ISSN 0393-0998

Luglio 1994
Supplemento al n. 7

Period. mensile
sped. in abb. post./50

Anno XXI

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SEDICESIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

PROBABILITÀ E STATISTICA NELLA SCUOLA SECONDARIA

CIVITANOVA MARCHE (MC), 28-29-30 OTTOBRE 1993
A cura di Adele Repola Boatto

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

Fascicolo monografico stampato con un contributo finanziario del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 40%) nonchè del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint • Via del Legatore 3 • 40138 Bologna (Italia)

Luglio 1994
Supplemento al n. 7

XVI CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Probabilità e Statistica nella Scuola Secondaria

Civitanova Marche (MC), 28-29-30 ottobre 1993
Istituto Tecnico Commerciale "F. Corridoni"

PROGRAMMA

giovedì 28 ottobre

ore 9.30 apertura del Convegno e saluti delle Autorità
ore 11.20 Giorgio Dall'Aglio, Introduzione alla probabilità
ore 12.40 Franco Di Cataldo, Calcolo delle probabilità e simulazione: ipotesi per una elaborazione ipertestuale

ore 15.10 gruppi di lavoro
ore 18.00 videocassetta sulla probabilità (di Giovanni Prodi, a cura dell'IRRSAE-Marche)

venerdì 29 ottobre

ore 9.00 Carla Rossi, Ragionamento induttivo, ragionamento deduttivo: problemi e integrazioni nell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica
ore 10.40 Walter Racugno, Opportunità interpretative della dispersione
ore 12.20 Maria Batini, Introduzione alla probabilità in una V Ginnasio
ore 12.40 Paolo Negrini e Maria Ragagni, La distribuzione di Poisson
ore 15.10 Stefano Antoniazzi, Proposte per (ri-)ottenere identità dell'algebra usando la probabilità
ore 15.30 Ido Borsini, Equilibrio termodinamico e statistica
ore 15.50 Emilia Salucci, Uso di strumenti informatici nell'approccio alla probabilità
ore 16.10 Silvana Bornoroni, I numeri a caso e il calcolo di p con il metodo Monte Carlo
ore 16.30 Lucia Tarsi, Applicazione di tecniche regressive in campo cartografico
ore 16.50 Mario Barra, "Fusionismo" fra geometria, teoria dei numeri e probabilità nello spazio ad n dimensioni
ore 17.30 Claudio Bernardi, Il Teorema di Fermat

sabato 30 ottobre

ore 9.00 Alberto Zuliani, Intrecci multidisciplinari nella problematica dell'insegnamento della probabilità e della statistica
ore 10.40 Tavola rotonda sul tema "Probabilità e statistica nella scuola secondaria", con la partecipazione di Mario Barra, Michele Boffa, Giuseppe Cicchitelli, Enzo Lombardo
ore 12.40 dibattito conclusivo
ore 13.00 chiusura del Convegno

Durante i break e nei pomeriggi i Convegnisti hanno potuto prendere visione di software didattico nel campo della probabilità e statistica.

PARTECIPANTI

Aina Francesca (Novara) - Alesiani Angela (Roccafluvione) - Alesiani Antonietta (Civitanova Marche) - Andreini Mara (Milano) - Antoniazzi Stefano (Treviso) - Arezzo Domenico (Genova) - Argenti Eliana (Terni) - Ascoli Bartoli Maria Teresa (Roma) - Atz Hermann (Bolzano) - Babini Alessandra (Ancona) - Baldoni Corrado (Umbertide) - Banchetti Tiziana (Fossombrone) - Barbato Virginia (Terni) - Barchiesi Tiziana (Macerata) - Barigelli Bruno (Ancona) - Barone Lorenzo (Lecce) - Barozzi Giulio Cesare (Bologna) - Barra Mario (Roma) - Barsanti Federica (Forte dei Marmi) - Basso Milena (Piombino Dese) - Batini Maria (Roma) - Bazan Maria Chiara (Castelfranco Veneto) - Benedetti Alessandro (Macerata) - Bernardi Claudio (Roma) - Bernecoli Sandra (Rovigo) - Bindo Tiziana (Grottaglie) - Boffa Michele (Millesimo) - Bonifacio Enrica (Camerano) - Bonsi Gabriella (Ferrara) - Borettini Maria Teresa (Ascoli Piceno) - Bornoroni Silvana (Roma) - Borsini Ido (Abbadia di Osimo) - Brambilla Maura (Osimo) - Brecciaroli Paola (Jesi) - Brolis Giglio Simonetta (Genova) - Brunelli Lina (Perugia) - Bruno Armando (Civitanova Marche) - Bucciarelli Albertina (Ascoli Piceno) - Cannas Paola (Macerata) - Cannizzaro Francesca (Sondrio) - Caporaletti Rita (Civitanova Marche) - Caraceni Adriana (Macerata) - Carlucci Diego (Altamura) - Castelli Fabio (Verona) - Castellino Michela (Latina) - Catanese Micaela (Ancona) - Cerasoli Mauro (L'Aquila) - Ceron Meri (Ferrara) - Chimetto Maria Angela (Vicenza) - Ciarrapico Lucia (Roma) - Cicchitelli Giuseppe (Perugia) - Ciceri Carlo (Savona) - Cifra Bruno Antonio (Bassiano) - Cococcioni Nadia (Civitanova Marche) - Colombetti Bernardini Sonia (Pisa) - Colombo Bozzolo Clara (Lugano) - Conte Sebastiano (Roma) - Colagrande Vittorio (Ortona) - Conti Savojni Anna (Pisa) - Corradini Anna (Grosseto) - Corti Beatrice (Figino Serenza) - Costa Angela (Timoline) - Crescenti Enrico (San Donà di Piave) - Crespina Elena (Roma) - Crocetti Carlo (Gualdo Tadino) - Cruciani Lina (Porto Sant'Elpidio) - Curti Maurizio (Latina) - D'Addio Antonietta (Porto San Giorgio) - Dal Borgo Pietro (Garna d'Alpago) - D'Amore Bruno (Bologna) - Dapueto Carlo (Genova) - De Giambattista Roberta (Tresivio) - Della Rocca Giorgio (Pontinia) - Dell'Uomo Guido (Alatri) - Del Vecchio Francesca (Borgo Montello) - De Siervo Paola (Roma) - De Vita Mauro (Roma) - Diamanti Settimia (Porto Sant'Elpidio) - Di Benedetto Giovanni (Pescara) - Di Biase Giuseppe (Pescara) - Di Cataldo Franco (Venezia) - Di Fermo Zopito (Pescara) - Dinelli Lucia (Mestre) - Di Sorbo Domenica (Caserta) - Drappo

Natalina (Vercelli) - Drappo Ines (Vercelli) - Drivet Alessio (Prolonghera) - Elisei Marisa (Macerata) - Esposito Gisella (Spinetoli) - Fabiani Mattiacci Doriana (Macerata) - Fagiani Simonetta (Terni) - Falchi Paolo (Grosseto) - Fantini Loredana (Fabriano) - Felicioni Costanzo (Sant'Elpidio) - Ferrante Loretta (Roma) - Ferrari Mario (Pavia) - Ferronato Ermanno (Venezia) - Filippucci Donatella (Mogliano) - Fraire Mary (Roma) - Gaggero Marisa (Genova) - Gaglioppa Rossana (Civitanova Marche) - Gambarelli Maurizio (Roma) - Gambotto Anna Maria (Torino) - Gazzaniga Giovanna (Pavia) - Ghiandoni Gabriele (Fano) - Ghio Sabina (Genova) - Giambò Antonino (Macerata) - Giorgi Strombi Nelsa (Pisa) - Gino Enrica (Novara) - Giuliani Elda (Pavia) - Giulivi Gianni (Terni) - Golini Francesco (Macerata) - Grassini Paola (Pisa) - Grella Ida (Torelli) - Greppi Margherita (Caresana) - Grugnetti Lucia (Parma) - Iacobelli Daniela (Roma) - Iaderosa Rosa (Milano) - Ippoliti Bruno (Osimo) - Laganà Gaetano Antonio (Roma) - Lamanna Enrico (Osimo) - Lania Licia (Messina) - La Torre Anna (Roma) - Laviosa Laura (Genova) - Leonardi Giuseppe (Acireale) - Leonori Lucia (Ancona) - Lenzi Domenico (Lecce) - Letterio Raffaele (Foggia) - Lizzio Angelo (Catania) - Lombardi Vanna Maria (Roma) - Lombardino Mariano (Cantù) - Lovato Valeria (Cologna Veneta) - Luzi Valeriano (Fermo) - Macrì Isabella (Reggio Calabria) - Maistrello Maura (Pressana) - Malesani Paolo (Padova) - Mangiaterra Remo (Porto Sant'Elpidio) - Mammana Carmelo (Catania) - Marchetti Fausto (Lana) - Marchioni Anna Rosa (Sarego) - Mariani Luiba (Colmurano) - Marone Silvia (Montecompatri) - Marras Alessandro (Quartu Sant'Elena) - Marsili Noemi (Macerata) - Marucci Rossella (Macerata) - Mascelloni Aldo (Grosseto) - Masciocchi Giuseppina (Ascoli Piceno) - Massacesi Luciana (Civitanova Marche) - Materozzoli Alessandra (Roma) - Mattei ildo (Jesi) - Maturo Antonio (Montesilvano) - Mazzanti Anna Maria (Macerata) - Mecozzi Sabrina (Porto Sant'Elpidio) - Meley Alessandra (Parma) - Melonari Antonia (Ascoli Piceno) - Menghini Marta (Roma) - Menconi Elda (Marina di Carrara) - Minocchi Miriam (Macerata) - Mogliani Giuseppina (Macerata) - Moncecchi Gianfranco (Milano) - Moreschi Marco (Ancona) - Moretti Cinzia (Pescia) - Moretti Milvia (Macerata) - Moretti Luciana (Ascoli Piceno) - Morgantini Alberto (Tolentino) - Mori Giuliana (Roma) - Moriconi Vincenza (Civitanova Marche) - Morini Umberto (Porto San Giorgio) - Mortari Maria (Terni) - Natalini Rosella (San Severino Marche) - Nava Francesca (Roma) - Nardi Janna (Pesaro) - Negrini Paolo (Bologna) - Olivieri Giovanni (Roma) - Orazi Franco (Urbisaglia) - Ottaviani Maria Gabriella (Roma) - Ottaviani Massimiliano (Ancona) - Pace Lorenza (Corridonia) - Pace Patrizia (Corridonia) - Palombini Annamaria (Civitanova Marche) - Pancrazi Ruggero (Monte San

Giusto) - Pannone Maria (Camerino) - Paoluzzi Fernando (Civitanova Marche) - Parenti Laura (Genova) - Pascocci Mario (Urbino) - Paternoster Floriana (Pesaro) - Pedrali Maria Grazia (Grumello del Monte) - Peduzzi Anna Maria (Ferrara) - Pellegrino Consolato (Modena) - Pennesi Filippo (Urbisaglia) - Percario Zelinda (Grosseto) - Perelli D'Argenzio Maria Pia (Dosson) - Pergola Marcello (Modena) - Perozzi Angelo Gabriele (Civitanova Marche) - Perugini Angela (Macerata) - Pesce Giovanna (Genova) - Pettinari Assunta (Civitanova Marche) - Piazza Rosanna (Roma) - Pierangioli Luciana (Grosseto) - Pierantozzi Maria Rosa (Sant'Egidio) - Pignati Pietro (Ancona) - Plateroti Massimo (Roma) - Pluchino Salvatore (Catania) - Prodi Giovanni (Pisa) - Racugno Walter (Cagliari) - Ragagni Maria (Bologna) - Rambaldi Giacomo (Savona) - Randazzo Grazia (Roma) - Randisi Antonino (Palermo) - Ranzani Paola (Mestre) - Reani Renzo (Viareggio) - Reggiani Maria (Pavia) - Renzi Marisa (Terni) - Repola Boatto Adele (Ancona) - Reversi Lorella (Fabriano) - Riccardi Riccardo (Manduria) - Robatto Marialuisa (Savona) - Rohr Ferruccio (Roma) - Romagnoli Nadia (Aprilia) - Romanoni M. Carmela (Pavia) - Rosati Mario (Padova) - Ridolfi Silvia (Civitanova Marche) - Rossi Carla (Roma) - Salvatore Gabriele (Montesilvano) - Salucci Emilia (Brescia) - Sancricca Anna Laura (Macerata) - Schiavon Amabile (Sottomarina) - Scimemi Benedetto (Padova) - Scoppola Carlo Maria (Roma) - Scozzafava Romano (Roma) - Silvestrelli Maria Pia (Ancona) - Silvestrini Maria Pia (Fabriano) - Sommavilla Paola (Belluno) - Sorresina Silvia (Grosseto) - Speranza Caterina (Roma) - Speranza Francesco (Parma) - Spilimbergo Francesca (Oderzo) - Sprega Maria (Fabriano) - Staropoli Francesco (Tropea) - Stortini Valter (Porto Sant'Elpidio) - Surbone Maria Grazia (Vercelli) - Tabarin Carla (Roma) - Tappatà Giuseppe (Macerata) - Tarsi Lucia (Fano) - Tenace Giuseppe (Sannicandro Garganico) - Testa Giuliano (Vicenza) - Todisco Luigi (Palazzolo) - Tognolatti Maria (Roma) - Tolozzi Franca (Civitanova Marche) - Torresi Luisa (Montegranaro) - Trento Cristina (Belluno) - Trilli Giorgetti Lilliana (Roma) - Turchetti Sandro (Ancona) - Ulivi Susanna (Forte dei Marmi) - Vanin Lucia (Venezia) - Veccia Filomena (San Nicola) - Vecchioni Paola (Civitanova Marche) - Venè Michelotti Margherita (Parma) - Vichi Elena (Marina di Montem.) - Vighi Paola (Salsomaggiore) - Villani Vinicio (Pisa) - Vita Bruna (Massa) - Vita Vincenzo (Roma) - Vitangeli Maria Cesira (Roma) - Zenobi Carla (Fabriano) - Zoccante Sergio (Vicenza) - Zuliani Alberto (Roma).

Pubblicità

RELAZIONI

INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ

Giorgio Dall'Aglio
Dipartimento di Statistica e Probabilità, "La Sapienza" - Roma

1. **Introduzione**

Ringrazio gli organizzatori per essere stato chiamato a tenere la relazione di apertura di questo convegno. Mi sembra opportuno sottolineare che la scelta è caduta su un esperto di probabilità più che di didattica, ed è chiaro che ciò è dovuto alla necessità di presentare la materia ai molti docenti che non hanno una preparazione specifica, prima di approfondire il discorso sulla didattica.
Di ciò non va data la colpa ai docenti stessi, ma all'università, che ancora oggi relega la probabilità tra gli insegnamenti complementari, mentre la statistica a volte è del tutto ignorata. E spesso la presentazione della probabilità è limitata allo sviluppo matematico astratto, valido per la ricerca scientifica ma non per la didattica. Tutto ciò quando probabilità e statistica, già presenti in alcune scuole e inserite (spesso in modo insoddisfacente) nei libri di testo, stanno per entrare a pieno titolo in tutte le scuole secondarie con l'annunciata riforma.
E ovvio che in uno spazio così breve non si può prevedere una esposizione, sia pure estremamente succinta, degli argomenti da trattare. Ma io sono convinto che si possano presentare il concetto di probabilità e le sue basi matematiche in modo da permettere una comprensione sostanziale dell'argomento, e di conseguenza una migliore comprensione (e, quando serve, la correzione) della presentazione che si trova nei testi scolastici.
Questa mia esposizione è rivolta agli insegnanti, e non agli studenti, dato che mi manca l'esperienza dell'insegnamento nella scuola secondaria. La maggior parte delle cose che dirò dovrebbero essere trasferibili agli studenti. Non

mancherò di riportarvi le esperienze di cui sono a conoscenza, e di aggiungervi il mio parere personale; ma cosa dire ai vostri studenti, e soprattutto come dirlo, resta, com'è naturale, alla vostra responsabilità.

* * *

Quando devo parlare di probabilità, sia ai miei studenti che ad ascoltatori più o meno digiuni di matematica, la mia prima preoccupazione è cercare di dissipare l'aura di magia che spesso circonda la probabilità. E ovviamente una esigenza didattica per tutta la matematica, ma che assume un rilievo particolare per la probabilità, dato il suo carattere più "sfuggente" per la difficoltà di misurarla. Su questo punto spero di poter tornare.
"Calcolo delle probabilità" è una espressione già abbastanza chiara. La si può rendere più chiara aggiungendo"...di certi eventi, partendo da quelle di altri eventi che vengono considerate note".
Per esempio nelle estrazioni dall'urna del lotto saremo tutti d'accordo che ciascuno dei 90 numeri ha probabilità 1/90; che, dopo aver estratto il primo numero, ciascuno dei rimanenti ha probabilità 1/89, ecc. Ci può interessare la probabilità di fare ambo, o terno; che un certo numero ritardi più di 35 settimane, e così via.
Ma come valutare le probabilità da cui partire? E le regole di calcolo vanno accettate acriticamente come ce le forniscono gli studiosi che le hanno ricevute a loro volta da altri studiosi? Non devono essere, piuttosto, riscoperte, o almeno discusse prima di accettarle? Questa strada è resa più agevole dalla possibilità di partire da una nozione di probabilità che, ovviamente in forma vaga ed a volte scorretta, è presente a tutti, e ricorre ampiamente sia nei mezzi di comunicazione che nei discorsi abituali. Non sempre è stato così, e non sarà male dare uno sguardo alla storia delle origini, come del resto è suggerito dal progetto Brocca.

2. Qualche cenno storico

La nozione di probabilità veniva discussa già nei tempi antichi; ma, a parte rari accenni, solo nei suoi aspetti qualitativi. Bisogna aspettare il sedicesimo secolo, con l'affermarsi della scienza sperimentale. E non a caso uno dei primi scritti di calcolo delle probabilità che conserviamo è dovuto a Galileo.

Ma la nascita del calcolo delle probabilità viene in genere attribuita all'interesse di Blaise Pascal e alla sua corrispondenza con Pierre Fermat. E l'attenzione di Pascal fu attivata dal cavalier de Méré, accanito giocatore, discreto matematico, e gran viaggiatore. Egli riportò a Pascal il problema della divisione della posta, vero punto di partenza del calcolo delle probabilità, ed un altro problema meno rilevante per lo sviluppo del calcolo delle probabilità, ma molto suggestivo, ed anche importante per i nostri discorsi. De Méré si lamentò con Pascal che la matematica lo faceva perdere ai dadi, perché aveva escogitato una combinazione (piuttosto complicata) che aveva probabilità maggiore di 1/2, aveva scommesso su tale combinazione, ma dopo molte scommesse invece di vincere perdeva. Pascal rifece i calcoli e trovò che in realtà la probabilità dell'evento considerato era minore di 1/2. Molti contestano la paternità così attribuita a Pascal, che in effetti non fu il primo in assoluto né contribuì ai primi sviluppi più di Fermat. Sembra però che fu proprio lui a stimolare uno studio meno sporadico del calcolo delle probabilità. D'altra parte questo corrisponde alla sua posizione filosofica (ricordate che anche i collegamenti della matematica con la filosofia sono raccomandati dal progetto Brocca), in particolare nei confronti di Cartesio, a lui quasi contemporaneo.
Come in filosofia alle "idee chiare e distinte" di Cartesio Pascal contrapponeva "le ragioni del cuore, che la ragione non comprende", così, in contrasto con la sistemazione stabile e ordinata della geometria cartesiana, egli dava inizio, certo non coscientemente, al processo dirompente del calcolo delle probabilità. La posizione di Cartesio è alla base dello sviluppo deterministico, culminante con l'affermazione che, conoscendo con precisione lo stato dell'universo in un determinato istante, si potrebbe calcolare la sua evoluzione in tutti gli istanti successivi. La posizione di Pascal è invece la lontana origine della moderna visione della scienza, secondo cui tutto quello che possiamo fare è costruire dei modelli matematici che descrivano, con una validità approssimata e provvisoria, i fenomeni che osserviamo; e i modelli deterministici, sufficienti solo per una rappresentazione largamente approssimativa, vanno sostituiti, per una comprensione più approfondita, con modelli basati su leggi probabilistiche.
La portata innovativa del calcolo delle probabilità fu ben compresa fin dall'inizio. Ci fu una serie di tentativi, spesso velleitari, di applicazioni in

tutti i rami dello scibile. Ci volle molto tempo perché, insieme agli sviluppi matematici, si affermassero applicazioni più fondate e convincenti. Ma già verso la metà del secolo scorso si ebbe l'inizio della genetica moderna con gli studi probabilistici di Mendel. E nello stesso periodo gli sviluppi nella fisica erano tali da far affermare a Boltzmann che la vera logica per l'interpretazione di questo mondo è il calcolo delle probabilità.
Più lenta è stata la diffusione della probabilità in altri campi e nella comprensione della gente. Oggi di probabilità e di statistica si parla spesso sui giornali nei campi più svariati. E sono arrivate anche nell'amministrazione della giustizia: De Finetti ed io abbiamo svolto vent'anni fa due perizie "statistico-probabilistiche" per il Tribunale di Roma; e la probabilità viene citata più volte nelle sentenze, ad esempio con riferimento ai test del DNA.

3. Che cosa è la probabilità

Allora, come affrontare il problema della probabilità? Un modo che ho seguito qualche volta è stato di partire presentando una moneta e affermando che era sbilanciata, per cui le probabilità di T e C erano rispettivamente 1/2 e 1/4. Le reazioni sono state unanimi: "La somma delle probabilità deve essere 1". Perché? Qualcuno ha spiegato "E' intuitivo". Una risposta poco valida per giustificare uno sviluppo matematico, ma che, essendo alla ricerca di un modello per matematizzare un concetto intuitivo, non va trascurata. Potrebbe persino essere considerata sufficiente, almeno per un tentativo; allora si può anche estendere questo principio a più eventi *necessari* (almeno uno di essi si deve verificare) e *incompatibili* (a coppie: due di essi non si possono presentare insieme). Si può aggiungere un altro requisito, anch'esso richiesto dall'intuizione: che la probabilità non sia mai negativa. E queste sono già le basi del calcolo delle probabilità (manca ancora qualcosa, che vedremo poi).
Naturalmente non siamo tenuti a fermarci a questa giustificazione: possiamo cercarne altre, sempre su base intuitiva, ma più essenziali, più primitive, e perciò più facilmente accettabili. E il caso quindi di vedere le varie motivazioni dei principi del calcolo delle probabilità presentate nel corso dei tempi. Anche perché ancora niente si è detto sull'altro problema, quello della valutazione delle probabilità di partenza.
La motivazione più naturale la si trova considerando il lancio di un dado.

Quale la probabilità che venga un numero pari? e un numero divisibile per tre? Credo che molti tra gli studenti, se non tutti, fin dalla prima media, risponderebbero subito 1/2 e 1/3. Mi piacerebbe avere un riscontro di questa mia convinzione. Nella letteratura sulla didattica della probabilità si incontrano più frequentemente domande comparative su urne con diverse composizioni: problemi secondo me molto più difficili (e le risposte sono frequentemente sbagliate).
Le risposte 1/2 e 1/3 si basano sull'applicazione intuitiva della cosiddetta definizione classica di probabilità: *"la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero totale dei casi possibili"*, con la condizione, spesso sottintesa, che tutti i casi devono essere "ugualmente possibili".
Da questa definizione si ricavano subito i due principi enunciati sopra. Si ha inoltre un modo per valutare le probabilità di un evento. Abbiamo quindi impostato la teoria della probabilità.
E tutto a posto? Non tanto. L'impostazione che abbiamo seguito presenta un sospetto di tautologia (l'uguale possibilità); e poi è limitata ad una situazione particolare: quella di un numero finito di alternative che (per ragioni di simmetria) possiamo considerare ugualmente possibili. Bisogna cercare qualche altra strada. E per questo torniamo alle origini.

* * *

Il nome della definizione classica deriva dal fatto che essa veniva adottata implicitamente (ma in Pascal si trova anche un accenno esplicito) fin dagli inizi. Era con tale impostazione che de Méré aveva calcolato la sua probabilità e Pascal l'aveva ricalcolata.
De Méré si aspettava che a lungo andare l'andamento delle scommesse si adeguasse alla probabilità. Una aspettativa condivisa da Pascal, che la confermava con la sua correzione, e che è stata in seguito enunciata esplicitamente nella *legge empirica (o postulato empirico) del caso:* in un gran numero di prove ripetute fatte nelle stesse condizioni la frequenza relativa dei successi si avvicina alla probabilità.
Ma se, quando abbiamo una probabilità, la probabilità si confonde con la frequenza, questa può essere utilizzata alternativamente per definire la

probabilità. Si ha così la definizione frequentista: *in una successione di prove ripetute fatte nelle stesse condizioni la probabilità è il limite della frequenza relativa dei successi*. Per le elaborazioni matematiche questa impostazione differisce poco dalla prima, e ne seguono ancora le stesse regole di calcolo.
Anche questa definizione, però, non va esente da critiche. C'è un limite il cui significato è poco chiaro. E c'è ancora la restrizione della definizione a situazioni particolari. Una partita di calcio è inserita in una successione di prove, per le quali però non si può certamente parlare di uguali condizioni. E allora?

* * *

L'impostazione escogitata per dare una risposta è rivoluzionaria rispetto alle altre, perché definisce la probabilità come il *grado di fiducia nel verificarsi dell'evento;* viene detta, per motivi evidenti, definizione soggettiva. Un grado di fiducia che naturalmente è legato alle informazioni di cui si dispone, e che perciò si baserà sulle frequenze, se siamo nel caso di prove ripetute, o sul rapporto, in una situazione di alternative che si possono considerare alla pari. Vanno quindi accettate valutazioni di tipo classico o frequentista, quando è il caso, ma senza dare ad esse un valore assoluto.
La definizione così data non è conclusiva, e va precisata se vogliamo trarne delle regole di calcolo. Un modo per farlo è quello delle scommesse. Si pensi ad una lotteria di amici che puntano la stessa quota ciascuno su una pallina della tombola. La probabilità di vittoria può essere valutata, per ragioni di simmetria, 1/90. Ma 1/90 della vincita è proprio quello che si è pagato per partecipare alla lotteria e questa caratterizzazione può essere utilizzata per definire la probabilità.
Con questa impostazione si capisce che cosa non va nell'assegnare a T e C le probabilità 1/2 e 1/4: un giocatore potrebbe scommettere sia su T che su C, e riceverebbe certamente il premio pagando complessivamente 3/4 del premio stesso.
Si arriva così alla definizione della probabilità di un evento come *il prezzo equo da pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica (e 0 altrimenti)* dove per equità (si parla anche di condizione di *coerenza) si* intende che non deve

essere possibile arrivare ad una vincita certa o ad una perdita certa. Si può vedere facilmente che da questa condizione si ottengono ancora una volta i due principi di base del calcolo delle probabilità.

* * *

Anche l'impostazione soggettiva ha un suo punto debole, che però è piuttosto sottile e quindi mi limito a citarne l'esistenza. Tuttavia resta per me la più soddisfacente. Intanto è la più generale, riferendosi anche a situazioni in cui le prime due sono inapplicabili. Ma soprattutto dà un significato più pieno alla probabilità, e un valore più stringente alle regole di calcolo: non accettarle significa ammettere la possibilità di scommesse (nel senso più ampio, anche sul piano intellettuale) che diano una vincita certa o una perdita certa, annullando il concetto stesso di aleatorietà.
Quanto al significato dato alla probabilità dalle varie definizioni, quella classica è la meno soddisfacente, perché fornisce un numero che non ha di per sé alcuna relazione con quello che accade in pratica. La relazione può venire dalla legge empirica del caso, portando ad una interpretazione frequentista; e per un evento singolo dà senza dubbio una valutazione sulla possibilità che l'evento si verifichi, cioè un grado di fiducia. Quindi più che una definizione può essere considerata uno strumento per la valutazione numerica.
La definizione frequentista ha certo un significato concreto, che è sufficiente in alcune circostanze, per esempio per un giocatore sistematico del lotto, per il quale quello che conta è il risultato a lungo andare. Ma si pensi ad un intervento chirurgico, per il quale si sappia dalle frequenze del passato che la probabilità di successo è 0,95; si potrà presumere che delle prossime 100 operazioni 95 circa andranno a buon fine; ma ciò dice ben poco al paziente, al quale interessa il suo caso personale. Per lui ha senso solo quello che da tale frequenza si può arguire a proposito del suo intervento, cioè l'aspettativa o il grado di fiducia, con una interpretazione inevitabilmente di tipo soggettivo.
Come si è visto, tutti questi modi di scavare nel concetto intuitivo di probabilità presentano degli aspetti poco soddisfacenti. Non può essere altrimenti, visto che stiamo cercando di formalizzare un concetto intuitivo

che, come ho già detto, è piuttosto elusivo. Il modello matematico a cui si è arrivati col tempo è, come tutti i modelli, approssimato e provvisorio: a confortarci c'è il fatto che i tre percorsi portano concordemente allo stesso modello matematico; e, più ancora, che finora nelle sue applicazioni in tutti i campi, delle scienze naturali, delle scienze umane e sociali, della tecnologia, esso ha dato buoni risultati.

* * *

Abbiamo visto tre diverse impostazioni per lo studio della probabilità; sotto di esse si raccolgono in pratica tutti i tentativi di definire la probabilità, a parte alcuni orientamenti, prettamente filosofici, che hanno meno attinenza con il significato concreto e con le elaborazioni matematiche.
Le tre impostazioni portano alle stesse basi matematiche; ciò ha reso più agevole il passaggio all'impostazione assiomatica: si possono adottare degli assiomi che esprimono le proprietà matematiche indicate concordemente dai diversi aspetti intuitivi della probabilità. Restano comunque delle divergenze di dettaglio.
Anche sulla valutazione numerica delle probabilità c'è in genere una larga convergenza, anche se ovviamente le diverse informazioni o convinzioni orientano a volte diversamente; per esempio nel campo dello sport, dove la passione porta a valutazioni molto diverse, per non parlare dei casi in cui un intervento fraudolento permette ad alcuni di avere informazioni molto più precise.
La differenza tra le tre impostazioni è quindi concettuale, e manifesta i suoi effetti soprattutto nelle applicazioni, in particolare nell'induzione statistica.

* * *

Naturalmente si presenta il problema della didattica. L'impostazione soggettiva viene espressamente richiamata nel progetto Brocca, e chiaramente io sono d'accordo sul fatto che non se ne possa prescindere. Ma questo non implica necessariamente tutto lo sviluppo che ho esposto sopra. E molto importante, secondo me, dare un'idea del significato sostanziale di probabilità. Dopo di che, a livello elementare, si può benissimo adottare come esemplificazione la definizione classica, che (quando è lecita) appare la più spontanea, e più facilmente permette la derivazione delle basi matematiche. Ad un livello un po' più alto la giustificazione delle regole di calcolo attraverso la condizione di coerenza dovrebbe essere semplice e convincente.
Passiamo ora agli aspetti matematici.

4. **Le basi matematiche**

La definizione classica, insoddisfacente nella sostanza, si è dimostrata invece molto utile sul piano formale, e come spunto per le successive elaborazioni. E ci dà ancora un aiuto, perché gli eventi in essa si presentano come sottoinsiemi dell'insieme dei casi possibili (si pensi ad esempio al lancio del dado), suggerendo di adottare in generale gli insiemi per rappresentare gli eventi.
Ho parlato finora di eventi senza dire che cosa sono, e l'ho fatto perché una definizione è difficile e secondo me non necessaria, essendo sufficiente fare ricorso al significato intuitivo. La rappresentazione come insiemi ne dà una "definizione" matematica che va bene per gli sviluppi formali. Questa rappresentazione non piace a tutti, perché non riproduce il concetto intuitivo, che porta piuttosto ad una visione unitaria dell'evento; ma sul piano formale non presenta inconvenienti di rilievo.
La rappresentazione degli eventi come insiemi può presentare anche delle difficoltà didattiche, quando gli studenti sono del tutto digiuni di teoria degli insiemi. Io penso che le nozioni di base della teoria degli insiemi, se non conosciute, possono essere presentate agli studenti in questa occasione, con qualche vantaggio per la loro comprensione. Ma, secondo il mio assunto generale, il giudizio spetta a voi.

* * *

Gli eventi saranno quindi, in generale, sottoinsiemi di un dato insieme Ω, detto *evento certo, i* cui punti vanno intesi come i possibili risultati di una prova (in senso del tutto generale: un esperimento, una osservazione, o semplicemente l'accertamento di qualcosa che inizialmente non è noto). Per essi si usano le consuete operazioni sugli insiemi:

-$\bar{A}$ (oppure A^C) è la *negazione* di A, cioè l'evento "A non si verifica"
-$A \cup B$ è *l'unione ="si* verifica almeno uno dei due eventi" (cioè o A o B o entrambi). L'unione di più eventi $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ (="si verifica almeno uno degli n eventi") si scrive anche $\bigcup_{r=1}^{n} A_r$
-$A \cap B$ è *l'intersezione ="si* verificano sia A che B". L'evento "si verificano tutti gli eventi" è $\bigcap_{r=1}^{n} A_r = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
-All'insieme vuoto corrisponde *l'evento impossibile* $\emptyset = \Omega$
-Più eventi si dicono incompatibili quando l'intersezione di due qualunque di essi è impossibile.

* * *

Riprendiamo ora le proprietà di base
1) $O \leq P(A) \leq 1$
L'evento certo ha probabilità 1: $P(\Omega) = 1$
L'evento impossibile ha probabilità nulla: $P(\emptyset) = O$

2) Legge delle probabilità totali eventi incompatibili o proprietà additiva della probabilità: La probabilità dell'unione è uguale alla somma delle probabilità:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

3) Legge delle probabilità totali (in generale, anche per eventi incompatibili):
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Le prime due sono ricavabili (ed in gran parte già ricavate) da ciascuna delle definizioni di probabilità esaminate; esse sono anche (con qualche riduzione, perché così risultano sovrabbondanti) il nucleo delle più comuni impostazioni assiomatiche, che poi si diversificano per alcuni aspetti.
Resta ancora da parlare della probabilità condizionata.

5. La probabilità condizionata

C'è un paradosso intuitivo che ogni tanto compare anche sui giornali con grande evidenza: nel gioco del lotto la probabilità di un numero in ritardo è uguale o maggiore rispetto agli altri? Il meccanismo dell'estrazione ci dice che è uguale; la nostra aspettativa che il numero prima o poi si debba manifestare ci dice che è maggiore. Cerchiamo di vedere come stanno le cose.
In realtà le estrazioni (che una volta erano trasmesse anche alla televisione) sembrano realizzate in modo da assicurare le stesse condizioni a tutte le palline nell'urna, indipendentemente da quello che è successo nel passato: qualcuno parla, a questo proposito, di "mancanza di memoria". L'altra conclusione è meno immediata e perciò più sospetta; c'è qualcosa di sbagliato?
Supponiamo per esempio che sulla ruota di Napoli il numero 34 non esca da 147 settimane: si è verificato nel 1985 e l'agitazione fu tale che il parere mio e di altri probabilisti fu richiesto dai giornali e alla televisione. Il ragionamento è questo: se non esce neanche ora si arriva ad un ritardo di 148 settimane; la probabilità di un tale ritardo è molto bassa, e quindi è molto bassa la probabilità che il 34 non esca.
In effetti la probabilità che un dato numero non esca per 148 settimane è 0,00021; questo però se la si valuta all'inizio. Ora che già da parecchio il numero si ostina a non uscire, è ancora la stessa? Se a metà campionato una squadra che inizialmente era poco valutata si trova in testa alla classifica, la probabilità che conquisti lo scudetto è ancora bassa come all'inizio? La risposta sta nella *probabilità condizionata.*

* * *

Lanciando due volte un dado la probabilità di ottenere come somma 12 è 1/36 (in entrambi i lanci deve venire 6). Ma dopo il primo lancio la valutazione cambia radicalmente, e dipende dal risultato osservato. Cioè la probabilità di un evento varia dopo aver osservato un altro evento ad esso collegato: abbiamo, appunto, una nuova probabilità condizionata dall'evento osservato. Se indichiamo con A l'uscita del 6 al primo lancio, con B la

somma 12, con P(B|A) la probabilità di B condizionata da A, *o probabilità di* B *dato* A, avremo P(B) = 1/36, P(B|A) = 1/6, P(B|A) = 0.
In questo caso la valutazione delle probabilità condizionata è immediata. Come arrivarci in generale? Consideriamo, nell'estrazione da un'urna contenente dieci palline numerate da 1 a 10, gli eventi A=numero pari e B=numero divisibile per 3. E P(B)=3/10; per calcolare P(B | A) bisognerà limitarsi a considerare i numeri pari, 2, 4, 6, 8, 10, e osservare che tra questi uno solo è dispari: P(B | A)=1/5. In altre parole ora i casi possibili non sono più tutti quelli iniziali, ma solo quelli favorevoli ad A; e i casi favorevoli sono, tra questi, quelli favorevoli a B, cioè i casi favorevoli sia ad A che a B, cioè ancora i casi favorevoli ad $A \cap B$.
In altre parole, indicando con n il numero dei casi favorevoli all'evento A, si avrà

$$P(B|A) = \frac{n_{A\cap B}}{n_A} = \frac{n_{A\cap B}/n}{n_A/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Da qui si ottiene la legge delle probabilità composte, espressione classica che si riferisce alla intersezione, come probabilità totali all'unione.
Abbiamo così trovato la formula per la probabilità condizionata nell'impostazione classica. Con la definizione frequentista il procedimento è analogo; e non sarà una sorpresa, a questo punto, sapere che lo stesso risultato si ottiene nell'impostazione soggettiva (ma con un ragionamento più complicato).
E nell'impostazione assiomatica? Bisognerà aggiungere un nuovo postulato? Non è necessario. La caratteristica dell'impostazione assiomatica, di dare le relazioni formali senza riferimento al significato sostanziale, fa sì che in questo ambito la probabilità condizionata si introduca soltanto come definizione. Viene meno, ovviamente, la possibilità di applicazione, se non attraverso una interpretazione che dia un significato ai concetti astratti.
Il discorso è stato forse troppo lungo, ma secondo me è necessario per una comprensione dellemotivazioni alla base delle elaborazioni matematiche.

6. L'indipendenza

L'indipendenza tra eventi (naturalmente intesa nel senso del calcolo delle probabilità)viene spesso trattata prima della probabilità condizionata, dicendo che se due eventi sono indipendenti la probabilità che si verifichino entrambi è uguale al prodotto delle probabilità dei due eventi. La si enuncia anche come "legge delle probabilità composte per eventi indipendenti".
Questo procedimento è forse necessario ad un livello di insegnamento molto elementare, ma non è soddisfacente. Si parte, in questo modo, dall'indipendenza valutata in base allo svolgimento dell'esperimento; cioè due eventi sono considerati indipendenti perché relativi a "prove indipendenti", come due successivi lanci di un dado. Ciò è senza dubbio chiaro ed intuitivo, ma non esaurisce il concetto di indipendenza, e non permette una facile derivazione della formula, come per la probabilità totale.
Il fatto è che le due "prove indipendenti" vanno considerate in realtà come parti di un'unica prova, e ciò complica le cose. Un percorso possibile, nel lancio di due dadi, è il seguente. I risultati possibili sono le 36 coppie di valori (1,1), (1,2),...,(6,6); se A e B sono l'uscita del 6 nel primo e nel secondo dado, contando il numero dei casi possibili si ottiene P(A)= 1/6, P(B)= 1/6, $P(A \cap B)$= 1/36. Rendere più generale, e direi anche più significativo, questo risultato non è agevole.
Il procedimento usuale nel calcolo delle probabilità è legato invece alla probabilità condizionata. Dire che B è indipendente da A (in senso probabilistico) può interpretarsi nel senso che il verificarsi o meno di A non influisce sulla probabilità di B, e quindi che la probabilità condizionata di B è uguale alla probabilità "assoluta"; in altre parole l'informazione che A si è verificato non modifica la valutazione della probabilità di B. Allora

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A) = P(B)$$

da cui si ottiene la definizione matematica di indipendenza

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Come per ogni definizione, questa va considerata come una condizione necessaria e sufficiente. Se, per lo svolgimento della prova, riteniamo che i due eventi siano indipendenti, vale la relazione scritta sopra. Ma è possibile anche che, calcolando le varie probabilità, ci accorgiamo che esse verificano la relazione; allora concludiamo che gli eventi sono indipendenti.
Per esempio nel lancio di un dado, per i due eventi A= numero pari e B= numero piccolo (cioè 1 o 2) si ha $P(A)= 1/2$, $P(B)= 1/3$, $P(A \cap B)= 1/6$, e i due eventi sono indipendenti. E possibile che a prima vista ciò appaia intuitivamente poco accettabile; ma ci si deve convincere del significato più ampio da dare al concetto di indipendenza.

