ISSN 0393-0998

Luglio 1997
Supplemento al n. 7

Period. mensile
sped. in abb. post.
L. 549/95 art. 2 c. 27
Filiale di Bologna

Anno XXIV

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DICIOTTESIMO CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«DALLA SCUOLA MEDIA ALLE SUPERIORI: CONTINUITÀ NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA»

CAMPOBASSO, 24-25-26 OTTOBRE 1996
a cura di Biagio Micale e Salvatore Pluchino

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai Soci e non è in vendita.

FASCICOLO MONOGRAFICO STAMPATO CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA, DEL MINISTERO DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA SCIENTIFICA E TECNOLOGICA (fondi ex 40%) NONCHÉ DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE.

Autorizzazione n. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)

Luglio 1997
Supplemento al n. 7

XVIII CONVEGNO NAZIONALE UMI - CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Dalla Scuola Media alle Superiori:

continuità nell'insegnamento della Matematica

Campobasso, 24-25-26 ottobre 1996

Il Convegno è stato organizzato dalla Commissione Italiana per L'Insegnamento della Matematica (CIIM). La CIIM è così composta: Claudio Bernardi (Presidente), Anna Maria Arpinati, Ferdinando Arzarello, Lucia Ciarrapico, Bruno D'Amore, Mario Ferrari, Biagio Micale, Giovanni Prodi, Carla Rossi, Francesco Speranza.

Alla realizzazione del Convegno hanno collaborato l'IRRSAE Molise, l'Università del Molise e la Telecom Italia (Molise).

PROGRAMMA

Giovedì, 24 ottobre 1996

ore 9.30 - Saluto del Presidente della CIIM, Claudio Bernardi.
- Saluti delle Autorità.
- Saluto del Presidente della Mathesis, Silvio Maracchia.
- Intervento del Vice-Direttore Generale Giuseppe Cosentino (MPI).
- Intervento del Presidente dell'UMI, Alberto Conte.

ore 11.10 - M. Pellerey: Continuità e discontinuità.

ore 12.30 - M. Arezzo: Sugli errori dei libri di testo di Matematica della Scuola Media.

ore 12.50 - B. D'Amore: Breve relazione sull'ICME 8.

ore 15.00 - Lavori di gruppo.

Venerdì, 25 ottobre 1996

ore 9.00 - Dibattito sul tema: "Programmi scolastici a confronto". Introducono: R. Bolletta, L. Gherpelli, V. Villani.

ore 11.00 - C. De Santis - L. Percario: Dalle costruzioni geometriche al rigore linguistico: un'esperienza didattica all'inizio del biennio.

ore 11.20 - G. Grassi - P. Nanetti - A. Orlandoni - C. Silla: Un'esperienza di "Laboratorio di Matematica".

ore 11.40 - E. Gallo: Continuità e discontinuità nella costruzione delle conoscenze geometriche.

ore 15.00 - M. Reggiani: Continuità nella costruzione del pensiero algebrico.

ore 16.40 - G. Bettini - F. Noè: Fare geometria con software didattico.

ore 17.00 - C. Speranza - A. La Torre: Il Progetto SO.TE.R..

ore 17.40 - L. Ciarrapico - M. Ciccarelli: Presentazione del "Progetto Prometeo".

Sabato, 26 ottobre 1996

ore 9.00 - D. Paola: I "nuovi temi" dei programmi: è realistico parlare di continuità tra Medie e Superiori?

ore 10.20 - E. Ferrari - G. Laganà - E. Luzi - E. Trovini: Il concetto di infinito nell'intuizione matematica.

ore 10.55 - C. Dapueto: Dalla Media al Triennio: come differenziare, per formalizzazione e sviluppo "tecnico", l'insegnamento dei vari temi.

ore 11.15 - Dibattito sul tema: "Obiettivi dei docenti delle Medie ed aspettative dei docenti delle Superiori". Introducono: N. Benedetti, L. Grugnetti, W. Maraschini.

ore 13.00 - Conclusione del Convegno.

PARTECIPANTI

Accascina Giuseppe (Roma), Aliquò Maria (Roma), Amicarelli Alida (Agnone IS), Antignani Claudio (Veroli FR), Aquilino Giuliana (Morcone BN), Aramini Floriana (Latina), Arezzo Domenico (Genova), Arpinati Anna Maria (Bologna), Arzarello Ferdinando (Torino), Barra Mario (Roma), Batini Maria (Roma), Battista Letizia (Roma), Bazan M. Chiara (Castelfranco Veneto TV), Benedetti Nella (Roma), Beninato Carmela (Misterbianco CT), Bernardi Claudio (Roma), Bernecoli Sandra (Rovigo), Bettini Giuliana (Bologna), Bindo Tiziana (Grottaglie TA), Bissi Pierina (Ospedaletto AV), Bolletta Raimondo (Roma), Bornoroni Silvana (Roma), Bove M. Antonia (Campobasso), Bruno Lucia (S.Croce di Magliano CB), Buono Rosa (Noicattaro BA), Candela Innocente (Putignano BA), Capelli Laura (S. Margherita Ligure GE), Capitanelli Raffaella (Roma), Carano Carmen (Campobasso), Carlomagno Maria Rita (Agnone IS), Carlone Gennaro (Sepino CB), Carriero M. Giuseppina (Campobasso), Caseario Antonio (Campobasso), Castagnola Ercole (Formia LT), Castellino Michela (Latina), Cavallaro Bruna (Roma), Cavallo Nicola (Noicattaro BA), Celentano Adriana (Roma), Cerasoli Mauro (L'Aquila), Cerocchi Elisa (Roma), Ciampicacigli Sandro (Roma), Ciarrapico Lucia (Roma), Ciccarelli Marcello (Latina), Cicchini Dante (Macchia d'Isernia IS), Ciccotelli Carmelina (Matrice), Ciceri Carlo (Savona), Colecchia Antonio (Termoli CB), Conte Alberto (Torino), Conte M. Concetta (Vinchiaturo CB), Conti Alberto (Roma), Conti Georgia (Roma), Cosimetti Marisa (Larino), Crespina Elena (Roma), D'Alessandro Rossana (Cosenza), D'Aloise M. Libera (Agnone IS), D'Ambrosio Giovanni (Campobasso), D'Amico Salvatore (Ielsi CB), D'Amore Bruno (Bologna), D'Aprile Margherita (San Fili CS), D'Urso Giuseppe (Riposto CT), Danese C. Mario (Caserta), Dapueto Carlo (Genova), De Caro Carolina (Napoli), De Cunto Giulio (Benevento), De Filippo Antonio (Casagiove CE), De Francesco Fernanda (Rotello CB), De Lisio Maria (Roma), De Rosa Ersilia (Montesano Scalo SA), De Santis Fundarò Carla (Roma), De Siervo Paola (Roma), De Vita Mauro (Roma), Del Frate M. Grazia (Parma), Del Gobbo Giuseppe (Limosano CB), Di Matteo M. Grazia (Morcone BN), Di Mola Sante (Monopoli BA), Di Sorbo Domenica (Piana di Monte Verna CE), Di Stasio Antonietta (Campobasso), Di Stasio Michelangelo (Amorosi BN), Di Stefano Rosa (S.Agapito IS), Di Toro Manola (Campobasso), Faggiano Luciano (Modugno BA), Falce Nicola (Frosinone), Fase Anna (Afragola NA), Ferrarello Donatella (Enna), Ferrari Ezio (Frosinone), Ferrari Mario (Pavia), Ferraro Giovanni (Afragola NA), Finocchi Bianca Maria (Chieti), Fiori Carla (Modena), Formica Domenica (Catania), Franco M. Assunta (Larino CB), Fuzzolante Enrico (Petacciato CB), Galasso Emma (Campobasso), Gallo Elisa (Torino), Gherpelli Loredana (Montale Rangone MO), Giuliani Elda (Pavia), Grassi Grazia (S.Lazzaro di Savena BO), Greco Simonetta (Genova), Grella Ida (Torette di Mercogliano AV), Grugnetti Lucia (Parma), Iaderosa Rosa (Milano), Impedovo Michele (Arcisate VA), Italia Giambattista (S.Agata Li Battiati CT), La Rosa M. Paola (Roma), La Torre Anna (Roma), Laganà Gaetano Antonio (Roma), Lanza Pasquale (Campobasso), Lanzillotta M.Gaetana (Roma), Lattanzi Tommaso (Latina), Lazzaro Caterina (Cosenza), Leonori Lucia (Ancona), Letizia Angiola (Lecce), Lizzio Angelo (Catania), Lollis Fortunato

