Agosto-Settembre 1979
Supplemento ai nn. 8 - 9

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno VI

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

QUINTO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

FERRARA, 20-21 APRILE 1979
A cura di Sandra Giuntini

DIRETTORE: CARLO PUCCI

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Prezzo del presente fascicolo: L. 1.500 (IVA compresa)

Abbonamento annuo (11 numeri): L. 5.000, da versare sul c.c.p. 17396409, intestato alla Libreria Pitagora, via Zamboni 57, Bologna

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci.

LA PRESENTE RIVISTA VIENE STAMPATA CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via Barelli 4 H - 40138 Bologna (Italia)
Settembre 1979

Al V Convegno dell'UMI sull'Insegnamento della Matematica tenutosi il 20-21 aprile 1979 presso l'Università di Ferrara hanno partecipato 269 docenti provenienti da 46 provincie. Essi erano per lo più professori di scuola secondaria e professori universitari impegnati nella ricerca e sperimentazione didattica.

Al IV Convegno i partecipanti erano stati 178 provenienti da 35 provincie: il sensibile aumento è probabilmente indice di un crescente interesse per i problemi della didattica.

Dei 269 partecipanti al V Convegno , 75 avevano partecipato anche al Convegno precedente; dall'esame delle schede di presenza i rimanenti 196 erano quasi tutti insegnanti di scuole secondarie intervenuti a proprie spese,

L'interesse così dimostrato è forse anche dovuto ad una generale carenza d'iniziative per l'aggiornamento degli insegnanti. Questo infatti è quanto emerso anche dallo svolgimento della prima giornata del Convegno, dedicata ad un confronto con l'Europa. Questo tema è stato scelto dagli organizzatori del Convegno in previsione di una possibile ed auspicata riforma della scuola secondaria e in previsione di una maggiore integrazione europea come conseguenza della istituzione del Parlamento europeo.

Il confronto internazionale, necessariamente limitato a tre soli paesi europei, Inghilterra, Francia, Germania è stato reso più efficace dalla partecipazione di due esperti stranieri: A. Rogerson, che ha illustrato la situazione inglese e R. Grunig, che ha illustrato la situazione francese.

Il quadro di riferimento e di confronto con la situazione europea è stato completato dalle relazioni di P. Gherardini, G. Pirillo e V. Villani, che nell'ambito del COASSI (Confederazione delle Associazioni Scientifiche Italiane) fanno parte di una commissione che sta portando a termine un'indagine promossa dal MPI sull'insegnamento delle materie scientifiche in Europa.

La seconda giornata è stata dedicata all'insegnamento della geometria ed è stata introdotta da una relazione di A. Conte; ed è in questa occasione che si è svolto il confronto delle esperienze dei nuclei di ricerca didattica operanti inizialmente nell'ambito di un contratto gestito dall'UMI.

L'impegno amministrativo dell'UMI nella gestione di sperimentazioni didattiche è completamente cessato dalla fine del '78. Questa gestione è stata sostituita da una molteplicità di contratti fra il CNR e le Università che hanno dato vita nel '77/78 ai nuclei di ricerca didattica di Parma, Pavia, Pisa e Trieste e nel '78/79 ai nuclei di ricerca didattica di Cosenza, Firenze, Napoli, Padova, Palermo, Roma, Savona e Torino.

E' ormai consuetudine che i nuclei aventi affinità per metodologie o settori d'intervento svolgano un esame delle esperienze fatte mediante riunioni su scala nazionale dei collaboratori. Per questa ragione al V Convegno si è voluto limitare il tema del confronto delle esperienze svolte soltanto all'insegnamento della geometria.

I testi delle relazioni sono pubblicati integralmente negli Atti, come pure integralmente sono pubblicati i testi delle relazioni dei nuclei di ricerca sulle esperienze realizzate nell'ambito della geometria

Alle relazioni è seguito un ampio dibattito che solo parzialmente è riportato negli Atti. Infatti sono pubblicati solo i sunti degli interventi forniti direttamente dagli interessati con adeguata sollecitudine. Nei casi in cui non siano stati consegnati sono stati citati solo i nomi degli intervenuti al dibattito.

I partecipanti sono elencati raggruppandoli secondo la provincia, sede di lavoro. (s.g.)

ELENCO DEI PARTECIPANTI

AOSTA: MARCHIANDO Teresa.

AVELLINO: RUSSI Canio.

BARI: ABATANGELO Luca Maria, CANDELA Innocente, DI COMITE Claudio, FAGGIANO Luciano, FARETRA Giuseppe, MAIDA Antonio, PERTICHINO Michele.

BERGAMO: TONOLINI Livia

BOLOGNA: BARLOTTI Adriano, D'AMORE Bruno, DE FLORA Alberta, FRABETTI Vera, GHESINI Nadia, MATTEUZZI Alfonso, RIGHI Elena, VERARDI Libero.

BRESCIA: BOLLETTI CENSI Icilio.

CAGLIARI: CAREDDA Carla, FARRIS Gianfranco, GRUGNETTI Lucia, LOY M. Paola, MONTALDO Oscar, PANZALI M. Luisa, PINTUS Giulia, POLO Maria.

CASERTA: AMBRISI Emilio

CATANIA: LIZZIO Angelo, MAMMANA Carmelo.

COMO: GRILLO Renato.

COSENZA: D'APRILE Margherita, GUENOT Jacques.

CREMONA: VANNUCCI Anna, VANNUCCI Vincenza.

FERRARA: AMBROSETTI Antonio, ANCONA Vincenzo, BALLANTI Pietro, BONSI Gabriella, BORGATO M. Teresa, BROGLI Anna, CALLEGARI Bruno, CARLI M. Daniela, CERON Mery, CHIAVACCI Rossana, D'ALOYA M. Giuseppina, DE PICCOLI M.Rosa, FERGNAMI Bruna, FERRARO Aldo, FERRERO Nerella, FERRONI Laura, FIOCCA Alessandra, FONTANESI Riccardo, GAMBINI Giovanni, GARASSINO Gigliola, GHERLINZONI M. Teresa, GOLINELLI M. Cristina, LODI Beatrice, MALESANI Zaccheo, MALUCELLI Valeria, MARI Daniela, MASCELLANI Giancarla, MENATTI Roberta, MERLI Giuseppina, MINGOZZI Maria, PATRIA M. Cristina, PEDUZZI A. Maria, PEPE Luigi, ROSELLI Walter, ROSSI Valeria, RUGGIERO Valeria, SANTINI Paola, STATELLINI Luisa, STEVANI Isabella, TANI Gisella, VECCHIO Emanuele, VERGARO Bruno, ZANCHIRATI Luisa.

FIRENZE: ASTORE M. Luisa, CAMPEDELLI M. Giuditta, CASADIO Giuseppina, DOLFI Cesarina, FEDRI Valeria, GIORGETTI Anna, GIUNTINI Sandra, MAGGI Alessandro, MELOSI Luigia, MIRABASSI Francesca, PIRILLO Giuseppe, PUCCI Carlo, ROSATI L. Antonio, TURCHI Grazia, ULIVI Elisabetta, VOCINO M. Rosaria.

FORLI': BRASINI Luigi.

GENOVA: BOERO Paolo, FORCHERI Paola, FURINGHETTI Fulvia, RENDA Maurizio, ROSSI A. Maria.

GORIZIA: FONTANA Renzo, SMAREGLIA Rita.

LECCE: PELLICIARDI Gabriele.

MACERATA: TEODORI Alba Rosa.

MANTOVA: BACCARINI Doretta, GUIDORZI Gabriella, MOI Elisa, TONINI Gina ZIBORDI Novella.

MASSA-CARRARA: BENESPERI Maria - GALLIGANI Paola.

MILANO: CAZZANI Gabriella, DEDO' Modesto, DROGHETTI Marisa, GRANATA Maria, LUCCHINI Gabriele, TOSI Armida.

MODENA: BOTTI Giovanna, TRIPICIANO Giulia, VESCOGNI M. Grazia, ZANIOL M. Grazia.

NAPOLI: DI CESARE Luciana, MORELLI Aldo, RINALDI Biagio, SANTANIELLO Antonia, TRAMONTANO Francesco Paolo.

PADOVA: AUDINO Luigina, BERGO Emilio, BREDA Gianni, BUSULINI Franca, CARDINI Lucrezia, FORT Francesca, GIULIANI Carla, INAMA Federica, MANTOVANI Marisa, MENEGAZZO Federico, MENEGAZZO Giorgio, METELLINI Ariella, MIAZZI Pacifico, MONTANARI Rossana, MORGANTINI Edmondo, PATUZZO Paola, PELLIZZARO Sergio, RAVAGNANI Roberta, REBUSTINI Oreste, SCABARDI Adriano, SCIMEMI Benedetto, SCUDELER Antonio, TAFFARA Rita, TONI Paolo.

PALERMO: CANNATA Domenica, D'AMICO Giovanna, LOREFICE M. Fiorella, RAO Giuseppe, SPAGNOLO Filippo.

PARMA: COTTI Celestina, FERRERO Giovanni, SPERANZA Francesco, SUPPA Alberta.

PAVIA: ARCIDIACO Giuseppe,BRAMBILLA Ada, BRIZZI Luigi, CINQUINI M. Grazia, DE GENNARO Maddalena, FERRARI Mario, MAGENES Enrico, MAGNI Antonio, PESCI Angela, REGGIANI Mario, SAVARE' Agostino, VENOSTA Annamaria.

PERUGIA: CANDORI Francesca, DISCEPOLI Vittorio, VIBI Romano.

PISA: BIANUCCI Vinicio, CAMPANATO Amalia, CERRAI Paola, CHECCUCCI Vittorio, GIUNTINI Paola, MALAGOLI Nadia, MALVALDI Giovanna, MANACORDA Tristano, PISANESCHI Paolo, PRODI Giovanni, SCIACCA BANTI Renato, VILLANI Vinicio.

PISTOIA: FERACI Fabrizio, RABUZZI Alessandro, SOLDI Vasco.

RAVENNA: BALDINI Luciana, SACCHI M. Carla.

REGGIO EMILIA: BARANI Carla, LAZZARETTI Daniela, TORRESI Rosa.

ROMA: ASCOLI M. Teresa, BORELLI Albino, CANNIZZARO Lucilla, CAROSI Mauro, CAVALLARO Bruna, CRUCIANI Rosanna, GHERARDINI Piergiorgio, IPSEVICH M. Cristina, MANCINI PROIA Lina, RIZZI Bruno, VEREDICE Giuseppe, ZELASCHI Letizia.

ROVIGO: BERNECOLI Sandra, CECCHETTO Giampaolo, FUGGETTA Giuliana, TONIMEL Gustavo.

SASSARI: GARIBALDI Giuseppe, MARRAS Giovanni.

SAVONA: CICERI Carlo, MINETTI Paolina, RAMBALDI Giacomo, TORTAROLO Sergio, VIGANEGO Gabriella.

SIENA: DORETTI Lucia, MOSCUCCI Manuela, PICCIONE Maria.

TORINO:	AMICICH Ornelia, BOSCIA Renato, CHIUSANO Giancarlo, CIGNETTI Alberto, CONTE Alberto, GALLARA'Lucia, GALLO Elisa, GARLO Paola, MOSCA Miranda, PELUSO Antonio, RIVELLI Elsa, SCIENZA Giuseppe, TALENTI Annamaria, VALABREGA Elda.
TREVISO:	D'ARGENZIO M. Pia, DI BENEDETTO Rocco, SITIA Candido.
TRIESTE:	AZZALI Evi, CORTESE Renata, CRISCIANI Fulvio, FURLANI Marco, MARKO' Roberta, TORELLI Giovanni, ZUCCHERI Luciana.
UDINE:	CASARSA Franco.
VARESE:	FORTE Salvatore, LINATI Paolo, MANDELLI Germano, MAURO Raffaele, PANIZZOLO Matilde.
VICENZA:	CIMENTI Gabriella, CONTIERO Felice, FACCI Elena, MURARO Giuseppe, ROSSI Marcello, TESTA Giuliano, TOSATO Gianna Paola, VIZZINI Enrico.
VENEZIA:	CONTIN Daniela, MAGNANI Roberta, TONOLO Maria, VENTUROLI Francesco.
VITERBO:	BASILE Maria.

Sono inoltre intervenuti:

GRUNIG Roland	Professor dell'Université de Paris.
KUSSOVA Blanka	Professore della Charles University - Praga.
MAMMANA Felice	Ispettore del Ministero della P.I.
ROGERSON Alan	Research Director of the SMP.
ROSSI Antonio	Rettore dell'Università di Ferrara.
VITA Vincenzo	Ispettore del Ministero della P.I.

PRIMA GIORNATA - 20 aprile - Ore 10,30

Apre i lavori il prof. Luigi Pepe che saluta i partecipanti e ringrazia il Rettore dell'Università di Ferrara per il suo vivo interessamento ai problemi della didattica della matematica e per la collaborazione che offre alle iniziative dell'U.M.I.

Interviene il prof. Antonio Rossi, Magnifico Rettore dell'Università di Ferrara. Egli sottolinea l'interesse dell'Università e delle Scuole di Ferrara ai Convegni dell'U.M.I. per la didattica della matematica. Esprime la sua piena adesione ai temi del Convegno, relativi al confronto sull'insegnamento della matematica, tra i paesi europei, rilevandone l'attualità.

Introduzione del Presidente dell'Unione Matematica Italiana, Carlo Pucci.

In primo luogo desidero ringraziare il Rettore prof. Rossi per la sua calorosa e gradita ospitalità di cui abbiamo voluto ancora una volta approfittare e desidero ringraziare il presidente della CIIM prof. Villani per l'organizzazione di questo Convegno.

Da due legislature il Parlamento esamina disegni di legge di riforme della scuola secondaria senza arrivare ad alcuna conclusione. Può darsi che questo sia stato il male minore data la superficialità e confusione delle soluzioni emergenti.

L'UMI su proposta della CIIM ha preso posizione contro il progetto di riforma approvato in Commissione dalla Camera. In particolare è stata criticata l'ipotesi di un primo anno di orientamento e l'assenza nel progetto di riferimenti al ruolo culturale, formativo e scientifico della matematica. La Commissione Scientifica ha constatato anche "che la struttura proposta non ha corrispondenza con le analoghe strutture degli altri paesi europei ed in particolare del MEC; non ci si è posto l'obiettivo di adeguare l'insegnamento scientifico ai livelli europei".

Per questa ragione si è ritenuto opportuno dedicare la prima giornata di questo convegno ad un confronto con l'Europa. Questa esigenza è stata sentita anche dalla Confederazione delle Associazioni Scientifiche Italiane (COASSI) che sta svolgendo per conto del Ministero della Pubblica Istruzione uno studio su l'insegnamento scientifico nella scuola secondaria in alcuni paesi europei. L'Unione Matematica partecipa a questa iniziativa; Gherardini è uno dei redattori di un volume sulla situazione in Gran Bretagna; Pirillo è uno dei redattori di un volume sulla situazione francese e Villani ha la direzione del rapporto sulla situazione della Germania.

Conoscere le esperienze scolastiche degli altri paesi può essere utile per ciascun insegnante e tale conoscenza dovrebbe essere preliminare alla elaborazione di progetti di riforma della scuola. Purtroppo invece la maggior parte dei dibattiti sulla scuola prescinde da ogni analisi rigorosa e quantitativa della realtà ed è fondata su fedi filosofiche ed interessi corporativi.

Il confronto della struttura scolastica italiana con quella di altri paesi europei è opportuno non solo per ragioni didattiche. Ci stiamo avviando auspicabilmente ad una maggiore integrazione europea e quindi ad una maggiore mobilità dei lavoratori e delle loro famiglie in Europa. Vi è quindi la necessità di approfondire i problemi della trasferibilità di studenti da un sistema scolastico ad un altro e della corrispondenza dei titoli di studio.

La seconda giornata di questo Convegno è dedicata ad una analisi delle esperienze realizzate dai vari nuclei di ricerca didattica.

Tutti i convegni dell'UMI sulla didattica della matematica sono stati occasione di incontro e dibattiti fra i collaboratori dei vari nuclei di ricerca didattica originariamente tutti operanti nell'ambito di un contratto gestito dall'UMI. Questa volta la CIIM ha voluto opportunamente delimitare il tema: l'insegnamento della geometria, per rendere il confronto fra le diverse esperienze più concrete.

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE - UN CONFRONTO CON L'EUROPA.

Piergiorgio Gherardini - "La Scuola Secondaria inglese e l'insegnamento della matematica".

1. Le Istituzioni.

Come spesso avviene, il tema di una relazione può essere difficilmente sviluppato in modo esauriente nel tempo limitato di un Convegno come quello cui oggi partecipiamo. In particolare, voler parlare della scuola secondaria e della formazione matematica in Inghilterra in un numero ragionevole di minuti può sembrare quantomeno azzardato. E' noto infatti che anche in Gran Bretagna la realtà economico-sociale, di cui la scuola costituisce una tra le più importanti manifestazioni, presenta profonde apparenti contraddizioni per capire le quali si richiede, ad un osservatore esterno, una notevole disponibilità di studio.

Per fare un esempio, questo paese, che ha sviluppato modelli di istituzioni scolastiche rigidamente selettive, tuttora energicamente difese da settori rilevanti della pubblica opinione, può vantare anche una solida ed estesa tradizione di intervento statale nel settore dell'istruzione, a cominciare dall'introduzione, nel 1870, del principio dell'obbligatorietà dell'istruzione elementare con il relativo supporto finanziario da parte dello Stato, fino ad arrivare, ai giorni nostri, alla realizzazione di strutture educative aperte a qualsiasi età e per ogni tipo di qualificazione, intese sia come strumenti di recupero della scolarità di base non sviluppata al momento dovuto, sia come occasione di formazione continua.

Data dunque la complessità della materia presenterò solo alcuni aspetti essenziali, tenendo in mente soprattutto la possibilità di un confronto con il nostro paese. Come semplicazione ulteriore parlerò solo della scuola inglese, tralasciando le differenze, spesso tutt'altro che marginali rispetto ai sistemi educativi di Scozia e Galles.

E' utile considerare innanzi tutto alcuni elementi oggettivi: già dal 1944 la legge di riforma su cui si basa l'attuale sistema educativo prevedeva il prolungamento graduale dell'obbligo scolastico fino ai 15 anni e successivamente fino ai 16. Il primo traguardo venne conseguito fin dall'immediato dopoguerra, mentre il secondo divenne una realtà dopo il 1972. Poichè la scuola primaria inizia a 5 anni, il periodo dell'obbligo si estende complessivamente per 11 anni. In nessun altro paese europeo si riscontra questa situazione: per citare alcuni esempi, in Francia, Germania orientale e Russia la scuola dell'obbligo dura 10 anni; nei paesi Scandinavi, Austria e Germania occidentale 9 anni; in Italia, come è noto solo 8(1).

All'interno di questo periodo di scolarità tuttavia non si ha una struttura omogenea in tutto il paese, relativamente ai diversi tipo di istituti scolastici; ciò contrasta con quanto avviene quasi ovunque ed è dovuto principalmente al fatto che non esiste, in questo paese, un governo centralizzato nel settore dell'istruzione e molte decisioni di politica scolastica sono di competenza esclusiva delle Autorità scolastiche locali, come si dirà tra breve. A fianco delle scuole elementari della durata di 6 anni (da 5 a 11), che rappresentano il caso più diffuso, si possono trovare scuole primarie inferiori, per i primi due anni, e superiori per gli anni successivi del ciclo primario. Per rendere più agevole il passaggio tra l'istruzione elementare (o primaria) e quella secondaria sono state sviluppate negli ultimi anni, incontrando un favore crescente, le scuole medie o di transizione, a cui accedono allievi dagli 8/9 anni ai 12/13 anni, in cui spesso è mantenuta la figura dell'insegnante unico per le diverse materie. Tali scuole nacquero soprattutto per il recupero dei ragazzi che non riuscivano ad inserirsi in modo

---

(1) Per maggiori dettagli sui sistemi scolastici dei paesi citati, cfr. Gherardini (1977). (Atti del Terzo Convegno sull'insegnamento della matematica dell'UMI).

soddisfacente nel sistema secondario selettivo, a cui dovevano far fronte all'età di 11 anni. Attualmente però esse si sono sviluppate come parte integrante di un ordinamento scolastico fondato su tre stadi (primario-medio-secondario), pedagogicamente del tutto simile, per esempio, al sistema italiano. E' significativo il fatto che di pari passo (a volte anticipando) al consolidamento di questo tipo di scuole alcuni progetti didattici inizialmente ideati per diversi periodo di età sono ora ristrutturati o completati da sezioni rivolte al periodo di passaggio dall'istruzione primaria alla secondaria. Lo School Mathematics Project ad esempio ha recentemente pubblicato le prime unità di una serie destinata a ragazzi da 7 a 13 anni, che si presenta con buone probabilità di immediato successo anche per il fortunato incontro con le particolari esigenze del momento.

Al termine della scuola elementare, cioè normalmente a 11 anni, il sistema secondario si articola in vari tipi di istituti, ma oggi prevale di gran lunga la scuola secondaria 'comprensiva' (comprehensive school), frequentata nell'Inghilterra e nel Galles da oltre il 70% della popolazione scolastica della corrispondente fascia di età. La scuola comprensiva ebbe origine negli anni cinquanta, ma si sviluppò solo nel decennio successivo, con l'obiettivo di superare le discriminazioni insite nel sistema secondario selettivo: ad essa si accede infatti senza nessun esame preliminare.

Prima dell'introduzione di tali scuole si procedeva, al termine dell'istruzione primaria, alla differenziazione degli allievi nei tre tipi di secondaria esistenti: la grammar school, la technical school e la secondary modern school; la selezione avveniva sulla base di un esame tendente ad accertare il livello di preparazione di tipo accademico. Senza scendere nei particolari, si può dire che le grammar schools rappresentavano, e tuttora rappresentano, l'indirizzo di studi generali, letterari o scientifici, orientati prevalentemente al proseguimento degli studi nell'Università, mentre le secondary modern schools offrivano un'istruzione di tipo più pratico e meno qualificata, adempiendo quasi esclusivamente alla funzione di permettere il proseguimento degli studi fino all'età prevista dalla legge.

Attualmente comunque la situazione si va evolvendo rapidamente, nel settore pubblico, verso il sistema comprensivo: è tuttora operante infatti una raccomandazione emanata nel '74 dal Ministro dell'Istruzione secondo la quale tutte le Autorità scolastiche locali devono riorganizzare gli istituti secondari secondo le linee della scuola comprensiva. Naturalmente l'etichetta 'comprehensive' di cui si ammantano le nuove istituzioni non sempre possiede per intero il significato pedagogico atteso, se si pensa che una forma di selezione può ricomparire nella composizione delle classi secondo le doti presunte degli allievi. In effetti comunque si deve riconoscere che il consolidarsi delle comprehensive schools ha fornito un vigoroso impulso alle ricerche sul rinnovamento dei curricoli, alcune delle quali sono state nettamente finalizzate, da un certo momento in poi, allo studio di contenuti e metodi specifici per classi di allievi di diversa intelligenza e capacità (mixed ability classes): anche questa circostanza fa ritenere che questo tipo di classi rappresentino una realtà sempre più diffusa.

Al termine della scuola dell'obbligo si offrono, per chi intende proseguire negli studi, due possibilità, cioè la frequenza di corsi secondari superiori (denominati 'sixth forms') normalmente della durata di due anni, che precedono necessariamente l'accesso all'Università; ovvero l'iscrizione a corsi inclusi nel sistema della cosiddetta 'Istruzione ulteriore' (Further Education). Questi ultimi possono essere sia di tipo tecnico e professionale, svolti a tempo pieno o alternati con periodi di tirocinio in ditte, industrie o uffici, sia di tipo generale, cioè non ancora orientati ad una specifica qualificazione professionale. In quest'ultimo caso il sistema della Further Education svolge anche una funzione di recupero, in quanto permette di conseguire, in età successiva e con un'organizzazione degli studi molto più flessibile, i diplomi che normalmente si conseguono a conclusione della scuola secondaria (scuola dell'obbligo e successive sixth forms).

2. Il Governo delle Istituzioni.

Delineata, seppure a grandi linee, la struttura del sistema scolastico inglese occorre soffermarsi un attimo a descrivere come esso venga fatto funzionare. Ancora una volta non è possibile scendere in dettaglio, analizzando ad esempio l'origine di certi problemi e di specifiche proposte di soluzione, ma ritengo ugualmente importante esporre alcuni fatti oggettivi, di per sè significativi.

Innanzi tutto occorre affermare che una forte spinta verso la ricerca di nuove soluzioni ai problemi didattici e pedagogici posti da una scuola che cresce e si trasforma con la società proviene anche dalla possibilità e capacità del sistema educativo di adattarsi, o comunque di non ostacolare, le esigenze provenienti dalla realizzazione concreta delle ipotesi innovative. In Inghilterra come è noto si è assistito, a partire dagli anni sessanta, allo sviluppo di numerose iniziative di ricerca didattica note con la denominazione di Progetti di sviluppo curricolare, in settori disciplinari diversi, alcune delle quali hanno costituito un fenomento culturale di tale interesse da imporsi all'attenzione e allo studio di numerosissimi ricercatori e insegnanti, sia in Gran Bretanga che in altri paesi. Ciò non si è verificato per caso, e se si vogliono individuare i motivi del successo di tali iniziative si deve riconoscere che esso è dovuto anche al fatto che l'intelligenza di certe idee ha potuto essere verificata e sviluppata in un ambiente sperimentale adeguato. L'esperienza inglese ha mostrato che l'innovazione è possibile anche nella scuola: cerchiamo quindi di individuare nelle strutture di governo della scuola stessa alcune condizioni ad essa necessarie.

L'organismo che corrisponde formalmente al Ministero della P.I. è il Department of Education and Science (DES), che svolge soprattutto funzioni di coordinamento e di sviluppo della politica nazionale per le istruzioni, senza però avere alcuna funzione esecutiva.

Infatti nell'Educational Act del 1944, legge che è alla base dell'attuale sistema, si afferma che il compito del Segretario di Stato (Ministro) per la Istruzione e la Scienza è di "promuovere l'Istruzione popolare nell'Inghilterra e nel Galles[1] e la continua evoluzione delle istituzioni dedite a tale scopo, nonchè di accertare l'effettiva applicazione da parte delle Autorità locali, sotto il suo controllo e direzione, delle direttive nazionali, al fine di provvedere in tutte le zone un servizio per l'istruzione in campo vario e vasto" (v. Central Office of Information, "I sistemi Educativi in Gran Bretagna", Londra, 1974).

L'aspetto esecutivo è quindi delegato interamente alle Autorità scolastiche locali (LEA: Local Education Authority), il cui numero supera il centinaio, elette dai vari Consigli di Contea e coprendenti membri di questi (in maggioranza) e altre persone esperte dei problemi educativi e delle esigenze locali nel settore scolastico. In particolare, non sono di competenza del Department of Education and Science gli aspetti amministrativi delle singole scuole, la fornitura dei servizi sociali, l'assunzione e l'aggiornamento degli insegnanti, la decisione di aprire nuove scuole, il controllo sui libri di testo, la definizione dei programmi di studio, la dotazione ai singoli Istituti dei materiali didattici e delle attrezzature occorrenti: di tutte queste questioni sono responsabili unicamente le Autorità locali che naturalmente possono a loro volta delegarne una parte ai singoli capi di Istituto.

Il Ministro ha invece sostanzialmente il compito di garantire che venga rispettato in tutto il paese il diritto allo studio, di controllare la distribuzione delle risorse secondo le necessità manifestate dagli organi di governo locali, di incentivare e sostenere ricerche intese a migliorare i diversi aspetti del sistema, di definire i problemi relativi alla formazione, disponibilità e retribuzione degli insegnanti. Si tratta quindi essenzialmente di un ruolo politico in senso generale e di controllo sul regolare funzionamento del sistema, in modo che vengano salvaguardati i diritti di ciascuno. Per svolgere efficacemente tali funzioni il Ministro si avvale del contributo di oltre quattrocento Ispettori (nella sola Inghilterra e Galles), la cui attività è di gran lunga più positiva di quella comunemente associata all'analogo ruolo esistente nel sistema italiano. Tali Ispettori

---

(1)- La responsabilità per l'istruzione pre-universitaria in Scozia compete al Segretario di Stato per la Scozia.

infatti, oltre a svolgere attività di consulenza su problemi specifici, quali ad esempio la realizzazione di innovazioni curricolari, mantengono contatti regolari con le Autorità scolastiche locali e con le singole scuole, per contribuire personalmente alla soluzione dei problemi didattici e organizzativi che si presentano nelle diverse situazioni.

Un altro organismo che ha rappresentato, fin dalla sua costituzione nel 1964, una delle maggiori fonti di iniziative e di impulsi innovatori nel dibattito sulle riforme metodologiche e curricolari è il cosiddetto Consiglio delle Scuole' (Schools Council for the Curriculum and Examinations). Si tratta di un organismo indipendente finanziato in parti uguali dal Department of Education and Science e dalle Autorità locali, il cui compito generale, per statuto, è di studiare i problemi dell'educazione fornendo alle persone interessate nelle scuole, e più in generale alla pubblica opinione, materiali sperimentali e concrete ipotesi di lavoro, per il miglioramento del sistema educativo nel suo insieme. A tale fine esso promuove e coordina numerose ricerche didattiche, commissiona studi su problemi particolari, segue e dà impulso al dibattito pubblico sui problemi della scuola con una serie di pubblicazioni di notevole impegno scientifico.

Per avere un'idea dell'importanza della sua attività si consideri il fatto che dal 1964 ad oggi esso ha finanziato oltre 170 fra progetti di ricerca curricolare, studi sull'organizzazione scolastica e analisi del sistema di valutazione e di esami, per una spesa complessiva di oltre 16 miliardi di lire. Tale attività, importante di per sè, ha prodotto anche, con il coinvolgimento di una notevole quantità di persone e istituti situati un pò in tutto il paese, un considerevole ampliamento del dibattito sulla scuola, assecondando quindi quel processo di miglioramento e verifica continua delle istituzioni, che dovrebbe essere un obiettivo fondamentale di un sistema sociale.

La struttura di governo dello Schools Council è abbastanza elaborata e il descriverla qui porterebbe via troppo tempo. Si deve tuttavia sottolineare il principio informatore, che è quello della suddivisione dei compiti tra diversi Comitati operanti in modo autonomo nel settore di loro competenza ma sotto la supervisione costante di un unico Consiglio direttivo, per quanto riguarda le scelte di politica generale. Inoltre lo statuto prescrive che in tutti i principali organi di governo e commissioni di lavoro, a qualsiasi livello, siano presenti, con maggioranza effettiva, i rappresentanti di associazioni di insegnanti.

E' necessario a questo punto sottolineare quella che sembra la caratteristica più marcata del sistema inglese, cioè il reale decentramento delle funzioni e delle responsabilità, nel governo della scuola, tra i diversi organismi ad esso preposti. In particolare occorre soffermarsi su un punto cruciale, di speciale interesse nel confronto con la realtà italiana, cioè la responsabilità della scelta dei programmi di insegnamento.

La circostanza che il Ministro inglese per l'Istruzione non abbia il minimo potere sulla determinazione dei programmi di insegnamento e nessuna possibilità di controllo sull'operato degli insegnanti rappresenta certamente, per l'osservatore straniero, la principale fonte di turbamento. In effetti, tale situazione è decisamente anomala, non solo rispetto al nostro paese, in cui è ben noto l'atteggiamento ministeriale verso iniziative non allineate con il regime governativo dei programmi, ma anche nel riferimento ai paesi europei più vicini, quali Francia e Germania, in cui ugualmente la burocrazia dell'istruzione sembra voler esercitare uno stretto controllo sul sistema.

Ma se si abbandona per un attimo l'esperienza vissuta nella nostra scuola, sia come allievi che come insegnanti, e se si accetta l'idea che per elaborare i principi pedagogici e i contenuti culturali su cui fondare il processo formativo degli allievi occorrono competenze altamente specializzate e una conoscenza diretta delle esigenze della popolazione che della scuola fruisce, allora il fatto che non debba essere un Ministro, cioè il potere politico, a fissare i programmai scolastici appare del tutto evidente. Si tratta infatti di compiti distinti, che tali dovrebbero rimanere: da una parte la determinazione della politica scolastica generale e l'amministrazione delle risorse disponibili, dall'altra la realizzazione di un processo formativo. Confondere questi due livelli, attribuendo ad un unico organismo centrale entrambe le prerogative, è, a mio avviso, una scelta politica da rifiutare con estrema chiarezza.

Nel sistema italiano come è noto questa confusione, certo non casuale, è enorme, se si pensa, come esempio fra tanti, che il Ministro della P.I. ha la prerogativa di scegliere, a poche settimane dalla prova, le discipline oggetto dell'esame di maturità, sovrapponendosi così in modo arbitrario al lavoro di migliaia di insegnanti e studenti e introducendo un'ulteriore variabile aleatoria nel già tanto aleatorio sistema di esami.

Tornando al modello inglese, notiamo dunque che una delle caratteristiche più importanti è la possibilità, nelle singole scuole, di decidere entro limiti molto ampi cosa insegnare, e come. Dal punto di vista formale in realtà sono responsabili dei programmi di insegnamento le singole Autorità scolastiche locali, ma in pratica il compito è quasi sempre delegato ai capi di Istituto i quali si avvalgono, per questo fine, degli insegnanti. In particolare, per ogni disciplina esiste nelle scuole un insegnante più esperto con funzione di coordinatore e organizzatore dell'insegnamento della sua materia; tale insegnante dirige il gruppo di colleghi, fissando con loro il curricolo, i libri di testo, i metodi didattici.

Si tratta quindi di un lavoro svolto in forma cooperativa dal gruppo di docenti: spesso avviene che insegnanti di scuole diverse della stessa zona si incontrino per discutere i loro problemi, facendo riferimento a strutture particolari, che hanno visto una rapida diffusione negli ultimi anni, i Centri per Insegnanti (Teacher's Centres).

Tali Centri, finanziati dalle stesse Autorità locali, nacquero in molti casi come strutture di sostegno alla sperimentazione, nelle scuole, dei Progetti di sviluppo curricolare, elaborati negli anni sessanta in molti settori disciplinari, soprattutto scientifici. Successivamente, a seguito del successo conseguito e del riconoscimento del ruolo positivo svolto nel problema dell'aggiornamento, si trasformarono in strutture stabili, alla cui attività gli insegnanti partecipano sia su base volontaria, sia come attività riconosciuta e incoraggiata dalle singole scuole.

Esistono tuttavia, anche nel sistema inglese,limiti notevoli nella definizione dei curricoli didattici. Tali limiti sono imposti soprattutto dal sistema degli esami che concludono il ciclo di studi secondari. La comprensione del meccanismo che regola tali esami è importante, se si vuole dare una valutazione complessiva più approfondita del sistema educativo; è opportuno quindi illustrare i caratteri essenziali di tale meccanismo.

3. Gli Esami.

L'aspetto forse più contraddittorio nel sistema scolastico che stiamo esaminando è costituito dal fatto che la scuola dell'obbligo si conclude con una prova di esame che non è uguale per tutti, nè rispetto alle discipline esaminate, nè rispetto alla difficoltà della prova stessa. Ciò si deve al fatto che gli allievi possono scegliere il tipo di diploma da conseguire, e la materia in cui conseguirlo, fra i due titoli di studio riconosciuti nell'attuale ordinamento, precisamente il Diploma Generale di Istruzione a livello Ordinario (CGE: General Certificate of Education, O-level) e il Diploma di Istruzione Secondaria (CSE: Certificate of Secondary Education).

L'origine, la struttura e le forme di svolgimento degli esami relativi ai due diversi Diplomi differiscono profondamente: il GCE a livello ordinario, nella forma attuale che fu varata nel 1951, rappresenta l'esame destinato alla frazione della popolazione scolastica della fascia di età 15-16 anni, costituita dagli allievi più dotati e quindi in grado di sostenere un esame più difficile: all'origine tale frazione si valutava intorno al 30% del totale. Ogni esame verte su una singola materia (subject), scelta dal candidato in genere con l'approvazione della scuola. Ogni candidato può chiedere di sostenere, anche nella stessa sessione, più esami in altrettante materie: la analisi statistica delle scelte indica che i candidati sostengono in media quattro esami.

Al termine del biennio conclusivo dell'istruzione secondaria (sixth form) gli studenti possono presentarsi a sostenere l'esame GCE a livello avanzato (A-level) in materie scelte dai singoli interessati e non necessariamente in relazione con i diplomi O-level precedentemente conseguiti.

Ad entrambi i livelli le prove d'esame, costituite quasi esclusivament da testi scritti, vengono preparate, assegnate e valutate da organismi privati autonomi, gli Examining Boards (Uffici Esaminatori), sorti per lo più in ambiti universitari, a metà del secolo scorso. Tali organismi svolgono un ruolo fondamentale nel sistema educativo inglese; essi sono effettivamente autonomi, nel senso che non sono soggetti al controllo dell'Autorità scolastica centrale (il Dept. of Education and Science), e i rapporti con lo Schools Council, l'organismo statale più direttamente interessato ai problemi dei curricoli didattici e degli esami, sono assai tenui: lo Schools Council ha solo il diritto di esprimere commenti sui programmi di esame proposti dagli Uffici Esaminatori, ma non di respingerli, e in nessun modo può intervenire nel merito delle prove di esame e sul rilascio dei titoli.

Si tratta dunque di organismi caratteristici della scuola inglese, che non hanno corrispondente in altri sistemi educativi. Senza scendere nei particolari della loro fondazione (i primi sorsero verso il 1850-60) si deve riconoscere che, se anche le finalità per cui furono inizialmente istituiti erano di tipo diverso, attualmente l'esame che essi amministrano è collegato sia ai requisiti richiesti per l'ammissione agli studi superiori di tipo universitario (includendo anche i Politecnici) sia al livello di qualificazione necessario per l'inserimento professionale[1].

E' importante sottolineare una caratteristica essenziale di questo tipo di esame, il fatto cioè di essere totalmente 'esterni' alle scuole, di volersi porre come una specie di arbitrato al di sopra delle parti sul lavoro svolto nelle aule scolastiche. Notiamo inoltre che sono gli stessi Uffici Esaminatori a fissare il Programma di esame e la difficoltà della prova, ponendo così un preciso punto di arrivo per la programmazione didattica degli anni conclusivi della scuola dell'obbligo e del ciclo secondario superiore (sixth form).

L'altro tipo di Diploma conseguibile a conclusione della scuola dell'obbligo, il Diploma di Istruzione Secondaria (CSE) viene assegnato in base a un tipo di esame più flessibile, che può anche differire notevolmente dal precedente, sia nell'organizzazione sia nei contenuti.

