare con osservazioni e suggerimenti, con dati, con utilizzazioni.

SI PUÓ PARLARE DELLE PAROLE DI FIBONACCI A STUDENTI DI LICEO?

*Giuseppe Pirillo**

Riassunto. *I numeri di Fibonacci sono ben noti. Al contrario le parole di Fibonacci sono quasi sconosciute. Eppure possiedono diverse proprietà interessanti, facili da dimostrare ed utili, ad esempio, per avviare una discussione sul tema delicatissimo degli algoritmi.*

Per definizione, una *parola* su un *alfabeto* ***A*** è una successione finita di *lettere* di ***A***. La lunghezza della successione costituisce anche la *lunghezza* della parola in questione. Ad esempio:

casa

è una parola di lunghezza ***4*** sull' alfabeto ***{a,c,s}*** e

matematica

è una parola di lunghezza ***10*** sull'alfabeto ***{a,c,e,i,m,t}***.

Lo scopo di questa nota è di presentare alcune interessanti proprietà delle ***parole di Fibonacci***. Ci riferiamo alle Proposizioni 1-4 che sono sufficientemente note agli informatici. Il compito di ricavare le loro dimostrazioni esplicite è lasciato al lettore al quale verranno date solo alcune indicazioni.

L'alfabeto delle parole di Fibonacci è ***{a,b}***. Le lettere ***a*** e ***b*** possono essere considerate, in perfetto accordo con la definizione appena ricordata, come parole di lunghezza ***1***.

Per "costruire" le ***parole finite di Fibonacci*** abbiamo bisogno di due "mattoni" iniziali, le parole $f_0=b$ ed $f_1=a$. Per ogni $n\geq 2$, l'n-esima parola finita di Fibonacci f_n è, per definizione,

$$f_{n-1}f_{n-2}$$

cioè la *concatenazione* di f_{n-1} ed f_{n-2} (si noti bene che l'operazione di concatenazione non è commutativa: ad esempio, i due prodotti di ***a*** e di ***b*** sono ***ab*** e ***ba*** e sono chiaramente diversi fra loro).

Così abbiamo:

$f_1=a$,

$f_2=ab$,

* IAMI CNR , viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze.

f_3=*aba*,
f_4=*abaab*,
f_5=*abaababa*,
f_6=*abaababaabaab*,
f_7=*abaababaabaababaababa*,
f_8=*abaababaabaababaababaabaababaabaab*,
f_9=*abaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaababa*.

Naturalmente si potrebbe continuare all'infinito. Si osservi che, per $n \geq 1$, ogni f_n comincia con f_{n-1} . Si osservi ora che f_2, f_4, f_6 ed f_8 finiscono per ***ab*** mentre f_3, f_5, f_7 ed f_9 finiscono per ***ba***. Questo fatto si può generalizzare. Precisamente si ha la seguente proposizione.

Proposizione 1 ([1]). *Sia $n \geq 2$. Se n è pari allora f_n finisce con **ab** e se n è dispari allora f_n finisce con **ba**.*

Poniamo ora, per ogni $n \geq 2$,

$$g_n = f_{n-2} f_{n-1} \ .$$

Ad esempio si ha:
g_2=*ba*,
g_3=*aab*,
g_4=*ababa*,
g_5=*abaabaab*,
g_6=*abaababaababa*,
g_7=*abaababaabaababaabaab*,
g_8=*abaababaabaababaababaabaababaababa*,
g_9=*abaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaabaab*.

Poniamo anche $F_0=1$, $F_1=1$ e, per ogni $n \geq 2$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

e diciamo che F_n è l'n-esimo ***numero di Fibonacci***, cioè l'n-esimo elemento della successione:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Proposizione 2 ([1]). *Per ogni $n \geq 2$, la lunghezza di f_n coincide con quella di g_n ed è F_n.*

Si osservi ora che le parole f_2 e g_2 sono rispettivamente ***ab*** e ***ba***; le parole f_3 e g_3 cominciano entrambe per ***a*** ma finiscono rispettivamente per ***ba*** e per ***ab***; le parole f_4 e g_4 cominciano entrambe per ***aba*** ma finiscono rispettivamente per ***ab*** e per ***ba***; le parole f_5 e g_5 cominciano entrambe per ***abaaba*** ma finiscono rispettivamente per ***ba*** e per ***ab***; le parole f_6 e g_6 cominciano entrambe per ***abaababaaba*** ma finiscono rispettivamente per ***ab*** e per ***ba***,...

Si ha la seguente "proprietà di quasi commutatività".

Proposizione 3 ([1,3]). *Sia $n \geq 2$. Le parole $f_n = f_{n-1} f_{n-2}$ e $g_n = f_{n-2} f_{n-1}$ differiscono solo nelle ultime due lettere.*

*Più precisamente, esiste una parola h_n tale che, se **n** è pari allora $f_n = h_n ab$ e $g_n = h_n ba$ mentre se **n** è dispari allora $f_n = h_n ba$ e $g_n = h_n ab$.*

Ci siamo limitati alle Proposizioni 1-3 ma ci sono altre proprietà interessanti delle parole finite di Fibonacci. Per esempio: *la parola h_n é palindroma* (una parola è palindroma se la sua prima lettera coincide con l'ultima, la seconda con la penultima, eccetera).

Una ***parola infinita*** su un alfabeto ***A*** è una successione infinita di lettere di ***A***, cioé un'applicazione dagli interi non negativi in ***A***. Data una parola infinita ***s*** noi scriviamo

$$s = s(0)s(1)s(2) \dots s(i) \dots$$

e, per $i \leq j$, indichiamo con $s(i,j)$ la parola

$$s(i)s(i+1) \dots s(j).$$

Chiaramente, *esiste ed è unica la parola infinita f tale che, per ogni* $n \geq 1$, $f(0,F_n-1)=f_n$; naturalmente ***f*** è detta ***parola infinita di Fibonacci*** e si ha
f=***abaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaaba...***

Proposizione 4 ([1,3]). *Le parole f_n e g_n ricorrono infinite volte in **f**, cioè esistono infinite coppie di interi **(i, j)** tali che $f(i, j)=f_n$ ed infinite coppie di interi **(i', j')** tali che $f(i', j')=g_n$.*

Esiste un'altra importante definizione della parola infinita di Fibonacci; essa è infatti una particolare *parola sturmiana*. Queste parole sono definite da rette di equazione $y=\alpha x$ con α irrazionale. Per semplicità ed in modo informale riferiamoci alla figura della tavola allegata dove le rette orizzontali hanno equazione $y=h$ con h intero, quelle verticali hanno equazione $x=k$ con k intero e l'unica retta obliqua ha appunto equazione $y=\alpha x$. Immaginiamo ora che un ipotetico e diligente osservatore abbia appena superato il punto $(0,0)$ e prosegua verso l'infinito, sempre restando sulla retta obliqua. Immaginiamo che sia dotato di "sufficiente" materiale per scrivere e chiediamogli di scrivere ***a*** ogni volta che "attraversa" una retta di equazione $y=h$ con h intero e di scrivere ***b*** ogni volta che "attraversa" una retta di equazione $x=k$ con k intero. Per questo ipotetico viaggiatore non ci saranno mai momenti in cui non potrà decidere quale lettera scrivere, infatti $(0,0)$ è il solo punto a coordinate intere da lui toccato (α è un numero irrazionale). La parola infinita così scritta ha notevoli proprietà, alcune delle quali dipendono da quelle della frazione continua associata ad α. Tuttavia, indipendentemente da α, i "blocchi" di lunghezza k che essa contiene sono esattamente $k+1$ ([2]).

Indichiamo ora con Φ il cosiddetto rapporto aureo

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

e immaginiamo di poter comunicare con il nostro viaggiatore mentre egli procede sulla retta di equazione $y=\Phi x$. Se gli chiediamo la successione di ***a*** e di b che ha già scritta, egli in qualsiasi momento ci risponderà comunicandoci un segmento iniziale della parola infinita di Fibonacci! In altri termini, la parola sturmiana relativa alla retta $y=\Phi x$ è la parola infinita f, che noi abbiamo già definito per mezzo della concatenazione a partire da b e da a.

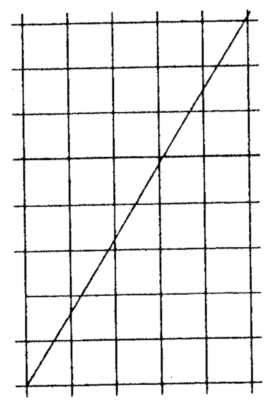


Tavola. Le rette orizzontali hanno equazione $y=h$ con h intero, quelle verticali $x=k$ con k intero e quella obliqua $y=\Phi x$ con $\Phi=(\sqrt{5}+1)/2$.

Osservazione 1. Le parole finite e la parola infinita di Fibonacci hanno una notevole importanza in informatica teorica ed in particolare in teoria degli algoritmi. Ciò è molto ben sottolineato, per esempio in [1] e [3]. Per gli algoritmi di ricerca di una parola in un testo si veda [3] dove un particolare rilievo è dato alla "proprietà di quasi commutatività".

Osservazione 2. Un'interessante proposta didattica relativa anche alle parole di Fibonacci si trova in [4].