(Campobasso), Lombardi Vanna Maria (Roma), Maffini Achille (Parma), Maglione Silvana (Campobasso), Malara Nicolina (Modena), Mangini Paola (Lido di Venezia VE), Maraschini Walter (Roma), Marchetti Fausto (Bolzano), Marchini Carlo (Parma), Marchitto Gabriella (Briano CE), Marino Giuseppe (Arcavata di Rende CS), Marone Silvia (Montecompatri RM), Marra Giancarlo (Boiano CB), Martini Berta (Bologna), Masin Daniela (Cornuda TV), Mataloni Anna (Roma), Materozzoli Alessandra (Roma), Mauro Raffaele (Terracina LT), Mazzilli Linetta (S.Elia a Pianisi), Micale Biagio (Catania), Milano Assunta (Isernia), Milone Carmela (S.Gregorio CT), Mirabella Anna (Enna), Miscischia Concetta (Napoli), Moauro Vincenzo (Isernia), Moncecchi Gianfranco (Milano), Morelli Aldo (Napoli), Moscucci Manuela (Siena), Nanetti Paola (Bologna), Napolitano Beatrice (Corbola RO), Nava Francesca (Roma), Navarra Giancarlo (Sedico BL), Noè Franca (Medicina BO), Olivello Antonietta (Napoli), Orlandoni Aurelia (Bologna), Paglione Pasqualina (Isernia), Panagiote Ligouras (Alberobello BA), Paola Domingo (Alassio SV), Patanè (Latina), Pellerey Michele (Roma), Pennisi Mario (Catania), Percario Zelinda (Grosseto), Perelli D'Argenzio M. Pia (Dosson di Casier TV), Perrella Antonio (Boiano CB), Petti Paolo (Ripalimosani CB), Piccione Maria (Siena), Piciucco M. Teresa (Campobasso), Plateroti Massimo (Roma), Pluchino Salvatore (Catania), Poli Maria (Rutigliano BA), Pontecorvo Antonella (Valmontone RM), Prestia Giuseppe (Vibo Valentia), Puglisi Giuseppe (Giarre CT), Pulvirenti M. Gabriella (Roma), Rago Gabriele (Campobasso), Rago Maria (Campobasso), Rambaldi Giacomo (Savona), Rapacchiano Domenico (Guglionesi CB), Reale Rosanna (Castrolibero CS), Reggiani Maria (Pavia), Repola Boatto Adele (Ancona), Ridolfi Irma (Roma), Rivaroli Adriana (Roma), Robutti Ornella (Torino), Romagnoli Nadia (Aprilia), Romanato M. Grazia (Latina), Romanò (Roma), Roncolini M. Luisa (Roma), Ruggeri Miriam (Valmontone RM), Salomone Lucia (Siena), Santoro Rosalba (Piedimonte Matese CE), Scarnati Anna (Cosenza), Scognamiglio Maria (Campobasso), Sferra Carmelina (Fiuggi FR), Silla M. Cristina (Sasso Marconi BO), Speranza Caterina (Roma), Spidalieri Giuseppina (Larino), Spilimbergo Francesca (Oderzo TV), Staropoli Francesco (Tropea VV), Tabarin Carla (Roma), Tamburro Antonietta (Cantalupo del Sannio IS), Tamburro Nora (Isernia), Tantari Eleonora (Colleferro RM), Tognolatti Maria (Roma), Tomaro Rossella (Campobasso), Tortora Roberto (Napoli), Tuccari Lorenzo (Misterbianco CT), Tucci Angela (Ortona CH), Uselli Elsa (Parma), Veralli Eva (Veroli FR), Vighi Paola (Parma), Villani Vinicio (Pisa), Virtù Maria (Guardiagrele CH), Vita Vincenzo (Enna), Vitullo Gianni (Montagano CB), Volpe Stefano (Roma), Zarlenga Giuseppina (Isernia), Zeoli Michela (Campolieto), Zincani Renato (Pescara).

RELAZIONI

Continuità e discontinuità nello sviluppo degli atteggiamenti e delle conoscenze e competenze in ambito matematico

*Michele Pellerey**

L'intervento vuole in primo luogo ricordare come l'intuizione del continuo e del discontinuo stiano alla base della stessa costruzione matematica. In seguito vengono usate queste due categorie concettuali combinandole con altre due categorie concettuali, quelle di esterno e di interno, dando luogo a quattro aree di esplorazione.

Viene segnalato, quindi, che occorre distinguere tra continuità e discontinuità esterne al soggetto (nell'insegnamento, nel contesto scolastico, nell'impianto formativo) e continuità e discontinuità interne al soggetto: nello sviluppo concettuale (comprensione), nello sviluppo di abilità, nello sviluppo di atteggiamenti e motivazioni. In un primo tempo verrà accennato alle forme di continuità e discontinuità esterne allo studente, in seguito a quelle interne alla sua esperienza soggettiva.

1. La continuità e la discontinuità come radici intuitive della matematica

Continuità e discontinuità hanno segnato e segnano lo sviluppo del pensiero matematico e dell'apprendimento di questa disciplina. Anche nella fisica la tensione rimane aperta. Il 4 aprile 1955, pochi giorni prima di morire, A.Einstein scriveva a M.Pantaleo: "L'antico contrasto continuità contro discontinuità appare, dal punto di vista relativistico-generale, particolarmente aspro, perché proprio qui lo spazio si presenta, non come indipendente, ma solo come campo continuo a quattro dimensioni. Una teoria discontinua della materia significa dunque nello stesso tempo rinunzia allo spazio" (Einstein, 1955, XIX).

Io credo che continuità e discontinuità si collochino alla base dello stesso edificio matematico; siano cioè le due intuizioni fondamentali che hanno guidato e guidano lo sviluppo scientifico di questa disciplina. L'intuizione del discreto e delle numerabilità sta certamente alla base dello sviluppo dell'aritmetica e dell'algebra. La sua esaltazione si è avuta con l'informatica. La matematica discreta cerca oggi di prendere il posto di quella continua. Il mondo numerico pitagorico sembra prendersi una clamorosa rivincita dopo la pesante sconfitta

---

* Ateneo Salesiano, Roma

infertagli dalla scoperta dell'irrazionale e dallo sviluppo geometrico della Grecia classica. Persino i bambini che usano il Logo perdono la possibilità di concettualizzare la pur primitiva intuizione del continuo: la loro rappresentazione geometrica di segmento e di angolo diventa di tipo discreto, il punto è dimensionato.

L'intuizione del continuo, radice della geometria razionale greca, era stata valorizzata dalla constatazione dell'esistenza (almeno nel pensiero) di segmenti incommensurabili. Il punto senza dimensioni portava alla costruzione dell'insieme dei numeri reali. E' ben noto come molti commentatori di Platone pensino che la scoperta dell'incommensurabilità e degli irrazionali si debba collocare nella stessa cerchia pitagorica e sia legata allo studio del rapporto tra diagonale e lato del quadrato. Ma ben più impressionante è la valorizzazione estetica che tale scoperta ha avuto. Il rapporto tra la lunghezza di un segmento e quella della sua sezione aurea era utilizzato come canone estetico di equilibrio tra larghezza e altezza delle facciate dei templi e nella stessa rappresentazione della figura umana (rapporto tra altezza totale della persona e distanza tra l'ombelico e la pianta dei piedi).

Se per i matematici è facile entrare e uscire da mondi matematici segnati dal continuo o dal discreto e accogliere le istanza di una complementarità tra le due intuizioni, per i giovani che apprendono la matematica tutto questo può essere origine di tensioni e conflitti cognitivi: da una parte si insegna loro che il segmento è costituito da infiniti punti senza dimensioni e dall'altra si invitano a disegnare con il computer segmenti lunghi 100 pixel (con il sottinteso che il pixel è un segmentino piccino piccino, anzi il più piccolo disponibile), Quanto agli angoli, sembra che a poco a poco si insinua l'idea che di fatto esista un angolo che è il più piccolo di tutti e che è di ampiezza un grado. Ai movimenti continui analogici tipici degli orologi meccanici si sono a poco a poco sostituiti i movimenti discreti a scatti propri di quelli a quarzo. E alla rappresentazione digitale del tempo (variabile intuitivamente continua) oggi si accosta anche una rappresentazione digitale dei suoni e delle immagini. E' facile allora giungere alla conclusione che la percezione della continuità del movimento sia solo una costruzione fisiologica, dovuta alla persistenza della immagini visive e sonore nella nostra memoria sensoriale. Insomma gli argomenti contro il moto di Zenone riprendono attualità e appaiono spesso vincenti.