* * *

Ritorniamo ora al problema del ritardo nel gioco del lotto. Sia E_n per $n = 1,2,\ldots$ l'evento "il numero 34 esce nell'n-esima settimana" (si intende a partire da una settimana fissata) e sia B_n = "il 34 non esce per n settimane". Si ha $P(E_n) = p = 1/18$, $P(\overline{E}_n) = q = 17/18$, e gli eventi E_n sono indipendenti. Otteniamo allora

$$P(B_n) = P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_n) = P(\overline{E}_1)\, P(\overline{E}_2)\, P(\overline{E}_n) = q^n$$

che, pur essendo q non molto diverso da 1, diventa un numero piccolo quando n aumenta. Per esempio $P(B_{148})=(17/18)^{148} =0{,}0002118$. Ma quello che dobbiamo valutare è la probabilità di un ritardo di n settimane sapendo che abbiamo già raggiunto un ritardo di n-1 settimane, cioè la probabilità condizionata $P(B_n \mid B_{n-1})$ che è data da

$$P(B_n \mid B_{n-1}) = \frac{P(B_n \cap B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \frac{P(B_n)}{P(B_{n-1})} = \frac{q^n}{q^{n-1}} = q$$

Mi è stato chiesto una volta "Ma come fa B_n a sapere che si è già verificato

B_{n-1} ? Non si era parlato di mancanza di memoria?" Qui mi pare che il significato reale della probabilità riveli tutta la sua importanza, e in particolare si manifesti la significatività dell'impostazione soggettiva. Quello che cambia non è B_n , ma sua probabilità. Nel valutare tale probabilità noi non possiamo prescindere dalle informazioni che abbiamo e dobbiamo di conseguenza adottare una probabilità condizionata. E per calcolarla siamo tenuti alle regole calcolo che derivano dalle proprietà intuitive della probabilità: in particolare, nell'impostazione soggettiva, rifiutare le regole adottate significa accettare la possibilità di scommesse "truccate". Insomma il principio di coerenza (se lo si ammette) ci impone, una volta fissate le probabilità di partenza, di accettare le probabilità che ne derivano per gli altri eventi.

* * *

Chiudo a questo punto, con il rammarico di non poter esplorare ancora le ricchezze di un argomento che da molti anni mi appassiona, e ritengo che possa appassionare chi lo approfondisce, e almeno interessare chi lo avvicina in modo non del tutto superficiale o esclusivamente formale. Spero di aver suscitato un inizio di tale interesse, e di avervi aiutato a suscitare lo stesso interesse nei vostri allievi. Giovanni Prodi ha incontrato la probabilità nella sua ricerca di uno spunto didattico per la matematica; mi auguro che ciò possa valere anche per il vostro insegnamento.

RAGIONAMENTO INDUTTIVO-
RAGIONAMENTO DEDUTTIVO:
PROBLEMI E IMPLICAZIONI NELL'INSEGNAMENTO DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DELLA STATISTICA.

Carla Rossi

Nota: Si fa osservare che le considerazioni riportate nei paragragi 2, 3, 4, sono una versione ampliata della parte introduttiva dell'intervento a firma: Lombardo, Rossi, Zuliani.
Si ritiene opportuno l'inserimento in entrambi gli interventi per motivi di completezza e funzionalità, senza dover ricorrere a fastidiosi rinvii.

1. Introduzione.

L'introduzione di argomenti di probabilità e statistica, nei programmi di Matematica proposti dalla Commissione Brocca, ha creato una certa preoccupazione tra gli insegnanti e, forse, anche disorientamento.
Ad alcuni sembra che la mole di argomenti dei nuovi programmi sia eccessiva rispetto alle ore disponibili per svolgerli, altri manifestano dei dubbi circa il modo di trattare questi nuovi argomenti, sull'ordine migliore per affrontarli, sul tipo di impostazione e così via.
Tutto questo può essere in gran parte attribuito al fatto che la maggior parte dei laureati in Matematica che lavora in campo scolastico non ha mai ricevuto un insegnamento del settore probabilistico-statistico nel corso dei suoi studi.
Proverò a svolgere alcune considerazioni che possano essere di indirizzo nell'affrontare il problema e a proporre qualche suggerimento di tipo didattico, sia legato a contenuti che ad approcci possibili per l'insegnamento di queste discipline.

Per fare questo nel modo più proficuo, prenderò prima in esame alcuni dei motivi che, a mio parere, hanno ostacolato finora una adeguata diffusione nel nostro Paese della cultura scientifico-matematica e, in particolare, dei concetti fondamentali del metodo induttivo che sono alla base della probabilità e della statistica.

2. Le due culture.

La cultura italiana ha forti tradizioni *umanistiche*. Questo comporta: - la tendenza a sviluppare le capacità linguistiche in senso strumentale alla lettura dei "classici" a scapito dello sviluppo dei linguaggi tecnico-scientifici. Al contrario, in altri Paesi (per esempio quelli anglosassoni), una più foriie tradizione scientifico-naturalistica, ha consentito un maggiore sviluppo anche di linguaggi con un taglio scientifico. E' diffuso in Italia, nel linguaggio dei mezzi di informazione solo per fare un esempio, l'utilizzo di termini come "probabilità" e "possibilità" indifferentemente; si parla continuamente di "crescita esponenziale", si citano "assiomi indimostrabili" e così via.

- Una maggiore attenzione, nello studio dello sviluppo del pensiero, a quelle parti "vicine" a schemi logico-deduttivi piuttosto che induttivi. Nello studio della Storia della filosofia ci si ferma molto di più su Cartesio, Kant, Hegel fino ad arrivare a Croce, che su Galileo, empirismo inglese, pragmatismo. Globalmente si sviluppano, attraverso tutti i percorsi didattici propri di ogni disciplina, capacità e attitudini rivolti verso procedimenti deduttivi piuttosto che verso procedimenti induttivi.

Persino l'insegnamento della fisica (e delle altre scienze sperimentali) è più vicino a questo schema generale che al "metodo" galileiano.

Non viene quasi mai messo in luce il fatto che le "regole" che si utilizzano nella previsione di "fatti" fisici sono il risultato di elaborazioni e calcoli effettuati sulla base di "modelli" matematici, suggeriti da osservazioni "empiriche", interpretativi del fenomeno in esame di cui si colgono, nei diversi contesti, gli aspetti ritenuti peculiari per la soluzione del problema che interessa studiare.

Il modello planetario dell'atomo non è più inadeguato di altri a spiegare certi fenomeni, ma non è adatto a spiegarne altri (per un diverso approccio allo studio della fisica e delle altre scienze sperimentali si può far riferimento a (1), (2), (3) e (4)).

I percorsi usuali nell'insegnamento scolastico sono, però, piuttosto tesi al conseguimento di "verità definitive" che di un "metodo" che consenta, di volta in volta, di arrivare all'interpretazione di diversi fenomeni con un "sufficiente grado di approssimazione". Il concetto stesso di approssimazione è completamente estraneo alla cultura tradizionale e neppure l'introduzione degli strumenti informatici ha portato una maggiore consapevolezza né in senso numerico né in senso modellistico.

Il metodo induttivo comporta necessariamente "approssimazione" e "provvisorietà" dei risultati conseguiti, oltre ad una certa dose di soggettivismo nell'interpretazione, che sono concetti e attitudini non solo trascurati nell'insegnamento tradizionale italiano, ma, in qualche misura, scientemente rifiutati.

Qualsiasi proposta "innovativa" deve fare i conti con questa situazione generale ampiamente sedimentata e comunemente accettata da tutti, anche dagli insegnanti, che dovrebbero essere gli artefici di eventuali modifiche nelle modalità e non solo nei contenuti dell'insegnamento, in modo anche da stimolare, soprattutto, un migliore sviluppo delle capacità critiche degli allievi, che è poi uno degli obiettivi dichiarati del percorso scolastico.

Per approfondimenti in tema di cultura umanistica contro cultura scientifica, si può vedere (5).

3. Insegnamento per problemi, insegnamento per schemi.

La situazione descritta ha prodotto l'affermarsi di una metodologia di insegnamento delle discipline scientifiche, e in particolare della matematica, per schemi piuttosto che per problemi.

Si studia la geometria euclidea e si calcolano tutte le possibili aree e proprietà di figure piane comunque complicate, ma non si fa mai cenno al fatto che si tratta in realtà dell'applicazione di un modello che è solo un'approssimazione per lo studio di proprietà, per esempio, di territori, dato che in realtà la superficie terrestre è sferica e nella geometria sferica non valgono gli

assiomi e i postulati della geometria euclidea. A questo proposito considerazioni sulle geodetiche e spiegazioni sul perché della convenienza delle rotte polari per raggiungere L'America del Nord o il Giappone basterebbero ad aprire uno spiraglio, almeno in termini di curiosità, sulle geometrie non euclidee.
Un aspetto estremo di questo tipo di insegnamento per schemi ipotetico-deduttivi è osservabile nell'insegnamento del Calcolo delle Probabilità, che, quando viene trattato, è spesso inserito all'interno dell'Analisi e visto come un'applicazione particolare di metodi analitici (calcolo combinatorio o altro) piuttosto che un capitolo autonomo della matematica che si serve principalmente, ma non esclusivamente, dell'analisi come strumento e che trova le sue basi in problemi non affrontabili all'interno di un semplice modello logico-deduttivo.
Il percorso più adeguato per l'insegnamento del Calcolo delle Probabilità e della Statistica è invece di tipo induttivo: **PROBLEMA SIGNIFICATIVO → MODELLO RISOLUTIVO → RISULTATI (PREVISIONI) → CONFRONTO CON DATI → EVENTUALE MODIFICA DEL PRECEDENTE MODELLO** ecc. (per considerazioni più generali sui modelli matematici si veda (6) e (7)).
Occorre, quindi, un capovolgimento del metodo tradizionale e un passaggio deciso all'approccio per problemi.
E' importante, però, sia risolvere uno stesso problema (interessante) con più schemi teorici, sia applicare uno stesso modello a più problemi significativi. Questo soprattutto per evitare l'affermarsi di "ricettari" e per non trasmettere l'idea (sbagliata) della corrispondenza uno a uno tra problemi e modelli. Si deve tendere a sviluppare la capacità di "districarsi" davanti a problemi "nuovi" non inseriti in schemi precostituiti usando le competenze acquisite mediante la soluzione di altri problemi.
E' quasi inevitabile, con questo approccio, operare in un contesto interdisciplinare e con un'ottica fusionista.

4. Fusionismo e interdisciplinarità.

Una strategia potenzialmente efficiente per l'innovazione didattica, tesa a

ottenere un migliore sviluppo dell'autonomia nell'affrontare problemi nuovi, dovrebbe essere essenzialmente basata su ipotesi di fusionismo e lavoro per progetti interdisciplinari.
Da un lavoro interdisciplinare è possibile trarre problemi interessanti e significativi da affrontare, utilizzando anche le capacità offerte da mezzi informatici (analisi di dati complessi, simulazione).
La scelta di problemi significativi in un certo campo applicativo e interessanti per gli strumenti usati nella soluzione facilita la sedimentazione delle nozioni sia di tipo metodologico che legate all'applicazione.
La Probabilità e la Statistica costituiscono lo strumento principe per affrontare problemi applicativi significativi e permettono il compimento completo dello schema galileiano: **OSSERVAZIONE → COSTRUZIONE DI UN MODELLO → CALCOLO DELLE PREVISIONI → RILEVAZIONE DI NUOVI DATI ADEGUATI → CONFRONTO CON LE PREVISIONI.**
Questo schema suggerisce anche un ordine temporale nell'introduzione degli argomenti: metodi per la descrizione dei dati, modelli probabilistici, inferenza (che è anche quello suggerito dalla Commissione Brocca).
Di tale tipo di percorso è possibile proporre dei prototipi, sia "storici", sia attuali, che possono aiutare a superare la mancanza di esperienze consolidate.
E' particolarmente istruttiva l'analisi di dati provenienti dal campo fisico (classico), che rispondono quindi a modelli essenzialmente deterministici in cui le uniche fluttuazioni sono dovute a errori di misura, in contrapposizione ad analisi di dati in ambito biologico o demografico, che rispondono a schemi probabilistici. La difficoltà delle analisi statistiche su dati non fisici (biologici, sociologici, economici ecc.) proviene da quella che è la diversità essenziale delle relazioni che occorre mettere in luce in generale, rispetto a quelle in campo fisico. In tale ambito, infatti, si ha sempre a che fare, in pratica, con relazioni di dipendenza funzionale, perché, anche in quei casi in cui l'interpretazione teorica deve ricorrere a schemi probabilistici, le misure effettive (macroscopiche) derivano dal contributo di masse innumerevoli di elementi omogenei e conducono a relazioni funzionali (**leggi dei grandi numeri**).
In generale, invece, in altri campi la popolazione di riferimento, a volerla

suddividere secondo tutti i caratteri che la differenziano verrebbe ripartita in classi sempre più ristrette fino a ridursi ai singoli individui.
Il fisico, qualunque teoria crei, sa sempre che dovrà risultarne che i fatti sperimentali futuri vanno come l'esperimento ha dimostrato. Negli altri campi non esistono fatti osservati che si possono ripetere identici, né che abbiano, quand'anche fossero identici, identico svolgimento.
L'approccio fusionista è particolarmente opportuno nell'ambito degli strumenti matematici mediante l'utilizzazione sinergica di diversi metodi (geometrici, analitici, grafici) che possano via via risultare utili nella soluzione di un determinato problema.
Con un tale approccio si può ovviare, tra l'altro, ad un altro derivato dell'attuale sistema: lo sviluppo, a volte fin troppo spinto, delle capacità analitiche a scapito delle capacità di sintesi. Tra l'altro si può pervenire ad un'economia di tempo mediante integrazione di strumenti di tipo diverso.
Non mi soffermerò sulle ovvie integrazioni tra analisi e geometria, citerò solo il fatto che una corretta e meditata utilizzazione delle distribuzioni statistiche, e, in particolare, delle loro rappresentazioni grafiche tramite istogrammi, rende immediata l'introduzione del concetto di integrale, dei principali metodi di calcolo numerico degli integrali definiti e così via.
L'interpretazione fisica della media come baricentro di una distribuzione statistica e della varianza come momento di inerzia offre molti spunti di approfondimento sia sul versante della fisica sia sul versante statistico.
I principali problemi sono legati alla mancanza di tradizione nell'insegnamento scolastico della Probabilità e della Statistica e anche nell'approccio interdisciplinare; occorre, quindi, da una parte acquisire e rendere disponibili su larga scala eventuali esperienze effettuate, dall'altra proporre con coraggio percorsi possibili, che possano costituire una base di esperienze di utilizzo generale.

5. Un esempio didattico: uso della nozione di probabilità condizionata.

Si è detto quanto sia importante proporre percorsi didattici (8). Ci limiteremo qui a prospettare un possibile approccio per trattare, più che altro dal punto di vista applicativo, uno dei concetti fondamentali della Probabilità, la

probabilità condizionata.
Personalmente ritengo che si tratti del concetto più importante, per certi versi banale, troppo spesso trattato impropriamente.
Bisogna innanzi tutto considerare che, in realtà, qualsiasi valutazione di probabilità porta a probabilità condizionate, rispetto allo stato di informazione del soggetto che effettua la valutazione stessa. In altre parole non esiste una probabilità assoluta "appiccicata" ad un certo evento, uguale e immutabile, ma valutazioni di probabilità legate alle diverse situazioni e allo stato di informazione del soggetto che le effettua.
E' evidente che si hanno valutazioni diverse circa il gruppo sanguigno di un neonato a seconda che si conoscano o meno i gruppi sanguigni dei due genitori o di uno soltanto. In generale, anche lo stato di informazione di un soggetto può essere identificato da un evento, che, una volta che sia noto che si è verificato, ha funzione, appunto, di informazione acquisita. Indicheremo, pertanto, la probabilità dell'evento A, condizionata all'informazione o evento B, con P(A/B).
Uno degli esempi più interessanti di applicazione delle probabilità condizionate è quello che riguarda gli "screening di popolazione", citato anche in (8).
Un'utile variante è costituita dai sondaggi a risposta casualizzata (9), che offrono spunto per interessanti lavori interattivi. Riporteremo brevemente le basi teoriche del metodo rinviando per ulteriori approfondimenti applicativi all'interessante contributo (9).
Supponiamo dunque che una **modalità** "delicata" D di un certo **carattere** sia presente in proporzione incognita π ($0 \leq \pi \leq 1$) in una data **popolazione statistica** composta di N **unità**, mentre l'**attributo** Y di un secondo carattere **incorrelato** con quello delicato e dichiarabile senza alcun timore, sia diffuso nello stesso **collettivo** in proporzione nota π_y ($0 \leq \pi_y \leq 1$)
Per **stimare** si rinuncia alla domanda diretta, ben sapendo che si incontrerebbero molti rifiuti e si avrebbero numerose risposte distorte, e si procede, invece, secondo il seguente schema di rilevazione.

- L'interpellato esegue un **esperimento casuale** (per esempio il lancio di un dado) che può generare due **eventi** E e **incompatibili ed esaustivi** (per esempio faccia minore di 3 oppure non minore di 3) con probabilità note, rispettivamente λ e $1-\lambda$ ($0 < \lambda < 1$) (nell'esempio 1/3, 2/3).

- Se si verifica E, risponde alla domanda "possiedi l'attributo D?".

- Se si verifica $\bar{E}$, risponde alla domanda "possiedi l'attributo Y?".

- L'esito dell'esperimento casuale è noto solo all'intervistato.

- L'intervistato risponde con "SI" o "NO" senza indicare a quale domanda sta rispondendo.

La procedura, che può apparire stravagante, garantisce all'intervistato, unico a conoscere il risultato dell'esperimento casuale, l'impossibilità per chiunque di interpretare il significato della sua risposta. Nello stesso tempo è possibile con semplici calcoli effettuare una stima di, che è quello che interessa.
Infatti, utilizzando la formula delle probabilità composte, possiamo ottenere la seguente relazione che lega le quantità in gioco:

$$\pi = (p - \pi_y \ (1 - \lambda)) / \lambda$$

dove si è indicata con p la probabilità di risposta affermativa, non importa a quale domanda.
Osserviamo che al secondo membro compaiono due quantità note a priori (π_y e λ) e una quantità incognita, ma stimabile facilmente sulla base della corrispondente frequenza osservata, che indicheremo con f.
Possiamo perciò stimare la quantità che ci interessa (π), semplicemente sostituendo f al posto di p nella relazione precedente e introducendo l'ovvio vincolo che la stima sia non negativa. Otteniamo pertanto:

$$\pi = max\ \{((f - \pi_y \ (1 - \lambda)) / \lambda), 0\}$$

Per maggiori dettagli si rinvia a (9), dove si descrive l'utilizzo di tale tecnica per la stima del consumo di stupefacenti in età scolare nella città di Verona.
In questo esempio le probabilità condizionate che giocano un ruolo fondamentale sono: P(SI/E)= e P(SI/ E)= π_y. Attraverso il legame espresso dalla formula delle probabilità composte è possibile infatti esprimere quella

incognita in funzione di quella nota e procedere alla stima.
Le probabilità condizionate si prestano, però, anche a distorsioni di interpretazione, in particolare da parte dei non addetti ai lavori (ma non solo).
Anche le ambiguità linguistiche contribuiscono a creare distorsioni di interpretazione.
A questo proposito si veda (10) in cui si prende in esame, sempre in tema di droga, la cosiddetta teoria del passaggio (da droghe leggere a droghe pesanti) che si basa esclusivamente su un'interpretazione errata delle probabilità condizionate in gioco.
Richiamiamo brevemente i termini della questione, rinviando al lavoro citato per ulteriori dettagli.
Quando su televisioni pubbliche e private, su quotidiani e settimanali, compaiono programmi e articoli sui problemi della droga, con discussioni e dibattiti sulla punibilità e sul recupero dei tossicodipendenti, gli aspetti emotivi spesso prevalgono su quelli razionali: si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere, in particolare, se fumava spinelli (cioè le cosiddette droghe leggere, come hashish e marijuana) prima di diventare tossicodipendente.
La risposta è di solito affermativa, e questo fatto viene regolarmente usato per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze, che sarebbero la porta d'ingresso alla tossicodipendenza.
Ma è corretto, se si vuole studiare se un certo fatto A (per esempio fumare spinelli) è causa di un fenomeno B (per esempio essere tossicodipendenti), contare quante volte il verificarsi di B è preceduto da A?
La risposta è no: se si chiedesse infatti ai tossicodipendenti se attraversano le strisce pedonali solo quando il semaforo è verde (fatto A), la risposta sarebbe quasi sempre affermativa, ma ciò non consente di concludere che attraversare con il verde porta alla tossicodipendenza
(fatto B)! Così pure, se si chiedesse ai tossicodipendenti se da piccoli succhiavano ogni tanto qualche caramella, si avrebbe un gran numero di risposte positive, e tuttavia succhiare caramelle da piccoli (fatto A) non favorisce la possibilità di diventare consumatori di droghe (fatto B).
Quindi, se si vuole cercare una presunta relazione di causa-effetto fra un fenomeno A (p. es. uso di droghe leggere) ed un fenomeno B (p. es. tossicodipendenza), va completamente rovesciato il modo di ragionare:

occorre esaminare, tutte le volte che si osserva il fatto A, quante volte esso è seguito dal verificarsi di B.
Infatti possiamo escludere, per esempio, che attraversare col verde o succhiare caramelle porti al consumo di droghe, perché osservando un gran numero di persone che compiono quegli atti possiamo constatare che esse, di solito, non diventano anche tossicodipendenti.
In conclusione, quindi, è fra i consumatori di spinelli che andrebbe fatta un'indagine per vedere quanti diventeranno consumatori di droghe pesanti, e non viceversa.
Per capire meglio dove si cela l'errore metodologico, vediamo come si può impostare statisticamente in modo corretto il problema di valutare la probabilità che un certo fatto A possa essere causa di un fatto B. In termini più tecnici, occorre valutare P(B/A), cioè la probabilità dell' evento B condizionata all'evento A.
Occorre fare uso di osservazioni su individui classificati in base a due caratteristiche A e B, che per ogni individuo osservato possono essere presenti o assenti, una o entrambe.
Dato un certo numero N di individui, possiamo rappresentare i nostri dati mediante la seguente tabella 1, nella quale indichiamo con + e -, ripettivamente, la presenza e l'assenza della caratteristica considerata:

TABELLA 1

	A	+	-	B_{tot}
B				
+		N++	N+-	N+*
-		N-+	N- -	N-*
A_{tot}		N*+	N*-	N

- N++ è il numero di individui nei quali sono presenti entrambi le caratteristiche;
- N+- è il numero di individui nei quali è presente la prima (B) ed assente la seconda (A);

- N+* è la somma di questi primi due valori, si tratta perciò degli individui con la caratteristica B;
- N-+ è il numero di individui nei quali è assente B e presente A;
- N- - è il numero di individui nei quali sono assenti entrambe le caratteristiche;
- N-* è il numero di individui senza la caratteristica B (somma dei valori precedenti).

In modo del tutto analogo, N*+ è il totale degli individui con la la catteristica A, e N*- il totale di quelli in cui tale caratteristica è assente.
In linguaggio statistico, una tabella come quella riportata si chiama **tabella di contingenza.**
La probabilità P(B/A) si può valutare mediante il rapporto N++ e N*+, cioè tra il numero di individui con entrambe le caratteristiche rispetto al numero di individui che possiedono solo la caratteristica A.
Quello che invece generalmente si fa nel caso citato è di rapportare il numero di individui con entrambe le caratteristiche A e B (prima fumatori di spinelli e poi tossicodipendenti) al numero di questi ultimi, che corrisponde a valutare non P(B/A), ma P(A/B).
Quest'ultima non ha però alcun legame numerico con la probabilità che interessa, come vedremo facilmente.
Per chiarire ulteriormente questa osservazione, consideriamo un altro semplice esempio: la probabilità che un individuo di sesso maschile scelto a caso dalla popolazione italiana sia un senatore è quasi nulla, mentre la probabilità che un senatore scelto a caso sia di sesso maschile è molto alta (i senatori sono 315, dei quali, nella presente legislatura, solo 29 sono donne).
In termini formali, considerando la popolazione dei cittadini italiani, la sottopopolazione A di quelli di sesso maschile e B degli eletti a Senato, si ha P(A/B) = 0.91 e P(B/A) = 0.00001.
Tornando all'esempio considerato, generalmente si osserva un campione di tossicodipendenti (generalmente da eroina) e si chiede loro se hanno fatto uso in precedenza di droghe leggere (generalmente hashish o marijuana). Se si interpellano 1000 tossicodipendenti e 750 di essi dichiarano di aver fatto uso, prima, di droghe leggere, si ha a che fare con una tabella come la seguente tabella 2, con B= "uso di droghe pesanti", A= "uso precedente di droghe leggere".

TABELLA 2

B \ A	+	-	B_{tot}
+	750	250	1000
-	?	?	?
A_{tot}	?	?	?

Per completare la tabella in modo ragionevole occorre supporre che i 1000 consumatori di droghe pesanti facciano parte di un **campione rappresentativo** rispetto ad entrambe le caratteristiche considerate. Dato che si stima la presenza in Italia di circa 180.000 tossicodipendenti da droghe pesanti (fonte Criminalpol) e circa 2.000.000 di consumatori di droghe leggere (riportato dai giornali in occasione dell'arresto di Patty Pravo), si può fare una prima integrazione della tabella, basandosi sulle seguenti considerazioni.
Supponendo che tra i 180.000 tossicodipendenti si abbia la stessa percentuale di precedenti consumatori di droghe leggere osservata sui 1000 interpellati, si avrà N++=135.000 (cioè i 3/4 di 180.000), e quindi N-+=1.865.000 (cioè 2.000.000-135.000).
Estrapolando dalla tabella precedente, si può cosç stimare il numero di consumatori di sole droghe leggere da confrontare con i 1000 tossicodipendenti: mediante una semplice proporzione si trova il valore 10.361, e, quindi, si ha la tabella 3.

TABELLA 3

B \ A	+	-	B_{tot}
+	750	250	1000
-	10361	?	?
A_{tot}	11111	?	?

Si potrebbe, con altre ipotesi o ulteriori informazioni, completare la tabella 3, ma in effetti abbiamo già il dato che ci interessa e ci permette di valutare la probabilità di passaggio da droghe leggere a droghe pesanti:

P(B/A)=750/11111=6.75%

Osserviamo che, anche se tutti i consumatori di droghe pesanti avessero fatto uso prima di droghe leggere, la probabilità di passaggio sarebbe comunque bassa: infatti, rifacendo i calcoli precedenti, si trova 10.111 invece di 10.361, e quindi A_{tot} =10.861 da cui:

P(B/A)=1000/10861=9.2%.

Naturalmente un esame approfondito del problema richiederebbe comunque il completamento della tabella 3 in quanto è certamente di interesse valutare anche P(B/Ã) per verificare se, comunque, l'utilizzo di droghe leggere può, essere considerato, in qualche modo, un "fattore di rischio" per l'uso di droghe pesanti.
Anche se non possiamo in realtà, con i dati disponibili, completare la tabella 3, possiamo comunque ragionevolmente presumere: P(B/Ã)>P(B/A).
Questa sola osservazione ci autorizza però a concludere per una relazione di tipo causa-effetto per quanto riguarda A e B?
Ancora una volta possiamo sfruttare l'esempio per introdurre e approfondire un altro importante concetto: la dipendenza stocastica.

6. Dipendenza causale-dipendenza stocastica.

Introduciamo per prima la definizione di dipendenza stocastica di due eventi A e B per poi passare alle considerazioni sui rapporti di causa-effetto, sia nell'accezione deterministica che stocastica.
Due eventi A e B si dicono stocasticamente (nel senso del calcolo delle probabilità) indipendenti se e solo se:

P(B/A)=P(B)=P(B/Ã)

e questo implica, per la regola del prodotto:

$$P(A \cap B)=P(A)P(B)$$

che viene spesso assunta, essa stessa, come definizione di indipendenza stocastica.
In altre parole, si può dire che l'informazione legata al verificarsi di A non modifica la probabilità dell'evento B. In caso contrario gli eventi si dicono stocasticamente dipendenti, positivamente se la probabilità condizionata è maggiore di P(B), negativamente altrimenti.
E' possibile distinguere tra due tipi, o fonti, di dipendenza tra eventi: la dipendenza diretta e la dipendenza indiretta.

a) Dipendenza in senso diretto.

Si tratta dei casi in cui il verificarsi di un evento (A) altera le circostanze in cui si verifica un altro (B). Spesso si parla in questi casi di un rapporto causa-effetto tra i due eventi, sia pure in senso probabilistico (ricadremmo nel caso deterministico se la probabilità condizionata fosse 1).
Consideriamo per esempio il caso della microcitemia. Se siamo a conoscenza che uno dei genitori di un nostro alunno è portatore del gene della microcitemia valutiamo, in assenza di altre informazioni, a circa 1/2 la probabilità che anche il ragazzo sia portatore, mentre se non sappiamo nulla circa lo stato dei genitori tale probabilità è molto minore, essendo valutabile attraverso la proporzione di portatori sani nella popolazione di riferimento, che è molto minore di 1/2 anche nelle zone endemiche.
In questo caso il fatto che il genitore sia portatore altera la situazione relativa alla combinazione dei geni al momento del concepimento del figlio, i due eventi (A=genitore portatore, B=figlio portatore) sono direttamente dipendenti.

b) Dipendenza in senso indiretto.

Designamo in questo modo i casi in cui non sussista un'influenza dell'esito di un evento sul verificarsi di un altro, ma esista qualche circostanza che influenza entrambi gli eventi, ossia esista, in un certo senso, una "causa comune" di cui il verificarsi di uno dei due eventi può essere indizio.
Consideriamo i fatti seguenti verificatisi subito dopo la seconda guerra mondiale in Gran Bretagna:

- aumento delle nidificazioni di cicogne (evento A);

- aumento delle nascite (evento B).

Valutando statisticamente con le frequenze tutte le probabilità in gioco, si ottiene: P(B/A)>P(B), ma si può considerare la nidificazione delle cicogne come una possibile "causa" delle nascite?. Certamente no. Esiste invece una comune causa, che consiste nella fine della guerra (e dei relativi bombardamenti), che influisce positivamente su entrambi gli eventi; l'alterazione della situazione di riferimento si deve riportare quindi a tale causa comune, mentre non esiste nessun rapporto diretto tra i due eventi (per ulteriori approfondimenti si veda (11)).
Per quanto riguarda il problema dell'uso di droghe leggere e droghe pesanti è presumibile che ci si trovi in una situazione di questo genere in cui, pur non essendo ipotizzabile una dipendenza diretta tra A e B, i due eventi siano tuttavia legati attraverso l'esistenza di una situazione comune che li influenza entrambi.
Tale situazione potrebbe essere riferita a problemi familiari, alla fragilità legata al periodo adolescenziale, a situazioni di emarginazione, alle pressioni del mercato e a molti altri fattori il cui esame esula certamente dal presente contributo.

Carla Rossi
Dipartimento di Matematica
II Università di Roma "Tor Vergata"
Via Ricerca Scientifica
00133 ROMA

Bibliografia

(1) PSSC, FISICA, volumi 1 e 2, Zanichelli, Bologna, 1972.

(2) BSCS, Dalle Molecole all'Uomo, Zanichelli, Bologna, 1967.

(3) Asimov I., Il libro di Fisica, A. Mondadori editore, Milano, 1988.

(4) Asimov I., Il libro di Biologia, A. Mondadori editore, Milano, 1987.

(5) Snow C.P., The two cultures, Cambridge University Press, London, 1963.

(6) Rossi C., Che cosa ci dicono i modelli matematici che non sapremmo valutare altrimenti, INDUZIONI, 1991, 79-86.

(7) Rossi C., L'analisi di scenario: uso dei modelli matematici in campo medico, MEDIC, 1993, 31-39.

(8) Rossi C., Un "percorso" didattico per l'introduzione delle prime nozioni di probabilità e statistica, INDUZIONI, 1992, 99-108.

(9) Olivieri D., Un'applicazione dei sondaggi con risposta casualizzata alla stima del consumo di stupefacenti, INDUZIONI, 1993, in stampa.

(10) Rossi C., Scozzafava R., Sull'uso distorto dei dati statistici nei Media, INDUZIONI, 1993, 45-53.

(11) Rossi C., Serio G., La metodologia statistica nelle applicazioni biomediche, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.

L'INSEGNAMENTO DI PROBABILITA' E STATISTICA NELLA SCUOLA: RILANCIAMO IL DIBATTITO

E. LOMBARDO, C. ROSSI, A. ZULIANI
Università "La Sapienza" Roma - II Università di Tor Vergata Roma - Direttore ISTAT Roma

PREMESSA

1. Sono presentati alcuni spunti per una riflessione interdisciplinare sull'insegnamento pre-universitario di probabilità e di statistica. Viene seguito lo schema di lettura esposto nel prospetto 1. In primo luogo, l'insegnamento di probabilità e statistica viene collegato a quello delle altre discipline: matematiche in senso generale, fisico-naturalistiche, umanistiche, economico-sociali. Successivamente, si porta attenzione alle variabili dell'apprendimento individuale, ai modi dell'organizzazione scolastica ed infine alle variabili ambientali. Lo schema è organizzato a cannocchiale. Vengono via via esplicitate le problematiche sollevate e gli ambiti disciplinari implicati.

PROSPETTO 1

Alcuni degli spunti prendono le mosse dalla realtà italiana; spesso essi mantengono la loro validità anche in altri contesti nazionali.

I CONDIZIONAMENTI DELLA TRADIZIONE

2. La cultura italiana ha forti tradizioni umanistiche. Questo comporta:

- scarsa attenzione allo sviluppo dei linguaggi tecnico-scientifici, contrariamente a quanto avviene, generalmente, in altri Paesi;
- approfondimento maggiore per gli argomenti più "vicini" a schemi logico-deduttivi (nello studio della storia della filosofia ci si sofferma molto di più su Cartesio, Kant, Hegel fino ad arrivare a Croce, che su Galileo, l'empirismo inglese, il pragmatismo).

3. Spesso gli insegnanti si lamentano della carenza di strutture adeguate. In realtà, tali carenze costituiscono, in molti casi, un comodo alibi al perpetuarsi dell'impostazione libresca anche delle scienze sperimentali.

I percorsi dell'insegnamento sono tesi al conseguimento di "verità definitive" piuttosto che di un "metodo" che consenta, di volta in volta, di arrivare all'interpretazione di fenomeni variabili con un "sufficiente grado di approssimazione".

4. Il concetto stesso di approssimazione è completamente estraneo alla cultura tradizionale e neppure l'introduzione degli strumenti informatici, che necessariamente producono risultati con un grado di precisione limitato, ha portato maggiore consapevolezza di ciò, né in senso numerico né in senso modellistico.

INSEGNAMENTO PER PROBLEMI, INSEGNAMENTO PER SCHEMI

5. La situazione descritta ha determinato l'affermarsi di una metodologia di insegnamento delle discipline scientifiche, e in particolare della matematica, per schemi piuttosto che per problemi. Nell'ambito della geometria euclidea, si calcolano le possibili aree di figure piane comunque complicate, ma non si fa in genere cenno al fatto che si tratta dell'applicazione di un modello il cui spunto è stato rappresentato dalla necessità di

studiare proprietà di terreni, cosicché l'approccio risulta necessariamente approssimato in quanto la superficie terrestre è sferica e nella geometria sferica non valgono gli assiomi e i postulati della geometria euclidea. La ricerca di verità assolute ha così il sopravvento sulla consapevolezza dell'approssimazione.

L'accenno, che a volte viene fatto, alle geometrie non euclidee appare come una stranezza piuttosto che una necessità per l'interpretazione di alcuni fatti.

L'insegnamento non ha tratto il giovamento possibile dall'introduzione dei mezzi informatici, che permetterebbero realistiche immagini sferiche e potrebbero consentire di spiegare facilmente, per esempio, perché le rotte aeree dall'Europa all'America non seguano i paralleli, come sembrerebbe naturale guardando l'atlante (immagine piatta), ma le geodetiche.

6. Analogamente, si preferisce ridurre la realtà a condizioni deterministiche piuttosto che introdurre l'approssimazione legata alle previsioni in condizioni di incertezza, basate su ragionamenti di tipo probalistico.

Si rimane quindi preferibilmente ancorati a schemi ideali, molto lontani dalla realtà che vorrebbero rappresentare.

Un aspetto estremo di questo tipo di insegnamento per schemi ipotetico-deduttivi è osservabile proprio nell'insegnamento del calcolo delle probabilità, che viene in molti casi inserito all'interno dell'analisi e visto come un'applicazione particolare di metodi analitici (calcolo combinatorio o altro) piuttosto che quale capitolo autonomo della matematica che si avvale dell'analisi e che trova le sue basi in problemi non affrontabili all'interno del modello logico-deduttivo.

7. Il percorso più adeguato per l'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica dovrebbe seguire lo schema seguente:

PROBLEMA SIGNIFICATIVO ———> MODELLO RISOLUTIVO ——> RISULTATI (PREVISIONI) ———> CONFRONTO CON DATI ———> EVENTUALE MODIFICA DEL MODELLO ———> ECCETERA.

8. Risulta importante sia insegnare a risolvere uno stesso problema (interessante) con più schemi teorici, sia applicare uno stesso modello a più problemi significativi. Ciò evitirebbe l'affermarsi di "ricettari" che trasmettano l'idea (errata) di corrispondenza, uno a uno, tra problemi e modelli. Si deve tendere, cioè, a sviluppare la capacità di "districarsi" davanti a problemi nuovi, usando le competenze acquisite mediante la soluzione di altri problemi.

INTERDISCIPLINARITA'

9. Una strategia potenzialmente efficiente per l'innovazione didattica, tesa ad ottenere un migliore sviluppo dell'autonomia nell'affrontare problemi nuovi dovrebbe basarsi su un lavoro per progetti interdisciplinari. Da un tale lavoro è possibile trarre problemi significativi da affrontare.

La probabilità e la statistica costituiscono lo strumento principale per trattarli, secondo lo schema galileiano:

OSSERVAZIONE ——> COSTRUZIONE DI UN MODELLO ——> PREVISIONE ——> RILEVAZIONE DI NUOVI DATI ADEGUATI ——> CONFRONTO CON LA PREVISIONE.

Lo schema suggerisce un ordine temporale nell'introduzione degli argomenti relativi alle nostre discipline: metodi per la descrizione dei dati, modelli probabilistici, inferenza. Questo è anche l'ordine proposto dalla Commissione Brocca.

Di tale tipo di percorso è possibile sviluppare prototipi. E' particolarmente istruttiva l'analisi di dati provenienti dal campo fisico (classico) che rispondono quindi a modelli essenzialmente deterministici in cui le fluttuazioni sono dovute a errori di misura.

10. La difficoltà delle analisi statistiche su dati non fisici deriva dalla circostanza che questi ultimi non hanno a che fare con relazioni di dipendenza funzionale.

Il fisico, qualunque teoria crei, sa sempre che i fatti sperimentali futuri dovranno andare come l'esperimento ha dimostrato. In altre scienze che si avvalgono della statistica, non esistono fatti osservati che si possano ripetere identici, né che abbiano, quand'anche fossero identici, identico svolgimento.

Da queste considerazioni si capisce l'esigenza di fare riferimento, per la descrizione di tali tipi di fenomeni, a schemi matematici più generali (appunto quelli di tipo probabilistico) ai quali gli schemi e i modelli relativi ai fenomeni fisici possono ricondursi come casi particolari.