Osservazione 3. Nel redigere questo testo per gli Atti non possiamo non tenere conto dei lavori del Convegno. In particolare, ci piace sottolineare i punti di contatto fra l'argomento della nostra relazione e ciò che hanno detto sulle *frazioni continue* il Professor Scimemi e sulle *parole sturmiane* il Professor Prodi. Vogliamo tuttavia precisare che il Professor Prodi non ha mai usato il termine "parole sturmiane"; egli ha utilizzato il linguaggio dell'aritmetica opportunamente modificato per renderlo comprensibile agli studenti di liceo: rette che evitano tutti i punti a coordinate intere salvo uno, biliardo quadrato, "bosco infinito".

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1]. D.E. Knuth, *Fundamental Algorithms, The Art of Computer Programming*, Vol 1, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

[2]. D.E. Knuth, *Sequences with precisely k+1 k-blocks*, Solution to problem E2307, Amer. Math. Monthly, 79(1972), 773-774.

[3]. D.E. Knuth, J.H. Morris and V.R. Pratt, *Fast pattern matching in strings*, SIAM J. Comput., 6(1977), 323-350.

[4]. B. Piochi, *Un approccio alla Combinatoria: i Codici e la Parola di Fibonacci*, Didattica delle Scienze e Informatica nella Scuola, 158 (1992), 41-47.

CALCOLATORE E INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

Carlo Dapueto *

0. Nel breve spazio di questa comunicazione tenterò di analizzare, sommariamente, alcuni problemi generali che riguardano l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore italiana, con particolare riferimento al (o, meglio, assumendo come punto di vista - di partenza il) ruolo che in esso è venuta a svolgere l'introduzione del calcolatore.

1. Sono due anni che, con un nucleo di insegnanti di scuola secondaria superiore, mi occupo di questo segmento scolastico. La nostra prima attività, come gruppo di ricerca didattica *MaCoSa* (Matematica per Conoscere e per Sapere), è stata l'organizzazione di un *corso di aggiornamento sull'uso del calcolatore nell'insegnamento della matematica* che voleva venire incontro alle esigenze e alle preoccupazioni segnalate in varie occasioni da molti insegnanti di scuola secondaria superiore di fronte alla prospettiva dell'introduzione dei NP - "nuovi programmi" (questa attività è stata anche oggetto di una tesi di laurea, svolta da S. Greco, che ha attivamente collaborato all'impostazione e alla conduzione dell'esperienza).

Per decidere l'impostazione del corso abbiamo svolto un'*analisi preliminare della situazione* in cui saremmo intervenuti, utilizzando sia le valutazioni degli insegnanti del gruppo (che, in buona parte, erano stati anche formatori nell'ambito del PNI - Piano Nazionale Informatica) sia le documentazioni accessibili (successive versioni dei NP, relazioni finali di vari corsi di aggiornamento del PNI, nuovi libri di testo circolanti, informazioni raccolte in altre esperienze di aggiornamento, informazioni e valutazioni raccolte con un questionario allegato alla domanda di iscrizione al nostro corso, ...).

Per quanto riguarda i corsi di aggiornamento del PNI abbiamo osservato che essi - per quanto, specie in varie aree del paese, abbiano costituito uno stimolo e un punto di appoggio per insegnanti intenzionati a rinnovare l'insegnamento ma condizionati da un ambiente insensibile o ostile - hanno, mediamente, sofferto di grosse carenze (non da imputare ai singoli formatori ma alle caratteristiche generali dei corsi e alla formazione impartita ai for-

* Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova.

matori stessi):
— scarsi riferimenti ai problemi didattici delle varie aree matematiche e alle innovazioni culturali dei NP;
— "pascalite" e "dossite": visione parziale (e un po' "miope") con cui sono state affrontate le tematiche informatiche (scelte del software non calibrate agli obiettivi didattici, riduttive, unilaterali, ...);
— impostazione imperniata su alcuni stereotipi relativi alla programmazione (al calcolatore), a cui venivano spesso ricondotte, banalizzandole, le attività di matematizzazione e la programmazione didattica (visione caricaturale della programmazione strutturata, collegamenti rigidi tra top-down e modellizzazione matematica, ...);
— output non molto soddisfacente (sia dal punto di vista delle competenze operative acquisite dai partecipanti ai corsi, nonostante la notevole quantità di tempo investita, sia dal punto di vista dell'inquadramento culturale generale e disciplinare, sia dal punto di vista delle motivazioni alla sperimentazione).

Per quanto riguarda i NP, si è trattato indubbiamente di un notevole passo avanti rispetto alla situazione attuale: si è data ad essi un'impostazione per temi e sono stati forniti di considerazioni e indicazioni metodologiche, prefigurando finalmente un raccordo con i programmi ormai da molti anni in vigore nella scuola dell'obbligo. Ma, rispetto a questi ultimi, i temi sono stati articolati e sviluppati in maniera meno soddisfacente, sia dal punto di vista tecnico-culturale che dal punto di vista didattico, con un peggioramento che, in genere, si è accentuato passando da una versione alla successiva, per non parlare del quadro complessivo dei Programmi "Brocca" (l'analisi dei NP è stata successivamente approfondita in collaborazione con alcuni insegnanti del GREM; vedi [4]).

Le *scuole che sperimentano* i NP (progetto PNI, progetto "Brocca" o altri) offrono, in gran parte dei casi, un quadro non esaltante: si va dal fare tutto come prima (a parte qualche cambiamento nell'orario scolastico) a un'attività schizofrenica: temi nuovi accennati, temi vecchi insegnati allo stesso modo, calcolatore usato in aula computer senza interazioni sostanziali con l'impostazione dell'insegnamento della matematica.

E i *libri di testo*? Se è possibile, continuano a peggiorare. Nei libri più diffusi, diciamo fino a coprire il 90% delle adozioni, troviamo gli stessi clamorosi errori di prima (impostazione a "definizioni e dimostrazioni" con: definizioni sbagliate di equazione, polinomio, funzione, ..., definizioni assiomatiche del piano euclideo che non stanno in piedi, costruzioni degli insiemi numerici non motivate ed errate, dimostrazioni che tali non sono, ...). Qualcosa è cambiato: ci sono più capitoli (magari ora chiamati "unità didattiche"); ma sono sempre ben separati (anche se rimescolati rispetto alle collocazioni tradizionali); e viene dato lo stesso peso e la stessa impostazione a certe pratiche didattiche (meccanismi, artifici, casistiche, ...) che i NP invitano a superare (ma che già i vecchi programmi invitavano a non intraprendere ...: si vedano per esempio le premesse ai programmi dei licei classico e scientifico). Il peggioramento sta nel fatto che gli errori citati sono, in genere, riconducibili ad aspetti (confusione tra semantica e sintassi, non padronanza del processo di costruzione delle formule in un linguaggio formale, confusione tra situazione e "modello matematico") che nei nuovi capitoletti (sull'informatica, sulla "logica", ...) sono invece, bene o male, accennati.

A queste considerazioni avevamo aggiunto la constatazione della presenza di uno stato di *incertezza e confusione istituzionale*, che nell'ultimo anno non è migliorato: non si sa quando e in che versione entreranno in vigore i NP; vi sono scuole in cui sono in vigore parallelamente due o più organizzazioni degli studi diverse per programmi, orari, "cattedre" (classi normali, classi PNI, classi "Brocca", classi progetto X); ispettori che "tifano" per progetti diversi e forniscono indicazioni e informazioni di tipo differente; mancanza di una verifica delle sperimentazioni in corso (sembra che a volte gli insegnanti siano invitati ad essere di manica larga affinché le sperimentazioni possano proseguire con un numero adeguato di classi negli anni di corso successivi); ...

2. Oltre alla situazione scolastica italiana, abbiamo analizzato la situazione della *ricerca didattica*, anche all'estero, per quanto riguarda soprattutto i rapporti tra calcolatore e insegnamento della matematica. Ci è sembrato di poter delineare tre diverse impostazioni di fondo:
— costruzione (o lettura) e uso di programmi semplici (in genere in Basic "standard") o uso di programmi già confezionati (software matematico d'uso generale), sia con personal computer che con pocket (o home) computer, per elaborazioni numeriche, grafiche o simboliche che facilitino il "normale" insegnamento della matematica; molti esempi al riguardo si possono trovare ad esempio sulla rivista "Mathematics Teacher"; si tratta decisamente delle esperienze più positive, anche se prevale un uso strumentale del mezzo di calcolo, con scarse riflessioni generali sulla sua natura, i suoi limiti, il suo linguaggio e le sue conoscenze "matematiche";
— l'uso di cosiddetti "micromondi" (e simili); tutti gli esempi esaminati (si vedano ad esempio gli atti degli ultimi PME) ci sono parsi delle esperienze "ghetto", sia rispetto al complesso della matematica (costrizione a muoversi in un'area ristretta della matematica, con un linguaggio e con possibilità operative legate a un'impostazione molto particolare, che impedisce integrazioni con altre aree, realizzazioni di itinerari didattici flessibili ed efficaci, ...), sia rispetto agli usi "veri" (nella matematica e nelle professioni) del calcolatore (si provi a confrontare la realizzazione di disegni - anche "geometrici" - col software didattico geometrico in circolazione e quella con i più diffusi prodotti per il disegno al calcolatore: balza subito agli occhi l'"innaturalità" dei comandi e delle "restrizioni" a cui costringe il primo, mentre, a una

mente libera da schemi "scolastici", appare subito evidente le potenzialità didattiche di un'esplorazione della matematica "incorporata" nei secondi);
— attività informatiche fini a sé stesse (o all'informatica); si pensi a molte delle sperimentazioni incentrate sull'uso del Logo.