Il nuovo esame (e relativo Diploma), istituito dal Ministro per l'Istruzione nel 1962 (ma reso operante per la prima volta nel 1965), è sorto con l'obiettivo preciso di venire incontro alle necessità della grande maggioranza degli allievi, quelli esclusi dalle grammar schools e indirizzati verso i canali più 'poveri' dell'istruzione secondaria. Infatti, sebbene all'esame per il GCE potesse presentarsi

(1) - Tali requisiti finiscono con l'influenzare pesantemente la scelta delle materie in cui sostenere l'esame: così l'esistenza di alcune materie di gran lunga più diffuse si spiega con la maggiore importanza ad esse generalmente accordata sia come requisito di accesso agli studi superiori sia come qualificazione riconosciuta dalle organizzazioni professionali o dai datori di lavoro.

chiunque avesse compiuto 16 anni[1], di fatto esso escludeva gli allievi più deboli, la maggior parte dei quali appunto frequentanti le 'scuole moderne' o 'tecniche': per essi la scuola si concludeva senza che nessun 'riconoscimento' ufficiale potesse essere acquisito e mostrato, per esempio, ai datori di lavoro.[2]

Il nuovo esame era quindi destinato a circa il 40% degli allievi della fascia di età corrispondente, quelli di capacità e preparazione scolastica medie.

Anche esso si svolge, generalmente a 16 anni, su singole materie, ma non è previsto il livello 'Avanzato' e la conduzione è affidata a 14 Uffici regionali indipendenti, facenti riferimento allo Schools Council for the Curriculum and Examinations.

All'origine del nuovo tipo di esame non fu però solo l'anzidetta necessità di fornire un titolo a un maggior numero di studenti. Un'altra esigenza, proveniente dall'ambiente scolastico, doveva trovare il modo di affermarsi, precisamente quella di un più marcato potere di intervento degli insegnanti sulla conduzione degli esami. Una critica costantemente rivolta agli Examining Boards, come si può intuire da quanto detto precedentemente , è infatti quella di influenzare in mddo negativo, attraverso la gestione dell'esame, lo sviluppo dei programmi scolastici e quindi di interferire pesantemente nelle scelte pedagogiche, e in ultima analisi, nella libertà di insegnamento.

Allo scopo dunque di permettere una partecipazione più larga degli insegnanti nella gestione degli esami, fase conclusiva del loro lavoro, non solo veniva loro garantita la maggioranza del governo degli Uffici regionali, ma soprattutto venivano istituite forme alternative per questo tipo di esame.

Oltre alla "modalità" di svolgimento comune agli esami di tipo GCE (denominata Mode I) cioè esami totalemnte gestiti dall'Ufficio, anche nella determinazione dei programmi, erano previste le seguenti due forme ulteriori:
- esami esterni (Mode II) il cui programma è presentato dalle singole scuole (o gruppi di scuole), fatta salva la sua approvazione da parte dell'Ufficio.
- esami totalmente gestiti dalla Scuole (Mode III) sia per quanto riguarda il programma che lo svolgimento e la correzione delle prove; in questo caso l'Ufficio regionale funge esclusivamente da moderatore, cioè garantisce la regolarità dell'operazione.

---

(1) - Tale limite di età, fissato all'inizio, fu ben presto abolito nei fatti per non danneggiare gli allievi precoci in grado di anticipare la prova.

(2) - Si intende qui un diploma riconosciuto su base nazionale, non solamente locale.

E' importante tuttavia riconoscere, tra i motivi dell'istituzione degli Uffici Regionali per il CSE, anche la volontà di esercitare una forma di intervento dell'Autorità scolastica centrale sull'organizzazione degli esami.

Infatti gli Uffici Regionali, per essere riconosciuti dallo Schools Council, devono essere organizzati e lavorare secondo schemi fissati da questo, e fra i membri del comitato di Governo dell'Ufficio sono previsti numerosi rappresentanti delle LEA esistenti nella regione. Si tratta comunque di un intervento dell'Autorità centrale mediato appunto attraverso le LEA e lo Schools Council è sempre piuttosto "delicato" se paragonato a quelli tipici di sistemi educativi rigidi, come quello italiano. Occorre anche dire che negli organismi di governo di tali Uffici gli insegnanti in servizio sono rappresentati sempre in percentuale miggioritaria: l'Autorità centrale quindi ha impostato l'organizzazione di queste strutture, ma ha lasciato agli insegnanti e alle autorità locali il compito di dirigerle.

E' interessante inoltre notare che nonostante l'esistenza delle forme alternative di esame (Mode II e III) la modalità 'tradizionale' è la più diffusa molto probabilmente per il fatto che è la più facile (per le scuole, s'intende). Ma è significativo il fatto che le altre forme sono proposte per lo più proprio dalle scuole legate ai gruppi di ricerca sul rinnovamento dei curricula, come è facilmente intuibile.

Dal punto di vista di questi gruppi, la possibilità di proporre forme di valutazione coerenti con il curriculum seguito significa avere l'occasione concreta di portare a termine correttamente una ricerca didattica, senza cioè subire l'influenza di fattori estranei all'ipotesi di lavoro adottata a quindi causa di disturbo: è esattamente, nei limiti in cui il confronto è possibile, quello che in Italia le numerose scuole sperimentali sorte a partire dal '70 non sono mai riuscite ad ottenere.

Allo stato attuale l'esame CSE ha una larga diffusione (si valuta che esso interessi circa il 60% degli studenti) sebbene la polemica fra coloro che lo sostengono e coloro che lo considerano solo un ripiego rispetto al più prestigioso GCE sia lungi dall'essere esaurita. In pratica comunque la maggior parte delle università considerano equivalenti, ai fini dei requisiti per l'ammissione, un Diploma GCE a livello ordinario e un Diploma CSE conseguito con il massimo del punteggio.

Può essere utile, per avere un'idea più precisa dell'importanza relativa dei due tipi di esame, considerare la tavola seguente, in cui la popolazione costituita da coloro che lasciano il sistema secondario (denominati 'school leavers") sia per aver terminato il periodo dell'obbligo, sia al termine delle sixth forms, è stata ripartita secondo il numero e tipo di diplomi conseguiti durante la carriera scolastica. Sono stati considerati quattro anni, per dare un'idea più dinamica del fenomeno analizzato; si osservi inoltre che la classificazione secondo il tipo delle promozioni è senza sovrapposizioni: per esempio, nei Diplomi GCE O-level inclusi nella seconda e terza riga non sono compresi quelli posseduti dai membri della popolazione computati nella prima riga.

Ripartizione degli 'school leavers' degli anni 1965/66, 70/71, 74/75, 75/76, per tipo di Diplomi conseguiti (valori percentuali).

	1965/66	1970/71	1974/75	1975/76
1 o più Diplomi GCE A-level	14	17	15	15
Nessun Diploma A-level:				
(a) 5 o più Diplomi GCE O-level o CSE, conseguiti con 'gradi superiori' (1)	8	8	9	9
(b) da 1 a 4 Diplomi di cui in (a), conseguiti con 'gradi superiori'	16	19	25	26
(c) 1 o più Diplomi di cui in (a), conseguiti con gradi inferiori	11	12	31	33
Nessun Diploma, nè GCE nè CSE	51	44	20	17
		100		100

(1) - Il GCE O-level e il CSE vengono rilasciati con la notazione del punteggio conseguito, indicato da 5 gradi (in ordine di merito decrescente). La dizione 'grado superiore' usata in questa tavola denota i primi tre gradi del GCE e il primo grado del CSE, considerati nel complesso comparabili e più differenziati qualitativamente dai rimanenti.

Esaminando i dati per il 75/76 si ricava il primo fatto di notevole interesse: una percentuale ancora alta di giovani, circa il 17%, lascia la scuola secondaria senza nessun Diploma, o per non essersi presentata all'esame, o per essere stata respinta; un'altra grossa frazione, oltre il 30%, possiede solo 'qualificazioni' molto basse.

L'ultima riga mostra invece il sensibile miglioramento della situazione a seguito dell'introduzione, nel 1965, del Diploma CSE: nell'arco di 10 anni infatti ciò ha significato la riduzione della percentuale di 'school leavers' senza alcuna qualificazione 'ufficiale' dal 50% al 17% circa.

Il numero percentuale di soggetti con 1 o più Diplomi GCE a livello avanzato rivela un andamento assai più uniforme; lo stesso si nota nella fascia '5 o più Diplomi GCE O-lvel o CSE con gradi superiori': al notevole aumento del livello di formazione scolastica di base (riscontrabile dai dati delle ultime tre righe) non sembra quindi aver corrisposto un ampliamento della popolazione con qualificazioni superiori.

Da ciò si può ricavare in particolare, che il sistema scolastico secondario sembra aver largamente mantenuto la tradizionale funzione selezionatrice verso gli studi superiori.

4. La Matematica degli Esami

Pur se il grado di libertà nelle singole scuole, per quanto riguarda la determinazione dei curricoli didattici, è limitato dalla necessità di preparare gli allievi a esami esterni vertenti su programmi da altri stabiliti, esso rimane tuttavia assai elevato per due motivi: il primo consiste nel fatto che i programmi degli Examining Boards indicano solo gli obiettivi finali del processo educativo, lasciando agli insegnanti la piena responsabilità della sua realizzazione (tempi e obiettivi intermedi, scelta dei materiali didattici,...). Il secondo si riferisce alla possibilità, lasciata alle scuole, di scegliere autonomamente l'Ufficio Esaminatore di cui adottare il programma: tali Uffici inoltre offrono sempre almeno due alternative, genericamente denotate 'Matematica tradizionale' e 'Matematica moderna'.

Come ultima eventualità, nel caso che nessuno dei programmi offerti da tali Uffici sia considerato soddisfacente, le singole scuole o gruppi di scuole possono proporre agli Examining Boards i propri programmi, cioè il curricolo elaborato dai propri insegnanti o da specifici gruppi di ricerca: se tali programmi vengono approvati dall'Ufficio, esso si rende disponibile ad organizzare esami coerenti. E' proprio questa la caratteristica del sistema sfruttata dai gruppi di ricerca che hanno prodotto le più importanti innovazioni nell'insegnamento della Matematica. Lo School Mathematics Project, ad esempio, ha ottenuto l'approvazione del suo programma da tutti gli Examining Boards e quindi esami appropriati sono disponibili in tutto il paese.

Anche gli esami per il Diploma CSE, come si è detto, possono vertere su contenuti proposti interamente dalle scuole e addirittura è prevista, in alcune forme di esame, la possibilità di riservare fino al 50% del punteggio globale conseguibile alla valutazione del lavoro svolto durante l'ultimo anno di scuola.

Da quanto precede si intuisce come sia estremamente difficile descrivere la Matematica che si insegna nelle scuole inglesi. Anche solo il confronto dei numerosi programmi di esame richiederebbe un'analisi tutt'altro che semplice. Ciò naturalmente non vuol dire che tali programmi non abbiano numerosi elementi in comune, ma solo che non è agevole quantificare il quadro risultante, se non in termini molto generali. Preferisco quindi anch'io operare una scelta e, limitando il discorso al Diploma GCE a livello Ordinario, presentare dettagliatamente tre programmi, cioè i due proposti dall'Ufficio collegato all'Università di Londra, indicati (secondo la denominazione originale) con C quello 'moderno' e con D quello 'tradizionale', e il programma dello School Mathematics Project, indicato con SMP. 15-16 anni

Ripeto tuttavia che non si possono trarre conclusioni generali, anche perchè l'esame che stiamo considerando interessa una porzione della popolazione scolastica senz'altro inferiore alla metà.

Il confronto è basato sulla suddivisione degli argomenti nelle classi seguenti: Insiemi, Numeri, Algebra, Analisi, Geometria, Trigonometria Probabilità e Statistica. Si tratta naturalmente di una ripartizione di comodo che non ha nulla a che vedere con un'appropriata programmazione didattica. Il numero associato ai singoli argomenti fa riferimento ad una intuitiva classificazione in cui il primo decimale rappresenta una sottoclasse, il secondo un particolare approfondimento di tale sottoclasse.

Programmi.

1. INSIEMI

C / SMP

1.1 Linguaggio e notazioni.
1.2 Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, complemento, insieme vuoto, insieme universo.
1.3 Diagrammi di Venn; loro uso in semplici problemi logici.
1.4 Uso di simboli per rappresentare numeri e insiemi.
1.5 Operazioni in un insieme: chiusura, elemento neutro e inverso.

2. NUMERI

C / D / SMP

2.1 Operazioni ordinarie con i numeri.
2.2 Frazioni, numeri decimali; cifre significative, grado di precisione. Numeri espressi in 'forma standard' cioè $a \times 10^n$, ove n è intero e $1 \leqslant a < 10$
2.3 Rapporti, proporzioni, percentuali.
2.4 I sistemi di misurazione (lunghezze, pesi, monete).
2.5 Uso delle tavole aritmetiche
2.6 Potenze ad esponente intero e calcolo relativo.

C / SMP	2.21 Approssimazioni e stime dell'errore, cifre significative, cifre decimali, limite di precisione. 2.7 Insieme dei numeri interi, razionali, irrazionali. Numeri primi. Semplici successioni e rèlative leggi di formazione. 2.8 Basi di numerazione e operazioni in basi diverse da 10, includendo la rappresentazione in tali basi di semplici frazioni.
D	2.22 Numeri espressi nella forma $b \times 10^{-n}$, ove n è intero e $1 \leqslant b < 10$
SMP	2.51 Uso del regolo calcolatore.

3. ALGEBRA

C / D / SMP	3.1 Algebra di base: calcolo simbolico, uso interpretazione e trasformazione di formule; fattorizzazione. 3.2 Equazioni e sistemi in due incognite, lineari. 3.3 Equazioni di 2° grado. 3.4 Grafici. 3.5 Disequazioni di 1° grado.
C / SMP	3.21 Rappresentazione grafica della soluzione di sistemi lineari di equazioni e disequazioni. Programmazione lineare. 3.6 Rappresentazione di dati attraverso matrici; operazioni relative; matrice identica; determinanti; matrice inversa di matrici di ordine 2; applicazioni nella soluzione di sistemi lineari. Matrici come trasformazioni; combinazione di trasformazioni. 3.7 Vettori in due dimensioni, rappresentazione come matrici-colonna; operazioni relative: addizione e sottrazione, moltiplicazione con scalari e con matrici.
C	3.51 Disequazioni di 2° grado. 3.71 Modulo di un vettore; espressione di un vettore come combinazione lineare di due vettori complanari. Uso delle proprietà: (i) $\underline{a} = \underline{b} \Rightarrow a = b$ e $\underline{a} /\!/ \underline{b}$, (ii) $h\underline{a} = k\underline{b} \Rightarrow \underline{a} /\!/ \underline{b}$ o $h=k=0$, nella dimostrazione di proprietà di equivalenza, parallelismo e incidenza di figure piane.
D	3.22 Sistemi in due incognite con un'equazione lineare e una di 2° grado. 3.8 Applicazioni dell'algebra alla soluzione di problemi. 3.9 Progressioni aritmetiche e geometriche.
SMP	3.23 Equazioni e proposizioni logiche. Ricerca delle soluzioni in insiemi diversi (interi, razionali, irrazionali). Soluzioni grafiche e per tentativi.

4. ANALISI

C / D / SMP

4.1 L'idea di funzione di una variabile.
4.2 Coordinate cartesiane nel piano.
4.3 Funzioni e grafici; gradiente.
4.4 Applicazioni a semplici problemi di cinematica.

C / SMP

4.11 Funzioni come corrispondenze: relazioni. Notazioni diverse per esprimere una relazione funzionale (mappe, tavole, coppie ordinate).
4.12 Funzioni inverse e funzioni composte.

4.31 Calcolo approssimato del gradiente e dell'area sotto una curva.
4.32 Grafici di funzioni particolari: lineare, quadratica, esponenziale ($y = ka^{bx}$, con a, b; k costanti).

D / SMP

4.33 Leggi di variazione tra grandezze fisiche e loro rappresentazione grafica.

D

4.5 Grafico di semplici funzioni del tipo:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{e}{x} + \frac{f}{x^2}$$

con almeno tre costanti uguali a zero.
4.6 Derivazione di x^n, n intero relativo.
4.7 Integrazione di x^n, con $n \neq -1$.
4.8 Applicazioni al calcolo di aree e volumi, e a problemi di cinematica.

SMP

4.21 Coordinate cartesiane nello spazio a tre dimensioni. Equazione della retta in due dimensioni e di piani in posizioni particolari (la cui equazione involve al più due variabili).
4.22 Coordinate polari.
4.34 Grafico di x^n, con $n = -2, -1, 1/2, 2, 3$.

---

5. GEOMETRIA

C / D / SMP

5.1 Figure geometriche nel piano e nello spazio; calcolo di aree e volumi.
5.2 Teorema di Pitagora e applicazioni.
5.3 Semplici luoghi geometrici.

C / SMP

5.4 Trasformazioni: traslazione, rotazione, riflessione, dilatazione. Similitudini; aree e volumi di figure simili. Rappresentazioni in scala. Simmetrie.

D / SMP	5.12 La geometria della sfera; distanze lungo meridiani e paralleli.
D	5.13 Costruzioni geometriche con riga e compasso. 5.5 Alcuni teoremi di geometria euclidea nel piano, su triangoli, parallelogrammi, cerchi (tangenti e secanti).
SMP	5.41 Operazioni definite nell'insieme delle trasformazioni; proprietà associativa, commutativa e distributiva. Elemento identico e inverso.Chiusura. 5.42 Simmetrie ottenute da riflessioni e rotazioni. Uso di poligoni regolari per riempire il piano. Poliedri.

6. TRIGONOMETRIA

C / SMP	6.1 Le funzioni seno, coseno e tangente per angoli $< 360°$; grafici relativi. Relazioni goniometriche. 6.2 Risoluzione dei triangoli; teorema di Pitagora; semplici estensioni allo spazio tridimensionale.

7. PROBABILITA' E STATISTICA

C / SMP	7.1 Insieme delle possibilità per un evento. Somma e prodotto di probabilità in casi semplici. 7.2 Rappresentazioni diverse di insiemi di dati; istogrammi. 7.3 Curve di frequenza e di frequenza cumulata. 7.4 Media (incluso il caso di dati raggruppati) e mediana di di un campione.
SMP	7.11 Tabulazione e rappresentazione grafica dell'insieme delle possibilità di un evento. Probabilità associate a sottoinsiemi. Probabilità di eventi composti, diagrammi ad albero. 7.21 Raccolta, descrizione, interpretazione e critica dei dati. 7.41 Moda; quartili; dispersione.

Volendo ricavare da questa analisi qualche conclusione, si deve notare innanzi tutto che, com'era prevedibile, le diversità più evidenti sussitono tra il Programma D da una parte e i programmi C e SMP dall'altra: il programma D esclude del tutto alcuni argomenti, quali gli insiemi, la geometria delle trasformazioni, le matrici, la trigonometria e i concetti di probabilità e statistica, ma ne approfondisce altri solo accennati o del tutto assenti negli altri due programmi, come i classici teoremi e problemi di geometria euclidea, i problemi algebrici di 2° grado, lo studio di funzioni razionali e elementi di analisi infinitesimale.

Meno marcate appaione invece le differenze tra il programma 'moderno' dell'Università di Londra e lo SMP: nelle prime due classi in cui tali programmi sono scomposti (Insiemi e Numeri) non ho trovato nessuna sostanziale differenza, mentre le prime diversità appaiono nella classe Algebra, in cui il programma C approfondisce maggiormente l'uso delle disequazioni e dei vettori. Il programma SMP d'altra parte sembra utilizzare più coerentemente i concetti e il linguaggio della teoria degli insiemi: ciò si nota sia nell'approccio al concetto di equazione, sia soprattutto nella geometria, in cui si mettono in risalto gli insiemi di trasformazioni e le operazioni in essi definibili.

Anche il concetto di probabilità infine sembra essere approfondito maggiormente dallo SMP attraverso la rappresentazione insiemistica. Non è possibile in questo contesto descrivere in dettaglio anche esempi di programmi per l'altro esame sostenibile al termine della scuola dell'obbligo, cioè l'esame per il Diploma di Istruzione Secondaria (CSE), nè i programmi per il GCE a livello Avanzato, conseguibile dopo altri due anni di studi secondari. Esprimo quindi solo alcune valutazioni molto generali (e ovviamente soggettive).

Gli esami per il CSE nella forma totalmente gestita dagli Uffici Regionali (Mode I, v. par. precedente) non differiscono sostanzialmente dai corrispondenti esami GCE O-level, sia come contenuti, sia come tipo di prove: in complesso tuttavia essi sono da molti ritenuti leggermente più facili: prova ne è che, come si è detto, essi vengono generalmente equiparati agli esami GCE O-level, per quanto riguarda l'ammissione a corsi di studio superiori, solo se vengono superati con punteggio pieno.

Valutare invece le difficoltà delle altre due modalità previste per questo tipo di esame è assai più difficile, e l'accettazione del criterio di equiparazione descritto sembra essere assai più contestata.

Passando agli esami per il Diploma Generale di Istruzione a livello Avanzato (GCE A-level) occorre rilevare anzitutto che per esso esistono, in quasi tutti gli otto Examining Boards, diverse caratterizzazioni, indicate generalmente con le dnominazioni: Matematica Pura, Matematica Applicata, Matematica Pura e Applicata (un misto delle precedenti), Matematica Pura con Statistica e Matematica Superiore. Tali programmi differiscono notevolmente per i contenuti, ma hanno la caratteristica di essere tutti molto specializzati. Si può valutare, in prima approssimazione, che la preparazione richiesta per superare questi esami è di poco inferiore a quella fornita da corsi universitari italiani del primo anno. Ciò stupisce se si pensa che il corso di studio relativo prevede circa 8 ore di insegnamento settimanali, per due anni.

Una comprensione migliore del livello di approfondimento e delle difficoltà dei diversi programmi si può avere analizzando direttamente le prove di esame, costituite esclusivamente da testi scritti (papers): alcuni esempi vengono quindi forniti nel paragrafo che segue.

5. Le Prove di Esame (esempi).

Ancora una volta occorre premettere alcune osservazioni generali: gli esami come si è visto rappresentano un momento fondamentale nel sistema educativo inglese, poichè forniscono uno dei pochi elementi unificanti su cui poter stabilire un confronto, sia all'interno del sistema, sia con la scuola di altri paesi. E' importante quindi riconoscere due principi fondamentali su cui si basa l'operato degli Uffici Esaminatori:

- mantenere anno per anno un livello più o meno costante nella definizione degli 'standard' per ciascuna disciplina;
- garantire, nei limiti del possibile, l'equità della prova, intesa sia come coerenza dei quesiti con il programma proposto sia come esigenza di una valutazione 'oggettiva' in cui cioè sia osservabile un'elevata correlazione tra numero e tipo di problemi risolti e preparazione effettiva dei candidati.

Si può immaginare che mentre il primo obiettivo non presenta difficoltà insuperabili (salvo la necessità di una definizione accurata di cosa si intenda per standard e salvo il rischio, in verità non marginale, della creazione di modelli fissi), il secondo pone diversi problemi la cui soluzione non può certo considerarsi acquisita.

Tuttavia si deve riconoscere che l'intero complicato apparato (qui non descritto) messo in atto per stabilire e successivamente correggere le prove di esame ha origine proprio dalle anzidette aspirazioni al 'mantenimento degli standards' e alla 'valutazione oggettiva'.

E' assai difficile giudicare la misura in cui questi risultati vengono effettivamente conseguiti attraverso le strutture descritte: il dibattito su tali problemi, assai vivo in questo paese, registra del resto prese di posizione in entrambi i sensi, e di ciò occorre prendere atto.

Non potendo riportare per intero i testi dei diversi esami, ne descrivo rapidamente la struttura e riporto alcuni quesiti, scelti fra prove assegnate negli ultimi anni, perchè si possa avere un'idea sia della tecnica con cui queste domande vengono costruite, sia del grado di approfondimento richiesto per alcuni argomenti elencati nei programmi precedentemente esaminati.

Esami per il GCE O-level dell'Examining Board dell'Univ. di Londra

(1) Programma C (v. par. precedente)

L'esame si compone di due testi (papers):

Paper 1 (ore 1 $\frac{1}{2}$). Si compone di 60 domande a scelta multipla, che occorre risolvere nel maggior numero possibile.

Esempi (tratti dalla prova della sessione di giugno 1977):

1. Se $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & p \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -23 & 10 \end{pmatrix}$, qual'è il valore di p?

A) -2   B) -1   C) 0
D) 1   E) 2

2. In un gioco si richiede ad un ragazzo di aggiungere 8 ad un numero incognito e quindi dividere il risultato per 4. Egli invece moltiplica il numero incognito per 4 e quindi aggiunge 8. Se la sua risposta è 24, qual'è la risposta corretta?

A) 3   B) 4   C) 12
D) 16   E) 24

3. Se $f: x \longrightarrow$ il più piccolo numero primo x e
$g: x \longrightarrow 2x$, allora fgf (6) è:

A) 7   B) 1   C) 13
D) 17   E) 19

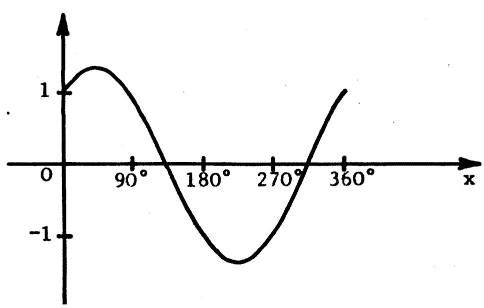
4. L'immagine del punto (-3,1) nella trasformazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2k \end{pmatrix}$ è un punto dell'asse x. Qual'è il valore di k?

A) -1   B) 0   C) 1
D) 3   E) Non può essere determinato con i dati forniti

5. La probabilità che Roberta sia scelto per la squadra della sua scuola è 7/10. Se non è prescelto, la probabilità di andare al cinema è 4/9. Qual'è la probabilità per Roberto di non essere scelto e non andare al cinema?

A) 2/15   B) 1/6   C) 14/45
D) 7/18   E) 77/90

6.



Di quale, fra le seguenti funzioni, potrebbe questo essere il grafico?

A) sin x B) cos x C) sin x - cos x

D) sin x + cos x E) cos x - sin x

Paper 2 (ore $2\frac{1}{2}$). Si compone di 12 domande, di ugual punteggio, di cui occorre sceglierne 7. Se si risponde a più di 7 domande, vengono considerate le 7 risposte migliori.

Esempi (tratti dalla prova della stessa sessione di esami del Paper 1)

1. Un certo insieme di interi positivi in successione è denominato

$$P = \{1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots\} \; .$$

Un'altra successione è denominata

$$Q = \{5,8,11,14,\ldots\ldots\ldots\} \; .$$

Le due successioni sono in relazione attraverso la matrice

$\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, tale che $(1 \;\; 2)\,\underline{M} = (5 \;\; 8)$ e $(2 \;\; 3)\,\underline{M} = (8 \;\; 11)$

e così via; cioè due elementi consecutivi di P sono trasformati da $\underline{M}$ nei due corrispondenti elementi di Q.

Sia ciò rappresentato dalla scrittura $P * \underline{M} = Q$.

(i) Calcolare $(3 \;\; 4)\,\underline{M}$ e $(4 \;\; 5)\,\underline{M}$.

(ii) Scrivere il quinto e sesto elemento di Q .

(iii) La successione R è definita similmente, cioè $Q * \underline{M} = R$. Scrivere i primi due elementi di R.

(iv) Trovare, in termini di $\underline{M}$, una matrice $\underline{N}$ tale che $P * \underline{N} = R$.

(v) Trovare, in termini di $\underline{M}$,una matrice $\underline{X}$ tale che $Q * \underline{X} = P$

2. Un treno dovrebbe partire da una certa stazione ogni giorno alle ore 10.00. Vengono registrati i numeri di minuti di ritardo nella partenza, in un periodo di 50 giorni, e i risultati sono come segue:

n° di minuti di ritardo	< 2	< 4	< 6	< 8	< 10	< 12
N° di giorni	20	35	43	46	49	50

(i) Stimare, attraverso un grafico di frequenze cumulate, o in altro modo, il tempo mediano di ritardo del treno. (Se disegni un grafico, usa una scala di 1 centimetro per 1 minuto sull'asse del tempo e di 2 centimetri per 10 unità sull'asse delle frequenze cumulate).

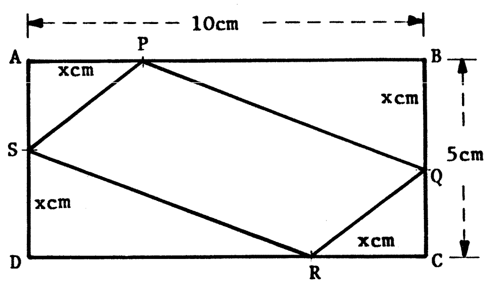
(ii) Stimare il tempo medio di ritardo.

(iii) Una persona che vuole prendere quel treno arriva, in due giorni distinti, alle ore 10.04 . Calcolare la probabilità che egli prenda il treno

(a) il primo giorno

(b) in entrambi i giorni.

3.



Nella figura, ABCD è un rettangolo con AB = 10 cm, BC = 5 cm. I punti P, Q, R, S sono tali che

AP = BQ = CR = DS = x cm.

Scrivi le espressioni per le aree dei triangoli APS e BPQ e mostra che l'area del quadrilatero PQRS è y cm^2, ove $y = 2x^2 - 15x + 50$.

Copia e completa la tavola seguente:

x	0	1	2	3	4	5
$2x^2$		2		18		50
$-15x$		-15		-45		-75
50		50		50		50
y		37		23		25

Usando scale di 2 cm per 1 unità di x e 2 cm per 10 unità di y, disegna il grafico di $x \rightarrow y$. Usando tale grafico, o in altro modo, trova il minimo valore possibile per y, e il corrispondente valore di x.

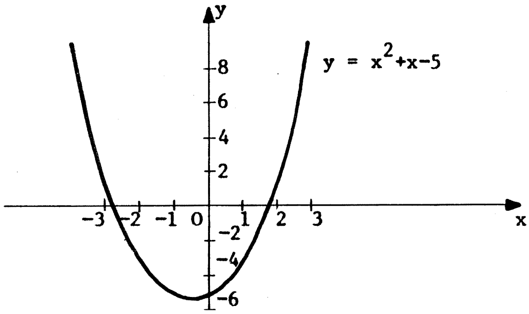
(2) Programma D

L'eame comprende due papers:

Paper 1 (ore $1\frac{1}{4}$) : si compone di 50 domande a scelta multipla, che occorre risolvere nel maggior numero possibile.

Esempi (tratti dalla prova della sessione del giugno 1977):

1.



Il gráfico rappresenta $y = x^2 + x - 5$ per x da -3 a $+3$.

Usando tale grafico, le suluzioni dell'equazione $x^2 + x - 5 = 0$ sono approssimativamente:

A) 2.2 e -3.2 B) 1.8 e 2.8

C) 1.8 e -2.8 D) - 5 e 1.8

E) -5 e - 2.8

2. Sotto certe condizioni la velocità di un corpo è data da

$v = at$. Se $a = 5\times10^{-2}$ e $t = 2\times10^{3}$, il valore di v è:

A) 10^{-1} B) 1 C) 10

D) 10^{2} E) 10^{3}

3. Il valore di $\int_0^1 6x^2\,dx$ è:

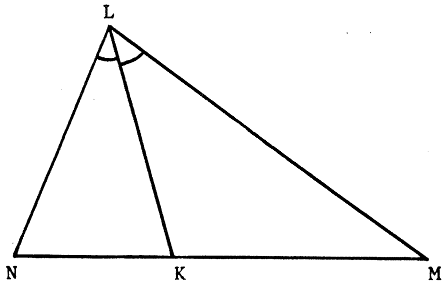
A) 2 B) 3 C) 8

D) 12 E) 27

4. Una forma semplificata della frazione $\dfrac{y^2 + 3xy}{3xy}$ è:

A) y B) y^2 C) $y^2 + 1$

D) $\dfrac{y + 3x}{3x}$ E) $\dfrac{y + x}{x}$



Il triangolo LMN ha LM = 9 cm, MN = 10 cm e NL = 6 cm. K è il punto di MN tale che LK biseca l'angolo interno in L.

La lunghezza di NK, in cm, è:

A) $3\frac{3}{4}$ B) 4 C) 5

D) 6 E) $6\frac{2}{3}$

6. Se $(x - 4)$ è un fattore di $x^2 - 2x + k$, allora il valore di k è:

A) 8 B) 4 C) -4

D) -8 E) Nessuno dei precedenti.

Paper 2 (ore $2\frac{1}{2}$): si compone di 12 domande, delle quali devono essere risolte le prime 2, più altre 6 a scelta. Ad ogni domanda è associato lo stesso punteggio. Si riportano le due domande obbligatorie (1. e 2.) e tre delle rimanenti.

Esempi (tratti dalla prova della stessa sessione del paper 1):

1. (i) In una vendita di saldo un articolo è ridotto da L. (sterline) 18.75 a L. 15. Calcolare la riduzione come percentuale del prezzo di vendita originale.

(ii) Calcolare, senza far uso delle tavole, il valore di

$$9^{1/2} \times 27^{-2/3} .$$

(iii) Calcolare il valore di $\int(3x^2 + 2x)\,dx$.

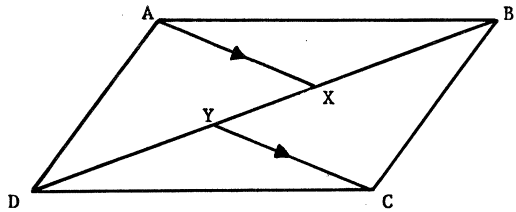
(iv) Una corda variabile di lunghezza 6 cm è disegnata in un cerchio assegnato con centro in O e raggio 5 cm. Mostrare che il luogo del punto mediano della corda è un cerchio e determinare il suo centro e raggio.

2. (i) Risolvere l'equazione $2x^2 - 3x - 4 = 0$, dando le soluzioni corrette fino alla seconda cifra decimale.

(ii) Calcolare, usando le tavole, il valore di

$$\sqrt{\frac{31.37 \times 7.143}{2.092}}$$

(iii)



Nella figura, ABCD è un parallelogramma e AX e CY sono paralleli. Provare che i triangoli ADX e CBY sono congruenti.

3. Una particella inizia a muoversi lungo una traiettoria rettilinea a partire da un punto fissato O. Dopo t secondi essa raggiunge un punto P, con OP = x metri. Se $x = T^3-2t^2+t$, trova le espressioni, in termini di t, della velocità e dell'accelerazione della particella.
Calcolare:
(a) i valori di t per i quali la velocità della particella è zero;
(b) la distanza tra le posizioni della particella corrispondenti a quei valori;
(c) la velocità della particella quando la sua accelerazione è zero.

4. Disegna un segmento XY lungo 8 cm e un altro YZ lungo 10 cm; in modo che l'angolo XYZ sia di 70°.
Mostrando chiaramente tutte le linee di costruzione, disegna i punti che sono equidistanti da Y e Z e distanti 3 cm da X. Denota con P il punto più vicino a YZ e disegna il cerchio che passa per P e tocca YZ in Y. Costruisci un punto Q su questo cerchio, tale che i triangoli QYP e XYP abbiano ugual area.

5. Copia e completa la tavola data dei valori della funzione

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{18}{x} - 10$$

in corrispondenza dei valori indicati. Nella tavola i valori sono corretti fino alla prima cifra decimale.

x	1	1.5	2	3	4	4.5	5
$\frac{x^2}{2}$	0.5	1.1		4.5		10.1	
$\frac{18}{x}$	18	12		6		4	
-10	-10	-10		-10		-10	
y	8.5	3.1		0.5		4.1	

Disegna il grafico della funzione per valori di x da 1 a 5, usando la scala di 2 cm per ogni unità in entrambi gli assi.

(a) Dal tuo grafico ricava il valore di x che fornisce il più piccolo valore di y, e questo minimo valore di y.

(b) Disegnando una retta appropriata, trova il valore positivo di x che soddisfa $\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x} - 10 = x$.

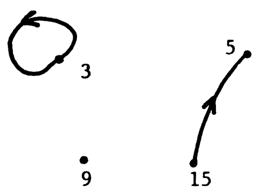
Esami per il GCE O-level dello School Mathematics Project

Si compone di due testi:

Paper 1 (ore $2\frac{1}{2}$): contiene una trentina di domande, a cui occorre rispondere nel maggior numero possibile.

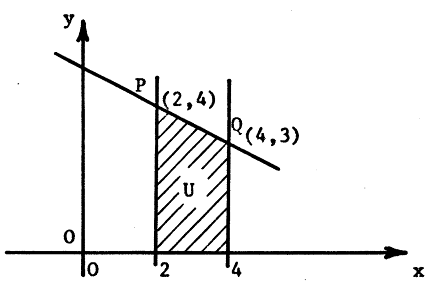
Esempi (tratti dalla prova di esame del giugno 1975):

1. Il seguente grafo incompleto serve ad illustrare la relazione "è un multiplo di" nell'insieme $\{3,5,9,15\}$. Completa il grafo inserendo tutte le frecce necessarie.



2. Un grosso specchio deve essere appeso ad una parete, con il bordo superiore ad x metri dal pavimento. Una ragazza alta 1.5 m, i cui occhi sono a 1.4 m dal pavimento, vuole vedersi riflessa nell'intera figura quando si pone (in piedi) ad 1 m di distanza dallo specchio.
   Qual'è il più piccolo valore possibile per x?

3. La regione tratteggiata U include tutti i suoi contorni. La figura è disegnata in scala. Il massimo valore di $(y - x)$ in U è 2.



Quale proposizione è vera e quale è falsa?

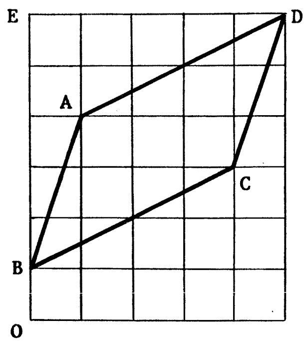
(a) L'equazione di PQ è $y = 5 - x$.

(b) Il minimo valore di $(y - x)$ in U è -4.

(c) Il massimo valore di $(x + y)$ in U è 7.

(d) Se l'insieme V è quello ottenuto da U escludendo tutti i contorni allora il massimo valore di $(x + y)$ in V è 6.

4.



Quale proposizione è vera e quale è falsa?

(a) L'area del triangolo AED è di 5 quadratini.

(b) Il perimetro di ABCD è $2(\sqrt{10} + \sqrt{5})$ unità lineari.

(c) L'area di ABCD è $2\sqrt{50}$ quadratini.

(d) Il perimetro del triangolo AED è $5 + 3\sqrt{5}$ unità.

5. $P\ (x - 3) = 2x - r$

Quale proposizione deve essere vera e quale può essere falsa?

(a) Se $r = 6$ e $x \neq 3$, allora $P = 2$.