11. Proponendo percorsi adeguati, è possibile insegnare qualcosa a qualsiasi età. I bambini sono molto portati verso processi induttivi che rispondono agli stessi meccanismi dell'apprendimento linguistico.

Abituare "presto" a utilizzare il ragionamento induttivo può evitare la sclerotizzazione delle strutture logico-deduttive che sono privilegiate nell'insegnamento tradizionale, anche delle discipline scientifiche.

VARIABILI DELL'APPRENDIMENTO INDIVIDUALE

12. Fischbein (The intuitive sources of probabilistic thinking in children, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1975) ci ricorda come l'indagine psicologica sia arrivata piuttosto tardi ad interessarsi della nascita del concetto di probabilità nelle persone, ed in particolare nei bambini. Egli elenca anche alcuni dei motivi di tale ritardo: "il fatto che i fenomeni del comportamento sono di per se stessi a carattere aleatorio" e la psicologia è pervenuta soltanto nei tempi recenti ad introdurre modelli probabilistici per l'interpretazione del comportamento; un effetto alone prodotto da altre scienze, contigue alla psicologia, che si basano sulla teoria della probabilità: in particolare la teoria delle decisioni, la teoria dell'informazione e la cibernetica.

Indubbiamente, la ricerca di Piaget e Inhelder (La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, Paris, Presses Universitaires de France, 1951) costituisce il riferimento iniziale per questo genere di studi. Con le loro acquisizioni, i successivi autori si sono dovuti misurare. Il risultato della stretta relazione fra formazione del concetto di probabilità ed età può costituire una guida nell'organizzazione del lavoro scolastico. Naturalmente, i tre stadi evolutivi individuati da Piaget e Inhelder non trovano più, oggi, una rigorosa corrispondenza con intervalli di età, tanto meno con quelli originariamente definiti. Essi possono essere certamente spostati per mezzo di un insegnamento opportunamente mirato. Tuttavia, costituiscono ancora un riconosciuto substrato della genesi psicologica dell'idea di fortuito.

13. Lo studio piagettiano dimostra soltanto le potenzialità combinatorie negli adolescenti.

Fischbein esplora la possibilità che forme di istruzione specifiche possano accelerare il processo di acquisizione delle capacità combinatorie e, per tal via, quello relativo alla probabilità. "L'intuizione probabilistica - egli asserisce - non si sviluppa spontaneamente, se non in un ambito molto ristretto. La comprensione, l'interpretazione, la valutazione e la previsione dei fenomeni probabilistici non possono essere affidate alla semplice intuizione non coltivata, negletta e abbandonata ad uno stadio rudimentale di sviluppo, sotto la pressione degli schemi operativi che non possono articolarsi con loro".

Sull'influenza determinante dell'istruzione insiste molto anche F. Agnoli, a partire dalle analisi di Kahneman e Tversky sull'uso di scorciatoie concettuali (euristiche di comportamento, secondo la definizione utilizzata nella letteratura psicologica). Secondo quanto riferisce e quanto ella sperimenta direttamente, sembra che l'acquisizione di concetti logici (sostanzialmente, come avveniva per Piaget, l'inclusione e l'intersezione insiemistica ovvero l'implicazione ed il prodotto logico nel campo delle proposizioni) in ragazzi/e di 11-13 anni si manifesti stabilmente nel tempo e riduca piuttosto ampiamente la frequenza di errori (F. Agnoli, E. De Zuani, Euristiche cognitive e ragionamento induttivo, Giornale italiano di psicologia, 18, 1991; F. Agnoli, D. H. Krantz, Suppressing natural heuristics by formal instruction: the case of conjunction fallacy, Cognitive Psycology, 21, 1989).

Quanto all'origine degli errori, anche questa autrice propende a ritenerla radicata, negli adulti così come nei bambini, in un insegnamento scolastico che generalmente non riconosce che certe decisioni vengono prese in condizioni di incertezza. Se il comportamento scolastico tende ad enfatizzare la soluzione dei problemi a carattere deterministico (quei problemi per i quali è prevista una sola risposta corretta) e non si applica al riconoscimento di situazioni di per sé incerte negli esiti, come può affiorare all'intuizione dei bambini la presenza di eventi ai quali assegnare un grado di fiducia personale, una probabilità, del loro verificarsi?

Un'altra questione, che si connette direttamente alla precedente, riguarda la disambiguazione del linguaggio quotidiano: se, ad esempio, probabile è confuso con possibile, allora le loro rispettive negazioni portano, in assenza di una chiarificazione semantica, all'identificazione di improbabile con impossibile. Questi aspetti linguistici non chiariti pervadono larga parte dell'insegnamento matematico pre-universitario come ha mostrato, con abbondanza di esempi tratti dai "compiti" degli studenti francesi, Stella Baruk (L'age du capitaine. De l'erreur en mathématique, Paris, Seuil, 1985).

VARIABILI LEGATE ALL'ORGANIZZAZIONE SCOLASTICA

14. In quasi tutti i sistemi scolastici, l'insegnamento di probabilità e statistica, per essere stato introdotto soltanto recentemente nei programmi scolastici, incontra i problemi di ogni novità (accentuati da un'ignoranza, diffusa anche nella popolazione adulta, dei concetti di base).

I modi codificati dell'organizzazione scolastica non agevolano il compito.

Si registra, spesso, l'assenza di raccordo fra i diversi livelli di studio. Un'audace riforma che abbia investito, ad esempio, i livelli scolastici primario e medio, introducendo probabilità e statistica nei corrispondenti programmi, può non trovare seguito nella scuola secondaria superiore, cosicchè il patrimonio accumulato si disperde rapidamente producendo un rapido degrado delle capacità modellistiche acquisite e la reviviscenza di quelle percettive.

Si registra, inoltre, la quasi totale assenza di un efficace raccordo orizzontale. Per l'insieme delle discipline fisico-naturalistiche, non si è ancora trovato un riferimento unitario analogo a quello rappresentato, per le discipline umanistiche, dal sincronismo storico.

Negli ultimi dieci-venti anni si è fatto qualche passo avanti, per il collegamento fra fisica, chimica e scienze naturali. Meno decisi risultano i nessi stabiliti fra tali discipline e la matematica e ancora praticamente inesistenti risultano quelli con probabilità e statistica, nonostante queste ultime possano rappresentare un importante collante metodologico.

In molti casi, l'insegnamento di probabilità e statistica finisce per risultare residuale. Non è casuale che i corrispondenti contenuti vengano introdotti quasi sempre al termine dell'anno scolastico o addirittura del ciclo di studi.

15. D'altra parte, abbiamo troppo poco investito nella didattica delle nostre discipline.

La costruzione curriculare, la definizione di prototipi di percorso, la predisposizione di momenti di interazione con altre discipline, l'accumulo di un patrimonio di casi sono tutti ambiti ai quali dovremmo dedicare maggiore attenzione, se vogliamo raggiungere risultati non banali e non caduchi.

16. Molte evidenze nazionali mettono in rilievo l'importanza della valutazione. Il problema presenta aspetti diversi. In primo luogo, un sistema di valutazione e di monitoraggio di esperienze innovative risulta necessario per alimentare il miglioramento.

In secondo luogo, occorrerebbe privilegiare, per le nostre discipline, valutazioni relative ai processi di apprendimento e d'uso di modelli di riduzione dei problemi e quindi di formazione del risultato. Invece, si valutano, in generale, il risultato finale dei problemi e la compiutezza delle definizioni.

Infine, da noi come altrove, l'effettivo insegnamento di probabilità e statistica può essere fortemente condizionato dalla presenza (o assenza), fra le prove di esame, di corrispondenti argomenti.

17. Nonostante gli insegnanti pre-universitari si formino all'università,

nella loro attività scolastica essi manifestano spesso una rapida regressione verso gli schemi di insegnamento ivi prevalenti (e non preferibili): da approccio interdisciplinare a monodisciplinare, da approccio per modelli a valorizzazione di modalità percettive; da atteggiamento sperimentale a dogmatico; da dinamico a statico; da predisposizione all'aggiornamento continuo ad uso difensivo della formazione acquisita.

VARIABILI LEGATE ALL'AMBIENTE SOCIALE E CULTURALE DEGLI ALUNNI

18. L'esperienza di ciascun docente potrebbe testimoniare che le capacità logico-deduttive ed induttive sono presenti in proporzione diversa da studente a studente e che tale proporzione è fortemente legata all'ambiente d'origine. Fra le categorie sociali più elevate, le capacità deduttive appaiono più diffuse; viceversa, fra quelle meno favorite.

Se ne deduce, in via generale, che approcci di insegnamento logico-deduttivi possono risultare "poco democratici", nella misura in cui le classi sociali favorite risultino minoritarie tra la popolazione in età scolare. Ecco un'altra ragione per preferire l'approccio induttivo all'insegnamento delle nostre discipline.

19. Ancora meno investigato è il legame fra cultura di appartenenza e capacità di apprendimento. Per introdurre soltanto uno spunto di riflessione, si ritiene che religioni oppressive o dogmatiche stimolino le capacità deduttive e quindi predispongano ad un apprendimento secondo assiomi-teoremi; mentre religioni naturalistiche contribuiscano all'espressione di capacità induttive e predispongano ad apprendere a partire dall'esperienza. D'altra parte, se una cultura, una religione, vietano il gioco, alcune possibilità per l'insegnamento della probabilità risultano precluse.

Questo tipo di problemi è stato finora poco presente nel dibattito avvenuto nei paesi evoluti del nord del pianeta, relativamente omogenei dal punto di vista culturale. Essi si presenteranno in maniera via via più importante, mano a mano che andrà aumentando il flusso di immigrazione dai paesi meno sviluppati a quelli più sviluppati.

CONCLUSIONI

20. Si impone, e non soltanto per l'insegnamento delle nostre discipline, di riprendere una riflessione ad orizzonte largo che porti ad un confronto multidisciplinare, che ci veda coinvolti con matematici, colleghi di discipline sostanziali presenti ai vari livelli di studio, didatti, pedagogisti, docimologi, psicologi, antropologi, sociologi, storici, economisti, studiosi dell'organizzazione, amministratori scolastici. Sarebbe l'occasione per disegnare un itinerario di qualità, per impegnarci tutti a realizzarlo.

NOTE

(1) Questa relazione è ampiamente basata su uno scritto degli stessi autori, poi pubblicato in forma estesa con il titolo "L'insegnamento di probabilità e statistica nella scuola: spunti per una riflessione interdisciplinare", in Scuola e città, 12, 1993.

PROSPETTO 1 - CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA NELLA SCUOLA DA UN PUNTO DI VISTA INTERDISCIPLINARE

INSEGNAMENTO DI PROB. E STAT	INTERAZIONI CON ALTRE DISCIPLINE	VARIABILI DI APPRENDIM. INDIVIDUALE	VARIABILI RELATIVE ALL'ORGANIZZ. DELLA SCUOLA	VARIABILI AMBIENTALI

PROBLEMI SOLLEVATI

* LINGUAGGIO * VALUTAZIONE * AGGIORNAMENTO DEGLI INSEGNANTI

* INTEGRAZIONEORIZZONTALE
* COORDINAMENTO DI PIÚ INSEGNAMENTI
* INTERDISCIPLINARITÀ
* INSEGNAMENTO PER PROBLEMI
* IDENTIFICAZIONE PERCORSI DIDATTICI

* MIGRAZIONE NORD SUD E NUOVI UTENTI
* TRATTAMENTO CONDIZIONI HANDICAP

* APPROCCIO INDUTTIVO VERSUS DEDUTTIVO
* APPROCCIO INTEGRATO

* PERIODIZZAZIONE DELLE CAPACITA' DI APPRENDIMENTO
* EURISTICA DEL PROCESSO DECISIONALE

* INTEGRAZIONE VERTICALE
* PRESENZA DI LABORATORIO
* VALUTAZIONE
* TRASFERIMENTO DI ESPERIENZE

* DIFFUSIONE DI CAPACITA' LOGICHE VERSUS EMPIRICHE
* INFLUENZA CONDIZIONI SOCIALI
* INFLUENZA CARATTERISTICHE CULTURALI E RELIGIOSE

DISCIPLINE IMPLICATE

* STORIA E FILOSOFIA DELLA SCIENZE * PSICOLOGIA DELL'APPRENDIMENTO *SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

* PEDAGOGIA
* DOCIMOLOGIA

* SOCIOLOGIA DELL'EDUCAZIONE

* PROB. E STAT.

* ALTRE DISCIPLINE

* PEDAGOGIA SPERIMENTALE
* PSICOLOGIA DELLO SVILUPPO

* TEORIA DELLA ORGANIZZAIONE

* ANTROPOLOGIA CULTURALE
* SOCIOLOGIA GENERALE

TAVOLA ROTONDA

PROBABILITÀ E STATISTICA NELLA SCUOLA SECONDARIA

Mario Barra

1. Premessa

Nell' insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica abbiamo poca esperienza per poter presupporre delle posizioni effettivamente utili e comuni, in modo da concentrare l'attenzione su alcuni aspetti particolari. Nel modello a spirale per l'approfondimento del nostro tema siamo ancora nelle volute iniziali in cui si devono considerare la maggioranza degli aspetti implicati. In questa fase il manicheismo è probabile o forse necessario e alcune affermazioni, sufficientemente valide in prima approssimazione, risulterebbero criticabili qualora venissero approfonditi i singoli aspetti. Per inquadrare le questioni didattiche, si parlerà così, in generale dell'importanza e della peculiarità di queste discipline in collegamento con altri aspetti della matematica e con un progetto di società, di scuola e di programmi che si considera attuale.

2. La situazione esistente

Il termine matematica deriva da una parola greca il cui significato è apprendimento ma il risultato del suo insegnamento, nei fatti, non è tanto lo sviluppo delle capacità di apprendere, quanto quello delle capacità di ripetere. Questo non è l'effetto di una scelta diretta, ma il risultato di alcune dinamiche in buona parte originate sia dalla mancanza di una adeguata preparazione professionale e di riconoscimenti dell'impegno dell'insegnante, che dal tipo di strutturazione degli esami che favorisce le valutazioni più semplici. Ne risulta un insegnamento senza impegno e volto maggiormente all'acquisizione di prodotti finali e di metodologie di routine, piuttosto che allo sviluppo di processi, di metodi e di atteggiamenti utili rispetto ad alcune esigenze che si manifestano anche fuori dalla scuola.

3. La società

La presenza dei computer e degli automi comporta effetti così rivoluzionari quanto mai forse si sono avuti nella storia. Il maggiore effetto negativo è l'aumento della disoccupazione che costituisce uno dei traumi, presenti in ogni rivoluzione, che si possono superare attraverso la ricerca di un nuovo assetto conseguente a una ridistribuzione ed a nuovi indirizzi, nel nostro caso, dell'occupazione. Tendendo alla ricerca di questi nuovi indirizzi e poiché i computer e gli automi esistono, vediamone le possibili conseguenze, cercando di indirizzarle in senso positivo.

I computer e gli automi hanno come effetto, di per sé positivo, una notevole diminuzione del lavoro routinario per l'uomo, sia a livello manuale che amministrativo. Tali aspetti possono così essere guardati da un numero sempre maggiore di individui all'interno di una gestione generale e comune dei problemi che li richiedono. Diminuiscono così le fasce di divisione del lavoro con una minore stratificazione fra capacità manageriali ed esecutive e fra lavoro intellettuale e manuale. Ne consegue la necessità di una ridefinizione delle competenze e dei ruoli degli individui, volta maggiormente all'attivazione di processi utili generali, che all'ottenimento di prodotti. E' così maggiore la necessità di competenze qualificate e di capacità di interazione generale, di autonomia, di autoaggiornamento e di riqualificazione.

Per quanto riguarda la scuola, oltre alla maggiore opportunità pedagogica, ci sono così nuove esigenze per richiedere all'insegnamento meno nozioni e più strumenti durevoli e atteggiamenti utili. Ma ciò che sembra maggiormente opportuno per incidere positivamente sulle personalità e sulla memoria a lungo termine, è la possibilità di un coinvolgimento attivo, sia razionale che emotivo, rispetto a finalità convincenti, collegate ad esperienze più naturali e piacevoli, da ricercare anche fuori dalla scuola.

Più nello specifico sembra necessaria una mentalità scientifica più sviluppata e in particolare una maggiore capacità di individuare, accettare, affrontare e risolvere problemi nuovi, sia singolarmente, che all'interno di un gruppo e con buona versatilità nei vari ruoli richiesti.

Questo significa educare la capacità di farsi elemento sensibile e attivo della realtà e delle esperienze della vita, a cominciare da quelle più immediate e personali, per continuare con quelle più ampie e interconnesse. Significa saper leggere nelle situazioni complesse, saper percepire dei collegamenti o delle relazioni fra gli elementi e le grandezze che si osservano, con uno sforzo volto ad individuare quei caratteri generali che permangono al di là del contingente. Significa quindi saper verificare l'estensione e la generalità di queste relazioni, permetterne la critica e l'eventuale superamento.

Ebbene si dice subito sinteticamente che la realtà si legge attraverso la statistica e che le valutazioni e le relazioni sono più spesso di tipo probabilistico.

Più in generale la matematica deve essere guardata dalla società non per gli aspetti considerati belli dai matematici, ma perché è utile, meno per i contenuti da ripetere e più per quelli da costruire, favorendo quelle esperienze, mentalità e metodi utili per questi obiettivi.

Per essere chiari e un po' provocatori, argomenti come i numeri complessi e le strutture algebriche, andrebbero confrontati con le finalità indicate, o almeno analizzati con uno spirito analogo, ampliando un atteggiamento che sembra sia stato presente nel definire come introdurre gli integrali, anche se forse potevano essere associati maggiormente ad aspetti intuitivi. Analogamente come presupposto per insegnare a sviluppare degli atteggiamenti attivi e di interazione, andrebbe previsto il lavoro di gruppo, e almeno l'università dovrebbe, ad esempio, abituare gli studenti a districarsi fra vari testi, insegnando a scegliere e a operare una sintesi. Sono le basi per autoapprendere e per favorire l'aggiornamento.

Per concludere questo argomento, considerando anche i tempi storici fra due successive riforme della scuola, forse le esigenze della società richiedono oggi una rivoluzione maggiore di quella già presente nella proposta dei programmi della Commissione Brocca. E allora e a maggior ragione, i programmi dovrebbero essere accompagnati da premesse, indicazioni e supporti credibili per la loro attuazione.

4. Importanza e peculiarità del Calcolo delle Probabilità e della Statistica

Permettete di introdurre l'argomento con alcune citazioni che indicano anche dei riferimenti per l'approfondimento del nostro tema:

-"Nel piccolo numero delle cose che noi possiamo sapere con certezza, nelle scienze matematiche stesse, i principali mezzi di pervenire alla verità, l'induzione e l'analogia, si fondano sulle probabilità... Per la maggior parte le questioni importanti della vita sono di fatto solo problemi di Calcolo delle Probabilità... Se si considerano i metodi analitici ai quali questa teoria ha dato nascita, la logica sottile e delicata, che il loro impiego esige nella soluzione dei problemi ... se si osserva, poi, che anche nelle cose che non possono essere sottoposte al calcolo dà gli accorgimenti più sicuri che possono guidarci nei nostri giudizi e che insegna a garantirsi dalle illusioni che spesso ci sviano, si vedrà che non vi è affatto scienza più degna delle nostre meditazioni e che sia più utile ad essere introdotta nel sistema della pubblica istruzione". P. S. de Laplace [1]
-"I problemi dell'induzione sono ora i problemi della scuola e vengono per buona parte risolti dalla statistica che si propone come tecnica conoscitiva e canone induttivo" I. Scardovi [2]
-"Ormai da molto tempo mi sono convinto che non si può ottenere una buona formazione matematica dei giovani senza utilizzare l'immenza ricchezza concettuale ed euristica della probabilità e della statistica...intesa...come riflessione su alcuni fondamentali processi di conoscenza...e non solo come strumento fondamentale per le scienze sperimentali ed umane". G. Prodi [3]

Il calcolo delle probabilità e la statistica sono divenute una delle zone di contatto più importanti fra la matematica e il mondo reale nel suo insieme e sono ai primi posti fra le materie presenti nei PhD in America.
I modelli matematici nell'economia, nell'industria, nelle assicurazioni, nella sociologia, nelle ecologia ecc. non riescono a rappresentare in modo soddisfacente il mondo reale senza l'aiuto di queste discipline. La stessa fisica è di natura essenzialmente probabilistica e altrettanto accade per i fondamenti della biologia. Più in generale è emersa una esigenza non eliminabile: il ragionare per categorie provvisorie nell'incertezza e nell'ignoranza parziale. Per conoscere la realtà si ha bisogno di processi induttivi e queste discipline svolgono un ruolo essenziale come strumento e come esercizio di un modo di ragionare che è più generale perchè prevede come caso particolare la logica classica.

Da un punto di vista pedagogico l'insegnamento della statistica risponde ad una fondamentale esigenza di democrazia: essa insegna a costruire cultura indicando i processi della costruzione stessa, rendendoli così controllabili. Questa è una condizione per 'leggere' la realtà armati di capacità critiche reali, non legate a fumose contrapposizioni di punti di vista ne a teorici 'pluralismi', ma a procedimenti di formazione e di controllo di ipotesi, di dati, di loro eleborazione e verifica e quindi sostanzialmente alla possibilità di ricostruire i processi che danno luogo ad una affermazione.
Da un punto di vista psicologico, sociale e politico l'affermarsi di imbonitori e di qualunquismi, il dilagare di espressioni vaghe e inconsistenti, ovvie e non verificabili, possono in qualche misura dipendere dall'ignoranza in queste discipline. Stesso discorso per il manicheismo, il massimalismo, la rigidità intellettuale e le superstizioni. Questa molteplicità di implicazioni può essere vista molto sinteticamente come effetto dell'avversione all'incertezza.

Forse per questo, per le nostre discipline e in particolare per il calcolo delle probabilità, si possono riscontrare degli aspetti peculiari, che è utile considerare per affrontarne i problemi didattici, e che qui verranno appena enunciati per mancanza di spazio.
- Il concetto di probabilità nasce molto tardi nella storia della cultura, intorno al 1700, sebbene la sua esigenza si fosse manifestata almeno 200 anni prima, ad esempio con le assicurazioni [4], e con il problema degli errori di misura. Altri importanti capitoli, come la logica matematica, che si sono sviluppati successivamente, potevano però contare su presupposti molto più sviluppati;
- ci sono stati grandi matematici, come Pascal, D'Alembert e Leibniz che, anche dopo una lunga riflessione, hanno preso degli abbagli colossali su aspetti molto semplici, spesso collegati alla difficoltà di comprendere proprietà del calcolo combinatorio, che noi consideriamo evidenti;
- c'è poca esperienza didattica anche nella scuola elementare e media e non sappiamo cosa dare per acquisito all'inizio delle superiori, visto che i nostri argomenti, molto spesso, non vengono trattati precedentemente, sebbene

siano previsti dai programmi;
- all'interno delle nostre discipline non esistono metodi puramente routinari nella soluzione di problemi, sia per la necessità di approfondire il significato di quanto eventualmente proposto da questi metodi, sia per l'esigenza di costruire un campione o un modello;
- fra alcuni aspetti importanti del calcolo delle probabilità e del ragionamento probabilistico, esiste un circolo vizioso, non si intende bene l'uno senza una buona conoscenza dell'altro;
- la preparazione degli insegnanti è limitata perchè: - gli esami non sono obbligatori; - sembra più difficile l'autoaggiornamento; - il superamento di un esame specifico non fornisce spesso indicazioni spendibili nella scuola;
- non è detto che si possa comprendere bene un argomento complesso quando viene affrontato con un solo esame; - non è possibile far riferimento neppure all'ultima risorsa degli insegnanti: la propria esperienza da studenti.

Certo è che fino a poco tempo fà la TV di stato, con il 164 a Televideo, forniva l'elenco dei numeri 'in ritardo' al gioco del Lotto e sul Supplemento al Corriere della Sera del 27 agosto 1992 il semiologo Paolo Fabbri, direttore dell'Istituto di Cultura Italiana a Parigi, affermava testualmente: " i giocatori sanno che esistono delle serie statistiche. Ogni volta che io lancio un dado a sei facce ho esattamente sei probabilità di fare uno, se però l'ho già lanciato duecento volte e l'uno non è mai venuto, la probabilità che venga al prossimo lancio è molto elevata". Come per Leibniz qui l'errore sta anche nel credere che, lanciando una moneta il numero delle teste debba tendere al numero delle croci, cosa che direttamente o indirettamente viene 'suggerita' in vario modo anche da testi molto seri. Così lo stesso School Mathematics Project propone come esempio significativo i risultati di un esperimento in cui, nei primi 72 lanci di un dado, il massimo scarto fra i risultati è 8, che si riduce a 6, continuando fino a 240 lanci.

Considerando tutto questo e quanto è accaduto in alcuni paesi, ad esempio in Ungheria, ove queste discipline avevano avuto molto spazio, e si è dovuto fare marcia indietro per gli insuccessi conseguiti, allora la conclusione sembra certa: mentre se ne afferma la necessità, si deve porre estrema attenzione e gradualità nell'introduzione di questi argomenti.
Per esempio, forse bisognerebbe non insistere su quei problemi in cui nessuno trova la soluzione, che poi viene presentata in modo semplicissimo

o completamente inaspettata nel risultato. Lo stupore che provoca potrebbe essere didatticamente controproducente.
Più in generale, anche rispetto ad alcune esperienze, sembrerebbe più utile per diffondere l'impostazione soggettiva del calcolo delle probabilità, non parlarne inizialmente, se non indicandone la necessità con qualche esempio in cui risulti "ineludibile" e cogliendo tutte le occasioni per favorire un suo sviluppo successivo.

A questo punto si deve affrontare un'altra questione importante, divenuta impropriamente spinosa: l'insegnamento del calcolo combinatorio.
Hanno ragione quelli che affermano che, rispetto al calcolo delle probabilità, risulta un parente lontano e un po' bruttino (per molti, soggettivamente!), ma il problema è quello di capire se è un ascendente necessario, come alcuni, fra cui Piaget, e grandi matematici affermano. Certo nella storia lo è stato, e preso in se o in collegamento con la geometria, ad esempio, può divenire un argomento interessante e avere una validità didattica importantissima, potendo educare tutte le fasi del ragionamento scientifico, e per l'importanza che sta assumendo la matematica discreta. Ad esempio Mark Kac e Gian Carlo Rota sottolineano la preminenza della teoria combinatoria nella matematica e nella vita [5].

C'è poi un'altra posizione di parte: anche negli esercizi che si possono risolvere unicamente con il calcolo combinatorio, si riconosce questa matrice alle soluzioni brutte, mentre queste si attribuiscono al ragionamento probabilistico nel caso opposto, anche se sono state ottenute solo migliorando un procedimento del primo tipo.
Considerando le peculiarità delle nostre discipline e in particolare del calcolo delle probabilità e in attesa di avere maggiori indicazioni sul loro insegnamento, il calcolo combinatorio può risultare molto utile. Si ha comunque un ulteriore metodo risolutivo, valido anche in se, e ponendo in collegamento il certo e il probabile, può dare maggiore sicurezza.

5. I programmi

Si premette la piena consapevolezza della difficoltà di un problema così complesso come quello della elaborazione dei programmi della scuola secondaria, ove è necessario raggiungere un difficile equilibrio fra esigenze

contrapposte. In queste circostanze è certo più facile criticare che costruire.
Nella speranza di svolgere entrambi i ruoli, concedete un'immagine per riprendere l'argomento.
Nella costruzione di una barca a vela, in particolare per la mancanza di un motore interno, occorre considerare tutte le possibilità che si offrono, contemperando la tradizione e il progresso in una unità agile e armonica dove ogni singolo pezzo è strutturato all'interno di un disegno generale.
Scherzosamente si può dire che, da questo punto di vista, la proposta dei programmi della Commissione Brocca assomiglia maggiormente a una grossa zattera. Sembra l'unione di tanti pezzi, utili ma non abbastanza rifiniti, messi insieme in poco tempo e con una filosofia generale poco leggibile.
Forse, nella elaborazione di questi programmi, non sono state considerate sufficentemente esperienze di insegnamento e proposte formulate da coloro che si occupano di didattica costantemente e con professionalità.
All'interno di una competenza altamente scientifica e specializzata può accadere, ad esempio, che un argomento, considerato fondamentale, non venga incluso nei programmi, perchè, riferendosi ad un modo complesso per introdurlo, non è venuta in mente una traduzione didattica semplice, o si è tenuto poco presente il suo sviluppo storico.
La somma di variabili aleatorie, ad esempio, pur essendo un fatto basilare, non è stata inserita nei programmi, forse non considerando che si può trattare molto semplicemente con una generalizzazione del triangolo di Tartaglia. Così potrebbe essere anche presentato meglio il significato della legge dei grandi numeri e del teorema del limite centrale.
D'altro canto può capitare che, sulla base di discorsi generali importanti e giusti, vengano introdotti nei programmi, argomenti il cui bilancio didattico può essere considerato negativo. Può accadere per esempio che non ne esistano trattazioni che siano semplici e non superficiali, o che richieda troppo tempo, o lasci poco spazio agli studenti, fino al caso estremo in cui è praticamente impossibile lo svolgimento di un esercizio. Questo potrebbe essere il caso delle geometrie non euclidee, rispetto alle quali la geometria della sfera e gli ipersolidi sembrano offrire spazi più utili agli studenti, e stabilire preziosi collegamenti fra i linguaggi della matematica, sviluppando maggiormente il ragionamento collegato all'analogia e all'induzione.

Infine può accadere che avendo maggiormente in mente, come modello, l'università, in cui uno studente ha già manifestato delle disposizioni utili e operato conseguentemente delle scelte, si generalizzino questi presupposti alla scuola, cogliendo limitatamente le sue esigenze didattiche e motivazionali. Questo potrebbe aver influenzato la presenza di alcuni aspetti noiosi, come ad esempio i confronti tra le distribuzioni binomiale, di Poisson e normale, mediante la costruzione di tabelle numeriche o più in generale, ad esempio, la presenza delle strutture algebriche o il perdurare delle impostazioni assiomatico-deduttive. Per questi ultimi argomenti sembra poco considerata la maggiore opportunità di una puntuale rifinitura, nel caso sia successiva ad una buona comprensione di ciò che si vuole rifinire e degli strumenti da usare. Presupposti, questi, poco probabili. Se poi nella scuola non è solo importante la matematica in se, ma lo è anche per lo sviluppo di capacità, è all'interno di un bilancio generale che va discussa la presenza dei vari argomenti. Assieme agli aspetti deduttivi, eventualmente considerando di più gli interessi degli studenti, si potrebbe cercare di sviluppare maggiormente il ragionamento induttivo. Potrebbe essere più utile e forse più motivante. Infatti si può dire che far capire su quali colonne, necessarie e sufficenti, si regge uno degli edifici maestosi della matematica, è fondamentale a livello storico, culturale, estetico e pedagogico, ma il problema sta nella possibilità di raggiungere questi obiettivi e di confrontarli con quelli utili per costruire un edificio, certo meno maestoso, ma che preveda almeno la capacità di mettere insieme dei mattoni personalmente.
Certo è che, terminati gli studi secondari accade di non aver mai scoperto delle relazioni o delle proprietà, anche semplici, o costruito personalmente una dimostrazione, anche banale, né di sapere che ciò è possibile. Più in generale accade troppo frequentemente, non soltanto di non aver mai provato piacere nello studio della matematica, ma di considerarla autoritaria e soffocante e, comunque, di dimenticare tutto quello che si è studiato e ripetuto, ricordando soltanto delle sensazioni spiacevolissime per essere stati obbligati a sbattere la testa su una congerie di aspetti particolari, spesso oscuri e scollegati. Così, anche se si sono fatti notevoli passi avanti per far comprendere il significato di alcuni strumenti, è difficile che qualcuno abbia

sentito dire che con $\int_0^c x^2dx = \frac{c^3}{3}$ si ritrova il volume della piramide che ha per sezioni x^2, proprietà che peraltro, con gli ipercubi, si può generalizzare facilmente a qualsiasi polinomio e che potrebbe servire per le somme di variabili aleatorie continue, viste geometricamente.
Questo significa che tutto deve essere facile, giocoso e divertente? Assolutamente no, anche perché non sapremmo come renderlo tale. Verrebbe utile quello che diceva, ad esempio, Lucio Lombardo Radice, che parlava della necessità di una scuola vista come una avventura intellettuale. Tale aspetto viene ripreso nei programmi quando si parla dell'insegnamento per problemi. La verità é che ciò è difficilissimo: per alcuni è un'utopia, e per altri si confonde paradossalmente con la volontà di banalizzare, mentre l'obiettivo è quello di infondere il coraggio di ragionare o di fare estrema attenzione per evitare l'effetto contrario.

A queste esigenze da considerare nei programmi, se ne contrappone un'altra di segno opposto, che viene introdotta con le parole di J. Dewey: "I problemi [della scuola] non solo non sono risolti ma non sono neppure affrontati fino a che si ammette che basta ripudiare le idee e le pratiche della vecchia educazione per buttarsi all'estremo opposto".

Lo stesso modello dell'università di cui si parlava, dove praticamente si insegna quello che si vuole in ciascun corso, viene dimenticato quando si impongono alla scuola dei programmi fortemente innovativi, nei contenuti e nei metodi, e forse pletorici.
Ma è sbagliato e ingiusto infierire sulla inadeguatezza della preparazione dei docenti, comunque, e in particolare quando non ci sono stati praticamente, ne è previsto che ci siano, presupposti seri per la loro preparazione, aggiornamento e riconoscimento professionale.
In particolare come richiedere che venga insegnato nella scuola il calcolo delle probabilità, che è stato uno dei parti più travagliati nella storia della scienza, quando non è obbligatorio studiarlo neppure all'interno dell'indirizzo didattico del corso di laurea in matematica?
Quale è il significato, ad esempio, della cosiddetta interdisciplinarità senza nessuna preparazione in tal senso, e quando viene curato molto poco anche il collegamento fra gli stessi linguaggi della matematica ?

Viene in mente Bruno de Finetti [6] che, a proposito dell'esame di cultura generale di laurea, chiese che ciascun docente interrogasse su una materia diversa dalla propria. L'esame di cultura generale fu abolito.
Neppure si discute sulla necessità della gradualità nella attuazione delle novità e su una prevista possibilità di modificarle senza aspettare decenni. Date le difficoltà di elaborazione dei programmi, dovrebbe essere utile studiarne anche le modalità di attuazione, ricordando quanto è accaduto nella scuola media, ove si è praticamente tornati al vecchio, dando ragione a chi non ha mai operato una innovazione didattica.

Per concludere non vanno sottovalutati i molti aspetti positivi dei programmi della Commissione Brocca, che ad esempio introducono finalmente il tema del calcolo delle probabilità e della statistica nelle superiori; ma forse è sempre meglio discutere sui rischi che ogni proposta inevitabilmente presenta.

Prof. Mario Barra
Dipartimento di Matematica Università "La Sapienza"
P.le A.Moro 2, I - 00185, Roma, Italy
Tel: (39)6 49913254; (39)6 70493870
Fax: 0039644701007
Email: BARRA@SCI.UNIROMA1.IT

NOTE

1 Pierre Simon de Laplace. Essai de philosophie 1819 e riportato in: Induzioni Demografia, probabilità, statistica a scuola, n. 0, 1990, p.23.
2 Italo Scardovi, Atti del convegno sui fondamenti dell'inferenza statistica Firenze 1978.
3 Giovanni Prodi , Atti del Convegno: "L'insegnamento preuniversitario della statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore, Bressanone 1979.
4 La nascita delle assicurazioni si può far risalire al 1369, in Italia, con il primo riconoscimento legislativo delle assicurazioni a Genova.
5 In 'Le scienze matematiche', a cura dell'UMI, Zanichelli, 1973, pg.226 e 265.
6 Bruno de Finetti, rispetto a quanto è stato detto, ha sottolineato l'importanza del collegamento fra i diversi linguaggi della scienza, in particolare con il "Fusionismo", già espresso da Klein in relazione al collegamento della geometria del piano e dello spazio e fra la geometria e l'algebra.

PROBABILITA' NELLA SCUOLA DI BASE

Michele Boffa *

INTRODUZIONE

Il mio contributo a questa tavola rotonda, "Probabilità nella scuola di base", vorrebbe segnalare, nell'ambito del tema del Convegno, l'esigenza che ogni insegnante, a qualunque livello, tenga conto di ciò che l'allievo ha già appreso o ascoltato nel corso degli anni precedenti.

Credo cioè che sia doveroso, e particolarmente utile in questa occasione, un riferimento alle esperienze acquisite fino ad oggi nella scuola elementare e nella scuola media inferiore, alla luce dei programmi ministeriali, rispettivamente, del 1985 e del 1979. Da un lato tale analisi faciliterà la lettura e lo sviluppo dei programmi proposti dalla Commissione Brocca, dall'altro potrebbe suggerire opportuni aggiustamenti per una migliore strutturazione del percorso didattico nel suo complesso.

Si aggiunga che l'ambito della probabilità e del suo insegnamento è assai più delicato di quello della statistica: pensare in termini probabilistici è soprattutto un modo di vedere e di giudicare la realtà, non familiare, spesso tradito dall'intuizione, in contrasto con una visione parziale ma assai diffusa della matematica, capace insomma di generare sensazioni di disagio sempre più forti più se ne rimanda l'approccio.

Coerentemente a questa premessa e nel tempo che mi è concesso cercherò di introdurre una riflessione sulle scelte epistemologiche e didat-

* Scuola Media Statale "Anna Frank" - MONDOVI' (Cuneo)

tiche che stanno alla base delle attività probabilistiche in atto nella scuola elementare e nella scuola media, rimandando a occasioni più propizie le interessanti esemplificazioni che le potrebbero accompagnare.

Una parte del lavoro di avviamento al calcolo delle probabilità, svolto nelle classi elementari e medie,è raccolto in una pubblicazione dal titolo "Probabilità e insegnamento elementare", edita dalla SEI di Torino nel 1990, che ho curato in collaborazione con Carla Caredda del Nucleo di Ricerca Didattica di Cagliari.

PROBABILITA' NELLA SCUOLA ELEMENTARE

I programmi per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare (D.P.R. 12.02.1985) recepiscono l'idea che la probabilità è importante per la formazione dei giovani, come più volte affermato ad esempio da studiosi come B. de Finetti, E. Fischbein, T. Varga e altri anche tra i presenti.

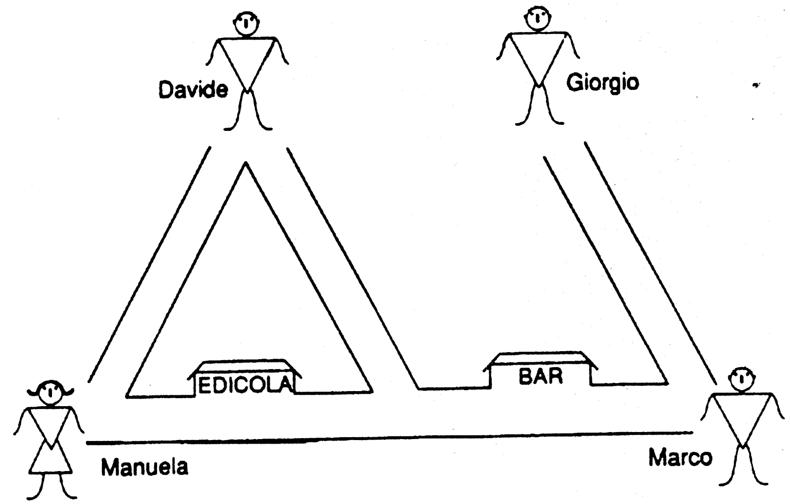
Si tratta di introdurla a un primissimo livello di conoscenza e il mezzo più efficace per farlo sembra essere il gioco, adatto a farla riconoscere e in grado di promuovere schemi operativi non del tutto spontanei a questo livello di età.

L'analisi di una situazione incerta, con lo scopo di fare delle previsioni sensate sul verificarsi o meno di un evento, richiede che si prescinda da fattori emozionali o affettivi, che si distingua il mondo fantastico da quello reale, che si considerino le proprie esperienze come informazioni necessarie ma non sufficienti.