3. Nella discussione dell'*impostazione del corso di aggiornamento* abbiamo cercato di tener conto dell'analisi di cui al punto 1. In particolare volevamo:
— tener conto delle limitata capacità operative fornite dal PNI (e del fatto che alcuni partecipanti al corso non avevano neanche partecipato ai corsi del PNI) e dare un minimo di padronanza di un linguaggio di programmazione sufficientemente evoluto;
— dare a questo obiettivo non la massima priorità ma, nella gestione stessa del corso, affrontarlo all'interno di un itinerario che avesse come filo conduttore l'integrazione dell'uso del calcolatore con l'insegnamento della matematica;
— assumere come punti di riferimento principali di questo itinerario i seguenti (sintetizzati a "slogan"): limiti e potenzialità del calcolatore, matematica col calcolatore, matematica per usare il calcolatore, matematica per conoscere il calcolatore.

Per dare un'idea dei vari aspetti di questa "integrazione" che abbiamo cercato di fare emergere, faccio *qualche esempio* di attività (il complesso delle schede di lavoro e del materiale utilizzato è riportato in [3]).
— Riflessioni sui "limiti" del software e sulle conoscenze matematiche necessarie per comprendere questi limiti e usarlo al meglio (si è trattato di attività relative alle elaborazioni grafiche e numeriche simili ad alcune di quelle proposte nella conferenza di Conti):
  educazione all'uso critico del software (importante, ormai, per gran parte delle professioni) e motivazioni per attività di tipo matematico.
— Numeri e loro rappresentazioni (numeri "macchina" - numeri "della matematica", e riflessioni didattiche sulla presentazione delle strutture numeriche):
  l'uso del calcolatore fornisce occasioni per presentazioni più operative e più rigorose (non necessariamente più "astratte") delle strutture matematiche.
— Calcolando con un programma i termini algebricamente equivalenti $(1\text{-}\cos x)/(x \cdot x)$ e $(\sin x)^2/(x \cdot x \cdot (1+\cos x))$ per $x=10^{-n}$ con n=0,1,2,3,4,5,... si ottengono rispettivamente 0.4596977, 0.4995823, 0.500083, 0.4768371, 0, 0, ... e 0.4596977, 0.4995834, 0.4999958, 0.5, 0.5, ...; come mai? quale dei due termini è più "semplice"? ...:
  che senso hanno, che senso dare alle attività di manipolazione algebrica? la matematica per analizzare le uscite del calcolatore, congetture e dimostrazioni, ... e l'introduzione e lo studio dei limiti.

— Il piano euclideo, $\mathbb{R}^2$ e lo schermo del calcolatore:
  la geometria di/per il calcolatore: motivazioni per approcci che fondono aspetti sintetici, metrici, analitici e vettoriali.
— Grafici di funzioni al calcolatore, funzioni tabulabili e (uniforme) continuità:
  è meglio (in relazione al concetto "intuitivo" di continuità, alle motivazioni legate all'uso del computer, alle difficoltà tecniche, ...) introdurre la continuità puntuale o direttamente la continuità su intervalli chiusi limitati?
— Calcolo numerico e calcolo simbolico:
  come usare il secondo per migliorare il primo, confronti tra lessico del software per il calcolo simbolico e il lessico del calcolo letterale scolastico, ...
— Introduzione "algoritmica" a (la misura di) angoli e aree:
  il calcolatore può facilitare l'introduzione delle misure angolari e di superficie (e del concetto di curva), in genere trattate malamente o del tutto separatamente rispetto alla geometria "classica"; motivazioni per il passaggio dal concetto di limite al concetto di estremo superiore.

— Derivazione e integrazione numerica; grafici di f, Df, $\int$Df con un foglio di calcolo elettronico e congettura del teorema fondamentale dell'analisi; programmi per derivazione e integrazione simbolica:
  il calcolatore come macchina a cui far fare matematica nel modo migliore: come programmarlo, come usarlo, come ciò può dipendere dai contesti (ambiti applicativi, tipi di funzioni, ...); nuove occasioni per motivare (e impostare) "culturalmente" il calcolo infinitesimale;
— Realizzazioni di trasformazioni geometriche componendo trasformazioni predefinite scelte da un menu (con programmi ad hoc, con del software per disegni):
  le potenzialità del calcolatore per visualizzazioni dinamiche, per attività euristiche o autocorrettive; motivazioni allo studio dei gruppi.
— Realizzazioni e confronto tra modellizzazioni matematiche diverse di una serie storica (istogrammi di distribuzione, grafici in funzione del tempo, grafici "lisciati" con medie mobili successive, ...):
  il calcolatore (con opportuno software) consente facilmente di ottenere diverse rappresentazioni matematiche di un certo fenomeno: importanza della scelta del tipo di modello, dell'individuazione delle conoscenze in più o in meno offerte da un mo-

dello rispetto a un altro, dei diversi livelli di adeguatezza e fedeltà rispetto alla situazione modellizzata, ...

— Generare "a caso" che vuol dire? paradossi "probabilistici" al calcolatore; costruzione di modelli di simulazione usando un generatore di numeri pseudo-casuali (generatore con distribuzione "continua" uniforme su [0,1):

il calcolatore e l'impostazione dell'insegnamento di un'area matematica, il calcolo delle probabilità: le potenzialità sperimentali e di analisi di dati del calcolatore inducono a riflettere sull'opportunità di intrecciare profondamente, negli itinerari didattici, statistica e probabilità, di non posticipare l'introduzione del caso "continuo", di intrecciare gli approfondimenti analitici (dagli istogrammi alle funzioni densità, ...) all'introduzione del calcolo infinitesimale, di non affrontare solo leggi di distribuzione stereotipate (si possono facilmente individuare andamenti, fare confronti con formulazioni analitiche esplicite, ...; si può congetturare sperimentalmente il teorema del limite centrale; ...).

Per motivi di tempo (una dozzina di incontri della durata di mezzo pomeriggio) e per difficoltà incontrate dagli insegnanti (prender confidenza con tastiere, mouse, dischi, collegamenti, ... è stato più dispendioso del previsto; il parallelo impegno scolastico non ha consentito un adeguato approfondimento da parte dei partecipanti tra una lezione e l'altra) non tutte le riflessioni sono state sviluppate in modo soddisfacente e non sono state "toccate" alcune aree matematiche inizialmente previste (equazioni differenziali, complessità computazionale).

Le risorse informatiche (in parte condizionate dall'aula computer che abbiamo impiegato, che allora era attrezzata con Macintosh Plus senza disco fisso e con 1 MB di RAM) sono state un Basic "strutturato" (in particolare il QuickBasic, che presenta poche differenze tra versione DOS e versione Mac), un prodotto integrato (Microsoft Works, impiegando in particolare il foglio di calcolo, che è di uso particolarmente semplice rispetto a fogli di calcolo più specializzati), software matematico (programmi realizzati da noi e Milo), calcolatrici tascabili e un Pascal (solo per dei confronti con il QuickBasic; cenni a TurboPascal e ThinkPascal).

4. L'*atteggiamento dei corsisti* (una cinquantina di insegnanti suddivisi in due turni) *all'inizio del corso* ha confermato per vari aspetti la nostra analisi iniziale, anche se si trattava di insegnanti già "selezionati" (per aver scelto un corso di aggiornamento che, nella presentazione, si prefigurava un po' "controcorrente" e in cui c'era da lavorare). In breve:

— 5 insegnanti sono andati via dopo la prima lezione: volevano un corso di approfondimento sul Pascal;

— molti si sono stupiti dalla presenza di programmi con dei GOTO (gli avevano detto che non si devono usare), ma non sapevano usare le procedure ...

— accanto a molte richieste di software didattico già confezionato da usare a scuola era diffusa la difficoltà a cogliere i "collegamenti" tra linguaggi della matematica, proprietà delle strutture numeriche, ... e linguaggi di programmazione, riflessioni sulle uscite, ...

— era presente una certa diffidenza verso l'approccio proposto: sono queste le indicazioni ministeriali? i libri non sono impostati così; ...

— gran parte dei partecipanti ha evidenziato difficoltà a "riciclare" e interagire con le conoscenze apprese all'università (anche da parte dei laureati in matematica nell'indirizzo applicativo relativamente ad aspetti operativi "elementari" di calcolo numerico, programmazione, probabilità), ad accorgersi degli errori di fondo presenti su molti libri di testo, ...