(b) Se $2x = r$, allora $P = 0$.

(c) Se $P = 0$ e $x \neq 3$, allora $r = 3$.

(d) Se $P \neq 2$, allora $x = \frac{3P - r}{P - 2}$

<u>Paper 2</u> (ore $2\frac{1}{2}$): è diviso in due sezioni, la prima di 4 domande interamente da risolvere, la seconda di 10, fra cui sceglierne 4.

<u>Esempi</u> (tratti dalla stessa sessione d'esame del paper 1; i primi due appartengono alla prima sezione del paper).

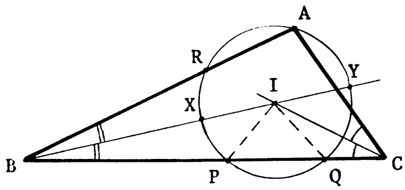
1. La bobina di un registratore ha il raggio di r cm e contiene n giri di nastro. Il nastro ha uno spessore di t cm e una lunghezza totale di d m. Queste quantità sono collegate dalle equazioni:

$$100 \quad d = \pi N \, (r + 3)$$
$$nt = r - 3$$

(i) Esprimi t in termini di n e r.

(ii) Trova i valori di n e t, corretti fino alla seconda cifra decimale, quando $d = 540$ e $r = 8.4$

2.



Nel triangolo ABC le bisettrici degli angoli in B e in C si incontrano nel punto I. Il cerchio avente centro in I e raggio IA incontra BC in P e Q, come mostrato.
L'angolo PIQ è di 48°.

(i) Calcola l'ampiezza degli angoli IPQ e IQP

(ii) Spiega perchè la riflessione di A rispetto a BI è Q, e quindi calcola la misura dell'angolo BAI.

(iii) Trova il punto in cui A si riflette rispetto a CI, e la misura dell'angolo CAI. Cosa si può dedurre sul segmento IA?

3. Una delegazione di un ragazzo e una ragazza deve essere scelta a caso da una classe di 18 ragazze e 10 ragazzi.

(i) Se ci sono, in tale classe, 3 Giovanna e 2 Davide, trova la probabilità che la delegazione includa:

(a) una Giovanna;

(b) nessun Davide;

(c) una Giovanna e un Davide.

(ii) Calcola la probabilità che la delegazione includa almeno uno dei cinque allievi di nome Giovanna o Davide.

(iii) Se ci fossero stati n Davide fra i 10 ragazzi (e sempre 3 Giovanna tra le 18 ragazze),

(a) esprimi la probabilità di cui in (ii) in termini di n, e semplifica questa espressione;

(b) trova il valore di n tale che la detta probabilità sia 1/2

4. Il costo C(in sterline) di un viaggio 'tutto compreso' di un'agenzia turistica varia con distanza d (in chilometri) da Londra. Alcuni esempi sono forniti nella tavola seguente:

Destinazione	Parigi	Amburgo	Lisbona	Atene
distanza d (km)	325	730	1520	2400
costo C (L)	35.20	38.80	43.60	47.60
$x = \sqrt{d}$	18			

(i) Copia e completa la tavola.

(ii) Disegna degli assi per riportare valori di x da 0 a 60, usando una scala di 1 cm per 5 unità, e valori di C da 20 a 50, con una scala di 1 cm per 2 unità. (Poni l'asse x in posizione orizzontale). Ripórta le quattro coppie ordinate (x,C) date dalla tavola e unisci i punti con una linea retta.

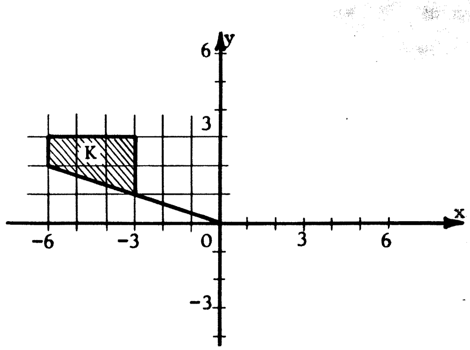
(iii) Se l'equazione di tale retta è $C = mx + k$, ottieni dal grafico una stima dei valori di k e m (corretta fino alla prima cifra decimale). Scrivi quindi una formula per C in termini di k, m e d.

(iv) Trova a quanto dista una destinazione per la quale il costo è di L. 40.00

5. (i) Descrivi le trasformazioni fornite dalle matrici

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad \underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)



Copia questo grafico su carta quadrettata e riporta su di esso L e M, ove $L = \underline{R}(K)$ e $M = \underline{S}(K)$. N è un'altra immagine di K, tale che la figura formata da K, L, M e N ha una sola linea di simmetria. Disegna N sul tuo diagramma.

(iii) Descrivi la trasformazione che fa passare da K a N. Se $\underline{T}$ è la matrice di que sta trasformazione, esprimi T in termini di R e S e calcola T.

Giuseppe Pirillo - "La scuola francese e l'insegnamento della matematica" (da Napoleone ad Haby in una ventina di minuti e una decina di lucidi).(1)

Le poche notizie di carattere storico che qui presentiamo hanno il compito di facilitare la comprensione dell'attuale sistema scolastico francese.

Il principio dei tre gradi successivi di istruzione (Primario, Secondario e Superiore) trova la sua origine nel decreto del 15 settembre 1793 ("Saranno stabiliti nella Repubblica tre gradi successivi di istruzione, il primo per le conoscenze indispensabili agli artigiani ed operai in genere; il secondo per le conoscenze ulteriori, necessarie a quelli che si dedicano alle altre professioni della società; ed il terzo per gli obiettivi di istruzione il cui studio non è alla portata di tutti").

Col decreto 17 marzo 1808 (Napoleone) vengono create le "Academies" (circoscrizioni territoriali per mezzo delle quali il potere centrale ha il completo controllo dell'organizzazione scolastica) e le Università che hanno il monopolio dell'insegnamento dal momento che ne controllano tutti i gradi (facoltà, licei e collèges).

Il citato decreto del 17 marzo 1808 dà dunque una struttura organizzativa al sistema scolastico. Viene però trascurato l'insegnamento primario al quale si provvede solo col decreto 28 giugno 1833 (Guizot) che prevede la creazione di scuole elementari su tutto il territorio nazionale.

La legge 10 aprile 1867 (Duruy) costituisce il primo provvedimento organico sull'istruzione femminile.

Una serie di profonde riforme si hanno sotto il ministero di Jules Ferry che si è protratto praticamente senza interruzione dal 4 febbraio 1879 al 20 novembre 1883. Sotto Ferry viene sancito il principio della gratuità della scuola primaria, l'obbligo scolastico viene esteso alla fascia d'età 6-13 anni e l'organizzazione del sistema scolastico si avvia a diventare quella attuale.

La legge 25 luglio 1919 provvede per la prima volta all'organizzazione della istruzione tecnica; quella del 9 agosto 1936 porta l'obbligo scolastico a 14 anni.

---

(1) Per maggiori dettagli si rinvia al 'Rapporto sull'insegnamento scientifico nel scuola secondaria superiore in Francia' di prossima pubblicazione a cura del COASSI.

L'idea ispiratrice dell'azione legislativa nel periodo attuale (Quinta Repubblica) sembra essere quella della creazione della scuola secondaria unica.

Diversi tentativi dei periodi precedenti (piano Zay del 1937; piano Longvin-Wallon del 1944-47 e progetto Billères del 1956) miranti allo stesso scopo non sono mai stati tradotti in legge.

Quanto disposto dalle leggi emanate nel campo dell'istruzione nel periodo della Quinta Repubblica è stato attuato in misura assai parziale e non si può certo dire che la scuola secondaria unica sia una realtà oggi in Francia.

Le principali leggi della Quinta Repubblica nel campo dell'istruzione sono le seguenti:

Berthoin	6 gennaio 1959
Fouchet	3 agosto 1963
Haby	11 luglio 1975

Vediamo rapidamente il loro contenuto:

La riforma Berthoin (1959) porta a 16 anni la scolarità obbiligatoria (tale misura è attuata solo dopo il 1967) e crea una specie di scuola media.

La riforma Fouchet (1963) crea i C.E.S. (Collèges d'einsegnement secondaire) ma in realtà i C.E.S. che dovrebbero essere l'unica istituzione scolastica per la fascia d'età 11-15 anni si affiancano ai già esistenti C.E.G. (Collèges d'enseignement generale) e alle classi del primo ciclo del liceo.

La riforma Haby (1975) crea i "Collèges" in sostituzione dei C.E.S., dei C.E.G. e delle classi del primo ciclo del liceo e prevede un liceo unico con insegnamenti suddivisi in area comune e area opzionale.

Per la riforma Haby era stata prevista un'applicazione graduale. In realtà la riforma è entrata in vigore nel 77/78 per la Sixième e nel 78/79 per la "Cinquième.Sono previste varie deroghe alla sua applicazione in Quatrième l'anno prossimo.

La seguente tabella permette di comprendere meglio le strutture del sistema scolastico francese (gradi primario e secondario). A sinistra di ogni classe è segnata l'età che l'alunno , che percorre normalmente il corso di studi, ha all'inizio dell'anno scolastico.

Età	Classi	
6	Cycle preparatoire	scuola elementare
7	" elementaire I	
8	" " II	
9	" moyen I	
10	" " II	
11	Sixième	collège
12	Cinquième	
13	Quatrième	
14	Troisième	
15	Seconde	lycée
16	Première	
17	Terminale	

I corsi di studi che uno studente può seguire dopo la Troisième sono molto diversi tra loro e si concludono generalmente con l'acquisizione di uno dei seguenti titoli:

- Baccalauréat
- B.Tn. (Baccalauréat de Technicien)
- B.T. (Brevet de Technicien)

Il Baccalauréat prepara a proseguire gli studi a livello universitario

Il B. Tn. fornisce una qualifica professionale e permette l'accesso a studi superiori.

Il B.T. prepara ad una professione ben precisa e solo sotto certe condizioni permette l'accesso a studi tecnici di livello universitario.

Francia

I principali tipi di baccalauréat sono:

A	Filosofia- lettere
B	Scienze economiche e sociali
C	matematica e fisica
D	matematica e scienze della natura.

Per ogni classe dalla Sixiéme alla Terminale abbiamo preparato una scheda contenente indicazioni sul numero di ore di insegnamento di matematica e sui programmi (per i programmi veri e propri si rinvia agli allegati). Si precisa che per le classi successive alla Troisième sono state considerate quelle della sezione C (corrispondente al nostro liceo scientifico) e quelle della sezione A (corrispondente al nostro liceo classico). Solo per le prime abbiamo dato un cenno di programma (h/s sta per "ore per settimana").

Sixiéme

3 h/s di matematica (24 h/s in totale)

Cenno sul programma di matematica:

- Il linguaggio degli insiemi
- Numeri decimali
- Numeri decimali relativi (prime nozioni)
- Geometria: prime nozioni (retta, piano, angolo....)

Cinquiéme

3 h/s di matematica (24 h/s in totale)

Cenno sul programma di matematica:

- Concetto di relazione
- Aritmetica : divisori di un intero naturale, numeri primi
- Numeri relativi
- Geometria solida: calcolo del volume del cubo, cilindro ....

Quatriéme

4 h/s di matematica (25-26 h/s in totale)

Cenni sul programma di matematica:

- Numeri decimali relativi ed approcci ai numeri reali
- Geometria della retta (ascissa.....)
- Geometria piana (Teorema di Talete, Pitagora ......)

Troisiéme

4 h/s di matematica (25-26 h/s in totale)

Cenni sul programma di matematica:

- Numeri reali
- Calcolo algebrico, funzioni numeriche
- Piano euclideo (espressioni della distanza tra due punti)
- Geometria piana euclidea (isometria ....).

Seconde

A 3 h/s di matematica (23 h/s in totale + event. altre (5 o 9) h/s)

C 5 h/s di matematica (26 h/s in totale)

Cenno sul programma di matematica della sezione C.

- Introduzione alle nozioni di spazio vettoriale su R.
- Applicazioni lineari.
- Strutture di campo di R.
- Funzioni numeriche di una variabile reale e loro rappresentazione grafica.
- Polinomi di secondo grado e coefficienti in R.

Première

A 2 h/s di matematica (23 h/s in totale + event. altre (4 o 5 o 6) h/s)

C 6 h/s di matematica (27 h/s in totale)

Cenno sul programma di matematica della sezione C

- Nozioni generali (applicazioni iniettive, suriettive)
- Funzioni numeriche di una variabile reale (continuità .....)
- Equazioni e disequazioni.
- Geometria vettoriale e geometria affine
- Prodotto scalare e funzioni circolari.
- Geometria metrica (nel piano e nello spazio).
- Prime nozioni di statistica e probabilità.

Terminale

A 2 h/s di matematica (22 h/s in totale + event. altre (5 o 6 o 8) h/s)

C 9 h/s di matematica (26 h/s in totale)

N.B. Più di un terzo delle ore di insegnamento sono dedicate alla matematica.

Cenno sul programma di matematica della sezione C.

- Aritmetica (principio d'induzione)
- Numeri reali, calcolo numerico
- Numeri complessi.
- Limiti
- Continuità.
- Derivabilità.
- Studio di una funzione.
- Calcolo integrale.
- Elementi di geometria affine ed euclidea.
- Probabilità (legge debole dei grandi numeri).

Programma di matematica - Sixième - (Ordinanza del 17 marzo 1977)

Il linguaggio degli insiemi e i simboli $\varepsilon, \subset, \cap, \cup, \phi$, saranno utilizzati nello studio delle diverse parti del programma e non devono essere oggetto di un apprendimento specifico.

1. NUMERI DECIMALI

- Controllo dell'acquisizione del senso delle operazioni sui numeri decimali: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione (esatta o approssimata); Tecniche d'esecuzione di queste operazioni, verifiche.
- Uso dei simboli $<, \leqslant, >, \geqslant$.
- Ordine di grandezza di un risultato, calcolo mentale, esercizi semplici su addizioni e moltiplicazioni successive; uso delle parentesi.
- Successioni finite proporzionali (due successioni sono proporzionali - se si passa dall'una all'altra per moltiplicazione o per divisione, o per una successione di tali operazioni); calcolo di percentuali, esercizi di cambiamento d'unità.

2. NUMERI DECIMALI RELATIVI

- Esempi per introdurre i numeri relativi; somma di due o più numeri; differenza di due numeri. Esercizi relativi alle rappresentazioni di un punto su una retta orientata, avente origine e regolarmente graduata.

3. OSSERVAZIONE D'OGGETTI GEOMETRICI E FISICI

- Prime osservazioni su solidi, superfici, linee. Segmenti di retta, parti di superficie piana.
- Strumenti di disegno nel piano: doppio decimetro, squadra, parallelogramma articolato, compasso, rapportatore, carta da ricalco.
- Vocabolario della geometria piana: retta, piano, semipiano, semiretta; cerchio (lunghezza), arco di cerchio, settore angolare. Unità usuali di lunghezza, d'area, d'angolo. Rette parallele, perpendicolari (o ortogonali); tangente ad un cerchio in uno dei suoi punti.
- Osservazione e disegno di figure usuali, per esempio: triangolo, trapezio, parallelogramma, rettangolo , rombo, quadrato.
- Quadrettatura, localizzazione di un punto in un piano quadrettato.
- Area del rettangolo, del triangolo, del trapezio, del disco, del settore circolare.

Programma di matematica - Cinquième (Ordinanza del 17 marzo 1977).

1. RELAZIONI.

Ci si limiterà a studiare:
- Applicazioni da un insieme in un insieme; biiezione.
- Esempi di partizione di un insieme e di relazioni d'equivalenza.

2. ARITMETICA

- Insieme dei multipli di un intero naturale, divisione euclidea di un intero naturale per un intero naturale.
- Divisori d'un intero naturale, numeri primi.
- Pratica della decomposizione d'un intero naturale in prodotto di numeri primi ed esercizi sui multipli comuni e sui divisori comuni di due o più interi naturali (su esempi).

3. NUMERI RELATIVI

1. Insieme Z degli interi relativi: definizione, addizione, ordine, valore assoluto, moltiplicazione (le proprietà delle operazioni e dell'ordine saranno presentate progressivamente e senza dimostrazione).
2. Numeri decimali relativi; pratica operatoria:

- Somma, differenza, ordine, valore assoluto.
- Prodotto di un numero relativo per un intero naturale: prodotto per un intero naturale d'una somma, d'una differenza.
- Prodotto di due numeri relativi; potenze intere d'esponente positivo (e nullo).
- Prodotto d'una somma per un numero relativo, raccoglimento in fattori.

4. OSSERVAZIONI D'OGGETTI GEOMETRICI E FISICI

1. Revisione del vocabolario relativo alle figure piane.
2. Esercizi di disegno nel piano; disegni usuali fatti con gli strumenti. Riproduzione di un disegno eseguito su fondo quadrettato; ingrandimento e riduzione di un disegno.
3. Osservazioni di oggetti dello spazio fisico. Piani orizzontali, rette verticali, rette orizzontali, piani verticali. Rette parallele dello spazio, piani paralleli, rette e piani perpendicolari.

- Osservazioni d'oggetti come cubi, prismi retti, cilindri retti, cilindri di rotazione, piramidi, coni di rotazione.
- Calcolo dei volumi.
- Osservazioni di una sfera, piani tangenti in un punto; area della sfera; volume della sfera.
- Osservazioni di superfici coniche e cilindriche, piano tangente in un punto.

4. (In relazione con la fisica). Massa, massa specifica. Durata, unità di tempo e di velocità. Capacità.

Programma di matematica - Quatrième (ordinanza del 22 luglio 1971)

Si ricorda che i professori hanno completa libertà di scegliere l'ordine nel quale le diverse parti del programma saranno studiate.

L'importanza di ciascuna di esse ed il tempo da dedicarvi non sono proporzionali alla lunghezza della loro stesura: gli argomenti che non figuravano nei programmi precedenti o che non vi figuravano sotto la stessa forma sono stati oggetto, in generale, di una redazione più dettagliata.

Alla fine dell'anno scolastico, la geometria, nata dall'esperienza, dovrà apparire agli allievi come una vera e propria teoria matematica; vale a dire che alcuni fatti sono statti ammessi (assiomi), altri ne sono stati dedotti (teoremi). Ma è assolutamente indispensabile che numerosi lavori manuali, esercizi pratici utilizzanti gli strumenti del disegno abbiano preceduto sia l'enunciazione degli assiomi sia ogni ragionamento. Lo scopo dell'insegnamento della matematica in questa classe è far comprendere agli allievi ciò che sono le dimostrazioni e di insegnar loro a redigerle; le premesse devono dunque essere precisate con cura. Si potranno adottare come assiomi quelli che sono indicati nei commentari; ma altre scelte rimangono legittime.

1. RELAZIONI

- Revisione delle nozioni presentate nelle classi precedenti e complementi: prodotto cartesiano, relazione, applicazione, composizione di applicazioni, biiezione di un insieme su un insieme e biiezione reciproca.
- Nozione di gruppo: definizione (la si desumerà dagli esempi del programma).

2. NUMERI DECIMALI RELATIVI E APPROCCIO AI REALI.

1. Gruppo delle potenze del dieci.
- Numeri decimali relativi scritti $a.\ 10^p$ con $a \in Z$ e $p \in Z$ e sotto forma di numeri con la virgola: addizione, moltiplicazione, ordine, valore assoluto. Riassunto delle proprietà fondamentali dell'insieme così strutturato dei decimali relativi.
2. Calcolo approssimato.
- a) Limitazioni di un numero decimale per mezzo di intervalli del tipo:
$[a.\ 10^p, (a+1)\ 10^p[$, $]a.10^p, (a+1)\ 10^p]$,

$[a.\ 10^p, (a+1)\ 10^p]$ con $a \in Z$ e $p \in Z$. Su esempi: limitazioni di una somma, d'un prodotto.
- b) Esercizi di determinazione, per un decimale strettamente positivo d dato e per un intero relativo n dato, del numero decimale $x.10^n$ con $n \in N$, tale che siano verificate le disuguaglianze $0 \leqslant d.x.10^n \leqslant 1 < d(x+1).\ 10^n$.

Francia

- c) Esercizi di determinazione, per un decimale strettamente positivo d dato e per un intero relativo n dato, del numero decimale $\gamma \cdot 10^n$ con $\gamma \in N$ tale che siano verificate le disuguaglianze $[\gamma \cdot 10^n]^2 \leq d < [(\gamma + 1) \cdot 10^n]^2$.
- d) Successioni decimali illimitate, numeri reali, limitazioni d'un numero reale.

3. Enumerazione delle principali proprietà che strutturano l'insieme R dei reali: addizione, $(R, +)$ è un gruppo commutativo; moltiplicazione, associatività, distributività rispetto all'addizione, ordine e valore assoluto.

- Si ammetterà che per ogni numero reale a diverso da 0 c'è un numero reale a^{-1} ed uno solo tale che $a.a^{-1} = 1$. Per ogni coppia di numeri reali (a,b) con $a \neq 0$ esiste un unico numero reale x, detto quoziente di b per a e denotato con $b\,a^{-1}$ o $\frac{b}{a}$ tale che $ax=b$.
- Esercizi semplici di calcolo di tali quozienti.
- Su esempi numerici equazioni e disequazioni di primo grado ad una incognita.
- Uso degli esponenti interi: gruppo delle potenze di un numero reale non nullo. Calcolo approssimato sui numeri reali.

4. Esempi di funzioni polinomiali (applicazioni di R in R)

- Grado
- Esercizi di calcolo sui polinomi
- Prodotti $(x + a)^2$, $(x - a)^2$, $(x + a)(x - a)$. Esercizi di fattorizzazione.

3. <u>GEOMETRIA DELLA RETTA</u>

1. Retta. Distanza di due punti su una retta, sistema di riferimento su una retta. Ascissa d'un punto M in un sistema di riferimento, notazione $\overline{M\,M'}$

- Cambiamento del sistema di riferimento su una retta.
- Espressione della distanza di due punti in funzione delle loro ascisse in un sistema di riferimento.
- Cambiamento d'unità.

2. Ordine su una retta. Retta orientata (o asse). Semiretta. Segmento. Punto di mezzo di due punti. Esercizi sul baricentro di due punti.

4. <u>GEOMETRIA PIANA</u>

1. Rette del piano. Determinazione d'una retta (passante) per due punti. Rette parallele. Il parallelismo è una relazione d'equivalenza; definizione d'una direzione di rette come classe d'equivalenza.

- Proiezione, di direzione data, del piano su una retta, d'una retta su una retta.
- Enunciato di Talete. Rapporto di proiezione, per una direzione data, d'un asse su un asse.

2. Triangolo. Applicazione dell'enunciato di Talete al triangolo.

- Proiezione su una retta del punto di mezzo, del baricentro. Costruzione grafica del baricentro di due punti dati, con coefficienti assegnati.

- Simmetria rispetto ad un punto (simmetria centrale): immagine di una retta.
- Parallelogramma grafico o appiattito (definito per mezzo dell'esistenza di un centro di simmetria).
- Parallelismo di rette contenenti i lati opposti di un parallelogramma grafico reciproca. Proiezione di un parallelogramma; reciproca.

3. Equipollenza di bipunti (segmenti orientati). E' una relazione di equivalenza. Vettori e traslazioni, addizioni di vettori e composizione di traslazioni.

- Direzione di un vettore non nullo.
- Moltiplicazione di un vettore per un numero reale. Proprietà.
- Dati due vettori di direzioni distinte, ogni vettore ne è combinazione lineare in uno ed un solo modo. Riferimenti del piano. Coordinate cartesiane relative ad un riferimento.
- Esercizi di calcolo vettoriale; mediane di un triangolo.

Programma di matematica - Troisième (Ordinanza del 22 luglio 1971)

Si ricorda che i professori hanno completa libertà di scegliere l'ordine nel quale le diverse parti del programma saranno studiate.

L'importanza di ciascuna di esse ed il tempo da dedicarvi non sono proporzionali alla lunghezza della loro stesura: gli argomenti che non figuravano nei programmi precedenti o che non vi figuravano sotto la stessa forma sono stati oggetto, in generale, di una redazione più dettagliata.

Gli allievi hanno già appreso, in quatrième, che cos'è una dimostrazione. Questo sforzo sarà proseguito, a proposito di questioni di algebra e di geometria proprie di questa classe, nello stesso spirito che in quatrième.

Si potranno adottare come assiomi nella geometria quelli che sono indicati nei commentari; ma altre scelte sono legittime.

1. NUMERI REALI, CALCOLO ALGEBRICO, FUNZIONI NUMERICHE.

1. Richiamo delle proprietà dell'addizione, della moltiplicazione e dell'ordine che definiscono R come campo totalmente ordinato.

- Somma, prodotto, quoziente di numeri reali espressi sotto le forme $\frac{b}{a}$ dove a e b sono numeri reali e $a \neq 0$.
- Un numero reale r è detto razionale se esistono due interi $a \neq 0$ e b tali che $a.r = b$. Campo dei numeri razionali. Esercizi di calcolo in questo campo.

2. Si ammetterà che l'applicazione $x \to x^2$ di R in R^+ è suriettiva. Dato un numero reale positivo o nullo a, il simbolo $\sqrt{a}$ o $a^{\frac{1}{2}}$ denota il numero reale positivo o nullo b, detto radice quadrata di a tale che $b^2 = a$.

- Utilizzazione delle tavole per il calcolo di valori approssimati di $a^{\frac{1}{2}}$.
- Radice quadrata d'un prodotto di numeri reali, dell'inverso d'un numero reale strettamente positivo.

3. Esempi di funzioni polinomiali. Esercizi di calcolo su funzioni razionali.
- Funzioni lineari e funzioni affini. Esempi di funzioni " a scala" e di funzioni affini per intervalli; rappresentazione grafica.
4. Formulazione sottoforma di equazioni di problemi vari; matematici o non.
- Esempi conducenti ad una o due equazioni o disequazioni di primo grado a una o due incognite, a coefficienti numerici. Rappresentazione grafica delle soluzioni d'una equazione o d'una disequazione di primo grado a due incognite.

2. PIANO EUCLIDEO

1. Introduzione della nozione d'ortogonalità di rette, di direzioni di rette. Proiezione ortogonale su una retta. Rapporto di proiezione ortogonale d'un asse su una asse. Simmetria di questo rapporto.
2. Distanza $d(M,N)$ di due punti del piano. Norma di un vettore. Disuguaglianza triangolare. Dati due punti distanti M ed N, studio dell'insieme dei punti Q tali che:

$$d(M,N) = d(M,Q) + d(Q,N)$$

- Per ogni triangolo (A,B,C) la condizione $d(A,C)^2 = d(A,B)^2 + d(B,C)^2$ equivale all'ortogonalità delle rette AB e BC (Pitagora).
- Riferimento ortogonale. Espressione delle distanze di due punti.
- Struttura del piano euclideo su R^2 (si potra ammetterla parzialmente o totalmente).

3. GEOMETRIA PIANA EUCLIDEA

1. Insieme dei punti equidistanti di due punti distinti dati (asse).
- Distanza di un punto da una retta.
2. Cerchio e disco. Intersezione d'un cerchio e d'una retta, d'un disco e d'una retta; tangente ad un cerchio. Per tre punti non allineati passa un cerchio ed uno solo.
3. Isometrie del piano euclideo: sono per definizione, le biiezioni del piano euclideo che conservano le distanze. Esempi: traslazioni, simmetrie centrali, simmetrie ortogonali.
- Immagine d'una retta per una simmetria. Ogni isometria conserva l'ortogonalità ed il parallelismo delle rette.
- Gruppo delle isometrie. Esempi semplici di composizione di isometrie. Determinazione d'una isometria per mezzo dell'immagine di un riferimento ortonormale dato, per mezzo dell'immagine d'un triangolo dato.
- Ogni isometria conserva il rapporto di proiezione ortogonale dei due assi; reciproca. Angolo geometrico, definito come classe d'equivalenza di coppie isometriche di semirette di origine comune.

4. Simmetria d'un cerchio. Archi isometrici di cerchio.
- Reperimento di un punto M d'un semicerchio di diametro AB per mezzo delle misure dell'arco AM (si ammetterà l'esistenza e l'unicità della misura degli archi di cerchio, essendo fissata la misura del semicerchio). Impiego di questa misura per definire lo scarto angolare di due direzioni orientate o di due semirette.
- Uso delle tavole trigonometriche in gradi ed in radianti; coseno, seno, tangente d'uno scarto angolare.
5. Isometrie che lasciano globalmente invariante l'unione di due semirette della stessa origine (bisettrice), la unione di due rette.
- Esercizi sul triangolo isoscele, il rombo, il rettangolo, il quadrato.

Programma di matematica - Seconde C (Ordinanza del 30 maggio 1973)

Il programma seguente fissa alcuni obiettivi, lasciando la libertà al professore di scegliere la via da seguire e l'ordine di esposizione.

Gli esempi citati sono dati a titolo indicativo: non sono nè obbligatori nè esaustivi. Questo programma dà numerose occasioni di rivedere le nozioni relative alle relazioni, applicazioni, strutture; nessuna revisione sistematica deve esser fatta a loro riguardo.

Cogliendo l'occasione di diversi enunciati che saranno incontrati, gli allievi avranno attirata la loro attenzione sul ruolo giocato in matematica dai principali "connettivi" (e, o, non, se ... allora e loro sinonimi, equivale e suoi sinonimi) e "quantificatori" (per ogni, esiste). Essi noteranno le loro regole di utilizzazione, sia per formulare gli enunciati sia per sviluppare i ragionamenti.

1. ALGEBRA LINEARE E SUE APPLICAZIONI

N.B. In tutta questa parte ci si soffermerà a mostrare l'utilità delle figure, sia che queste rappresentino lo sforzo sensibile di cui si cerca di costruire un modello matematico, sia che esse diano un'immagine suggestiva di uno studio teorico; si indicheranno particolarmente le convenzioni relative alla rappresentazione dei vettori.
1. Introduzione alla nozione di spazio vettoriale su R.
- Esempi di insiemi dove sono definite delle combinazioni lineari e di sottoinsiemi stabili per combinazioni lineari. Insiemi di funzioni numeriche (in particolare, funzioni numeriche di una variabile reale di cui si farà lo studio e di cui si darà la rappresentazione grafica, cf., 2.2), R^n per qualche valore numerico di n (ivi compreso n = 1,2 o 3) insieme dei "vettori del piano" (cf programma di geometria di quatrième e 1.4). Esempi di combinazione lineare di vettori in situazioni che preparino alla definizione di base.
2. Formalizzazione dei risultati dello studio precedente.

- Definizione di spazi vettoriali su R, di loro sottospazi vettoriali, di dipendenza lineare d'una famiglia di vettori. Basi e dimensione, coordinate di un vettore in una base: definizione ed esempi; lo spazio dei vettori del piano ha una infinità di basi che hanno tutte due elementi. (L'esistenza generale e la non-unicità di basi, la nozione di dimensione saranno ammesse: nessuna dimostrazione generale sarà fatta a questo proposito).
- L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale:

3. Applicazioni lineari.

- Definizione, esempi (omotetie, proiezioni.....). Isomorfismi di uno spazio vettoriale su un altro: una base a p elementi d'uno spazio vettoriale E determina un isomorfismo di E su R^p.
- Immagine e nucleo di un'applicazione lineare (su esempi).
- Equazioni lineari: sistemi di due equazioni lineari a due incognite.

4. Geometria piana.

- Vettori e traslazioni del piano studiati in Quatrième.
- Rappresentazione vettoriale delle rette del piano.
- Esempi di applicazioni affini del piano su se stesso: traslazioni, omotetie,simmetrie, proiezioni.....
- Riferimenti cartesiani. Interpretazione geometrica d'una equazione lineare, d'un sistema di due equazioni lineari a due incognite.
- Rapporto di proiezioni ortogonali (richiami dalla classe Troisième) nel piano euclideo: prodotto scalare, è una forma bilineare simmetrica definita positiva sullo spazio vettoriale dei "vettori del piano". Applicazione a problemi metrici, per esempio, trasformazione dell'espresisone $MA^2 + KMB^2$.

5. Geometria dello spazio.

- Studio descrittivo dello spazio fisico di cui si potrà costruire un primo modello estendendo i metodi vettoriali utilizzati nel piano, in tal modo i vettori o traslazioni descrivono uno spazio vettoriale di dimensione 3 su R.
- Posizioni relative di rette e piani nello spazio. (Si potrà sia far "constatare" i risultati nel corso dello studio descrittivo dello spazio, sia dedurre alcuni di essi dalla rappresentazione vettoriale di rette e piani che si sarà introdotta).
- Rappresentazione di rette e piani in prospettiva di Cavalieri ed in geometria descrittiva. (Si noterà che, benchè gli strumenti di disegno utilizzati siano la riga a T, la squadra, il regolo graduato solo proprietà affini intervengono nei disegni considerati).

2. INTRODUZIONE ALL'ANALISI

1. Struttura di campo di R.

(Ogni studio generale della struttura dei campi è fuori dal programma).

a) Richiami dalla Quatrième: applicazione valore assoluto. Distanza legata al valore assoluto. Intervallo. Approssimazioni di elementi di R per mezzo di numeri decimali. Ordine di grandezza di un risultato ; cifre significative.

b) Calcoli approssimati su applicazioni concrete (fisiche, tecnologiche etc.....)

- Si mostrerà che la disuguaglianza:

$$|x| \leqslant \frac{1}{2} \text{ implica } \left| \frac{1}{1+x} - (1-x) \right| < 2x^2.$$

- Inoltre si ammetterà che per a appartenente a $\left] -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ la disuguaglianza $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ implica $\left|(1+x)^2 - (1+ax)\right| \leqslant 8x^2$.

- Uso di tavole numeriche, uso d'una macchina calcolatrice da ufficio.

2. Funzioni numeriche d'una variabile reale e loro rappresentazione grafica.

- Funzioni monotone in un intervallo. Funzioni affini per intervalli.

- Funzioni $x \longrightarrow \frac{a}{x}$.

- Esercizi di calcolo sulle funzioni polinomiali e funzioni razionali.

3. Per a strettamente positivo dato, omomorfismo $n \longrightarrow a^n$ da $(Z, +)$ in (R^+, x)

- Esempi di utilizzazione fisica, tecnologica o economica ....etc.

- Uso del regolo calcolatore.

4. Polinomi di secondo grado a coefficienti in R.

- Decomposizione, somma e prodotti delle sue eventuali radici.

- N.B.: I problemi proposti agli allievi, che potranno aver origine da discipline diverse dalla matematica e potranno condurre a equazioni e disequazioni di primo e secondo grado, dovranno in generale comportare questioni di calcolo numerico.

Inoltre facendo riferimento a fenomeni conosciuti dagli allievi,i problemi potranno essere presentati in modo da richiedere un semplice lavoro di matematizzazione per tradurre i loro enunciati in linguaggio matematico.

Programma di matematica - Première C - (Ordinanza del 19 marzo 1970)

1. NOZIONI GENERALI

1. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive, composizone di applicazioni.

2. In vista della statistica e del calcolo delle probabilità: insieme delle parti di un insieme (cf. capitolo 7).

3. Applicazione da un insieme finito verso un insieme finito; caso delle applicazioni iniettive e biiettive, loro enumerazione, insiemi con p elementi di un insieme finito, loro enumerazione. Formula del binomio.

2. FUNZIONI NUMERICHE D'UNA VARIABILE REALE

1. Continuità "in un punto" d'una funzione. Limite d'una funzione (Ci si limiterà alle definizioni indispensabili, corredate da esempi e controesempi; all'enunciato, senza dimostrazione, dei teoremi relativi ai limiti di somma, prodotto e quoziente di funzioni).
2. Funzione lineare tangente in un punto ad una funzione data; derivata in questo punto.
- Funzione derivata; calcolo della derivata d'una somma, d'un prodotto, d'un quoziente di funzioni derivabili.
- Interpretazione geometrica della derivata (riferimento cartesiano); equazione della tangente.
- Interpretazione cinematica della derivata; movimento rettilineo del punto; definizione di velocità e di accelerazione.
3. Applicazioni.
- Basandosi sul teorema enunciato senza dimostrazione che permette di dedurre, dal segno delle derivate d'una funzione in un intervallo il senso di variazione di questa funzione su questo intervallo:
a) studio, unicamente su esempi, di funzioni polinomiali e di funzioni razionali. Rappresentazione grafica. Si potrà far constatare agli allievi, a proposito di esempi numerici, l'esistenza di asintoti obliqui ; nessun metodò di ricerca è in programma.
b) Studio di movimenti rettilinei: movimento rettilineo uniforme, uniformemente vario, moto armonico.

3. EQUAZIONI È DISEQUAZIONI

1. Studio di equazioni e disequazioni di primo e di secondo grado; studio di sistemi d'equazioni a più incognite. Studio di problemi la cui soluzione conduce a equazioni o disequazioni di primo e di secondo grado (su esempi).
2. Uso di tavole numeriche; del regolo calcolatore e di macchine calcolatrici.

4. GEOMETRIA VETTORIALE E GEOMETRIA AFFINE

1. Spazi vettoriali su R; definizione ed esempi (revisione)
- Sottospazi vettoriali, Vettori linearmente dipendenti, indipendenti. Base.
2. Coordinate d'un vettore in una base data; coordinate d'una somma di vettori, di prodotto di un vettore per un numero reale.
- Condizione di dipendenza di due vettori.

3. Se uno spazio vettoriale ammette una base di n elementi, ogni altra base possiede n elementi; dimensione di uno spazio vettoriale, piano vettoriale. Dimensione d'un sottospazio vettoriale; intersezione di due sottospazi vettoriali. (Ci si limiterà a $n= 1$, 2 o 3).
4. Matrice, in una base data, d'una applicazione lineare da un piano vettoriale in se stesso. Composizione di queste applicazioni lineari e moltiplicazione di matrici 2x2; determinante d'una matrice 2x2.
5. Spazio affine di dimensione 2 o 3. Traslazioni.
- Rette e piani affini, intersezioni, parallelismo.
- Riferimento cartesiano, cambiamento d'origine; rappresentazione parametrica di rette e piani. Equazione cartesiana del piano.