E' chiaro che qui si colloca una delle sfide più interessanti e profonde per il nostro insegnamento. Le domande che emergono immediatamente possono essere: è necessario compiere una scelta, privilegiando l'intuizione del discreto e rinunciando a modelli continui di descrizione dei fenomeni fisici? oppure si deve garantire un equilibrio, aiutando non solo a comprendere la differenza tra i due mondi matematici, ma anche a saperne cogliere valori e limiti, a scegliere i giusti modelli di lavoro? E ancora: come evitare tensioni e incomprensioni nel processo di apprendimento? può aiutare una valorizzazione sistematica del principio di complementarità? Questo principio ben conosciuto in fisica è stato utilizzato in matematica in particolare da W.Kuyk (1982,122) che ha enunciato "l'ipotesi che la matematica si basi su due intuizioni fondamentali, l'ntuizione del discreto e l'intuizione del continuo, ciascuna delle quali corrisponderebbe a un particolare tipo di esistenza, vale a dire l'esistenza del senso del numero e del discreto e l'esistenza del continuo e della spazialità". Con la conseguenza che la matematica sarebbe: "la scienza esclusiva che studia le connessioni tra le qualità mutuamente irriducibili del discreto e del continuo, del numero e della spazialità".

A mio avviso un utilizzo sistematico del principio di complementarità non solo in matematica, ma anche nella considerazione dei processi formativi non solo potrebbe aiutare a risolvere non poche problematiche didattiche locali, ma rispondere a numerose istanze formative più generali.

2. Continuità e discontinuità nella formazione matematica: le componenti istituzionali

E' utile in primo luogo soffermarsi brevemente su alcuni aspetti di continuità e discontinuità esterni al soggetto. Un primo ambito di analisi deve certamente riguardare eventuali continuità e discontinuità <u>nei programmi di insegnamento</u>: tra scuola elementare, scuola media e scuola secondaria superiore. I programmi, infatti, sono stati redatti in tempi diversi e da commissioni diverse, anche se alcuni membri di queste erano presenti nella redazione di quelli più recenti. Nonostante la diversità di composizione di queste commissioni, si può tuttavia cogliere un filo rosso che li attraversa tutti.

In primo luogo va segnalata la rivalutazione della geometria come una delle parti fondamentali dell'educazione matematica (in particolare nella scuola elementare) e l'introduzione sistematica delle trasformazioni geometriche a tutti i livelli (dallo studio dei movimenti rigidi a quello delle corrispondenze biunivoche tra i punti del piano e dello spazio che conservano determinate proprietà geometriche). E' evidente in questo caso una particolare attenzione non solo all'intuizione spaziale e del continuo, ma anche al loro essenziale ruolo formativo. Nello stesso sviluppo dell'aritmetica e della geometria si sollecita la valorizzazione di interpretazioni geometriche sia nella fase introduttiva dei vari concetti e procedimenti, sia in quella applicativa.

In secondo luogo va poi segnalata l'introduzione progressiva di logica, probabilità e statistica e di elementi di informatica con peculiarità significative rispetto a esperienze spesso fallimentari riscontrate in altri Paesi. La logica del certo e del probabile non stanno alla base della costruzione dell'edificio matematico, bensì sono strumenti di organizzazione e di verifica della coerenza dei discorsi, delle argomentazioni e delle previsioni circa il verificarsi di eventi futuri. L'informatica ha un valore a un tempo concettuale e strumentale ed esige una particolare attenzione nella sua introduzione perché non sempre la sua terminologia e il suo apparato simbolico risultano omogenei con quelli matematici (come quando si parla di numeri reali o si usa il segno =). Dal punto di vista poi dello sviluppo dell'intuizione spaziale, come già accennato, occorre tener conto delle potenzialità e dei limiti di una rappresentazione discreta degli oggetti e delle trasformazioni geometriche.

In terzo luogo si nota una progressiva e pervasiva attenuazione dell'importanza dello sviluppo di abilità di calcolo di natura prevalentemente meccanica. Si insiste invece sulla costruzione e sulla comprensione degli algoritmi di calcolo, sull'uso intelligente e funzionale delle calcolatrici tascabili e dei computer. Più impegnative nei vari programmi risultano le indicazioni rivolte a promuovere il gusto di affrontare sfide moderate nella soluzione di problemi e una costruzione concettuale progressivamente più elaborata, sicura e fruibile. Questi due aspetti stanno certamente al cuore non solo del pensiero matematico, ma anche di un atteggiamento positivo verso questa disciplina.

Di fronte a una sostanziale continuità di prospettiva nella formazione matematica occorre segnalare una notevole discontinuità nelle programmazioni, soprattutto nella transizione tra i vari segmenti scolari. L'impressione raccolta da indagini sviluppate in anni recenti è che i docenti della scuola media non conoscano i programmi della scuola elementare. D'altro canto è ben difficile sapere quali temi siano stati effettivamente affrontati nella scuola media e a quale livello di profondità. In particolare appaiono sacrificate la logica, la probabilità e le trasformazioni geometriche. Recenti indagini sui risultati dei processi di apprendimento scolastici hanno messo in risalto ampie differenze tra classe e classe, tra scuola e scuola, tra provincia e provincia.

Si notano in questo contesto forti diversità di attese e di valore attribuito alle diverse conoscenze e competenze, di modi di esporre e di linguaggio adottato. Per verificare queste discontinuità basterebbe, nell'ambito dei vari bacini di utenza, sondare le attese di competenze da raggiungere a fine scuola elementare e fine scuola media di quanti operano in questi segmenti scolastici e le attese dei docenti di prima media e di prima secondaria superiore o esaminare su quali aspetti dell'apprendimento si concentra l'attenzione dei docenti. A che cosa viene attribuito valore nella scuola elementare? I programmi insistono molto sugli aspetti cognitivi e affettivi, nella prassi valutativa di questo segmento scolastico di fatto si dà ancora eccessivo spazio al calcolo. Nella scuola media e nel biennio si evidenzia un certo appiattimento su tematiche tradizionali, trascurando spesso aspetti più significativi e formativi. L'importanza data allo sviluppo delle abilità di calcolo è accompagnata altrettanto spesso dal rifiuto di dare spazio a un uso intelligente della calcolatrice tascabile e dalla debolezza nel promuovere il calcolo

mentale, le competenze dell'approssimare, arrotondare, troncare i numeri e le misure.

Si nota inoltre una costante tendenza a utilizzare come indicatore fondamentale per la valutazione il numero di errori commessi, piuttosto che la comprensione e le strategie di pensiero adottate. Assai poco si promuove la capacità di studio autonomo e quindi di lettura significativa di un testo di matematica. Tuttavia, spesso l'aspetto più debole della pratica valutativa sta nel non conservare in maniera ordinata e sistematica la documentazione relativa ai singoli alunni, per poter poi di tanto in tanto, e soprattutto all'inizio e alla fine dei quadrimestri, esaminare i progressi compiuti, individuare i punti deboli, i ritardi, le perdite di ritmo, ecc. Un suggerimento spesso avanzato è quello di predisporre un fascicolo personale, detto anche portfolio, nel quale collocare in maniera ordinata il materiale documentario raccolto e utilizzare tale documentazione non solo per valutare i progressi o le incertezze degli studenti, ma anche favorire forme di autovalutazione. Anche in questo caso si perde di vista la dinamica di un apprendimento che si svolge nel tempo e quindi l'uso di un paradigma valutativo ispirato alla continuità, per procedere solo per conteggi di errori compiuti in singoli compiti o interrogazioni considerati nel loro isolamento e magari elaborare medie aritmetiche adottando un paradigma di riferimento chiaramente discreto.

3. Continuità e discontinuità nella formazione matematica: l'aspetto affettivo

Il soggetto percorre un cammino scolastico che lo vede protagonista delle sue conquiste, come delle sue rinunzie. In tutto questo gioca un ruolo centrale la componente affettiva e motivazionale. In tutto il mondo si riscontra una progressiva, continua e monotona caduta di interesse verso al matematica e simmetricamente una progressiva crescita continua e monotona di un atteggiamento negativo verso la matematica che non solo riguarda l'estensione del fenomeno, cioè del numero dei soggetti coinvolti, ma anche la sua intensità soggettiva, che conduce anche a forme di rancore e odio profondo.

La ricerca disponibile in molti Paesi, inclusa l'Italia (Pellerey-Orio, 1996) porta alla constatazione che nell'insorgere di un atteggiamento negativo verso la matematica un ruolo centrale è svolto dalla progressiva e sempre più approfondita mancanza di comprensione dei concetti e dei procedimenti. Il pericolo in questo ambito, quello affettivo, è legato alla tendenza, soprattutto sottolineata dagli psicologi, di considerare come determinanti *solo* gli aspetti relazionali interpersonali (accettazione, vicinanza, accoglienza, incoraggiamento, ecc.), anche se questi sono certamente componenti importanti della vita della classe e dell'insorgere di reazioni emotive positive o negative verso quanto in essa si svolge.

A questo punto del discorso è forse utile approfondire alcuni processi interni di natura affettiva e motivazionale legati all'apprendimento delle matematica, non solo per chiarire ulteriormente le ragioni del nascere e svilupparsi di questi atteggiamenti negativi, ma anche per individuare, se possibile e almeno a grandi linee, possibili percorsi di discontinuità, cioè di ricostruzione di interesse e disponibilità di impegno.