Molti giochi, anche vicini al quotidiano, hanno carattere aleatorio e generano conflittualità per le scelte che il bambino è chiamato a fare. In un primo tempo egli sarà portato a trattare la previsione di un evento secondo il suo desiderio che l'evento stesso si verifichi, poi gradualmente l'esperienza o semplici analisi, se adeguatamente motivate, lo indurranno a mutamenti di rotta di cui far tesoro nelle esplorazioni successive.

Obiettivo è quello di una prima significativa classificazione: far distinguere i due estremi del certo e dell'impossibile da tutto ciò che si trova tra di essi.

Può essere utile un semplice esempio. La rappresentazione seguente viene di solito proposta a bambini di 9 anni circa, invitati a osservare attentamente i percorsi e a mettere una crocetta al posto ritenuto più giusto:



Marco per andare da Davide passa davanti al bar:	[ ] è sicuro	[ ] forse	[ ] è impossibile
Marco per andare da Manuela passa davanti all'edicola:	[ ] è sicuro	[ ] forse	[ ] è impossibile
Marco per andare da Giorgio passa davanti all'edicola:	[ ] è sicuro	[ ] forse	[ ] è impossibile

Le tre affermazioni corrispondono, nelle nostre intenzioni, alle tre espressioni "è sicuro", "forse", "è impossibile" e qualche bambino non ha difficoltà a riconoscerle, ma non pretendiamo che tutti rispondano come risponderemmo noi! Nella nostra esperienza abbiamo avuto spesso risposte diverse da quelle attese e quasi sempre nel senso di un abuso del "forse". La cosa non deve sorprendere e sarà proprio il bambino, motivando le sue risposte, a constatare la maggior frequenza del "forse" nella vita di tutti i giorni.

Non sembra molto, ma è proprio qui che si pongono le radici per il superamento di un determinismo culturale imperante e, in particolare, per offrire una visione più ampia della matematica. Per non parlare delle positive implicazioni sociali del nuovo abito mentale, che induce atteggiamenti di maggiore apertura e disponibilità nei confronti degli altri.

Successivamente si potrà gradualmente condurre l'allievo a confronti di probabilità, prevalentemente qualitativi: un'ampia sperimentazione da un lato e lo sviluppo di una mentalità combinatoria dall'altro, l'ausilio di mezzi grafici d'appoggio lo aiuteranno a capire che le cose vanno in un certo modo e lo avvieranno a valutazioni sempre più consapevoli.

PROBABILITA' NELLA SCUOLA MEDIA

I programmi per l'insegnamento della matematica nella scuola media (D.M. 9.02.1979), che sottolineano con forza il valore culturale dell'introduzione della probabilità, oggi richiedono che si chiarisca il concetto di probabilità a partire dalla gestione dell'incertezza nella vita reale, con le sue espressioni e i suoi numeri. L'incertezza è tipica del quotidiano, come si valuta? Le valutazioni si traducono in stati d'animo, come ci si comporta?

In particolare non va dimenticato che l'uso delle percentuali, ritenute quasi meno impegnative, precede comunemente l'uso delle frazioni.

La frazione tuttavia traduce l'immagine per la quale, per dirla alla J. Bernoulli, la probabilità si differenzia dalla certezza come la parte dal tutto: ciascuno dà la propria rappresentazione, consapevole che la quantità e la qualità delle informazioni, compresa ovviamente l'esperienza, potrebbero indurre a modificarla.

La stessa frazione esprime poi assai bene il rapporto tra un costo certo e un maggior beneficio incerto, tipico della traduzione del concetto di probabilità in termini di scommessa.

Con questo taglio non è difficile chiarire in che cosa consista ragionare in modo coerente e valido in situazioni di incertezza.

La misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce al verificarsi di un evento, per quanto sempre soggettiva, può essere facilmente determinata quando risultano possibili considerazioni di simmetria, come nel caso del lancio di un dado o di una moneta, e ci si può quindi muovere nell'ambito dell'impostazione classica di probabilità.

Altre volte, quando l'impostazione classica non è sostenibile o non viene accettata ed è possibile procurarsi delle frequenze, come nel caso del lancio di un poliedro irregolare o di una puntina da disegno, il soggetto si affida alla constatazione che la frequenza relativa di successo, al crescere del numero delle prove, si stabilizza; da tale constatazione sperimentale discende la cosiddetta impostazione frequentista della probabilità.

Pur essendo assai limitato il campo di applicazione delle due precedenti impostazioni, tali strade sono le più naturali e indicate per questo primo approccio sistematico alla probabilità e permettono anche di capire i rapporti tra teoria e esperienza. Non è poi di secondaria importanza il fatto che una definizione di probabilità in senso classico e una qualche concezione frequentista sono in pratica molto usate, in moltissimi casi con disinvoltura tale da rendere doverosa qualche educativa considerazione.

Aggiungiamo che "qualsiasi" valutazione di probabilità è lecita ma, proprio perché non avrebbe senso intenderla fine a se stessa, chi la sostiene deve essere al tempo stesso disposto a metterla alla prova e l'appoggio concreto di una scommessa suscita attenzione e interesse adeguati. Inoltre, questa definizione interpretativa dell'impostazione soggettivista, data e sviluppata da B. de Finetti, consente valutazioni probabilistiche in ogni campo e richiama l'individuo a giudizi equi. Vediamo un esempio.

Marco e Nicola, entrambi fedelissimi tifosi del Milan, vogliono scommettere tra loro se la squadra rossonera vincerà la Coppa dei Campioni. Ovviamente entrambi lo sperano, ma sanno che non è certo che ciò avverrà; Marco ritiene che il Milan abbia il 20% di probabilità di vincere l'ambito trofeo continentale di calcio.

Quindi, Marco è disposto a versare, ad esempio, Lit 20.000 per avere Lit 100.000 in caso di vittoria del Milan. Ovviamente queste Lit 100.000

sono la posta in gioco costituita dai versamenti dei due giocatori e quindi occorre che Nicola (o chiunque altro) sia disposto a puntare Lit 80.000 sulla sconfitta del Milan.

Nicola ritiene che il Milan abbia una probabilità di vittoria maggiore del 20% e lo manifesta cercando di convincere Marco ad alzare la sua puntata in modo da poter diminuire la propria. Marco potrà confermare la sua valutazione, sapendo tuttavia che Nicola potrebbe chiedere di prenderne il posto, accettando di puntare Lit 20.000, meno cioè di quello che ritiene giusto, sulla vittoria del Milan.

Ecco perché Marco cercherà di fornire una valutazione della probabilità la più accettabile che sia possibile: "fare il furbo" potrebbe ritorcerglisi contro! Proprio come nel caso del dolce che due fratelli si devono dividere in parti uguali: uno di loro taglia "a metà", l'altro sceglie.

I ragazzi capiscono assai bene esempi come questo e arrivano a riconoscere che spesso nella vita accade anche che sia l'uno sia l'altro di due giocatori antagonisti, in base alle "eslusive" informazioni possedute, creda di interpretare il ruolo vincente. Naturalmente almeno uno di loro sbaglia e certamente uno di loro perderà la scommessa.

Un'impostazione assiomatica della teoria della probabilità non avrebbe base didattica, se non si percorresse prima, cioè nella scuola secondaria, il cammino sommariamente sopra descritto.

STRUMENTI DI APPOGGIO E DI RISOLUZIONE

L'esperienza ha confermato come strumenti utili al calcolo delle probabilità durante il triennio di scuola media, e certamente anche oltre, alcuni noti mezzi di appoggio grafico e mentale: gli insiemi, il calcolo combinatorio, i diagrammi ad albero (e, più in generale, i grafi).

Un po' di insiemistica è servita come mezzo di definizione e di chiarificazione di regole probabilistiche e talvolta è stata introdotta in modo

spontaneo proprio in quelle circostanze.

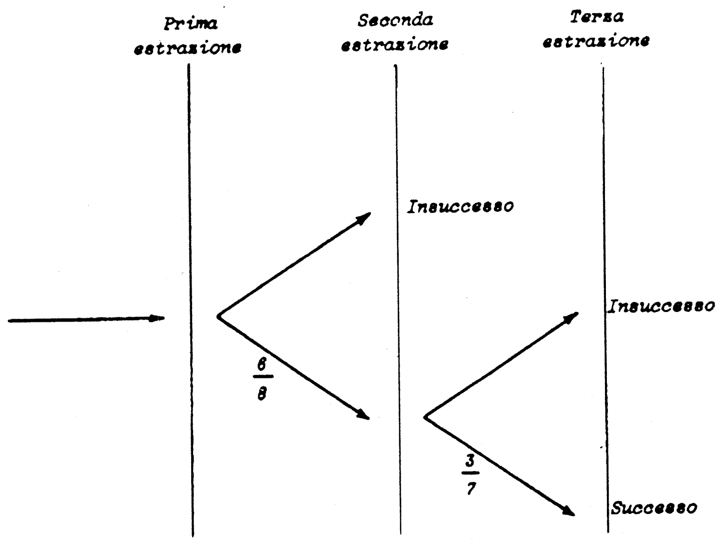
Raccogliendo i frutti della più elementare attività manipolatoria su un piccolo numero di oggetti, si è potuta consolidare l'attitudine al calcolo combinatorio, mezzo di analisi di situazioni probabilistiche, offrendo pure un'interessante occasione di generalizzazione nel mondo delle formule.

A un certo livello si è infine imposto l'uso dei diagrammi ad albero quale mezzo assai potente per la comprensione e la risoluzione di quesiti probabilistici. Il grafo, in genere, fornisce in modo estremamente conciso e piacevole le "regole del gioco", sul grafo si vedono passo a passo le diverse possibilità che si presentano, il grafo può essere considerato come una traduzione dell'enunciato in una forma più accessibile della lingua comune, un mezzo che costituisce già, come detto, un avviamento alla risoluzione, spesso alternativa a quella fondata su un impegnativo lavoro combinatorio, come emerge nel seguente caso.

In un cassetto vi sono nove pezze di stoffa rettangolari e uguali: tre di colore verde, tre di colore bianco e tre di colore rosso. Dal cassetto, dove sono mescolate, estrarrò a occhi chiusi tre pezze. Con quale probabilità riuscirò a comporre la bandiera tricolore?

Il ragionamento si svolge in parallelo alla costruzione di un diagramma ad albero. Con serenità eseguo la prima estrazione, perché il colore estratto non pregiudica il successo finale. Più apprensione suscita la seconda estrazione: nel cassetto restano 8 pezze di stoffa, 6 delle quali hanno colore diverso da quello precedentemente estratto. La probabilità di aver estratto due colori diversi con le prime due estrazioni è dunque uguale a 6/8.

Ancora maggiore apprensione suscita la terza e conclusiva estrazione: nel cassetto restano 7 pezze di stoffa, 3 delle quali hanno colore diverso dai due colori precedentemente estratti. La probabilità di comporre la bandiera tricolore è quindi uguale ai 3/7 dei 6/8, cioè 9/28.



CONCLUSIONE

Riassumendo:

a) constatiamo che le indicazioni circa la probabilità, presenti nei programmi di matematica proposti dalla Commissione Brocca, vanno nella direzione di uno studio sistematico;

b) crediamo che l'imminente obbligatorietà del biennio di scuola secondaria superiore possa costituire l'occasione per verificare l'itinerario didattico dai 6 ai 16 anni;

c) confidiamo che venga dato maggiore impulso all'attività probabilistica nelle scuole inferiori e che si possano condizionare le scuole superiori a collegarsi con essa.

Alcuni anni or sono G. Prodi, quasi per giustificare la scarsa diffusione della probabilità nell'insegnamento, commentava giustamente quanto fosse difficile raggiungere la piena padronanza dell'insegnare ciò che non si è appreso sui banchi di scuola.

Insegniamo da molti anni nella scuola media e credo che moltissimi altri angoli del nostro insegnamento ci trovino ancora sprovvisti della necessaria padronanza. Troviamo il coraggio di insegnare anche un po' di probabilità: so che è possibile e che ci regalerà anche qualche soddisfazione inattesa!

L'INSEGNAMENTO DELLA STATISTICA NELLA SCUOLA

Giuseppe Cicchitelli*

Desidero innanzitutto ringraziare gli organizzatori per avermi invitato a questa interessante Riunione.

Con il mio intervento intendo fare alcune riflessioni sulla questione dell'insegnamento della statistica nelle scuola secondaria in Italia, alla luce anche delle relazioni presentate in questo Convegno.

Un primo dato di fatto da registrare con soddisfazione è l'avvenuto inserimento della probabilità e della statistica nei programmi della scuola secondaria, sulla base delle indicazioni della commissione Brocca: la sperimentazione su vasta scala dei nuovi programmi, da un lato, e la presenza di tali argomenti nelle prove di maturità, dall'altro, fanno ben sperare sul futuro di queste discipline.

Accanto a ciò vanno segnalate varie iniziative volte ad assecondare la penetrazione della probabilità e della statistica e, più in generale, della logica induttiva, nella scuola italiana. Penso all'attività dei cosiddetti nuclei di ricerca C.N.R. nel campo della didattica della probabilità e della statistica, alla creazione della rivista "Induzioni", concepita precipuamente come veicolo di formazione ed informazione dei docenti della Scuola; penso, infine, alla costituzione del Centro interuniversitario di ricerca per la didattica delle discipline statistiche (CIRDIS), nato nel 1991 per impulso della Società Italiana di Statistica, ed in particolare dell'allora suo Presidente, il Prof. Alberto Zuliani.

Il CIRDIS, costituito dalle Università di Perugia - dove è la sede amministrativa -, di Padova e di Roma "La Sapienza", ha come scopo principale quello di mettere a punto materiali e metodologie per l'insegnamento ed il proficuo apprendimento della statistica. Si propone anche come referente naturale, nel settore di propria competenza, dei docenti della scuola secondaria: il Centro costituirà il nodo

* Direttore del Centro Interuniversitario di Ricerca per la didattica delle discipline statistiche - Dipartimento di scienze statistiche - Università di Perugia.

di una rete informativa destinata a coinvolgere un gran numero di scuole; i docenti interessati potranno ricevere tempestive informazioni sulle iniziative che via via saranno promosse. E' stata acquisita una grande mole di materiale didattico ed informativo, prodotto in Italia e all'estero, tale da configurare un vero centro di documentazione.

L'attività promozionale appena descritta si inquadra perfettamente nel contesto internazionale: le iniziative intraprese in Italia sono parallele ad analoghe attività svolte in altri paesi, particolarmente negli Stati Uniti d'America e in Gran Bretagna. Negli Stati Uniti, alcuni anni fa, è stato avviato un ampio programma - noto come *Quantitative Literacy* - con l'obiettivo di sensibilizzare gli operatori dell'istruzione sul ruolo della statistica come strumento di interpretazione della realtà. Una apposita commissione ha elaborato un abbondante materiale didattico che è stato poi sperimentato in numerosi corsi di aggiornamento per gli insegnanti della Scuola.

A riprova dell'importanza che viene oggi attribuita alla questione dell'insegnamento delle discipline statistiche vi è la costituzione nel 1991 di una nuova associazione all'interno dell'Istituto Internazionale di Statistica (ISI) - l'associazione internazionale degli statistici -, l'*International Association for Statistical Education* (IASE), del cui consiglio direttivo mi onoro di essere membro per il biennio 1993-1995. La IASE ha come scopo principale quello di promuovere la cooperazione internazionale per lo studio di nuovi *curricula*, per lo sviluppo di nuove e più efficienti metodologie di insegnamento, che facciano tesoro anche delle moderne tecnologie (*personal computer*, strumenti audiovisivi, ecc.). L'associazione, pur occupandosi dell'insegnamento della statistica a qualsiasi livello ed in qualsiasi ambito, rivolge un'attenzione particolare al mondo della scuola secondaria, il cui ruolo è evidentemente cruciale per la diffusione del sapere statistico.

La tendenza a dare un sempre maggiore risalto alla statistica non si può, allora, ascrivere all'interesse "corporativo" della categoria degli statistici: è ormai chiaro, infatti, che una formazione quantitativa di base deve avere un posto primario nel *curriculum* scolastico; si avverte, tra l'altro, la necessità di fornire delle chiavi di lettura del mondo reale, a beneficio del cittadino di una società complessa, in cui si ricorre sempre più ai numeri per comunicare.

Nel seguito farò riferimento ai problemi dell'insegnamento della statistica: non mi sento sufficientemente competente per trattare della probabilità. Oso dire soltanto, incidentalmente, che non mi appassiona molto il dibattito sul ruolo del calcolo combinatorio nella teoria della probabilità. Mi rendo conto che questo argomento può evocare una particolare concezione della probabilità, ma sono

dell'idea che indulgere sui fondamenti della teoria della probabilità male si coniuga con l'obiettivo di fornire agli alunni, ovviamente in modo critico, gli elementi essenziali della probabilità, soprattutto quando questa è introdotta come prerequisito per la statistica. Ciò non significa che le lezioni scolastiche di calcolo delle probabilità non debbano arricchirsi di richiami, anche colti, alla storia dello sviluppo del pensiero scientifico; anzi, proprio per questo, è opportuno che sia evitata ogni visione "totalizzante" della disciplina.

Quanto alla statistica, vi è ormai un ampio consenso tra gli studiosi sulla sua peculiarità di disciplina eminentemente applicativa, sul suo ruolo nel processo di acquisizione delle conoscenze e nella soluzione dei problemi del mondo reale. Questa concezione, nata per impulso soprattutto della scuola anglosassone, fa sì che la statistica non può e non deve essere una palestra per esercitazioni di matematica: essa si avvale dello strumento matematico senza per questo essere una matematica applicata.

Se questo assunto è valido, ne consegue che l'insegnamento della statistica nella Scuola non può che essere per problemi, come è stato bene rilevato da Zuliani[1] (1993). Ciò significa che l'illustrazione delle varie tecniche, sia della statistica descrittiva che di quella inferenziale, deve muovere da problemi concreti, non necessariamente complessi; il che si può realizzare con appropriate esemplificazioni tratte dalla realtà circostante, oppure, se è possibile, organizzando lavori di gruppo su specifici problemi. In altre parole, la statistica può essere appresa proficuamente applicandola. L'applicazione delle tecniche statistiche non può essere equiparata allo svolgimento di esercizi di algebra: con questi si acquisisce la maestria nel manipolare espressioni più o meno complesse "rispettando le regole del gioco"; i problemi di statistica sono altra cosa: i calcoli servono a comprendere, a percepire, i fenomeni a cui i dati si riferiscono; non ci si ferma al calcolo in sé, ma si fa sempre dell'induzione, sia pure a livelli rudimentali.

Non intendo affatto bandire gli esercizi di statistica dai libri di testo: essi hanno la funzione di verifica delle capacità di calcolo e del corretto apprendimento degli algoritmi da parte dell'alunno; né voglio demonizzare gli esempi più o meno banali che l'insegnante necessariamente deve proporre per introdurre il singolo argomento. Intendo affermare che una reale comprensione ed assimilazione del metodo statistico può essere conseguita solo "lavorando" su problemi concreti.

Ciò non implica che si debbano rilevare grandi masse di dati; si possono riprendere ed elaborare dati provenienti da fonti ufficiali, o commentare ricerche già compiute su problemi di largo interesse. Esempi suggestivi di quanto può essere fatto in classe sono emersi dalle relazioni di Racugno[2] (1993) e Rossi[3] (1993). Della prima ho apprezzato molto l'esercizio verosimile, anche se non costruito con dati reali, con cui è stata illustrata l'idea della variabilità. L'applicazione è didatticamente molto interessante anche per far percepire all'alunno l'idea che il singolo dato statistico ha un "valore" in quanto riferito al collettivo a cui l'unità statistica considerata appartiene. Non condivido, invece, la seconda parte dell'esercitazione, in cui l'A. introduce, implicitamente, l'analisi in componenti principali: l'approccio seguito, oggettivamente, può dare l'idea che per fare della buona statistica è sufficiente effettuare delle corrette manipolazioni matematiche. Io penso che a scuola si debba puntare soprattutto sulla scelta ed sulla elaborazione di applicazioni significative e, possibilmente, interessanti, utilizzando in modo critico gli strumenti di teoria statistica disponibili e compatibili con i prerequisiti di matematica a disposizione.

Come ho già detto, i problemi proposti da Rossi[3] (1993) mi sembrano di rilievo: la questione delle indagini campionarie su argomenti delicati può senz'altro suscitare interesse tra gli alunni e stimolare utili riflessioni sui cosiddetti errori non campionari; il metodo delle risposte casualizzate, inoltre, può fornire lo spunto per la messa a fuoco del concetto di probabilità condizionata. A questo stesso fine è diretto l'altro spunto didattico illustrato dall'A., cioè il procedimento per la stima della probabilità condizionata che il consumatore di droghe leggere divenga consumatore di droghe pesanti. Al riguardo, mentre sono, ovviamente, d'accordo sul procedimento di calcolo proposto, mi parrebbe opportuno, ai fini didattici, che il processo inferenziale che viene accennato - stabilire se è accettabile l'affermazione corrente che l'uso delle droghe leggere induce l'uso delle droghe pesanti - fosse portato a compimento mediante il confronto della stima della probabilità condizionata sopra indicata con quella dell'analoga probabilità per il non consumatore di droghe leggere.

L'attività del docente può oggi giovarsi positivamente dello strumento informatico; il *personal computer* può essere usato a due livelli: come strumento di elaborazione dei dati - soprattutto nelle situazioni in cui il programma di statistica convive con quello di informatica -, o come strumento di comprensione dei concetti. Penso che nella scuola secondaria, il *personal computer* si presti meglio ad assolvere questa seconda funzione: l'apprendimento di concetti non semplici, come quelli di variabilità campionaria, distribuzione campionaria, limiti fiduciari, ecc., può essere agevolato fortemente dall'uso di questo strumento.

Quanto finora esposto pone il problema dell'adeguatezza della preparazione dei docenti ai fini dell'insegnamento della statistica. Poiché, in genere, la statistica fa parte integrante del programma di matematica, quasi sempre, insegnano statistica docenti di formazione matematica, che spesso non hanno sostenuto esami universitari di statistica. Il problema è allora quello di approntare idonei programmi

di aggiornamento ed appropriati materiali didattici.

Come è noto, i corsi di aggiornamento, a contenuto statistico, vengono promossi dal Ministero spesso all'interno di progetti, come quello nazionale per l'informatica; sporadiche attività, in questo ambito, sono organizzate, a livello regionale, dagli IRRSAE. Ritengo che sia altamente opportuno che per le future attività di aggiornamento e formazione venga formulato un programma tipo, messo a punto sulla base delle considerazioni di metodo precedentemente svolte. Tale programma dovrebbe essere preventivamente sperimentato in corsi pilota.

Quanto al materiale didattico, sia per i corsi di formazione ed aggiornamento che per l'uso individuale da parte del docente, è necessario ideare percorsi didattici e progetti di analisi di fenomeni reali, in modo che la statistica sia percepita come uno strumento prezioso per l'interpretazione della realtà.

NOTE

1 - Cfr. A. Zuliani (1993), *Intrecci multidisciplinari nella problematica dell'insegnamento della probabilità e della statistica*, Atti del XVI Convegno nazionale sull'insegnamento della matematica, Notiziario U.M.I., in corso di stampa.

2 -Cfr. W. Racugno (1993), *Opportunità interpretative della dispersione*, Atti del XVI Convegno nazionale sull'insegnamento della matematica, Notiziario U.M.I., in corso di stampa.

3 - Cfr. C. Rossi (1993), *Ragionamento induttivo, ragionamento deduttivo: problemi e integrazioni nell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica*, Atti del XVI Convegno nazionale sull'insegnamento della matematica, Notiziario U.M.I., in corso di stampa.

Sono già disponibili pregevoli programmi didattici (si pensi, ad esempio, a *Understanding Statistics*, prodotto dal *Centre for Statistical Education* di Sheffield, che sarà reso disponibile nella versione italiana dal CIRDIS) ed altri, più adatti ai programmi della scuola italiana, sono in corso di elaborazione in seno al CIRDIS.

L'INSEGNAMENTO DELLA STATISTICA E DELLA PROBABILITÀ NELLE SCUOLE PREUNIVERSITARIE

Enzo Lombardo
Università "La Sapienza" - Roma

Desidero sottoporre all'attenzione del lettore un paio di esempi che possono contribuire a chiarire la condizione dell'insegnamento della statistica e della probabilita' nelle scuole pre-universitarie italiane.
Iniziamo dal problema della valutazione dell'operosita' e dell'efficienza del sistema scolastico a livello nazionale, che ovviamente consiste anche in un lavoro di tipo statistico ed anzi potrebbe costituire un ottimo e convincente esempio dell'interesse di utilizzare categorie statistiche nel lavoro scolastico e nell'insegnamento, quando si ragionasse sui risultati. Rammento subito una breve indagine - a quanto m'e' dato di sapere non piu' ripetuta, nonostante la sua semplicita' ed il suo interesse - curata da Bongiovanni, Trivellato e Zuliani(1) con l'invio di un breve questionario sull'organizzazione ed il funzionamento dei servizi statistici a tutti i Provveditorati del tempo (si era nel 1979). Se ne trae una immagine piuttosto vivida dello stato delle cose, che non ha bisogno di molti commenti; ed ecco la descrizione: [...] 32 hanno risposto. Non hanno risposto, ad eccezione di Bologna e Palermo fra i grandi e Trieste, Perugia, Catanzaro e Bolzano tra i medio-piccoli, tutti i Provveditorati con sede nei capoluoghi di Regione. Una decina di Provveditorati hanno giustificato la mancata risposta con la cronica carenza di personale, ma - data l'estrema semplicita' del questionario - la redazione della lettera e' stata probabilmente piu' complicata che la compilazione del questionario stesso. Un Provveditorato, emblematicamente, ha dato risposta ai quesiti proposti in forma discorsiva (potenza repulsiva delle semplificazioni organizzate!). I risultati salienti di questa esplorazione possono cosi' essere riassunti. Soltanto 5 Provveditorati hanno un servizio statistico unitario; in 12 casi, ogni servizio operativo provvede alle statisti-

che di sua competenza; in altri 11, ci si avvale contemporaneamente delle due forme organizzative, in genere affidando al servizio specifico la gestione delle informazioni per l'Istat. 9 Provveditorati indicano la presenza di personale esclusivamente destinato al servizio statistico. E' singolare che si tratti sempre di una unita', anche se il personale complessivo degli stessi Provveditorati varia fra le 35 e le 230 unita'. 20 Provveditorati dispongono delle serie storiche decennali sul numero delle classi e degli alunni, per anno di corso e per ogni ordine e grado di scuola. Soltanto 16 dispongono di analoghe serie storiche sul numero complessivo degli insegnanti e appena 6 di quelle per eta' o sesso o classe di corso o insegnamento effettivamente svolto".

In questo quadro si inserisce l'assenza dell'impiego dei cosiddetti *achievement test*, ovvero di prove riproducibili, standardizzate, valide ed affidabili anche se senza alcuna pretesa di imparzialita'. Ne consegue che tale assenza produce l'effetto di non farci cogliere la qualita' del nostro sistema formativo, cioè dell'effettiva acquisizione di stabili conoscenze ed abilita' da parte dei giovani, che sembra essere piuttosto disomogeneo sul territorio nazionale[2]; d'altra parte incide anche sul lavoro del singolo insegnante in classe, in quanto gli vengono a mancare gli strumenti di valutazione delle abilita' iniziali, in ingresso, degli studenti con cui si trova a lavorare e, conseguentemente, gli strumenti per 'misurare' gli eventuali progressi nell'apprendimento dei singoli studenti e dell'intera classe[3].

Credo sia non privo d'interesse rammentare e ribadire quanto Trivellato e Zuliani (1981, op. cit.) avevano messo in luce sui ritardi nello stabilire e rendere effettuale un sistema di valutazione nazionale oggettivo anche perche' le loro osservazioni divengono tanto piu' gravi in quanto sono trascorsi quasi 15 anni da quando le avevano espresse. Essi ci ricordadano che tali ritardi risultano particolarmente allarmanti, se si riflette sull'accumulazione di capacita' ed esperienze richieste per porre in essere un tale sistema di valutazione".

Un esempio seppur limitato e circoscritto, tuttavia facilmente riproducibile e che ha fornito risultati piuttosto sorprendenti, di simili test che vale la pena qui citare, seppur succintamente, riguarda uno studio effettuato da L. Brunelli e M. Pannone[4], in cui le autrici hanno costruito un test per valutare le conoscenze matematiche di base, cioe' quelle che avrebbero dovuto esser

state acquisite nel corso degli studi scolastici, delle matricole delle facolta' di Scienze Politiche e di Matematica e Fisica dell'universita' di Perugia. Lascia piuttosto perplessi, ad esempio, che ad una domanda sulla lettura di distanze sul terreno per mezzo di una carta geografica di scala nota, il 57% degli studenti di Scienze Politiche ed il 71% di quelli di Matematica e Fisica diano una risposta corretta. Eppure si tratta di un concetto che dovrebbe esser noto sin dalle scuole medie.

Veniamo ora a qualche considerazione relativa alla probabilita', prendendo le mosse dai risultati di un problema che avevo sottoposto agli studenti del primo corso di statistica della facolta' di Economia e Commercio. Ebbene il problema era il seguente:

Sei costretto a partecipare al gioco della roulette russa insieme ad altre 5 persone. Dopo aver inserito un proiettile nel tamburo a 6 colpi di una pistola, si fa girare vorticosamente il tamburo stesso. Queste 6 persone sono obbligate, l'una dopo l'altra e senza cambiare la posizione del tamburo, che tuttavia ovviamente avanza colpo dopo colpo a sottomettersi alla prova della roulette.Preferiresti essere: (barrare il quadratino di scelta)
il primo, il secondo, il terzo, il quarto, il quinto o il sesto? Mi è indifferente l'ordine

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Nella stessa prova scritta figurava anche un problema di tipo piu' usuale (lo riporto qui per comodita' di comprensione del lettore: in un'urna vi sono 7 palline rosse e 3 nere; determinare la probabilita' che, estraendo senza rimpiazzo, esattemente la terza sia rossa) ed i risultati ottenuti sono stati i seguenti:

Risultati per settantasei studenti della facoltà di Economia e Commercio, raccolti durante una prova scritta (Ottobre 1993) in cui figurava anche un esercizio di probabilità

Esercizio di probabilità con soluzione:

Risposte	*corretta*	*errata*	*totali*
Indifferente con motivazione corretta	*3 (3,4)*	*14 (13,6)*	*17*
indifferente con motivazione errata	*3 (3,0)*	*12 (12,0)*	*15*
1	*8 (7,9)*	*32 (32,1)*	*40*
2	*0 (0,2)*	*1 (0,8)*	*1*
6	*1 (0,6)*	*2 (2,4)*	*3*
Totali	***15***	***61***	***76***

Intanto si puo'notare come solo 15 su 76 studenti hanno dato una risposta corretta al problema standard, ma ancora piu' colpisce che le soluzioni al quesito sulla 'roulette russa' si dispongano nella stessa maniera (valori fra parentesi) nel gruppo dei 15 che danno soluzione corretta ed in quello dei 61 che, di contro, danno soluzione errata al problema standard. Sembra che la valutazione piu' intuitiva non dipenda dalla maggiore o minore abilita' a risolvere problemi piu' 'libreschi' e che le persone non colgano le caratteristiche del problema e siano guidate da considerazioni del tutto estrinseche (solo 17 su 76 forniscono una risposta corretta quando, successivamente, e' stato loro chiesto di dare una giustificazione alla loro scelta).
Mi sembra che introducendo delle situazioni in cui sia necessario valutare la probabilita' di un qualche evento sia opportuno seguire una via per cosi' dire pratica e non premettere una struttura normativa da seguire nella soluzione, o almeno non orientarsi solamente lungo questa seconda via. Ovvero far descrivere verbalmente agli studenti situazioni in cui l'evento di interesse sia certo, impossibile o ancora non risulta ne' certo ne' impossibile ed inoltre far sperimentare concretamente - non soltanto con simulazioni di giochi al calcolatore, che tuttavia possono affiancare l'apprendimento, arricchendo e consolidando l'esperienza di ogni studente - con strumenti aleatori (come dadi, monete, estrazioni da un'urna, esperimento di Buffon ed altro ancora). Si tratterebbe, dunque, di privilegiare gli aspetti piu' concreti per agevolare la nascita della consapevolezza della necessita' di una definizione di probabilita' e di metodi di valutazione della stessa in circostanze particolari (rapporto, quando come nei giochi di sorte si puo' concordare sull'aspetto simmetrico degli strumenti di gioco, frequenza relativa, in casi di esperienze statistiche). Se si vuole, e' un po' lo stesso consiglio, pur paradossale nella sua formulazione ed ironico verso i sostenitori di un linguaggio universale, per un atteggiamento ostensivo, che ritroviamo in Swift quando descrive la visita di Gulliver all'accademia di Lagado: Il [...] progetto consisteva nell'abolire tutte le parole esistenti [...] E percio' veniva proposto l'espediente che segue: poiche' le parole non erano altro che i nomi delle cose, sarebbe stato assai piu' comodo che ognuno si portasse dietro le cose delle quali intendeva parlare in ogni sua faccenda. [...] Molte persone savie e istruite hanno adottato questo nuovo metodo di espressione per mezzo delle cose, ne' riesce loro d'imbarazzo alcuno se non quando, avendo da parlare di molte cose e diverse, debbono portarsi sulla schiena pesi enormi, a meno che non si facciano seguire da un paio di servitori molto robusti."

(1) L'esperienza si trova citata in U. TRIVELLATO-A. ZULIANI (1981), Informazione statistica e fabbisogni conoscitivi nella gestione della scuola e nella programmazione scolastica, in Ministero della Pubblica Istruzione, Informazionetatistica, gestione della scuola e programmazione scolastica , Atti del Convegno internazionale del 17-19 ottobre, 1979 a Venezia; Roma, Istituto della Enciclopedia G. Treccani.

(2) Si veda Indagine IEA Studio Alfabetizzazione Lettura: La situazione italiana a confronto con quella degli altri paesi , Versione provvisoria, Roma, Dipartimento di Ricerche Storico-filosofiche e Pedagogiche, Univerista' di Roma La Sapienza, ottobre, 1993

(3) Altre indicazioni di indubbio inteesse si possono leggere in A. VISALBERGHI (1991), Tradizione e innovazione nell'impresa educativa, in Una scuola per tutta la vita (a cura di B. Vertecchi), Firenze, La Nuova Italia

(4) Si veda L. BRUNELLI-M. A. PANNONE (1993), Statistica e conoscenze matematiche di base, Induzioni, 6

LAVORI DI GRUPPO

GRUPPO DI LAVORO SCUOLA ELEMENTARE

Coordinatore
Paola Vighi

Il gruppo ha letto ed analizzato, dal punto di vista didattico e metodologico, una favola scritta allo scopo di introdurre i primi elementi di probabilità. Alcune situazioni di incertezza costituiscono parte integrante della fiaba, la cui narrazione viene di tanto in tanto interrotta dalla presentazione di quesiti relativi all'idea di fortuito, all'equità nei giochi ed a semplici confronti di probabilità. Il bambino, che è emotivamente coinvolto dal racconto, viene invitato a dare suggerimenti utili per affrontare le situazioni di carattere aleatorio presentate. Le risposte alle domande consentono di conoscere le sue credenze, l'atteggiamento nei confronti dell'idea di fortuito, la capacità di fare previsioni e di porsi di fronte a situazioni di incertezza.
Le attività proposte sono state esaminate anche alla luce delle indicazioni dei programmi ministeriali, in base ai quali " l'introduzione dei primi elementi di probabilità . . . ha lo scopo di preparare nel bambino un terreno intuitivo su cui si possa, in una fase successiva, fondare l'analisi razionale delle situazioni di incertezza". Gli esercizi presentati riguardano perciò valutazioni solamente qualitative di probabilità e soprattutto confronti in situazioni di gioco con dadi, monete ed altri oggetti.
Durante il lavoro di gruppo si è fatta un'analisi a priori delle possibili difficoltà incontrate dai bambini, si è individuata nella discussione collettiva un momento fondamentale dell'attività proposta, infine si sono studiati ed analizzati i protocolli relativi alle osservazioni ed alle argomentazioni fatte da bambini di otto anni in una classe in cui era stata attuata una sperimentazione, proponendo la lettura della fiaba.
I partecipanti al lavoro di gruppo hanno fatto osservazioni e suggerimenti ed hanno proposto modifiche anche in base alla loro esperienza. La partecipazione alla discussione è stata pressocchè totale ed ha dimostrato una crescita dell'interesse per i problemi di insegnamento-apprendimento della probabilità a questo livello scolastico.