5. PRODOTTO SCALARE E FUNZIONI CIRCOLARI

1. Prodotto scalare (spazio vettoriale su R di dimensione 2 o 3).
- Norma di un vettore: disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; disuguaglianza triangolare.
- Ortogonalità di due rette vettoriali, d'una retta e di un piano vettoriale.
- Basi ortonormali: esistenza. Espressione analitica del prodotto scalare di due vettori definiti dalle loro coordinate in una tale base.
2. Applicazioni lineari del piano vettoriale euclideo in se stesso che conservano il prodotto scalare. Le loro matrici in una base ortonormale sono del tipo:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad o \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{con } a^2 + b^2 = 1$$

- Le matrici del tipo (1) formano un gruppo commutativo; a e b dipendono soltanto dall'applicazione e non dalla scelta della base: gruppo delle rotazioni vettoriali. Dati due vettori unitari $\vec{x}$ ed $\vec{y}$ c'è un'unica rotazione vettoriale tale che $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.
3. Basi ortonormali che danno lo stesso valore al coefficiente b della matrice d'una rotazione vettoriale φ. Orientazione del piano vettoriale euclideo. Essendo il piano vettoriale euclideo orientato, Coseno e Seno d'una rotazione vettoriale; notazioni Cos φ e Sen φ, Coseno e Seno della composizione di due rotazioni vettoriali.
4. Angolo di due semirette vettoriali D, D' (unica rotazione vettoriale che porti D su D') nel piano vettoriale euclideo. Angolo di due vettori. Calcolo del Coseno e del Seno dell'angolo di due vettori dati per mezzo delle loro coordinate (base ortonormale, piano vettoriale euclideo orientato). Rotazioni vettoriali e angoli notevoli. Formule di addizione, avendo il gruppo degli angoli le notazioni additive.
5. Cerchio trigonometrico U. Definizioni. Biiezione del gruppo, delle rotazioni vettoriali su U; struttura di gruppo di U (notazione additiva).
- Applicazione canonica ϑ di R sul gruppo delle rotazioni vettoriali, si ammetterà l'esistenza d'una applicazione suriettiva di R sul gruppo delle rotazioni

vettoriali tali che, per ogni x ed y reali, si abbia $\vartheta(x+y)=\vartheta(x)+\vartheta(y)$ e che la funzione definita da $\operatorname{sen} x = \operatorname{Sen}\left[\vartheta(x)\right]$ sia derivabile e di derivata uguale ad 1 per $x = 0$. (L'avvolgimento di un filo intorno ad U potrà suggerire intuitivamente il primo di questi fatti). Numero π.

- Funzioni cicolari della variabile x:

$$\cos x \left[= \operatorname{Cos}\left[\vartheta(x)\right] \right], \ \operatorname{sen} x, \ \operatorname{tg} x.$$

- Insiemi di definizione, periodicità, senso di variazione, rappresentazione grafica. Si renderanno esplicite le relazioni tra le funzioni circolari qui definite e i rapporti trigonometrici introdotti in troisième.
- Relazioni tra cos x e sin x, tra cos x e tg x
- Relazioni fra le immagini delle funzioni circolari del numero x e dei numeri $-x, \pi - x, \frac{\pi}{2} - x, \pi + x, \frac{\pi}{2} + x$.
- Equazioni $\cos x = a$, $\operatorname{sen} x = b$, $\operatorname{tg} x = c$
- Formule d'addizione: formule di moltiplicazione per 2; applicazioni. Trasformazione del prodotto scalare $a \cos x + b \operatorname{sen} x$; applicazione all'equazione $a \cos x + b \operatorname{sen} x + c = o$.
- Valori approssimati di sen x, cos x, tg x per piccoli "valori" di x. Derivate delle funzioni circolari. Derivate delle funzioni.

$$x \longrightarrow \cos(ax + b) \quad \text{e} \quad x \longrightarrow \operatorname{sen}(ax + b).$$

6. GEOMETRIA METRICA (Nel piano e nello spazio)

1. Distanza di due punti.
- Proiezione ortogonale di un punto su un piano, di un punto su una retta. Piani perpendicolari.
2. Cerchio nel piano dotato di un riferimento ortonormale.
3. Sfera, sezioni piane, equazioni essendo lo spazio dotato di un riferimento ortonormale.

7. STATISTICA E PROBABILITA'

1. Descrizione statistica d'una popolazione o d'un campione.
- Documenti statistici; rappresentazioni grafiche.
- Frequenze, frequenza relativa.
2. Spazi di probabilità finiti $(\Omega, P(\Omega), p)$
- Esempi (dadi, truccati o non, carte, urne)
- Variabile aleatoria numerica; eventi legati ad una variabile aleatoria X (per esempio: X = a dato; X < a dato)
- Funzione di ripartizione, crescenza.
- Distribuzione in R. Distribuzione binomiale.

Programma di matematica - Terminale C (Ordinanza del 14 maggio 1971)

a) I paragrafi segnati con un asterisco non possono essere oggetto di interrogazioni, scritte o orali, nè essere utilizzati, in occasione d'un problema o di un esercizio allo scritto o all'orale dal baccalauréat.

b) Le parti del programma comportano un ordine d'enumerazione. Questo ordine è suggerito ai professori ma non è loro imposto; per esempio è lecito permutare i tre capoversi di 1.3 riguardanti i numeri interi, i (capoversi) 3.I e 2 (nozioni di continuità e di limite), di dare, in 2.3 , un'altra introduzione dei numeri complessi.

c) Ogni volta che l'occasione si presenterà, verranno messe in evidenza, sugli esempi studiati nei diversi capitoli, le strutture di gruppo, sottogruppo, anello, corpo, spazio vettoriale, nonchè gli isomorfismi e omomorfismi (nucleo), automorfismi incontrati.

1. NUMERI INTERI NATURALI ARITMETICA

1. Enunciato delle proprietà attribuite all'insieme N degli interi naturali. Ragionamento per induzione. Applicazioni di N in un insieme X. Notazione con gli indici; esempi.
2. Anello Z degli interi relativi, multipli di un intero relativo; notazione n Z. Congruenze modulo n; l'anello $Z/_{nZ}$; divisione euclidea in Z, in N. Principio dei sistemi di numerazione; base, numerazione decimale e binaria.
3. (a) Numeri primi in Z; se p è primo $Z/_{pZ}$ è un corpo.
   (b) Decomposizione di un intero naturale in fattori primi; esistenza, unicità.
   (c) Massimo cumun divisore e minimo comune multiplo; numeri primi fra loro; identità di Bezout.
   (L'ordine di (a), (b), (c) è, ben inteso, lasciato alla scelta del professore).

2. NUMERI REALI, CALCOLO NUMERICO, NUMERI COMPLESSI.

1. Elenco (senza dimostrazione) delle proprietà di R: è un corpo commutativo totalmente ordinato (richiami); ogni parte non vuota limitata superiormente ammette un minimo limite superiore; ogni intervallo di R contenente più di un punto contiene un numero razionale.
2. Valori decimali approssimati a meno di 10^{-n}, per difetto o per eccesso di un numero reale.

- Rappresentazione di un numero reale per mezzo di una successione decimale illimitata (lo studio della periodicità non è in programma).
- Valori approssimati di un numero reale, errore d'approssimazione, incertezza assoluta e relativa.
- Valori approssimati di una somma, di una differenza, di un prodotto, di un quoziente di numeri reali di cui si conoscano valori approssimati. Numerosi esercizi

di calcolo numerico saranno eseguiti in occasione dello studio delle funzioni usuali e in occasione di problemi, per mettere in applicazione le nozioni di valore approssimato, errore di approssimazione, d'ordine di grandezza di un risultato, d'incertezza (cf. 5.8).

3. L'addizione e la moltiplicazione delle matrici 2 x 2 muniscono l'insieme C delle matrici a coefficienti reali della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

della struttura di corpo commutativo. Identificazione di R con un sottocorpo di C per mezzo dell'applicazione

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad ;$$

C è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su R. Notazione a + ib; numeri complessi; numeri complessi coniugati; modulo di un numero complesso.

4. Omomorfismo ϑ di R sul gruppo moltiplicativo dei numeri complessi modulo 1 forma trigonometrica di un numero complesso non nullo: r (cos x + i sen x) con $r > 0$ e $x \in R$; argomento di un tale numero (classe dei numeri x o, ·, per abuso di linguaggio, uno di essi).

- Calcolo di cos n x e sen n x (x R, n = 2, 3, 4), e linearizzazione dei polinomi trigonometrici. Esistenza e rappresentazione geometrica della radice n - esima di un numero complesso.

5. Risoluzione di equazioni di primo e di secondo grado a coefficienti complessi; calcolo della parte reale e immaginaria delle radici; caso dei coefficienti reali.

3 - <u>CALCOLO DIFFERENZIALE</u>

1. Funzioni numeriche d'una variabile reale: continuità.

- Continuità "in un punto"; continuità in un intervallo, somma,prodotto, quoziente di funzioni continue, continuità della funzione composta di due funzioni continue (senza dimostrazione).
- Si ammetterà, senza dimostrazione il teorema seguente: "se una funzione è continua su un intervallo, l'immagine, secondo questa funzione, di questo intervallo è un intervallo". Applicazione ad una funzione continua e strettamente monotona su un intervallo: esistenza della funzione reciproca; monotonia e continuità di questa funzione (si ammetterà la continuità).

2. Funzioni numeriche d'una variabile reale: limiti.

- Limite d'una funzione quando la variabile tende verso un numero reale dato, verso l'infinito. Unicità.
- Casi particolari di successioni.
- Limite d'una somma, d'un prodotto, d'un quoziente (senza dimostrazione).

3. Funzioni numeriche d'una variabile reale: derivabilità.

- Richiamo del programma di Première C : funzione lineare tangente in un punto di una funzione data; notazione differenziale; derivata in questo punto. Funzione derivata; derivata d'una somma, d'un prodotto, d'un quoziente di funzioni derivabili. Interpretazione geometrica della derivata (riferimento cartesiano); equazione della tangente. Definizione delle derivate successive.
- Derivata in un punto della composizione di due funzioni derivabili.
- Derivata in un punto della reciproca d'una funzione derivabile e strettamente monotona.
- Si ammetterà senza dimostrazione che se una funzione numerica è derivabile su un intervallo e se la sua derivata è positiva o nulla, è crescente in senso largo su questo intervallo.
- Confronto di due funzioni aventi la stessa funzione derivata su un intervallo.
- Studio del senso di variazione d'una funzione derivabile con l'aiuto del segno della sua derivata. Rappresentazione grafica; esercizi semplici di ricerca di asintoti.

4. Funzioni vettoriali d'una variabile reale.

- Applicazione da un sottoinsieme di R in uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita.
- Continuità in un punto; limite d'una funzione quando la variabile tende verso un numero reale dato, verso l'infinito.
- Derivata in un punto; se lo spazio vettoriale è riferito ad una base, coordinate, in questa base, della derivata; funzione derivata.
- Derivata di una somma di funzioni vettoriali derivabili, del prodotto d'una funzione vettoriale derivabile per una funzione numerica derivabile.
- Derivata del prodotto scalare di due funzioni vettoriali derivabili. Applicazione alla ricerca della tangente; esempi di coniche e di eliche circolari.

5. Cinematica del punto.

- Movimento d'un punto: applicazione d'un intervallo di R in uno spazio affine euclideo. Traiettoria.
- Vettore velocità in un istante dato. Scelto un riferimento, coordinate del vettore-velocità in questo riferimento. Norma del vettore velocità.
- Vettore accelerazione in un istante dato. Scelto un riferimento, coordinate del vettore-accelerazione in questo riferimento.
- Studio di movimenti circolari (velocità angolare); studio di movimenti elicoidali uniformi.

4. CALCOLO INTEGRALE

1. Definizione di somme di Riemann d'una funzione numerica d'una variabile reale su un intervallo chiuso, limitato. Esistenza dell'integrale per una funzione monotona; notazione $\int_a^b f(t)dt$; prime proprietà. Si ammetterà che queste proprietà si estendono alle funzioni continue, o monotone e tratti.

- Media di una tale funzione su un intervallo chiuso, limitato. Relazione con la derivabilità in punti dove la funzione è continua.
- Primitive; insieme delle primitive; uguaglianza $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$ quando f è continua su a,b ed ammette F per primitiva. Calcolo di primitive; integrazione per parti.

2. Si enunceranno, senza dimostrazione, le proprietà delle aree la cui esistenza è qui ammessa (additività, unità d'area....).

- Applicazione del calcolo integrale alla valutazione dell'area della parte di $R \times R$ definita da: $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$; essendo f una funzione positiva monotona a tratti, poi una funzione positiva continua.
- Estensione a $b < a$ e a una funzione negativa.

3. Applicazioni geometriche, meccaniche, fisiche etc. (Calcolo di volumi; masse, momenti d'inerzia; velocità e distanze percorse; intensità e quantità d'elettricità; potenza ed energia, ...)

- Valore efficace di un fenomeno periodico.

(Il paragrafo 4-3 non fa parte - si veda il Preambolo a - del programma di prove di matematica del baccalauréat).

5. ESEMPI DI FUNZIONI D'UNA VARIABILE REALE

Alcuni risultati di questo capitolo, già conosciuti dagli allievi, potranno illustrare i capitoli precedenti; sarà opportuno riportare i vari paragrafi di questo capitolo nei diversi momenti dell'anno.

1. Funzione $x \longrightarrow x^n$ $(n \in Z)$; derivate; primitive.
2. Funzione $x \longrightarrow x^r$ $(r \in Q, x > 0)$; derivata; primitive.
3. Successioni aritmetiche e geometriche. Somma dei primi n termini.
4. Funzioni circolari; derivate (richiami); derivate e primitive di $x \longrightarrow \cos(ax+b)$ e $x \longrightarrow \sin(ax+b)$.
5. Logaritmo neperiano (notazione Log): $\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$. Limite quando la variabile positiva x tende verso l'infinito, di $\text{Log } x$ e di $\frac{\text{Log } x}{x}$. Limite, quando tende verso 0, di $x \text{ Log } x$. Rappresentazione grafica.
6. Funzione esponenziale (notazione exp.)

- Proprietà; derivata; rappresentazione grafica; numero e; notazione e^x; limite di $\frac{e^x}{x}$ x tende verso $+\infty$.

7. Altre funzioni logaritmiche ed esponenziali.

- Relazioni tra le funzioni logaritmiche ed esponenziali di base a e quella di base e.
- Definizione di x^{α} dove $\alpha \in R$; derivata della funzione $x \longrightarrow x^{\alpha}$.
- Notazione e^{ix} per indicare $\cos x + i \operatorname{sen} x$; derivata della funzione $x \longrightarrow e^{i\omega x}$ quando ω è una costante reale.

Nota: lo studio di esempi di funzioni composte di tipo logaritmico o esponenziale sarà strettamente limitato ai casi dove sono in evidenza gli intervalli sui quali la derivata conserva un segno costante e dove le indeterminazioni da levare sono quelle che sono state enumerate più in alto.

8. Calcolo numerico

- Uso del regolo calcolatore.
- Uso delle tavole; pratica dell'interpolazione lineare; tavole dei logaritmi.
- Uso di macchine calcolatrici da ufficio.

9. Equazioni differenziali.

- Ricerca di funzioni numeriche una o due volte derivabili della variabile reale x che verifichino le equazioni:

$y' = ay$, essendo a una costante reale.

$y'' + \omega^2 y = 0$, essendo ω una costante reale non nulla (si ammetterà che le soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione 2).

6. ELEMENTI DI GEOMETRIA AFFINE ED EUCLIDEA

N.B. In questo paragrafo il corpo base è R e la dimensione n è sempre uguale a 2 o 3. Una "Trasformazione d'un insieme E" è una biiezione di E su se stesso; un'applicazione f di E in se stesso è un'involuzione se $f\ f$ è l'identità: è una trasformazione di E.

1. Somma diretta di due sotto-spazi vettoriali; sotto-spazi vettoriali supplementari. Applicazione lineare d'uno spazio vettoriale E in uno spazio vettoriale F: immagine e nucleo. Addizione e composizione di applicazioni lineari.

- Gruppo lineare. Omotetia vettoriale.

2. Baricentro in uno spazio affine. Varietà affine. Riferimento affine. Riduzione nel caso euclideo, di $f(M) = a\,MA^2 + bMB^2 + cMC^2$.
3. Applicazione affine d'uno spazio affine E in se stesso, applicazione lineare associata.

Esempio: Proiezione parallela su un sottospazio affine, involuzioni affini, loro punti fissi; traslazioni e omotetie.

4. Applicazioni lineari d'uno spazio vettoriale euclideo in se stesso che conservano le norme; trasformazioni ortogonali (isometrie vettoriali), gruppo ortogonale.

- Nel piano vettoriale e nello spazio vettoriale di dimensione tre, elementi fissi di trasformazioni ortogonali involutive (simmetrie). Orientazione del piano vettoriale euclideo (richiami della classe Première).
- Studio di rotazioni vettoriali dello spazio vettoriale euclideo di dimensione tre (per definizione, una tale rotazione è o l'identità o una trasformazione ortogonale che ha per soli elementi fissi quelli d'una retta vettoriale); gruppo delle rotazioni vettoriali; orientazione dello spazio vettoriale euclideo di dimensione tre.
- Prodotto vettoriale nello spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione tre.

5. Definizione d'una isometria dello spazio affine euclideo. Ogni isometria è una biiezione affine. Gruppo delle isometrie; sottogruppo dei movimenti.

- Nel piano affine euclideo, simmetrie, traslazioni, rotazioni: ogni movimento è d'uno di questi ultimi due tipi.
- Nello spazio affine euclideo di dimensione tre, simmetrie, traslazioni, rotazioni rototraslazioni; ogni movimento è d'uno di questi ultimi tre tipi.
- Semplici esempi di gruppi d'isometrie che lasciano invariato un insieme dato.

7. <u>COMPLEMENTI DI GEOMETRIA PIANA EUCLIDEA</u>

1. Angolo di una coppia di semirette vettoriali (richiamo dalla Première); gruppo A degli angoli di semirette.

- Angolo di una coppia di rette vettoriali (insieme di due rotazioni vettoriali che trasformano la prima nella seconda); gruppo A' degli angoli di rette. Omomorfismo canonico $A \rightarrow A'$; suo nucleo. Isomorfismo $A' \rightarrow A$ dedotto dall'omomorfismo $\alpha \longrightarrow \alpha + \alpha$ di A su A. Condizione in termini di angoli di rette, affinchè quattro punti siano conciclici.

2. Similitudini piane (cioè applicazioni del piano in se stesso che conservano i rapporti fra le distanze). Rappresentazioni per mezzo delle formule $z' = az + b$ o $z' = a\bar{z} + b$ quando si è identificato il piano con C grazie alla scelta di un riferimento ortonormale. Punti fissi di una similitudine. Gruppo delle similitudini del piano e sottogruppi notevoli.
3. Studio di curve rappresentate, in un riferimento ortonormale, da equazioni della forma $ax^2 + by^2 + 2\,cx + 2\,dy + e = 0$ $(|a| + |b| \neq 0)$.
Differenti forme di queste curve; esistenza d'assi o di centri di simmetria, d'asintoti; equazioni ridotte; esistenza della tangente. Ellissi, iperboli, parabole definite dalle proprietà dei loro punti che fanno intervenire i fuochi e le direttrici (le proprietà delle tangenti alle coniche sono fuori del programma).

- Equazione dell'iperbole riferita ai suoi asintoti.

8. PROBABILITA' SU UN INSIEME FINITO

1. Spazi probabilistici finiti (Ω, B, p)
- Applicazioni misurabili (o variabili aleatorie); probabilità; immagine, funzione di ripartizione d'una variabile aleatoria reale.
- Coppia di variabili aleatorie reali; legge della coppia. Leggi marginali. Coppie indipendenti. Sistema di n variabili aleatorie indipendenti .
2. Speranza matematica d'una variabile aleatoria a valori in R o R^2.
   Speranza matematica della somma di due variabili aleatorie reali d'una coppia, del prodotto nel caso d'una coppia indipendente.
- Varianza, deviazione standard di una variabile aleatoria reale.
3. Disuguaglianza di Bienaymé-Tchebyceff. Prove ripetute; legge debole dei grandi numeri.

Vinicio Villani - "L'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie dei principali paesi europei: Analogie e diversità."

Nell'organizzare questa giornata del convegno, dedicata ad un confronto tra le istituzioni scolastiche europee a livello di scuole secondarie superiori, con particolare riferimento all'insegnamento della matematica, il tempo limitato a disposizione ci ha consigliato di focalizzare l'attenzione su due soli paesi, peraltro assai rappresentativi, quali sono la Francia e la Gran Bretagna. E' tuttavia essenziale accennare brevemente anche al sistema scolastico vigente nella Germania Federale, prima di passare ad una discussione sulle analogie e diversità che si possono riscontrare tra questi diversi tipi di organizzazioni scolastiche europee.

1. - Cenni sulla scuola secondaria della Germania Federale, con particolare riferimento all'insegnamento della matematica.

Nella Germania Federale l'obbligo scolastico inizia al compimento del sesto anno di età e dura 9 anni, giungendo così al quindicesimo anno di età. Normalmente, nei tre anni successivi a quelli dell'obbligo scolastico (ossia fino al compimento del diciottesimo anno di età) anche coloro che non proseguono negli studi, ma iniziano un'attività lavorativa, seguono corsi di istruzione di tipo professionale a tempo parziale.

La scuola elementare dura 4 anni, dopodichè gli allievi proseguono gli studi in uno dei tre tipi di scuole medie in cui si articola il tradizionale sistema scolastico tedesco: Hauptschule (equivalente ad una scuola di "avviamento professionale"), Realschule (equivalente ad una scuola di tipo "tecnico"),Gymnasium (equivalente ad una "scuola media-liceo"). La Hauptschule termina col 9° anno di scolarità; la Realschule termina col 10° anno di scolarità; il Gymnasium si prolunga fino al 13° anno di scolarità (più precisamente le classi di ginnasio fino al decimo anno di scolarità si chiamano Sekundarstufe I, mentre gli anni 11°, 12°, 13° di scolarità si chiamano Sekundarstufe II). Il Gymnasium è la scuola per chi intende continuare gli studi all'Università. A questa scuola si affiancano poi, come già accennato, numerose altre scuole di tipo professionale, sia a tempo pieno, sia a tempo parziale.

Recentemente sono state introdotte varie modifiche al sistema scolastico così descritto, al fine di facilitare il passaggio da un tipo di scuola all'altro. Così i primi due anni successivi alle elementari (ossia gli anni di scolarità 5° e 6°) sono stati ristrutturati in senso unitario, con programmi sostanzialmente equivalenti in tutti e tre i tipi di scuole medie, onde la decisione sulla scuola in cui proseguire gli studi viene di fatto rimandata alla fine del 6° anno di scolarità.

Sono inoltre in atto varie sperimentazioni di scuole globali (Gesamtschulen) che vanno dal 5° al 10° anno di scolarità e riuniscono in uno stesso istituto i tre diversi tipi di scuole medie, anche se di fatto nell'ambito di queste stesse scuole ricompaiono poi diversificazioni interne in quanto per le materie principali, tra cui la matematica, vengono tenuti corsi differenziati per livelli di approfondimento; al termine del 9° o 10° anno di scolarità, gli allievi possono sostenere anche in questo tipo di scuola vari tipi di esami di licenza, equivalenti a quelli previsti per i tre tipi di scuola media tradizionale, e passare quindi agli studi ginnasiali superiori o al mondo del lavoro.

E' in atto anche una riforma della Sekundarstufe II (ossia degli anni di scolarità 11°, 12°, 13° del Gymnasium). In base a questa riforma, i "ginnasi" non vengono più suddivisi, come finora avveniva, in "ginnasi classici" (equivalenti ai nostri licei classici), "ginnasi di lingue moderne" (equivalenti, sia pure con differenze non trascurabili, ai nostri licei linguistici) e "ginnasi matematico-naturalistici" (equivalenti ai nostri licei scientifici), in quanto vengono abolite le "classi" chiuse di tipo tradizionale, a favore di un sistema di corsi di livello ordinario ("Grundkurse") e corsi di livello avanzato ("Leistungskurse") ripartiti in semestri; le aree tematiche a cui questi corsi afferiscono sono:

- area linguistica-letteraria-artistica
- area delle scienze sociali
- area matematica-naturalistica-tecnica
- religione
- sport.

I corsi di livello ordinario si svolgono sulla base di 2 o 3 ore settimanali, mentre i corsi di livello avanzato prevedono almeno 5, ma abitualmente 6 ore settimanali.

Ogni studente sceglie in ciascun semestre un complesso di corsi per circa trenta ore settimanali, tra cui almeno due corsi di livello avanzato; uno almeno di questi deve essere una lingua straniera, oppure matematica, oppure un corso di scienze della natura. A parte questi vincoli di carattere generale, gli studenti hanno un'ampia libertà di scelta tra i corsi che vengono loro proposti.

Nella Sekundarstufe II così riformata, l'esame finale (maturità) è basato su quattro materie, una delle quali scelta dallo studente; due delle materie d'esame devono essere state studiate a livello avanzato. Il punteggio finale della maturità si basa non solo sulle prove dell'esame, ma anche sui risultati ottenuti negli ultimi due anni di scolarità (12° e 13°), sia nei corsi di livello ordinario, sia nei corsi di livello avanzato. La maturità consente l'accesso a tutte le facoltà universitarie.

Per chi ha seguito studi di tipo professionale, al di fuori del "Gymnasium", è previsto un sistema piuttosto complesso e articolato di possibili "rientri scolastici" su cui non possiamo soffermarci in questa sede. Per questi studenti è previsto anche un'esame di maturità "settoriale", che dà accesso solo a determinate facoltà.

Nella Germania Federale non esiste un Ministro della P.I. nel governo nazionale. Le autorità preposte all'organizzazione scolastica sono i Ministri della P.I. dei vari "Länder" di cui la Germania si compone. Ciò rende estremamente difficile un confronto dettagliato dei programmi, che possono variare in misura abbastanza rilevante da un "Land" all'altro e che sono inoltre in continua, graduale evoluzione, subendo quasi annualmente modifiche e aggiornamenti. Esistono tuttavia degli accordi tra tutti i "Länder" circa i requisiti di base richiesti per le prove di maturità a livello di contenuti e relativi gradi di approfondimento. Per la matematica, vi si legge:

Ogni candidato (che si presenti alla maturità per la matematica) deve aver frequentato corsi di:

- Analisi

e in almeno uno dei due campi:

- *Algebra lineare-geometria analitica*
- *Probabilità-statistica.*

Seguono a questo punto programmi piuttosto dettagliati, sia per i corsi di livello ordinario, sia per quelli di livello avanzato. Nell'impossibilità di riprodurre per esteso questi programmi, possiamo dire che si richiede una padronanza almeno pari ad un corso di un primo anno o biennio di università italiana, se si tratta di un corso di livello avanzato, e almeno pari ad un corso semestrale di un primo anno di università italiana, se si tratta di un corso di livello ordinario.

A titolo di esempio,ecco il testo di un esercizio di Analisi (per un corso di livello ordinario) assegnato nell'anno scolastico 72/73 come prova scritta di maturità in un "Gymnasium" della Renania Westfalia:

Esercizio.

a) - *Il punto di zero sinistro* N_1, *il punto di massimo* E_1 *e il punto di flesso* W *della curva* $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ *determinano una circonferenza* K. *Trovare l'equazione di* K.

b) - *Disegnare la circonferenza e la curva, assumendo come unità di misura 1cm (per la curva ci si limiterà ad uno schizzo approssimativo).*

c) - *Quale condizione deve sussistere affinchè una circonferenza sia la circonferenza osculatrice alla curva in* E_1 *? Cosa si potrebbe dire a questo riguardo, nel punto* W *?*

Tempo a disposizione: 3 ore.

Da notare che l'insegnante che propone l'esercizio è tenuto a fornirne una soluzione dettagliata prima della prova d'esame, con una valutazione a priori delle presumibili difficoltà e con un punteggio estremamente dettagliato per le singole risposte parziali prevedibili da parte degli allievi, in modo da garantire la massima "obiettività" possibile nella successiva valutazione degli elaborati.

Termino questa prima parte della mia relazione con un breve cenno sulla preparazione e sull'aggiornamento degli insegnanti.

Tutti gli insegnanti devono aver seguito studi universitari di durata almeno quadriennale e aver prestato un "servizio propedeutico" (ossia un tirocinio guidato) di durata variabile, ma sempre superiore a 12 mesi, terminato con un Esame di Stato.

Vi è una certa elasticità negli abbinamenti delle materie che un insegnante può insegnare: normalmente ogni insegnante ha una materia di insegnamento "principale" e una "secondaria" che può essere anche molto distante da quella "principale" (ad es. matematica e filosofia).

L'aggiornamento viene considerato come facente parte dei normali doveri degli insegnanti e viene attuato in centri appositi, gestiti dai singoli "Länder", con corsi residenziali o non residenziali della durata media di 3-5 giorni; i corsi di aggiornamento non vengono tuttavia imposti agli insegnanti, che sono liberi di scegliere i corsi che maggiormente li interessano. Buona parte degli insegnanti partecipa annualmente ad almeno uno di questi corsi. Se i corsi hanno luogo in periodo scolastico, i partecipanti vengono esonerati durante il periodo dei corsi dai loro doveri scolastici.

2. - Analogie e diversità tra i diversi tipi di organizzazioni scolastiche europee.

Pur col rischio di schematizzazioni eccessive e quindi non del tutto rispondenti alla reale situazione esistente nei singoli paesi, mi sembra di poter rilevare quanto segue:

a) - La legislazione vigente e le riforme in atto.

Si nota una generale tendenza a ritardare l'età di scelte irreversibili nel curricolo degli studi, sia quando queste scelte sono personali, sia quando sono più o meno imposte. Nello stesso ambito delle scuole "globali" riappare però una diversificazione interna, con corsi di vari livelli, o con materie opzionali, o con la formazione di classi basate sulle diverse capacità (vere o presunte) degli allievi. Comunque, in tutti e tre i paesi europei presi in esame, l'età della "scelta" rimane più bassa di quella nella scuola italiana. Infatti si può dire, grosso modo, che la scelta viene fatta all'inizio del 7° anno scolastico nella Germania Federale, all'inizio dell'8° anno scolastico in Gran Bretagna 7 ? e all'inizio dell'8° anno scolastico in Francia, destinato a diventare il 10° anno, se la riforma Haby andrà in porto (in Italia, la scelta va fatta all'inizio del 9° anno scolastico, destinato a diventare il 10° o 11° se andrà in porto una riforma con "monoennio" o con "biennio" unitario).

Dopo la scelta del tipo di scuola specifico, inizia in tutti i paesi considerati una specializzazione assai più pronunciata che non in Italia. Questa specializzazione non è tuttavia di tipo "professionalizzante" poichè in tutti i paesi presi in considerazione esistono, accanto alle scuole destinate al proseguimento degli studi, anche canali alternativi che mirano in modo specifico all'istruzione professionale, sia a tempo pieno, sia a tempo parziale, sia infine per consentire ritorni periodici allo studio per periodi limitati, nell'ambito di programmi di "formazione permanente".

Mentre le riforme della scuola francese vengono proposte a livello centralizzato, con scarsa considerazione delle sperimentazioni e dei pareri espressi dai tecnici, e trovano per una serie di motivi grossi ostacoli nella loro attuazione concreta, così come sostanzialmente avviene anche in Italia, si può dire che in Gran Bretagna e in certa misura anche nella Germania Federale le riforme sono frutto di un processo continuo che prevede: (1) sperimentazioni che precorrono le riforme; (2) atti legislativi; (3) estensione graduale delle riforme alle singole scuole, nel momento in cui esse si sentono preparate ad attuarle. In queste nazioni si nota poi una notevole disponibilità a correggere eventuali errori di impostazione nel corso stesso dell'attuazione delle riforme.

b) - Le strutture dei programmi.

Sotto questo punto di vista la situazione presenta nei paesi presi in considerazione una vasta gamma di impostazioni diverse: si va dalle indicazioni estremamente minuziose e prescrittive dei programmi dei vari "Länder" della Germania Federale, ai programmi più sintetici ma pur sempre rigidi della Francia, alla notevole autonomia delle scuole inglesi.

Va notato che in nessuno dei paesi considerati gli attuali programmi risultano in vigore da più di 10 anni. Si ha dunque un processo di evoluzione dei programmi più frequente e più graduale che non in Italia.

c) - La valutazione e la selezione.

Anche i criteri di valutazione del profitto e le modalità per il passaggio da una classe alla successiva sono estremamente diversificati da Paese a Paese. In tutti i Paesi si riscontra una forte selettività, particolarmente accentuata negli ultimi tre anni della scuola secondaria,e sopratutto per quanto riguarda l'acquisizione del titolo finale che consente l'accesso all'istruzione superiore. Ciò non deve però meravigliare troppo, se si pensa all'esistenza dei canali alternativi - di istruzione professionale - a cui ho accennato sopra.

d) - I programmi di matematica a livello di scuola secondaria superiore.

Le diversità di preparazione matematica consentite in tutti i Paesi a seguito della libertà di scelta dei corsi negli ultimi due o tre anni di scuola secondaria superiore rendono difficile un confronto analitico dei singoli programmi. Possiamo dire, grosso modo, che mentre chi vuole studiare poca matematica può terminare gli studi secondari con conoscenze paragonabili a quelle degli studenti che escono dai nostri licei classici, chi invece vuole approfondire la propria preparazione matematica può acquisire a livello liceale conoscenze notevolmente superiori a quelle degli studenti che escono dai nostri licei scientifici, paragonabili piuttosto a quelle dei nostri studenti di matematica al termine di un primo anno di università.Va notato tuttavia che in alcuni casi la preparazione degli studenti liceali nei paesi presi in considerazione sembra basarsi più su una buona abilità e capacità a risolvere esercizi, che su un approfondimento critico dei concetti.

In tutti i programmi presi in considerazione figurano, oltre ad argomenti di Analisi infinitesimale, di Geometria analitica e Algebra lineare, anche elementi di Statistica e di Probabilità.

Da notare infine che nelle scuole ove esistono possibili opzioni fra corsi di vario livello, questi vengono tenuti sempre a classi disgiunte, vale a dire non si verifica il caso di allievi che seguono un corso base di matematica comune a tutti, per poi approfondire solo determinati argomenti in classi separate, come mi pare fosse invece adombrato nell'ipotesi di riforma delle nostre scuole secondarie superiori, discussa dal Parlamento.

e) - Preparazione, reclutamento e aggiornamento dei docenti.

Si può dire che in tutti i Paesi gli insegnanti di scuola secondaria devono avere una preparazione di base specifica, a livello universitario (anche se una certa scarsità di docenti di matematica ha imposto talora per questa disciplina soluzioni di ripiego). La preparazione specifica di base è poi sempre seguita da corsi integrativi e/o attività di tirocinio guidato; queste ulteriori attività hanno una funzione non solo formativa, ma anche selettiva ai fini del reclutamento del personale docente in tutti i Paesi considerati.

Infine va rilevato che l'aggiornamento degli insegnanti è inteso come una normale componente della loro attività professionale, e viene quindi attuato con sistematicità, in strutture apposite che all'estero esistono già da molti anni e che in Italia potrebbero nascere ora con gli Istituti regionali e con i Distretti (a questo riguardo è stata notata peraltro una situazione di involuzione negli ultimi anni per la Francia).

Come ho detto all'inizio, la rassegna dei punti di analogia e di diversificazione tra i vari sistemi scolastici, che ho cercato di presentare in questa seconda parte della relazione, è inevitabilmente assai grossolana e vuole servire unicamente da traccia per una possibile successiva discussione e per ulteriori approfondimenti.

Alan Rogerson - " Innovazione e sviluppo curricolare nell'insegnamento della Matematica in Gran Bretagna".

1. Quanto segue si riferisce essenzialmente alla situazione dell'insegnamento della matematica in Gran Bretagna, sebbene molte delle caratteristiche esaminate si possano rilevare anche per altre discipline.

2. Una delle principali caratteristiche del sistema educativo britannico è la relativa "libertà" esistente al livello delle singole scuole. Sebbene il controllo del curricolo sia formalmente di competenza delle diverse Autorità Scolastiche locali (LEA: Local Education Authorities) e del consiglio di governo degli Istituti scolastici, in pratica sono i docenti di ciascuna scuola che decidono quale matematica si debba insegnare. Naturalmente il vincolo maggiore su tutto l'insegnamento della matematica nelle scuole britanniche è costituito dal sistema di esami, ed in particolare dagli esami esterni competitivi che si sostengono normalmente a 16 anni (livello Ordinario) e a 18 anni (livello Avanzato). Poichè esiste una vasta scelta di tipi di matematica esaminata in entrambe queste prove, rimane una considerevole libertà di innovazione all'interno di ciascuna scuola, soprattutto se si fa il confronto con molti altri paesi europei.

3. Molte innovazioni si determinano quindi a livello esclusivamente locale. Le singole scuole sono libere (e molto spesso desiderose) di sperimentare innovazioni nei contenuti, nei curricoli, nei metodi di insegnamento e nell'organizzazione didattica. Così l'insegnamento in classi composte da allievi di diverse capacità (spesso impartito con materiali didattici individualizzati), la cosiddetta matematica moderna, i curricoli integrati e il team teaching sono innovazioni diffuse nelle scuole un po' in tutto il paese. E' assolutamente comune che ogni scuola abbia il proprio schema di sviluppo del curricolo matematico che, a livello secondario, viene definito e realizzato dagli stessi insegnanti di matematica, a livello primario dal capo dell'istituto insieme a tutti gli insegnanti.

4. Oltre alle innovazioni che si sviluppano a livello locale, ci sono molte altre organizzazioni, riconosciute o informali, che contribuiscono al cambiamento dell'insegnamento della matematica in Gran Bretagna. Lo Schools Council ha avviato e finanziato, sotto la propria responsabilità, numerosi e impegnativi "Progetti" (non tutti rivelatisi un successo) e ha prodotto una mole notevole di materiali didattici innovativi, per insegnanti e allievi. Due particolari

esempi sono: (i) "Mathematics Curriculum - A critical review", che è iniziato nel 1973 presso l'Università di Nottingham e ha da allora prodotto diversi libri, ad uso degli insegnanti, su argomenti come Numeri, Geometria, Algebra, Calcolo, e così via; (ii) il "Mathematics for the Majority Continuation Project", che nacque come proseguimento di un precedente Progetto dello Schools Council, il "Mathematics for the Majority, (1967-1972)". Nel Progetto successivo lo scopo principale era quello di produrre materiali per allievi meno abili di età compresa tra i 14 e 16 anni. Molti di questi materiali sono attualmente pubblicati e usati nelle scuole.
Oltre a questi due più importanti Progetti, lo Schools Council finanzia e sostiene altri Progetti di insegnamento della Matematica, sia di grandi che di piccole dimensioni.

5. La Fondazione Nuffield ha dato i più importanti contributi innovativi nello sviluppo curricolare del settore scientifico, e ha anche finanziato e organizzato ricerche nel settore matematico. L'esempio più noto è il "Progetto Nuffield per la Matematica", iniziato nel 1964, il cui obiettivo principale era quello di modernizzare l'insegnamento matematico nell'età 5-13 anni. Sebbene l'attività del Progetto Nuffield sia formalmente terminata nel 1972, la sua influenza sulla matematica delle scuole primarie (sia in positivo che in negativo) è ancora viva.