In primo luogo gioca in tutto questo il sistema di convinzioni personali. Questo deve essere ben distinto dalla base di conoscenze posseduta, infatti ogni sistema di convinzioni include sentimenti e valutazioni di natura affettiva, ricordi vivi di esperienze personali e giudizi soggettivi conseguenti che non sono facilmente riscontrabili da una valutazione esterna come lo sono le componenti delle basi di conoscenza. In genere si afferma che un sistema di convinzioni ha una struttura gerarchica, nel senso che ogni convinzione è caratterizzata da un certo grado di sicurezza più o meno elevato e che questa si collega con altre di carattere più generale o più particolare.

Un ruolo centrale è svolto dalle percezioni soggettive e dalle convinzioni personali in molti ambiti affettivi. Nel campo matematico oltre alla percezione della propria capacità, alla concezione che si ha della natura dell'intelligenza matematica, occorre ricordare: la concezione della matematica stessa come disciplina scolastica; il concetto di sé in relazione alla matematica e al suo apprendimento e il valore loro attribuito. Si sono riscontrate diffuse convinzioni circa il fatto che la matematica sia difficile e poco importante, almeno nei riguardi di se stessi. In particolare alcune indagini hanno mostrato come le convinzioni personali circa la capacità di affrontare la soluzione di problemi costituisca una forte mediazione tra precedenti esperienze, concezione di sé nei riguardi della matematica, percezione dell'utilità della matematica e prestazioni ottenute.

Oggi si insiste da parte della ricerca didattica sull'importanza di un approccio costruttivo e sostanziale e non solo riproduttivo e formale al suo apprendimento (Pellerey, 1991). Lo studente in questo approccio deve essere visto come un attivo costruttore di significati e di abilità. Si possono a questo proposito considerare tre principali forme di costruttivismo: endogena, esogena e dialettica. La prima deriva dalle ricerche piagetiane e viene definita spesso costruttivismo radicale; la seconda forma tiene conto degli apporti socio-cognitivi derivati dalle ricerche di A.Bandura, in particolare nella prospettiva di un apprendistato cognitivo; la terza forma è strettamente connessa con la tradizione vygotskjiana e spesso viene denominata costruttivismo sociale. Tutte e tre queste forme di costruttivismo descrivono significative e interconnesse modalità di attivazione dell'apprendimento scolastico della matematica. Per questo motivo è pericoloso assumere da parte dell'insegnante concezioni unilaterali e preconcette e su questa base valutare le prestazioni dei suoi allievi. Ne potrebbero nascere tensioni e

conflitti non indifferenti tra caratteristiche personali, convinzioni degli studenti e convinzioni dei docenti.

Strettamente collegato con il sistema di convinzioni personali è il sistema di valori soggettivamente elaborato. Questi nel nostro contesto possono essere definiti come disposizioni interne di natura generale che fanno da fondamento agli stati motivazionali che emergono in contesti specifici. Per attribuire valore a un tipo particolare di impresa matematica, come risolvere problemi non di routine, lo studente deve riuscire a comporre esperienze emozionali positive provate in tale attività, ragioni circa la sua utilità personale e sociale, disponibilità immediata e perseveranza nell'impegnarsi in essa.

Varie teorie motivazionali hanno evidenziato le interconnessioni profonde tra attese di successo o di raggiungimento di un obiettivo e valore a questo soggettivamente attribuito. Quest'ultima variabile viene oggi riletta in senso assai più vasto e comprensivo di quanto originariamente pensato. Il valore attribuito alla matematica, al suo apprendimento e alla riuscita personale in specifici compiti matematici costituiscono un costante riferimento interiore che influisce sugli stati motivazionali, sulle scelte personali e esperienze emozionali provate.

Gli atteggiamenti, d'altra parte, sono caratterizzati da manifestazioni esterne stabili di valori interni e sono quindi definiti dagli stessi fattori di natura cognitiva, affettiva e comportamentale. Giudizi generali come "a me piace risolvere problemi di geometria" oppure "odio problemi che non riesco a capire subito come risolvere" sono fonti di informazione circa atteggiamenti e valori. Così costituisce un indice di atteggiamento positivo la facilità con la quale uno studente si organizza per affrontare un compito impegnativo.

Lo sviluppo di un atteggiamento negativo verso la matematica è stato studiato a lungo anche perché esso trova le sue radici abbastanza presto nell'esperienza scolastica degli allievi. Da tempo sono stati individuati due momenti cruciali: l'introduzione dei numeri decimali e l'inizio dell'algebra. Si tratta di mancanza di comprensione di ciò che si studia, di disorientamento e di sensazione di muoversi in un terreno minato e confuso, il tutto associato a emozioni negative (Pellerey e Orio, 1995).

A esempio l'Inventario di Atteggiamenti verso la Matematica di Sandman include sei scale di misura: il piacere nel fare matematica; il valore dato alla matematica, la percezione dell'insegnante di matematica, l'ansietà nei riguardi della matematica, il concetto di sé nei riguardi della matematica, la motivazione nel fare matematica. Queste scale indicano uno spostamento interessante nel prendere maggiormente in considerazione le convinzioni soggettive degli studenti.

Ulteriori studi recenti confermano che la motivazione, la convinzione circa la propria abilità e gli atteggiamenti positivi diminuiscono soprattutto nella transizione nel passaggio dalla scuola elementare alla scuola media, portando fino a una avversione verso la matematica che risulta in un rifiuto totale, nonostante la sua importanza per gli studi superiori o per la professione futura desiderati.

Da alcune nostre ricerche (Pellerey-Orio, 1995; Pellerey, 1996; Pellerey - Orio, 1996) sembra che i fattori chiave che entrano in gioco da punto di vista affettivo in questo progressivo disamoramento siano: il prevalere di emozioni negative rispetto a quelle positive che si provano nelle lezioni di matematica e nel fare matematica; una progressiva a sempre più consolidata percezione di inadeguatezza e di incapacità insuperabile nel capire e nel risolvere problemi e questioni di matematica; esperienza di ansietà incontrollabile nel contesto delle lezioni, delle interrogazioni e dei compiti; senso di disorientamento nell'affrontare lo studio della matematica, cioè non si sa che cosa è più importante e perché lo è, su che cosa verrà dato un giudizio positivo da parte dell'insegnante e perché, ecc.

4. I momenti e le ragioni di discontinuità nella comprensione e di continuità nel crescere di un atteggiamento negativo

E' utile insistere sui momenti che generano problemi affettivi e motivazionali legati all'incomprensione. Sono i momenti di discontinuità cognitiva, che, a mio avviso, costituiscono la base dello sviluppo di un atteggiamento negativo verso la matematica. Essi possono essere identificati con una immaginaria linea del tempo scolastico che parte principalmente dalla terza elementare, ma ha qualche prodromo in seconda. Ne accenno ad alcuni. Sarebbe interessante esplorare l'intero percorso della formazione matematica da questo punto di vista.

a) In genere prodromi di presenti o più facilmente future incomprensioni sono generalmente legati alle operazioni inverse, cioè alla sottrazione e alla divisione. Comunque per tutte le operazioni inizia una separazione tra operazioni scritte e relativi problemi di correttezza di scrittura e di esecuzione e significato delle operazioni stesse, soprattutto in un contesto di problemi di natura pratica, dove entrano in gioco riferimenti a oggetti specifici o a unità di misura particolari. Si avvia una pericolosa separazione tra conoscenze di natura concettuale, cioè tra significati da attribuire alle operazioni e ai loro meccanismi esecutivi, e conoscenze di natura procedurale da rendere automatiche.

b) L'introduzione dei decimali. La questione è stata abbondantemente studiata, in particolare nel contesto della teoria degli ostacoli epistemologici. In Italia l'introduzione dei decimali troppo spesso avviene già in terza elementare. E' molto difficile quindi disporre di una base adeguata di comprensione delle frazioni decimali. In genere ci si basa sulla misura e sull'introduzione delle unità di misura e relativi sottomultipli. Gli effetti a lungo termine sono quelli di non percepire con chiarezza le caratteristiche dell'insieme dei decimali, almeno di quelli limitati. Si ripartiscono così i decimali in classi separate secondo una partizione intuitiva: numeri senza decimali, numeri con un solo decimale, numeri con due decimali, ecc. Di qui un notevole grappoli di difficoltà sul cammino successivo.

c) Nell'ambito della geometria, nonostante ampi suggerimenti disponibili per superare il problema, si nota ancora una difficoltà persistente nel distinguere tra area e perimetro, tra superficie che racchiude un solido e spazio da questo occupato. Come si avverte una notevole rigidità nella considerazione dei vari poligoni, sia dal punto di vista percettivo, che classificatorio. Per cui un rettangolo non è un trapezio, un rombo non è un parallelogrammo, ecc.