5. L'ultimo aspetto del punto precedente penso che chiami in causa non solo le *responsabilità* del Ministero della Pubblica Istruzione, che purtroppo (vedi punto 1), in tempi antichi e meno antichi, ha spesso favorito o non ostacolato la separazione tra "cultura" e "cultura scolastica" (con rammarico, si deve osservare che l'odierno intervento - o corso di aggiornamento? - nell'ambito della tavola rotonda da parte dell'ispettore Ciarrapico, con la malintesa concezione della natura della matematica che lo pervade, conferma questo ruolo negativo), ma anche *dell'insegnamento universitario*. Non preoccupa solo la superficialità con cui certe conoscenze sono state apprese ma, soprattutto, la mancata formazione (almeno in buona parte degli studenti) di adeguati atteggiamenti cognitivi e culturali. E questi aspetti dell'insegnamento (che sono legati all'organizzazione culturale del corso di laurea e dei singoli corsi, alle modalità della conduzione delle lezioni, alle modalità e ai contenuti delle verifiche, ...) sono fondamentali nella formazione di una persona che a sua volta andrà a insegnare.

Invece, al posto di una suddivisione programmata dei contenuti dei diversi corsi o di utili confronti tra linguaggi e punti di vista diversi relativi agli stessi contenuti presenti in corsi afferenti ad aree matematiche diverse, spesso si trovano solo compartimenti stagni o incomprensibili "doppioni". Le dimostrazioni sono spesso presentate in modo "piatto", senza una fase di "analisi" o una riflessione sulla strategia impiegata. Raramente l'uso del calcolatore viene sviluppato in maniera integrata allo svolgimento dei corsi (in genere si tratta di esercitazioni con una ben delineata autonomia, a parte il caso dei corsi di linguaggi programmativi, che spesso sono già di per sé separati dai contenuti degli altri corsi).

Faccio un piccolo esempio concreto. Prima di partire per questo convegno ho visto in distribuzione sul bancone della portineria il primo foglio di esercizi di Analisi Matematica I: una paginata di «dimostrate che» $A\cup A=A$, $A\cup\emptyset=A$, ..., $A\cup B=B\cup A$, ..., $(A\subseteq B$ e $B\subseteq C) \Rightarrow A\subseteq C$, ... Forse si vorrebbero addestrare gli studenti all'uso di "se ... allora", "non", "e", "o", ...; ma non si fa loro dimostrare un bel niente, anzi, si confondono solo un po' le loro idee (sui linguaggi formali e sul linguaggio comune); infatti, piuttosto, viceversa, dovrebbe essere il significato (richiamato dall'intuizione e formalizzato simbolicamente) delle relazioni e operazioni insiemistiche ad essere impiegato per delimitare e precisare il significato dei connettivi. Questo esempio può sembrare poco significativo; ma, invece, penso che sia un prototipo di molti altri esempi di cattiva cura nell'organizzazione culturale dei corsi che, sommati uno all'altro, soprattutto nei primi anni di università, costruiscono atteggiamenti poi difficilmente recuperabili.

6. Che cosa siamo riusciti a fare con il nostro piccolo corso di aggiornamento? Gli *atteggiamenti dei corsisti alla fine* del corso (che abbiamo esplorato con un questionario di valutazione) sono apparsi decisamente più benevoli nei confronti dell'impostazione che avevamo scelto. Ma erano comunque largamente diffusi commenti che segnalavano la difficoltà di attuare gli spunti proposti (per incapacità personale, per ostilità dello "ambiente", per l'impostazione dei libri di testo, ...), assieme alla richiesta, per il futuro, di materiale spendibile direttamente in classe (quando molta parte del materiale usato durante il corso lo era già).

La risposta a questi problemi non ci è sembrato che potesse essere né un nuovo corso di aggiornamento né venire incontro alla richiesta di preparare materiali per l'uso del calcolatore, ma ci sembrava si dovessero affrontare meglio e più decisamente i problemi di fondo.

Per questo abbiamo deciso di avviare la costruzione e sperimentazione di un *progetto* per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore che fosse "complessivo": non solo calcolatore, non solo geometria, non solo algebra, ..., né calcolatore+geometria+algebra+..., ma un approccio in cui le conoscenze non matematiche e la matematica. e le aree in cui si articola, si integrino e, gradualmente, i modelli matematici, da strumenti per la rappresentazione del "reale" (fisico o culturale), diventino loro stessi oggetto di indagine e di ulteriori modellizzazioni. Vedi [2].

Nel momento in cui si prospetta un cambiamento dell'assetto scolastico ci è sembrato prioritario cercare di capire come dare una "buona" attuazione ai NP, pensare come collocare l'uso del calcolatore, tentare di individuare che cosa e come verificare, ...

Abbiamo aggregato un piccolo gruppo di insegnanti e su questa strada, faticosamente, stiamo lavorando. Vedi [1].

Ma è un piccolo numero di insegnanti, così come sono piccoli i gruppi di insegnanti che tentano esperienze simili in altre sedi. Si possono prospettare cambiamenti più di massa? Val la pena questo lavoro? ... Questi sono i dubbi ricorrenti. Ha senso una ricerca didattica che sopravvive a sé stessa (in attesa di "tempi migliori"?), preoccupandosi nel frattempo di definire meglio il suo status "scientifico" e garantirsi spazi nell'accademia? O sarebbe necessaria anche una denuncia più esplicita dei problemi culturali di fondo e l'individuazione di obiettivi di intervento più efficaci sul sistema scolastico?

Riferimenti

[1] C. Dapueto (a cura di), *Costruendo il progetto MaCoSa: anno 1*, Rapporto Tecnico del nucleo di ricerca didattica MaCoSa, Dipartimento di Matematica dell'Università, Genova, 1992

[2] — , *La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica*, in: F.Furinghetti (a cura di), Atti del 2° internucleo scuola secondaria superiore, Progetto T.I.D.- Formazione e aggiornamento in matematica degli insegnanti, quaderno 13, 1992

[3] — e S. Greco (a cura di), *Calcolatore e insegnamento della matematica*, Rapporto Tecnico del nucleo di ricerca didattica MaCoSa, Dipartimento di Matematica dell'Università, Genova, 1991

[4] — e F. Furinghetti, *Un'esperienza di lettura critica dei Nuovi Programmi di Matematica per il primo biennio della scuola secondaria superiore*, Insegnare, 1992 (in corso di stampa)

ALCUNI SPUNTI PER LA DIDATTICA DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ A PARTIRE DAI GIOCHI ED UTILIZZANDO CONCETTI LOGICO MATEMATICI ELEMENTARI

*Antonio Maturo** , *Giuseppe Di Biase***

1. PREMESSA.

Il lavoro nasce dalla considerazione che è opportuno, a nostro parere, non limitarsi ad insegnare agli studenti come risolvere problemi ben definiti, ma anche ad addestrarli a valutare le situazioni reali affrontandole in maniera ordinata e razionale con l'aiuto della matematica, in particolare della Logica, dell'Aritmetica e della Probabilità.

Riteniamo di fissare tre fasi di lavoro:

(1) riconoscimento dell'esistenza di una situazione da chiarire ed enunciazione di problemi che definiscono in maniera sufficiente la situazione data;

(2) soluzione più o meno approssimata dei problemi per mezzo delle conoscenze matematiche a disposizione con un procedimento di tipo "ad espansione", ossia che mostri come, anche con poche conoscenze, è possibile avere delle soluzioni accettabili in quanto a grado di precisione e che, approfondendo i concetti noti, si può ottenere una precisione sempre più soddisfacente ed una maggiore eleganza nell'arrivare alle soluzioni;

(3) analisi critica dei risultati ottenuti. Se essi non sono ritenuti soddisfacenti o esaustivi rispetto alla situazione considerata, si procede ad una nuova formulazione dei problemi che la definiscono.

Le situazioni più stimolanti da affrontare tra quelle che si presentano nella vita quotidiana sono quelle relative ai giochi e lo strumento più adatto per analizzarli è il Calcolo delle Probabilità, nella sua forma più elementare possibile, formalizzato ed applicato solo utilizzando pochi concetti matematici, soprattutto di Logica e di Aritmetica.

Alcune situazioni della vita reale che si possono affrontare con il calcolo delle probabilità sono le seguenti:

---

*Dipartimento di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro Viale Pindaro 42, 65127 Pescara. Tel. 085/4537262. Fax 4537271
**Facoltà di Farmacia, Via degli Agostiniani, 66100 Chieti.

(a) gioco del lotto; (b) scommesse al totocalcio; (c) feste con gli amici; (d) tempo di attesa per una interrogazione; (e) collezione di figurine.

Ciascuna di tali situazioni si presenta in maniera più o meno vaga. Gli studenti devono definirle implicitamente formulando dei problemi precisi, che in seguito verranno risolti con gli strumenti matematici conosciuti.

Vediamo, ad esempio, quali problemi possono rappresentare, in maniera più o meno soddisfacente, le situazioni date.

2. GIOCO DEL LOTTO.

Alcuni problemi che si possono enunciare sono:

(a1) calcolare la probabilità di vincere in una giocata;

(a2) calcolare la probabilità di vincere giocando più volte;

(a3) quante partite bisogna fare per essere "praticamente certo" di vincere almeno una volta o la prima volta;

(a4) quanto si vince o si perde in media, giocando molte volte;

(a5) cercare una strategia per vincere.

Il problema (a1) è utile per introdurre la probabilità classica e può essere comodo sia per introdurre le applicazioni del calcolo combinatorio e sia per mostrare che esso si può evitare conoscendo il teorema delle probabilità composte. Quest'ultima strada permette, in particolare, di evitare la confusione di molti studenti fra calcolo combinatorio e calcolo delle probabilità.