6. Oltre allo Schools Council e alla Fondazione Nuffield, numerose Autorità locali (LEA) hanno contribuito in modo significativo alla riforma dell'insegnamento matematico. In alcuni casi ciò si è realizzato attraverso l'incoraggiamento agli insegnanti, la veramente attiva partecipazione dell'"esperto" o consulente di Matematica delle LEA, e il supporto concreto di natura finanziaria e amministrativa. Per esempio, alcune LEA sono in grado, attraverso i loro Centri per Insegnanti (Teachers' Centres), di fornire notevoli risorse per la riproduzione dei documenti, la disponibilità di materiali didattici, e incoraggiano gli insegnanti a scrivere e produrre, a livello locale, i propri materiali didattici. Tutte queste attività, svolte a livello locale, sono naturalmente estremamente importanti per i singoli insegnanti.

7. A un livello più ufficiale, numerose LEA hanno iniziato e finanziato importanti Progetti di insegnamento della Matematica. Fra gli esempi più noti si citano: "Kent Mathematics Project" (KMP), "City of Birmingham Structured Mathematics Scheme" (SMS), "Hertfordshire Computer Managed Mathematics Project" (HCMMP) e il "Resources for Learning Development Unit", basato a Bristol e promosso dalla LEA dell'Avon. In tutti questi casi le LEA hanno fornito personale a tempo pieno, estese facilitazioni, supporto amministrativo e di segreteria, per diversi anni. Allo stesso tempo, tutti questi Progetti si sono fondati sul

la collaborazione attiva, in gran parte gratuita, di insegnanti locali, per gran parte del lavoro innovativo. Lo scopo comune a tutti questi Progetti è stato di produrre materiali didattici e curricoli migliori per gli allievi frequentanti le scuole sotto la giurisdizione delle singole LEA. In alcuni casi tuttavia i materiali sono stati pubblicati e diffusi su scala nazionale (per esempio, per il KMP). E' ovvio che il consistente supporto finanziario e la partecipazione attiva e riconosciuta della LEA, costituisce una notevole spinta per gli insegnanti della regione ad usare i materiali prodotti e a partecipare allo sviluppo delle innovazioni curricolari. In molti casi è previsto, per tali materiali, un contributo finanziario, cosicchè le scuole sono ulteriormente incoraggiate al loro acquisto ed impiego.

8. Occorre rilevare che in Scozia si registra una situazione diversa da quella osservabile in Inghilterra e Galles. Il Dipartimento Scozzese per l'Istruzione (SED: Scottish Education Department) è indipendente e organizza autonomamente il proprio sistema educativo; in particolare organizza lo sviluppo dei curricoli. In effetti il SED è stato molto attivo, negli ultimi 10 anni, nell'innovazione dell'insegnamento matematico. A seguito della vasta diffusione dei loro libri di testo di "matematica moderna" per la scuola secondaria, lo Scottish Mathematics Group (SMG), e i suoi successori, hanno sviluppato diversi Progetti per produrre materiali didattici (Modular Maths) per gli allievi di 11-13 anni delle classi raggruppanti ragazzi di abilità diverse (mixed ability classes), per gli allievi delle scuole primarie e per gli studenti meno capaci di 14-16 anni. Per le dimensioni e il numero di insegnanti il SED è circa paragonabile a una grande LEA inglese.

9. Tutte le fonti che hanno originato innovazioni, menzionate fino ad ora, sia a livello nazionale che a livello locale, sono relativamente "ufficiali". Esiste tuttavia in Gran Bretagna una lunga tradizione di iniziative di sviluppo curricolare avviate da insegnanti eccezionali, illuminati o semplicemente fanatici. Un singolo docente o un gruppo di docenti può elaborare il proprio schema di lavoro, per allievi o insegnanti, e questo schema può essere pubblicato come iniziativa commerciale. Inoltre si assiste attualmente ad una tendenza crescente, presso gruppi di insegnanti, a costituirsi come "Progetti" indipendenti. La motivazione originaria è di carattere pedagogico (non commerciale), sebbene il gruppo possa ricevere un aiuto finanziario dallo Schools Council, Fondazione Nuffield o qualche altro organismo. La caratteristica principale di tali iniziative di sviluppo curricolare è l'indipendenza, e forse lo Schools Mathematics Project (SMP) fornisce il più fortunato esempio di tale fenomeno.

Lo SMP fu fondato nel 1961 completamente come un Progetto di innovazione educa tiva; le sue pubblicazioni sono ora usate in oltre il 60% delle scuole britanniche. Tuttavia lo SMP si è sempre mantenuto indipendente nella sua attività e sebbene esso impieghi personale a tempo pieno, disponga di segretarie e uffici, la sua funzione primaria è ancora quella di produrre innovazioni nello sviluppo del curricolo. Ciò viene realizzato attraverso un piccolo gruppo di insegnanti che, a tempo parziale, scrivono i materiali. Questo modello di sviluppo curricolare ha caratterizzato anche il "Fife Mathematics Project", il "Shropshire Mathematics Experiment", il "Manchester Mathematics Group" e così via. In alcuni dei casi citati ci può essere un sostegno ufficiale o ufficioso per il particolare Progetto da parte del locale College of Education, Università o gruppo di scuole. Ciò ovviamente è di grande aiuto, per ottenere che gli insegnanti siano sollevati da parte dei loro impegni, per trovare locali ove incontrarsi e lavorare, per ottenere supporto amministrativo e così via.

10. Da tutto quel che precede risulta chiaramente che l'attività innovativa nell'insegnamento matematico in Gran Bretagna è molto diffusa, variabile e a volte decisamente fonte di confusione! Il numero di "schemi di lavoro" (libri e materiali) pubblicati è considerevole e la scelta che il singolo insegnante si trova a fronteggiare è enorme.

11. Per quanto riguarda il rinnovamento dei curricoli di matematica nelle scuole, possono essere di aiuto le seguenti osservazioni di carattere generale. All'inizio degli anni sessanta e successivamente, c'è stato un considerevole cambiamento nel contenuto e nei metodi di insegnamento nelle scuole primarie. Così certi argomenti di matematica "moderna" sono stati introdotti nel curricolo elementare, e alcuni settori, come "misurazione", sono stati notevolmente ampliati, con l'introduzione di lavoro più pratico e partecipativo. Di pari passo con queste innovazioni si è assistito ad un allontanamento dalla rigida tradizione di insegnamento "in cattedra", verso un più flessibile approccio di lavoro individuale o di gruppo, richiedente un uso maggiore di materiali e una più dinamica organizzazione della scuola nel suo insieme.
Un po' più tardi, verso la metà degli anni sessanta, si sono verificati cambiamenti, ora largamente acquisiti un po' in tutto il paese, anche nel curricolo matematico della scuola secondaria. Tali cambiamenti sono soprattutto a livello dei contenuti; si è assistito alla sostituzione di molta della tradizionale geometria euclidea, aritmetica e algebra, con insiemi, vettori, matrici, trasformazioni e così via. Non altrettanto vasta è stata la modifica dei metodi didattici, ad eccezione dei primi due anni della scuola secondaria. La riorganizzazione del sistema educativo secondo la struttura delle scuole comprensive ha incoraggiato gli insegnanti a formare "classi di abilità miste" nel primo e secondo anno. Conseguentemente, si è verificata una crescente dif

fusione di sistemi didattici individualizzati per gli allievi. Tali sistemi sono stati di qualità variabile, ma generalmente preferibili ai tradizionali metodi di insegnamento collettivo fondato sui libri di testo. Lo sviluppo curricolare per i primi due anni di scuola secondaria è stato molto più innovativo e vivace che per gli altri anni di scuola secondaria.

12. Data la relativa libertà e flessibilità del sistema educativo britannico, esiste in Gran Bretagna, nello sviluppo dei curricoli, un ruolo appropriato per diverse istituzioni educative. Per esempio, è possibile che Dipartimenti di Educazione (o perfino Dipartimenti di Matematica) di Università abbiano una parte ampia e significativa nello sviluppo dei curricoli scolastici. Se essi non si assumono tali ruoli, ciò è unicamente un riflesso delle inclinazioni e interessi dei docenti di quei Dipartimenti. Fra le eccezioni da segnalare, quella degli Shell Centres presso il Chelsea College (Università di Londra), l'Università di Nottingham e il Dipartimento di Educazione dell'Università di Leeds. Ci sono ovviamente altri Dipartimenti universitari che rivestono un certo ruolo nell'innovazione e sviluppo curricolare della Matematica, ma,nella mia valutazione personale, il loro ruolo è scarsamente significativo.
Il maggiore impulso allo sviluppo curricolare è senza dubbio scaturito in Gran Bretagna dagli insegnanti stessi attraverso i vari strumenti di intervento menzionati. Più per scelta che per ragioni di fondo, il ruolo delle Università è stato meno significativo, e questo in un certo senso riflette la mancanza in Gran Bretagna, di un controllo autoritario e centralizzato, simile a quello esistente in altri paesi.

13. All'inizio il ruolo delle LEA nello sviluppo curricolare è stato meno accentuato, ma dal 1970 l'importanza di tale ruolo si è accresciuta. Così i consulenti matematici in molte LEA e gli associati Centri per insegnanti sono fonti estremamente importanti per la realizzazione di ulteriori innovazioni e sviluppi nei curricoli. Le LEA stanno sempre più prendendo coscienza dell'influenza che un consulente matematico (e un Centro per insegnanti) può esercitare sugli insegnanti e le scuole locali. Esiste attualmente una estesa e importante rete di consulenti presso le LEA, la cui importanza nella localizzazione delle innovazioni curricolari non deve essere sottovalutata.

14. Il ruolo di organismi indipendenti come lo SMP (di solito basati su strutture specifiche) e di organismi nazionali come lo Schools Council e la Fondazione Nuffield, è stato già menzionato. In conclusione tuttavia, il ruolo certamente più vitale è quello svolto dalle singole scuole, che hanno la possibilità e la libertà di scegliere, nel modo ritenuto più appropriato, i materiali da usare. In mancanza di un ben definito sostegno o consenso da parte delle scuo

le stesse, nessuna innovazione o sviluppo curricolare può avere, in Gran Bretagna, probabilità di successo.

Le condizioni per una fortunata operazione di sviluppo curricolare.

15. Una delle sfide più impegnative oggi nell'insegnamento della Matematica consiste nell'acquisire una visione globale del processo di sviluppo di un curricolo. Ciò significa controllare l'intero processo, da (1) progettare il contenuto matematico tenendo presenti gli allievi interessati, (2) concordare una strategia e organizzazione didattica complessiva, (3) mettere in funzione un meccanismo di scrittura/diffusione/verifica dei materiali, (4) tenere presenti, nella veste esteriore, il formato e la stampa dei materiali, gli obiettivi educativi. Si darebbe solo una risposta parziale se ci si concentrasse unicamente sui contenuti matematici, o sugli allievi, o sulla produzione dei materiali: per concludere, tutti questi fattori sono importanti nella loro reciproca interazione.

16. Capacità di sviluppare/contenuto/forma linguistica sono chiaramente aspetti importanti da considerare nella redazione dei materiali finali, ma esiste il pericolo che essi possono essere troppo presto considerati singolarmente, nel corso dell'intero processo. Per esempio, le forme di istruzione programmate aventi obiettivi comportamentali (generalmente capacità) molto specifici possono gravemente condizionare la forma dei materiali finali. L'analisi delle capacità e dei contenuti è tuttavia un aspetto preliminare essenziale nello sviluppo della teoria, purchè i risultati di tale analisi non vengano considerati come i soli obiettivi dell'insegnamento matematico.

17. Da una parte non vogliamo impiegare tutto il nostro tempo discutendo sulla teoria e elaborando un "buon" modello senza alcuna verifica di esso. D'altra parte, una volta che si comincia a scrivere/verificare/pubblicare ci si accorge che rimane, sorprendentemente, assai poco spazio per esperimenti o modifiche (che costano tempo/denaro/fatica), così che un modello efficace è essenziale prima di iniziare il lavoro. Normalmente si verificano interazioni e "feedback" fra teoria e pratica man mano che il lavoro va avanti. Pur se uno schema ragionevole teoria/pratica è inizialmente essenziale, tale schema dovrebbe avere la più vasta base possibile, e durante la realizzazione si dovrebbero mantenere quante più opzioni si riesce a tenere aperte. Ciò significa evitare di prendere decisioni irreversibili, a meno che non si sia costretti, discutere e analizzare rigorosamente tutte le nuove idee almeno due volte, prima di prendere una decisione finale. Qualunque sia il modello generale adottato all'inizio, si dovrebbe continuare a sperimentare più a lungo possibile, ma rimanendo nei limiti del modello.

18. Una strategia per uno sviluppo curricolare con buone probabilità di successo dovrebbe avere le seguenti caratteristiche:

(1) Una "filosofia" coerente e riconosciuta è essenziale all'inizio del lavoro.

(2) Occorre quindi formulare uno o più modelli possibili per la produzione/verifica dei materiali

(3) Ciò involve la partecipazione di collaboratori esterni, per la verifica nelle scuole. Il lavoro degli insegnanti deve essere guidato, ma è essenziale la realizzazione effettiva dell'esperimento. Al termine, l'équipe degli autori dei testi deve esaminare tutte le reazioni e consigli provenienti dalle scuole: occorre che queste ricerchino e manifestino il maggior numero possibile di osservazioni critiche. La reazione delle scuole è generalmente più utile per l'aspetto generale che per i dettagli.

(4) Funzionamento: la chiave di tutto è la flessibilità. E' di vitale importanza continuare a provare, sperimentare, discutere. E' particolarmente importante programmare in dettaglio, modificare i progetti iniziali durante la realizzazione e discutere tutto di nuovo, dalle ipotesi di base fino agli specifici aspetti realizzativi.

19. Feedback. La valutazione dovrebbe essere costruttiva e permettere di migliorare la qualità dei materiali prima della pubblicazione finale. Ogni tipo di valutazione che fornisce risultati dopo la pubblicazione del Progetto è di scarsa utilità. La sperimentazione nelle scuole è fondamentale, ma occorre essere realistici sul valore delle reazioni ottenute. La maggior parte dei commenti è in negativo e quando si verifica il consenso, spesso viene alla luce un punto debole che occorre rivedere. La revisione/redazione finali generalmente superano tutti i commenti troppo specifici provenienti dalle scuole pilota. La difficoltà nel giudicare o valutare il "successo" di un Progetto innovativo consiste nel fatto che l'intera operazione è spesso "auto-condizionante" e risulta impossibile arrivare a conoscere se alternative rifiutate sarebbero state migliori o peggiori. Gli obiettivi devono essere chiaramente specificati all'inizio (anche non in pubblico) e ciò può offrire la possibilità di determinare quanto felice il Progetto si sia rivelato.

Insegnanti in Gran Bretagna

(1) Numeri

Nel 1977 il numero totale di insegnanti " qualificati" (che non significa "laureati", NdT)nelle scuole statali, in Inghilterra e Galles, era di 454.000 circa. 274.000, cioè il 60%, erano donne, e circa 122.000, o il 27%, erano "laureati". Il numero totale rappresenta un incremento del 18% rispetto a 5 anni prima e un incremento del 49% rispetto a 10 anni.

(2) Corsi di formazione

Gli insegnanti, in ogni tipo di scuola statale, devono essere "qualificati". Per diventare insegnante qualificato è necessario aver completato con successo un corso iniziale di formazione. Tali corsi fino a qualche tempo fa si svolgevano in Collegi specializzati, noti come "College of Education", ma sono ora largamente integrati con gli altri corsi e istituti di istruzione superiore non universitaria.

Per i non laureati, i corsi di formazione per diventare insegnante qualificato duravano, fino a poco tempo fa, tre anni e si concludevano con un diploma, mentre un quarto anno di studi permetteva il conseguimento della laurea Bachelor of Education (B.Ed.).

Tuttavia il Governo rendeva noto, nel dicembre 1972, che il suo obiettivo finale era quello di rendere la professione insegnante riservata solo ai laureati.

Così nei Collegi e nei Dipartimenti di Educazione dei Politecnici, si è ormai generalizzata l'istituzione di corsi triennali per ottenere il titolo di Bachelor of Education, a livello ordinario, con l' aggiunta di un quarto anno per il B.Ed. con "onori", mentre i corsi producenti il vecchio Diploma stanno scomparendo, e non saranno più avviati a partire dall'anno accademico 1979-80, fatta eccezione per corsi annuali in settori speciali, per candidati non più giovani.

Ai laureati viene richiesto di completare con successo un corso annuale di formazione per l'insegnamento, prima di poter insegnare in qualsiasi scuola statale; si fa eccezione allo stato attuale, per i laureati in discipline scientifiche e matematica (materie per le quali c'è carenza di insegnanti laureati) che desiderano insegnare nelle scuole secondarie.

Tutti gli insegnanti "qualificati" aspiranti a un posto nelle scuole statali devono ora svolgere un periodo di prova (probation) - normalmente di un anno per insegnanti aventi già qualche esperienza, di due per gli altri - per dimostrare alle autorità scolastiche le loro capacità.

Oltre ai Colleges e ai Dipartimenti di Educazione dei Politecnici, i Dipartimenti di Educazione in trenta Università offrono corsi di formazione post-laurea di un anno.

(3) Stipendi degli insegnanti.

Lo stipendio di un insegnante impiegato a tempo pieno nelle scuole statali è determinato su base nazionale, concordata in comitati (conosciuti come Comitati Burnham) includenti rappresentanti delle Autorità scolastiche locali e del Ministro da una parte, e rappresentanti degli insegnanti dall'altra.

Gli stipendi variano a seconda dell'età e della responsabilità della posizione occupata, da L. (sterline) 4.000 a 7.000 circa annue (da lire 7.000.000 a lire 12.000.000). I recenti aumenti salariali hanno collocato gli insegnanti nelle fasce superiori delle scale retributive relative, fra le diverse professioni.

(4)Tirocinio e formazione durante il servizio.

Il Comitato James raccomandava, nel 1972 che i neo-insegnanti dovessero essere sollevati dagli impegni didattici, per almeno un quinto del loro orario di servizio, allo scopo di perfezionare la loro formazione. Progetti pilota per il tirocinio di neo-insegnanti furono quindi introdotti da diverse Autorità scolastiche, e a due di queste, (quelle di Liverpool e di Northumberland) fu concesso un supporto finanziario speciale. Allo stato attuale si sta cercando di finanziare la prevista introduzione di più ampie possibilità di tirocinio.
La formazione durante il servizio permette agli insegnanti di prepararsi ad assumere nuove responsabilità, o di tenersi aggiornati sui nuovi sviluppi della loro disciplina, sui metodi didattici o sull'organizzazione della scuola in generale. La maggior parte delle istituzioni per la formazione degli insegnanti offrono la possibilità di formazione ulteriore per insegnanti già in servizio, e simili facilitazioni sono anche rese disponibili dalle Autorità locali, attraverso i Centri per Insegnanti e i loro servizi di consulenza, e dalle Associazioni degli insegnanti, nelle singole discipline. Molte Autorità scolastiche locali stanno organizzandosi per sviluppare programmi di formazione e aggiornamento per insegnanti in servizio.

(5)Insegnanti di Matematica

Nel 1971 il DES rilevava che esisteva una carenza nazionale di circa 2000 insegnanti di matematica con preparazione specifica e che nello stesso anno circa il 30% dei nuovi iscritti ai corsi dei College of Education non possedeva una formazione matematica (dalla scuola secondaria). Il numero di insegnanti di Matematica con formazione specialistica è stato ovviamente al di sotto delle necessità, e ancora oggi si assiste a una certa carenza (in media) di insegnanti di matematica. Per i singoli insegnanti ciò implica che essi sono molto richiesti e in Londra città, ad esempio, essi possono richiedere uno stipendio più alto, a piacimento. Il "morale" è ora molto più elevato nella professione degli insegnanti, nonostante diversi anni di difficoltà economiche da parte delle LEA. In media ad un insegnante (di Matematica o di altre materie) viene richiesto di svolgere 30 "periodi" di lavoro nelle classi (sui 35 costituenti l'orario di lavoro settimanale), con orario dalle 9.00 alle 16.00, e con intervalli a metà mattina e per il pranzo.

Roland Grunig - "Formazione iniziale e formazione permanente dei professori di matematica"

Abbiamo in Francia cinque tipi di professori: Titolari dell'Agregation, i Titolari del C.A.P.E.S. (Certificato di attitudine all'insegnamento nella scuola secondaria), i P.E.G.C. (Professori dell'insegnamento generale nei Collèges), i P.E.G.C.E.T. (Professori dell'insegnamento generale nei Collèges dell'insegnamento teorico), gli Instituteurs (maestri elementari).

- Gli instituteurs insegnano nella scuola elementare (ragazzi da 6 a 11 anni).
- I P.E.G.C.E.T. insegnano nei C.E.T. (Collèges dell'insegnamento tecnico) verso i quali sono indirizzati i ragazzi che hanno difficoltà a seguire il liceo "normale" (ragazzi da 12 a 16 anni).
- I P.E.G.C. insegnano nel primo ciclo della secondaria "normale", cioè la migliore formazione che condurrà più tardi alle migliori professioni (ragazzi da 11 a 15 anni)
- I titolari del C.A.P.E.S. insegnano sia nel primo ciclo della secondaria (11-15) sia nel secondo ciclo (15-18).
- I titolari dell'agregation insegnano nel secondo ciclo della secondaria e nelle classi preparatorie alle Grandi Scuole.

Formazione di questi insegnanti

Essi hanno tutti conseguito il Baccalaurèat (maturità).

- I Titolari dell'Agregation seguono i corsi normali all'Università per conseguire la maitrise (almeno quattro anni dopo il baccalaurèat). Preparano in seguito un concorso nazionale, ritenuto molto difficile (circa un dandidato su dieci lo supera), detto Agregation: la sua preparazione dura soltanto un anno ma vi sono molti candidati che ricominciano più volte.
- I titolari del C.A.P.E.S. seguono i corsi normali nell'Università per conseguire la licence (almeno tre anni dopo il baccalaurèat), poi preparano in un anno un concorso nazionale detto C.A.P.E.S. Teorico leggermente più facile dell'Agregation;in generale i candidati proseguono anche negli studi universitari per ottenere la maitrise.

  I candidati nei concorsi di Agregation e di C.A.P.E.S. una volta che li abbiano superati passano un anno in un Centro Pedagogico Regionale.

  Questo anno di formazione professionale consiste nel fare ogni trimestre un tirocinio di otto settimane. All'inizio di ogni tirocinio il giovane insegnante osserva per circa due settimane l'attività didattica di un professore in una classe (Tale professore, detto "consigliere pedagogico", è ritenuto essere un buon professore); in seguito per le sei restanti settimane prende la diretta responsabilità della classe sotto la guida del suo "consigliere pedagogico".

La formazione dei nuovi professori è dunque fondata essenzialmente sul principio dell'imitazione, anzi si può dire ... dell'osmosi.

I titolari dell'Agregation, per i quali al termine del tirocinio non sono previsti esami, vi partecipano alcuni senza entusiasmo e altri, al contrario, con grande profitto. I titolari del C.A.P.E.S., che debbono invece superare un esame (il CA.P.E.S. pratico), sono più preoccupati di questo esame che della formazione pedagogica (vi è infatti per questo esame un certo numero, sebbene piccolo, di non promossi).

- i P.E.G.C. e i P.E.G.C.E.T. sono reclutati immediatamente dopo il baccalaurèat per mezzo di concorsi regionali (incomparabilmente più facili dell'Agregation e del C.A.P.E.S.) e ricevono una formazione di tre anni, i primi nei centri di formazione dei P.E.G.C. e gli altri negli E.N.N.A. (Scuole Normali Nazionali di Apprendimento).
  Il primo anno è passato in generale nell'Università ed è previsto un esame finale; solo i futuri professori di matematica passano nell'università una parte del secondo anno e comunque per nessuno è previsto un esame. Il terzo anno comporta essenzialmente tirocini di formazione pedagogica. Segnaliamo infine che la carriera di P.E.G.C. serve anche per le promozioni interne, per mezzo di esami regionali, di un certo numero di instituteurs.
- gli instituteurs sono reclutati anch'essi dopo il baccalaurèat per mezzo di un concorso regionale, superato il quale entrano in una scuola normale di instituteurs dove passano due anni. Il primo anno comporta fra l'altro un corso di scienza dell'educazione ed un tirocinio pratico di tre settimane ogni trimestre. Nel corso del secondo anno è prevista la presa di responsabilità di una classe per un periodo di tre mesi. Questa formazione è coronata da un certificato di fine studio della scuola normale. Dopo un anno di pratica professionale i giovani instituteurs passano, nella scuola dove insegnano, un ultimo esame che si chiama "certificato di attitudine". Bisogna sapere che, in massima parte, gli allievi della scuola normale di instituteurs provengono dalle sezioni letterarie del secondo ciclo dell'insegnamento secondario e considerano spesso la matematica come materia difficile e strumento di selezione; si consolano pensando che ciò che è necessario imparare nella scuola primaria è facile e tutto si risolve con un buon programma ed un buon libro.
  Si noti una prima frattura che separa la formazione degli instituteurs da quella degli altri professori nel senso che, soli fra gli altri, essi sono completamente esclusi dall'Università. Una frattura meno netta separa i titolari di Agregation e C.A.P.E.S. da P.E.G.C. e P.E.G.C.E.T.: questi ultimi fanno solamente una "visita" nell'Università e non vi si considerano come veri studenti.

Infine solo i titolari di Agregation e C.A.P.E.S. possono riflettere per alcuni anni dopo il baccalaureat prima di decidere il loro avvenire professionale mentre per gli altri questa decisione è presa immediatamente dopo l'uscita dalla scuola secondaria.

L'importanza riservata all'università nelle varie formazioni spiega senza dubbio l'ideologia dominante fra quasi tutti gli insegnanti: l'università è il luogo dell'elaborazione e della discussione del sapere, la scuola (primaria e secondaria) il luogo della trasmissione di questo sapere.

- Aggiornamento e formazione permanente

A meno di qualche trascurabile eccezione si può dire che i soli professori della scuola secondaria per i quali è prevista la formazione permanente sono quelli di matematica. Essa è data in Istituti denominati I.R.E.M. (Istituti di Ricerca per l'Insegnamento della Matematica). Si noti che, come è indicato dal loro nome, il lavoro di aggiornamento non è che una parte del lavoro degli I.R.E.M., ma è di questo che parlerò rapidamente.

Bisogna subito dire che il primo I.R.E.M. è stato creato nel 1968 e che attualmente ve ne sono 25 (circa uno per Académie). Ogni I.R.E.M. è aggregato ad una università e dipende nello stesso tempo dal Ministero dell'Università e da quello dell'Educazione. Questa situazione complessa permette loro di beneficiare di un'autonomia molto grande. Il direttore dell'I.R.E.M. è un professore o un maitre assistent nell'università di "agregation"; così si può dire per una parte di quelli che hanno funzioni di responsabilità; l'altra parte è costituita da professori della scuola secondaria (titolari di Agregation e C.A.P.E.S.). In ogni modo il personale degli I.R.E.M. lavora per metà tempo negli I.R.E.M. stessi e per l'altra metà nell'università o nella scuola secondaria; la carriera amministrativa si svolge negli enti di appartenenza indipendentemente dal lavoro degli I.R.E.M.

Questo statuto molto particolare spiega, forse, le enormi diversità riscontrabili nei lavori effettuati negli I.R.E.M; questo in particolare si riflette nelle azioni di aggiornamento:

1) corsi cattedratici di tipo tradizionale:
   - ad un livello elementare per formare, in vista del loro passaggio a P.E.G.C. gli instituteurs privi di una formazione iniziale matematica.
   - Ad alto livello per soddisfare la curiosità di professori (in maggioranza titolari di Agregation o C.A.P.E.S.) e riguardanti teorie matematiche recenti indipendentemente dalla loro eventuale utilità nell'insegnamento secondario.
2) gruppi di lavoro con vari obiettivi:
   a) in corrispondenza con i livelli abituali della scuola pre-universitaria (elementare, primo ciclo.....)

b) (ma anche) per rompere la rigidità di questa divisione in livelli (gruppo elementare-sixième, gruppo troisième-seconde, gruppo geometria, gruppo algebra, gruppo probabilità,....)

c) gruppi interdisciplinari: matematica-fisica, matematica-francese, matematica-psicologia, matematica-musica,.....

L'esperienza di diversi anni in seno all'I.R.E.M permette di affermare che:

1) il profitto ricavato dall'aggiornamento o dalla formazione permanente è sempre strettamente legato ai livelli di conoscenza e ai modi di pensare acquisiti nel corso della formazione iniziale;
2) il modo migliore di far prendere coscienza a degli insegnanti della loro insufficiente preparazione professionale è di costituire dei gruppi di lavoro i cui membri alternino la discussione, l'osservazione reciproca delle lezioni impartite agli allievi; le critiche e le messe a punto con l'aiuto dei responsabili degli I.R.E.M.

Segnaliamo infine che i professori che si aggiornano in un IREM beneficiano da due a tre ore settimanali di riduzione di orario di insegnamento per un periodo di circa due anni. Un bilancio approssimativo permette di valutare, partendo dal 1968, in 35.000 il numero di tali professori. Considerando questo numero il governo francese stima che l'aggiornamento dei professori di matematica è praticamente terminato e che gli IREM hanno completato la loro missione. Dall'ottobre 1977 le "risorse" degli IREM (risorse finanziarie e numero di ore settimanali da sottratre dall'orario di insegnamento) sono ridotte ogni anno del 20%. Il punto critico al di là del quale non si potrà più lavorare sarà raggiunto nell'ottobre 1980.

INTERVENTI NEL DIBATTITO

SPERANZA: Dalle relazioni sull'insegnamento in altri Paesi, si rileva l'importanza di una partecipazione diretta della base nella sperimentazione e nella conduzione del lavoro didattico. Una riforma, una revisione dei programmi debbono essere accompagnate da un movimento di base. Ritengo che sia essenziale un lavoro in profondo da parte delle Università nella formazione degli insegnanti.

Sarebbe poi interessante sapere se nelle LEA o comunque negli organi decentrati siano presenti esperti dei principali settori disciplinari (in particolare della Matematica); questa considerazione è collegata alla struttura degli Istituti regionali per la sperimentazione e l'aggiornamento nei quali di regola questo non accade. Dobbiamo comunque tenerci in contatto con questi Istituti perchè le idee che vengono elaborate nei nostri gruppi trovino una applicazione e una verifica nella realtà scolastica.

PUCCI: Trattando della organizzazione della scuola secondaria britannica in confronto con quella italiana si deve tenere presente che vi è una differenza istituzionale fondamentale fra la scuola secondaria britannica ed italiana: i titoli di studio non hanno valore legale in Gran Bretagna. Questa differenza condiziona tutto il resto.

Per chiarire questa differenza è opportuno considerare qualche esempio. In Italia chi ha il diploma di scuola secondaria può iscriversi all'Università; in Inghilterra invece lo studente deve superare un esame di ammissione presentando i certificati rilasciati dagli Examining Boards. Si tratta di esami selettivi : solo 50.000 circa sono ammessi al primo anno mentre che in Italia si iscrivono al primo anno universitario 250.000 studenti. In Italia il titolo di studio comporta automaticamente il collocamento in certe fasce del pubblico impiego (laurea: carriera direttiva; diploma di scuola secondaria: carriera di concetto; diploma di terza media: carriera esecutiva, altrimenti carriera ausiliaria). La legislazione italiana fornisce valori ai titoli di studio anche al di fuori del pubblico impiego ad esempio chi ha il diploma di geometra è abilitato a presentare progetti edilizi di un certo tipo e così via. Niente di tutto ciò avviene in Gran Bretagna; ivi le diverse scuole sono fra loro in certa misura concorrenziali e la piena autonomia didattica è condizionata dai risultati e dal giudizio degli utenti. Lo stato interviene finanziariamente così come potrebbe fare per sostenere il prezzo politico del pane senza poi dare istruzioni ai fornai sulla cottura perchè questa è regolata dalla domanda degli utenti.

Certi aspetti organizzativi del sistema britannico non sono pertanto trasferibili al sistema italiano almeno di non trasformare radicalmente la legislazione ed anche la società. Si deve tenere ben presente questo ed evitare l'errore di volere la botte piena e la moglie ubriaca, come una volta si diceva; cioè non si può avere titoli con valore legale e nello stesso tempo piena autonomia didattica.

Il sistema scolastico inglese è molto più idoneo del nostro ed anche di quello francese alla sperimentazione didattica ed alla sua valutazione. Per questo è, a mio avviso, particolarmente importante essere informati sui contenuti ed i metodi dell'insegnamento della matematica in Gran Bretagna.

PRODI: Gli "Istituti regionali di ricerca sperimentazione e aggiornamento educativi" stanno costituendosi proprio in questi giorni. Come membro del Consiglio dell'Istituto della Toscana vorrei esporre qualche impressione e qualche proposta scaturite da un primo contatto con i problemi.

Anzitutto, devo ricordare che la legge del 31 maggio 1974, n. 419 prevede che questi Istituti "si avvalgano, in via prioritaria, della collaborazione di cattedre e di istituti universitari". Per quello che riguarda la matematica, possiamo prendere atto che in numerose sedi universitarie vi sono istituti di matematica che sono in grado di operare attivamente, sia mediante i loro settori didattici, sia mediante i "Nuclei di ricerca didattica" del C.N.R.. La legge citata prevede che alcuni insegnanti possano essere comandati presso gli istituti regionali, e fissa, a questo scopo, una procedura che risulterà certamente complessa e lenta. A mio parere, occorre che gli Istituti regionali possano disporre anche di un numero piuttosto elevato di insegnanti sperimentatori-aggiornatori a metà tempo, da inserire con una procedura agile e rapida. Si deve anche notare che, di solito, gli insegnanti più capaci e preparati non vogliono perdere i contatti con la loro scuola.

Da questo punto di vista, è importante l'esperienza degli IREM francesi, come ci è stata riferita dal prof. Grunig; anche negli IREM i professori universitari e secondari sono presenti a metà tempo. Penso che il modello degli IREM sia validissimo per impostare l'attività dei nostri istituti regionali, almeno per quanto riguarda la matematica e le scienze sperimentali.

In conclusione: questa fase di impianto degli Istituti regionali mi sembra molto delicata: o il Ministro della P.I. farà uno sforzo organizzativo e finanziario - al dilà dei correnti metodi burocratici - oppure questi istituti moriranno prima di nascere.

TORELLI: Rilevo come nella composizione dei Consigli direttivi degli Istituti regionali di ricerca, aggiornamento e sperimentazione sia stata data una eccessiva importanza alla componente pedagogica e comunque umanistica. Gli ambienti dirigenti della scuola italiana si muovono ancora nell' ottica della riforma Gentile, secondo la quale solo le materie umanistiche hanno una effettiva, basilare importanza nella formazione dei giovani, assegnando agli studi scientifici e matematici in particolare, mere funzioni di semplice apprendimento di procedimenti di calcolo o di nozioni squisitamente tecniche. Anche se a vari livelli ci sono stati da tempo autorevoli interventi sul problema di come e quanto un opportuno insegnamento della matematica e delle scienze possa contribuire alla formazione dei giovani, sembra che ufficialmente queste idee non siano assolutamente recepite in "alto".

Bisogna d'altra parte che tutta la Facoltà di Scienze, come alcune già fanno, operino effettivamente in tal senso promuovendo incontri con docenti di scuole secondarie e segnalino le loro disponibilità agli IRRAS in ordine al problema di aggiornamento e consulenza sulla sperimentazione delle scuole pre-universitarie. Si sono già determinati rapporti fra la Facoltà di Scienze dell'Università di Trieste e l'Istituto regionale del Friuli Venezia Giulia appena sorto e iniziative in tal senso sono state prese anche dall'Istituto di Matematica dell'Università.

GRUNIG: Per comprendere la creazione degli IREM bisogna sapere che l'A.P.M.E.M. (Associazione dei professori di matematica dell'insegnamento pubblico) e la Commissione Lichnérowicz hanno avuto un ruolo molto importante. L'A.P.M.E.P. ha realizzato un aggiornamento "selvaggio" a partire dal 1960, ha pubblicato dei libri di aggiornamento, ha organizzato i professori di matematica e cercato di sensibilizzare l'opinione pubblica.

La buona intesa tra A.P.M.E.P. e Commissione Lichnérowicz ha preparato il terreno : dopo i fatti del 1968 niente poteva più impedire la creazione del primo I.R.E.M..

PELLIZZARO: Ascoltando le relazioni sulla struttura scolastica nei paesi europei e pensando alla situazione della Scuola Superiore italiana, mi sono posto la domanda se non sia il caso di aspettare ancora qualche anno (visto che la riforma aspetta dal 1965, cioè da tre anni dopo la riforma della Scuola Media Inferiore) e puntare ad una struttura scolastica, o almeno, a programmi unificati per tutta l'Europa.

I governanti sono riusciti ad unificare l'agricoltura, la moneta, fra qualche anno ci sarà il libero mercato dei calciatori, penso che dovrebbe essere più intenso un lavoro per l'unificazione dell'istruzione.

Un altro problema che mi fa meditare è il reclutamento, l'aggiornamento degli insegnanti e la loro situazione.

Dal 1974 non ci sono nè concorsi, nè corsi abilitanti. I Decreti Delegati prevedono l'istituzione dei Consigli di Classe e dei Collegi dei Docenti come organi di programmazione, che sulla carta hanno una grande autonomia, ma che raramente funzionano.

C'è una circolare sui corsi di aggiornamento e sulle 150 ore. Ma mancano gli stimoli, vuoi economici, vuoi di carriera.

L'insegnante attualmente si perde in anni di precariato, così da sentirsi sfiduciato per anni. Poi arriva al ruolo, quasi sempre per leggi speciali. Allora si siede e non si muove più. Carriera assicurata e fissata. Val la pena ricercare nuovi contenuti e nuovi metodi, senza contare che il distacco dall'Università rende sempre più difficile un aggiornamento personale?

Sono, questi, problemi da tener presente in ogni progetto di riforma.

GHERARDINI: Vorrei dare innanzitutto qualche informazione integrativa: rispondendo ad una domanda specifica del prof. Speranza, confermo il fatto che nelle LEA operano uno o più consulenti per i singoli settori disciplinari. Il ruolo di questi consulenti è molto importante, poichè essi non solo promuovono la ricerca e il dibattito sull'elaborazione dei curricoli didattici (attività spesso inserite nei programmi di aggiornamento dei docenti 'in servizio'), ma sono anche gli intermediari tra le scuole e le Autorità locali, con funzione di verifica e di valutazione delle esigenze provenienti dalle singole scuole.