d) Certamente un passaggio più complesso e fonte di notevoli incomprensioni e disagi è quello connesso con l'introduzione delle lettere intese come variabili. Da una parte queste sono viste come grandezze variabili, e quindi non solo legate a precisi riferimenti concreti, ma anche come variabili che variano con continuità. Dall'altra si parla di variabili come puri segnaposto, cioè segni che stanno al posto di qualcosa che deve essere specificato ulteriormente. Ben presto si passa anche alla manipolazione di queste lettere, e non interessa più né sapere se si tratta di grandezze, né se ci si riferisce a particolari insiemi numerici. E' una transizione di livello di astrazione che va esplicitata, anche perché porta spesso a non interessarsi più del significato concettuale di queste manipolazioni, soprattutto quando si tratta di formule riferite a grandezze specifiche. Viene così consolidata la separazione o discontinuità tra significati concettuali da attribuire alle formule e alle loro trasformazioni e attenzione alle sole regole procedurali.

e) Un ulteriore momento chiave è stato ben studiato. A esso basta accennare perché V.Villani lo ha affrontato in maniera chiara ed esplicita (Villani, in stampa). Riguarda le proporzioni e in genere la proporzionalità. Qui sta certamente un grappolo concettuale di estrema importanza non solo per la matematica, ma per tutto il sapere scientifico. Alla radice del tutto sta certamente il concetto di rapporto e le sue varie forme rappresentative, dalla frazione, alla divisione, alla percentuale, ai numeri indice, ecc. Ma ne rimangono segnate anche la costruzione dell'insieme dei razionali, la comprensione delle riduzioni in scala, lo sviluppo delle trasformazioni omotetiche e simili, ecc. Tutto questo ampio campo concettuale non solo costituisce un impegno di grande valore formativo (e pratico), ma può costituire nel tempo un notevole ostacolo concettuale, didattico ed epistemologico. E le conseguenze si pagano anche sul piano emozionale e degli atteggiamenti.

Non mi dilungo oltre, ma la lista potrebbe allungarsi assai, basti pensare alla logica del certo e del probabile.

5. Continuità e discontinuità didattiche

Dal punto di vista didattico posso solo accennare ad alcuni punti di notevole rilievo formativo.

a) I momenti della discontinuità comunicativa. La capacità di comunicare nell'ambito della matematica implica molte competenze che possono essere sviluppate sono molto lentamente e progressivamente. In primo luogo saper leggere e capire un testo di matematica. Da questo punto di vista la pratica didattica risulta assai povera: non solo non si promuove la capacità di leggere lo stesso manuale adottato e di comprenderlo adeguatamente, ma ancor meno se ne verifica il progresso nel tempo. In secondo luogo si tratta di saper esprimere in maniera valida ed efficace le proprie idee, i propri ragionamenti, le proprie conclusioni sia oralmente, che per iscritto. E saper argomentare, discutere, con l'insegnante e con i compagni. Si tratta di abilità che devono essere promosse nella pratica didattica e il cui sviluppo dovrebbe essere tenuto sotto controllo.

Questi due fondamentali aspetti della formazione matematica sono fortemente sottovalutati nel corso della scuole elementare e media. Di qui nascono molte difficoltà nella transizione alla scuola secondaria superiore. In primo luogo si richiede agli studenti una capacità di studio autonomo, che significa in gran parte capacità di apprendere da un testo scritto, in particolare matematico e scientifico. Ma questa capacità, come notato, non costituisce un obiettivo fondamentale della scuola dell'obbligo. In secondo luogo si richiede una notevole capacità di ragionamento e argomentazione orale e scritta, in sostanza saper comunicare le proprie idee matematiche e saperle difendere di fronte alle controargomentazioni.

b) Continuità e discontinuità nella concezione della matematica, del suo insegnamento e del suo apprendimento, in particolare in relazione alla risoluzione di problemi. Gli studenti sviluppano nel tempo radicate convinzioni circa il significato che per loro viene ad avere lo studio della matematica e quindi il grado di interesse per il suo studio, gli obiettivi personali che si pongono. A esempio si nota come il desiderio di superare positivamente interrogazioni e compiti in classe sovrasti e talora oscuri del tutto quello di cercare di capire e sviluppare competenze specifiche reali. Si cerca comunque di ottenere un risultato positivo ed evitare una negativo, anche con sotterfugi, anziché addentrarsi in maniera valida e significativa nel mondo del sapere matematico. Quanto poi alla natura di quest'ultimo, prevale una concezione statica, formale, riproduttiva, meccanica di un qualcosa che nella percezione soggettiva può assimilarsi facilmente a una lingua morta.

c) La ricerca ha utilizzato recentemente anche in campo matematico le suggestioni di G.Bachelard nel campo delle scienze della natura circa il ruolo degli ostacoli epistemologici nello sviluppo delle conoscenze matematiche. Un'acquisizione di nuove conoscenze spesso deve andare contro le conoscenze precedentemente costruite. Prendere coscienza di questo fenomeno significa in primo luogo accettarlo come una forma normale di progresso nel sapere. Ne derivano varie conseguenze didattiche abbastanza evidenti. La prima riguarda la valorizzazione dei conflitti cognitivi e di quelli sociocognitivi nella destrutturazione di convinzioni e conoscenze inadeguate e poi nella costruzione di nuove e più adeguate convinzioni e conoscenze. la seconda riguarda la valorizzazione degli errori. Una tradizione pedagogica negativa deriva da posizioni filosofiche risalenti a Cartesio. Egli affermava che la nostra ragione funziona sempre bene, se non è turbata da passioni o cattiva volontà. Gli errori così sono visti come debolezze e segno di disimpegno o di negligenza. La tradizione antica e quella scientifica moderna vede invece presa di coscienza degli errori e delle loro ragioni la molla fondamentale del progresso conoscitivo. E questo vale non solo nella scienza, ma anche nell'apprendimento.

d) Si è già accennato alla discontinuità tra abilità procedurali e comprensione concettuale. Estese ricerche hanno evidenziato come nello sviluppo delle abilità di calcolo si stabilizzino presto errori procedurali radicati in abitudini consolidate. Nella scuola elementare può trattarsi di errori nel fare le sottrazioni, nella scuola media errori nell'addizionare e sottrarre frazioni. Nonostante il fatto che gli stessi studenti posseggano elementi concettuali che potrebbero fare da supporto alla comprensione e controllo dei loro errori, tali elementi non vengono attivati quando necessario. In tutto questo si nota una debolezza didattica dell'insegnamento. In effetti quando si è sviluppato automatismo di calcolo si usa dire in psicologia cognitiva che esso è stato compilato, cioè esso viene eseguito ormai senza più pensare al significato delle singole operazioni mentali e pratiche che costituiscono l'algoritmo esecutivo. Per smontare un automatismo errato o inadeguato occorre elaborare un programma abbastanza sistematico e intelligente di modificazione del comportamento, cosa del tutto ignorata dalla pratica didattica.

6. Conclusioni e prospettive di lavoro

Si potrebbe continuare in questo elenco, ma è più importante giungere ad alcune conclusioni operative. Molte di queste sono state indicate da V.Villani al quale rimando. Io vorrei insistere su alcuni altri punti chiave.

a) Occorre promuovere un insegnamento diretto alla comprensione. Certamente si devono promuovere anche abilità che saranno tanto più utili, quanto più automatizzate. Ma il loro sviluppo in maniera meccanica e poco significativa non garantisce un loro uso intelligente, soprattutto in un contesto di soluzione di problemi. Capire, comprendere significa molte cose. In primo luogo vuol dire saper attribuire significato a quanto si legge o si ascolta, cioè riuscire a collegare ciò che si incontra per la prima volta: a quanto già si possiede in maniera stabile e significativa; a qualche pezzo della propria esperienza o della propria immaginazione; ad almeno un esempio, o a più esempi, che si riferiscono chiaramente a quello di cui si parla e, se si riesce, a uno o più controesempi; ad applicarlo a qualche situazione famigliare o caso pratico di cui si è a conoscenza.

b) Occorre sviluppare le abilità comunicative e argomentative. Il pensiero matematico ha bisogno di esprimersi in maniera non solo corretta, ma anche efficace. Le nostre congetture per superare le difficoltà poste dagli altri devono potersi appoggiare ad efficaci forme di persuasione.

c) La capacità di risolvere problemi, soprattutto se non ripetitivi e banali, è basata su due componenti fondamentali: lo sviluppo del gusto di affrontare sfide intellettuali moderatamente rischiose in un contesto di sicurezza psicologica e l'attivazione di forme di apprendistato, cioè il passare progressivamente da forme più legate a esempi e modelli proposti a modalità d'azione più autonome e sicure attraverso una pratica continua e sistematica. La prima condizione è essenziale: non si impara a risolvere problemi durante un'interrogazione nella quale il tempo di reazione è una componente essenziale di valutazione e dalla propria risposta dipende la propria sorte matematica e scolastica. Occorre che li si affrontino in un contesto il cui non ci si senta minacciati nella nostra identità, in cui se compiamo qualche errore, o avanziamo qualche ipotesi non valida, non pesi su di noi un immediato giudizio di incapacità o di ignoranza.

d) Tutto questo implica la necessità di favorire esperienze emozionali positive, che possono fare da fondamento allo sviluppo di atteggiamenti positivi verso la matematica e il suo apprendimento. Un'esperienza emozionale positiva emerge però quando si percepisce che abbiamo effettivamente superato un ostacolo, che il nostro sforzo ha prodotto realmente un risultato apprezzabile, non quando si avverte che siamo riusciti perché l'insegnante ha avuto pietà di noi e ci ha dato un compito facile facile o perché abbiamo banalmente seguito il suggerimento di un compagno o dell'insegnante stesso.