Il problema si può suddividere in vari sottoproblemi, di difficoltà crescente, ad esempio quello di calcolare la probabilità che escano r numeri fissati giocati (r=1, 2, 3, 4, 5) oppure quello che su r numeri giocati ne escano s ($s \leq r$).

Il problema (a2) è importante per introdurre il teorema delle probabilità totali e le sue generalizzazioni fino alla formula di Poincaré. Esso permette, fra l'altro, di ricavare per mezzo di valutazioni di probabilità alcune formule, come ad esempio quella del binomio di Newton. Anch'esso può essere diviso in vari sottoproblemi come quelli di vincere almeno una volta, esattamente una volta e così via.

Il problema (a3) permette di introdurre la legge di Pascal. Inoltre chiarisce il concetto di "praticamente certo" che deve essere assimilato dagli studenti per acquisire una sensibilità di tipo probabilistico. Il problema può essere generalizzato richiedendo che le vincite siano $r \geq 1$. In tale modo può essere introdotta la legge binomiale negativa.

Gli strumenti matematici necessari per affrontare i vari problemi sono il calcolo combinatorio, il teorema delle probabilità totali, quello delle disequazioni, le relazioni tra probabilità e frequenza.probabilità composte, i logaritmi, la serie geometrica, la media aritmetica, le disequazioni, le relazioni tra probabilità e frequenza.

Spesso un problema può essere affrontato in almeno due modi diversi e ciò permette di ricavare formule matematiche con ragionamenti probabilistici.

3. PROBABILITA' DI VINCERE GIOCANDO r NUMERI.

Poiché al lotto, su una ruota vengono estratti 5 numeri su 90, i casi possibili sono tutte le cinquine: $\binom{90}{5}$. Quelli favorevoli sono le combinazioni di classe (5 - r) di (90 - r) numeri. Pertanto detta p_r la probabilità di realizzare una r-pla giocando r numeri su una ruota fissata si ha:

$$p_r = \frac{\binom{90-r}{5-r}}{\binom{90}{5}}.$$

In particolare:

$$p_1 = \frac{5}{90} = 0.0\bar{5}\ ; \quad p_2 = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} \cong 0.00249$$

$$p_3 \cong 0.8212 \cdot 10^{-4}\ ; \quad p_4 \cong 0.1957 \cdot 10^{-5}\ ; \quad p_5 \cong 0.2276 \cdot 10^{-7}.$$

Utilizzando il teorema delle probabilità composte si può fare il seguente ragionamento alternativo.

Siano $N_1, N_2, \ldots, N_r$ i numeri giocati; indicando con E_i l'evento "esce il numero N_i" si ha:

$$p_2 = p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2/E_1) = \frac{5}{90}\,\frac{4}{89}.$$

$$p_3 = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1) \cdot p(E_2/E_1) \cdot p(E_3/E_1 \cap E_2) = \frac{5}{90}\,\frac{4}{89}\,\frac{3}{88}.$$

Le due maniere utilizzate per calcolare p_r ci consentono di ricavare la seguente formula:

$$\frac{\binom{90-r}{5-r}}{\binom{90}{5}} = p(E_1) \cdot p(E_2/E_1) \cdot \ldots \cdot p(E_r/E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{r-1})$$

e, quindi, la:

$$\binom{90-r}{5-r} = \binom{90}{5} \cdot \frac{5}{90}\,\frac{4}{89}\,\frac{3}{88} \cdot \ldots \cdot \frac{5-r+1}{90-r+1}.$$

In generale se si estraggono k numeri (invece di 5) da un'urna che ne contiene n (invece di 90) si ottiene:

$$\binom{n-r}{k-r} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n}\,\frac{k-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{k-r+1}{n-r+1}.$$

In particolare per r=k si ha:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1},$$

che è proprio la formula per trovare il numero di combinazioni classe k di un insieme di n elementi.

4. PROBABILITA' DI VINCERE ALMENO UNA VOLTA.

Sia p la probabilità di vincere in una partita, allora q=1-p è quella di non vincere; indicato con A_i l'evento "vincita alla i-esima partita", (i=1,2,...,n) osserviamo che si vince almeno una volta se non si verifica l'evento $\bar{E}=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$.

Pertanto $p(\bar{E}) = q^n$ e, quindi, $p(E) = 1 - q^n$.

Si può fare il seguente ragionamento alternativo. L'evento E="si vince almeno una volta in n partite" è dato dalla somma logica degli eventi incompatibili:

$$A_1,\ \bar{A}_1 \cap A_2,\ \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3,\ \ldots,\ \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n$$

che costituisce una classe completa di eventi incompatibili. Pertanto le probabilità di tali eventi sono, rispettivamente,

$$p,\ p\cdot q,\ p\cdot q^2,\ p\cdot q^3,\ \ldots,\ p\cdot q^{n-1}.$$

Il confronto tra le due maniere con cui abbiamo calcolato p(E) ci consente di ricavare la formula della progressione geometrica di ragione q (minore di 1) e di termine iniziale p:

$$p + p\cdot q + p\cdot q^2 + p\cdot q^3 + \ldots + p\cdot q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}\cdot p.$$

5. PARTITE DA GIOCARE PER VINCERE ALMENO UNA VOLTA.

Sia N il numero delle partite da giocare per vincere almeno una volta. Si ha che $p(N\le n) = p(E) = 1 - q^n$.

Per essere "praticamente certi" , ad esempio al 90%, di vincere almeno una volta bisogna fare un numero n di giocate tale che $p(N\le n) \ge 0.90$. Pertanto deve essere $(1-q^n) \ge 0.9$ e, quindi, $q^n \le 0.1$. Passando ai logaritmi si ottiene $n\cdot\log_{10}q \le -1$.

Il numero n di partite da giocare per essere "sicuri al 90%" di vincere almeno una volta è non inferiore a $-1/\log_{10}q$:

$$n \ge -\frac{1}{\log_{10}q}.$$

Si trova che per l'estratto bisogna attendere almeno 10 mesi, per l'ambo almeno 18 anni, per il terno almeno 520 anni. Per essere sicuri, invece, al 99% i valori trovati si raddoppiano.

6. QUANTO SI PERDE IN MEDIA ?

Supponiamo di puntare ogni settimana una somma S sul verificarsi dell'evento E. Se E si verifica si vince una somma pari a V=k·S, k>1. Dopo n partite consideriamo il saldo D fra le vincite ottenute e le quote versate; se n_v è il numero delle vincite il saldo è dato da $D = n_v\cdot V - n\cdot S = (k\cdot n_v - n)\cdot S$.

Il saldo medio è $D_m = D/n = (k\cdot n_v/n - 1)\cdot S$. Identificando ora la frequenza con la probabilità, possiamo dire che $p(E)= n_v/n = p_v$ avendo indicato con p_v la probabilità di vincere. Pertanto si ha

$$D_m = (k\cdot p_v - 1)\cdot S.$$

Considerando i valori di k fissati dallo Stato si ha:

	k	p_v	$p_v\cdot k$
estratto	11.5	1/18	0.619444
ambo	250	2/801	0.624220
terno	4.250	1/11.748	0.361764
quaterna	80.000	1/511.038	0.156544
cinquina	1.000.000	1/43.949.200	0.022753

Puntando S=50.000 lire ogni settimana, il giocatore avrà, presumibilmente, una perdita finanziaria media annua pari a $-D_m\cdot 52 = (1\text{-}k\cdot p)\cdot 50.000\cdot 52$. Giocando l'ambo tale perdita sarà pari a 977.028 Lit., il terno 1.659.986 Lit., la quaterna 2.192.986 Lit., la cinquina 2.541.102.

UNA PROPOSTA DI PRESENTAZIONE CONGIUNTA DI MATEMATICA E PROGRAMMAZIONE

*Alberto Marini**

La proposta del titolo nasce dalla convinzione che molte ragioni rendono opportuno che matematica ed informatica siano presentate come strettamente integrate. Essa sta concretizzandosi in scritti sopra argomenti da presentare a studenti nella cui formazione si vuole che la programmazione abbia un ruolo importante.

Questi scritti vengono gestiti interamente con il computer presso lo IAMI in modo da poter essere presentati in una buona forma tipografica e da poter essere rapidamente modificati per accogliere critiche e suggerimenti.

Nella presentazione che si cerca di delineare si insiste sulle giustificazioni pragmatiche della matematica. Si pone quindi sistematicamente l'accento sulle possibilità di economia di pensiero alle quali portano l'astrazione e la generalità. La matematica viene presentata come la disciplina che fornisce la base concettuale di una strumentazione di calcolo di portata molto ampia che si concretizza in programmi per l'elaboratore. Coerentemente le nozioni matematiche sono sviluppate in modo costruttivo, evitando o posticipando i sistemi di assiomi che possono risultare troppo impegnativi per gli studenti, come quelli riguardanti la teoria degli insiemi e la geometria.

Lo spirito della presentazione vorrebbe che per quasi tutte le nozioni introdotte fossero disponibili algoritmi in grado di chiarire i meccanismi costruttivi che le riguardano e di fornire agevolmente esempi concreti.