Il secondo punto da chiarire riguarda gli orari di insegnamento, in particolare dell'insegnamento matematico. Tali orari, come ci si può aspettare, non sono fissati in modo uniforme in tutto il paese, e dunque non si possono fornire dati definitivi. Si può affermare tuttavia, come valutazione di massima, che la preparazione agli esami di Matematica normalmente sostenuti a 16 anni richiede circa 5 'periodi' di studio settimanali durante gli ultimi tre anni (almeno) precedenti la prova stessa; un periodo ha durata variabile da quaranta a cinquanta minuti. I corsi di preparazione agli esami GCE a livello Avanzato (18 anni, nello svolgimento 'naturalé' degli studi secondari) prevedono invece uno studio di circa otto periodi settimanali nelle classi denominate sixth forms: anche da questo dato si deduce che si tratta di uno studio già a carattere specialistico.

Per concludere, vorrei dire che non sono d'accordo con il prof. Pucci quando sostiene che certi aspetti del sistema inglese, soprattutto certe differenze rispetto alla scuola italiana, si spiegano con il fatto che in Gran Bretagna i titoli di studio non hanno valore legale. Non mi interessa ora analizzare (nè avrei gli strumenti per farlo) se effettivamente si possa usare la denominazione 'valore legale' del titolo di studio per descrivere quanto si verifica in questo Paese. Se però si va alla sostanza del problema si vede che il possesso di un certo numero e tipo di diplomi è anche in Gran Bretagna condizione necessaria (ma ovviamente non sufficiente) sia per accedere agli studi universitari, sia per aspirare ad occupazioni di tipo statale o privato. D'altra parte ritengo che, dando troppa importanza alla questione del valore legale, si rischi di sottovalutare aspetti, a mio avviso, molto più rilevanti, per esempio il fatto che in Gran Bretagna si riconosce apertamente alla scuola anche una funzione selettiva e che all'Università, vigendo tuttora il sistema del 'numero chiuso', non si accede automaticamente al termine dell'istruzione secondaria, ma occorre superare una sorta di concorso su base nazionale: in tale concorso ciò che conta sono proprio i titoli di studio secondario posseduti, il loro numero e tipo e a volte, secondo la facoltà a cui ci si vuole iscrivere, l'aver sostenuto o meno l'esame in certe discipline.

Aggiungo infine che un'attenzione considerevole viene posta dai vari Examining Boards e dall'organismo statale investito del problema degli esami, cioé lo School Council, nello studio e nel controllo sulla comparabilità dei curricoli e delle prove di esame proposte dai vari Uffici.

MALESANI: All'auspicio che abbiamo ascoltato di una unificazione in tutte le nazioni del MEC delle strutture e dei programmi scolastici, il prof. Pucci ha già obiettato ricordando il diverso valore legale dei titoli di studio delle varie nazioni. Sembra a me che questo ostacolo potrebbe forse essere rimosso in tempi ragionevoli; ma purtroppo non basterebbe. Esso è solo un segno di civiltà, di tradizione, di partecipazione alla vita comunitaria profondamente diverse nelle varie società nazionali; occorrerebbe rifarsi alla classica distinzione tra scuole di tipo anglosassone, sostanzialmente libere e sentite dalla società come un bene da seguire e curare nell'interesse di tutti, e scuole "napoleoniche" concepite come proprietà dello stato, gestite e regolamentate burocraticamente dai vertici politici e amministrativi, nel sostanziale disinteresse perfino degli utenti più diretti. Le relazioni che abbiamo ascoltato sono abbastanza illuminanti in proposito; d'altra parte sono note a tutti le difficoltà incontrate e la scarsa incidenza degli organi collegiali scolastici istituiti in Italia cinque anni or sono. Non penso, per queste considerazioni, che l'azione unificante debba essere tralasciata: bisogna però perseguirla con realismo e senza illusioni, soprattutto guardando a tempi molto lunghi.

Ma il motivo del mio intervento voleva essere un altro. Questo Convegno ci ha fatto conoscere interessantissime realtà di altre nazioni sulle strutture scolastiche, sui programmi, sulla preparazione e aggiornamento degli insegnanti; al di là degli interessi culturali e conoscitivi avremmo perso il nostro tempo se non pensassimo di servircene per progettare e realizzare anche da noi un tipo di scuola che tenga conto di ciò, mutuando, trasformando, adattando alla nostra realtà le esperienze degli altri. Ci troviamo invece di fronte a un progetto di scuola secondaria superiore, secondo una riforma già approvata da un ramo del parlamento, che ignora perfino le esperienze fatte con profitto nella stessa Italia e che sembra destinata - per molti dei vincoli in essa presenti - a declassare ulteriormente la già disastrata scuola di oggi. Per di più quel progetto è stato varato pressochè alla cieca perchè non vi sono indicati orari, programmi, utilizzazione dei docenti, inserimenti nella realtà sociale etc.

Sono daccordo con il prof. Speranza che la riforma della scuola non ce la dobbiamo aspettare dall'alto, che dobbiamo farcela noi; ma è anche vero che leggi e disposizioni che vengono dai vertici, se ricalcano la situazione attuale, ci impediscono di promuovere qualsiasi innovazione. Chiediamo dunque con molta energia che almeno ci si lasci operare; battiamoci con rinnovato vigore nell'UMI, nella CIIM, in tutti gli altri organismi scientifici, culturali, politici in cui ciascuno si trova ad operare perchè il progetto di riforma approvato dalla Camera venga radicalmente riesaminato al Senato tenendo conto delle obiezioni dei competenti e degli operatori scolastici e delle sperimentazioni positive effettuate in tante scuole e ampiamente documentate; associamoci, in questa azione, con altri organismi culturali, interessati ad altre discipline, che condividono la nostra impressione negativa sull'avviato progetto di riforma. Se riusciremo a ottenere questo senza far rinviare di altri vent'anni l'avvio della riforma stessa avremo fatta opera altamente meritoria.

AZZALI: Dalle relazioni sentite sulla scuola in altri paesi europei si deduce che gli insegnanti devono essere preparati (o per lo meno disponibili) ad un lavoro creativo, di équipe e a discutere di obiettivi e metodi pedagogici anche con colleghi di diversa disciplina. Che cosa fa all'estero e potrebbe fare in Italia l'Università per preparare i futuri insegnanti in questo campo?

DEDO': Nei corsi di riciclaggio per insegnanti è meno importante presentare nuovi contenuti o nuove metodologie rispetto al grosso compito di tentare di eliminare le storture concettuali che fatalmente sorgono dopo l'abbandono di studi sistematici.

GRUNIG: E' stata posta la domanda di sapere se l'insegnamento della matemtica in Francia è diretto verso la pratica, l'esposizione di una teoria o, infine, l'esposizione di qualcosa con lo scopo di farlo apprezzare agli allievi.

E' chiaro che non esiste una concezione francese e che tutte le eventualità proposte possono essere trovate realizzate nella pratica dell'insegnamento.

Dirò semplicemente che all'I.R.E.M. di Paris Sud, ogni volta che è possibile, cerchiamo di porci in un contesto storico, cioè tentiamo di tradurre a livello dell'insegnamento il fatto che una teoria matematica è una tappa nel processo di comprensione e "modelizzazione" della realtà fisica.

SECONDA GIORNATA - 21 aprile - Ore 9,00

LA GEOMETRIA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

Alberto Conte -"Sull'insegnamento della geometria nella Scuola Secondaria Superiore".

Devo confessare che ho provato un certo imbarazzo quando il prof. Villani e il prof. Pucci, che desidero qui ringraziare di cuore, mi hanno invitato a introdurre la giornata del Convegno dedicata ai problemi dell'insegnamento della geometria nella scuola secondaria superiore. Non sono infatti uno specialista di didattica della matematica né in particolare di didattica della geometria e, pur considerando questi problemi di grande importanza culturale e sociale, il tempo che posso dedicarvi è estremamente limitato e le mie informazioni in proposito sono sicuramente insufficienti. In particolare, non conosco a fondo l'attività dei Nuclei di ricerca didattica del C.N.R., anche se mi pare che essi costituiscano l'iniziativa più importante che si sia avuta in questi ultimi anni in Italia e quella che maggiormente ha servito a svecchiare e ad elevare la qualità dell'insegnamento della matematica nella scuola italiana. Poichè, tuttavia, dopo il mio intervento sono previste le relazioni dei nuclei, spero che la mia venuta a Ferrara, se non ad altri, sarà almento servita a me per colmare questa mia lacuna.

Per questo motivo non passerò perciò in rassegna, mettendole analiticamente a confronto fra loro, le varie "proposte" per l'insegnamento della geometria disponibili sul mercato: non mi interessa discutere se l'assioma A sia meglio dell'assioma B o se la nozione X debba essere introdotta prima, dopo o contemporaneamente alla nozione Y. E neppure affronterò il problema, serio ed importante, del ruolo che dovrà avere la geometria nell'ambito del programma di matematica della scuola superiore riformata (se mai ne avremo una!) e in particolare quello della sua ripartizione fra area comune e aree di indirizzo.

Vorrei invece fare alcune considerazioni generali sui problemi posti dall'insegnamento della geometria, partendo dalla constatazione che "niente funziona", cioè che nessuna delle soluzioni proposta appare pienamente soddisfacente, se non in tutti i dettagli, almeno nelle sue linee generali (dirò in seguito quali sono i motivi per cui mi pare che "niente funzioni"). Ho anche l'impressione che a questa situazione di disagio psicologico e di difficoltà oggettive la maggior parte degli insegnanti reagiscono insegnando sempre meno geometria e preferendo invece puntare su argomenti più "facili" (come l'algebra) o più di moda (come il calcolo delle probabilità).

Io credo (e non soltanto perché appartengo alla corporazione dei geometri, e devo quindi difendere la disciplina che ci permette di giustificare la nostra esistenza) credo, dicevo, che questo stato di cose sia estremamente insoddisfacente e che valga la pena di rifletterci su per vedere se è possibile trovare una via di uscita dignitosa. Non c'è infatti bisogno di scomodare le grandi tradizioni geometriche italiane, da Pitagora alla scuola di geometria algebrica, per rendersi conto che il concetto di spazio occupa un posto centrale nella cultura di ogni civiltà e che di conseguenza la geometria, la scienza dello spazio, deve far parte dell'educazione di ogni cittadino.

Se inoltre guardiamo allo stato attuale della ricerca geometrica (cosa che bisognerebbe sempre fare quando si parla di didattica della matematica, per evitare gli evidenti rischi di provincialismo e per cogliere tutte le potenzialità e gli stimoli che i progressi della ricerca mettono a disposizione) ci potremo rendere conto che in questi ultimi anni c'è stato un grande rilancio della geometria, intesa non soltanto come studio degli "spazi" (le "varietà" nelle loro diverse eccezioni) ma anche come specifico linguaggio contrapposto al linguaggio algebrico e analitico. Da questo punto di vista le vicende della geometria algebrica negli ultimi quaranta anni sono estremamente illuminanti. Come reazione alla mancanza di rigore presente nelle trattazioni classiche, intorno agli anni '40 ebbe inizio un processo di algebrizzazione che nel giro di vent'anni condusse a una sistematizzazione rigorosa dei fondamenti della geometria algebrica e alla dimostrazione (grazie anche alle tecniche coomologiche introdotte nel frattempo) di numerosi risultati di carattere molto generale, il linguaggio geometrico era stato sostituito completamente da quello algebrico. Il fanatismo dei sostenitori del nuovo corso era giunto a un punto tale che persino la parola "punto" era stata bandita per essere sostituita con 'anello locale". Le nuove tecniche, potentissime se paragonate a quelle tradizionali, si rivelarono però del tutto impotenti, a causa del linguaggio adottato, a risolvere i problemi geometrici concreti rimasti aperti. Soltanto un ritorno al linguaggio geometrico ha consentito negli ultimi anni di mettere a frutto le grandi potenzialità tecniche accumulate in questo periodo e si sono compiuti, così dei progressi sostanziali nella comprensione di molte proprietà delle varietà algebriche.

Questo recupero del linguaggio geometrico ha anche avuto un altro effetto importante. Ricorre quest'anno il centenario della nascita di Albert Einstein. Non c'è dubbio che la teoria della relatività generale costituisce il più bel esempio dell'interazione e della collaborazione tra matematica e fisica, di cui gli anni che vanno dal 1890 al 1920 rappresentano l'età dell'oro. Questo piacevole stato di cose si deteriorò però molto rapidamente. I matematici rivolsero sempre più la loro attenzione verso i fenomeni di carattere globale (varietà, fibrati vettoriali, coomologia), mentre i fisici si accontentavano di lavorare in coordinate locali. Di conseguenza, anche i loro rispettivi linguaggi incominciarono a divergere sempre più radicalmente. I matematici (in particolare, i geometri differenziali) incominciarono ad usare la notazione tensoriale invariante e le forme differenziali, mentre i fisici rimasero fedeli all'analisi tensoriale classica, un linguaggio che alla fine degli anni '50 essi erano gli unici ormai a capire. L'incomunicabilità tra matematici e fisici era diventata totale. Questa impossibilità di comprendersi fra matematici e fisici è stata l'ostacolo più grosso che si è opposto ai progressi della fisica nel dopoguerra, tanto da apparire quasi insormontabili. Oggi però le cose sono cambiate. Gli sforzi di alcuni matematici e fisici illuminati sono riusciti a rompere queste barriere di incomunicabilità e già le prime applicazioni alla fisica teorica delle tecniche globali della geometria algebrica e della geometria differenziale moderna hanno dato luogo a risultati inaspettati e ad altri ne daranno luogo sicuramente in futuro, tanto che non è difficile prevedere che assisteremo nei prossimi anni a progressi spettacolari nel campo della fisica (e, in particolare, in quello della cosmologia). Anche da questo punto di vista, quindi, appare confermata l'importanza della geometria come linguaggio e come strumento specifico di comprensione della realtà che deve perciò entrare a far parte di ogni serio "curriculum" per l'insegnamento della matematica.

Ma torniamo al nostro problema: quale geometria insegnare nelle scuole medie superiori e come insegnarla? Qui certamente, come dicevo, il panorama è molto meno esaltante, tanto che l'impressione che se ne ricava è che "niente funzioni".

Vediamo un po' meglio perchè. Tanto per cominciare, credo che tutti siano d'accordo che il modo tradizionale di insegnare la "geometria elementare" sia oggi del tutto improponibile. Definizioni vaghe, assiomi che non si sa bene se siano proposizioni evidenti, verità rivelate o proposizioni vere ma non dimostrabili, sfilze di teoremi sui triangoli che, invece di contribuire ad affinare l'intuizione spaziale dell' allievo e di metterlo in grado di formalizzarla in maniera rigorosa, lo gettano nella confusione e nello sconforto, l'uso (in generale impreciso e raffazzonato) del metodo di esaustione per calcolare aree e volumi trecento anni dopo l'invenzione del calcolo infinitesimale: sono queste soltanto alcune delle critiche più ovvie che si possono fare all'insegnamento tradizionale della geometria e che d'altronde tutti conoscono. "Abbasso Euclide", quindi, o meglio, abbasso la tradizione scolastica di banalizzazione di quel capolavoro, ovviamente storicamente datato, che sono gli "Elementi".

Fin qui, tutto bene, I problemi nascono, però, quando si tratta di decidere come sostituire i contenuti tradizionali con qualche cosa di nuovo e di diverso. La risposta più radicale a questo quesito è stata data in un libro famoso, "Algèbre linéaire et géométrie elementaire", da uno dei principali esponenti del gruppo di matematici francesi che si cela sotto lo pseudonimo di N.Bourbaki, J. Dieudonnè, ed è una risposta molto semplice: tutta la geometria tradizionale non è altro che una colossale truffa perpetrata per celare la vera disciplina che sta alla base di tutti i ragionamenti cosidetti geometrici. Questa disciplina è l'algebra lineare, ed è al suo studio che bisogna dedicare tutti gli sforzi un tempo dedicati allo studio della geometria. Ora, io credo che Bourbaki abbia avuto dei meriti grandissimi, che si possono riassumere brevemente in una sola frase: ha creato il linguaggio della matematica moderna, unificando in una mirabile costruzione unitaria dottrine che erano in precedenza completamente slegate fra loro e gettando così le basi per gli eccezionali progressi compiuti dalla matematica negli ultimi quarant'anni. Credo però che per quel che riguarda la geometria e l'algebra lineare, Bourbaki abbia preso, parlando per bocca di Dieudonnè, un granchio colossale. Il grande logico americano W.V.O. Quine diceva, criticando le forme più rozze di atomismo in fisica, che non sarebbe mai stato possibile convincere una persona sensata che il tavolo di fronte al quale stava seduta altro non era che uno sciame di molecole in perpetuo movimento. Analogamente, credo che sia difficile convincere chicchessia che lo spazio che ci circonda sia un insieme di vettori e che le sue proprietà più importanti siano legate alla linearità di certe applicazioni. Viene qui fatta, in realtà, una confusione rovinosa fra l'oggetto di studio della geometria, e cioè lo spazio (o gli spazi), e uno soltanto dei possibili modelli matematici che possono essere usati per studiarlo . E se è vero che dal punto di vista teorico questo modello è forse il più soddisfacente, è però altrettanto vero che esso è quello più lontano dalla realtà e il meno adatto a stimolare quegli automatismi mentali la cui acquisizione è sinonimo di buona intuizione spaziale. Annullando uno dei corni del dilemma, l'intuizione spaziale, si va incontro a un fallimento catastrofico. La maggior parte dei matematici francesi, sottoposti a questo trattamento, non hanno oggi alcuna famigliarità con i fatti geometrici più elementari. E se non ce l'hanno i matematici, figuriamoci i fisici, gli ingegneri o gli avvocati!

Anche questo approccio, dunque, "non funziona". Rimangono le soluzioni che tentano un compromesso fra una descrizione puramente assiomatica del piano e dello spazio basata sulle nozioni primitive di punto e di retta (alla Hilbert, per intenderci) e una descrizione che faccia uso fin dall'inizio della nozione di distanza, e quindi di numero reale. Fra tali impostazioni la più nota è quella di G. Choquet, nelle sue diverse varianti. Credo che, tutto sommato e in mancanza di meglio, sia questa la soluzione che sia preferibile adottare. Anche qui, però, ci sarebbero molte cose da dire.

Prendiamo ad esempio la questione del rigore e quindi delle motivazioni per l'introduzione dell'assiomatizzazione. Il rapporto fra intuizione e sua formalizzazione in un modello matematico rigoroso, ma proprio per questo necessariamente riduttivo, è uno dei problemi cruciali della matematica. Tradizionalmente, in Italia si usava porre l'accento sull'intuizione e dar prova di un certo sovrano disprezzo per il rigore. Francesco Severi, ad esempio,scriveva: "Io ripudio.... come dannoso nell'ambito didattico, quel bigottismo logico, che si compiace di aride schematizzazioni aspiranti al minimo di premesse assiomatiche, a scapito della evidenza e dell'aderenza della teoria al senso comune, e che nasconde, quasi come cosa impura, il segreto intuitivo di certe astrazioni, la cui conoscenza farebbe invece scendere dal limbo delle astruserie"; "l'intuizione non falla, mentre l'intelletto raziocinante può smarrirsi e si smarrisce talora nell'esercizio prolungato dell'escavatore logico, in una difficile ricerca". Si tratta, come si vede, di posizioni estreme che non possono essere assolutamente sottoscritte, anche se racchiudono un fondo di verità che non deve essere sottovalutato, soprattutto se si pensa al modo pasticciato e poco rigoroso in cui viene trattato di solito il problema della assiomatizzazione. Non mi è mai capitato, infatti, di trovare un testo scolastico in cui venisse spiegato con chiarezza che cosa è un sistema formale, qual è il ruolo giocato dagli assiomi e quali rapporti sussistono fra il sistema e le sue possibili interpretazioni. Così pure, tutti gli autori si affannano a spiegare che l'assiomatizzazione è necessaria per rendere rigorosi i ragionamenti geometrici, ma nessuno spende una parola per indicare quali sono le regole di derivazione che consentono di passare dagli assiomi ai vari teoremi. E' questa una lacuna che giudico assai grave e che vanifica tutti gli sforzi per presentare il linguaggio matematico come modello di rigore. Vi si potrà porre rimedio soltanto introducendo nella scuola italiana i primi elementi di logica matematica che potranno, tra l'altro, svolgere un ruolo culturale importante per i legami che consentono di stabilire fra matematica e linguistica.

Anche con questi correttivi, però, pure l'impostazione alla Choquet non mi pare del tutto soddisfacente, e questo soprattutto per una questione di contenuti. Mi sono sempre chiesto perchè l'insegnamento della geometria viene fatto di solito partire da quelle che sono le proprietà più complicate dello spazio, e cioè le proprietà affini e metriche, e non da quelle più semplici, e cioè dalle proprietà proiettive e topologiche. E' vero che per quel che riguarda lo spazio proiettivo c'è il problema degli elementi all'infinito, ma non mi pare che questo costituisca una difficoltà insormontabile. Inoltre, l'assiomatizzazione delle proprietà grafiche e di incidenza nello spazio proiettivo è patticolarmente semplice e intuitiva e consente quindi di studiare a fondo le proprietà formali del sistema di assiomi secondo le linee che ho indicato più sopra. C'è infine il grande vantaggio di poter presentare dei modelli nel campo delle geometrie finite che sono realmente alternativi al modello dello spazio ordinario e che servono perciò ottimamente allo scopo di chiarire la possibilità che uno stesso sistema di assiomi possa ammettere interpretazioni di natura anche molto diversa.

Quanto alle proprietà topologiche, è mia ferma convinzione che, descrivendo esse le proprietà più profonde dello spazio, sia assolutamente necessario introdurle nell'insegnamento della geometria fin dalle scuole medie, inferiori e superiori. Si può imparare più geometria maneggiando un nastro di Möbius che non studiando cento inutili teoremi sui triangoli. Il teorema di Borsuk-Ulam (che dice che schiacciando una sfera su un piano ci sono sempre due punti antipodali che vanno a cadere l'uno sull'altro) esprime una proprietà della sfera più profonda di tutte le possibili proprietà euclidee. Ci sono molti argomenti che possono essere trattati facilmente a livello di scuola media superiore. Non posso entrare in dettagli, ma vorrei soltanto segnalare la classificazione topologica delle superfici , che è un argomento affascinante e che può essere trattato con rigore e semplicità, come ho anche potuto constatare per mia esperienza diretta.

Queste mi paiono quindi le direzioni lungo le quali procedere: una maggior precisione e un maggior rigore nella presentazione assiomatica, magari limitandola a un frammento soltanto di geometria, e un allargamento delle tematiche dell'insegnamento che abbracci anche le proprietà proiettive e topologiche e che punti a una sempre maggior comprensione della natura dello spazio.

Nel fare ciò bisognerà naturalmente avvalersi di tutti quegli accorgimenti tecnici su cui mi pare esserci ormai largo consenso: l'uso e la costruzione di modelli geometrici, la fotografia, i films, l'approccio storico(che ritengo molto importante), l'insegnamento per problemi. E bisognerà cercare tutti i possibili collegamenti con le altre discipline, come ad esempio l'arte (e non penso soltanto allo studio della prospettiva, ma anche e soprattutto all'arte e all'architettura moderne in cui l'analisi delle forme geometriche ha giocato un ruolo molto importante) e l'educazione tecnologica (con un recupero del disegno e, perchè no?, della geometria descrittiva).

Mi pare che i nuovi programmi della scuola media inferiore recentemente pubblicati siano molto ben fatti e vadano nella direzione che ho indicato sopra. Si tratta ora di proseguire lungo questa via e di approfondire le nostre ricerche per poter individuare dei contenuti soddisfacenti anche per l'insegnamento della geometria nella scuola media superiore.

Relazioni sulle attività dei nuclei di ricerca didattica operanti nell'ambito di contratti del C.N.R.

CHECCUCCI: Nell'aprile del '76 fu presentato a Bologna il progetto "Mathematica come scoperta" con queste premesse:che si trattasse di una sperimentazione concreta, che sviluppasse i programmi nei dettagli, esplorasse la metodologia opportuna e fissasse anche i criteri di valutazione degli allievi rispetto alle mete formative stabilite. Per tre anni la sperimentazione ha avuto luogo parallelamente nei tre Nuclei di Pavia, Pisa, Trieste; a partire da quest'anno si è fusa in un unico Nucleo su tre sedi. Sono già usciti a stampa i primi due volumi del testo, con relative guide per l'insegnante:contengono un panorama pressochè completo della matematica elementare e superano per quantità i limiti di un biennio (almeno con gli orari attuali); sono, in fondo, un materiale su cui l'allievo può ritornare durante tutto il ciclo della scuola secondaria, per raggiungere quella visione unitaria e approfondita della materia, che è un obiettivo primario del progetto. In edizione provvisoria e fuori commercio si stanno approntando, di pari passo con la sperimentazione, alcuni quaderni per le ultime classi del triennio.

L'insegnamento è condotto per problemi; gli esercizi annessi a ciascun paragrafo aiutano a introdurre la teoria, a capirla nei suoi vari aspetti e infine ad applicarla; nozioni più astratte e generali non sono premesse, ma sono spesso ricavate da esempi concreti, con un lavoro graduale di sintesi e di generalizzazione, talvolta protratto nel tempo. Tutto ciò comporta un uso degli esercizi variamente finalizzato; piuttosto che più o meno difficili, gli esercizi hanno più spesso obiettivi notevolmente diversi, e ciò comporta nei primi tempi una certa difficoltà per l'insegnante a programmare il suo lavoro in classe, anche se al tempo stesso lo pone in una vera e propria attività di ricerca.

L'assetto della geometria è quello metrico, con un impiego profondo e semplificatore di strumenti algebrico-analitici fin dall'inizio; è un impiego che va di pari passo con l'impiego delle isometrie, in luogo del triangolo come "elemento rigido". Un esempio: siamo nel capitolo dedicato al 2° grado; il contenuto è in gran parte tradizionale, ma mette in risalto le novità di tipo metodologico, rispetto all'andazzo tradizionale: il 2° grado è introdotto attraverso la parabola (studiata abbastanza a fondo sia analiticamente, che sinteticamente, anche negli esercizi); poi tutto il capitolo si svolge in un continuo intreccio di metodi analitici e geometrici: così le relazioni per i segmenti che un cerchio intercetta sulle rette di un fascio sono ottenute col ricorso non soltanto a un riferimento cartesiano opportuno, ma ad uno addirittura che "varia" al variare della retta interessata (l'origine del riferimento è il centro (fisso) del fascio, mentre l'asse delle x è la retta che "varia" nel fascio).Nei contenuti l'impostazione della geometria si riallaccia a Birkhoff ed è abbastanza vicina allo schema assiomatico proposto da Choquet in appendice al

"L'insegnamento della geometria"; mentre però Choquet introduce la distanza soltanto dopo aver esaurito gli assiomi di incidenza e di ordine, nel progetto si parte proprio dalla distanza per introdurre il concetto di minimo percorso attraverso la disuguaglianza triangolare, e si passa poi alla retta, con la sua caratterizzazione metrica e con la partizione che essa induce nel piano; nel primo dei tre capitoli dedicati alla geometria e coi quali si chiude il primo volume c'è il grosso degli assiomi geometrici: A1 (assioma di spazio metrico), A2 (esistenza e unicità della retta per due punti), A3 (esistenza di tre punti non allineati), A4 (versi di una retta e caratterizzazione metrica del "segmento"), A5 (semirette e numeri reali positivi), A6 (rette e semipiani): coinvolgono, più o meno, la struttura del corpo ordinato dei reali. I ragazzi passano dal filone algebrico a quello geometrico conservando l'uso degli schemi mentali e delle proprietà formali dell'algebra; si spostano però ad un livello logico più elevato per fare i primi passi in quel processo di matematizzazione dell'ambiente, quando si vede la geometria come il primo e più grezzo capitolo della fisica.

In questo primo capitolo c'è, soprattutto, un costante ricorso alla disuguaglianza triangolare, con le implicazioni più svariate e, sovente, quando meno ce l'aspettiamo, il ricorso all'assioma A5 (semirette e reali). Il cerchio è già nato, prima della retta, nell'ambito degli spazi metrici; eppure quanto è ricca e stimolante la strada per "ritrovare" come e quando una retta interseca un cerchio! Per esempio, quando ancora mancano i semipiani, nel problema di trovare il punto di cerchio più vicino a un punto P esterno al cerchio, è giocoforza "cercare i punti in cui un diametro taglia un cerchio"e questi li dà A5; ci vorranno le isometrie per saperne qualcosa di più! Introdotti i semipiani, il linguaggio si arricchisce in modo coerente di tante figure elementari notevoli.

Nel capitolo successivo si introducono le isometrie; dopo un'esplorazione a livello intuitivo si passa a formulare una definizione precisa di isometria e ad apprezzarne l'importanza dimostrando come le isometrie si comportano con le più elementari figure geometriche. Ma non basta: si particolarizza una particolare isometria, la simmetria rispetto a una retta, e si introduce di conseguenza la nozione di perpendicolare ad una retta data: è solo a questo punto che si inserisce l'assioma (è A7) dell'esistenza e unicità della simmetria assiale rispetto ad una retta, con un processo che diventa induttivo-deduttivo (al posto del del tradizionale "ipotetico-deduttivo").

Gli sperimentatori sono pressochè unanimi nel constatare che l'insegnamento della geometria (ma non solo di essa) con una impostazione assiomatica è accettato dagli allievi senza difficoltà; sembra semmai eccessivamente denso e difficile questo capitolo; va però detto che proprio in questo capitolo (dove un altro assioma soltanto "l'assioma A8 che assicura l'esistenza e unicità della simmetria assiale che scambia due punti assegnati" completa quanto occorre per avere la geometria assoluta) si entra nel vivo delle situazioni geometriche, conservando però vivo quello spirito critico che nasce dalla mancanza dell'unicità della parallela, con tutto ciò che comporta a livello intuitivo. A questo punto, per esempio si scopre che una retta che tagli un cerchio in un punto ma non sia perpendicolare al raggio per quel punto, taglia il cerchio in un altro punto e dista dal centro meno del raggio. Solo nel capitolo seguente avremo gli strumenti elementari che assicurano il viceversa. Intanto caratterizziamo la perpendicolarità in termini di distanza, con ovvie conseguenze, nasce l'asse di un segmento con la caratterizzazione dei due semipiani opposti rispetto a una retta in termini di distanza e la bisettrice di un angolo; con la simmetria rispetto a un punto si crea tutto un complesso di strumenti che portano l'allievo molto lontano, in particolare la proiezione ortogonale che apre il terreno all'ultimo dei nostri assiomi (a parte quello sulla misura degli angoli che è provvisoriamente enunciato nel 2° volume e che sarà "dimostrato" nel 2° dei quaderni ricordati sopra).

Nell'ultimo capitolo del 1° volume l'approdo all'assioma A9 sul "rapporto" di proiezione (il teorema di Talete quando la proiezione parallela è quella ortogonale) avviene quando gli studenti hanno familiarità con la proiezione ortogonale e con la problematica connessa al concetto di "angolo acuto" (per esempio: dimostrare che in un triangolo con un angolo retto, gli altri due sono acuti). Due semplici osservazioni sul triangolo rettangolo:

- il vertice dell'angolo retto si proietta internamente all'ipotenusa,
- una doppia proiezione di ciascun vertice dei due angoli acuti porta allo stesso punto dell'ipotenusa,

conducono a una dimostrazione del teorema di Pitagora, inquadrata in modo brillante nell'ambito dell'intera teoria ed è una buona palestra per l'uso del rapporto di proiezione. Seguono facilmente l'unicità della parallela e si completa ciò che già sapevamo in geometria assoluta su perpendicolarità e parallelismo. Meriterebbe un maggiore sviluppo l'analisi nel quadro dei nostri assiomi delle ben note proprietà atte a caratterizzare i parallelogrammi, i rettangoli, i rombi, i quadrati.

I riferimenti cartesiani, coi quali si chiude il primo volume saldano il filone algebrico a quello geometrico del primo anno. E' l'apertura a tutta un'attività che gli allievi troveranno al secondo anno, operando sul piano logico con tutta la ricchezza dovuta all'uso simultaneo dei modi di ragionare propri dell'algebra e della geometria.

Passando rapidamente in rivista gli argomenti di geometria trattati nel 2° volume, un primo capitolo è dedicato al gruppo di traslazioni, che di fatto sono il supporto geometrico ai problemi lineari del capitolo successivo. Un altro capitolo è dedicato ad una trattazione sistematica delle isometrie; vi trovano posto le rotazioni, i criteri di uguaglianza dei triangoli e il problema del la misura degli angoli, mentre il capitolo successivo allarga il discorso al gruppo delle similitudini ed al problema del cambiamento dell'unità di misura.

La trigonometria, come i numeri complessi, sono in un certo senso al di fuori della geometria, ma allargano ancora di più il campo di strumenti a disposizione degli allievi nella soluzione dei problemi geometrici.

Gli sperimentatori riconoscono i vantaggi di un'impostazione metrica della geometria su basi assiomatiche, con pochi teoremi ma tutta una serie di problemi in cui c'è qualcosa da trovare oppure c'è qualcosa da dimostrare e, più o meno, riscontrano negli allievi più elasticità, più inventiva, più fantasia.

Per i nuovi insegnanti, però le difficoltà di impadronirsi di questa impostazione sembrano notevoli, nè sembra sempre realistica la proposta di "preparare" per tempo il materiale che occorre per il lavoro in classe.

A parte qualche modifica al testo od anche a pochi problemi della geometria del 1° volume, la soluzione migliore sembra quella di approntare un ricco eserciziario di appoggio ai problemi del testo, distinti secondo le diverse finalità dette all'inizio. Ne dovremo discutere i particolari in un convegno nel prossimo dicembre.

Entro il mese di luglio dovrebbero essere pronti due quaderni dedicati alla geometria nel triennio. Il primo, piuttosto breve, conterrebbe dei Complementi di geometria del piano; precisamente: cambiamenti di riferimento cartesiani; forma canonica dell'equazione dell'ellisse e dell'iperbole; equazione in coordinate polari di una conica luogo dei punti le cui distanze da un punto e da una retta hanno rapporto costante; riduzione di una conica a forma canonica. Seguirebbero alcuni esercizi. Il secondo, dedicato alla geometria dello spazio, si propone di favorire e sviluppare l'intuizione spaziale. Dopo una breve premessa di proprietà sulla perpendicolarità e il parallelismo (quanto basta per introdurre i riferimenti cartesiani nello spazio) segue tutta una vasta gamma di problemi graduati, in generale sintetici ma anche analitici, di geometria dello spazio. Dovrebbe seguire una breve presentazione di cinque poliedri regolari coi loro gruppi di simmetria.

MANCINI PROIA: La sperimentazione è portata avanti da cinque insegnanti impegnati attualmente su un totale di venti classi sperimentali fra biennio e triennio. Il corso sperimentale comprende quattro indirizzi; classico, scientifico, scientifico-informatico, linguistico, in cui è molto vasto il tronco comune.

Nel nostro programma base di matematica si dà largo spazio all'insegnamento della geometria perchè con la possibilità che essa ha di ricorrere ad un concreto immediato permette un più agevole approccio al processo ipotetico-deduttivo. Processo che se non imposto, ma conquistato, può diventare un abito naturale. In questo senso l'insegnamento della matematica ha una forte componente sociale: indagare le ragioni della diversificazione di più posizioni, porre l'ac cento sui fatti essenziali sfrondando la via dalle cose di poca importanza.

Anche se si dà ampio campo all'insegnamento della geometria non si perde mai di vista l'unitarietà della matematica: gli strumenti disponibili si integrano sempre quando conviene,qualunque argomento si tratti.

Il nostro corso (14-18 anni) si inizia come una naturale continuazione di quello della scuola media tenendo conto delle conoscenze acquisite. Il primo passo è quello di chiarire ed ampliare il concetto di operazione.E' per questo che si affrontano quasi subito le aritmetiche dei resti mod.n. In tal modo dal confronto delle analogie e discordanze con l'aritmetica ordinaria si può porre l'accento sulle proprietà delle operazioni. Il concetto di operazione esce così dall'angusto campo in cui i giovani di questa età lo vedono relegato.

Si introducono nozioni di logica delle proposizioni, questo in concomitanza con le lezioni di Italiano. Le implicazioni ad esempio si introducono sui fatti della vita comune: se ..... allora, condizione necessaria, condizione sufficiente, condizione necessaria e sufficiente nascono legati a ragionamenti non strettamente matematici.
Intuizione e razionalità convivono sempre.

All'inizio è preponderante l'intuizione, a mano a mano aumenta sempre più il bisogno della verifica razionale. La geometria è trattata dal punto di vista delle trasformazioni (Klein). Si parte dal piano metrico e si costruiscono le isometrie come prodotto di simmetrie ortogonali (Bachmann).

Il procedimento didattico seguito è il seguente: prima si cerca di far scoprire, anche col disegno, le proprietà, successivamente si passa alla giustificazione razionale. Il momento più difficile del passaggio al razionale è proprio questo, occorre stimolare gradualmente, senza forzare per evitare l'incomprensione e quindi la noia. Lo scopo immediato è quello di far sentire la necessità della deduzione in piccolo, l'organizzazione razionale a questa età sfugge.

Nella linea seguita si presenta, quasi subito, la necessità di dimostrare un teorema non evidente: una isometria con tre punti uniti non allineati è l'identità. Questa è una occasione per valorizzare agli occhi degli allievi il ragionamento rispetto all'intuizione. Soltanto alla fine del primo anno però, quando si è dimostrato che la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto, si passa ad osservare un triangolo sulla sfera "perchè del resto la terra assomiglia più ad una sfera che ad un piano ....". Ragionando su un quarto di sfera, per evitare complicazioni, si nota che il teorema fondamentale della geometria euclidea non è più vero, nasce allora il problema del "perchè" e si trova, ragionando su una palla, che sulla sfera non esiste la parallela ad una retta da un punto esterno.
Questo permette di concludere che l'esistenza della parallela ad una retta è un

fatto del piano (euclideo) ma non della sfera. Si ha quindi:

piano	sfera
per due punti passa una	per due punti passa una
ed una sola retta	ed una sola retta
per un punto esiste, ed	------------------------
è unica, la parallela ad	
una retta assegnata	

Si riflette: come è possibile che procedendo sempre razionalmente si arrivi a conclusioni diverse?

Con un ragionamento estraneo alla matematica ci si propone allora la costruzione di un vocabolario razionale, cioè tale che tutti i termini siano rigorosamente definiti, senza circoli viziosi. Ci si accorge così che non si possono definire tutti i termini "almeno l'ultimo e non uno soltanto restano non giustificati". Vorrà allora dire che non è possibile costruire una scienza dove tutto è giustificato, bisognerà necessariamente ammettere qualche cosa. In questo modo vanno interpretate le ammissioni da cui partono la geometria piana e quella della sfera, esse sono "affermazioni non giustificate".

Questo è l'obiettivo del primo anno. Con ciò però non si intende affermare che a questo livello i giovani abbiano chiaro il processo ipotetico-deduttivo, si tratta solo di un primo approccio.