Riferimenti bibliografici

Einstein A. (1955), "Prefazione". In: M.Pantaleo (a cura di), *Cinquant'anni di relatività*, Firenze, Giuntine-Sansoni, XVIII-XX.

Kuyk W. (1982), *Il discreto e il continuo, complementarità in matematica*, Torino, Boringhieri.

Pellerey, M. (1991), *Mathematics Instruction*. In A.Lewy (Ed.), *The International Encyclopedia of Curriculum*, Oxford, Pergamon Press, 870-881.

Pellerey M. - F.Orio (1995), *La diagnosi delle strategie cognitive, affettive e motivazionali coinvolte nell'apprendimento scolastico*. "Orientamenti Pedagogici", 4, 683-726.

Pellerey M. (1996), *Questionario sulle strategie d'apprendimento*, Roma, LAS.

Pellerey M. - F.Orio (1996), *La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica*. "ISRE", 2, 52-73.

Villani V. (in stampa), *Dal concreto della scuola dell'obbligo all'astratto della scuola superiore. Conquista di nuovo sapere o perdita di significato?*

Continuità e discontinuità nella costruzione delle conoscenze geometriche

*Elisa Gallo**

Premessa

Sul triangolo di vertici I(nsegnante) - A(llievo) - D(isciplina) utilizzato nelle ricerche relative al contratto didattico si può leggere che A chiede a I continuità nella costruzione del sapere e che D chiede a I continuità nel programmare il proprio insegnamento. È naturale che I cerchi risposte in ambito istituzionale (i programmi) e tra i risultati di ricerca (didattica - epistemologica - storica - ...).

1. La Geometria nei Piani di studio

Nei Programmi la Geometria appare sia come tema negli Obiettivi e Contenuti (che stabiliscono con una prescrittività forte CHE COSA si deve sapere e saper fare in un certo tipo di scuola e in un determinato momento della scolarità), sia nelle Indicazioni didattiche (che stabiliscono con una prescrittività più debole COME si arriva al CHE COSA).

Seguendo quanto scritto della Geometria nei Programmi, a partire dalla scuola elementare fino al termine della secondaria, si sente che sono presenti come intenzione diversi tipi di continuità:

- una continuità tematica, sia interna ad un certo livello scolastico sia tra livelli scolastici contigui;
- una continuità disciplinare attenta a collegare la Geometria ad altri temi;
- una continuità logico-cognitiva attenta a metodi e processi del "fare geometria";
- una continuità programmatica attenta ai legami insegnamento/apprendimento.

Una lettura più approfondita della Geometria nei Programmi nell'ottica della *continuità tematica* mette in evidenza che essa è prodotta da

♣ la scelta della geometria euclidea come ambiente nel quale deve formarsi il sapere geometrico, in quanto studio delle FIGURE, dapprima *euclideo in modo assoluto* (non si sa che c'è altro ad di fuori dell'euclideo), successivamente, divenuto un sistema ipotetico-deduttivo attraverso la consapevolezza del dimostrare le proprietà e dell'ammettere gli assiomi,

* Dipartimento di Matematica, Università di Torino

euclideo in modo relativo (si scopre che esistono geometrie non euclidee per negazione).

♣ la presenza delle TRASFORMAZIONI (geometriche) fin dall'inizio della costruzione della geometria come sapere, con successive centrazioni su

simmetrie, traslazioni, rotazioni, omotetie e similitudini

♣ che non impediscono tuttavia la loro presenza totale già nella fascia primaria e la loro ripresa successiva nella scuola secondaria sia inferiore, sia (di nuovo) superiore.

♣ l'esigenza che il sapere geometrico porti a una conoscenza dello SPAZIO (tridimensionale), dapprima fisico e successivamente geometrico, da "legare" in qualche modo con il piano, sempre e dovunque ambiente privilegiato per lo studio della geometria.

Emergono allora alcune **questioni** su cui riflettere:

- come differenziare lo studio delle figure?
- quale significato dare alle trasformazioni?
- come introdurre lo studio dello spazio?

2. Livelli e abilità per differenziare lo studio delle figure

Per tentare di rispondere alla *questione su come differenziare lo studio delle figure*, può essere utile rivolgersi alla ricerca didattica.

Centrate su tale questione, e fondamentali per analizzare insegnamento e apprendimento della geometria, sono le ricerche condotte dai due Van Hiele (marito e moglie) per descrivere in successivi livelli il fare geometria. Sviluppata a partire dal 1959, la teoria dei livelli di Van Hiele è ancora ripresa da chi si occupa di temi geometrici dal punto di vista didattico.

I Van Hiele hanno individuato cinque livelli sui quali si opera facendo geometria, tutti espressi in termini "attivi" che si possono applicare all'apprendimento di un qualunque tema, a qualunque età; essi sono:

il riconoscimento, l'analisi, il confronto, la deduzione, il rigore.

È naturale che ad ogni età può essere più appropriato operare ad uno o più dei livelli di Van Hiele; quello che i Van Hiele sostengono è che essi debbono essere toccati tutti, senza salti e progressivamente, e che l'insegnante non deve chiedere ad un allievo di lavorare all'interno di un livello se l'allievo stesso non padroneggia ancora i livelli precedenti: spesso si chiede di dimostrare a chi non ha ancora maturato il confronto, e ciò provoca distorsioni nell'apprendimento.

Rileggiamo i termini che esprimono i livelli, riferendoli a chi apprende:

il riconoscimento	l'allievo impara un po' di nomenclatura e riconosce una forma come un tutto
l'analisi	l'allievo analizza proprietà localmente senza correlarle ad altre situazioni
il confronto	l'allievo riesce a mettere in relazione situazioni diverse e riesce a identificarle l'una rispetto all'altra in modo da chiarirne i legami
la deduzione	l'allievo sa operare in un sistema deduttivo, comprendendo il significato della deduzione ed il ruolo di postulati, teoremi e dimostrazioni
il rigore	l'allievo capisce l'importanza della precisione nel trattare con i fondamenti ed i legami tra strutture.

Possiamo ora esemplificare i cinque livelli sul tema delle figure geometriche, che, come abbiamo visto, attraversa tutto l'arco della scolarità, dalle elementari alla secondaria superiore.

le figure	**il rettangolo**
il riconoscimento delle figure come un tutto	lo studente riconosce il disegno di un rettangolo, anche se non ne sa le proprietà
l'analisi delle proprietà delle figure, pensate singolarmente	lo studente conosce le proprietà del rettangolo, ma non lega il rettangolo ad altre figure ad esso correlate (ad esempio al quadrato)
il confronto tra figure con il quale esse sono ordinate logicamente: dal confronto nascono accurate definizioni	lo studente capisce che un quadrato è un rettangolo, anche se non sa ancora dedurre proprietà
la deduzione locale di proprietà di una figura e di quelle ad essa confrontate	lo studente conosce e dimostra le proprietà del rettangolo, legandole a quelle del quadrato e di altre figure
il rigore costruisce e confronta sistemi deduttivi, correlando tra loro le proprietà ed il sistema deduttivo in cui si opera	lo studente correla l'esistenza del rettangolo con il postulato delle parallele, vedendo che il rettangolo non esiste nelle geometrie non euclidee

Chi riferisce dei livelli di Van Hiele in questi termini è Alan Hoffer che cerca di mettere in evidenza quali sono le principali abilità che il far geometria promuove, individuandole nelle:

abilità visive	(come vedere se un tetraedro può essere sezionato in un rettangolo)
abilità verbali	(come saper dire che cosa è una circonferenza, partendo dal fatto che una circonferenza è una linea rotonda)
abilità grafiche	(come fare costruzioni con l'uso di strumenti o utilizzare reticolati per rappresentare oggetti descritti verbalmente)
abilità logiche	(come riconoscere argomenti validi o non validi nel contesto fissato per lo studio di una figura)
abilità applicative	(come applicare le proprietà degli esagoni per studiare le proprietà delle celle di un alveare).