GRUPPO DI LAVORO SCUOLA MEDIA

Coordinatore
Lucia Grugnetti

Poiché gli insegnanti di scuola media inferiore presenti al Convegno sono pochi, si decide di costituire un unico gruppo di lavoro (invece dei quattro inizialmente previsti) per tale livello scolare.
L. Grugnetti, che funge da moderatore, prima di dare la parola ai coordinatori degli originari 4 gruppi di lavoro, chiede agli altri partecipanti di presentarsi e di illustrare brevemente le proprie esigenze didattico-scientifiche in tema di probabilità e statistica.
Dagli interventi emergono diverse esigenze comuni, quali, fra le altre, la messa a punto di un itinerario didattico con significati interdisciplinari che parta dalla classe prima.
Dopo questa prima fase, i coordinatori degli originari 4 gruppi prendono via via la parola per illustrare le fasi nodali delle rispettive proposte didattiche.
Per il Nucleo di Genova intervengono L. Parenti, S. Giglio, L. Laviosa che puntualizzano l'evoluzione di impostazione che ha subito la propria proposta didattica di insegnamento della Probabilità, dal 1976 ad oggi, sottolineando come lo stesso tipo di evoluzione si possa riscontrare in tutto il progetto triennale.
L'insegnamento della Probabilità è inserito nell'Unità didattica "Genetica" in accordo con la scelta, che caratterizza il gruppo genovese, di proporre ai ragazzi contenuti disciplinari intrecciati a "temi" importanti per la conoscenza della realtà che ci circonda.
Il lavoro in classe prende avvio con un questionario finalizzato ad esplorare le rappresentazioni mentali degli allievi per quanto riguarda la trasmissione dei caratteri ereditari. e prosegue con l'obiettivo di costruire assieme ai

ragazzi il modello probabilistico della trasmissione mendelliana dei caratteri.
Dal questionario emerge che in molti ragazzi dominano atteggiamenti "irrazionali" e "misconcetti" che trovano puntuale riscontro in modi di pensare diffusi nell'ambiente da cui provengono i ragazzi stessi; generale è la confusione tra malattie ereditarie, congenite e infettive; frequente è l'associazione tra malattie congenite, fatalismo, sfortuna...
Nella costruzione del modello, la probabilità diventa anche uno strumento di organizzazione "razionale" della conoscenza del reale ed in parallelo l'assimilazione dei primi elementi di genetica rappresenta l'avvio di un modo di pensare che dovrebbe gradualmente condurre a reinterpretare "scientificamente" aspetti importanti del fenomeno della vita e a superare gli atteggiamenti "irrazionali" e i "misconcetti" iniziali
Nell'arco di questi anni si è passati da una gestione di stile prevalentemente espositivo, con schede strutturate in modo molto guidato, a gestioni che rendono gli alunni in grado di produrre opinioni e ipotesi proprie anziché riprodurre solo formulazioni e opinioni altrui: tutto ciò al fine di renderli protagonisti del processo di costruzione del modello di Mendel, anziché solo espositori di un modello costruito dall'insegnante.
Raggiungere questi obiettivi significa:
* .....per gli insegnanti: a) saper proporre una gestione che interagendo con le rappresentazioni mentali dei ragazzi, tenga conto del ruolo del linguaggio verbale nell'argomentazione matematico-scientifica e del ruolo dei modelli mentali nella costruzione delle conoscenze; b) saper dare spazio (controllato) a stili, tempi, interpretazioni diversi al fine di agevolare la costruzione delle conoscenze; c) saper gestire le discussioni in classe e le ipotesi che emergono dai ragazzi; d) continuare attività di studio e aggiornamento a livello adulto; e) raccogliere ed analizzare materiali per avere informazioni precise su ostacoli e difficoltà al fine di studiare stategie utili a superarli
*.... nelle schede: a) prestare attenzione esplicita alle rappresentazioni mentali attraverso domande ed itinerari che portino a formulare ipotesi (per es.:linee pure, ibridi, "scomparsa" e "ricomparsa" di un carattere) e a trovare (o non trovare) riscontro alle proprie ipotesi (per es. portando il ragazzo da analisi qualitative ad analisi quantitative di dati forniti da letture presenti nelle stesse schede; b) l'applicazione del modello di Mendel all'ereditarietà

dei caratteri nell'uomo vista come esempio di possibili limiti di applicabilità di un modello (per es. ereditarietà poligenica) e di possibili utilizzi di schemi per prevedere fatti (per es. prevedere i possibili caratteri dei figli, noti i genotipi dei genitori) e interpretare fatti: (dal fenotipo dei figli, risalire al genotipo dei genitori); c) cercare di mantenere un equilibrio tra genetica / probabilità: la probabilità trattata con esempi riguardanti la genetica e l'analisi dei risultati di Mendel svolta in chiave probabilistica; d) passare dal modello di Mendel alla complessità del reale: fase microscopica (per es. dove sono i geni, come vengono trasferiti da una generazione all'altra,...)
*...... per i ragazzi: a) ricevere stimoli a discussioni, formulazioni e confronti di ipotesi, saper mettere in discussione e "superare" concezioni radicate ed errate; b) dedicare maggior impegno nella costruzione delle loro conoscenze e dei loro modi di rappresentarle; e) acquisire una maggiore autonomia nella risoluzione dei problemi proposti seguendo il proprio ragionamento e ricorrendo anche all'utilizzo di schemi personali e di rappresentazioni iconiche. Questi ultimi aspetti confermano la convinzione che i linguaggi possono condizionare i processi di pensiero proprio perché "strumenti del pensiero".
Per il Nucleo di Pavia prendono alternativamente la parola M. Reggiani, E. Giuliani, C. Romanoni. Viene dapprima ricordato che il Nucleo di Ricerca Didattica dell'Università di Pavia, a partire dal 1981, elabora un percorso didattico a schede operative sui temi della Statistica e della Probabilità, schede che verranno sperimentate nelle classi, discusse all'interno del Nucleo e modificate più volte negli anni successivi fino alla stesura definitiva del 1986 che è quella a cui ancora il Nucleo fa riferimento nel trattare questi argomenti in classe. L'occuparsi di Statistica e Probabilità, al di là dell'ottemperare alle disposizioni dei Programmi Ministeriali, è utile per l'importanza che questi concetti hanno nella vita quotidiana, per la varietà dei campi di applicazione e per l'utilizzo in contesti diversi e più motivati di strumenti matematici quali frazioni e percentuali.
Le schede di Statistica oltre a trattare di rappresentazioni grafiche, indici statistici, frequenze e percentuali (temi previsti dal nostro percorso didattico per la classe prima) affrontano due argomenti non previsti dai Programmi Ministeriali: il campione e la correlazione (da trattare in seconda), ritenendo, infatti, che per quanto riguarda il primo argomento sia essenziale che

l'istruzione dell'obbligo fornisca qualche elemento per interpretare correttamente gli esiti di sondaggi che i mezzi di comunicazione usano sempre più frequentemente. Particolare attenzione viene posta ai problemi della rappresentatività e della distorsione del campione.
Per quanto riguarda la correlazione, il Nucleo di Pavia reputa che la conoscenza di questo argomento aumenti la capacità di individuare il tipo di legame esistente tra due caratteristiche in una stessa popolazione e fornisca uno strumento in più per una corretta individuazione delle grandezze proporzionali.
L'argomento Probabilità viene trattato sempre con schede operative e suddiviso nei tre anni di Scuola Media. La scelta del Nucleo è quella di definire la probabilità in maniera classica e di attenersi a questa definizione per la maggior parte del percorso didattico. Per questo motivo non si è partiti dall'effettivo esperimento in classe, ma si è preferito utilizzare situazioni teoriche talvolta visualizzate con opportuni disegni. Solo in un secondo momento si è affrontato, tramite la legge debole dei grandi numeri, il legame frequenza-probabilità.
Per le colleghe pavesi è questo un punto centrale, ma assai delicato, nell'ambito del calcolo delle probabilità e che di conseguenza necessiti di una maggiore maturità per essere compreso. pertanto, nel percorso didattico, la parte rigurdante tale punto è proposta solo nelle ultime schede per la classe terza.
Dal punto di vista metodologico abbiamo scelto di usare il grafo ad albero come strumento essenziale per la rappresentazione e la soluzione di problemi su eventi casuali composti.
L'apprendimento dell'uso dello strumento "grafo ad albero" presenta non poche difficoltà, tuttavia, una volta appreso, costituisce un aiuto essenziale per illustrare con chiarezza, anche nell'ambito non probabilistico, situazioni significative dal punto di vista delle applicazioni.
Il Nucleo ha analizzato diversi protocolli per individuare, attraverso gli errori degli alunni, gli ostacoli che essi trovavano nell'uso corretto del grafo. Si può dire che questo strumento viene ben utilizzato in riferimento a situazioni problematiche non troppo complesse, mentre non costituisce un aiuto determinante se l'alunno non ha capito a fondo il problema proposto. Si apre un acceso dibattito sull'uso dei grafi ad albero ed in particolare

sull'introduzione della probabilità composta a livello di scuola media. Si delineano posizioni piuttosto diverse di fronte alle implicazionii didattiche di tali aspetti.
Grugnetti dà poi la parola a M. P. D'Argenzio, del Nucleo di Brescia, che si sofferma su considerazioni inerenti alcuni aspetti psicologici dell'apprendimento dei primi contenuti di statistica ed in particolare sul problema dell'astrazione nella costruzione del "dato" statistico, prima difficoltà didattica che un insegnante si trova ad affrontare e che troppo spesso non viene presa in considerazione nella stesura di un curriculum. L'astrazione richiesta per identificare il "dato" statistico trascurando tutti gli altri aspetti relativi ad una unità statistica significa difatti considerare l'unità statistica considerata non nella sua globalità individuale, bensì come anonimo elemento privo di qualsiasi aspetto o carattere ad eccezione di quello considerato. Questo tipo di astrazione è particolarmente difficile nell'ambito della scuola primaria dove l'egocentrismo è un dato assodato della personalità, ma è presente ancora negli adulti e in misura notevole nella scuola media di primo grado.
La seconda difficoltà si ha nella tendenza alla riattribuzione dei valori sintetici alle singole unità statistiche.
A tale riguardo basti ripensare alle ultime strofe del famoso sonetto di Trilussa sul pollo, in cui il poeta rappresenta in modo esemplare le considerazioni dell'uomo della strada sulle informazioni statistiche, di cui non riesce a discernere il valore informativo.
Già questa sola affermazione giustifica l'introduzione di contenuti di statistica nella scuola; la scuola può porsi come una risposta al bisogno elementare di conoscere gli strumenti del linguaggio statistico per essere in grado di "leggere" in modo corretto le informazioni sulla realtà avendo acquisito capacità critiche reali.
La tendenza naturale delle persone, ragazzi ed adulti, è quella di riattribuire il valore sintetico avuto come informazione al singolo. Questo fatto porta spesso, e il caso di Trilussa è emblematico, ad una informazione in contrasto con la realtà concreta sotto osservazione: da ciò consegue quell'atteggiamento di sfiducia e di incredulità rispetto alle informazioni statistiche proprio di tanti adulti e non solo di ragazzi. A questo punto poi è più forte a livello di persona la permanenza delle informazioni ricavabili dalla diretta

esperienza e quindi l'istruzione che non si sia preoccupata di fondare anche statisticamente la nozione di indice sintetico o di media resta una sovrapposizione usata solo nell'ambito scolastico su richiesta dell'insegnante e dimenticata e non strutturata nelle conoscenze "attive" del ragazzo. Questa situazione è ampliata, oggi, dai mezzi di calcolo disponibili: i ragazzi di un biennio delle superiori possono usare programmi non troppo complessi che permettono l'applicazione di tecniche di analisi dei dati velocemente e semplicemente. Ma si dimentica che non è l'analisi che fa una buona ricerca, ma è la conoscenza del significato statistico di ciò che si ottiene.
Manca infatti la conoscenza profonda che "ogni informazione statistica, che sia una sintesi o una aggregazione di una molteplicità di informazioni individuali, perde *ogni connotazione individuale*". Il volerla riportare ad una connotazione individuale è un'operazione rischiosa dato il livello di incertezza che l'accompagna. Il procedere ad una inferenza induttiva cioè ad una conclusione relativa ad aspetti non direttamente osservabili ma dei quali può essere ammessa l'esistenza porta al rischio di commettere qualche errore nelle valutazioni.
Ad ogni conclusione induttiva è connesso il rischio di commettere errori: tali conclusioni induttive e tali errori possono essere interpretati correttamente solo in termini probabilistici. E' altrettanto ovvio che quasi quotidianamente l'individuo è chiamato ad effettuare operazioni di questo tipo e quindi è indispensabile che ne possa essere educato nella scuola di base.
Ora è chiaro che la scuola di base non è chiamata a formare degli statistici e quindi non deve fornire educazione di tipo fortemente tecnico bensì di tipo qualitativo e/o sintetico, che permetta il superamento dei pre-concetti intuitivi che in genere si hanno.
Riuscire, per esempio, a costruire una unità didattica che passi i due concetti di seguito illustrati può essere già obiettivo finale di una educazione di base.
L'informazione statistica risulta direttamente informativa a livello di collettività e non di singoli individui. Essa è la risultante di informazioni individuali che di norma sono variabili, in quanto una molteplicità di individui osservati possono dar luogo a valori non necessariamente coincidenti. Inoltre, una volta sintetizzate due informazioni disuguali, l'informazione sintetica ottenuta, da sola, non consente di risalire con sicurezza alle singole osservazioni individuali.

La tendenza alla riattribuzione è però presente nell'adulto e ancor più nel bambino generando problemi non tanto di apprendimento dei contenuti statistici quanto del significato concreto che questi hanno. Il rischio che l'insegnamento corre è lo scollamento che i ragazzi attuano tra le nozioni apprese in ambito scolastico (rilevazioni, calcolo delle medie e di altri indici, etc.) e quello che realmente vivono e credono.

Per il Nucleo di Brescia, prendono poi la parola anche G. Moncecchi e L. Todisco per illustrare rispettivamente una analisi di libri di testo e di quesiti sulla probabilità e proposti come prova d'esame di licenza media e considerazioni relative a computer e didattica.

Moncecchi spiega che per analizzare i contenuti di probabilità nei libri di testo più adottati nelle scuole medie italiane è stata costruita una griglia di rilevamento che rendesse la rilevazione confrontabile. La griglia è del tipo di quella usata dal Nucleo di Modena coordinato da N. Malara che ha pubblicato il lavoro "Probabilità e Statistica nella scuola media: analisi di alcuni libri di testo" (quaderno n. 6 del progetto Strategico del C.N.R.). Si ritiene comunque questa griglia troppo analitica per acquisire un'idea generale di come venga trattato dai vari autori il tema "Probabilità".

E' stato poi attuato un confronto tra l'analisi compiuta dal Nucleo di Modena di cui si è detto e quella riportata in una tesi di laurea (S. Tonoli, "Probabilità e Statistica nell'insegnamento elementare e medio", Anno Accademico 1986-87, Facoltà di Scienze Matematiche dell'Università Cattolica di Brescia).

Mediante una nuova griglia si analizzano due testi che non erano stati presi in considerazione precedentemente: i testi per la scuola media rispettivamente di M. Pellerey e di R. Flaccavento (il testo più adottato nelle scuole italiane).

Dopo aver compiuto quest'analisi si può concludere che nella maggior parte dei casi i testi non presentano il tema secondo una scansione a spirale (come previsto dai programmi), ma a sequenza lineare e il più delle volte solo nel volume previsto per la classe terza; la trattazione è di tipo prevalentemente tecnico e l'aspetto formativo proprio della disciplina non è quasi mai neppure accennato o sottinteso; l'eserciziario risulta limitato e con quesiti il più delle volte banali. Sono presenti spesso errori ed imprecisioni.

- Si costruisce poi, su un modello presentato, una griglia per l'analisi dei quesiti d'esame aventi per oggetto la probabilità e concretamente assegnati in diverse scuole.

Si osserva immediatamente che i quesiti sono ripetitivi, attingono alla probabilità solo marginalmente e sono spesso errati nella formulazione, nelle richieste e nei riferimenti ad altre discipline quali la genetica e la biologia. Le tipologie presenti sono solamente due: o banali quesiti di genetica o domande altettanto banali sull'esito di lanci di dadi o monete.

- Per quanto riguarda la simulazione al computer sono presentate due ricerche, una pubblicata sul quaderno n. 5 del progetto strategico del C.N.R. "Tre proposte didattiche per l'insegnamento di statistica e probabilità con l'utilizzo del computer" e l'altra presentata nei quaderni IRRSAE Friuli V. G. dal titolo "Computer e Didattica". Tali proposte prevedono l'utilizzo di produzioni data base, fogli elettronici, macchinette calcolatrici, etc. ed hanno la finalità di guidare i ragazzi ad un uso intelligente del computer con materiale anche non creato espressamente per risolvere problemi non banali di probabilità che, grazie ai mezzi recnici, divengono affrontabili e risolubili anche al termine della scuola media.

LA PROBABILITA' E I SUOI RAPPORTI CON GLI ALTRI TEMI MATEMATICI NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE
(TRACCIA DELLA DISCUSSIONE)

Giovanni Prodi
Dipartimento di Matematica Università di Pisa

0) Occorre in primo luogo prendere atto dell'evidente difficoltà che presenta questo insegnamento. (A riprova di ciò: le esperienze didattiche effettive sono assai poche...)

1) Nel tentativo di andare alle radici della probabilità, esaminiamo i seguenti punti:
a) la probabilità va considerata come tema separato o come tema legato ad altri temi matematici?
b) si può sostenere un legame privilegiato con la logica? (valori di verità e valori di probabilità?)
c) questa analogia (o meglio generalizzazione logica --> Probabilità) ha una sua effettiva utilità?

2) E' importante (oppure fuorviante) un esame delle varie concezioni della probabilità?
(Concezione "frequentista", concezione "soggettivista", concezione "classica"...)

3) E' importante la prospettiva storica? E' da collocarsi all'inizio o in fase di studio più avanzata?

4) Nella didattica della probabilità (ma forse non solo nella didattica) si scontrano due concezioni: una tende

ad affermare l'autonomia della probabilità (Motto: "Pensare probabilisticamente" o pensare "statisticamente"), l'altra tende ad "esorcizzare il caso" (creando per ogni problema probabilistico un problema deterministico che ne prende il posto entro certi limiti e con certi scopi...). Come schierarsi?

5) Legami concreti di contenuti con altri rami della matematica, per arricchimento culturale e per economia di apprendimento (valori positivi, ma anche eventuali interazioni negative, pericoli di confusioni, ecc...):
a) con "insiemistica": insiemi come "spazi di probabilità"; nel triennio può divenire interssante la nozione di "insieme numerabile";
b) con l'algebra: ci sono particolari situazioni algebriche? (Certamente: alcune sono dovute alla relazione $p + q = 1$; i problemi sui grafi hanno eleganti relazioni che esprimono la costanza delle "probabilità totali");

c) con l'analisi: serie, integrali;
d) con la geometria (problemi molto belli di probabilità in campo geometrico);
e) probabilità ed informatica: non c'è solo l'utilizzazione più o meno brutale del calcolatore...

6) Strumenti per apprendere ed operare correttamente: le ideografie della probabilità:
a) il ruolo complementare dei diagrammi di Eulero-Venn e dei grafi;
b) i grafi con significato temporale-processuale e i grafi con pura valenza logica;
c) i vari tipi di grafo (dai grafi ad albero ai grafi delle catene di Markov finite) come parametro di classificazione delle difficoltà;

d) un'ideografia potente come quella dei grafi produce vera comprensione? Risposta: anche se non produce sulle prime perfetta comprensione, mette in moto una operatività precoce e sicura che, a poco a poco, finisce per dare anche una vera comprensione.

7) La statistica: è una scienza che si occupa della validità di una larga parte dei nostri processi cognitivi. Essa è, più ancora della probabilità, una meta-scienza (lo dimostra anche l'universalità del suo campo di applicazione).
a) La statistica deve precedere o seguire la probabilità? (se ne può discutere).
b) Nella statistica sono presenti non solo diversità di impostazioni e di significati (cosa che si verifica, come si è visto, anche nella probabilità), ma anche diversità nei metodi e, qualche volta, nelle conclusioni. Come fare in modo che l'insegnante - generalmente laureato in matematica, ma non di rado sprovvisto di conoscenze statistiche, anzi prevenuto contro questa disciplina - vi prenda confidenza e non sia paralizzato dalla paura di sbagliare?
c) A quali fonti ricorrere per avere problemi intelligenti e non meccanici, pur con moderata difficoltà?
d) Si trova un software adatto?

STATISTICA E PROBABILITÀ NEL BIENNIO:

NODI CULTURALI E DIDATTICI DA AFFRONTARE

Carlo Dapueto*, Sabina Ghio, Giovanna Pesce**

1. Introduzione

Il gruppo di lavoro è stato coordinato dal Nucleo di Ricerca Didattica MaCoSa di Genova (operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università) e, in particolare, dal gruppo di progettazione ["noi", nel seguito] che, nell'ambito della costruzione e sperimentazione di un piano di lavoro e di materiali didattici per l'insegnamento della matematica nel biennio, si occupa dei temi della statistica e della probabilità.

All'inizio del lavoro di gruppo abbiamo motivato la nostra "offerta" a preparare e coordinare questa attività. Il tema della statistica è quello con cui, nella classe prima, si avvia il progetto di insegnamento che stiamo costruendo e sulle tematiche più strettamente probabilistiche stiamo mettendo a punto quest'anno i primi materiali: il lavoro di gruppo ci avrebbe quindi permesso sia di presentare alcune caratteristiche e alcune valutazioni di quanto abbiamo sperimentato in classe, sia di proporre i nostri dubbi e le nostre difficoltà nel nuovo lavoro di progettazione, e di avviare dei confronti che sarebbero stati utili anche a noi.

Dopo una breve premessa che ha richiamato la presenza dei temi della statistica e della probabilità nei vari ordini scolastici, il lavoro di gruppo si è svolto affrontando i quesiti che abbiamo presentato in una scheda di lavoro (man mano, durante la discussione delle risposte, integrata da altri materiali).

I quesiti presentavano sia aspetti tecnici (per far "toccare con mano" i problemi ai partecipanti e per calibrare, sulla base dei loro comportamenti, la discussione delle problematiche sollevate dai quesiti), sia aspetti didattici (collocazione/finalità di attività analoghe nell'insegnamento, livelli di formalizzazione raggiungibili in classe, confronti con libri di testo, ...). Alcuni quesiti, per motivi di tempo (i gruppi di lavoro hanno avuto una durata inferiore a quella inizialmente prevista), sono stati affrontati solo parzialmente.

Alla fine si è svolta una discussione generale, anche sull'impostazione del gruppo di lavoro, e è stato distribuito materiale che illustra l'impostazione delle nostre proposte didattiche.

In questa sintesi, per problemi di spazio, non riportiamo la scheda di lavoro con il testo integrale dei quesiti, ma li presentiamo sommariamente assieme ai relativi commenti, senza una netta distinzione tra i commenti suggeriti dai coordinatori e quelli proposti dai partecipanti.

2. Questioni proposte per il lavoro di gruppo e loro discussione

1. Il primo quesito presentava questa situazione: «Giovanni, che è alto 175 cm, a 19 anni pesava 63 kg; oggi, a 43 anni, pesa 77 kg. Su un giornale legge che nella sua regione i maschi tra i 40 e i 50 anni hanno altezza media di 174.5 cm e peso medio di 76.5 kg. Ritiene dunque di avere peso e altezza *normali*, e di avere un peso *perfetto* per la sua altezza» e proponeva di discutere la correttezza delle conclusioni di Giovanni e di esporre le riflessioni didattiche che il problema suggerisce.

La prima questione che emerge è l'uso dell'aggettivo *normale*. Nel linguaggio comune ha un significato soggettivo, condizionato dal contesto sociale. In statistica occorre precisare una convenzione, ad esempio, nota la distribuzione delle altezze dei bambini liguri di 3 mesi, si potrebbe convenire di considerare come "normalità" l'80% centrale dei valori, cioè i valori compresi tra il 10° e il 90° percentile. Ma "normale" non vuol dire "giusto" dal punto di vista sanitario (qui potrebbero intervenire nuovi concetti statistico/medici, ad es. il peso "ideale" corrispondente a una data struttura ossea e a una data altezza: è il peso a cui corrisponde la massima speranza di vita).

Nell'insegnamento della matematica (e delle altre discipline) esplorare i *significati* che gli alunni attribuiscono ai termini, mettere in luce le differenze tra linguaggio comune e linguaggi specialistici, ... è necessario per prevenire/superare confusioni concettuali, per evitare che la cultura scolastica rimanga una cultura ad hoc, una parentesi temporanea senza interazioni con la vera cultura dei ragazzi, ... La statistica necessita di una particolare attenzione a questi aspetti (si pensi agli usi comuni di termini come: casuale, caso, possibile, incerto, atteso, speranza, ..., che in statistica assumo significati ristretti o, spesso, del tutto diversi).

L'osservazione che "normalità statistica" non significa "buona condizione" suggerisce un'altra considerazione didattica: l'importanza di far osservare che affrontando un problema (non deterministico) non sempre è sufficiente il ricorso alla statistica e alla probabilità e, più in generale, di mettere a fuoco la natura e i *limiti dei modelli matematici* (nel lavoro di gruppo sono stati fatti anche vari esempi di tipo probabilistico).

Giovanni, poi, ritiene che l'uomo medio debba avere altezza e peso medi, ma l'uomo medio ... non esiste: due quadrati di lati 1 e 5 hanno come lato medio 3 e come area media 13, diversa dall'area di un quadrato di lato 3!

L'errore di Giovanni offre lo spunto per considerazioni sugli *usi scorretti della statistica e della probabilità* (abuso della distribuzione normale e della distribuzione uniforme, uso della media aritmetica quando sarebbe meglio usare la mediana, scambiare correlazioni con rapporti di causa-effetto, confondere variazioni percentuali con variazioni delle percentuali, uso di ideogrammi senza tener conto dei fattori di scala, ...), con cui è bene far "scontrare" gli alunni, sia perché riflettendo sugli errori si chiariscono i concetti, sia per educarli ad un uso critico delle informazioni dei mass media.

Si sono fatte anche considerazioni sul contesto del quesito (normalità dell'aspetto fisico) e, in particolare, è stato sottolineato che la statistica (se riferita a situazioni significative) può costituire un supporto culturale che aiuti gli alunni a razionalizzare e affrontare i problemi di inserimento sociale (confronto con gli altri, ...) tipici della fase terminale dello *sviluppo* (e, quindi, costituire anche un elemento di motivazione allo studio della matematica).

2. Il secondo quesito forniva le seguenti informazioni: «Un test per la malattia X ha un'attendibilità del 95% (nel senso che in caso di presenza c'è il 95% di probabilità che si ottenga un esito positivo e in caso di assenza c'è il 95% di probabilità che si ottenga un esito negativo). Si sa che l'1% della popolazione in età lavorativa è affetta da tale malattia» e chiedeva di calcolare la probabilità che una persona risultata positiva al test abbia effettivamente la malattia X e di esporre le riflessioni didattiche che il problema suggerisce.

Si deve determinare: P(malato/positivo), cioè: P(malatoANDpositivo)/

P(positivo). Trovando il valore dei "?" della tabella seguente (prima mettiamo i dati sulla popolazione, poi utilizziamo il dato sull'attendibilità del test, infine elaboriamo la tabella) otteniamo che la probabilità cercata è 0.95%/ 5.90% = 16%, cioè molto meno del 95%, come in prima battuta qualcuno aveva risposto.

	malati	*sani*	*totale*
positivi	*?*		*?*
negativi			
totale	*1*	*99*	*100*

→

	malati	*sani*	*totale*
positivi	*0,95*	*4,95*	*?*
negativi			
totale	*1*	*99*	*100*

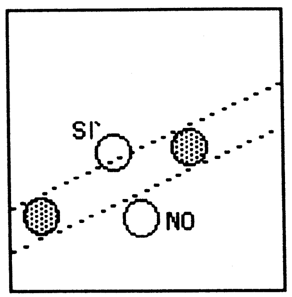
→

	malati	*sani*	*totale*
positivi	*0,95*	*4,95*	*5,90*
negativi			
totale	*1*	*99*	*100*

La discussione di questo quesito ha suggerito sia considerazioni simili ad alcune di quelle stimolate dal primo quesito (carenza e oscurità delle informazioni spesso fornite dai servizi sanitari, educazione all'uso critico delle informazioni, ruolo dei linguaggi specialistici, importanza di riferirsi a contesti significativi, ...) sia nuove riflessioni didattiche:

– il fatto che qualche partecipante, "intuito" che si trattava di un problema "da formula di Bayes", ha incontrato difficoltà a ricordare o ad applicare la formula, mette in luce alcune deformazioni nell'uso della matematica che spesso ci portiamo dietro e che, più o meno inconsapevolmente, trasmettiamo ai nostri alunni: la ricerca della *ricetta* sulla base di quanto ci evoca il testo del problema (invece di analizzarlo senza pregiudizi), che spesso spinge ad applicare uno schema risolutivo non adatto o (come in questo caso) non fa cogliere la possibilità di affrontare la situazione con strumenti più elementari (le tabelle di contingenza rispetto alla formula di Bayes);

– i temi della statistica e della probabilità, che offrono una grande varietà di attività di *modellizzazione* significative e realizzabili *con tecniche matematiche elementari*, possono avere un ruolo importante nell'educazione matematica, nell'esplorazione delle abilità di matematizzazione degli alunni, nel recupero di motivazioni alla "matematica", ...



3. Il terzo quesito considerava il lancio di 3 monete da 50 lire (del diametro di 2.50 cm) su un foglio in cui è tracciato un quadrato di lato 20 cm e chiedeva di determinare N (con congetture o stime o ...) affinché sia conveniente la scommessa "1 contro *N*"

di ottenere tre monete allineate, intendendo con ciò che una delle tre monete cada sulla striscia determinata dalle altre due (vedi figura a fianco).

Le congetture dei partecipanti sono state varie, e in genere abbastanza lontane dalla risposta corretta (basta N=2).

Non c'è stato il tempo per far esperimenti, altrimenti sarebbe stato facile per tutti, dopo pochi lanci, convincersi dell'erroneità delle congetture fatte. Non si è avuto modo neanche di approfondire che cosa sia all'origine di queste *congetture sbagliate*:

– il fatto che nella valutazione non si tiene conto degli aspetti combinatori: ci sono 3 modi di fissare la coppia di monete che determina la striscia;

– la non abitudine a fare (in contesti scolastici) ragionamenti probabilistici di tipo continuo (non si sa perché: qualche "piaget" nuovo o vecchio lo ha sconsigliato? presentano poco calcolo combinatorio? ...): qui abbiamo a che fare con rapporti tra aree invece che con rapporti tra numeri;

– ...

Comunque la discussione delle risposte date e la stima "corretta" che successivamente abbiamo proposto ha fatto emergere l'importanza di fare *congetture* e *stime* con gli alunni prima di affrontare una risoluzione "rigorosa": per farle occorre comprendere effettivamente il problema; averle fatte consente di controllare la successiva soluzione; trovare in alcuni casi grosse discrepanze tra congetture e risultati offre l'occasione per evidenziare come il *magico* e lo *strano* spesso siano il frutto di una valutazione probabilistica errata (o assente); ...

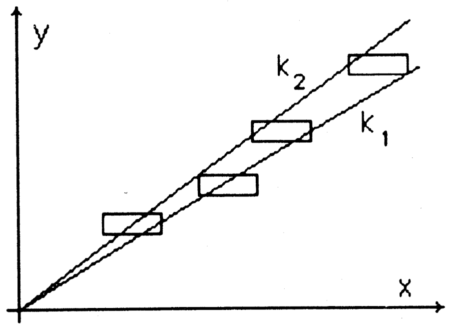
Dopo la "stima", il problema è stato risolto con una *simulazione al computer* (che ha fornito come probabilità di "successo" 0.42±0.01, che è maggiore di 1/3, cioè della probabilità per cui scommettere "1 contro 2" è equo). Il ricorso al computer è didatticamente importante sia perché è un modo in cui oggi si "fa" matematica (si controllano risultati ottenuti per via teorica o si fanno valutazioni che sarebbe troppo dispendioso ottenere per via teorica, si fanno esperimenti per congetturare o indirizzare la ricerca di proprietà, si realizzano vere e proprie dimostrazioni, ...), sia, soprattutto, perché, per fare una simulazione, è necessario comprendere il problema, esplicitare le ipotesi sottointese, dettagliare la traduzione "realtà" → "modello matematico", ...

4. Il quarto quesito presentava alcuni procedimenti per determinare la costante di elasticità di un elastico (sulla base dei dati sperimentali sotto riportati) e chiedeva di discuterli dal punto di vista della correttezza culturale e dell'opportunità didattica:

allungamento	peso
11 ± 2 mm	220 ± 5 g
16 ± 2 mm	350 ± 5 g
30 ± 2 mm	590 ± 5 g
47 ± 2 mm	940 ± 5 g

(*1*) calcolo del coefficiente angolare a della retta di regressione $y=ax+b$ (x allungamento in mm, y forza in g);
(*2*) ricerca grafica di k per cui è minimo S(k)="somma degli scarti assoluti delle y dai valori kx" (x=11, 16, …; y=220, 350, …);

(*3*) tracciamento dei "rettangoli sperimentali" e individuazione dell'intervallo di indeterminazione $[k_1,k_2]$ per la costante di elasticità (vedi figura a fianco);



(*4*) calcolo dei rapporti y/x (220/11,…), determinazione della loro media m e della deviazione standard σ con una calcolatrice e scelta come costante di elasticità di $m \pm \sigma$.

Dal punto di vista "tecnico" il procedimento (3) è il più corretto e il più semplice tra quelli proposti, anche se è apparso inusuale a molti dei partecipanti: nessuno degli altri metodi tiene conto delle precisioni associate alle misure; inoltre il metodo (1) non tiene conto neanche del "punto esatto" $(x,y)=(0,0)$ (cioè che b deve essere 0) e il metodo (3) utilizza la deviazione standard invece della (o di un multiplo della) deviazione campionaria.

Si è osservato che, invece, nelle attività di *laboratorio*, ma anche negli esempi di applicazione della statistica presenti nei libri di matematica, spesso vengono utilizzati metodi che gli alunni non sono in grado di padroneggiare (per assenza di strumenti formali) e che non sono adeguati alle situazioni: calcolare media e dispersione di più misure ottenute con uno strumento a bassa sensibilità, usare senza motivazioni teoriche la deviazione standard o formule per la propagazione degli errori, …

5. Dopo un confronto tra il tipo di problemi presentati nei quesiti precedenti e i problemi proposti in genere dai libri di testo (osservazioni: questi ultimi in genere sono *stereotipati* e privilegiano attività di *calcolo combinatorio* presentate in forme banali e meccaniche, così come accade per le attività algebriche ridotte al "calcolo delle espressioni", a scapito delle attività di modellizzazione e dello sviluppo della mentalità probabilistica), è stato affrontato un quesito che proponeva l'analisi critica di alcuni esercizi tratti da manuali scolastici, dei quali riportiamo solo i seguenti:

(*a*) L'evento «Le foglie del pioppo cadono in autunno» è *certo*, *impossibile* o *incerto*? [R.: certo]

(*b*) Calcola la probabilità dell'evento: «In una classe con 13 maschi e 21 femmine, viene chiamato, con una procedura del tutto casuale, un maschio»

Della proposizione presentata in (*a*) si può discutere la verità (e concludere che è "falsa": una foglia di pioppo può cadere anche in altre stagioni), ma non ha senso valutarne la probabilità: non è un "*evento*"!

Nel caso di (*b*), supposto che l'autore volesse discutere l'evento «In una classe con 13 maschi e 21 femmine, chiamando con una procedura del tutto casuale un alunno, questo è un maschio», c'è da osservare che se non si conosce il procedimento non si può concludere nulla (ad esempio con procedimenti casuali del tipo "chiamare lo studente che ha numero d'ordine sul registro pari al valore che si ottiene sommando le cifre del numero della pagina che capita aprendo un dato libro" è tanto più probabile che esca un maschio quanti più maschi hanno cognome iniziante con una lettera centrale). Il punto di partenza del calcolo delle probabilità è, proprio, la precisazione, nei vari contesti, di che cosa vuol dire "*a caso*"!

Come hanno sottolineato anche alcuni interventi di docenti con esperienze di insegnamento probabilistico, è invece importante dedicare cura e tempo a obiettivi quali: la formulazione chiara delle situazioni problematiche, la delimitazione di ciò che può essere oggetto di valutazioni probabilistiche, il superamento delle ambiguità linguistiche, la comprensione del significato contestuale dei connettivi, …

6. Gli ultimi quesiti proponevano un'analisi del tema "elementi di probabilità e statistica" dei programmi "Brocca" del biennio, ma ad essi si è potuto dedicare poco tempo. In particolare è stata discussa l'indicazione, presente nei programmi, di "avviare alle varie definizioni di probabilità" ed è stato esaminato come tale indicazione è stato realizzata in alcuni libri di testo.

In genere le osservazioni critiche sulle "*definizioni*" non assiomatiche che appaiono nei libri sono fuori luogo e, spesso, contengono grossolani errori. Il nocciolo della questione è, poi, che *non* siamo di fronte a "definizioni matematiche" in quanto sono tutte riferite a considerazioni extra-matematiche (anche se in alcuni casi - attraverso una matematizzazione del concetto di casualità o mediante una formalizzazione nell'ambito della teoria dei giochi o ... - potrebbero essere "trasformate" in definizioni matematiche). Considerarle definizioni invece che possibili approcci alla determinazione di alcuni valori di probabilità contribuisce a oscurare la comprensione sia della natura dei modelli matematici che del ruolo del calcolo delle probabilità.

Anche le introduzioni più formalizzate e le presentazioni assiomatiche presenti in vari libri di testo spesso sono mal formulate, in genere sono riferite solo al caso finito (tagliando fuori gran parte degli usi più comuni del calcolo delle probabilità, i collegamenti con la statistica, le simulazioni al computer mediante il generatore di distribuzioni uniformi, ...) e introducono alcuni concetti utilizzando alcune nozioni matematiche in modi contraddittori rispetto agli impieghi di esse in altre aree della matematica (si pensi alla presentazione della variabile casuale come variabile i cui valori non sono determinabili con certezza: ma una variabile casuale è una variabile? ma ciò che è casuale è la determinazione dei valori o il fenomeno? ...).

3. *Temi generali affrontati nella discussione*

Le discussioni proposte dai quesiti, e in particolare da quelli di cui al punto 6 del precedente paragrafo, hanno toccato problemi che trascendevano i singoli quesiti.

Alcuni hanno fatto delle critiche all'impostazione del gruppo di lavoro, osservando che i quesiti erano troppo difficili, e che ciò era negativo per diversi aspetti:
– molti partecipanti al lavoro di gruppo, come testimoniato dalla scarsa *partecipazione* di fronte ad alcune questioni, sarebbero rimasti un po' inibiti, e avrebbero tratto poco profitto da una presenza passiva al lavoro;

– il taglio eccessivamente problematico e critico avrebbe potuto *scoraggiare* gli insegnanti ad affrontare l'insegnamento della probabilità;
– le questioni proposte implicitamente suggerivano un'*impostazione* dell'insegnamento del calcolo delle probabilità troppo "*alta*", il che potrebbe essere controproducente: introdurre un tema nuovo rispetto alla tradizione scolastica ad un livello troppo elevato può essere causa di insuccessi e di successivi ripieghi verso forme di insegnamento più tradizionali che lo escludano nuovamente.

Altri, che prima erano rimasti silenziosi, hanno obiettato che i tempi di reazione delle persone sono diversi e hanno osservato che le problematiche sollevate (attenzione agli aspetti linguistici, importanza dell'interazione con gli interessi e i bisogni degli alunni, proporre usi culturalmente significativi dei concetti statistici e probabilistici, ...) erano per loro utili punti di riferimento per rivedere il proprio insegnamento o per affrontare più consapevolmente la prossima sperimentazione dei nuovi programmi: non sempre una partecipazione esteriormente attiva, la soddisfazione per avere affrontato positivamente e con divertimento alcuni quesiti, ... sono indici di un'attività di aggiornamento ben riuscita.

Noi, coordinatori, abbiamo concordato con alcune delle critiche sollevate, in particolare con la mancanza di adeguate tracce di lavoro che avrebbero dato una maggiore operatività all'incontro.

Abbiamo, invece, contestato che il livello delle questioni fosse troppo alto: sostanzialmente i problemi proposti sono quelli su cui ci siamo trovati a riflettere durante il nostro lavoro di progettazione, e ci sembrano nodi attraverso cui sia necessario passare per trovare dei percorsi didatticamente efficienti:
– insegnare un tema in modo "semplice" richiede una riflessione "profonda" sul tema stesso;
– escludere dall'insegnamento le situazioni "probabilistiche" che si presentano nella vita quotidiana ma non sono inquadrabili in schemi come "(n° casi favorevoli)/(n° casi possibili)" forse "semplifica" l'insegnamento, ma non anche la comprensione e l'apprendimento;
– trovare inadeguate le cosiddette definizioni non assiomatiche e difficile una introduzione assiomatica non vuol dire rinunciare all'introduzione del concetto di probabilità, ma delimitarlo e formalizzarlo gradualmente, ad esempio, attraverso un itinerario didattico in cui si costruiscano collegamen-

ti/differenziazioni tra aspetti statistici e aspetti probabilistici, si metta a fuoco il concetto di distribuzione, si distingua il modo in cui ci si convince o si fanno delle ipotesi sulla probabilità di qualche evento (con ragionamenti fisici, con esperienze, in base a valutazioni soggettive, ...) dal problema di come da queste valutazioni si possano dedurre valutazioni su altri eventi, ...

Altri aspetti generali "toccati "nella discussione sono stati:

– quello, noto, dei *libri di testo* (i libri di testo migliori sono i meno diffusi, di chi è la responsabilità? se e come controllare la qualità dei libri di testo? se non si affrontano questi problemi, a che servono questi convegni? ...),

– quello dei *nuovi programmi* (statistica e probabilità sono troppo separate; non sono esplicitati possibili collegamenti/"sinergie" con altri temi matematici che facciano percepire che il tema "probabilità e statistica" non è solo "cose in più"; se il biennio diventa l'ultimo segmento della scuola dell'obbligo i contenuti per esso previsti, attualmente monchi, devono essere profondamente rivisti; ...) e

– quello della preparazione degli insegnanti (la probabilità e la statistica spesso non sono presenti nella formazione universitaria degli insegnanti; nei corsi universitari a volte viene privilegiato un insegnamento astratto, con scarse applicazioni significative e riflessioni epistemologiche, ...).

---

* Ricercatore universitario presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova

** Docenti di Matematica in scuole secondarie superiori della provincia di Genova

ANALISI DEI CONTENUTI DI STATISTICA IN ALCUNI LIBRI DI TESTO DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI

Coordinatore

Maria Gabriella Ottaviani*

Devo lo spunto del tema di questo gruppo di lavoro alla richiesta insistente di informazioni sui libri di testo con contenuto statistico, da adottare nei loro corsi, da parte dei docenti della scuola media superiore, coi quali mi è capitato di venire in contatto.

La scelta del libro di testo è per il docente un momento di grande rilievo, poiché esso deve offrire una traccia che lo affianchi nello svolgimento della materia, una base sulla quale egli possa inserirsi con un proprio, autonomo, discorso, senza tuttavia creare dissonanze sgradevoli per gli alunni. che devono poi- soli col libro - riprendere gli argomenti trattati in classe.

Sapevo, d'altronde, da altre ricerche sulla didattica della statistica, che i docenti molto spesso decidono, per la statistica, di scrivere propri appunti e farli avere ai propri alunni, e ciò sia per mettersi al riparo da errori rinvenibili nei libri, sia per essere sicuri di padroneggiare gli argomenti che essi stessi propongono.