Nel secondo anno si costruisce il gruppo delle isometrie e quello delle similitudini. A questo livello i giovani sanno dimostrare un teorema.
Per dimostrare un teorema non si intende "ripetere un teorema", ma si intende la acquisizione della capacità da parte del giovane di porsi in un atteggiamento critico di fronte ad un enunciato per la ricerca di una via che dalla ipotesi lo porti a conquistare la tesi e spesso anche a riuscire nell'intento.

Nel triennio, pur mirando ad affinare sempre più le capacità razionali degli allievi non si rinuncia mai all'ausilio dell'intuizione, appoggiata sul concreto.
Così, sempre a partire dagli invarianti che legano una figura "piana" alla propria ombra prodotta dai raggi del sole su un piano incidente quello della figura si intuisce l'esistenza di una corrispondenza fra i piani sovrapposti, con una retta unita, che mantiene il parallelismo. Si parte da questa intuizione per costruire effettivamente l'omologia piana affine, se ne studiano le proprietà, si riconoscono fra queste quelle intuite. Si determina l'affinità piana come prodotto di una similitudine e di una omologia affine. Si studia il gruppo delle affinità e si ritrovano i sottogruppi delle similitudini e delle isometrie.

Gli invarianti invece che legano una figura "piana" alla sua ombra prodotta da una lampada (sorgente puntiforme) su un piano incidente quello della figu ra guidano alla introduzione dell'omologia. L'omografia piana si ottiene dal prodotto di due omologie e di una affinità. Si costruisce il gruppo delle proiettività piane e si ritrovano quelli studiati come sottogruppi.

Parallelamente, a partire dal secondo anno del triennio si enuncia una assiomatica affine in S^2 e S^3, se ne studiano le proprietà, si introduce lo spazio vettoriale, si riordina la geometria analitica affine. Si determinano le equazioni generali di una affinità e si estendono a quelle di una proiettività.

Lo spazio affine si restringe a quello metrico con l'introduzione del prodotto scalare e questo, mentre da una parte permette di riallacciarsi alle proprietà metriche a suo tempo studiate, dall'altra permette lo studio della geometria analitica metrica e della trigonometria, vista nelle sue vere dimensioni di piccola parte della geometria metrica. Dalle equazioni generali di una affinità si deducono quelle della trasformazione lineare generale e da queste si ritrovano quelle delle affinità e delle isometrie.

Riassumendo: nel nostro progetto sono individuabili due nette vie distinte fra loro; una di estensione, più intuitiva, che inizia nei primi anni e partendo dal piano metrico, per successivi ampliamenti arriva a quello proiettivo. L'altra di restrizione, più rigorosa, che si affronta soltanto a partire dal secondo anno del triennio e che dal piano proiettivo, per l'aggiunta di successivi condizionamenti porta a quello metrico.

In questo modo si vuole dare un'idea piuttosto completa di quello che è un procedimento ipotetico deduttivo. Con un capitoletto sulle geometrie finite si intende porre l'accento, almeno per gli alunni che lo desiderano, sul problema del valore degli assiomi. Questi problemi, che presentano un interesse anche al di fuori della matematica, aiutano i giovani a chiarire le posizioni di tanti pensatori. Nasce da qui la necessità di ricercare insieme ai docenti di varie discipline per chiarire ed approfondire i movimenti culturali più toccanti.

SPERANZA: Non fa meraviglia che l'insegnamento della geometria si presenti come un problema particolarmente rilevante per chiunque affronti un rinnovamento dell'insegnamento matematico: e si tratta di un problema diverso per ogni fascia scolastica. Da un lato la geometria ha la sua radice nell'esperienza spaziale, e si fonda su una forma di intuizione che non è fra le più semplici; dall'altro lato essa è arrivata a svilupparsi in quanto scienza deduttiva, ma non certo delle più semplici, richiedendo un apparato abbastanza complesso: e altri rami della matematica sono più semplici anche perchè più "giovani", meno carichi di condizionamenti storici. Ancora, gli stretti collegamenti con altri settori della matematica pongono problemi di organizzazione del curricolo non sempre di facile soluzione.

Il nostro gruppo si occupa di problemi metodologici, e in questa relazione troverete quindi riferimento soprattutto a problemi di questo tipo: ciò in definitiva aggiunge nuove preoccupazioni a quelle riguardanti semplicemente i contenuti. Ritengo opportuno che la discussione vada divisa in due parti; quella riguardante la geometria deduttiva, o sintetica, e quella riguardante la geometria analitica. Rispetto alle trattazioni tradizionali, riteniamo sia bene, nella globalità della scuola secondaria superiore, aumentare il peso della geometria analitica e ridurre quello della geometria sintetica. Intanto, a livello superiore, ci sembra corretto identificare, almeno nelle grandi linee, la 'geometria sintetica' con la 'geometria deduttiva': e pensiamo, nonostante la precedente asserzione sull'equilibrio con la geometria analitica, che vadano rivalutati gli aspetti più caratteristici del metodo deduttivo. Ciò significa che non è importante veicolare per questa strada tutti i "contenuti", dimostrare tutti i teoremiche in teoria andrebbero dimostrati. Per una parte dei contenuti si potrà utilizzare quanto si è appreso nella Scuola Media (in cui l'insegnamento della geometria andrà particolarmente curato anche senza riferimento al proseguimento degli studi!), altri contenuti potranno essere dati in modo meno formale, e soprattutto attraverso il metodo analitico.

Sappiamo che è diffuso il convincimento che i contenuti geometrici debbano conservare il loro status di teoremi così come sono tradizionalmente presentati. Esaminiamo con attenzione il problema:

Qual'è l'importanza di una presentazione deduttiva sul piano dei contenuti?

Qual'è la sua importanza sul piano formativo?

Per molti teoremi che si trovano nelle trattazioni tradizionali, nutro forti dubbi che essi siano effettivamente importanti per i contenuti. Molto spesso la loro importanza sta nell'essere utilizzati (o utilizzabili) per dimostrare teoremi 'più importanti'. Si pensi, ad esempio, al primo teorema di Euclide usato per la dimostrazione del teorema di Pitagora. Non che si voglia qui disconoscere una utilità al primo teorema di Euclide: ve ne sono di ben più "strumentali". Buona parte di quelli veramente "importanti" (il teorema di Pitagora e quello di Talete, la somma delle ampiezze degli angoli di un triangolo, i criteri di congruenza, la disuguaglianza triangolare,...) sono, o dovrebbero essere, noti dalla Scuola Media: e la loro importanza può evidenziarsi assai meglio dalla loro utilizzazione per risolvere problemi, per sistemare la geometria analitica, cioè in generale in situazioni applicative, piuttosto che al termine di catene deduttive.

E' poi dubitabile che sia particolarmente formativo apprendere (troppo spesso a memoria, non illudiamoci) dimostrazioni già confezionate, senza vedere come esse sono sorte, senza avere un'idea dei procedimenti euristici che hanno condotto primariamente a ipotizzare l'esistenza d'un certo teorema.

Siamo così passati a considerare la validità della geometria dedut-

$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

tiva sul piano formativo. E' certamente formativo risolvere problemi più o meno complessi, e per far ciò occorrono ovviamente certe conoscenze di geometria: ma non è detto che tali contenuti di base debbano essere necessariamente forniti entro un quadro complessivo di carattere deduttivo.

X Mi sembra piuttosto che possa essere formativo arrivare ad avere una idea della struttura di una teoria deduttiva, a cominciare dal momento iniziale in cui ci si propone appunto di sistemare un certo ramo del sapere in modo rigoroso. A questo proposito possiamo porci le seguenti domande:

I) A che età è utile che gli allievi incontrino una teoria ben costruita?
2) Cosa si deve intendere, sul piano didattico, per "teoria ben costruita"?
3) Come ci si avvicina a una teoria ben costruita?

I) Riteniamo giusto che a tutti gli studenti sia dato modo di osservare e di vivere dall'interno una teoria ben costruita: questo deve avvenire quindi entro l'arco dell'obbligo, e a questo proposito è opportuno il prolungamento di questo oltre l'attuale Scuola Media. La costruzione di una teoria va fatta tuttavia con criterio, sulla base delle effettive possibilità della classe: non imponiamo perciò a priori di far poco, lasciamo all'insegnante la scelta di quanto sia opportuno fare.

2) Una teoria ben costruita è una teoria nella quale si chiarisce cosa vuol dire definire un termine, e quindi sono precisati i termini primitivi, e in cui si chiarisce cosa è una dimostrazione, e quindi in particolare sono precisati gli assiomi. Ora, il testo di Euclide non soddisfa interamente questi requisiti, e ancor meno li soddisfano molte trattazioni tradizionali. Le sistemazioni alla Peano o alla Hilbert risultano certamente complesse, e possono risultare quel molto che abbiamo voluto non vietare, nel caso esso risulti praticabile.

3) Ma allora, una trattazione razionale della geometria è proponibile? L'importante è lo spirito di una tale trattazione, e in questo senso pensiamo che essa sia proponibile. Basterà limitarsi a una parte dei contenuti, a una parte degli assiomi (e dei teoremi che se ne possono dedurre), dedicando molta attenzione alle questioni preliminari: la ricerca dei termini primitivi e degli assiomi (che non balzano così all'improvviso, ma sono stati suggeriti da certe esigenze di rappresentazione dei contenuti e di organizzazione del discorso), analisi accurata dei legami con altre parti della matematica, costruzione attenta del discorso, eccetera. A questo scopo un buon esempio potrebbe essere fornito dalla geometria affine (ridotta ovviamente ai suoi elementi essenziali).

Riteniamo utile e formativa qualche considerazione di carattere metateorico (si badi bene, non proponiamo di teorizzare sulla distinzione fra teoria e metateoria, intendiamo solamente fare qualche considerazione metateorica, mettendo in evidenza la sua specifica diversità dai ragionamenti all'interno della teoria). Ecco alcuni esempi:

I) Ci si chiede a cosa serve un certo assioma, come si può dimostrare se lo si ammette, cosa non si arriva a dimostrare in caso contrario. A questo proposito mi sembra di poter osservare (il che, se volete, è implicito in una eventuale scelta della geometria affine come campo di studio) che l'assioma delle parallele è abbastanza 'naturale', collegabile con altri aspetti della matematica, e quindi ci si può ben permettere di enunciarlo e utilizzarlo per tempo (credo che ormai possiamo considerare superato il trauma millenario da esso provocato, che ancor oggi lo fa spesso confinare all'ultimo posto della lista degli assiomi).

II) Le trattazioni tradizionali della geometria non distinguono fra la teoria e i suoi modelli. La nozione di modello resta oscurata dal fatto che qui ce n'è 'uno solo' (lo spazio intuitivo), non esattamente definibile e alquanto complesso; e la trattazione teorica è spesso inficiata da richiami non eliminabili al modello (il che accade quando 'ci si fida della figura').

Se si ritiene che un ricorso a modelli geometrici comporti una rottura troppo brusca con schemi consolidati, la dialettica teoria-modelli potrà essere esemplificata su altri contesti: ciò ha comunque un valore epistemologico, per mostrare che l'assiomatizzabilità non è una prerogativa della geometria, e neppure dei contesti tradizionalmente 'matematici', e che sono assiomatizzazioni operazioni semplici, che compiamo assai spesso.
Possiamo a questo scopo parlare del codice stradale (il sistema di assiomi) e di una situazione di traffico (il modello); delle regole d'un certo gioco e di una effettiva partita, eccetera.

Si è discusso su quale sia l'età più adatta per introdurre la geometria deduttiva. Ovviamente, la variabile che influisce maggiormente sulla risoluzione del problema è la capacità degli allievi a seguire un discorso formale; e su questa pesa il modo in cui è avvenuto l'insegnamento nella Scuola Media (uno degli scopi è quello della formazione del pensiero formale). C'è chi ritiene che nel biennio sia un po' presto per cominciarla: anche qui distinguerei fra 'contenuti' e 'metodi'. Una trattazione con molte dimostrazioni può essere troppo pesante nel biennio, ma non dovrebbe esserlo un approccio ragionato, che apra nuove prospettive, come è stato delineato nelle considerazioni precedenti: esso richiede una certa flessibilità e disponibilità a percorrere nuove strade (una certa dose di 'pensiero divergente'), che nell'età del biennio si può trovare più facilmente che in allievi degli anni successivi che non siano stati abituati per tempo a una visione più dinamica della matematica. Quindi un primo approccio andrebbe effettuato nel biennio.

Anche per la geometria deduttiva, ovviamente, possiamo raccomandare una partecipazione attiva degli studenti alla costruzione del pensiero matematico: in fondo tale partecipazione non è solo un mezzo per raggiungere certi obiet tivi, è essa stessa uno scopo primario, al di sopra dei contenuti che vengono insegnati. A questo obiettivo si presta bene un'analisi dei principi della geometria e dello stesso metodo assiomatico-deduttivo. La discussione può avvenire a livello di classe sotto la direzione dell'insegnante, o a piccoli gruppi secondo una traccia o con l'uso di schede: si approfondiscono le esigenze di chiarezza e di rigore, si inquadrano (quando è il caso) le considerazioni in problematiche più generali, si esaminano situazioni avvicinabili all'apparato ipotetico-deduttivo, ... Alcuni casi potranno essere riservati per essere utilizzati come rinforzo o recupero.

Più avanti, un argomento particolarmente interessante è dato dalle trasformazioni geometriche. La sua trattazione potrà essere più o meno rigorosa: ci si potrebbe limitare ad esempio ad usare volta per volta il sistema d'assiomi minimo. Le trasformazioni geometriche consentono di introdurre una nuova operazione, la loro composizione, che può essere il primo avvio alla composizione di applicazioni, e che dà un approccio ai gruppi del tutto naturale (fra l'altro, consente di avere esempi di gruppi finiti di tutti gli ordini). Per questo, è essenziale lo studio delle trasformazioni d'un certo tipo (ad esempio, isometrie) che trasformano una certa figura in sé. E' interessante effettuare tale studio anche per una figura "colorata", in modo da accostare al gruppo delle trasformazioni che trasformano la figura geometrica in sé il sottogruppo delle trasformazioni che conservano i colori e quello delle trasformazioni che operano una sostituzione sui colori. La trattazione potrebbe essere rinforzata da suggerimenti e da esempi tratti dalle scienze naturali e dall'arte.

Altro argomento da segnalare è quello delle similitudini.

Come abbiamo detto, è consigliabile un potenziamento della Geometria analitica. Un primo motivo, al quale forse non si pensa abbastanza, è che questa ultima rende più concreta la trattazione della geometria: infatti quella sintetica si svolge sempre su enti variabili (quando si dice "prendiamo un punto, di qualsiasi triangolo, ...", si tratta in realtà di un qualsiasi punto, di un qualsiasi triangolo,...). Con la geometria analitica, invece, fissato il sistema di riferimento, ogni oggetto geometrico è individuabile in modo ben preciso: le coordinate di un punto sono il suo "nome proprio". Fortunatamente, è ormai assai diffusa l'abitudine di introdurre qualche prima idea già nella Scuola Media. In ogni modo, si potrà cominciare a familiarizzare gli allievi:

con la lettura di carte geografiche e topografiche,

con l'uso di carta millimetrata e della comune carta a quadretti (è bene non fissarsi su un metodo unico, in particolare su un'unica unità di misura).

Dopo questo primo approccio, si darà la precedenza a qualche rappresentazione di semplici fenomeni in forma geometrica. Si potrà, ad esempio, cominciare a osservare che una funzione lineare è rappresentata da una retta, e si comincerà a ipotizzare che vale la proprietà inversa: solo in un secondo tempo si verificherà questa ipotesi, e più in generale si cercherà la rappresentazione algebrica di luoghi geometrici. Converrà studiare anche la rappresentazione analitica di enti geometrici bidimensionali nel piano, e corrispondentemente quella geometrica di disequazioni: qui c'è buon gioco per risolvere qualche semplice problema di programmazione lineare. Anche le trasformazioni geometriche consentono utili applicazioni. Senza esagerare, converrà confrontare l'analisi e la risoluzione di problemi per via sintetica e per via analitica.

La geometria analitica consente di far lavorare autonomamente gli allievi senza staccarsi troppo dalla tradizione: anche per questo ci sentiamo di suggerire una più vasta trattazione della geometria analitica (in attesa, almeno, di una maggiore diffusione di altre metodologie).

Alla geometria analitica riteniamo giusto collegare strettamente la trigonometria e i primi elementi di analisi. Si può quindi dire che essa svolge un ruolo centrale nel complesso degli argomenti del programma di Matematica.

LOREFICE: E' da molto tempo che sull'insegnamento della matematica, della geometria in particolare, leggiamo e ascoltiamo cose egregе: non sapremmo aggiungere una parola di più.

Tre anni fa, l'UMI-CNR, ci ha dato la possibilità di tentare di tradurre in realtà operante, cioè in sperimentazione, le parole che da tante parti per anni si erano riversate su di noi; parole che ci avevano affascinato ma che contemporaneamente ci avevano dato lo sgomento di una meta irraggiungibile con le nostre forze.

Ci abbiamo provato e, a poco alla volta, ci è sembrato di rilevare che le difficoltà che ci eravamo prospettate erano dovute più alle "incrostazioni" delle nostre menti (cioè ai condizionamenti esercitati su di noi da un insegnamento acritico, ripetitivo, metodologicamente discontinuo, subito fin dall'infanzia) che ad una obbiettiva indisponibilità da parte degli allievi a recepire il nostro insegnamento.

Decisivo, all'inizio della nostra attività, è stato l'intervento del professor Speranza sia per la costruzione del curriculum sia per il principio sul quale fondare la metodologia da sperimentare; nel curriculum era previsto un esame degli assiomi della geometria euclidea e, direi quasi d'istinto, non dubitammo che geometria dovesse insegnarsi in un biennio.

Quando, partito il prof. Speranza, ci siamo messi all'opera, abbiamo dovuto rispondere a delle domande che noi stessi ci ponevamo; va bene insegnare geometria ma:

I) con quali obbiettivi?

2) quale geometria?

3) come?

Profondamente convinti del valore formativo del metodo matematico, volevamo contribuire a formare nei nostri allievi uno spirito critico, libero, creativo, capace di provare la gioia della scoperta e della comprensione profonda delle scoperte altrui. Ci è sembrato che tali obbiettivi potessero essere raggiunti attraverso una ricostruzione guidata da parte dell'allievo del sistema assiomatico della geometria euclidea.

Abbiamo ipotizzato una situazione non molto lontana da quella reale: i nostri allievi hanno appreso per via intuitiva parecchie nozioni di geometria euclidea.

Se, a partire da questa situazione, prospettiamo loro l'esigenza di una ricostruzione fondata su basi razionali e li guidiamo in tale costruzione riusciremo a dare loro un metodo scientifico che permetterà intanto di ordinare nozioni ed osservazioni e di comunicarle ad altri in linguaggio rigoroso. In seguito, una attenta riflessione sulla arbitrarietà dei postulati, pur nel rispetto delle regole della logica, consentirà di porsi in condizioni di critica, e quindi in atteggiamento di libertà, verso una qualunque dottrina, anche di carattere non strettamente matematico, della quale sapranno cogliere gli aspetti dogmatici e la maggiore o minore logicità dei suoi sviluppi.

Geometria razionale dunque, argomento classico: qualunque testo tradizionale se ne occupa. Però quasi tutti i libri di testo tradizionali, anche quando presentano con particolare cura gli assiomi dell'appartenenza e del parallelismo, sorvolano sugli assiomi della congruenza e dell'ordinamento; quasi sempre maltrattano l'assioma della continuità della retta. Della geometria razionale presentata in tale forma non resta ai ragazzi che la scarsa agilità del suo sviluppo; i concetti di movimento e di ordinamento rimangono sempre a livello intuitivo e si è realizzato un "ibrido didattico".

D'altra parte i fautori dell'innovamento ad oltranza aggiustano tutto con le isometrie. Ma per fare le cose per bene bisogna sapere cosa è una distanza: si guadagna molto? Gli assiomi della congruenza, cacciati dalla porta, rientrano dalla finestra; potrebbe essere una scelta valida quella di definire la distanza per via assiomatica e poi dare varie interpretazioni concrete. Si troverebbero tante simmetrie "sghimbescie", una per ogni distanza che non sia quella euclidea, e infine forse una sola simmetria "giusta".

Ci sarebbe piaciuto provare ma alla fine abbiamo fatto una scelta: una trattazione assiomatica abbastanza vicina a quella di Hilbert, il linguaggio della teoria degli insiemi. Ci è stato necessario intanto dedicare una unità didattica alla teoria degli insiemi; una alle indispensabili nozioni di logica; una che, chiarendo la differenza fra termine primitivo e termine definito, tra teorema e assioma, conducesse alla acquisizione della necessità di termini primitivi e di assio mi. Solo allora è stato possibile presentare la prima unità didattica di geometria: quella sugli assiomi dell'appartenenza.

Gli assiomi sono stati introdotti uno alla volta, dando dei modelli che con la loro concretezza aiutassero gli allievi in questa fase di "manipolazione intellettuale" che sempre accompagna la formalizzazione di una teoria posseduta per via intuitiva. Abbiamo sempre incoraggiato gli allievi a costruite essi stessi dei modelli, cosa abbastanza facile dato che si poteva sempre costruire qualche modello finito e i ragazzi prendevano tutto come un gioco. Come applicazione, abbiamo fatto qualche dimostrazione per ragionamento diretto e per assurdo.

L'unità didattica sugli assiomi dell'ordinamento ha richiesto le si premettessero altre tre unità: una sul concetto di relazione, una sulle relazioni di equivalenza, una sulle relazioni d'ordine. Qui è stato più difficile costruire dei modelli dal momento che dopo i primi due assiomi si sono dovuti abbandonare i modelli finiti. Però abbiamo costruito dei modelli non euclidei immersi nello spazio euclideo intuitivo, sempre fedeli al metodo di introdurre un assioma per volta con modelli sempre più raffinati.

L'assioma della continuità della retta è stato introdotto per la necessità di eliminare i "buchi" presenti sulle rette dell'ultimo modello costruito e ha portato alla costruzione di un modello continuo ma sempre limitato; abbiamo così la terza unità di geometria.

Per introdurre i tre assiomi della congruenza fra segmenti uno alla volta e per costruire i relativi modelli abbiamo avuto qualche difficoltà ingigantita dal fatto che avendo scelto di adoperare di nascosto delle nozioni di geometria proiettiva non abbiamo trovato subito la via più facile per fare ciò. Anche la via che presentiamo nel nostro lavoro sarà semplificata in una ulteriore stesura. Quello che ci premeva era che gli allievi si trovassero sbalorditi di fronte alla possibilità di un "mondo" (quello appunto dell'ultimo modello costruito) dove erano verificati tutti gli assiomi dell'appartenenza, dell'ordine, della continuità della retta, della congruenza, e che tuttavia "stava ancora tutto ... in un fazzoletto". Nel mondo che si era costruito poi la simmetria era "sghimbescia" e l'unità di misura andava "rimpicciolendo" per un osservatore euclideo che si spostasse lungo una retta verso i confini del mondo.

Ecco i motivi per i quali abbiamo scelto di introdurre per ultimo l'assioma del parallelismo: proprio per far risaltare il peso che tale assioma ha nella geometria che diventa euclidea solo grazie ad esso. Facile a questo punto l'accenno alle geometrie non euclidee che conclude la quarta unità dedicata alla geometria. Non avremmo proposto un tale sviluppo di contenuti se non avessimo potuto disporre al contempo di una adeguata metodologia che consentisse all'insegnante di dedicare la maggior parte del suo tempo a seguire individualmente il singolo allievo.

Il N.R.D. di Palermo ha messo a punto un opportuno riadattamento del Mastery Learning, accettando come ipotesi di lavoro il principio secondo il quale determinate abilità possono essere raggiunte da tutti gli studenti purchè ad ognuno sia dato il suo tempo individuale.

Per ogni unità didattica è stato elaborato a cura del N.R.D. di Palermo il relativo materiale consistente di una scheda formativa nella quale sono esposti i contenuti in forma discorsiva e il più possibile collegata all'esperienza concreta dell'allievo, di una prima scheda di verifica, di una scheda di recupero e di una seconda scheda di verifica secondo lo schema che presentammo al II° Convegno di Bologna.

MORELLI: Nel Nucleo di Ricerca Didattica di Napoli, il problema dell'insegnamento della geometria è stato, fin dall'inizio della formazione del Nucleo stesso, il più dibattuto. Le domande che si sono poste e che si continua a porre sono: Bisogna introdurre il metodo assiomatico nelle prime classi della scuola secondaria superiore? Bisogna farlo in modo rigoroso o non del tutto? Quale assiomatica introdurre? Perchè cambiare? Quando e fino a che punto bisogna parlare di strutture algebriche? Qual è lo scopo preminente dell'insegnamento della geometria?

Dopo molte discussioni, varie verifiche ed accurate analisi di proposte e testi scolastici nuovi, si è delineata una scelta abbastanza chiara, che si ritiene valida e realizzabile in una scuola che funzioni seriamente (in pratica si deve tener conto di diverse realtà e si è costretti a fare varie rinunzie, limitazioni e rimandi nella realizzazione del programma). Si deve però osservare che l'introduzione di certe novità in modo generalizzato nelle scuole appare un problema molto arduo, sia per la resistenza opposta in modo preconcetto dagli insegnanti, sia per la oggettiva difficoltà delle questioni; da qui la necessità di parlare di questi problemi già nei corsi universitari.

Innanzi tutto si ritiene utile che vi sia una prima fase, piuttosto breve (circa un trimestre), nella quale l'insegnamento della geometria sia svolto ancora in modo non assiomatico e non rigoroso, ma poggiandosi su basi intuitive, con lo scopo di far familiarizzare gli alunni con le isometrie, il riferimento cartesiano, il concetto di corrispondenza ed altri concetti fondamentali, di abituarli ad un linguaggio corretto di stabilire un raccordo con Scuola Media e soprattutto di far nascere e sviluppare l'esigenza di avere delle definizioni precise e dei "punti di partenza" ben stabiliti.

Nella seconda fase si vuole sviluppare la geometria elementare in modo rigoroso, stabilendo in modo molto chiaro ed esplicito i "punti di partenza", cioè gli enti fondamentali e gli assiomi. Che l'insegnamento sia rigoroso non deve significare che bisogna dimostrare tutto, ma che va continuamente e chiaramente precisato ciò che si è deciso di considerare come assioma e ciò che invece si può dedurre, in modo che si faccia capire in che cosa consiste il metodo assiomatico. Certamente alcuni teoremi vanno dimostrati proprio per far apprendere il significato di dimostrazione. Si è potuto verificare che i ragazzi accettano, capiscono e gradiscono questa impostazione, se essa è esposta con chiarezza, con risultati chiaramente positivi.

L'introduzione del linguaggio e delle idee fondamentali della teoria degli insiemi e la considerazione delle strutture algebriche vanno fatte in modo naturale e graduale. Nelle occasioni che si presentano e nei momenti più opportuni si deve mettere in luce la generalità di certi concetti, quali relazione di ordine, relazione di equivalenza, struttura di gruppo e di spazio vettoriale. In quanto all'assiomatica da seguire, si è preferito introdurre con alcune varianti, l'assiomatica fondata su base metrica proposta da Choquet; ciò innanzitutto per realizzare un immediato e stretto collegamento con l'algebra senza tuttavia ridurre la geometria all'algebra. Altre ragioni che fanno preferire questa impostazione a quella tradizionale sono da una parte la maniera forte con cui si introduce l'assioma di continuità, presupponendo la conoscenza dei numeri reali, d'altra parte il modo più graduale e sistematico con cui si introducono i movimenti. Si è cercato comunque di ridurre in qualche punto il distacco dall'insegnamento tradizionale. Inoltre si è preparata una scheda per stabilire gli assiomi cercando di darne una motivazione anche con considerazioni riguardanti lo spazio concreto. Fra gli scopi dell'insegnamento della geometria non va considerato secondario quello di fornire dei mezzi per la risoluzione di problemi reali. Per questo motivo bisogna anche insistere sul concetto di misura e si pensa di anticipare quello di area di una superficie. Dopo il biennio tutti gli alunni dovrebbero avere le idee sufficientemente chiare sul significato di misura di un angolo o di area di un poligono e dovrebbero saper giustificare, per esserne padroni, le formule per il calcolo delle aree, che spesso conoscono già senza saperne il significato e l'origine. Si è creduto opportuno perciò non tralasciare una breve esposizione, sotto forma di scheda, sulla equiscomponibilità dei poligoni piani, stabilendo il teorema fondamentale sui parallelogrammi e le prime conseguenze (e non sembra inutile ritrovare per questa via i teoremi di Euclide e di Pitagora).

Riferendosi a questioni più specifiche si osserva, a proposito dello assioma di continuità, con il quale si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei punti di una retta e l'insieme dei numeri reali, che sembra opportuno fermarsi a sottolineare alcune conseguenze importanti, quali l'esistenza e l'unicità del punto medio di un segmento e, più in generale, dei punti che dividono un segmento in parti di uguale lunghezza; la possibilità di definire le traslazioni e le dilatazioni sulla retta e di collegare ad una retta una struttura di spazio vettoriale. Inoltre, a proposito dell'unicità della parallela ad una retta per un punto, si è preferito lasciare questa proposizione come assioma, ricavando invece l'unicità della perpendicolare ad una retta per un suo punto. Conviene poi stabilire il teorema di Talete utilizzando le proprietà delle simmetrie e dei numeri reali.

MANTOVANI: Ha incominciato il suo lavoro nell'ottobre '78. E' composto da 7 insegnanti sperimentatori di scuola media superiore 3 di liceo scientifico e 4 di ITIS, più un coordinatore universitario (F. Menegazzo).

Solo uno di questi insegna in una scuola sperimentale. Anche per questo, non avendo cioè richiesto nessuna sperimentazione per quest'anno, abbiamo deciso di sviluppare il nostro lavoro nella preparazione di materiale didattico (una quarantina di pagine) in appoggio al libro di testo (che per lo più era già stato adottato), libro di testo del tutto tradizionale. Si è trattato quindi di una ricerca di carattere metodologico oltre che un inizio di lavoro in comune puntato sulla classe 3ª.

Nelle prime riunioni abbiamo individuato i punti del programma di geometria analitica (che era comune alle due scuole) che secondo la nostra esperienza presentavano maggiori difficoltà di apprendimento o erano trattati peggio nei testi in uso; li abbiamo individuati in questi momenti:

I) Collegamenti con le materie che si svolgono in parallelo nella classe 3ª (fisica per il liceo scientifico, meccanica-chimica nell'ITIS), cercando anche di unificare il linguaggio e le situazioni. A tale scopo abbiamo approntato 6/7 schede su "leggi - tabelle - grafici - equazioni" che mettono in luce questi concetti su esempi noti ai ragazzi.

2) Il secondo punto, collegato strettamente al primo è il concetto di luogo geometrico e la ricerca dell'equazione associata alla curva, presentata con la sua proprietà caratteristica.

3) Il cambiamento del sistema di riferimento cartesiano, le variazioni che esso comporta sui singoli problemi e la scoperta della trasformazione del piano in sè associata a tale cambiamento (cambiamento diverso di un asse, scambio degli assi, traslazione e loro composizione, cambiamento di unità di misura, ecc.)

4) E' in via di stesura una parte riguardante le f. esponenziali e i logaritmi e una riguardante schede di recupero degli allievi che non hanno seguito il passo.

Progetti per il prossimo anno non ne abbiamo ancora fatti. Cogliamo l'occasione con questo intervento per invitare persone disponibili a collaborare, sperimentare il nostro materiale, suggerirci cambiamenti e critiche.

MAGGI: Il Nucleo di ricerca didattica di Firenze, diretto fino al giugno ultimo scorso dal compianto prof. Luigi Campedelli e che oggi continua ad operare diretto dalla prof. Maria Giuditta Campedelli, mi incarica, quale condirettore del nucleo stesso, di presentare questa breve relazione sul lavoro svolto per quanto riguarda l'insegnamento della geometria nella Scuola Media Superiore.

Impostazione del corso

Tutti i componenti il nucleo di ricerca, pur avendo formazioni culturali diverse e provenendo da esperienze didattiche diversificate, riconoscono all'insegnamento della geometria un valore preminente:

I° per il rigore logico che si rivela nella struttura stessa della disciplina, qualunque sia il metodo didattico usato nell'insegnarla;

2° per il valore formativo in quanto la mente dell'allievo si forma con l'abitudine al ragionamento ed al rigore;

3° per il valore estetico che si evidenzia mediante la sintesi e l'eleganza del ragionamento e l'abitudine che il discente acquisisce ad osservare l'armonia geometrica del mondo della Natura e dell'Arte;

4° per la proprietà di linguaggio che si rivela attraverso l'abitudine che i giovani acquisiscono ad esporre per scritto e oralmente, anche riguardo a temi non matematici, con chiarezza e con rigore.

Nel gruppo, che pur si riconosce in quanto detto sopra, vi sono due correnti, apparentemente distinte, che lavorano in maniera autonoma, ma confrontando sempre i risultati conseguiti con un proficuo scambio di informazioni e di idee, allo scopo di realizzare nel migliore dei modi quei valori cui si vuol tendere con l'insegnamento della geometria. Una corrente ritiene valido introdurre i postulati all'inizio e su di essi, in maniera deduttiva, costruire la geometria relativa. I docenti che prediligono questa via sostengono che l'esigenza di una impostazione assiomatica è sentita dagli stessi alunni, che sono poi in grado di apprezzarne gli sviluppi. I vari argomenti sono sempre trattati con una visione moderna. Gli altri sperimentatori iniziano il loro lavoro richiamando immagini e facendo riferimento a circostanze che, sia pure grossolanamente, trovano riscontro nella realtà, cioè in una parola recuperando le nozioni apprese dai giovani nella scuola media. Questi docenti orientano il modo di presentare la geometria secondo lo spirito delle nuove matematiche. Introducono tempestivamente il concetto di "gruppo di trasformazioni" chiarendo successivamente il significato della geometria rispetto ad esso. Le prime trasformazioni prese in esame sono quelle isometriche seguite da quelle per similitudine e spesso non manca l'occasione per accennare ad altre. In una parola questi docenti si sono ispirati e hanno fatto tesoro della relazione tenuta dal prof. Campedelli a Firenze il 20 maggio 1974 al Simposio Europeo sulle "Innovazioni pedagogiche nei sistemi scolastici mediante i nuovi mezzi e i nuovi metodi". Del nucleo fa parte anche un docente che insegna in un Istituto Tecnico Professionale. L'inserimento di questo docente ha avuto lo scopo precipuo di rivolgere la sperimentazione anche verso altre sponde, dove attualmente vi è una scarsa sensibilità per l'insegnamento della geometria.

Esperienze diverse

Ed ora ritengo sia opportuno riferire due interessanti esperienze di colleghi nel nostro nucleo. La prof. Giuseppina Zappa Casadio, insegnante al liceo classico Michelangiolo di Firenze, riferisce che nella sua 5ª ginnasiale è stato deciso all'inizio dell'anno scolastico di studiare da un punto di vista interdisciplinare i pavimenti dei principali edifici artistici fiorentini, volgendo in particolare l'attenzione sul Battistero e sul Duomo. Il lavoro ha avuto inizio con una visita a questi monumenti, sotto la guida degli insegnanti di Matematica, di Storia dell'Arte e di Italiano. La classe è stata divisa in cinque gruppi e ad ogni gruppo è stato assegnato anzitutto il compito di fare una relazione sull'opera visitata. Particolare interesse ha suscitato il pavimento del Battistero. Esso risulta diviso in tante porzioni, generalmente rettangolari, ciascuna delle quali presenta un diverso motivo ornamentale. L'insegnante di Storia dell'Arte ha fatto notare come ciò metta chiaramente in luce un'influenza araba. I pavimenti delle moschee sono ricoperti di tanti tappeti accostati che presentano, naturalmente, differenti motivi. Influenzati da un simile ricordo gli artisti hanno ricoperto il pavimento del Battistero con diversi tappeti di "marmo" variamente decorati. Ogni gruppo di studenti ha scelto un tappeto da studiare. Lo studio di un tappeto consiste anzitutto nel riprodurre il disegno in scala; successivamente deve essere fatta una relazione sui vari tipi di poligoni che figurano nel tappeto, indicandone le caratteristiche, misurandone gli angoli e così via. Infine vanno ricercati gli eventuali movimenti (rotazioni, ribaltamenti) che riportano in sè un "modulo" del disegno del tappeto (cioè la figura dalla cui ripetizione si origina il motivo ornamentale). Si può anche studiare la legge di composizione di questi movimenti ed arrivare in tal modo a costruire il gruppo delle simmetrie della figura. Il lavoro ha suscitato molto interesse nei giovani per cui si ripeterà in altre classi l'anno prossimo, esaminando altri monumenti.

La prof. Anna Giorgetti Capocasa, che insegna nel liceo classico Machiavelli di Firenze riferisce che l'esigenza di una impostazione unitaria porta a considerare le figure come insieme di punti e le relazioni che intercorrono fra queste come corrispondenza puntuali o trasformazioni del piano in sè. Due sono i punti particolarmente delicati: il gioco dei postulati e la scelta di una meta prefissata.

I) Relativamente al primo punto è stata seguita l'impostazione indicata dall'assiomatica metrica dello Choquet che permette di entrare subito nel vivo del discorso; i postulati sono stati introdotti solo quando la trattazione lo richiedeva e quando gli alunni avevano raggiunto la maturità per apprezzarne la funzione e prendere atto delle questioni critiche ad essi connesse.

2) Il secondo punto è stato analizzato alla luce delle parole dette dal Campedelli già nel I953: "Sapete che cos'è quella geometria che abbiamo studiato al Liceo? E' semplicemente lo studio delle proprietà delle figure che continuano a sussistere quando le figure stesse si sostituiscono con altre simili. Semplicemente questo! E al Liceo non ce l'aveva mai detto nessuno ed è stato male."
E la risposta sta nell'introduzione dei gruppi di trasformazione, nell'insieme delle proprietà invarianti per diversi gruppi di trasformazione e se anche ci si limita a quelle isometriche e a quelle per similitudine si richiamerà l'attenzione sulla potente sintesi della geometria data dal Klein nel suo "Programma di Erlangen".

D'APRILE: L'attività dell'anno 78-79 è stata incentrata sulla revisione del programma per il biennio, che era stato scelto all'inizio della sperimentazione, e degli appunti relativi, stesi nei due anni precedenti.

Questa revisione si è attuata sia nelle riunioni con gli sperimentatori, che periodicamente hanno dato relazione del lavoro in corso, sia negli incontri connessi con il corso di aggiornamento, che è stato dedicato all'approfondimento e alla discussione degli argomenti contenuti negli appunti. Al corso hanno partecipato anche gli sperimentatori, dato che la revisione del lavoro precedente ha portato a riconoscere la necessità di ampliare lo studio dei fondamenti teorici degli argomenti scelti, e anche di argomenti alternativi, sia per ritrovare la motivazione delle scelte iniziali, sia per contestarle e, in alcuni casi, rifiutarle. Non si è pervenuti ad una nuova stesura degli appunti, non ritenuta opportuna per il momento.