Per chi insegna, fissato un tema disciplinare, è certo utile imparare a incrociare i livelli di Van Hiele e le abilità di Hoffer in una tabella a doppia entrata; vediamo qualche suggerimento.

abilità verbale/riconoscimento	Per il rettangolo ABCD - come sono chiamati i segmenti AC e BD? - quale angolo è opposto all'angolo ABC? - quali lati sono adiacenti a BC?
abilità grafica/analisi	Costruisci un rettangolo date le lunghezze di un lato e di una diagonale.
abilità logica/analisi	L'area di un rettangolo è determinata dal suo perimetro?
abilità applicativa/deduzione	Quali poligoni convessi puoi usare per pavimentare un corridoio rettangolare con piastrelle tutte di ugual forma? Enuncia e dimostra la proprietà individuata.

Se l'insegnante riesce a far maturare tutte le abilità, passando da ogni livello al successivo, si crea una continuità di apprendimento pur differenziando lo studio delle figure lungo tutto l'arco della scolarità. I diversi momenti del curriculum nei quali si deve ritornare sullo stesso tema risultano collegati in un processo a spirale articolato sui livelli e sulle abilità.

3. Le trasformazioni come strumento e come oggetto

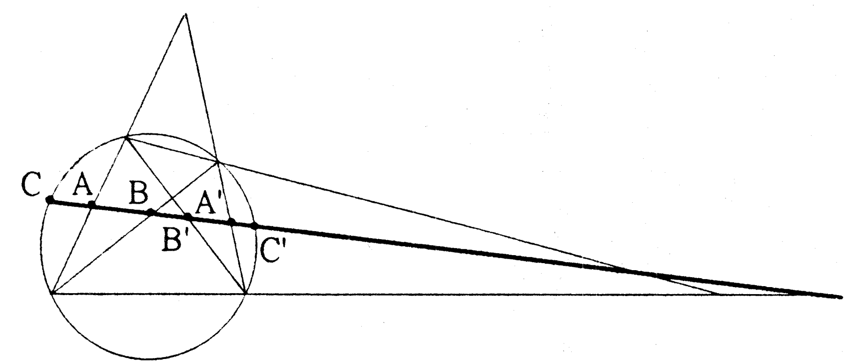
Per trovare risposte al *quesito sul significato da dare alle trasformazioni geometriche*, può essere utile seguire tale nozione nello sviluppo storico della geometria.

Forse annunciata nei Porismi di Euclide e nelle costruzioni di Pappo, essa rimane per secoli allo stato embrionale.

È nel Seicento che lo studio delle coniche, a partire dall'opera di Apollonio, porta Desargues e Pascal a elaborare un punto di vista molto più generale di quello usato dai greci, che consente loro di semplificare ed estendere la conoscenza delle proprietà di tali curve: pensate le coniche come sezioni arbitrarie di un cono a base circolare, essi estendono alle coniche le proprietà del cerchio, poiché i tre tipi di coniche derivano dalle differenti maniere secondo le quali è possibile tagliare un cono a base circolare.

Desargues trae questa idea dalla prospettiva, che sta elaborando i suoi metodi di rappresentazione, nell'intento di dare soluzioni generali a problemi pratici di artisti e ingegneri; nello stesso tempo, per sezione della proiezione di un cerchio, nasce un metodo di trasformazione, che mette in corrispondenza dei punti e delle rette di una conica data arbitrariamente con punti e rette di un cerchio, e si scoprono proprietà di "allineamento" e di "concorrenza".

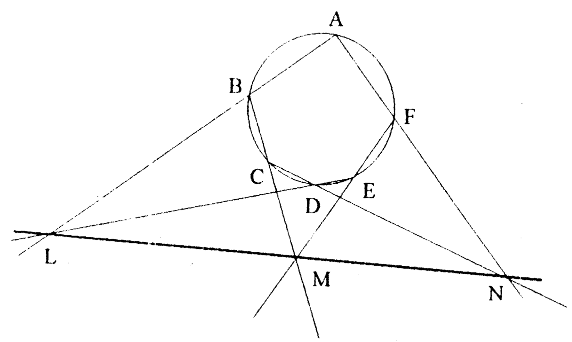
Ricordiamo, tra gli altri, il teorema di Desargues sull'involuzione che lega le tre coppie di punti A e A', B e B', C e C'



con la relazione:

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AB'}}{\overline{AC}\cdot\overline{AC'}} = \frac{\overline{A'B}\cdot\overline{A'B'}}{\overline{A'C}\cdot\overline{A'C'}}$$

e il teorema di Pascal sull'allineamento dei tre punti L, M e N, che porta alla costruzione dell'esagramma mistico formato da tutte le rette di allineamento riferite agli esagoni inscritti con i vertici nei punti dati



Inoltre, per teorizzare in un'ottica geometrica le tecniche della prospettiva, Desargues è portato a introdurre nel piano di Euclide nuovi elementi che lui chiama *punti* e *rette ideali*: essi sono i punti o le rette *but* di *ordonnances* rispettivamente di rette o di piani paralleli, cioè centri o assi di fasci impropri di rette o di piani.

Così, per rendere la geometria conforme a ciò che l'occhio vede, si innestano nella geometria di Euclide sia nuovi metodi, sia nuovi elementi con essa coerenti, ottenendone un primo mutamento significativo.

Intanto si verifica con la geometria delle coordinate un altro grande mutamento della geometria ad opera di Descartes e Fermat.

Essi introducono l'idea di equazione di una curva e utilizzano l'algebra come strumento nella risoluzione di problemi di costruzioni geometriche; così allo studio delle proprietà delle curve si sostituisce lo studio delle proprietà algebriche delle corrispondenti equazioni e delle loro trasformazioni algebriche.

Leggiamo un commento alla geometria di Descartes scritto da Chasles nella sua splendida sintesi storica sullo sviluppo della geometria.

«La geometria di Descartes, oltre al suo carattere eminente di universalità, si distingue dalla geometria antica anche sotto un aspetto particolare che merita di essere sottolineato; essa stabilisce infatti, con una sola formula, delle proprietà generali di intere famiglie di curve; per cui, seguendo questa via, non potremmo scoprire una qualche proprietà di un curva, che non faccia subito conoscere proprietà simili o analoghe in un'infinità di altre linee. Finora si erano studiate solo proprietà particolari di alcune curve, prese una per una, e sempre con mezzi diversi che non stabilivano nessun legame tra curve diverse».

Questo accade perché l'algebra rappresenta le grandezze assolute con segni astratti che di per sé non hanno nessun valore e che lasciano a tali grandezze tutta l'indeterminatezza possibile.

Un conflitto di idee oppose Desargues e Descartes, anche se entrambi erano alla ricerca di un metodo generale per unificare e semplificare i metodi della matematica: il primo credeva nella potenza della geometria, il secondo cercava tale potenza nell'algebra.

Entrambi utilizzano trasformazioni, però unicamente come *strumento per estendere le conoscenze sulle proprietà delle curve e delle figure, senza modificare essenzialmente il punto di vista sulle suddette proprietà*: rispetto alla concezione della geometria Desargues e Descartes appartengono alla tradizione greca, anche se i loro metodi la superano ampiamente.

Un profondo e autentico mutamento del pensiero geometrico si verifica invece ad opera di Poncelet, il quale senza usare l'algebra cerca di ottenere nel fare geometria lo stesso grado di generalità raggiunto dalla geometria analitica; egli scrive infatti:

«Ora siamo portati a tutte queste conseguenze, non solo quando si usino i segni e le notazioni dell'algebra, ma anche tutte le volte che, ragionando su grandezze qualunque, si prescinda dai loro valori numerici e assoluti; in poche parole, tutte le volte che si usa il ragionamento su grandezze *indeterminate*, cioè il *ragionamento* puramente *implicito*».

E Chasles precisa:

«... riflettendo sui procedimenti dell'algebra, e cercando la causa degli immensi vantaggi che reca nella geometria, non ci si accorge che essa deve una parte di questi vantaggi alla facilità delle *trasformazioni* che si fanno subire alle espressioni introdottevi precedentemente? Trasformazioni il cui segreto e il cui meccanismo fanno la vera scienza, e l'oggetto costante delle ricerche dell'analista. Era perciò naturale cercare di introdurre nella geometria pura trasformazioni analoghe che si basassero direttamente sulle figure proposte e sulle loro proprietà».

Le trasformazioni introdotte da Poncelet sono strettamente legate al suo principio di proiezione sul quale, oltre che sui principi di continuità e di dualità, egli basa la sua geometria: è in questo momento che finalmente *si tematizza la nozione di trasformazione geometrica*, capace di rivoluzionare la geometria, e che come geometria nuova rispetto a quella euclidea nasce la geometria proiettiva la quale dominerà tutto l'Ottocento e parte del Novecento.