Come linguaggio di programmazione si è puntato sul C, sia per il suo interesse professionale, sia perché la sua diffusione e portabilità, in prospettiva, potranno facilitare lo sviluppo di software didattico di ampia portata.

Si pone allora il problema di una adeguata presentazione del C, linguaggio che per la sua concisione e per i vari tecnicismi che contiene, non risulta agevole da accostare. L'orientamento che si vorrebbe perseguire consiste nella introduzione di un suo sottinsieme abbastanza ridotto, nella presentazione sistematica degli algoritmi sotto forma di C-functions il più possibile lineari e nella messa a disposizione di routines da usare a scatola chiusa atte a facilitare la sperimentazione degli algoritmi.

* CNR - IAMI Via Ampère, 56 20131 Milano

La presentazione che si va delineando prevede una ampia parte iniziale riguardante questioni di matematica discreta e nozioni introduttive alla programmazione, mentre posticipa l'uso del computer per elaborazioni considerate in genere più "produttive" come quelle di natura numerica, grafica e statistica.

In effetti molte nozioni matematiche generali possono essere introdotte restando nel finito con i vantaggi del ridotto bagaglio di prerequisiti e della possibilità di presentare e suggerire verifiche concrete. Inoltre sono le nozioni di matematica discreta quelle che forniscono basi concettuali solide alle attività di programmazione. Così la nozione di funzione serve alla comprensione dell'utilizzo degli arrays e dei sistemi di puntatori; le relazioni ed i grafi stanno alla base degli automi e permettono di trattare unitariamente le strutture di dati; le nozioni di partizione e di albero costituiscono il giusto inquadramento della manipolazione delle espressioni e della programmazione strutturata.

Come nozione di partenza si assume quella di stringa: sia per la sua semplicità, sia perché le stringhe possono vedersi come schematizzazioni delle comunicazioni tra persone e macchine, sia perché oggetti come le formule matematiche e i programmi sono da considerare primariamente come stringhe. Anche i numeri naturali e gli insiemi finiti vengono ricondotti alle stringhe: i numeri vengono definiti come le entità atte a rappresentare lunghezze di stringhe e gli insiemi finiti come astrazioni degli elenchi di oggetti diversi.

L'infinito viene introdotto come infinito potenziale trattabile con macchine che possono operare per tutto il tempo e con tutta la memoria che risultino necessari.

Per la nozione di insieme si ritiene importante dare rilievo alla contrapposizione fra la semplicità delle operazioni sugli insiemi astratti e le differenziazioni che si incontrano quando si trattano effettivamente insiemi di generi diversi. Si ritiene quindi opportuno distinguere chiaramente fra insiemi espliciti piccoli (da utilizzare per tanti esempi introduttivi), insiemi espliciti estesi tanto da richiedere files e programmi (ma in grado di servire a varie applicazioni effettive), insiemi esplicitabili da trattare tramite espressioni o algoritmi, insiemi numerabili, insiemi continui ed insiemi astratti.

I progressivi ampliamenti del campo numerico si motivano mostrando come, allargando la gamma dei valori che possono assumere gli argomenti di certi tipi di sottoprogrammi, si possono ottenere strumenti di calcolo migliori, sia in termini di portata, che in termini di semplicità d'uso.

Un ruolo importante viene affidato al piano dei punti a coordinate intere successivamente allargato ai punti a coordinate razionali; parallelamente si tratta il suo modello materiale ad altissimo potenziale didattico, lo schermo del computer. In esso si ambienta vantaggiosamente l'introduzione dei

numeri razionali (in quanto si possono presentare in un intuitivo quadro bidimensionale) e si possono introdurre varie nozioni geometriche senza che sia necessario aver affrontate le difficoltà del continuo e con la possibilità di ricorrere a elaborazioni automatiche non approssimate. In tale piano/schermo risulta opportuno anche "disegnare" figure come parabole ed esponenziali che portano alla necessità di introdurre numeri algebrici e trascendenti.

Le questioni riguardanti i fondamenti della matematica vengono considerate dal punto di vista, costruttivo, della calcolabilità presentando la macchina di Turing ed una serie di sue varianti quasi equivalenti che giunge fino ad una descrizione di computer programmabile nel linguaggio C.

Con tale discorso si vuole porre in luce la unitarietà di elaborazioni a prima vista disparate come elaborazioni su stringhe, calcoli su interi, calcoli approssimati, trasformazioni di espressioni algebriche e procedimenti dimostrativi astratti. Questo dovrebbe rendere conto dei legami fra le diverse attività matematiche ed informatiche e convincere che esse afferiscono ad un ampio disegno di controllo razionale della realtà che ci circonda.

Nel contempo, però, si dovrebbero evidenziare le vistose differenze tra le risorse richieste per la soluzione di problemi diversi al fine di introdurre la nozione di complessità. La discussione di questa nozione, nelle sue versioni temporale, spaziale e strutturale (questa soprattutto nella accezione di complessità di programmazione), dovrebbe svilupparsi in relazione a molti problemi da presentare in momenti successivi. Sarebbe inoltre importante porre in una prospettiva organica facente riferimento alla complessità i problemi che deve affrontare la società, sempre meglio dotata di strumenti matematico-informatici.

La maggiore evidenza, naturalmente, va data ai problemi che si possono agevolmente risolvere mediante tecniche sufficientemente generali e chiare. Si dovrebbe però anche far cenno dell'esistenza di problemi molto impegnativi che si possono affrontare solo con oneri (di modellizzazione, di programmazione, di raccolta di dati, di tempo di calcolo) che non si possono sottovalutare, e di problemi sostanzialmente intrattabili per i quali si deve ripiegare sulla ricerca di soluzioni fortemente approssimate o circoscritte.

Tutto questo dovrebbe condurre ad un atteggiamento realistico nei confronti della portata e della incisività della matematica e del calcolo automatico.

BREVE RELAZIONE SULL'ICME 7

*Claudio Bernardi**

Il settimo Congresso Internazionale sull'Insegnamento della Matematica ("International Congress on Mathematical Education") si è svolto l'estate scorsa presso l'Università Laval di Quebec, in Canada, dal 17 al 23 agosto. Il Congresso si tiene ogni 4 anni (gli anni divisibili per 4, cioè gli anni pari in cui non si svolge il Congresso Internazionale di Matematica); nel 1996 avrà luogo in Spagna, a Siviglia, mentre non è ancora stabilita la sede del successivo Congresso (la scelta riveste una certa importanza perché il 2000 è già stato ufficialmente proclamato dall'UNESCO "World Mathematical Year").

Erano presenti più di 3300 persone provenienti da 88 Paesi; alcuni Paesi molto piccoli, come Andorra e il Qatar, avevano un solo rappresentante. La rappresentativa italiana, abbastanza nutrita, contava 51 persone, che non sono tuttavia molte se confrontate ai 113 francesi, ai 154 australiani, o ai 24 sudafricani. Fra gli italiani, ringrazio coloro che, con le loro osservazioni, hanno contribuito alla stesura di questa nota: Maria Teresa Ascoli Brenci, Mario Barra, Mariolina Bartolini Bussi, Luciana Bazzini, Cinzia Bonotto, Ercole Castagnola, Rosanna Cruciani, Fulvia Furinghetti, Lucia Grugnetti, Nicolina Malara, Lina Mancini Proia, Marta Menghini, Angela Pesci, Maria Reggiani, Vinicio Villani.

Nel complesso, la rappresentanza italiana è stata piuttosto attiva e vitale. Più precisamente, 24 italiani hanno presentato interventi, su un totale di poco meno di 500 interventi, e altri 16 italiani hanno presentato poster, video o software, su un totale di quasi 600 proposte (i numeri che ho citato sono inevitabilmente approssimati: qualcuno non ha preso parte al Congresso e, d'altro lato, varie persone hanno presentato più interventi).

Per la verità, le ricerche condotte in Italia non erano state adeguatamente riconosciute dagli organizzatori del Congresso (in particolare, non era stata affidata ad alcun italiano una conferenza), anche se poi gli interventi degli italiani sono stati in genere vivamente apprezzati dall'uditorio. Inoltre, in occasione del Congresso è stato presentato ufficialmente e distribuito il "libro blu" sulla ricerca didattica in Italia (chi desidera riceverne una copia può richiederla alla professoressa Nicolina Malara, Dipartimento di Mate-

* Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"

matica dell'Università di Modena).

L'organizzazione dell'ICME è risultata molto efficiente, specie se si tiene conto della complessità di un Congresso delle dimensioni citate. Il programma prevedeva solo 4 conferenze plenarie e, per il resto, attività in parallelo, fino ad una decina di conferenze in simultanea; anche i gruppi di lavoro, più di 20, si riunivano contemporaneamente. Molti di tali gruppi articolavano la loro attività in sottogruppi, e spesso questi ultimi si dividevano poi, a loro volta, in sotto-sottogruppi (in effetti, in certi casi la frammentazione è sembrata eccessiva). Sempre nell'ambito del Congresso sono stati allestiti stand da parte di associazioni, case editrici, produttori di hardware e di software, ... E' stato anche possibile assistere a film, da una lezione di Polya a un cortometraggio su Coxeter, e a programmi televisivi attuali di contenuto matematico.