Il corso di aggiornamento è stato organizzato secondo cicli di incontri relativi a temi fissati, che erano:

Numeri:	I) naturali
	2) razionali
	3) reali
Vettori:	I) struttura vettoriale
	2) prodotto scalare
	3) coordinate cartesiane
Equazioni:	I) funzioni e polinomi
	2) equazioni e disequazioni di I° grado
	3) equazioni e disequazioni di 2° grado
	4) sistemi di equazioni e disequazioni di I° grado
Probabilità:	I) calcolo combinatorio
	2) calcolo delle probabilità
Geometria:	I) trasformazioni del piano
	2) trasformazioni rigide
	3) similitudini

Il ciclo di incontri relativi ad un dato argomento era articolato secondo lo schema:

a) una presentazione dell'argomento, nei suoi contenuti matematici,

b) una proposta di lezione da tenere agli studenti, con indicazioni di esercizi,

c) discussione,

d) relazione finale.

Per esempio, l'argomento "vettori, struttura vettoriale" ha avuto la seguente presentazione:

I) postulati di incidenza e parallelismo,

2) traslazioni,

3) costruzione delle traslazioni,

4) necessità di un ulteriore assioma per la definizione della composizione delle traslazioni,

5) costruzione delle omotetie, necessità di un nuovo assioma,

6) struttura vettoriale del piano "puntato ",

7) confronto tra le varie strutture vettoriali (se si cambia il punto....);

ai due pomeriggi dedicati a queste lezioni ha fatto seguito una vivacissima discussione sull'introduzione di quest'argomento e sugli esercizi connessi che si trovano nei nostri appunti e in altri testi.

Ci sembra estremamente positivo che, a questo punto, non ci si riconosca più nel programma iniziale e negli appunti preparati; addirittura, il capitolo sull'introduzione dei relativi e dei razionali "tramite coppie" è rifiutato dagli autori stessi di quella parte di appunti.

Questo fatto dimostra come l'esperienza dell'insegnamento e il contributo di varie voci alla discussione abbiano modificato alcuni atteggiamenti informati ad un astratto rigorismo, portando a maturare nel giro di due anni delle linee comuni, sul metodo, e nuove convinzioni, sui contenuti: in sintesi, ci pare che il significato e il valore della sperimentazione didattica stiano innanzitutto nell'occasione, che viene offerta a chi vi partecipa, di studiare con altri e di usare in prima persona durante questo lavoro il metodo, che si dice tanto di voler usare nell'insegnamento,consistente nel porre problemi,documentarsi sulle soluzioni note, tentarne di personali, confrontarle, adattare le soluzioni alle situazioni concrete. Ci pare secondario, nel lavoro di sperimentazione, proporre ad ogni costo argomenti nuovi: più importante, se mai, che gli argomenti siano ben conosciuti, cioè ben collocati nel loro contesto scientifico da parte di chi li andrà ad insegnare.

Emblematico il caso della geometria euclidea, che ci siamo trovati a riscoprire (!) come indispensabile per una educazione a vedere il mondo che ci circonda e a imparare a descriverlo, discernendo i caratteri salienti per il tipo di conoscenza che si vuol ottenere; senza tacere il valore della geometria come strumento con cui chiarire, motivare, esemplificare altri argomenti (vettori e geometria analitica, sistemi lineari, disequazioni, il concetto di funzione).

VALABREGA: Fin dagli anni in cui la C.I.I.M. elaborava i progammi di Frascati, abbiamo individuato nel rinnovamento dell'insegnamento della geometria, e non soltanto a livello scuola secondaria, un tema di ricerca particolarmente delicato.

La resistenza che viene opposta ad ogni tentativo di abbandonare la impostazione euclidea pare a noi un indice della difficoltà a superare un insegnamento di tipo dogmatico ed a realizzare effettivamente un insegnamento per problemi.

Per questo abbiamo portato avanti seminari e tesi di laurea con lettura di classici (Euclide, Archimede, Bolyai, Lobacevskj, Klein, Hilbert), allo scopo di individuare, anche nello sviluppo storico, linee di tendenza suscettibili di applicazione in sede didattica: il discorso è sostanzialmente aperto e portiamo qui i primi risultati già sperimentati.

Pare incontrovertibile che l'inizio della scuola secondaria non sia il momento adatto per affrontare una sistemazione assiomatica della geometria (si tratti del sistema euclideo, o hilbertiano o di proposte più recenti, quali quelle di G. Choquet o di G. Pickert o altri); il momento assiomatico deve essere quello conclusivo, non già quello iniziale. Ci pare che l'"Abbasso Euclide" dei bourbakisti debba essere inteso nel senso che la sistemazione euclidea è fuorviante, come risulta se si tien conto degli sviluppi contemporanei di logica matematica, nonchè del fatto che la geometria euclidea è, nella maggior parte, geometria piana e il piano non viene da Euclide immerso nello spazio, come invece fa Hilbert.

Anche alla luce del programma di Erlangen, siamo giunti alla conclusione che possiamo insegnare la geometria vedendola in uno dei seguenti modi:
a) geometria fisica, in stretta relazione, cioè, con la meccanica;
b) geometria analitica o, meglio, geometria algebrica, così come si è venuta configurando a partire da Cartesio e Fermat;
c) topologia o geometria delle deformazioni (gruppi continui di movimenti) .

Quando ci siamo trovati ad avanzare proposte concrete abbiamo individuato una prima fase, che vuole anche essere di recupero e riassestamento di conoscenze precedenti (scuola media) e che ha come obiettivi:
I) sviluppare l'intuizione spaziale;
2) mostrare il passaggio da situazioni spaziali a rappresentazioni piane attraverso proiezioni e sezioni (o sviluppi).

Si tratta di un discorso a livello intuitivo, che prende le mosse dalla simmetria bilaterale e rotazionale; di qui alla simmetria assiale e alla rotazione del piano intorno ad un suo punto il passaggio è immediato.

La "sezione" porta poi, dualmente, alla proiezione, quindi a coni e cilindri; la "proiezione su" viene collegata al problema della rappresentazione, in particolare, quello della rappresentazione piana della sfera e ci porta a concludere questo primo segmento, sperimentato nelle prime con risultati soddisfacenti, colla proiezione stereografica.

Pare opportuno passare successivamente ad un discorso algebrico, facendo largo uso di matrici, che, tra l'altro, possono essere introdotte già all'inizio delle prime, nel momento in cui ci occupiamo di organizzazione di dati numerici. Prendiamo le mosse da una matrice 2 X 2, ottenuta suddividendo gli studenti di una classe secondo il sesso e la promozione o meno alla classe successiva. A partire di qui vediamo subito il passaggio da due vettori colonna ad un terzo vettore colonna, cioè la somma vettoriale.

Ciò ci porta a

I) definire la traslazione; si apre il discorso su parallelogrammi e parallelismo; pare possibile e opportuno, qui, un cenno di geometria della sfera;
2) definire il vettore libero: nonchè il cambiamento di origine e le componenti di un vettore.

(Presupponiamo la conoscenza delle coordinate cartesiane; quindi, in sostanza, dei reali e lavoriamo in un sistema monometrico ortogonale).

Il vettore viene visto come operatore della traslazione e viene mostrato l'isomorfismo fra il gruppo delle traslazioni e quello additivo dei vettori.

Il discorso sull'omotetia viene affrontato senza addentrarsi su tematiche relative al corpo base - si suppone essere senz'altro quello reale. Si prendono invece in considerazione matrici 2 X 2, di complessità via via crescente; esse sono operatori che trasformano parallelogrammi in parallelogrammi e le aree in un certo rapporto; alla matrice viene associato il determinante, a cui si dà, appunto, il significato di rapporto di aree. Si tratta l'argomento in seconda, in parallelo alla trattazione dei sistemi lineari, anche in vista di far intendere come, dal punto di vista formale, la generalizzazione sia immediata.

Il passaggio allo studio delle isometrie richiederebbe l'introduzione della distanza; noi supponiamo semplicemente che il ragazzo misuri le distanze col righello, ovvero le trasporti col compasso. Andiamo così a studiare le trasformazioni lineari piane a matrice di determinante unitario, simmetriche e antisimmetriche e le colleghiamo con simmetria rispetto a una retta vettoriale e rotazione intorno all'origine. Anche in questo caso, procediamo a partire da matrici particolarmente semplici verso i casi generali.

Lo studio delle matrici antisimmetriche porta a collegare la rotazione coll'angolo di rotazione e apre lo studio allo studio della trigonometria.

Nella sperimentazione effettiva si cura in particolare il sistematico raffronto tra disegno sul foglio e calcolo algebrico: modi diversi di vedere una stessa quéstione. La sperimentazione di questi contenuti di algebra lineare è in atto nelle seconde, ma dovrà, inevitabilmente, prolungarsi nelle terze. Dal punto di vista geometrico, ci preme pervenire al teorema delle tre simmetrie.

INTERVENTI NEL DIBATTITO

VOCINO: Parlo anche a nome della collega Maria Luisa Astore del Liceo classico "Michelangiolo" di Firenze: insieme nel I976 abbiamo iniziato il programma sperimentale proposto dal Prof. Prodi. Tale scelta è nata in forma del tutto autonoma in quanto non eravamo in contatto con il nucleo di ricerca didattica di Firenze e ignoravamo allora l'esistenza dei nuclei di Pisa, Pavia, Trieste che si interessavano del programma Prodi.

Vista la limitatezza delle ore disponibili nel Liceo classico, abbiamo chiesto e ottenuto dal Ministero della Pubblica Istruzione l'autorizzazione a poter disporre di tre ore settimanali per ogni classe.

Nelle linee proposte dal programma - insegnamento per problemi - abbiamo verificato spunti di estremi interesse, anche per la loro possibilità di collegamento ad altre discipline; ad esempio lo studio del problema del minimo cammino ha consentito esperienze in laboratorio di fisica sulle leggi della riflessione e lo studio dell'iperbole equilatera è stato facilmente collegato alle formule, e relative verifiche sperimentali, dei punti coniugati di una lente convergente.

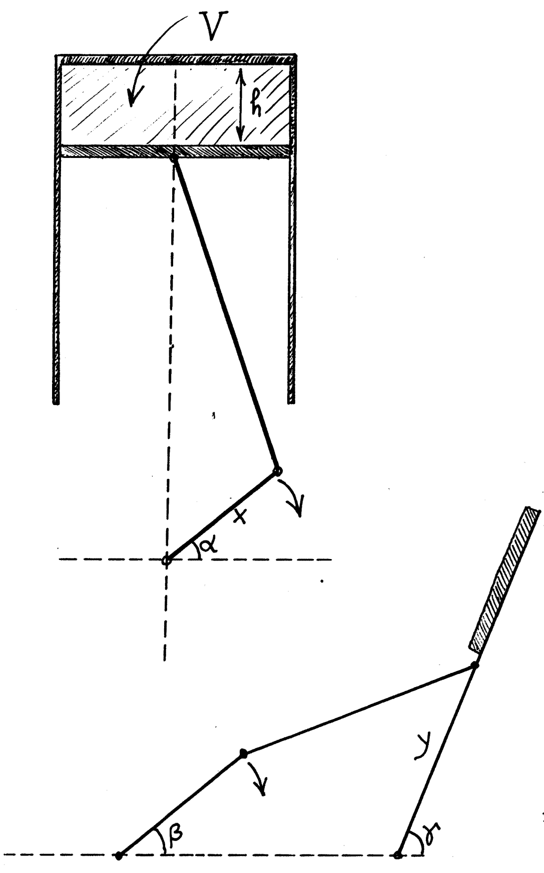
La geometria è stata seguita dagli alunni con interesse e senza quelle difficoltà che potevano forse attendersi per la novità dell'impostazione. Anzi lo studio è risultato molto più organizzato e concatenato logicamente rispetto a quello condotto secondo l'impostazione tradizionale. Infatti l'avere a disposizione pochi postulati, ma di notevole contenuto, permette di metterne in luce l'effettiva funzione e validità.

BOERO

Il gruppo "Didattica della Matematica nella Scuola Superiore" del Seminario Didattico della Facoltà di Scienze lavora da due anni alla costruzione e parziale sperimenta= zione di un "progetto" per i primi anni delle scuole superiori (anche in vista della riforma). Siamo ancora lontani da un quadro organico di proposte, sia per le difficoltà incontrate nella sperimentazione (conflitto con le tradizioni didattiche consolidate e con i programmi esistenti) sia anche probabilmente per la complessità dell'obiettivo che ci siamo posti: vorremmo riuscire a costruire un curriculum matematico coerente internamente ed insieme integrato in un piano di lavoro su temi extramatematici culturalmente significativi.

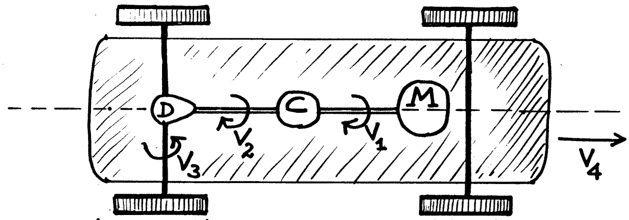
Per quanto riguarda la geometria, abbiamo individuato alcuni collegamenti (già sperimentati in classe) con temi tecnologici, economici, naturalistici ma non dispo= niamo ancora di un quadro di riferimento coerente per gli argomenti geometrici trattati. Vorrei esemplificare qui (con alcuni disegni) i "fatti geometrici" sui quali abbiamo lavorato in alcune classi I, II e III di diverse scuole secondarie superiori.

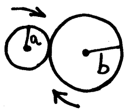
I. GEOMETRIA DEI MOVIMENTI DEI MECCANISMI ARTICOLATI

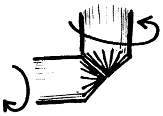


ai ragazzi viene chiesto di studiare la variazione di V in funzione di h ed in funzione di α, introducendo il linguaggio delle rotazioni e delle traslazioni per descrivere il movimento, i grafici in coordinate cartesiane per la rappresentazione delle relazioni, le funzioni trigonometriche per mettere in relazione V con α; viene anche chiesto di esprimere il rapporto di compressione V_{max}/V_{min} in funzione di x, di determinare x in modo che il rapporto di compressione assuma un valore assegnato c_o (risolvendo una equazione del tipo $\frac{a-x}{a+x}=c_o$) e di discutere le condizioni (su c_o) che rendono questa soluzione geometricamen= te realizzabile; viene infine chiesto di confrontare il metodo di analisi adottato per i movimenti del motore a scoppio con il problema della descrizione dei movi= menti e della realizzabilità di una ro= tazione completa nel caso del tergicristallo (in funzione della lunghezza y)

II. GEOMETRIA DELLA TRASMISSIONE DEI MOVIMENTI NELL'AUTO







viene analizzata la natura dei movimenti (rotazioni e traslazioni) che avvengono all'esterno di M,C,D ;vengono schematizzati geo= metricamente i dispositivi che consentono di passare da V_1 a V_2, da V_2 a V_3 (sia come velocità di rotazione che come asse e verso di rotazione);viene esaminata la relazione tra V_4 e V_1 (conoscenza degli elementi necessari per determinarla,concernenti sia i "rapporti di cambio" che i mutamenti di verso di rotazione intervenuti).

III. TEOREMA DEL SIMPLESSO (NELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE)

Vengono presentate due dimostrazioni,l'una basata sulla riduzione progressiva da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^{n-1}$ (attraverso la considerazione della non esistenza di punti di minimo interni ad un dominio per una funzione lineare),l'altra basata sulla rappresentazione parametrica di un segmento in $\mathbb{R}^n$;si confrontano queste dimostrazioni tra loro e con l'argomentazione (di tipo geometrico-intuitivo, "evidente" in R^2 ed in R^3) che il"piano" $a_1x_1+.....+a_nx_n=k$ descrive (al variare di k) un fascio,e che il massimo valore di k viene raggiunto in corrispondenza di un insieme di punti del "poliedro" che contiene almeno un "vertice"

IV. TRASFORMAZIONI NON LINEARI DEL PIANO (DIPENDENZE QUADRATICHE,ANDAMENTI ESPONENZIALI)

La verifica dell'accordo con modelli del tipo : $y=a(x-c)^2$ od $y=A \exp (Bx)$ di serie di dati sperimentali conduce"naturalmente" alla introduzione di carte semiquadratiche (cioè con scala lineare sulle ascisse e quadratica sulle ordinate) o semilogaritmiche;questi riferimenti si ottengono "dal piano della carta milli= metrata" con trasformazioni non lineari (per le ordinate),di cui vengono esaminate le proprietà geometriche (ad esempio,si vede che -sulla carta semiquadratica-la "curva" $y= a (x-c)^2 + d$ è asintotica alla "retta" $y=a (x-c)^2$).

Attraverso attività di questo tipo ci sembrano esaltate le funzioni conoscitive della geometria e ci sembra possibile contribuire a delineare un asse culturale per la scuola superiore tale da renderla credibile per i giovani ed adeguata al livello di comprensione della realtà richiesto dall'evoluzione della tecnica, dell'economia e delle conoscenze scientifiche .

Un problema che ci poniamo è il seguente:è possibile ed è conveniente arrivare ad una sistemazione unitaria dei "fatti" e delle attività geometriche indicate ?Non si rischia così facendo di realizzare costruzioni concettuali artificiose,staccate dallo sviluppo della geometria a livello di ricerca ed ancora una volta "scolastiche" ?

PUCCI: Ho ascoltato con melanconia la proposta di sopprimere dall'insegnamento i vari teoremi euclidei sui triangoli che erano stati per me, a quindici anni, fonte di gioia. D'altra parte la società è cambiata e così la scuola e revisioni radicali di programmi possono essere necessarie. Si deve però rilevare che da secoli vi sono corsi e ricorsi a favore e contro l'insegnamento della geometria euclidea e gli argomenti contrapposti rimangono in parte gli stessi. Oggi può suonare troppo aristocratica la raccomandazione del Betti e Brioschi nelle Istruzioni ai programmi per le scuole classiche del 1867: "... non intorbidare la purezza della geometria greca trasformando i teoremi geometrici in formule algebriche". Per altro ritengo che nella sostanza corrisponda ad una esigenza non legata a concessioni di una epoca e di una classe sociale; forse essa è collegata anche al meccanismo di funzionamento della mente umana; larga parte della corteccia cerebrale è dedicata al senso della vista; le informazioni contenute in una immagine corrispondono ad una grande quantità di relazioni fra dati diversi; l'intuizione visiva è un supporto potente al ragionamento.

PRODI: La difficoltà (e la bellezza) della geometria è nel suo carattere bipolare, messo bene in luce dalla relazione del prof. Conte: da un lato c'è la suggestione dell'intuizione, dall'altro ci sono certe operazioni logiche o logico-matematiche. Se si abolisce uno dei due poli, l'insegnamento della geometria perde gran parte del suo valore, anche se può apparire notevolmente più semplice:

- se si omette la parte logico-matematica si rimane in superficie, e ben presto si perde ogni interesse:
- se si omette la parte intuitiva, conservando solo la struttura astratta minima che permette un'esposizione di tipo logico-deduttivo (come appunto fa Dieudonné) si perde il significato della geometria e vengono anche a mancare quelle basi intuitive che consentono di trovare nuovi risultati.

C'è allora il problema di scegliere con cura gli aspetti intuitivi che sono "aggredibili" dal punto di vista logico-matematico; sarà necessario a proposito un certo compromesso. Supponiamo, ad esempio, di voler affrontare la geometria dal punto di vista metrico (personalmente, è il punto di vista che preferisco: il modo più naturale di "aggredire" lo spazio è quello di percorrerlo ..... quindi la prima idea intuitiva che si trova è quella del sentiero, del cammino). Ma non è facile presentare assiomaticamente la nozione di curva: le nozioni topologiche - anche se, in un certo senso, sono le più profonde - sono spesso le più sghembe rispetto alle nostre categorie mentali. Quindi non è possibile cominciare con i cammini, ma con i "minimi cammini", che, sul piano assiomatico, si trattano più facilmente (Successivamente, verso la fine degli studi secondari, si potrà introdurre la nozione di "cammino continuo" in modo preciso). Mi sembra che anche nell'esposizione del prof. Conte sia presente una arbitraria identificazione della "profondità matematica" di certe nozioni con la loro evidenza intuitiva e con la possibilità di esporle in modo semplice.

Non credo poi possibile, come auspica il prof. Conte, introdurre molto presto elementi di logica formale; del resto temo che anche qui ci sia un'identificazione arbitraria: tra il conoscere gli elementi della logica e il saper ragionare.....

Concludo esprimendo queste opinioni:

- Fin dall'inizio della scuola secondaria superiore, l'allievo deve essere iniziato alla geometria secondo il metodo assiomatico-deduttivo: se si rimarrà troppo a lungo ad un livello puramente intuitivo, temo che si produrranno confusioni non più estirpabili in tempi successivi.
- L'insegnamento della geometria deve però mettere costantemente in evidenza gli aspetti intuitivi, e cercare di esercitare costantemente l'intuizione. Infatti, nello spirito della matematica di oggi, occorre sottolineare l'importanza fondamentale degli schemi geometrici e delle visualizzazioni geometriche, per l'economia di pensiero che permettono di ottenere e per l'inventiva che possono suscitare.

DE PICCOLI: Nella mia tesi di laurea mi sono occupata dell'insegnamento della geometria e dei libri di testo nelle Scuole Secondarie Superiori italiane nel periodo 1861 - 1914.

La ricerca è stata facilitata dall'aver trovato nella Biblioteca del Seminario di Rovigo il lascito del prof. Ingrami, attivo socio della Mathesis, che comprende numerosi testi di geometria nelle edizioni migliori ed alcune annate di riviste specializzate dell'epoca.

L'interesse per questo periodo è dovuto sia all'attenzione che i matematici "militanti" hanno dedicato ai problemi della didattica (ricordo Betti, Brioschi, Cremona e più tardi Veronese ed Enriques) sia al presentarsi di un fatto nuovo: il ritorno di Euclide.

L'insegnamento della geometria razionale era infatti condotto nel '700 e nella prima metà dell'800 non secondo il modello euclideo, ma con un ricorso alterno a metodi algebrici e sintetici senza eccessive pretese di organicità. Nel '700 il Clairaut scrisse un testo dove l'insegnamento della geometria veniva affrontato per problemi partendo dalla misura dei terreni. Nel libro di Geometria del Legendre, che fu un testo molto diffuso in Europa nella prima metà dell'800, si fa largo uso dell'algebra nelle dimostrazioni dei teoremi.

Il ritorno a Euclide è prescritto dai programmi di Matematica per le scuole classiche redatti nel 1867 da Betti e Brioschi, assieme ai programmi viene imposto il testo euclideo. L'orientamento culturale prevalente nella geometria italiana, influenzata dall'assetto sintetico dato in quel tempo da Chasles, Steiner, von Staudt, tendeva non a realizzare un insegnamento pratico, bensì a trasmettere un insieme di conoscenze che per il loro rigore e per la loro organicità avessero una rilevanza culturale.

Abbiamo confrontato analiticamente tra l'altro una decina di testi rispetto alla trattazione delle principali teorie della geometria euclidea: teoria dell'uguaglianza, delle proporzioni, dell'equivalenza, e rispetto alla loro posizione nei riguardi del "fusionismo" (erano "fusionisti" i matematici che volevano nell'insegnamento la fusione della geometria piana con la geometria solida). Il fusionismo è stato trattato in un recente articolo dalla dottoressa Ulivi.

Quello che sembra emergere dal mio studio è la continua azione che la ricerca matematica esercita sull'insegnamento secondario. Questa azione appare chiaramente dalla preoccupazione di dare organicità ai fondamenti della geometria e ancor più dalla polemica intorno al "fusionismo". Questo movimento, sorto sulla base dei metodi della geometria descrittiva, dove la geometria piana viene svolta insieme a quella solida, appassionò molto i matematici dell'epoca ma il problema perse ogni importanza quando cambiarono gli interessi scientifici.

Dal lavoro svolto si nota come le difficoltà di carattere didattico non abbiano inciso sulla scelta degli argomenti, basta vedere la complessità dei libri usati, tipo quello del Veronese. Tuttalpiù quando queste difficoltà aumentarono e ci fu una pressione dal basso, si rispose riducendo l'orario, semplificando o addirittura abolendo alcuni esami.

TONI: Vorrei parlare un po' delle "piccole cose" nell'insegnamento della geometria, così come le può vedere un insegnante di scuola media superiore. L'insegnamento della geometria sta vivendo un periodo piuttosto drammatico. Conosco classi del biennio che non hanno ricevuto un insegnamento geometrico e insegnanti che trattano la geometria con poca convinzione e dedizione. La preparazione matematica dei ragazzi provenienti dalla scuola media inferiore è generalmente piuttosto bassa e questo condiziona molto la realtà del biennio.

Vorrei riaprire il discorso sul "vecchio Euclide" ed entrare un po' dentro ai problemi didattici e alle attese che può ancora oggi suscitare nell'insegnamento superiore. Non ho nulla contro l'impostazione metrica della geometria, anzi ad essa riconosco, personalmente obbiettivi e metodi più ampi e stimolanti.

L'anno scorso ho sperimentato il 1° vol. del progetto Prodi e l'introduzione degli spazi metrici, con la problematica relativa, aveva interessato i ragazzi e ottenuto un discreto successo. Le speranze per un positivo sviluppo erano ben fondate.

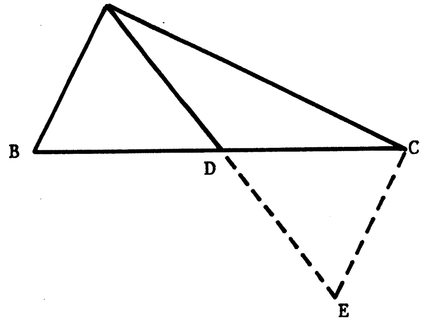
Quest'anno, per motivi vari, ho dovuto cambiare istituto e non ho potuto riprendere subito il progetto Prodi. Sono ritornato così al vecchio Euclede, partendo presto con vari problemi, risultati in generale troppo difficili. Donde venivano tante difficoltà? Ho individuato alcuni momenti, interagenti fra loro, così sintetizzabili: 1 - livello linguistico; 2 - livello concettuale; 3 - livello tecnico-metodologico; 4 - livello creativo-strategico. Nella maggior parte dei casi i ragazzi trovavano un vero e proprio ostacolo nel primo livello, tanto che non potevano neanche cimentarsi nei livelli successivi.

Data una "mediana", pochi, individuavano la relazione $AM=MB$ relativa al punto medio. E il salto "mediana", cioè $AM=MB$ non era più facile dopo aver ricordato la sua definizione, in vari modi. Il dramma cresce se si passa a parlare di "altezza" in un triangolo. Ancora in meno vedono "altezza", cioè $AH \perp BC$.

Già da questi due cenni si può intravedere quanto complessa possa risultare, alla mente di un ragazzo, la risoluzione di un problema. Ho deciso così di provare a separare il momento linguistico dai successivi, nei compiti in classe, e così, invece di dare un solo problema, ne ho dati due. Nel primo davo la figura, le ipotesi e la tesi, i ragazzi dovevano soltanto trovare una risoluzione. Nel secondo davo l'enunciato di un problema e loro dovevano disegnare la figura, mettere le ipotesi (né una più, né una meno) e la tesi. Le cose sono andate un po' meglio ed è risultato più facile il primo problema, che io chiamo "muto".
Per i livelli 2 e 3 ho cercato di aiutare i ragazzi a intendere cos'è un passo dimostrativo. Infatti i ragazzi sono naturalmente portati a risolvere un problema scrivendo un romanzetto di cui neanche loro conoscono l'inizio, la fine e la trama. Neppure loro saprebbero ripetere cosa hanno scritto. Una frase dietro l'altra in piena libertà con motivazioni "è ovvio", "si vede", "naturalmente" quando non "per forza" e, attenzione, non su relazioni proprio banali, come l'uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele. In questo, anche libri di testo (poco letti) contribuiscono a creare confusione. Infatti le dimostrazioni son presentate attraverso "romanzetti", chiari per noi insegnanti, ma troppo "labirintiaci" e pesanti per le possibilità attuali dei nostri ragazzi.

Ho concentrato gli sforzi quindi sul passo dimostrativo.

Un esempio:



Ipotesi: $\widehat{BAC}=90°$

$BD=DC$

Tesi : $AD=BD$

Per costruzione: $AD=DE$

A, D, E allineati.

Consideriamo i triangoli:

ADB e CDE

BD = DC   per ipotesi

AD = DE   per costruzione

$A\hat{D}B = E\hat{D}C$ perchè opposti al vertice

Per il 1° Criterio di uguaglianza (congruenza) dei triangoli: ADB = CDE, in particolare: AB = EC, $A\hat{B}C = E\hat{C}D$.

La messe di consigli e suggerimenti che un insegnante può dare su questo passo è veramente grande. Ogni insegnante sa il fatto suo. Vorrei accennarne alcuni: "Consideriamo i triangoli ADB e CDE"

Spesso i ragazzi trovano varie relazioni tra elementi di una figura e di un'altra, ma spesso non portano frutti dimostrativi proprio perchè non si rendono conto in quale contesto utilizzarle. D'altra parte è di aiuto e di guida alla memoria scrivere i triangoli o le altre figure sulle quali concentrarsi.

ADB e CDE

BD = DC

AD = DE

$A\hat{D}B = E\hat{D}C$

Da notare qui che gli elementi BD, AD, $A\hat{D}B$ sono incolonnati sotto il triangolo di appartenenza, ciò al fine di mantenere l'ordine nel confronto. Questo simbolismo letterale ha anche i suoi contenuti da sottolineare e utilizzare. Per esempio con BD si intende il segmento di estremi B e D. Sapreste dire se l'angolo $A\hat{D}B$ è compreso fra i segmenti AD e DB senza guardare la figura? A volte facciamo utili considerazioni senza guardare la figura ma solo osservando la disposizione delle lettere.

Seguono poi le varie motivazioni:

- per ipotesi
- per costruzione
- perchè opposti al vertice
- per precedente dimostrazione
- perchè somma/differenza/metà di segmenti/angoli uguali
- perchè angoli corrispondenti tra le rette parallele r e s rispetto alla trasversale t ecc.

Qui la preparazione logica dell'insegnante dà i suoi frutti senza che sia obbligato a fare un capitoletto iniziale di logica formale. E' la "sostanza della logica" che qui i ragazzi imparano gradualmente a trattare, con l'aiuto dell'insegnante. Chissà poi perchè i ragazzi dopo la terza media ricordano che quando ci sono due rette parallele allora arrivano gli angoli "alterni interni". Non si capisce quale sia il motivo di questa predilezione, infatti, qualunque sia la coppia di angoli considerata, questi sono alterni interni.

Allora è bene separare i vari aggettivi e ben caratterizzarli insieme ai loro contrari. Alterni a cosa? Interni a cosa? ecc.
"Per il I° criterio di uguaglianza ...."

Qui il teorema come chiave di volta del passo dimostrativo. Da qui l'importanza di conoscere i teoremi, quelli più interessanti e potenti.
"In particolare....."

Questo è il frutto del passo dimostrativo, mirato, intuito o fiutato dal ragazzo quando ha scelto la coppia di triangoli.

A questo punto entra in gioco la fase più interessante, quella del livello creativo-strategico. Infatti se il ragazzo ha raggiunto un po' di scioltezza con i passi dimostrativi gli si pone il problema di quali figure considerare, quali costruzioni effettuare, quali teoremi utilizzare. Nei problemi muti i ragazzi accedono più direttamente a questa fase.

I problemi poi si possono suddividere in quelli che necessitano di un passo dimostrativo, almeno due, tre, ecc. e in quelli che richiedono l'uso di un teorema, due, tre ecc. anche di capitoli molto diversi, nonchè di costruzioni ausiliarie, per dar luogo ad una gamma di problemi molto differenziata per difficoltà e complessità.

Quello che segue nella didattica euclidea è questione di contenuti e di programma, credo però che il grosso del discorso sia già stato giocato in questi primi passi. Molte altre cose andrebbero dette e ricercate, a fianco del sempre insostituibile "buon senso" professionale. Se la geometria euclidea a più di 2000 anni di distanza si può ben dire "classica" non altrettanto lo è, o meglio non lo è stato nella mia esperienza personale, la sua didattica. Infatti, molti dei consigli che oggi do ai miei allievi non furono dati a me a suo tempo, né indicazioni in tal senso mi vennero dall'Università. In passato poi e anch'oggi la geometria euclidea si è prestata e si può prestare a forme di autoritarismo e di unilateralità culturale.

Vorrei concludere dicendo che le nuove impostazioni geometriche non hanno nulla da guadagnare dall'"incenerimento" del filone tradizionale, ma con tolleranza tutta inglese hanno molto da guadagnare da un confronto serio e approfondito.

DEDO': La scelta di una particolare assiomatizzazione va lasciata anche al gusto del docente; aggiunge che l'assiomatizzazione dello Choquet non è di suo gusto: l'assiomatizzazione di Euclide, opportunamente precisata, è tuttora una valida alternativa.

Neppure si deve dare eccessiva importanza all'esigenza del rigore: cita in proposito la prefazione di H. M. S. Coxeter alla recente riedizione del DRAMA di L. Carrol (Euclid and his modern rivals, ed. Dover, 1973) nella quale l'eminente geometra afferma che il rigore di Euclide è già sufficiente in una scuola secondaria mentre un maggior rigore va lasciato agli studi universitari.

SPERANZA: Nel Convegno l'attenzione è stata portata sull'importanza dell'intuizione spaziale. Mi sembra che a questo proposito vi siano da distinguere due aspetti: quello della comprensione nello spazio così come si presenta alla nostra esperienza, e quella del valore conoscitivo delle rappresentazioni spaziali. Di regola nell'insegnamento della geometria ci occupiamo di più del primo aspetto; ma l'importanza del secondo cresce sotto i nostri occhi (si pensi all'importanza di grafici, grafi,... nella presentazione di una teoria, in particolare dei diagrammi nella teoria delle categorie, per cui senza la"figura"certe proprietà quanto meno si leggerebbero con estrema difficoltà).

Credo che siamo di fronte a un fenomeno comparabile con il sorgere dei linguaggi simbolici all'inizio dell'era moderna: non so quanto la "geometria" nel senso tradizionale possa collaborare in questo campo, ma forse questo fenomeno potrà modificare profondamente quello che intendiamo per "Geometria".

ULIVI: La dottoressa De Piccoli ha accennato al problema della fusione della geometria piana e solida nell'insegnamento secondario. La questione cominciò ad interessare gli ambienti matematici italiani soprattutto a partire dal 1884 data di pubblicazione degli "Elementi di geometria" del De Paolis accanito sostenitore del metodo fusionista. Il più importante risultato di tale metodo, riportato nel testo del De Paolis, è la costruzione del pentagono regolare indipendentemente dalla teoria dell'equivalenza e delle proporzioni, ottenuta come conseguenza del teorema del Desargues sui triangoli omologici la cui dimostrazione, fatta dal De Paolis in un caso particolare, richiede l'ausilio della geometria solida.

Il fusionismo aveva interessato non solo gli ambienti matematici italiani, ma anche quelli stranieri. In Francia ad esempio, già prima del 1884, vennero pubblicati due libri del Mahistre e del Méray dove era praticata la fusione.

Le dispute tra fusionisti e separatisti si protrassero in maniera alquanto accesa per tutto il primo decennio del '900; poi, gradatamente le discussioni si fecero meno frequenti e col trascorrere degli anni non si parlò più di fusione né vennero più pubblicati testi ad indirizzo fusionista.

Mi è sembrato utile aggiungere altre informazioni sul fusionismo perchè la conoscenza dei dibattiti che si sono svolti in passato intorno a certe questioni didattiche potrebbe aiutarci ad affrontare con maggiore spirito critico i dibattiti attuali, ed evitare errori già commessi. In particolare ho voluto richiamare l'attenzione anche con questo esempio concreto sul fatto che l'insegnamento della matematica nel corso degli anni ha subito l'influenza di vere e proprie mode.

CONTE: Ringrazio tutti coloro che sono intervenuti e soprattutto quelli che hanno criticato alcune delle mie affermazioni precisandone la portata o sostenendo che erano infondate. Quando ho affermato questa mattina che non sono un esperto di didattica della geometria, non si trattava infatti di un vezzo, ma della confessione di uno stato di cose reale, e quindi accetto di buon grado tutti i suggerimenti che sono stati dati anche perchè serviranno a me stesso per chiarirmi le idee.

Mi pare tuttavia che la sostanza delle mie affermazioni sia stata, sia pure con diverse sfumature, accettata da tutti, anche se ha probabilmente ragione il prof. Magenes quando afferma che alcune delle mie tesi erano esposte con troppa veemenza e nettezza e che richiederebbero un'argomentazione molto più articolata per poter essere sostenute. Credo comunque che non mancherà occasione per riparlare di questi argomenti e per approfondire un tema come quello dell'insegnamento della geometria che io giudico di grande importanza per tutta la didattica della matematica.

Quanto alle altre osservazioni che mi sono state fatte, vorrei innanzitutto precisare che l'accenno alla necessità di meglio definire la natura degli assiomi e soprattutto delle regole di derivazione di un sistema formale non significava che io fossi paladino della riduzione della geometria alla logica, ma volevo soltanto mettere l'accento sull'esigenza che, se si vuole parlare di rigore e di assiomatizzazione, allora si deve trattare di un vero rigore e di una vera assiomatizzazione, perchè altrimenti è meglio farne a meno.

Lo stesso discorso vale per le geometrie finite, che non possono certo esaurire tutta la geometria, ma che costituiscono un'importante fonte di esempi chiarificatori. Quanto ai teoremi sui triangoli di cui ha parlato il prof. Pucci, anche io credo che siano importanti, ma che si debba rinunciare ad alcuni di essi per dare spazio agli altri contenuti di cui ho parlato.

In ogni caso, mi pare che il panorama che è venuto fuori qui a Ferrara dalle relazioni dei nuclei e dagli interventi nel dibattito sia estremamente confortante e che ci siano quindi buone speranze perchè le difficoltà che l'insegnamento della geometria comporta possano essere fronteggiate e superate.

Sono intervenuti nel dibattito sul tema del confronto con l'Europa anche i proff. Magenes, Grugnetti, Strudhoff, Valabrega, Mammana e Kussova che ha illustrato l'insegnamento della matematica in Cecoslovacchia.

Sull'insegnamento della geometria è intervenuto anche il prof. Magenes. Ha chiuso i lavori del Convegno il prof. Mammana.

I N D I C E

INTERVENTI NEL DIBATTITO