Scelto il tema conduttore del gruppo di lavoro, mi interessava anche lasciare ai docenti partecipanti una proposta su come introdurre la statistica, in modo che i concetti chiave: fenomeno collettivo, collettivo statistico, unità statistica, carattere, modalità, classificazione, distribuzione, si concatenassero fra loro, scaturendo naturalmente l'uno dall'altro, così da essere immediatamente comprensibili per gli studenti.

---

* Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università di Roma "La Sapienza".

Come studioso e ricercatore nell'ambito della didattica della statistica, infine, ero curiosa di vedere come la proposta a cui ero pervenuta analizzando alcuni libri di testo, cioè di assumere come primo, rapido, strumento di giudizio, la definizione di statistica introdotta dagli autori, trovasse rispondenza in un collettivo di docenti di matematica - in genere non cultori della materia - e se, in media, le mie e le loro conclusioni sulla "bontà" dei testi esaminati, tendessero "grosso modo" a coincidere.
Nulla meglio della relazione sull'attività del gruppo stesa, con garbo e rigore, da un partecipante al gruppo stesso, può servire a mostrare se gli obiettivi previsti sono stati conseguiti e se il materiale predisposto e il modo di porgerlo hanno raggiunto lo scopo.
Alla relazione della prof.ssa Maria C. Vitangeli il compito prezioso di fungere da controllo e verifica dei risultati ottenuti.

Il tema viene introdotto dalla prof.ssa Ottaviani, che illustra brevemente i contenuti di statistica nei programmi attuali e nel progetto Brocca, ed individua successivamente i nodi di difficoltà nell'insegnamento della statistica rispetto alla matematica.
Perché è difficile insegnare la statistica per un matematico? La matematica si può sviluppare in una maniera che astrae dal reale: il numero ha un significato in sé. In statistica i concetti astratti hanno senso solo se applicati alla realtà, inoltre il quesito che si pone allo statistico non ha, in generale, una risposta unica (si pensi ad esempio, alla possibilità di scegliere diversi valori medi per sintetizzare uno stesso fenomeno).
Viene poi presentata (dalla prof.ssa Ottaviani) una ricerca sui libri di testo, analizzati in relazione alla tipologia delle definizioni di statistica che in essi vengono date, e al genere di esercizi proposti.
Nel lavoro di gruppo viene affrontato il primo aspetto, anche allo scopo di confrontare i risultati della ricerca con quelli che emergeranno dalla discussione.
Vengono lette le definizioni di statistica, tratte dai libri di testo presi in considerazione; ciascuna definizione viene esaminata e discussa dal gruppo, con l'obiettivo di fornirne una graduatoria.
Dal dibattito emerge che le definizioni proposte, a parte qualche eccezione, sono confuse e imprecise, fanno riferimento a vecchie concezioni della statistica, ed usano termini specifici senza averli prima definiti.
La prof.ssa Ottavini fornisce quindi chiarimenti sulle parole-chiave che intervengono nell'introdurre la statistica a livello didattico (fenomeno collettivo, unità statistica e collettivo statistico, carattere e sue modalità, distribuzioni semplici e doppie).
Successivamente alla relazione, ciascun membro del gruppo attribuisce un voto alle definizioni esaminate, i dati vengono raccolti e ne viene calcolata la media per autore.
Il risultato della ricerca della prof.ssa Ottaviani, basata sulla presenza di alcune parole-chiave presenti nelle definizioni (ricercata con l'ausilio di un software applicativo), viene confrontato con la graduatoria emersa dal gruppo e, sostanzialmente, le conclusioni sono dello stesso tipo: in particolare i testi più recenti risultano più corretti e maggiormente comprensibili.
Viene illustrata poi la tabella delle percentuali dedicate da ciascun libro ai vari nuclei tematici. L'esame dei libri viene concluso con alcuni esempi di testi di esercizi in cui compaiono errori nella scelta dei dati in relazione al tipo di richiesta, e dai quali emerge una non conoscenza del significato di alcuni indici statistici.
Da queste constatazioni nasce un breve, ma interessante dibattito sulle motivazioni che sono alla base di questi errori e sulle difficoltà che in generale si incontrano nell'insegnamento della statistica.
Un docente rileva che la formazione universitaria degli attuali insegnanti è carente nel settore in oggetto, perché i curricola universitari non lo prevedevano, e chiede

che l'università sia maggiormente presente nell'aggiornamento.

La prof.ssa Ottaviani ricorda che l'Università di Roma è impegnata con un corso di perfezionamento indirizzato a giovani laureati, e che le risorse attuali non consentono molte altre iniziative.

Il prof. Villani osserva che, in realtà, gli errori nei libri di testo sono frequenti anche in altri campi (logica, geometria, etc.); inoltre fa presente che attualmente l'istituzione nella facoltà di matematica dei corsi semestrali consente la trattazione di discipline, come la statistica, che in passato non erano nei piani di studio.

Riguardo al tema del lavoro di gruppo, viene suggerito in conclusione dalla prof.ssa Ottaviani, che elementi fondamentali da considerare nell'analisi di un libro di testo sono la coerenza delle definizioni e la pertinenza e la correttezza degli esercizi proposti.

Maria C. Vitangeli

ITC "Lucio Lombardo Radice", Roma

Bibliografia

E. Aureli-M.G.Ottaviani, Insegnanti e testi: due aree di condizionamento per l'insegnamento della statistica nelle scuole secondarie, *Induzioni, Demografia, probabilità, statistica a scuola*, 4•1992.

E. Aureli-G. Diotallevi, I docenti e la statistica: il caso degli istituti tecnici commerciali, indirizzo amministrativo, di Roma, *Induzioni, Demografia, probabilità, statistica a scuola*, 4•1992.

M. G. Ottaviani, I libri di testo e la statistica: metodi di analisi e confronto di testi, *Induzioni. Demografia, Probabilità, statistica a scuola*, 6•1993.

Ai partecipanti al gruppo di lavoro sono stati forniti:

• le definizioni di "statistica" dei seguenti libri di testo:

Auci, *Calcolo delle probabilità, statistica, ricerca operativa*, volume unico, Paravia 1984, prima edizione.

Baraggia e Nava, *Elementi di probabilità e statistica*, volumi 1, 2, 3, Hoepli, 1986, seconda edizione.

Boggio e Borrello, *Statistica*, volumi 1, 2, 3, 1990, Petrini, prima edizione.

Cerasoli e Cerasoli, *Elementi di calcolo delle probabilità*, volumi 1 e 2 , 1988, Zanichelli, seconda edizione.

Conti e Lanzuolo, *Probabilità, statistica, ricerca operativa*, volumi 1, 2, 3, 1985, Loffredo, seconda edizione.

Fontani e Martucci, *Matematica, corso per ragionieri programmatori*, volumi 1, 2, 3, 1989, Mursia, seconda edizione.

Gambotto Manzone, *Probabilità e statistica*, volumi 1, 2, 1990, Tramontana, prima edizione.

Trovato e Mari, *Corso di matematica per ITC sperimentali*, volumi 1, 2, 3, 1990, Ghisetti Corvi, seconda edizione;

• una tabella con la media della percentuale delle pagine dedicate a ciascun nucleo tematico, di argomento statistico, dai volumi su menzionati, il massimo e il minimo assunto dalla variabile e i testi che li assumono;

• gli estratti di alcuni punti problematici rinvenuti nei volumi in esame, con riferimento all'illustrazione dei concetti che si riferiscono ai seguenti nuclei tematici: concetti introduttivi, caratteristiche delle distribuzioni semplici, rapporti e numeri indici, connessione e correlazione, ragionamento induttivo, teoria dei test statistici;

• esempi di esercizi errati.

In effetti si tratta di un metodo di analisi statistica per dei dati testuali, che utilizza le componenti principali e si avvale del programma SPAD.T.

MODELLI INTUITIVI DI REGRESSIONE LINEARE

Giovanni Olivieri

In generale i "futuri" nuovi programmi pongono il tema della regressione al terzo anno di corso, quando gli studenti sono ancora privi di strumenti per una trattazione del tema a livello di derivazione formale. Occorre quindi utilizzare tecniche e strumenti di elaborazione elementari, che introducano funzionalmente al concetto rimandando a tempi successivi il problema dell'approfondimento formale.
Il concetto generale di *regressione* è correlato a quello più classico di *dipendenza funzionale*. In entrambi i casi è infatti necessario modificare il punto di vista nell'approccio al concetto di funzione: data una tabella di dati, definire, se possibile, una legge di corrispondenza che esprima una delle due variabili in funzione dell'altra.

TABELLA DI DATI → LEGGE DI CORRISPONDENZA

Con riferimento a un altro tipo di terminologia si può anche parlare di *interpolazione* ***per*** *o* ***fra*** *punti*, cioè del processo di determinazione di una legge di corrispondenza, ovvero di una funzione matematica che coincida con la funzione statistica oppure che la approssimi in modo soddisfacente. Di seguito sono sinteticamente descritti alcuni metodi utilizzabili per costruire una retta di regressione. La linearità del fenomeno deve essere riconosciuta o ipotizzata per altra via, ad esempio mediante costruzione del diagramma a dispersione oppure per conoscenza diretta del fenomeno oggetto di indagine.

Modelli di riferimento per l'interpolazione lineare fra punti
Metodo dei punti fissi

E' necessario fissare due punti, rispetto ai quali determinare l'equazione della retta passante per essi. I due punti possono essere:
- un **punto noto**, a esempio quello corrispondente alla temperatura di fusione del ghiaccio o dell'inizio di un moto, e il **baricentro dei dati**;
- i **due baricentri** corrispondenti alle due sub-distribuzioni di "uguale" numerosità in cui può essere suddivisa una distribuzione (metodo di Wald).

Metodo della media o della mediana

Rispetto a **un punto fisso** si determina l'equazione della retta passante per quel punto e di **coefficiente angolare la mediana o la media** dei coefficienti angolari delle rette appartenenti alla fascia di confidenza, o di una loro selezione, costruite anch'esse a partire dal punto fisso.

Metodo delle somme

Si impone la condizione che la **somma dei valori teorici sia uguale alla somma dei valori osservati** per ognuna delle due sub-distribuzioni, di "uguale" numerosità, in cui può essere suddivisa una distribuzione. Per la determinazione delle somme parziali teoriche si utilizza il modello delle somme parziali di n termini di una progressione aritmetica:

Anno	*Ascissa di comodo*	*Valore teorico*	*Valore osservato*
1982	*0*	a	*24,6*
1983	*1*	$a + b$	*25,9*
1984	*2*	$a + 2b$	*27,1*
Somme parziali		$3a + 3b$	*77,6*
1985	*3*	$a + 3b$	*27,2*
1986	*4*	$a + 4b$	*28,2*
1987	*5*	$a + 5b$	*29,2*
Somme parziali		$3a + 12b$	*84,6*

Si ha perciò il seguente sistema, che, risolto, fornisce i valori del coefficiente angolare b e del termine noto a della retta di regressione:

$$\begin{cases} 3a + 3b = 77{,}6 \\ 3a + 12b = 84{,}6 \end{cases}$$

Metodo dei minimi quadrati

Se si effettua una **traslazione** del sistema di riferimento nel **baricentro dei dati**, la legge di dipendenza diventa del tipo $y = bx$. Applicando il **principio dei minimi quadrati** si ottiene la seguente funzione da minimizzare, nel solo parametro b: $F(b) = \sum (y_i - bx_i)^2$

Per utilizzare questo modello è necessario avere presente che il passaggio al baricentro dei dati sottintende un salto logico, intuitivamente giustificabile, e comunque trasparente per lo studente.

Indici relativi per la misura del grado di accostamento

- *Rapporto tra media aritmetica dei valori assoluti degli scarti e media aritmetica dei valori osservati:*

$$\alpha_s = \frac{\sum |yt_i - y_i| / N}{\sum y_i / N}$$

- *Rapporto tra media quadratica dei valori degli scarti e media aritmetica dei dati osservati:*

$$\alpha_q = \frac{\sqrt{\sum (yt_i - y_i)^2 / N}}{\sum y_i / N}$$

Riduzione all'intervallo (0;1) degli indici relativi:

$$r = \frac{100}{100 + \alpha}$$

PROPOSTA DI LAVORO

Si propone al gruppo di individuare un itinerario didattico, e possibilmente un insieme di situazioni-esempio, che sviluppi il concetto di regressione lineare utilizzando quanto brevemente descritto.

APPENDICE

Di seguito sono riportate alcune tabelle a cui eventualmente far riferimento per applicare i metodi introdotti.

1) Tabella del valore unitario della quota del fondo assicurativo *INA Valore attivo,* alle date indicate

Data	02/01/85	02/01/86	02/01/87	02/01/88	02/01/89	02/01/90	02/01/91	02/01/92
V. unit.	1416,3	1624,1	1878,6	1953,3	2118, 0	2323,0	2544,8	3121,5

2) Tabella della serie storica dei valori del Prodotto Interno Lordo (PIL) a valori correnti e dei consumi finali interni delle famiglie (valori in migliaia di lire)

Anno	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*
PIL	554.124	633.436	725.760	810.580	899.903	983.803	1.091.837	1.192.725	1.306.833
Consumi	9.625	11.145	12.732	14.186	15.720	17.156	19.004	20.728	22.663

3) Tabella delle misure della pressione P di un gas alle temperature indicate, a volume costante.

P (mm mercurio)	79	82	85	88	90	94	96
T (gradi Celsius)	8	17	30	37	52	64	71

4) Tabella del prodotto interno lordo (PIL, in migliaia di lire) e delle densità telefoniche d_1 e d_2 relative rispettivamente ai collegamenti, ovvero agli abbonati, e agli apparecchi in servizio rispetto al numero totale di abitanti.

Anno	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*
PIL	*464*	*545*	*633*	*726*	*811*	*900*	*984*	*1.092*	*1.193*	*1.307*
d_1	*24,6*	*25,9*	*27,5*	*28,9*	*30,4*	*31,9*	*33,3*	*34,9*	*36,9*	*38,7*
d_2	*36,4*	*38,2*	*40,5*	*42,6*	*44,4*	*47,0*	*48,9*	*50,9*	*53,3*	*55,5*

Altre situazioni dalle quali trarre tabelle di dati esatti o non esatti:

- numero di pedalate e giri della ruota di una bicicletta
- numero di giri due ruote dentate che si muovono a incastro
- capienza di uno stadio e numero di posti auto per i parcheggi
- peso e volume di oggetti di una stessa sostanza

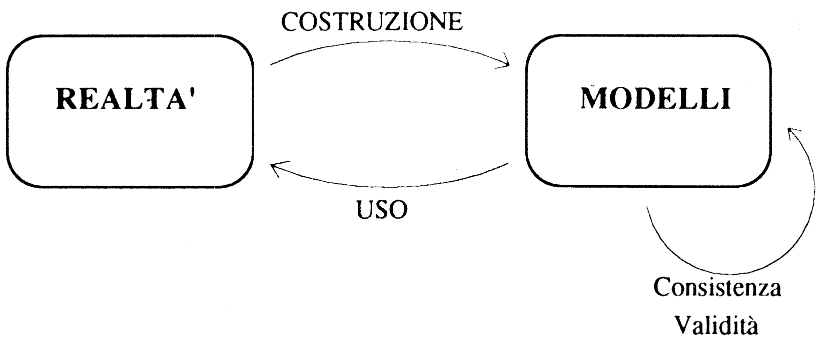
- consumo di energia elettrica e importo totale della fattura
- tempo e spazio percorso da un'automobile a velocità costante
- quantità di merce acquistata e costo totale, comprensivo o meno del trasporto
- produzione di energia elettrica e produzione industriale
- tempo e valore unitario di quote di fondi assicurativi
- capitale chiesto in prestito e rata di ammortamento (su uno stesso periodo di tempo)
- consumo di carburante e spazio percorso da un'automobile

SINTESI DEI LAVORI DI GRUPPO

Dopo una breve introduzione al tema, i lavori hanno inizio con una lettura individuale del materiale distribuito. Dalla successiva discussione emerge il fatto che alcuni docenti non hanno avuto esperienze o necessità di utilizzare la regressione nel proprio lavoro; per altri docenti il tema è parte del programma di matematica e viene introdotto in modo "classico", ovvero mediante il metodo dei minimi quadrati. I docenti che insegnano anche fisica utilizzano la regressione come strumento per la verifica di leggi; il metodo utilizzato è soprattutto quello cosiddetto della mediana.
Nel corso della discussione vengono riportati esempi di utilizzo della regressione per la "scoperta" di leggi, non solo fisiche, e vengono illustrate le potenzialità di un simile strumento per un'insegnamento basato sull'analisi di fenomeni reali, o pseudo-reali, in quanto in parte già semplificati dall'insegnante.
Non tutti i docenti del gruppo condividono un approccio così spregiudicato, in quanto questo tipo di processo si colloca al di fuori di una "teoria organizzata".
Dopo questo iniziale dibattito, il gruppo si suddivide in tre sottogruppi, ciascuno dei quali approfondisce un particolare aspetto del problema.
Il primo dei tre sottogruppi è formato in prevalenza da docenti che avevano poca o nessuna conoscenza sulla regressione. Viene perciò impostato un lavoro prevalentemente pratico: si costruiscono, per uno stesso fenomeno, le rette di regressione secondo i metodi suggeriti, analizzando via via

vantaggi e limiti per ciascuno di essi.
Nel corso del lavoro vengono con precisione definiti alcuni concetti, ad esempio quello di fascia di confidenza, e "scoperte" alcune proprietà, ad esempio quella relativa al passaggio per il baricentro dei dati della retta determinata con il metodo delle somme.
Il secondo sottogruppo è composto da docenti che in parte hanno già utilizzato la regressione per un'analisi sperimentale di problemi. Il lavoro è perciò impostato puntando soprattutto sullo scambio di esperienze e sulla discussione di una loro trasferibilità in altre situazioni e altri contesti.
Nel corso della discussione viene messo in evidenza l'aumento di motivazione che produce negli studenti un approccio che rende "trattabili" problemi presi dalla realtà. L'approfondimento delle problematiche connesse rende inoltre più sicura la manipolazione algebrica di formule e maggiore la padronanza dei contenuti coinvolti.
Il terzo sottogruppo è formato da docenti che in prevalenza hanno la regressione nei propri programmi di insegnamento della matematica e che perciò ne fanno oggetto di esclusivo insegnamento "formale". Il dibattito all'interno del sottogruppo verte allora sulla validità formativa di introdurre un simile concetto senza adeguata trattazione teorica. Il dubbio che viene espresso è infatti quello che in questo modo si possono dare agli studenti concetti "sbagliati", non più ricuperabili nella loro correttezza formale.
Le posizioni all'interno del gruppo sono diversificate e ci si pone comunque il problema di come conciliare un "uso strumentale" di molti concetti matematici, utilizzati nell'analisi sperimentale della realtà, con la loro collocazione all'interno di una teoria organizzata.
Durante il dibattito finale, dopo che ciascuno dei sottogruppi ha riportato la sintesi dei propri lavori, viene comunque fatto rilevare che i metodi riportati nelle pagine introduttive sono riportati in testi di statistica e di introduzione all'attività di laboratorio, anche a livello universitario e che perciò non sono da considerare "meno formali" del metodo dei minimi quadrati. In ogni caso, chi insegna scienze sperimentali, o "anche" scienze sperimentali, fa spesso uso intuitivo di concetti matematici non ancora formalmente definiti e l'esperienza insegna che un uso corretto di tali strumenti non pregiudica successivi approfondimenti su di un piano prettamente matematico.
La discussione si sposta sul più generale livello dell'interazione tra matema-

tica e scienze sperimentali. Le posizioni che emergono sono relative all'eterno dilemma sulla matematica intesa come disciplina di supporto oppure come disciplina che ha una sua totale autonomia. Viene rilevato come oggi non ci si può ancora appiattire su una simile diatriba, evidenziando invece la necessità di avere una posizione intermedia riguardo a tale problema, tenendo anche presente che l'insegnamento della matematica può e deve essere utilizzato anche per effettuare analisi di fenomeni a partire da situazioni "reali", integrando il processo didattico che, nella maggioranza dei casi, prevede oggi il solo passaggio dai modelli alla realtà, cioè la prevalente applicazione di formule preventivamente studiate.
Rispetto un possibile itinerario didattico, già nei sottogruppi era stata evidenziata la possibilità di introdurre preliminarmente il concetto di dipendenza funzionale a partire dall'analisi di dati esatti, legati tra di loro da proporzionalità diretta e, successivamente, da più generali leggi di dipendenza lineare.



La discussione termina con l'analisi dello schema, rispetto al quale viene evidenziato l'aspetto costruttivo dei modelli di regressione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

F. Giusti, Introduzione alla statistica, Loescher editore, Torino, 1983
G. Olivieri, Introduzione all'elaborazione statistica dei dati, Pàtron editore, Bologna, 1989
J.R. Taylor, Introduzione all'analisi degli errori, Zanichelli, Bologna, 1986

COMUNICAZIONI

CALCOLO DELLE PROBABILITA' E SIMULAZIONE: IPOTESI PER UNA ELABORAZIONE IPERTESTUALE

Franco Di Cataldo
IRRSAE del Veneto

1. DUE PAROLE SU CHE COS'E' UN IPERTESTO

Un ipertesto si può identificare con un'organizzazione delle conoscenze di tipo associativo che privilegia l'attuazione di percorsi cognitivi autonomi nella rete delle connessioni (links) che si articolano tra i concetti di base del sapere (nodi).
La rappresentazione spaziale (browser) di riferimento nella navigazione ipertestuale diviene la bussola di orientamento nello sviluppo della conoscenza che abbandona, o segue solo parzialmente, la modalitÀ dià preadimento di tipo sequenziale, narrativo, per sviluppare aggregazioni concettuali collocate in un riferimento organico, caratterizzato da una precisa rappresentazione mappale di un sapere.
Le pagine dell'ipertesto sono schede di testo, immagini, grafici, simulazioni, prove di verifica, non legate da un ordinamento sequenziale, ma da un insieme di rinvii ("pulsanti").
L'attivazione di un pulsante consente di lanciare una funzione di transizione che conduce ad una scheda bersaglio o al collegamento con altri progammi applicativi.

2. CARATTERISTICHE PRINCIPALI DELL'IPERTESTO SULLA PROBABILITA'(1)

In figura 1 è riportata la griglia concettuale e i possibili percorsi di lettura che caratterizzano l'ipertesto sull'introduzione del calcolo delle probabilità.

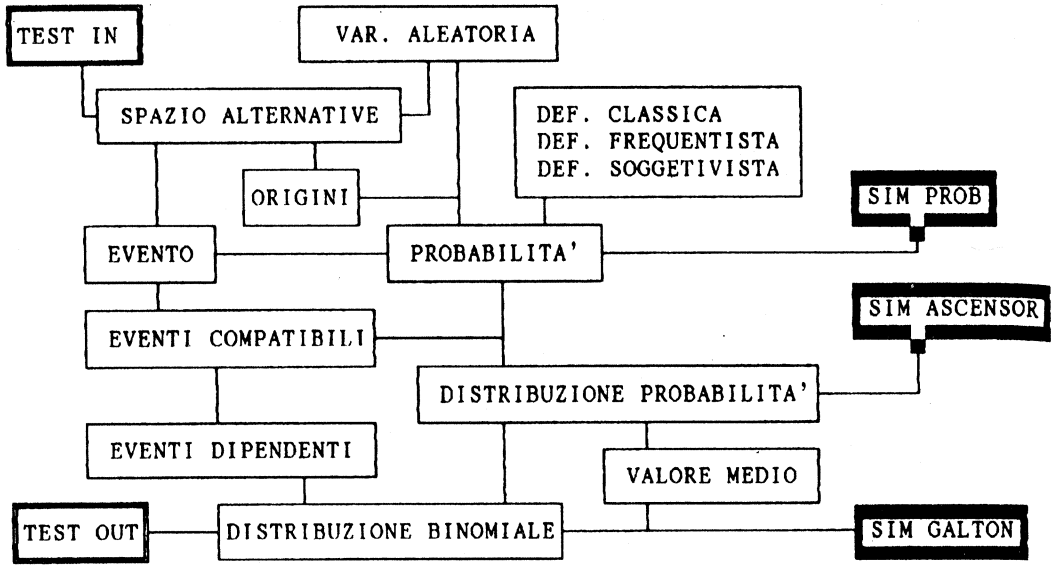


fig.1

Ciascun riquadro contiene un pulsante che conduce a diverse situazioni:

- TEST (IN/OUT) rinviano a possibili verifiche in ingresso e in uscita. Implementati con QMARK consentono una sorta di autoverifica dei livelli di conoscenza dell'argomento prima e dopo l'attività;
- SIM (PROB/ASCENSOR/GALTON) consentono di entrare in ambienti di simulazione per l'approfondimento di particolari aspetti concettuali e per un approccio a situazioni aleatorie significative;
- tutti gli altri pulsanti rinviano a schede di testo relative ai concetti di base della teoria attraverso esempi problemi e definizioni.

In questa fase è stato scelto quale ambiente di sviluppo ipertestuale Hyperidea (ver.1) che consente una facile

implementazione e un'ampia possibile fruizione mediante qualsiasi PC [IBM compatibile] con scheda grafica VGA, in ambiente MS-DOS.

3.SCELTE METODOLOGICHE

Nelle analisi di tipo combinatorio sono stati privilegiati procedimenti ed attività euristiche di ricerca che puntano a rappresentare e ad organizzare tutte le possibili situazioni che intervengono nelle valutazioni di incertezza piuttosto che a meccaniche applicazioni di formule. Si fa quindi riferimento a rappresentazioni grafiche di vario genere che consentano facili generalizzazioni per ottenere prime formulazioni in forma sintetica.

E' stata attribuita particolare rilevanza alla determinazione di valori medi (speranza matematica, gioco equo, ecc.) che viene sviluppato privilengiando una metodologia "per problemi". In particolare viene affrontato un problema di attesa media di un ascensore stabilendo una stretta correlazione con alcuni problemi che stanno all'origine del calcolo delle probabilità. L'analisi e la soluzione sono supportate da una specifica simulazione volta ad esplicitare alcuni passaggi fondamentali relativi all'introduzione del concetto di variabile aleatoria e alla relativa distribuzione di probabilità.

La simulazione viene integrata in modo organico all'interno dell'ipertesto accompagnando possibili risoluzioni di problemi (ASCENSOR) o particolari percorsi didattici (GALTON). In questo quadro la simulazione viene utilizzata come laboratorio di verifica sperimentale di fatti per i quali si sono ottenuti specifici risultati teorici.

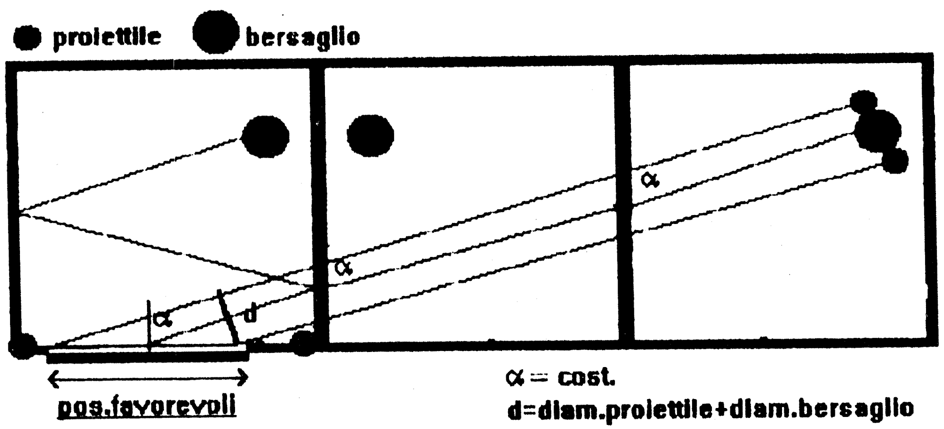
Diversamente il pulsante "PROB" attiva un laboratorio virtuale che può divenire un ambiente per l'ideazione di situazioni "sperimentali" nelle quali le valutazioni di probabilità, nei casi pió semplici, possono essere ancora di tipo classico e possono essere analizzate mediante stringhe logiche che ne danno possibili caratterizzazioni analitiche in modo formale.

In un campo quadrato bidimensionale (100*100 pixels) si collocano

'biglie' bersaglio di vario tipo; dal lato inferiore (cfr. fig.2) entrano nel campo, con posizione casuale e angolo α, costante o casuale a scelta dell'utente, 'biglie' proiettile che, attraversando il piano, possono realizzare la sovrapposizione (parziale o non) dei bersagli e con i proiettili. Questi escono sul lato superiore, essendo riflettenti le pareti laterali.
Se l'angolo d'ingresso α dei proiettili è costante, detti Dp e Db rispettivamente i diametri del proiettile e del bersaglio, si avrà che la probabilità di sovrapposizione sarà data dalla relazione

$$p=[(Dp+Db)/\cos\alpha]/(100-Dp) \quad (*)$$

che esprime il rapporto tra il numero delle posizioni del centro del proiettile favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero di quelle possibili. Tale relazione sussiste anche per angoli α per i quali si verifica la riflessione sulle pareti laterali. Le traiettorie infatti si possono linearizzare mediante una opportuna successione di simmetrie trasversali, come indicato in figura 2:

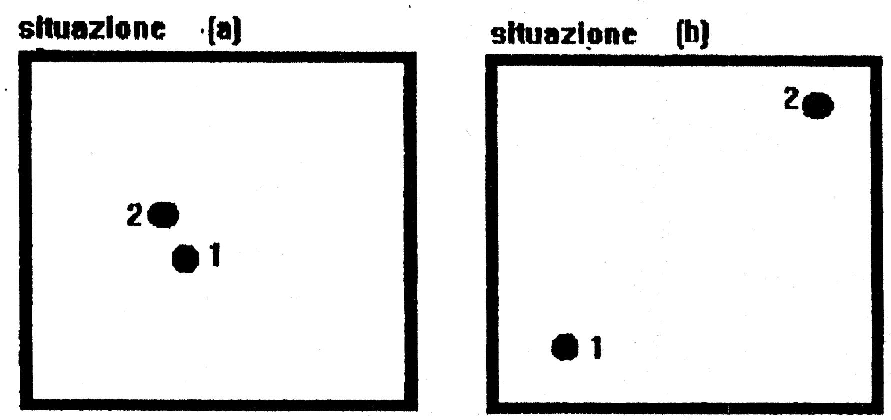


Nel caso in cui α sia un angolo random compreso tra 0 e l'angolo massimo programmato (α), la probabilità p sarà data dal valore medio della funzione (*), integrabile nella variable α da 0 a α ,

espresso dalla relazione

$$p = \{[(Dp+Db)/[\alpha \quad (100-Dp)]\} \; 1/2 \; \ln[(1+\sin\alpha \;)/(1-\sin\alpha \;)].$$

Dal punto di vista didattico l'attività di laboratorio può essere svolta a diversi livelli e con diverse modalità. Partendo dalle situazioni pió semplici (α=0) per passare via via a situazioni pió complesse (α=costante = 0 fino ad α = RANDOM) nel corso del quinquennio della scuola secondaria superiore.
Tuttavia fin dall'inizio sarà opportuno sviluppare un significativo approccio di studio, considerando pió eventi e le loro reciproche interrelazioni. L'analisi della loro compatibilità o dipendenza indurrà ad una serie di considerazioni di natura sperimentale nelle quali sarà l'"esperienza" a dire fino a che punto, ad esempio, l'urto con un bersaglio determina anche quello con un altro. La situazione fisico-geometrica andrà studiata in termini probabilistici in considerazione dei valori ricavati sperimentalmente, come in figura 3:



diametro (1) =diametro (2) = diametro (proiettile) = 2 pixels
α (angolo ing. proiettile) = RANDOM
risultati sperimentali dopo 10000 lanci:
a) p(1) = 0.057 p(2)=0.056 p(1 e 2)=0.009
b) p(1)=0.055=p(2) p(1 e 2)=0.003

Ciò favorirà un atteggiamento pragmatico nello stimare in termini frequentisti la probabilità del verificarsi di singoli eventi o di eventi composti, con l'assunzione implicita della legge empirica del caso.
Le situazioni aleatorie, non sempre immediatamente riconducibili ad analisi di tipo classico, forniranno ambienti di ricerca stimolanti per un primo significativo approccio alla metodologia di attribuzione di probabilità in condizioni di incertezza.
E questa ritengo sia una finalità prioritaria nell'introduzione al pensiero probabilistico.

NOTE
(1) Si fa qui riferimento ad un primo tentativo di sintesi e sistemazione dei materiali elaborati da un gruppo di docenti di matematica di scuola secondaria superiore [Laboratorio IRRSAE di Vicenza] che, con la consulenza scientifica del prof. P. Malesani (Università di Padova), hanno affrontato i problemi nodali dell'introduzione del calcolo delle probabilità nel loro insegnamento, sviluppando riflessioni su particolari contenuti tematici e ipotesi su possibili percorsi didattici.
I materiali (software e cartacei) sono disponibili presso l'IRRSAE del Veneto, via Leopardi 19, (30171) Venezia-Mestre.

INTRODUZIONE ALLA PROBABILITA' IN UNA V GINNASIO

MARIA BATINI*

Questo lavoro, che è stato proposto in una V ginnasiale, nasce dall'esigenza che negli studenti non si formi o si consolidi una visione della matematica legata esclusivamente a fenomeni interpretabili in modo deterministico. Esso tende perciò a fornire quegli elementi e a sviluppare quelle capacità operative e concettuali ritenute necessarie e sufficienti a comprendere il legame tra teoria della probabilità e fenomeni reali.

La metodologia usata è quella per problemi; si sono utilizzate schede contenenti esempi ed esercizi, taluni guidati, altri da sviluppare individualmente. Alcune situazioni problematiche introducono i nuovi concetti o offrono lo spunto per risolvere problemi in classe interagendo con l'insegnante o lavorando in gruppi.

Il primo gruppo di schede è rivolto alla differenziazione fra modelli deterministici e non: si introducono da subito le variabili casuali, come variabili per le quali non possiamo stabilire a priori quale valore assumeranno. Si analizzano quindi una serie di fenomeni aleatori, fenomeni il cui risultato è incerto, mettendo ben in evidenza che aleatorio non vuol dire indeterminato, ma piuttosto non conosciuto allo stato attuale della nostra informazione, l'incertezza essendo dovuta ad uno stato incompleto delle informazioni sul fenomeno stesso; quando il risultato è incerto si può perciò solo descrivere l'insieme dei risultati possibili (spazio degli eventi). La serie di esercizi rivolta alla costruzione dello spazio degli eventi in alcuni fenomeni aleatori e al riconoscimento degli eventi elementari e degli eventi composti è stata occasione per utilizzare i diagrammi di Venn e le operazioni insiemistiche e logiche che erano state introdotte in IV ginnasio.

Alcune situazioni problematiche (ad es. un assicuratore che vuole determinare il premio da richiedere per assicurare il carico di una nave prima di una traversata) suggeriscono come in condizioni di incertezza talora sia

necessario valutare la plausibilità del verificarsi di ciascuno degli eventi possibili; alla valutazione di tale plausibilità viene dato il nome di probabilità. Mentre in logica ad ogni evento si attribuiva il valore vero o falso, ovvero un valore preso nell'insieme 0,1 , nel contesto di eventi aleatori si attribuisce invece ad ogni evento un numero reale preso nell'intervallo [0,1], che misura l'attendibilità dell'evento stesso, ovvero $0 \leq p(A) \leq 1$.
Per quanto riguarda i metodi di valutazione della probabilità, si fa riferimento ai seguenti tre esempi:

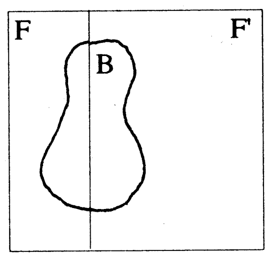
- siamo in un ippodromo e assistiamo ad una corsa di 6 cavalli; qual è la probabilità che vinca il cavallo A?

- lancio di un dado non truccato: qual è la probabilità che esca il numero 5?

- lancio di una moneta truccata: qual è la probabilità che esca croce?

Nel primo caso la soluzione dipende dal nostro grado di conoscenza e di valutazione del fenomeno (cavalli, fantini, fondo della pista,...); si dirà che il fenomeno ha probabilità **a/n** di verificarsi se stimo equa una scommessa in cui si paga **a** per ottenere **n** in caso di vincita. Nel secondo caso, trattandosi di un dado non truccato, le facce del dado sono simmetriche e quindi ognuna di loro esce con probabilità 1/6. Nel terzo caso, essendo la moneta truccata, non possiamo calcolare la probabilità; quello che possiamo fare, dopo una numerosa serie di lanci, è invece una valutazione di essa. Si tratta chiaramente dei tre metodi di valutazione della probabilità: soggettiva, matematica, frequentistica.

Partendo dall'esempio della diffusione delle malattie coronarie per i fumatori e i non fumatori, viene introdotta, a livello molto intuitivo, la probabilità condizionata: del resto in tutta la trattazione si fa molto uso dell'intuizione per introdurre nuovi concetti.
Il problema proposto è il seguente. In una popolazione di 100000 adulti, 32700 sono affetti da una una malattia B, di essi 15000 sono fumatori; sapendo che il 30% della popolazione fuma, vogliamo valutare la probabilità di contrarre la malattia per un fumatore, un non fumatore, un soggetto qualsiasi.



$p(B)=32700/100000=0,0327$
$p(F/B)=15000/(100000*0,30)=0,05$
$p(F'/B)=17000/(100000*0,7)=0,0253$
Sono poi suggeriti altri esempi presi dalle tavole di sopravvivenza, facendo quindi osservare che probabilità condizionata è la probabilità che si ottiene dopo una ulteriore informazione.

Dall'analisi degli esempi e dalla lettura dei diagrammi di Venn, si arriva a scrivere $p(A/B)=p(A \cap B)/p(B)$.
Si definiscono quindi gli eventi indipendenti, coppie di eventi A e B per i quali la probabilità del verificarsi di A non viene influenzata dal verificarsi di B, ovvero $p(A/B)=p(A)$. Sostituendo nella relazione relativa alla probabilità condizionata, si ha $p(A \cap B)=p(A)*p(B)$.

Questa è la condizione di indipendenza, che è una condizione simmetrica. A questo punto è stato opportuno sia insistere sul fatto che eventi disgiunti ed eventi indipendenti sono due situazioni diverse, sia far vedere attraverso esercizi che la condizione di indipendenza non è sempre intuitiva. Per esempio, lanciamo tre volte una moneta e consideriamo i sottoinsiemi A (T è uscito al primo lancio), B (T è uscito al secondo lancio), C (T si presenta 2 volte e solo 2 volte e consecutivamente): applicando la formula relativa agli eventi indipendenti, possiamo controllare se gli eventi A e B, A e C, B e C sono indipendenti. La verifica porta alla conclusione che, mentre gli eventi A e B, A e C sono indipendenti, non lo sono B e C.

Sono stati proposti molti esercizi da sviluppare facendo uso di questi concetti, dei diagrammi ad albero e dei cammini di Pascal. Ne illustrerò alcuni che mi sono sembrati più significativi da un punto di vista didattico.

1- Estraggo due palline da un'urna che ne contiene 6 rosse e 4 blu, rimettendo dentro la prima estratta dopo l'estrazione. Come è composto lo spazio degli eventi? Con quale probabilità si presenta ogni evento?
Dopo aver risolto l'esercizio utilizzando i diagrammi ad albero e la probabilità condizionata, ho fatto fare ad ognuno dei 25 allievi 10 prove a casa; in classe abbiamo poi confrontato il calcolo teorico con il risultato frequentistico; gli allievi sono rimasti sconcertati dalla concordanza dei due risultati. Mi è sembrato un buon e semplice esempio per introdurre la legge dei grandi numeri.