Purtroppo, il livello scientifico non è stato sempre all'altezza: le 4 conferenze plenarie hanno in larga parte deluso; ma più in generale, accanto ad interventi indubbiamente seri e significativi, ne sono stati presentati altri meno convincenti; forse è mancata una selezione seria dei lavori proposti. Va notato che talvolta, più della discussione finale in sede di Congresso, risulta interessante il lavoro preliminare di preparazione, in cui vari ricercatori di Stati diversi concordano gli interventi. In alcuni casi, era stata programmata addirittura una sorta di "gemellaggio": un'attività sperimentale su un certo argomento era stata svolta in simultanea, con la stessa metodologia, in due scuole a distanza di migliaia di kilometri l'una dall'altra.

Hanno in genere raccolto più consensi gli interventi che riguardavano lavoro in classe, attività "sul campo"; talvolta, tuttavia, è stato semplicemente riferito ciò che è avvenuto in classe (e la ricerca è stata così appiattita a pura registrazione); in altri casi si è fatto ricorso ad un linguaggio sofisticato, quasi da iniziati, per descrivere situazioni che ogni buon insegnante ha ben presenti.

In ogni convegno sull'insegnamento della matematica si formulano proposte per un rinnovamento della didattica alla luce delle nuove conoscenze pedagogiche, della disponibilità di nuove tecnologie, degli sviluppi della matematica. Naturalmente l'ICME, che si propone di discutere le tendenze nelle ricerche in didattica della matematica che si vanno affermando nelle varie parti del mondo, riportando voci ed esperienze diverse, risulta molto eterogeneo. Ma, proprio per questo, serve almeno a ridimensionare la visione "centrica" del mondo che ciascuno di noi acquisisce frequentando solo gli ambienti a lui più familiari.

Anche limitandosi all'ambiente "occidentale", durante l'ICME sono apparse più volte nette differenze, nell'impostazione e nella metodologia didattica, fra Europa da un lato e Stati Uniti, Canada e Giappone dall'altro, differenze che spesso hanno origini culturali, oppure riflettono diverse organizzazioni scolastiche. Stati Uniti, Canada e anche Giappone sono in questo momento più favorevoli all'informatica, tendono ad attribuire maggiore importanza ai legami con la realtà e, più in generale, al ruolo della matematica applicata (intesa in un senso molto ampio); in Europa è invece più avvertita l'esigenza di rigore e si attribuisce una maggiore importanza al concetto stesso di dimostrazione (credo valga la pena di notare, per inciso, che si è parlato di dimostrazioni anche in un contesto algebrico).

Le dimensioni di un Congresso, inevitabilmente dispersivo quale l'ICME, hanno anche un altro risvolto positivo. Capita che ricercatori, che hanno ugualmente a cuore l'educazione matematica, si occupino in realtà di problematiche molto diverse o siano portati a sottolineare diversi aspetti di una medesima situazione: ebbene, nel programma dell'ICME ciascuno poteva trovare temi di suo specifico interesse, perché erano previste tutte le problematiche connesse con l'educazione matematica, dalla divulgazione all'uso delle nuove tecnologie, dalle esigenze dei paesi in via di sviluppo alle gare matematiche, ...

Si è parlato naturalmente molto di pedagogia e di teorie dell'apprendimento (fra l'altro, è stata smentita la fiducia abbastanza diffusa secondo cui, se un ragazzo ha qualche idea sbagliata, la cosa non è poi così grave perché basta aspettare e il ragazzo si correggerà spontaneamente); sono state affrontate anche molte questioni di epistemologia e filosofia della matematica, di storia (ad esempio, si è discusso della nascita di una distinzione consapevole fra metodi esatti e metodi approssimati), e ancora di sociologia, di etnomatematica (un grosso problema è rappresentato dai contenuti da privilegiare nell'insegnamento in Paesi del terzo e del quarto mondo: c'è chi tenta di inserire nei programmi di matematica aspetti specifici delle tradizioni locali, mentre altri sottolineano il rischio di ghettizzare le culture nel ricordo di un passato ormai irrecuperabile). Molto spazio è stato dedicato alla valutazione, distinguendo i vari significati che si attribuiscono oggi al termine. Non sono mancati studi e analisi sul linguaggio, che presentano spesso legami con la didattica (si pensi al rapporto fra il significato di un concetto e l'uso del simbolo che lo denota, oppure al confronto fra linguaggio matematico e linguaggio naturale, dove il primo, pur essendo convenzionale, è più stabile del secondo).

Alcuni hanno lamentato che in molti interventi sia prevalsa una mentalità più filosofica o pedagogica che matematica, ma non sono mancate conferenze e discussioni su questioni più tecniche, che in qualche modo si prestassero a riflessioni utili per la didattica.

L'avanzata del computer nel contesto scolastico è stata enfatizzata in molti interventi. Per altro, c'è oggi forse una maggior cautela, una minore ingenuità rispetto al passato: ci si pongono esplicitamente problema didattici, c'è una esplicita attenzione agli allievi e alle loro difficoltà (ad esempio, si esaminano i legami fra attività di programmazione e problem solving). Mancano comunque indicazioni largamente condivise sul ruolo didattico del computer, che, a seconda del relatore, viene visto come un sussidio per la geometria tradizionale, o come uno strumento di gioco e un pretesto per attirare l'attenzione, o un mezzo per proporre fantasie di frattali, o, per i più ottimisti, un fatto che rivoluzionerà l'insegnamento della matematica.

Fra le potenzialità indubbiamente positive offerte dagli strumenti informatici, va in primo luogo citato lo studio "dinamico" delle figure piane (o anche solide) e dei grafici delle funzioni, che permette di individuare, per tentativi e per "approssimazioni" successive, proprietà geometriche, o di mettere in luce relazioni fra certi coefficienti e la forma di un grafico. Ovviamente, il computer non risolve tutti i problemi didattici (ad esempio, non serve a far cogliere il legame fra il concetto di funzione e le rappresentazioni grafiche), ma, indirettamente, incoraggia negli studenti un atteggiamento euristico e un apprendimento in collaborazione. Ci sono anche aspetti negativi nell'uso didattico del computer che non vanno sottovalutati: una fiducia non controllata nella macchina fa correre il rischio di banalizzare erroneamente procedimenti matematici, e l'uso dello strumento va comunque a scapito delle "esperienze mentali" o, più semplicemente, dei tentativi, così importanti, condotti con carta e matita.

Al di là delle prese di posizione a favore o contro, una discussione che mi pare interessante riguarda le condizioni perché l'uso del computer sia corretto: è opportuno, ad esempio, precisare ogni volta esplicitamente gli scopi e i limiti della macchina, anche per evitare attese improprie; fondamentale, anche se delicata, è poi l'esigenza di mantenersi "fedeli" allo spirito della materia che si sta trattando, che non va tradita dal nuovo strumento.

Ancora, è stato messo in risalto che, con l'ingresso nelle aule dell'informatica, è cambiato il "contratto didattico" fra studente e insegnante, perché quest'ultimo non è più l'unica "autorità" né l'unico referente. Sono evidenti i vantaggi e i rischi, ma occorre con ogni mezzo evitare che il computer deprima la professionalità dell'insegnante: al contrario, ciascun insegnate deve adattare lo strumento alla sua didattica, strutturando le lezioni, anche nel laboratorio informatico, secondo il suo modo di fare matematica.

Sono stati discussi vari software di grafica e pacchetti come Mathematica, Maxima e, soprattutto, Cabri-géomètre. Si è parlato anche di calcolatrici grafiche, oggi molto sofisticate ma contenute nel prezzo, che possono essere usate direttamente in aula, quasi in qualunque momento, affidando una calcolatrice a ciascuno studente.

Se l'ICME serve per mettere a confronto problemi e prospettive della didattica della matematica nei vari Paesi, consente anche di porre in evidenza quelle che sono le tendenze comuni che si vanno affermando un po'

dappertutto. Da questo punto di vista, va detto che in tutto il mondo c'è oggi un rinnovato interesse per la geometria (si tenga presente che, nei decenni passati, l'insegnamento della geometria era stato trascurato in alcuni Paesi molto più di quanto non sia avvenuto in Italia). Della geometria, riconosciuta come componente fondamentale della cultura matematica, sono stati sottolineati diversi ruoli: contribuisce a sviluppare l'impostazione logica da un lato e l'immaginazione dall'altro, ha una sua concretezza o, se si preferisce, una sua semantica naturale.

Si è anche parlato molto (forse troppo) di geometria e computer: personalmente, ho assistito sia a divertenti trasformazioni su triangoli, sia all'analisi di problemi che sarebbero risultati più semplici e naturali se fossero stati affrontati senza ricorrere al computer ... Da un punto di vista più teorico, è stato osservato che, con un'esplorazione di tipo informatico, si ha l'occasione di mettere in risalto la differenza fra una teoria e un modello, inteso come realizzazione con proprietà specifiche.