2- Si deve assumere una segretaria, che deve essere scelta fra n persone non conosciute, che vengono esaminate e quindi accettate o rifiutate, una dopo l'altra; quando una di esse è stata rifiutata non può più presentarsi. Come si può scegliere la migliore?
Con n=3 si suggerisce una strategia: si scarti la prima, si scelga la seconda se migliore della prima, altrimenti la terza.
Si costruisce la tabella relativa all'ordine di presentazione, che non è altro che l'insieme delle permutazioni dei tre elementi, e in base alla strategia si opera la scelta. Si ha che, indicata con A la segretaria migliore e con C la peggiore, $p(A)=1/2$, $p(B)=1/3$, $p(C)=1/6$; si nota quindi come questa strategia sia in grado di massimizzare la scelta migliore e minimizzare la peggiore.
Con n=4 esaminiamo più strategie

3(se migliore delle precedenti)——— 4

1 ——— 2 (se migliore della prima)

3(se migliore di almeno una)——— 4

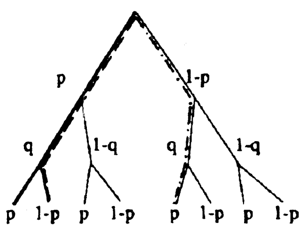
3 (se migliore delle precedenti)——— 4

1 —— 2 ———

3 (se migliore di almeno una precedente)——— 4

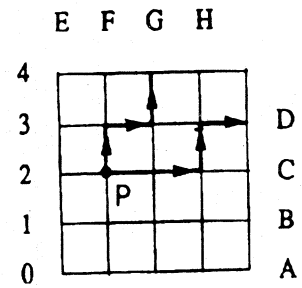
Gli alunni devono trovare le 24 permutazioni e poi analizzarle per le diverse strategie.
A questo punto è stato interessante simulare quanto sopra con Lotus123, la rappresentazione grafica dei risultati ha permesso di confrontarli e di operare una scelta fra le varie strategie in base al tipo di scelta che si voleva fare: avere la maggiore probabilità di scegliere la migliore o la minore probabilità di scegliere la peggiore. Si sono poi ritrovati gli stessi risultati usando un procedimento teorico.
Per esempio, consideriamo la strategia, "si scartano le prime due, si sceglie la terza se migliore delle prime due, altrimenti la quarta". Si sceglie quindi la migliore (A) se sta al 3° o 4° posto: in entrambi i casi p = 1/4. Se sta al 3° posto viene sicuramente scelta, se sta al 4° viene scelta solo se B, la migliore dopo A, sta al 1° o al 2° posto, il che avviene con p=2/3. Si ha quindi p(A)=1/4*1+1/4*2/3=0,41...

3- Le regole di un torneo di scacchi sono: per qualificarsi un giocatore deve vincere due partite consecutive su tre; ad un aspirante vengono contrapposti due avversari (A e B), con cui deve giocare alternativamente, con A più forte di B; può scegliere fra il programma ABA o BAB. Quale gli conviene scegliere?
Sia p la probabilità di vincita contro A e q contro B, con p<q.
Programma ABA
p(ABA)=p*q*p+p*q*(1-p)+(1-p)*q*p=p*q*(2-p)
Programma BAB
Possiamo ottenere il risultato semplicemente scambiando A con B e p con q.
p(BAB)=q*p*(2-q)
Confrontare i due risultati significa confrontare -p con -q; poichè p<q si ha che



-p<-q ed perciò preferibile il programma ABA,
risultato assolutamente non previsto dai miei allievi.
L'esercizio mi ha inoltre permesso di introdurre le disequazioni che non avevo ancora avuto occasione di presentare.

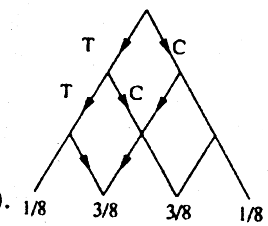
4 -Problema che il Cavaliere Di Merè propose a Pascal nel 1654
Fra due giocatori di pari abilità vince chi per primo vince 4 partite; prima di concludere il gioco decidono di non proseguire e di dividersi la posta nel modo più equo. Supponiamo che a quel momento il primo giocatore abbia vinto una partita ed il secondo due e la posta sia di 64 scudi. Come deve essere ripartita?
Bisogna calcolare i cammini che portano il primo giocatore in F, G, H ed il secondo in D e C. Si ha
p(F)=1/2*1/2=1/4
p(G)=2*1/2*1/2*1/2=1/4
p(H)=3*1/2*1/2*1/2*1/2=3/16
p(1° gioc.)=1/4+1/4+3/16=11/16
p(C)1/2*1/2*1/2=1/8; p(D)=3*1/2*1/2*1/2=3/16;
p(2° gioc.)=1/8+3/16=5/16
1°gioc. 64*11/16=44 scudi;
2°gioc. 64*5/16=20 scudi



Calcolo dei coefficienti binomiali

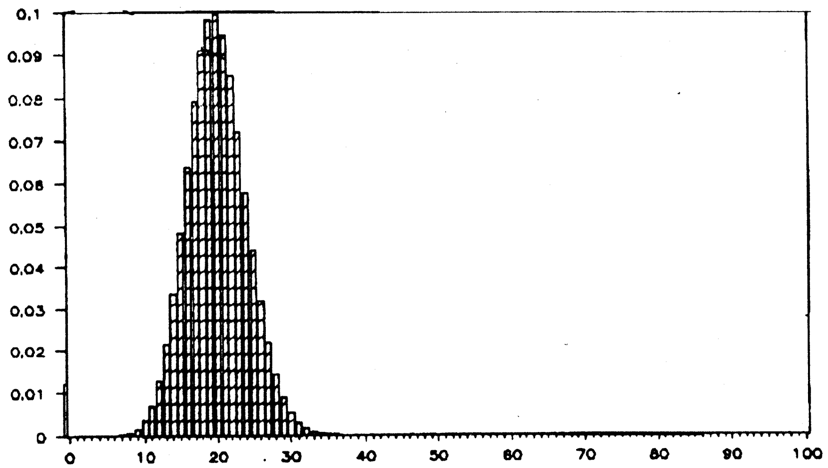
Si suppone di lanciare 1,2,3,..,n volte una moneta. Si tracci il grafo che si ottiene unendo i vertici che hanno lo stesso numero di T e C, anche se in ordine diverso, facendo notare che i cammini che arrivano a ciascun vertice sono in numero uguale alla somma di quelli che arrivano ai due vertici sovrastanti.

I cammini che portano perciò al vertice k-esimo della n-esima riga sono tante quante le combinazioni di n elementi a k a k (questo tipo di calcolo era stato già fatto in IV per calcolare lo sviluppo della potenza di un binomio con riferimento proprio a questo esempio).



La probabilità di avere k T e (n-k) C è pertanto, per una moneta simmetrica, $p=C_{n,k}(1/2)^n$ e per una moneta non simmetrica $p=C_{n,k}\, p^k q^{n-k}$.
E' stato quindi analizzato, insieme alla classe, un esempio di applicazione della legge di distribuzione binomiale: una sonda spaziale manda un segnale (.-) secondo l'alfabeto Morse. La probabilità di errore nella ricezione è 0,2.

Il segnale viene inviato 5 volte e si decide a maggioranza. Qual'è la probabilità di errore?
Se indichiamo con T interpretazione corretta (p=0,8) e con C interpretazione errata (p=0,2), l'evento interpretazione errata a maggioranza è l'unione dei seguenti eventi: 5 volte C, 4 volte C e 1 volta T, 3 volte C e 2 volte T. La probabilità di errore su 5 prove è perciò $p=1*(0,2)^5+5*(0,2)^4*(0,8)+10*(0,2)^3*(0,8)^2=0,0579$
Anche nel caso di una distribuzione binomiale un semplice programma in Lotus123 ha permesso di calcolare le varie probabilità con un numero di prove n=5, 10, 20, 100 e di fare la rappresentazione grafica dei risultati. Si è potuto così osservare che con n=100 si ha già la forma di una gaussiana.



BIBLIOGRAFIA
- G.Coletti-F.Menconi-M.A.Pannone- L'insegnamento della probabilità e della statistica nella scuola media inferiore: una proposta di aggiornamento-Progetto startegico del CNR-Tecologie e innovazioni didattiche -Quaderno N°11-1990
- P.Dupont-Storia e didattica della 'probabilità- Ed. Cisd -collana CIDI
- E.Parzen-La moderna teoria della probabilità e le sue applicazioni-Collana di mat. e statistica-F. Angeli Ed.
- Guida al progetto d'insegnamento della matematica nelle Scuole secondarie Superiori, proposto da G.Prodi- Esperienze di ricerca didattica a cura dell'UMI- Cas Ed. D'anna
- AA.VV.Tre proposte didattiche per l'insegnamento di statistica e probabilità con l'utilizzo del computer-Progetto strategico del CNR- quaderno N° 5-1990

*Docente di matematica e fisica presso il Liceo Classico "Orazio"-Roma; fa parte del nucleo di ricerca operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma "la Sapienza", contratto CNR-Università per la Sperimentazione nella Scuola Secondaria Superiore.

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON

Paolo Negrini e Maria Ragagni
N. R.D. Bologna

Sia X una variabile aleatoria discreta, che può assumere i valori interi non negativi: 0, 1, 2,...; sia μ un numero reale positivo. Si dice che la distribuzione di probabilità di X è *di Poisson* con parametro μ se, per ogni $k \in N$, risulta:

(1) $$P\,(X = k) = \frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}$$

Le applicazioni della distribuzione di Poisson sono numerose; qui ci occuperemo del suo uso per approssimare, in determinati casi, la *distribuzione binomiale* (di Bernoulli).

Ricordiamo brevemente la definizione della distribuzione binomiale. Una "prova" E viene ripetuta per n volte; ogni volta si ha probabilità p di "successo", $(1-p)$ di "fallimento". Il **numero Y di successi conseguiti nelle n ripetizioni della prova** è una variabile aleatoria, che può assumere i valori interi 0, 1, 2,..., n. La distribuzione di probabilità di Y si chiama *distribuzione binomiale*; come è noto, essa è:

(2) $$P\,(Y = k) = \binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Se il valore di n è piuttosto grande, l'applicazione di (2) è piuttosto scomoda, a causa dei numeri grandissimi che intervengono nel calcolo di

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

per questo motivo è utile procurarsi formule approssimate per la valutazione di $P(Y=k)$.

Supponiamo che la probabilità p di conseguire il "successo" nella prova E sia molto vicina a zero; si potrà allora ritenere il "successo" un "evento raro". Fissiamo un valore piuttosto grande per n (numero di ripetizioni previste della prova E), ed un valore abbastanza piccolo di k (numero sperato di successi in n ripetizioni di E).

Mostriamo che, in queste ipotesi, posto $\mu = np$ (da cui $p = \mu/n$), il valore fornito da (1) è una buona approssimazione di quello dato da (2). Risulta infatti:

$$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k}\cdot\frac{\mu^k}{n^k}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}.$$

Le scelte fatte comportano che k e μ siano molto più piccoli di n; dunque il prodotto

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}$$

è prossimo a 1; si avrà pertanto:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \equiv \frac{\mu^k}{k!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$$

Inoltre, come è noto, $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$;

per valori di n sufficientemente grandi, il numero $e^{-\mu}$ sarà dunque una buona approssimazione di $(1-\mu/n)^n$; in definitiva avremo:

(3) $$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \equiv \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

con $\mu = np$, purché si abbia, come abbiamo detto, p piccolo, n grande, k

piccolo rispetto a n. A causa di questa sua applicazione per l'approssimazione della distribuzione binomiale nel caso di bassa probabilità di successo, la distribuzione di Poisson viene chiamata a volte *legge degli eventi rari.*

Le approssimazioni compiute per giungere alla (3) possono sembrare piuttosto grossolane; invece, i risultati forniti da (3) sono assai buoni. Vi sono alcuni esempi ormai classici, che mostrano l'adeguatezza della formula di Poisson a rappresentare la distribuzione di probabilità per eventi rari.

Esempio 1. Durante la seconda guerra mondiale, **537** bombe furono sganciate sulla zona meridionale di Londra, senza alcun particolare bersaglio. La mappa di quella zona venne suddivisa in **576** riquadri uguali, e venne rilevato il numero di bombe cadute su ciascuno di essi (tabella 1): per $k = 0, 1,\ldots, 7$, N_k è il numero di riquadri sui quali caddero esattamente k bombe.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
N_k	229	211	93	35	7	0	0	1

tabella 1

Desideriamo verificare in quale misura i valori reali concordano con quelli previsti da un modello probabilistico basato sulla distribuzione di Poisson.

La probabilità p che **una certa bomba** cada su di un riquadro prestabilito è: $p = 1/576$). Poiché il numero di bombe è $n = 537$ (e quindi la prova "osservazione della bomba che cade" viene ripetuta per 537 volte), la probabilità che su **quel** riquadro cadano esattamente k bombe è:

$$\binom{537}{k} \frac{1}{576^k} \left(1-\frac{1}{576}\right)^{n-k}$$

Per valutare questa espressione per i valori $k = 0, 1,\ldots, 7$ applichiamo (3); attualmente $\mu = 537/576 \cong 0.9323$; con una calcolatrice otteniamo allora $e^{-\mu} \cong 0.3936$, e perciò avremo

(4) $P(k \text{ bombe sul riquadro fissato}) \cong \mu^k/k! \cdot e^{-\mu} \cong (0.9323)^k/k! \cdot 0.3936$

Poiché i riquadri osservati sono in tutto 576, ci attendiamo, in base al modello, che il numero di riquadri sui quali il numero di bombe cadute è esattamente k sia circa uguale a:

(5) $$M_k = 576 \cdot ((0.9323)^k/k!) \cdot 0.3936 = 226.74 \cdot (0.9323)^k/k!$$

La seguente tabella 2 contiene i valori calcolati di M_k , le loro approssimazioni M'_k all'intero più vicino, e, per comodità di confronto, anche i valori N_k della tabella 1. Come si nota, l'aderenza dei valori M'_k previsti dal modello ai valori reali N_k è notevole.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
M_k	226.74	211.39	98.54	30.62	7.14	1.33	0.20	0.03
M'_k	227	211	99	31	7	1	0	0
N_k	229	211	93	35	7	0	0	1

tabella 2

L'ottima aderenza del modello alla realtà conferma, da un lato, la bontà del modello; fa inoltre capire che i bombardamenti in oggetto furono veramente effettuati in maniera casuale, senza mirare ad alcun bersaglio specifico. Infatti, se gli aggressori avessero preso di mira certe zone della città piuttosto che altre, difficilmente la distribuzione delle bombe cadute sarebbe potuta essere così aderente a quella prevista da un modello che si basa sull'ipotesi della distribuzione casuale, con uguale probabilità che ogni bomba cada in ciascuna delle 576 zone.

Esempio 2. È disponibile una lunga statistica di soldati dell'antico esercito prussiano uccisi dal calcio di un cavallo. Tale evento è molto raro, in relazione alla consistenza numerica dell'esercito prussiano, e i dati noti, relativi a 200 anni, portano ai risultati della tabella 3, nella quale N_k indica il numero di anni tra i 200 osservati, in ciascuno dei quali esattamente k soldati vennero uccisi dal calcio di un cavallo.

k	0	1	2	3	4	5	6
N_k	109	65	22	3	1	0	0

tabella 3

Anche questa volta desideriamo verificare in quale misura i valori reali concordano con quelli previsti da un modello probabilistico basato sulla distribuzione di Poisson.

La descrizione del modello è un po' più complessa rispetto all'esempio 1. Non è noto infatti il valore di n, numero dei soldati dell'esercito, né il valore $p$della probabilità per un singolo soldato di morire nell'arco di un anno a causa di un calcio di cavallo. Sappiamo però che, in 200 anni, l'evento "morte di un soldato a causa del calcio di un cavallo" si è verificato per 122 volte ($65 \cdot 1+22 \cdot 2+3 \cdot 3+1 \cdot 4=122$). Valutando, secondo la concezione frequentista, la probabilità p dell'evento in oggetto come frequenza relativa del suo verificarsi, avremo la relazione

$$p=\frac{122}{200n} \qquad \text{dalla quale si ottiene} \qquad \mu = np = \frac{122}{200} = 0.61.$$

In ciascune dei 200 anni considerati si osservano gli n soldati dell'esercito, ciascuno dei quali ha probabilità p di essere ucciso in quell'anno da un calcio di un cavallo; la probabilità che, nell'anno in questione, l'evento si verifichi per k volte può essere stimata mediante la formula di Poisson (3), con $\mu = 0.61$ e di conseguenza $e^{-\mu} = 0.5433$.
Otteniamo dunque:

(6) $$P(k \text{ morti in un anno}) \cong \frac{(0.61)^k}{k!} \, 0.5433$$

Poiché l'osservazione viene ripetuta per 200 anni, ci attendiamo, in base al modello, che il numero di anni nei quali si verificano esattamente k decessi causati da un calcio di un cavallo sia circa uguale a:

(7) $$M_k = 200 \frac{(0.61)^k}{k!} \, 0.5433 = 108.66 \frac{(0.61)^k}{k!}$$

La seguente tabella 4 contiene i valori calcolati di M_k ,e le loro approssimazioni M'_k all'intero più vicino, e, per comodità di confronto, anche i valori N_k della tabella 3. Come si nota, anche in questo caso, l'aderenza dei valori di M'_k previsti dal modello ai valori reali N_k è notevole.

k	0	1	2	3	4	5	6
M_k	108.66	66.28	20.22	4.08	0.60	0.0 8	0.00
M'_k	109	66	20	4	1	0	0
N_k	109	65	22	3	1	0	0

tabella 4

BIBLIOGRAFIA

G. C. Barozzi, Analisi Matematica, Zanichelli, Bologna 1989
K. L. Chung, *Elementary Probability Theory with Stochastic Processe*, Springer-Verlag, New York 1974
G. Dall'Aglio, *Calcolo delle probalitità*, Zanichelli, Bologna, 1987
P. Dore, *Introduzione al calcolo delle probabilità e alle sue applicazioni ingegneristiche*, Patron, Bologna 1962
N. Pintacuda, *Primo corso di probabilità* Muzzio, Padova, 1983

PROPOSTE PER (RI-)OTTENERE IDENTITA' DELL'ALGEBRA USANDO LA PROBABILITA'

Stefano Antoniazzi *

**I.T.I.S. "Max Planck", Lancenigo di Villorba (TV)*

1. Presentazione.

In "Come risolvere i problemi di matematica" [5,pag.33], G. Polya osserva che "*nessun problema di matematica può essere considerato definitivamente chiuso*" e che "*persino gli studenti migliori, quando ... hanno copiato in bella, chiudono il quaderno e passano ad altro*". Nello stesso paragrafo afferma che "*Uno dei principali e più importanti doveri per gli insegnanti è di non lasciare mai negli alunni l'impressione che i problemi di matematica siano slegati tra loro*".

Più avanti [5,pag.116] parla della generalizzazione in questi termini: "*Dicesi generalizzazione il passaggio dalla considerazione di un ente a quella di un insieme cui appartiene l'ente in esame, oppure il passaggio da un determinato insieme di enti ad uno più ampio che contenga il primo*". Queste osservazioni costituiscono il fondamento della esperienza esposta nella comunicazione: si prende in considerazione un esercizio "standard" di probabilità e procedendo per generalizzazione si riottengono due risultati classici dell'algebra.

2. Un esercizio "standard" : il punteggio totale nel lancio di due dadi.

I problemi legati ai giochi con i dadi sono stati tra i primi problemi di probabilità ad essere affrontati [3] e vengono ancora ampiamente utilizzati nel lavoro in classe. In uno degli esercizi spesso svolti si chiede di determinare la probabilità associata al punteggio totale ottenuto nel lancio di due dadi regolari. Per arrivare ad una soluzione si possono elencare le possibili coppie e contare le coppie per cui la somma delle componenti è uguale ad un valore fissato.

Si può anche tentare di avere una immagine globale della situazione rappresentando le coppie in un piano cartesiano e, con questa rappresentazione, è possibile scoprire l'allineamento tra le coppie per cui la somma dei risultati è costante.

Procedendo per generalizzazione possiamo considerare dadi (regolari) con N facce. Dadi con un numero di facce diverso da sei vengono utilizzati in alcuni giochi di società; comunque è già un problema interessante la costruzione di un modello di dado a N facce (si può fare per qualsiasi N ?, deve essere necessariamente un solido ?, se le facce non sono regolari come assegnare la probabilità ai vari risultati ?). Per avere indicazioni sulla situazione "*generalizzata*" si può costruire una figura per alcuni casi fissando un valore per N (ad esempio N=5 o N=3 o N=7) e, se possibile, formulare ipotesi utilizzando le figure disegnate. Contare i "casi possibili" risulta abbastanza facile, e sono, per dadi a N facce, N^2.

Qualsiasi sia il numero di facce, numerate da 1 a N, si parte con un solo "caso favorevole" per il punteggio 2; poi quando il punteggio aumenta di una unità, anche il numero di "casi favorevoli" aumenta di uno fino a che si arriva al massimo punteggio totale, uguale a N+1.

Passato il valore N+1, all'aumentare di un punto nella somma il numero di "casi favorevoli" diminuisce di uno; questo accade fino a che il punteggio raggiunge il suo valore massimo 2N.

Le probabilità possono essere assegnate come:

$$Pr[2] = 1/N^2$$
$$Pr[3] = Pr[2] + 1/N^2 = 2/N^2$$
$$Pr[4] = Pr[3] + 1/N^2 = 3/N^2$$
....
$$Pr[k+1] = Pr[k] + 1/N^2 = k/N^2 \quad \text{per } 0<k\leq N$$

e simmetricamente rispetto alla diagonale, in modo che

$$Pr[k] = P[2(N+1) - k] \qquad \text{per } N<k\leq 2N$$

Volendo valutare la probabilità di un risultato diverso dal valore N+1, si possono utilizzare almeno due vie: calcolare la probabilità cercata come somme delle probabilità degli eventi incompatibili "il punteggio totale è 2, è 3, è 4, ..., è N, è N+2, .., è 2N", dunque Pr[2]+Pr[3]+..+Pr[N]+Pr[N+2]+..+Pr[2N]; oppure ricorrendo all'evento contrario (evento complementare) e dunque assegnando probabilità 1-Pr[N+1].

Le due probabilità devono essere uguali; da questa condizione con poca manipolazione algebrica si ottiene

$$1+2+3+....+(N-1) = N(N-1)/2\,.$$

Questa è la nota identità relativa somma dei primi N-1 numeri naturali; sicuramente questo non è il modo più elegante per ottenerla tuttavia ricordiamoci che questo è, per così dire, solo un sottoprodotto del lavoro svolto.

3. Il punteggio massimo sulle facce.

Modifichiamo il problema chiedendo la distribuzione di probabilità per il punteggio massimo tra quelli ottenuti sui due dadi. Partendo al solito da due dadi con 6 facce la distribuzione si ottiene senza particolare fatica, e fornisce le probabilità
Pr[1] = 1/36; Pr[2] = 3/36; Pr[3] = 5/36; Pr[4] = 7/36; Pr[5] = 9/36; Pr[6] = 11/36.
Utilizzando lo stesso disegno proposto per l'esercizio precedente si può notare che:
a) il risultato minimo può essere ottenuto in un solo modo;
b) ogni valore fissato, diciamo k, individua un quadrato sui cui lati stanno k punti, per un totale di 2k-1 casi favorevoli.
Questo fino a che si arriva al valore massimo, N.
Generalizzano a dadi a N facce la distribuzione di probabilità, dalla condizione che la somma delle probabilità valga 1, bastano pochi calcoli per ottenere la relazione

$$1+3+5+\ldots+(2N-1) = N^2$$

la quale esprime il fatto che "*la somma dei primi N naturali dispari è uguale a N^2*".

4. Applicazioni e considerazioni sull'esperienza in classe.

Poiché il lancio di dadi regolari a N facce può essere assimilato ad un campionamento casuale semplice da una distribuzione discreta uniforme, le

distribuzioni di probabilità ottenute possono essere usate per costruire stimatori della numerosità di una popolazione. Uno dei due stimatori così ottenuti è *corretto* (non distorto) [2,4] mentre l'altro è *distorto*, tuttavia si può mostrare che utilizzando lo stimatore distorto si ottengono stime migliori per la numerosità della popolazione.

Questa applicazione è stata svolta in classe per sensibilizzare gli studenti ad una attenta lettura del significato da attribuire ai termini usati (la proprietà statistica di correttezza o meglio di non distorsione è una proprietà "in media").
Attualmente nella scuola secondaria superiore, Probabilità e Statistica figurano
a) nelle sperimentazioni (P.N.I.);
b) negli Istituti Tecnici Commerciali (Programmatori);
c) negli Istituti Tecnici Industriali (Informatica).

In tutti i casi i programmi prevedono nel Calcolo delle Probabilità, lo studio delle variabili casuali sia discrete che continue, generalmente al terzo e al quarto anno, e nella Statistica una introduzione all'inferenza ("stima dei parametri per modelli semplici"), generalmente al quinto anno.
Il contenuto di questa nota è stato effettivamente trattato in classi di I.T.C.- indirizzo Programmatori - negli anni scolastici 1986/87 e 1987/88. Un obiettivo, al di là dello svolgimento come parte del programma ministeriale, era quello di far vedere come sia possibile collegare vari settori della matematica, eventualmente reinterpretando risultati noti.
Nel caso presentato le identità algebriche erano già note agli studenti e ottenute per altre vie. La proposta ha suscitato reazioni generalmente favorevoli, anche se alcuni studenti hanno trovato ".. inutile ritrovare cose già note" e faticoso ".. dover ricordare gli esercizi fatti in precedenza".

5. Conclusioni.

Procedendo per generalizzazione su un esercizio "standard" sulla probabilità si sono ottenute, come sottoprodotti del lavoro svolto, due identità classiche dell'algebra. Una diversa via per arrivare a questo tipo di relazioni in ambiente probabilistico, ma utilizzando i coefficienti binomiali, è descritta in [1].

Le idee da cui sono nati questi esempi ("Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per un altro problema?", "Generalizzazione") sono discusse in Polya [5], sono utilizzabili in uno spettro molto ampio di situazioni e dovrebbero, a mio avviso, far parte della "*cassetta degli attrezzi*" di ogni insegnante.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.M. Cerasoli - M. Cerasoli, *Elementi di Calcolo delle Probabilità*, Zanichelli 1987.

[2] M. Cerasoli - G. Tomassetti, *Elementi di Statistica*, Zanichelli 1987.

[3] P.Dupont, *La lunga storia della probabilità*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol.9, N.12, Dicembre 1986.

[4] A.Mood - F.Graybill - D.Boes, *Introduzione alla Statistica*, McGrawHill 1988.

[5] G.Polya, *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli 1982(III ed)

EQUILIBRIO TERMODINAMICO E STATISTICA: UNA SIMULAZIONE.

Ido Borsini

ITGC "Filippo CORRIDONI" - OSIMO

INTRODUZIONE

Il programma di fisica nel biennio di scuola media di secondo grado, diviso per temi, contiene il tema dell'equilibrio che comprende la parte relativa agli equilibri termodinamici.

In generale la termodinamica degli stati di equilibrio comprende lo studio macroscopico dei sistemi fisici attraverso il paradigma:

- individuazione di un insieme completo di parametri macroscopici,
- determinazione sperimentale della relazione (equazione di stato) che lega tra loro i parametri macroscopici,
- determinazione sperimentali di costanti legate allo stato microscopico del sistema.

La Meccanica Statistica considera la possibilità di ridurre le variabili termodinamiche alle proprietà microscopiche del sistema, fornendo, in chiave riduzionistica, la interpretazione delle osservazioni macroscopiche.

Il modello microscopico presenta diverse complicazioni di carattere matematico per dominare le quali occorre conoscere la teoria della probabilità e la statistica, oltre che i dettagli fisici delle interazioni tra molecole.

E' necessario allora proporre modelli semplificativi che permettono di superare le difficoltà matematiche e comunque confrontare i risultati sperimentali con le previsioni teoriche.

Nel corso del convegno è stato illustrato, nell'ambito della problematica indicata in precedenza, un supporto informatico che, attraverso un semplice modello di scambio casuale di quanti di energia, risulta utile per introdurre i concetti di distribuzione di equilibrio degli stati fisici, di casualità ed irreversibilità, di evoluzione (rilassamento) verso lo stato di equilibrio, di variabile termodinamica come valore medio su di un insieme statistico.

INSIEME STATISTICO

Consideriamo un sistema macroscopico di particelle, ad esempio un gas, chiamiamo campione statistico del sistema [1] un insieme di N copie identiche del sistema stesso con N sufficientemente grande. Poichè ogni copia del sistema avrà una sua evoluzione temporale particolare, dopo un certo tempo si avranno N sistemi ognuno in un diverso stato microscopico corrispondente allo stesso stato macroscopico. Si suppone che il valore che assume un determinato parametro macroscopico possa essere calcolato come la media sul campione statistico del valore di quel parametro.

In effetti la misura di un parametro macroscopico di un sistema all'equilibrio puï essere anche vista come una media temporale del valore del parametro su diversi stati microscopici di cui l'insieme statistico rappresenta tutte le possibili realizzazioni (ipotesi ergodica)[2].

Consideriamo ora una scacchiera quadrata di 36 caselle ognuna contenente un dischetto colorato (vedi figura 1); attraverso un dado è possibile simulare lo scambio di energia tra due caselle come scambio di dischetti, generando, dopo un certo numero di lanci, una distribuzione particolare dei dischetti sulla scacchiera: tutto questo corrisponde ad una particolare evoluzione temporale di un particolare sistema dell'insieme statistico.

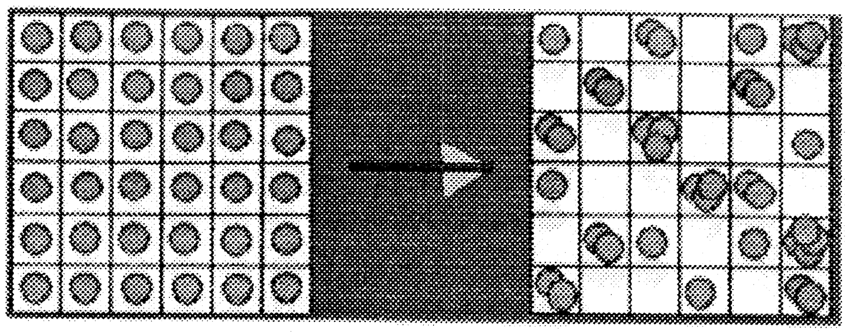


Figura 1 -
La figura rappresenta un particolare stato microscopico iniziale (a sinistra) nel quale tutte le molecole hanno la stessa energia; dopo un certo numero di scambi di energia lo stato evolve (a destra) in un altro particolare stato microscopico.

Procedendo con più gruppi di studenti alla determinazione della evoluzione temporale di più sistemi con stesse condizioni iniziali si individua un opportuno campione dell'insieme statistico.

Si introduce il concetto di distribuzione delle energie come il numero di caselle che contengono un certo numero di dischetti (vedi figura 2).

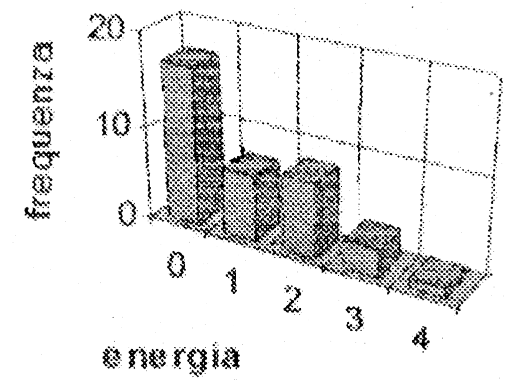


Figura 2 -
Una particolare distribuzione di energia; si noti l'andamento a salti dell'istogramma.

Dopo un sufficiente numero di lanci (un certo tempo) si nota che:
1) la distribuzione di un sistema evolve verso una distribuzione tipica,
2) la distribuzione ottenuta dalla media sull'insieme delle elaborazioni dei diversi gruppi di studenti ha una forma più regolare, stabile e definita delle distribuzioni singole.

La distribuzione determinata come la media delle distribuzioni di un campione dell'insieme statistico dunque è più stabile (dipende meno dal numero degli scambi (tempo)) e la chiameremo distribuzione di equilibrio.

LA DISTRIBUZIONE DI EQUILIBRIO

Il principio illustrato nel paragrafo precedente viene applicato, attraverso l'uso di una simulazione al computer, in un caso di 792 caselle che rappresentano altrettante molecole con 16 livelli energetici accessibili (da 0 a 15)[3].

Dopo un certo numero di scambi la distribuzione delle energie assumerà una forma quasi stabile; la media delle distribuzioni su di un campione dell'insieme statistico ci fornisce la distribuzione all'equilibrio.

Il calcolo della distribuzione all'equilibrio risulta immediato nella parametrizzazione:

$N_i=N_0a^i$

che segue immediatamente dalla semplice relazione ricorsiva

$N_{i+1}=aN_i$

che puï essere verificata sulla distribuzione di equilibrio.

Alla stessa maniera è possibile mettere in evidenza la dipendenza dei parametri della distribuzione N_0 ed a dalla energia media con osservazioni sul modello.

Per quanto riguarda il concetto di irreversibilità, è evidente che in alcune distribuzioni iniziali certe evoluzioni sono più probabili che le evoluzioni inverse; ad esempio nel caso venga data la stessa energia ad ognuna delle molecole risulta evidente che, per i primi scambi, la probabilità di modificare questa distribuzione è più alta che quella di ricostituirla. In effetti la ragione della stabilità maggiore di alcune distribuzioni microscopiche rispetto ad altre, data la casualità degli scambi di energia, non puï che dipendere dalla possibilità di realizzare un dato stato in più modi che un altro (ipotesi di Boltzmann); di qui la irreversibilità intrinseca di certi stati microscopici .

BIBLIOGRAFIA ED OSSERVAZIONI

Un semplice esempio di utilizzo di campionamento simulato nella didattica della fisica:

(1) I. BORSINI E. LAMANNA, Il Moto Browniano, Didattica delle Scienze, gennaio 1991, Editrice La Scuola, Brescia.

Chiarissima illustrazione della ipotesi ergodica attraverso esempi e considerazioni:

(2) F. REIF, La Fisica Statistica, La Fisica di Berkeley, 1984, cap. 1,2,3, Zanichelli, Bologna.

(3) Il software è realizzato in codice Pascal ed è a disposizione di chiunque ne faccia richiesta all'autore.

PROBLEMATICHE RELATIVE ALL'UTILIZZO DI STRUMENTI INFORMATICI NELL'APPROCCIO ALLA PROBABILITÀ

M. Billante, M. G. Pedrali, E. Salucci*, R. Tosi, E. Verzelletti

E' ben noto e globalmente condiviso che l'utilizzo del calcolatore in campo didattico possa offrire opportunità uniche per migliorare l'insegnamento di molte discipline, in particolar modo della Matematica e della Fisica.

Occorre, però, riconoscere che a tale consapevolezza non fa riscontro un effettivo uso di Tecnologie Informatiche (IT) nell'insegnamento. [1]

Le motivazioni che vengono portate per giustificare questa situazione sono soprattutto dettate da una insicurezza di fondo derivante da una mancata preparazione ad affrontare sia contenuti che metodologie di insegnamento legati all'uso di IT.

Effettivamente, a nostro avviso, mancano proposte educative serie (cioè, ben motivate, basate su solidi fondamenti culturali), globali (cioè, coinvolgenti più discipline della stessa area, ad esempio: matematica, fisica, scienze, ecc. ...) e facilmente adottabili (cioè, che tengano presente la realtà culturale ed organizzativa su cui si innestano e non prevedano cambiamenti radicali). [2]

Il lavoro qui descritto ([1]) è proprio rivolto alla realizzazione di proposte didattiche con le citate caratteristiche per l'introduzione di metodi e strumenti dell'informatica in ambienti tradizionali.

L'argomento che abbiamo deciso di prendere in considerazione è il Calcolo delle probabilità perchè piuttosto nuovo per la scuola italiana e perchè interessa un ampio spettro di discipline oltre la Matematica, che naturalmente la ospita.

Per elaborare una proposta che si armonizzasse con gli strumenti ed i metodi della didattica tradizionale, senza fratture, abbiamo voluto, innanzitutto, "fotografare" la realtà scolastica attuale.

Abbiamo quindi iniziato l'analisi di numerosi libri di testo per individuare quali argomenti vengono principalmente puntualizzati e quali metodologie di approccio vengono privilegiate.

Abbiamo deciso di analizzare, in particolare, la situazione delle adozioni nei bienni della Scuola Secondaria Superiore. Per ovvie ragioni di semplicità nel rilevamento dei dati,

---

([1])Lavoro finanziato per l'anno 1993 con contratto C.N.R. n.9300525CT01.
* Università Cattolica "Sacro Cuore" Brescia

abbiamo preso in considerazione la situazione della provincia di Brescia nell'anno scolastico 1991/92, dove i testi maggiormente diffusi sono risultati:

Autore	N° istituti d'adozione	N° Titoli
Dodero	19	4
Zwirner	16	6
Oriolo	13	3
Palatini	11	3
Rinaldi Carini	10	1

Lavoro finanziato per l'anno 1993 con contratto C.N.R. n. 9300525CT01

Il quadro che ne risulta è comunque globalmente significativo per la realtà italiana, in quanto le case editrici rappresentate in questo campione sono quelle con più ampia diffusione sul territorio nazionale).
Per un'analisi più dettagliata abbiamo preso in considerazione 19 libri di testo di cui 11 scelti tra quelli in adozione e 8 non in adozione. Tra questi ultimi alcuni sono proposte nuove, altri, invece, sono proposte più datate, che non hanno, però, incontrato successo tra gli insegnanti (cfr. Allegato A).
I libri di testo sono stati valutati con una griglia di analisi, preparata appositamente sulla base di indicazioni ricavate da lavori analoghi [3] dove sono state prese in considerazione l'organizzazione del volume, la trattazione del tema e le caratteristiche qualitative.
Attraverso l'esame incrociato dei risultati ottenuti possiamo affermare che la maggior parte degli insegnanti predilige testi ricchi di esercizi, che richiedono principalmente comportamenti di tipo esecutivo, che utilizzano un linguaggio sintetico e facilmente comprensibile e metodi che guidano alla formazione di concetti.
Ci sono però ancora parecchi insegnanti che prediligono testi con un linguaggio molto formale e metodi di tipo nozionistico.
La maggior parte dei testi adottati, tra quelli presi in esame propone esercizi calibrati all'età degli studenti, che richiedono soprattutto comportamenti di tipo esecutivo e/o operativo. Ci sono però anche testi (ad es. [2/a], [3/b], [8/b]) che propongono ricerche, stimolano la creatività degli allievi e richiedono comportamenti di tipo diverso oltre a quelli già citati (ad es. linguistico o esplorativo).
La difficoltà nel mettere in pratica questi suggerimenti con metodi e strumenti tradizionali può giustificare la scarsa accoglienza riservata a questi testi.
L'approccio al Calcolo delle Probabilità è di tipo classico per 16 testi su 19. Il percorso tracciato comprende, in genere, i teoremi della somma e del prodotto, la probabilità condizionata, le prove ripetute e i grafici and-or. Solo pochi testi ([5/b], [8/b]) presentano in modo sistematico legami con altre discipline e riferimenti storici, che invece sono generalmente assenti.
Tutti i manuali esaminati sono rivolti principalmente agli studenti. Solo tre testi ([2/b], [8/a], [2/a]) allegano una guida per i docenti mentre sette (ad es. [6/b], [4/a]) non danno indicazioni di alcun genere agli insegnanti.

Siamo poi passati ad analizzare prodotti software realizzati appositamente per insegnare argomenti di Probabilità.
La selezione dei prodotti da esaminare (cfr. Allegato B) è stata fatta in base alle seguenti caratteristiche: facilità di acquisizione, semplicità di utilizzo, fruibilità su calcolatori di ampia diffusione in ambito scolastico.
Esso si può classificare secondo le seguenti categorie:

- software di simulazione (ad es. *Materiale CUD, Programma ALICE-TRAINER*);
- software di modellizzazione di situazioni aleatorie anche complesse (ad es. *Macchina della Probabilità*);
- software di supporto all'elaborazione di dati rilevati e simulati (ad es. *LOTUS 1-2-3, LAM, Programma ALICE-MASTER Eventi*);
- libro elettronico (ad es. *Programma ALICE-MASTER Concetti*).

Il software di primo e secondo tipo può essere utilmente introdotto sia in sede di approccio che per approfondimenti e per prove finalizzate alla valutazione.
Quello del terzo tipo costituisce un utile supporto per elaborare ed analizzare un elevato numero di dati. Il libro elettronico permette una rapida consultazione in sede di esercitazioni e di ripasso.
Tutti questi materiali, se debitamente introdotti, hanno sicure valenze didattiche, in quanto possono aumentare l'interesse dei ragazzi motivandoli, e possono rendere l'insegnamento più personalizzato e più interattivo.
Dal punto di vista didattico sono sicuramente più efficaci quelli del secondo e del terzo tipo, perchè richiedono la partecipazione attiva degli studenti nelle fasi di costruzione del modello e di elaborazione dei dati.
I software di primo tipo sono sicuramente più accattivanti per la semplicità d'uso, per la confidenzialità dell'interfaccia con cui si presentano e per il tipo di situazioni (generalmente giochi) che simulano. Il loro uso andrebbe sempre integrato con esperimenti reali (ad es. lancio di un dado o di una moneta, estrazione di carte, ecc. ...) per evitare l'insorgere di fenomeni degenerativi, quali quelli che si osservano nell'utilizzo di videogames.
Dopo ave concluso questo lungo e complesso lavoro di documentazione e di analisi abbiamo iniziato a realizzare delle schede di lavoro, progettate per gli insegnanti, dove questi possono trovare suggerimenti su cosa e come insegnare in differenti contesti educativi e in presenza di precise esigenze didattiche.
Tali schede hanno la seguente struttura: dopo un'introduzione generale vengono illustrate le possibili collocazioni all'interno del percorso didattico, indicati i prerequisiti indispensabili e fornite alcune indicazioni metodologiche. L'approccio all'argomento avviene sempre mediante la presentazione agli studenti di una situazione problematica (si è vivamente sconsigliato di riprodurre un insegnamento basato su un'esposizione solo teorica seguita da proposte di esercitazioni personali). Vengono forniti l'enunciato del "problema", la sua traccia risolutiva, dove vengono evidenziati i passaggi logici fondamentali, e la generalizzazione di tale soluzione. In seguito si passa alla sistematizzazione precedente e

si propongono attività di applicazione di approfondimento.
Una sezione particolare della scheda illustra gli strumenti informatici e suggerisce le possibili strategie di utilizzo. Essi vengono generalmente consigliati nelle fasi di simulazione, rilevazione e analisi dei dati. L'uso di "tutoriali" viene proposto solo in particolari situazioni di difficoltà, come rinforzo e ulteriore stimolo alla comprensione.
Ogni scheda è corredata da una bibliografia ragionata.
Per rispettare le indicazioni emerse dall'analisi della situazione attuale abbiamo affrontato in primo luogo un approccio di tipo classico. In un secondo tempo abbiamo sviluppato percorsi didattici relativi ad approcci di tipo frequentista e soggettivo, dove l'utilizzo di strumenti informatici risulta molto proficuo poichè facilita la rilevazione e l'analisi dei dati, spesso molto numerosi.
Le schede approntate saranno sperimentate in alcune classi della Provincia di Brescia nel presente anno scolastico.

BIBLIOGRAFIA

[1] N.HAMMOND, N.GARDNER, S.HEATH, M.KIBBY, T.MAYES, R.McALEESE, C.MULLINGS and A.TRAPP, Blocks to the effective use of information technology in higher education. Computers Educ., 18, 1-3 (1992), 155-162.
[2] G.GAZZANIGA, Designing computer based flexible teaching tools for the teaching of mathematically based disciplines, in: A.Knierzinger, M.Moser (eds.), Informatics and changes in learning, Procs. of the IFIP Open Conference, Gmunden (1993) XIV/5-7.
[3] N.MALARA, Studio per un'indagine globale sui libri di testo per la scuola media: il libro di testo per la matematica. Gruppo di ricerca sulla Educazione Matematica, Dip. di Matematica, Università di Modena (1990).

Allegato
A - Libri di testo esaminati
a) *In adozione nella provincia di Brescia*
1 - BARONI, Corso di matematica, Editrice La Scuola (1990)
2 - DEL GIUDICE - MORINA, Corso di matematica, Petrini (1989)
3 - DODERO - BARONCINI - TREZZI, Algebra e Informatica, Ghisetti & Corvi (1989)
4 - DODERO - TOSCANI, Lezioni di matematica, Ghisetti & Corvi (1988)
5 - TONOLINI - CERTO, Percorsi di matematica, Minerva Italica (1989)
6 - GALLO, Fare matematica, SEI (1988)
7 - LAZZARINI - SARNATARO, Idee base di matematica moderna, Etas (1989)
8 - MARASCHINI - PALMA, Matematica di base, Paravia (1986)
9 - ORIOLO - CODA, Corso di matematica, Mondadori (1990)
10 - RINALDI - CARINI - CAVALIERE, Matematica, Zanichelli (1989)
11 - ROSATI, Matematica con elementi di informatica, Poseidonia (1987)
b) *Non adottati nella provincia di Brescia*
1 - AVANZINI - MURI - UGOLOTTI, Matematica, Cappelli (1991)
2 - BARTOLI - DE RINALDIS, Matematica, idee, metodi ed applicazioni, Marietti (1992)
3 - BATTELLI - MORETTI, Elementi di statistica e calcolo delle probabilità, Le Monnier (1988)
4 - BATTELLI - MORETTI, Corso di matematica sperimentale e laboratorio, Le Monnier (1990)
5 - CASTELNUOVO - GORI - GIORGI - VALENTI, La matematica nella realtà, La Nuova Italia (1984)
6 - GIANLUPI - BO, Matematica per il biennio, Poseidonia (1990)
7 - MONCHIERI, Matematica oggi, De Agostini (1992)
8 - RADICE - MANCINI PROIA, Il metodo matematico, Principato (1988)

B - Software didattico analizzato
1 - SEI Progetto ALICE - Calcolo delle probabilità (MASTER)
2 - SEI Progetto ALICE - Calcolo delle probabilità (TRAINER)
3 - Materiale CUD
4 - Francesco e Riccardo Malara, La macchina della probabilità, Editrice La Scuola (1991)
5 - LAM Statistica, Ed. Le Monnier
6 - LOTUS 1-2-3

I NUMERI A CASO ED IL CALCOLO DI Π CON IL METODO MONTECARLO.

Silvana Bornoroni
I.T.I.S. " A. Volta " Roma

Si definiscono " a caso" n numeri che rappresentano n esiti indipendenti ed equiprobabili di un evento aleatorio E, ovvero lo spazio campione di E.

Il lancio di una moneta o di un dado non truccati, sono eventi aleatori, equibrobabili per assenza di trucco e indipendenti perche' ogni evento non e' condizionato dal precedente; la successione di Testa e Croce, dei numeri delle facce del dado, sono gli esiti di tali eventi.

Se potessimo individuare e gestire le variabili legate allo stato di una moneta ad ogni lancio, potremmo predire deterministicamente il risultato; l' ignoranza di certe "variabili nascoste" crea l' illusione del caso.

Il problema di estrarre a sorte in modo del tutto onesto e' stato discusso, secondo quanto riferisce lo storico Jorge Luis Borges, fin dal XIII secolo.

In un manoscritto del 1240-50 un certo frate Edvin del convento francescano di Tautra in Norvegia propone il metodo che segue:

Due contendenti dicono ciascuno un numero, si esegue la somma, il risultato si divide per 6 e si prende come numero a caso il resto ottenuto.

Le possibilita' sono sei e corrispondono ai sei risultati possibili del lancio di un dado; scegliere un numero grande o un numero da 0 a 5 e' la stessa cosa perche' il campo delle alternative possibili rimane invariato.

Rispetto al lancio di un dado, il risultato ottenuto in questo modo offre il vantaggio di non poter essere pilotato ne' dalla abilita', ne' dalla frode.

Diversamente manipolabile e'il prodotto dei due numeri: se uno dei due giocatori sceglie un multiplo di 6, il risultato del procedimento diventa

0 qualunque sia la scelta dell' avversario.

Un metodo per generare numeri a caso senza l' intervento di un secondo giocatore, secondo frate Edvin, e' il metodo dei quadrati successivi che verra' ripreso da Von Newmann.

Un giocatore sceglie un numero di quattro cifre e lo eleva al quadrato. Ottiene un numero di 7 o 8 cifre, di cui sopprime le ultime due e la prima (o le prime due), in modo da avere un numero di quattro cifre. Ripete la operazione quattro volte e prende il resto della divisione per 6 dell' ultimo numero in tal modo ottenuto.

Gia' nel XIII secolo, era noto che , per evitare successioni con cicli brevi, facilmente prevedibili, le cifre del primo numero dovevano essere tutte diverse fra loro; eccezioni piu' sottili sono state evidenziate con l' introduzione, ad opera di Von Newmann, del caso sui computer.

Birger Jansson, nel 1964, ha fatto notare che, partendo da:

$$N=3792$$

si ottiene N*N = 14 **3792** 64 ovvero la successione e' formata dallo stesso numero.

L'interesse per i numeri a caso, secondo il fisico Alfred Bork, e' una caratteristica del XX secolo anche se i presupposti teorici del loro utilizzo, in termodinamica e nella teoria della evoluzione, risalgono al XIX secolo.

Nel 1927 sono state pubblicate le tavole di L.H. Tippet ottenute prendendo le cifre di mezzo delle aree delle parrocchie inglesi.

Nel 1949 le tavole della U. S. Interstate Commerce Commission estratte dalle bollette di accompagnamento delle merci.

Nel 1955 sono stata pubblicate le tavole di numeri a caso della Rand Corporation ottenute convertendo in decimali i numeri binari generati a caso da impulsi elettronici.

Tali successioni di cifre , non presentano alcuna apparente regolarita' e non e' possibile predire , date tutte le cifre della successione tranne una, la cifra mancante con probabilita' superiore a quella teorica.

Queste sequenze, non deterministiche, sono accessibili a previsioni statistiche come una collezione di punti a caso distribuiti nel piano o nello spazio, ad esempio le stelle nel cielo. I punti non obbediscono singolarmente ad alcuna legge fisica specifica, ma l' intera collezione si, tanto che si possono prevedere le parti mancanti (Problemi stocastici puntuali -Processo di Poisson).

Poiche' poco importa che il caso si trovi nella natura o nell' occhio dell' osservatore, e' nato, per i matematici, il problema di generare deterministicamente successioni di cifre che non presentino apparenti regolarita', che sembrino indipendenti e tali che , la frequenza per ogni cifra, in qualsiasi campione, sia prossima a quella teorica.

Perche' le successioni ottenute deterministicamente possano essere utilizzate come cifre casuali, occorre che superino dei test di equidistribuzione e di indipendenza sia campionari che relativi all' intero periodo; in tal caso prendono il nome di cifre **pseudocasuali** e possono essere utilizzate per simulare eventi aleatori.

Il problema matematico di generare successione del tipo indicato e'affidato, ai nostri giorni, a generatori ricorrenti, di dimensione n , ordine s e modulo m.

A livello di Scuola Secondaria Superiore si possono considerare generatori ricorrenti congruenziali lineari definiti dalla formula:

1) $$X(n) = (A * X(n-1) + B) \text{ MOD } M \quad \text{con } n \in N$$

ove X(n) e' generato dal resto della divisione per M , intero positivo assegnato, della funzione lineare in X(n-1) a coefficienti A,B $\in$ I={0,1,2,3,...,m-1}.

I numeri A, B, M caratterizzano il generatore.

Se B=0 il generatore prende il nome di **generatore moltiplicativo** di **Lehmer**.

La successione si trasforma in una Y(n) di elementi appartenenti all' intervallo [0;1) aventi lo stesso periodo, dividendo per M ogni termine della successione X(n):

2) $$Y(n) = \frac{X(n)}{M}$$

oppure in una Y(n) di elementi appartenenti all' intervallo [0;1],dello stesso periodo, dividendo per M-1 ogni termine della successione di X(n).

Cio' equivale a sorteggiare M punti equidistribuiti nell' intervallo indicato.

Questi generatori presentano lo stesso inconveniente del metodo dei quadrati in quanto ogni uscita e' determinata dalla precedente, inoltre non tutti i valori di A, B, M generano successioni apparentemente prive di regola e si osservano cicli la cui estensione e' legata al valore di M.

Nella pratica si sceglie $M=2^{32}$, che rende facile la divisione per M con le macchine che lavorano in binario, oppure M=231-1, che offre il vantaggio di essere un numero primo.

Fra i diversi tipi di test, messi a punto da matematici e statistici, per controllare l' equidistribuzione il piu' semplice e applicabile a livello di Scuola Secondaria Superiore e' il **test** di **frequenza**

Generata una successione di cifre decimali con la relazione [1] , si sommano gli zeri, gli uno, ..., i nove, si calcola la frequenza di ciascuna cifra e si confrontano i valori ottenuti con il valore ideale, cioe' 1/10. Piu' i valori ottenuti sono vicini alla probabilita', piu' le cifre si diranno equidistribuite.

Interessante e' evidenziare i limiti di tale test presentando esempi di successioni che lo superano, ma che non possono definirsi casuali in quanto e' manifesta la legge di formazione della successione.

Per verificare se uscite successive equidistribuite in un intervallo [0;1], siano indipendenti, un metodo e' quello di raggruppare le cifre ottenute a coppie considerandole come le coordinate (x; y) di un punto di un quadrato di lato 1. Se questi punti risultassero equidistribuiti nel piano, le cifre potrebbero essere considerate indipendenti. E' noto infatti che, se X_1, X_2,,X_n sono uscite indipendenti equidistribuite, e' possibile raggrupparle per coppie, invertirle,estrarne una su due, si ottenengono sempre uscite indipendenti equidistribuite. Non avviene la stessa cosa quando le cifre sono ottenute con i generatori aritmetici.

L' interesse dei matematici si orienta verso la ricerca di generatori che soddisfino a queste caratteristiche e le insufficienze del generatore [1], per alcuni valori dei parametri , diventano manifeste se si vogliono sorteggiare i punti di un quadrato [0;1].

Ci sono molti test d' indipendenza, e un generatore che ne inganni uno

puo' essere smascherato da un altro. Un generatore puo' ingannare un test tutte le volte e tutti i test qualche volta, ma non puo' ingannare tutti i test tutte le volte.

I moderni linguaggi di programmazione sono dotati di funzioni capaci di generare numeri pseudocasuali. Per migliorare la casualita' utilizzano generatori aritmetici facendo ricorso all' orologio.

I numeri pseudocasuali sono utilizzati per simulare un fenomeno, quando e' impossibile esaminarlo in modo sistematico data l' inaccessibilita' dei calcoli o quando non si hanno informazioni sufficienti per determinare lo stato finale di un sistema a partire dal suo stato iniziale. Una volta eseguita la simulazione si osserva cosa succede. Si presume che, facendo esperimenti non inficiati in partenza, sia possibile, accontentandosi di una descrizione fenomenologica e di previsioni statistiche, cogliere la struttura dei problemi.

Il **Metodo Monte Carlo** e' l'espressione corrente per tutti i procedimenti che si servono di esperimenti casuali.

Si applica il Metodo Monte Carlo per conoscere, ad esempio,la probabilita' di risolvere un solitario con 52 carte in quanto i possibili modi di distribuire le carte sono:

$$52! = 52*51*50*.....*3*2*1,$$

un numero tanto grande da escludere la possibilita' di contare le partite vincenti attraverso un esame sistematico di tutte le distribuzioni possibili.

Si gioca un piccolo numero di partite (un centinaio, o qualche migliaio), con distribuzioni a caso fra le 52! possibili; si prende poi la frazione di solitari riusciti nel campione realizzato e ci si accontenta di una stima empirica.

Il Metodo Monte Carlo puo' essere usato anche per il calcolo approssimato dell' area di una regione piana R.

Assegnato il quadrato Q di lato a come spazio campione e R una regione piana contenuta in Q, detto E l' evento " il punto a caso cade in R", la probabilita' di E e' la misura dell' eventualita' che il punto cada in R. Tale misura intuitivamente e' data da:

$$3) \quad \text{Probabilita' di } E = \frac{\text{area di } R}{\text{area del quadrato}}.$$

Si generano con il computer numeri pseudocasuali in Q; le N coppie ordinate (x;y) s' interpretano come punti del piano. Detti M i punti che cadono in R si ha:

$$4) \quad \frac{M}{N} = \frac{\text{area } R}{\text{area quadrato}};$$

si ottiene un valore approssimato dell' area R, ricavandolo dalla relazione [4].

In particolare, se l' area e'nota come nel caso in cui R e' il settore circolare di raggio a e centro nel vertice del quadrato, si puo' calcolare il valore approssimato di π.

La probabilita' dell' evento E "il punto a caso cade nel settore circolare " e' data intuitivamente da:

$$5) \quad \text{Probabilita' di } E = \frac{\text{area settore circolare}}{\text{area quadrato}} = \frac{\pi/4*a^2}{a^2}.$$

Con un programma al computer si generano N coppie di numeri pseudocasuali fra 0 ed a che rappresentano le coordinate (x;y) di N punti a caso interni al quadrato. Si pone il controllo per vedere se il punto cade nel settore con la condizione $x^2 + y^2 \leq a^2$, si contano attraverso un contatore C ,precedentemente inizializzato a zero, i punti che cadono internamente al settore.

Intuitivamente la frequenza $\frac{C}{N}$ dovrebbe avvicinarsi alla

probabilita'per N molto grande, ovvero

$$6) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{C}{N}; \qquad \pi = \frac{4*C}{N}.$$

Eseguendo il programma si trovano i valori approssimati di „; si nota l' invarianza rispetto al lato del quadrato; si scopre che la serie converge con possibilita' di andata e ritorno; in esecuzioni successive, per gli stessi valori dei parametri, si ottengono valori diversi perche' diversi i numeri pseudocasuali generati.

Il metodo probabilistico non e' certo il migliore per il calcolo di π e delle aree in genere.

L' utilizzo dei numeri casuali e pseudocasuali nella Scuola Secondaria Superiore consente un approccio divertente alla modellizzazione di situazioni non deterministiche, giustifica l' uso del computer, abitua alla scoperta.

La riflessione concettuale sui generatori congruenziali lineari offre l' opportunita' di affrontare tematiche relative all' aritmetica modulare, la ricorsione, le proprieta' dei numeri primi; il programma in Pascal permette un approccio alle procedure ricorsive e iterative. In pratica i numeri pseudocasuali rappresentano un interessante argomento trasversale fra i diversi temi dei nuovi programmi della Scuola Secondaria Superiore.

BIBLIOGRAFIA:

[1] Kenneth Baclawski-Mauro Cerasoli-Gian Carlo Rota, *Introduzione alla probabilita'*; Unione Matematica Italiana.

[2] Ivan Ekeland, *A caso* ; Bollati Boringhieri.

[3] Gardner, *Carnevale matematico* ; Zanichelli.

[4] A. Maturo-Nisida Cera, *Confronto fra generatori di numeri pseudocasuali* ; Periodico di matematiche-Mathesis-Aprile-Giugno 1991.

APPLICAZIONE DI TECNICHE REGRESSIVE PER L'INTEGRAZIONE DI DATI DI TIPO CARTOGRAFICO

Lucia Tarsi
I.P.C. "Olivetti" - Fano

Gli argomenti esposti in questa comunicazione descrivono gli aspetti generali di una metodologia di indagine oggi ampiamente utilizzata in vari progetti operativi; vengono presentati, in questo convegno dedicato alle problematiche dell'insegnamento della statistica, con l'intento di fornire uno spunto per la discussione e l'approfondimento delle capacità inferenziali offerte dalle tecniche regressive e di descrivere quali siano le reali e concrete possibilità di azione, in campo operativo, dell'applicazione di tali tecniche a dati di tipo spaziale; se tuttavia si tralasciano gli aspetti più strettamente tecnici, la presente problematica può anche venir presentata agli studenti sia per descrivere le fasi in cui si articola una indagine statistica, sia per introdurre metodi, tecniche e finalità della statistica induttiva, illustrandone gli aspetti teorici più generali.

Il tema di seguito trattato è la presentazione di una metodologia statistica per l'integrazione di dati geografici di tipo spaziale a fini inferenziali; il fine operativo è l'individuazione di una procedura di supporto alle decisioni nei problemi di gestione del territorio e delle risorse. L'approccio metodologico descritto è stato studiato appositamente per l'indagine di quelle caratteristiche di tipo territoriale, come per esempio l'evoluzione di certi fenomeni naturali o la presenza di risorse, le quali, non essendo direttamente osservabili per motivi fisici oppure economici, possono venir descritte e previste solo in maniera inferenziale, attraverso l'analisi di altre informazioni territoriali ad essa correlate e di più facile acquisizione. Gli ambiti di applicazione di tale metodologia sono quindi molto ampi; tra gli altri, quello che riveste maggior interesse è il campo dell'esplorazione mineraria. Nel seguito si farà riferimento agli aspetti principali di tale applicazione perchè meglio di altre si presta alla esemplificazione pratica della metodologia presentata. Si tralascia tuttavia ogni aspetto tecnico, per ovvi motivi di spazio.

Una volta stabiliti l'*ambito di applicazione* e gli *obiettivi dell'indagine*, si definisce quale sia l'entità fisica o fenomeno che andrà interpretato e previsto, e si costruisce la mappa della distribuzione spaziale delle sue presenze o osservazioni (v. fig. 3); nell'esempio dell'applicazione mineraria, l'oggetto indagato è la carta delle presenze di miniere note, mentre l'obiettivo dell'indagine coincide con l'individuazione di nuove aree potenzialmente ricche di minerali. Si procede quindi alla *raccolta* di tutte le informazioni disponibili sul territorio, e successivamente alla loro *elaborazione* ed *analisi*: in questa fase intervengono competenze sia di tipo informatico (preparazione ed organizzazione logica e fisica dei dati) che probabilistiche; le informazioni geografiche che descrivono le caratteristiche dell'area in esame si presentano originariamente in formato non numerico ma cartografico, nel quale gli elementi naturali descritti sono spesso schematizzati come entità di tipo geometrico (punti, spezzate aperte o chiuse); essi necessitano quindi di una prima conversione dal formato cartografico (cartaceo) a quello numerico (digitale): una delle tecniche più utilizzate (rasterizzazione) trasforma ogni mappa geografica in un pattern di numeri distribuiti per righe e colonne, cioè nella forma convenzionale di matrice, quindi facilmente memorizzabile in un supporto informatico.

Si procede quindi alla *organizzazione statistica* dei dati: ogni singola cella del grigliato corrisponde ad una *unità statistica*, ogni carta geografica si trasforma in un *carattere statistico* (o *"variabile"* del modello), i valori numerici o qualitativi contenuti nella variabile geografica costituiscono le varie *modalità* del carattere. L'oggetto o fenomeno indagato (per es.: miniere note), presente sull'area in esame in un certo numero di osservazioni, costituisce la *variabile dipendente*, mentre le altre caratteristiche territoriali raccolte fungono da *variabili indipendenti* o *esplicative*. Oltre a problemi di tipo organizzativo, le informazioni cartografiche presentano varie particolarità, legate in primo luogo alla loro tipologia: i dati originari ricoprono spesso l'intera scala statistica, dal livello qualitativo sconnesso al quantitativo; in particolare, i caratteri qualitativi necessitano di opportune trasformazioni preventive, affichè possano essere inserite in maniera coerente in un modello regressivo assieme a variabili di tipo quantitativo. Per es., la carta di fig. 1, caratteristica di tipo qualitativo, viene trasformata nella matrice di fig. 2, nella quale risulta evidente che ad ogni modalità (distinguibile per la diversa retinatura)

è stato associato un valore numerico; l'associazione tra modalità qualitative e numeri progressivi introduce tuttavia un ordinamento che nella realtà non esiste, e che quindi richiede l'adozione di alcuni accorgimenti (che non saranno discussi in questa sede). Le analisi dei dati sono atte ad individuare le caratteristiche prevalenti dell'area in esame, e ne suggeriscono un modello puramente teorico preliminare alla modellizzazione matematica.

Completata l'operazione di elaborazione ed analisi dei dati, si procede alla fase di *individuazione della metodologia* di integrazione matematico-statistica più adeguata al caso di studio. E' opportuno, a questo punto, precisare il concetto di *integrazione* di fonti informative eterogenee; esso va distinto dalla semplicistica ma frequente accezione di "sovrapposizione" di carte al fine dell'individuazione di concomitanze di caratteristiche salienti. La complessa problematica che scaturisce da una corretta interpretazione di questo concetto può venir presentata, in maniera esauriente, attraverso l'esempio dell'approccio teorico adottato nel caso di studio della ricerca mineraria: in ambito geologico le caratteristiche geografiche e territoriali rilevabili sono spesso in relazione, diretta o indiretta, con la presenza di depositi minerari; la stessa distribuzione spaziale di oggetti o fenomeni di tipo geomorfologico è spesso, in natura, una conseguenza del processo che li ha generati; l'individuazione delle relazioni causali e funzionali che legano tra di loro le varie caratteristiche geografiche rilevabili, e queste con il fenomeno naturale obiettivo dell'indagine, (come per esempio la presenza di determinati minerali), consente di modellizzare e di descrivere i processi naturali che hanno generato il fenomeno indagato. Per valutare gli apporti informativi provenienti dai dati raccolti, si procede quindi alla costruzione di un modello matematico-statistico che descrive le relazioni funzionali che legano le variabili indipendenti alla variabile dipendente, e non solo rileva ma interpreta la presenza simultanea di determinate modalità.

I modelli statistici più utilizzati sono quelli regressivi multivariati: essi individuano legami funzionali tra l'insieme delle variabili esplicative da un lato, e la variabile indagata (presenza di miniere nel nostro caso) dall'altro; un primo modello individuato è la regressione lineare multipla, così schematizzabile:

$Y_i = a + bX_i + e_i \quad i=1,\ldots,$numero celle

dove : Y_i è la variabile dipendente;

X_i è il vettore in cui l'elemento j-esimo corrisponde al valore che la jesima variabile esplicativa assume nella cella i :

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots\ldots, x_{ip})$$

con p=1,....,num. varr. esplicative;

a , b sono i coefficienti di regressione;

e_i è la variabile errore.

Una delle tecniche di regressione multipla lineare utilizzata (regr. "Stepwise") opera preventivamente una selezione di variabili indipendenti, per includere nel modello solo i caratteri maggiormente correlati con la presenza della variabile dipendente ma scarsamente tra loro; contemporaneamente vengono stimati i coefficienti a e b del modello. Il modello così costruito permette di interpretare le osservazioni raccolte sulla variabile dipendente (i depositi osservati e cartografati), in funzione delle altre informazioni rilevate, entro un certo grado di approssimazione, poichè bisogna comunque osservare che l'applicazione di un modello lineare ad una realtà complessa ed articolata nelle sue componenti risulta spesso restrittiva e non adeguata. Si possono comunque ipotizzare e verificare dipendenze funzionali più complesse; se si desidera per es. una interpretazione del modello di regressione come modello probabilistico, si può adottare un legame di tipo logistico, in relazione al quale i valori di Y_i stimati per ciascuna cella, appartenenti all'intervallo [0,1], vengono interpretati come livelli di probabilità che quella cella contenga il fenomeno indagato.

La condizione teorica sotto cui le tecniche regressive consentono di operare una modellizzazione della realtà con buone capacità di interpretazione delle relazioni esistenti tra variabile dipendente e caratteristiche territoriali esplicative, è che la conoscenza della variabile dipendente sia il più possibile completa (per es.: che tutti i depositi minerari presenti siano già stati scoperti ed osservati). Il confronto tra celle con osservazione e celle con alto valore di probabilità stimato, fornisce un metodo di giudizio e verifica della adeguatezza del modello costruito.

Uno degli aspetti più interessanti di questo approccio è che il risultato di tale attività di modellizzazione non si esaurisce nella esplicazione delle relazioni che spiegano la presenza della variabile dipendente in dipendenza causale dalle altre variabili; lo stesso modello costruito su di un'area profondamente indagata può infatti venir esteso ad altre aree di studio, che manifestino caratteristiche territoriali sostanzialmente analoghe ma sulle quali la conoscenza dei fenomeni indagati sia incompleta o assente; l'obiettivo è quello di predire, per ciascuna cella, la probabilità di presenza di oggetti o fenomeni non ancora scoperti (v. fig 4).

I metodi di regressione multivariata sono diffusamente utilizzati per questo genere di applicazioni; tuttavia la costruzione di un corretto modello è subordinata ad alcuni prerequisiti strettamente vincolanti, quali la disponibilità di ampio ed approfondito livello di conoscenza, sia sulle variabili esplicative che sulla variabile dipendente. E' frequente nella realtà che tali condizioni non possano venir soddisfatte: in tali casi è preferibile far riferimento a tecniche di integrazione che si richiamano alla concezione soggettiva della probabilità. In assenza di *conoscenza completa* (scarsa disponibilità di piani informativi o di conoscenza sulla variabile dipendente), oppure di *conoscenza certa* (i dati disponibili sono insufficienti anche per la costruzione di un modello concettuale), bisogna ricorrere alla definizione di metodologie che sostituiscono l'apporto informativo dei dati con l'intervento dell'opinione (soggettiva) dell'esperto; nel caso di conoscenza incompleta, egli interviene fornendo valori di probabilità a-priori, basati su considerazioni dettate dalle proprie conoscenze e dall'esperienza acquisita, in luogo delle probabilità oggettive derivate dai dati, oppure, nel caso estremo di incertezza delle stesse ipotesi teoriche, assegna "livelli di fiducia" (cioè intervalli di probabilità) alle opinioni espresse. Nel primo caso scaturisce una tecnica di modellizzazione basata sulle regole di combinazione di probabilità condizionate (Teorema di Bayes), nel secondo caso si ricorre alle regole di combinazione di Dempster-Shafer (Teoria dell'evidenza).

Alla mappa viene sovrapposto un grigliato regolare a maglia quadrata di dimensione opportuna: la superficie cartografica risulta così scomposta in celle, a ciascuna delle quali viene attribuito il valore numerico che contraddistingue la caratteristica geografica presente nella corrispondente porzione di superficie reale.

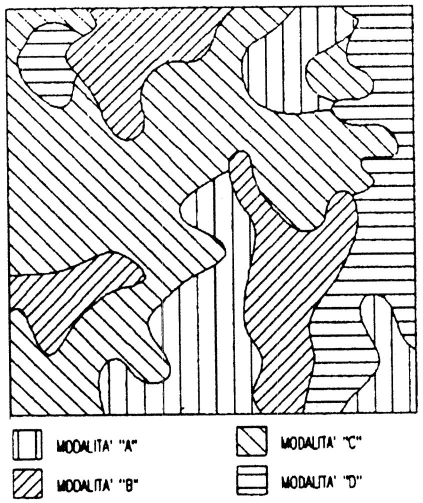


Fig. 1: esempio di carattere statistico spaziale di tipo qualitativo.

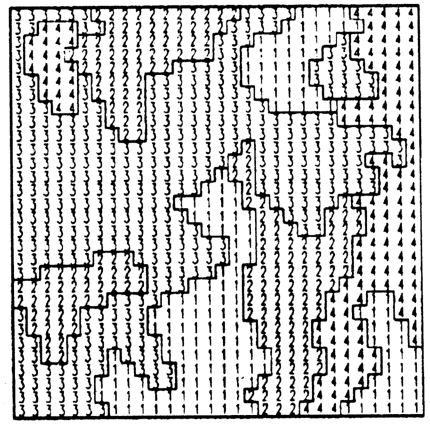


Fig. 2: rasterizzazione e riclassificazione numerica della mappa di Fig. 1.

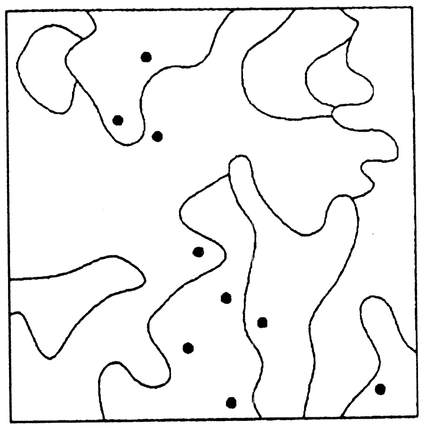


Fig. 3: esempio di distribuzione spaziale delle presenze osservate della variabile dipendente.

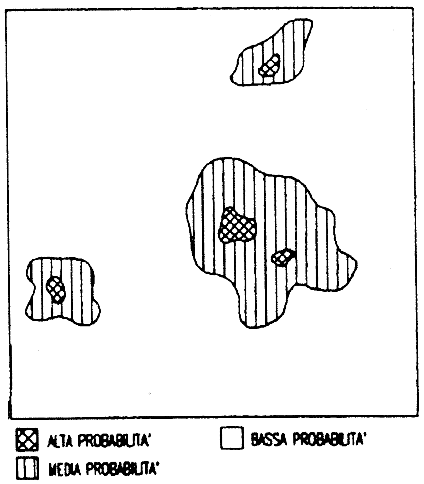


Fig. 4: esempio di distribuzione spaziale di probabilità stimate per nuove presenze della variabile dipendente.

Indice

Pubblicità

Vincenzo Vita

I PROGRAMMI DI MATEMATICA PER LE SCUOLE SECONDARIE DALL'UNITA' D'ITALIA AL 1986

Rilettura storico-critica

Pitagora Editrice - Bologna 1986 - L.10.000

Ai soci UMI sconto del 20%

BOLLETTINO DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

Editrice Compositori - Via Stalingrado 97/2 - 40128 Bologna; tel.051-327811, 327837; c.c.p.19136407.

Comitato scientifico: Enrico Giusti (Direttore), Luigi Pepe (vice direttore), Henk J.M. Bos, Jean Dhombres, Eberhard Knoblock, Clifford D. Truesdell, Pier Daniele Napolitani (Segretario di redazione).

Pubblicazione semestrale. Abbonamento annuo - Italia L.30.000; estero L.40.000

Ai soci UMI sconto del 20%

COLLANA DI QUADERNI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

9. C. CORRADI: *Problemi di stima in econometria e loro risoluzione numerica*, 1979, pp. 65 ..... L. 2.000
10. C. SITIA (a cura di): *La didattica della matematica oggi. Problemi, ricerche, orientamenti*, 1979, pp. VIII - 412 ..... L. 7.000
11. M.G. GASPARO, M. MACCONI, A. PASQUALI: *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali*, 1979, pp. V - 217 ..... L. 4.000
12. Z. KRIGOWSKA: *Cenni di didattica della matematica*, 1, 1979, pp. VIII - 244 ..... L. 4.000
13. F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, F. LAZZERI: *Topologia delle superficie algebriche in $P_3(C)$*, 1979, pp. II - 171 ..... L. 4.000
14. T. MANACORDA: *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, 1979, pp. IV - 112 ..... L. 3.500
15. C. CATTANEO: *Teoria macroscopica dei continui relativistici*, 1980, pp. V - 105 ..... L. 3.500
16. A. TOGNOLI, A. ZEPPILLI: *Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali*, 1980, pp. 121 ..... L. 3.500
17. AA. VV.: *Ottimizzazione non lineare e applicazioni*, a cura di S. Incerti e G. Treccani (Atti del Convegno Italsiel-UMI, l'Aquila 18 - 20 giugno 1979), 1980, pp. XI - 372 ..... L. 10.000
18. L. SALCE: *Struttura dei p-gruppi abeliani*, 1980, pp. IV - 300 ..... L. 8.000
19. S. COEN: *Una introduzione ai dominii di Riemann non ramificati n-dimensionali*, 1980, pp. VI - 222 ..... L. 5.000
20. C. CATTANEO: *Elementi di teoria della propagazione ondosa*, 1981, pp. VI - 216 ..... L. 6.000
21. G. GALLAVOTTI: *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto*, 1981, pp. XII - 388 ..... L. 8.000
22. A. CONTE: *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni*, 1982, pp. 136 ..... L. 4.500
24. L. CATTABRIGA: *Alcuni problemi per equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti*, 1983, pp. VIII - 192 ..... L. 7.000
25. A. CASSA: *Teoria elementare delle curve algebriche piane e delle superfici di Riemann compatte*, 1983, pp. VIII - 360 ..... L. 10.000
26. P.M. SOARDI: *Serie di Fourier in più variabili*, 1984, pp. VIII - 160 ..... L. 6.000
27. R. BENEDETTI, M. DEDÒ: *Una introduzione alla geometria e topologia delle varietà di dimensione tre*, 1984, pp. VIII - 152 ..... L. 5.000
28. P. BALDI: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, 1984, pp. VIII - 312 ..... L. 10.000
29. P. de LUCIA: *Funzioni finitamente additive a valori in un gruppo topologico*, 1985, pp. VIII - 188 ..... L. 7.500
30. R. CONTI: *Processi di controllo lineari in $\mathbb{R}^n$*, 1985, pp. VIII - 192 ..... L. 7.500
31. A. BACCIOTTI: *Fondamenti geometrici della teoria della controllabilità*, 1986, pp. VIII - 184 ..... L. 9.000
32. L. PANDOLFI: *Alcuni metodi matematici nella teoria dei sistemi lineari di controllo*, 1986, pp. XII - 296 ..... L. 15.000
33. S. BENENTI: *Relazioni simplettiche: la trasformazione di Legendre e la teoria di Hamilton-Jacobi*, 1988, pp. XII - 336 ..... L. 20.000
34. F. BORCEUX: *Fasci, logica e topoi*, 1989, pp. VIII - 300 ..... L. 24.000
35. S. DRAGOMIR, J. C. WOOD: *Sottovarietà minimali ed applicazioni armoniche*, 1989, pp. IV- 168 ..... L. 15.000
36. C. PROCESI: *Aspetti geometrici e combinatori della teoria delle rappresentazioni del gruppo unitario*, a cura di E. Rogora, 1991, pp. VIII - 172 ..... L. 20.000
37. J. KIJOWSKI: *Elasticità finita e relativistica: introduzione ai metodi geometrici della teoria dei campi*, a cura di D. Bambusi e G. Magli, 1991, pp. IV - 256 ..... L. 25.000
38. P. BASSANINI: *Leggi di conservazione iperboliche e onde d'urto*, 1993, pp. VIII - 160 ..... L. 25.000

Distribuzione: Libreria Pitagora Editrice - Via Zamboni, 57 - 40127 Bologna
Ai soci UMI sconto del 20% sui prezzi di copertina.

++

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il sottoscritto ____

chiede l'iscrizione al'Unione Matematica Italiana, come socio ordinario ☐ / straniero ☐

Data...........................

Firma leggibile e indirizzo

....

....

....

Soci presentatori (firme leggibili)

....

....

Il sottoscritto chiede inoltre di associarsi all'EMS (European Mathematical Society)(**) ☐

Pagamento effettuato il........................ sul c.c.p. N. 15869407 intestato all'U.M.I.

La quota annua (1994) è di L.60.000 per i Soci ordinari nazionali e residenti in Italia, nonché per i soci delle associazioni estere che facciano un trattamento di reciprocità all'U.M.I. (*). E' di L.120.000 per i Soci stranieri o nazionali residenti all'estero. E' di L.180.000 per gli Enti (Scuole, Istituti, Società in generale). I soci familiari (coniugi o figli di soci ordinari) pagano una quota annua di L.20.000; le iscrizioni come soci familiari vanno effettuate entro il 31/1.

Le quote, in Italia, possono essere versate sul Conto Corrente Postale n.15869407 intestato all'Unione Matematica Italiana, o essere inviate alla Segreteria dell'U.M.I. a mezzo di assegno bancario di c.c. o vaglia postale. All'estero potranno essere versate tramite vaglia postale o tramite banca.

(**) Chi desidera associarsi anche all'EMS (European Mathematical Society) dovrà versare una quota aggiuntiva di L.30000 all'atto dell'iscrizione.

(*) In tal caso si prega di specificare l'associazione alla quale si appartiene utilizzando le seguenti sigle: AMS = American Math. Soc.; DMV = Deutsche Math. Vereinigung; SMG = Schweizerische Math. Gesellshaft; LMS = London Math. Soc.; SMF = Societé Math. de France; SBM = Sociedade Brasileira de Mat.; CMS = Canadian Math. Soc.; SPM = Sociedade Portuguesa de Matematica; ÖMG = Österreische Math. Gesellschaft; PTM = Polskie Towarzystwo Matem.; IMS = Indian Math. Soc.; AuMS = Australian Math. Soc..

++