Desidero infine riferire di due interventi molto autorevoli. G. Howson ha illustrato le condizioni in cui operano gli insegnanti di matematica, molto diverse da paese a paese, ribadendo il ruolo dell'insegnante, guida e collaboratore degli studenti. Secondo Howson, un insegnante ha compiti difficili e spesso ingrati, come quelli di suscitare lo spirito di ricerca e di far apprezzare la matematica. Di più, le condizioni al contorno ben raramente facilitano il suo lavoro (nonostante tutto, in Italia la situazione è meno brutta che in altri Paesi). E' stato messo in evidenza un circolo vizioso purtroppo abbastanza diffuso: reclutamento senza grosse offerte ("poor"), basse aspettative da parte degli insegnanti, efficacia ridotta, stima ancor più bassa.

M. de Guzmàn (presidente dell'organismo internazionale che organizza l'ICME) ha dedicato buona parte del suo intervento inaugurale alla drammatica situazione del terzo mondo, sottolineando l'urgenza, ma anche la difficoltà, di azioni di solidarietà nel campo dell'educazione. Ci sono rischi che sfuggono ad una analisi superficiale, come quelli di fornire aiuti inutili (per esempio libri non aggiornati), o di non riuscire a spendere fondi già raccolti, o di proporre indirettamente nuove forme di colonialismo. Sarebbe già molto se si riuscisse ad evitare che Paesi in via di sviluppo ripetessero, in campo didattico, errori grossolani già fatti da altri.

L'impressione generale che si ricava dall'ICME 7 è che stiano ormai passando i tempi delle ricerche personali, basate solo sul buon senso. Sia ben chiaro, il buon senso conserva sempre un'importanza fondamentale, ma anche nella ricerca in didattica della matematica ci sono oggi tematiche e filoni riconosciuti a livello internazionale; tematiche e filoni che vanno inquadrati e sviluppati nelle varie tradizioni culturali e didattiche (questo discorso vale in particolare per noi italiani che abbiamo una tradizione di tutto rispetto).

Aggiungo che la CIIM ha recentemente proposto all'UMI la traduzione di parti degli Atti degli ultimi Congressi ICME: nel Quaderno UMI n. 10, a cura di Candido Sitia, sono stati tradotti e raccolti brani dei primi tre ICME, mentre ora si stanno prendendo in considerazione i successivi Congressi.

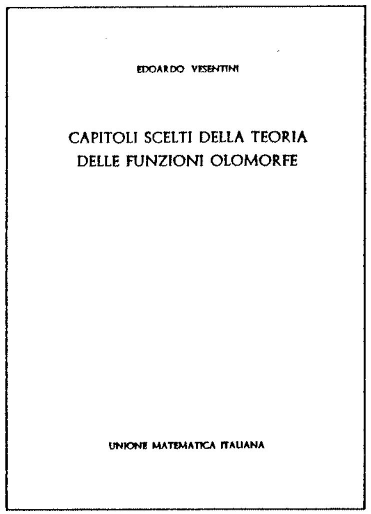
Per concludere, una nota di colore. Nell'ambito del Congresso si è svolta una gara podistica: primo degli italiani è risultato Ercole Castagnola; da citare anche il buon piazzamento di Romano Scozzafava.

INDICE

Edoardo Vesentini

Capitoli scelti della teoria delle funzioni olomorfe

Edizione Unione Matematica Italiana
1984



302 pagine
Lire 25.000

Il volume ha lo scopo "di accompagnare la lettura di trattati moderni sulla teoria delle funzioni olomorfe con l'esame di alcuni esempi classici, ritrovando in essi le motivazioni di teorie generali". Dopo l'introduzione ed uno studio generale dei nuclei riproducenti in uno spazio di Hilbert di funzioni olomorfe, il libro si volge alla geometria dei domini limitati, stabilendo i risultati fondamentali di H. Cartan e passando successivamente all'esame di esempi concreti di notevole rilevanza: vengono così studiati il disco unità ed il semipiano superiore del piano complesso (con una breve parentesi sulla teoria analitica delle funzioni ellittiche), il polidisco euclideo ed il semipiano di Siegel.

Dall'indice:

CAPITOLO I. Generalità sulle funzioni olomorfe.

CAPITOLO II. Nuclei riproducenti.
Funzioni olomorfe sui domini circolari. Funzioni olomorfe a quadrato integrabile sui domini circolari. Uno spazio di Hilbert di funzioni intere.

CAPITOLO III. Automorfismi olomorfi di domini circolari.
Gruppi propriamente discontinui... Funzioni automorfe.

CAPITOLO IV. Il disco unità ed i suoi automorfismi olomorfi.
Il gruppo *SU (1,1)*. La metrica di Poincaré.

CAPITOLO V. Spazi di Hilbert di funzioni olomorfe sul disco.
Rappresentazioni della serie discreta. Lo spazio di Hardy.

CAPITOLO VI. Il semipiano superiore ed il gruppo SL (2,R).

CAPITOLO VII. Introduzione alla teoria delle funzioni ellittiche.

CAPITOLO VIII. Esempi di domini limitati omogenei.
Automorfismi del polidisco e del disco euclideo. Il semipiano di Siegel ed il gruppo di Siegel. Il gruppo simplettico e la metrica simplettica. Gli automorfismi del semipiano di Siegel.

COLLANA DI QUADERNI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

9. C. CORRADI: *Problemi di stima in econometria e loro risoluzione numerica*, 1979, pp. 65 .... L. 2.000
10. C. SITIA (a cura di): *La didattica della matematica oggi. Problemi, ricerche, orientamenti*, 1979, pp. VIII - 412 .... L. 7.000
11. M.G. GASPARO, M. MACCONI, A. PASQUALI: *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali*, 1979, pp. V - 217 .... L. 4.000
12. Z. KRIGOWSKA: *Cenni di didattica della matematica*, 1, 1979, pp. VIII - 244 .... L. 4.000
13. F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, F. LAZZERI: *Topologia delle superficie algebriche in $P_3(C)$*, 1979, pp. II - 171 .... L. 4.000
14. T. MANACORDA: *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, 1979, pp. IV - 112 .... L. 3.500
15. C. CATTANEO: *Teoria macroscopica dei continui relativistici*, 1980, pp. V - 105 .... L. 3.500
16. A. TOGNOLI, A. ZEPPILLI: *Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali*, 1980, pp. 121 .... L. 3.500
17. AA. VV.: *Ottimizzazione non lineare e applicazioni*, a cura di S. Incerti e G. Treccani (Atti del Convegno Italsiel-UMI, l'Aquila 18 - 20 giugno 1979), 1980, pp. XI - 372 .... L. 10.000
18. L. SALCE: *Struttura dei p-gruppi abeliani*, 1980, pp. IV - 300 .... L. 8.000
19. S. COEN: *Una introduzione ai dominii di Riemann non ramificati n-dimensionali*, 1980, pp. VI - 222 .... L. 5.000
20. C. CATTANEO: *Elementi di teoria della propagazione ondosa*, 1981, pp. VI - 216 .... L. 6.000
21. G. GALLAVOTTI: *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto*, 1981, pp. XII - 388 .... L. 8.000
22. A. CONTE: *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni*, 1982, pp. 136 .... L. 4.500
24. L. CATTABRIGA: *Alcuni problemi per equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti*, 1983, pp. VIII - 192 .... L. 7.000
25. A. CASSA: *Teoria elementare delle curve algebriche piane e delle superfici di Riemann compatte*, 1983, pp. VIII - 360 .... L. 10.000
26. P.M. SOARDI: *Serie di Fourier in più variabili*, 1984, pp. VIII - 160 .... L. 6.000
27. R. BENEDETTI, M. DEDÒ: *Una introduzione alla geometria e topologia delle varietà di dimensione tre*, 1984, pp. VIII - 152 .... L. 5.000
28. P. BALDI: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, 1984, pp. VIII - 312 .... L. 10.000
29. P. de LUCIA: *Funzioni finitamente additive a valori in un gruppo topologico*, 1985, pp. VIII - 188 .... L. 7.500
30. R. CONTI: *Processi di controllo lineari in IR^n*, 1985, pp. VIII - 192 .... L. 7.500
31. A. BACCIOTTI: *Fondamenti geometrici della teoria della controllabilità*, 1986, pp. VIII - 184 .... L. 9.000
32. L. PANDOLFI: *Alcuni metodi matematici nella teoria dei sistemi lineari di controllo*, 1986, pp. XII - 296 .... L. 15.000
33. S. BENENTI: *Relazioni simplettiche: la trasformazione di Legendre e la teoria di Hamilton-Jacobi*, 1988, pp. XII - 336 .... L. 20.000
34. F. BORCEUX: *Fasci, logica e topoi*, 1989, pp. VIII - 300 .... L. 24.000
35. S. DRAGOMIR, J. C. WOOD: *Sottovarietà minimali ed applicazioni armoniche*, 1989, pp. IV- 168 .... L. 15.000
36. C. PROCESI: *Aspetti geometrici e combinatori della teoria delle rappresentazioni del gruppo unitario*, a cura di E. Rogora, 1991, pp. VIII - 172 .... L. 20.000
37. J. KIJOWSKI: *Elasticità finita e relativistica: introduzione ai metodi geometrici della teoria dei campi*, a cura di D. Bambusi e G. Magli, 1991, pp. IV - 256 .... L. 25.000

Distribuzione: Libreria Pitagora Editrice - Via Zamboni, 57 - 40127 Bologna
Ai soci UMI sconto del 20% sui prezzi di copertina.