Nel Trattato di Poncelet la trasformazione appare come una corrispondenza tra figure di due piani che trasforma un punto della prima in un punto della seconda (proiezione o omologia) o un punto della prima in una retta della seconda (dualità).

Poncelet chiama *descrittive* le proprietà *indistruttibili per effetto della proiezione*: non riesce però a dare una formulazione rigorosa della distinzione tra proprietà descrittive e proprietà metriche. Infatti in ogni caso particolare si applicava un tipo di trasformazione che permetteva di studiare le proprietà delle figure a un elevato grado di generalità, ma mancavano i mezzi per "parlare" della totalità di queste trasformazioni.

È Felix Klein il matematico che, spostando l'attenzione dalle trasformazioni alla struttura che esse formano, apre la via ad una nuova concezione della geometria. Egli scrive:

«Come generalizzazione della geometria si pone così la domanda generale, che è questa: data una molteplicità e un gruppo di trasformazioni di questa molteplicità, studiarne gli enti dal punto di vista delle proprietà che non sono alterate dalle trasformazioni del gruppo».

Klein passa così dalle trasformazioni alla struttura che esse formano e nella quale le trasformazioni sono in relazione tra di loro: possiamo parlare ancora una volta di algebrizzazione della geometria, in senso molto differente da quello dell'algebrizzazione cartesiana. Anzi, con l'enunciazione del problema generale posto al centro del programma di Erlangen riportato nella precedente citazione, che altrove viene enunciato con l'affermazione programmatica di «sviluppare la teoria degli invarianti relativi a questo gruppo», Klein mette fine alla contrapposizione sterile tra analitico e proiettivo grazie al ruolo fondamentale giocato dalla nozione di gruppo.

Analizzando nel tempo l'evoluzione del processo di concettualizzazione delle nozioni geometriche, Piaget e Garcia hanno identificato *tre tappe*, ciascuna delle quali comporta una totale reinterpretazione dei fondamenti concettuali della geometria, che suddividono tale processo in modo discontinuo. Essi scrivono:

«La geometria ha inizio, con Euclide, con un periodo durante il quale si studiano le proprietà delle figure e dei corpi geometrici in quanto *relazioni interne* tra gli elementi di queste figure e di questi corpi. Non c'è presa in considerazione dello *spazio* in quanto tale né, di conseguenza, delle trasformazioni delle figure all'interno di uno spazio che le comprenderebbe tutte. Chiameremo questa tappa *intrafigurale* usando un'espressione già utilizzata in psicologia genetica per spiegare lo sviluppo delle nozioni geometriche nel bambino.

Viene poi una tappa caratterizzata da una messa in relazione delle figure tra di loro, la cui manifestazione specifica è la ricerca di trasformazioni che collegano le figure secondo molteplici forme di corrispondenze, ma senza sfociare nella subordinazione delle trasformazioni a delle strutture d'insieme. È il periodo durante il quale la geometria dominante è la geometria proiettiva. Chiameremo questa tappa *interfigurale*.

Poi comincia una terza tappa, che chiameremo *transfigurale*, caratterizzata dalla preminenza delle strutture. L'espressione più caratteristica di questa tappa è il Programma di Erlangen di Felix Klein».

Il nostro discorso ha così seguito la nozione di trasformazione dallo stato

embrionale alla sua tematizzazione; si tratta di un caso particolare di un principio generale enunciato anch'esso da Piaget e Garcia, che scrivono:

«... le nozioni astratte della matematica sono state inizialmente utilizzate in numerosi casi particolari unicamente a titolo strumentale senza aver dato luogo a una riflessione sul loro significato generale, e persino senza una presa di coscienza del fatto che esse venivano utilizzate.

Alla tematizzazione si arriva dopo un processo più o meno lungo, alla fine del quale la nozione particolare che è stata usata diventa oggetto di riflessione, per costituirsi poi in concetto fondamentale».

Il lungo intervallo di tempo che, nel caso delle trasformazioni geometriche, intercorre tra l'uso e la tematizzazione è dovuto al fatto che alla concettualizzazione della trasformazione in geometria si arriva attraverso l'operatività delle trasformazioni algebriche, e lungo è stato il periodo di consolidamento della geometria analitica. Il lento costituirsi nel tempo della nozione di trasformazione geometrica suggerisce tuttavia un'altrettanto lenta costruzione didattica di tale nozione. Sarà necessario passare lentamente dalle trasformazioni introdotte a titolo strumentale, perché utili ad uno scopo immediato in un problema specifico, alla loro tematizzazione, in un primo momento giocata sulla dialettica strumento-oggetto e solo in un secondo momento teorizzata nello studio delle trasformazioni come elementi di un gruppo. Contemporaneamente, rispetto alla concettualizzazione, i nostri studenti passeranno dall'intrafigurale, all'interfigurale, al transfigurale: poiché, quando una forma di conoscenza è superata da un'altra, la prima viene integrata nella seconda, ciò consente continuità nella costruzione del sapere.

4. Fusionismo e fusione di spazio e piano

La *questione del legame tra spazio e piano* è stata sempre presente nel dibattito tra quanti si sono occupati dell'insegnamento della geometria, da quando sono stati messi in crisi definitiva gli Elementi di Euclide (o loro sunti) come testo su cui studiare: in effetti nell'opera euclidea non c'è presa in considerazione dello spazio, per collocarvi le figure.

Però lo spazio esiste e le figure possono, e devono, essere pensate nello spazio; citiamo Gonseth:

«Qu'est-ce que la géométrie? La géométrie est la science des figures de l'espace».

Ci possiamo chiedere, tuttavia, qual è lo spazio "naturale" della geometria.

Se analizziamo l'etimologia del termine geometria, che rimanda alla misura del terreno, essa si è presentata come planimetria, cioè nel piano; rispetto ad essa la stereometria si sviluppa più tardi e separata.

Qualcuno ha però sostenuto che, in quanto noi viviamo nello spazio, in principio c'è una sola geometria, quella spaziale; successivamente nasce la geometria piana, come un artificio, ancora separata.

Così ragionavano coloro che volevano mantenere separati la presentazione agli allievi dello spazio e del piano, cioè i *separatisti*; essi sostenevano a difesa della loro tesi a volte la necessità di conoscere il piano per accedere alle proprietà dello spazio, a volte l'oggettiva maggiore difficoltà della stereometria rispetto alla planimetria.

Tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento si opposero alle posizioni dei separatisti i *fusionisti* che proponevano di servirsi, fin dai primi approcci alla disciplina, di nozioni specifiche della geometria solida per enunciare e dimostrare proprietà di geometria piana; essi sostenevano che la difficoltà degli allievi nell'immaginare le figure nello spazio fosse dovuta agli studi esclusivamente di geometria piana dei primi anni, che inibiscono l'intuizione necessaria alla comprensione delle proprietà delle figure solide.

De Amicis, fusionista convinto, si chiede: «Perché affaticarsi a compiere questa difficile opera contro natura (poiché lo *spazio fisico* esiste, e non così il piano) di impedire almeno per un anno che gli alunni pensino allo spazio, di ridurli intellettualmente ad animali piatti, schiacciando sulla tavola nera ogni loro concezione geometrica? Perché infine condannare il giovanile ingegno a strisciare sul piano, tarpandone le ali, limitandone le forze?».

Ai separatisti convinti questo modo di procedere sembrava «innaturale».

La polemica tra separatisti e fusionisti fu alle volte molto accesa, ma vide anche molti neutrali, tra i quali gli estensori dei programmi che non presero mai una posizione precisa sui due metodi contrapposti: ancora oggi nei programmi si dice che è lasciata all'insegnante la libertà della scelta.

La polemica era sostenuta pure dal fatto che la parola *fusione* aveva più significati, anche per i fusionisti stessi:

- alcuni, soprattutto all'inizio, intendevano per fusione un metodo didattico di *alternanza di geometria piana e solida*, che devono servire l'una all'altra in un gioco coerente;
- altri vi vedevano un metodo didattico secondo il quale, fin dall'inizio, *si studiano simultaneamente gli argomenti analoghi di geometria piana e solida,* applicando in seguito le proprietà dell'una e dell'altra nel modo più vantaggioso possibile;
- altri, infine, pensavano ad una *fusione realizzata attraverso il principio di dualità*, che in quel periodo fortemente proiettivo era molto presente ai matematici.

Seguiamo De Amicis (fusionista convinto, come già detto) nella costruzione di un esempio che doveva confutare una idea di Palatini (separatista convinto) per

il quale è conveniente mostrare agli studenti che la planimetria è autosufficiente.

De Amicis analizza questo teorema:

Siano a, b, c tre rette complanari, incidenti in un punto O che incontrano due rette parallele rispettivamente nei punti

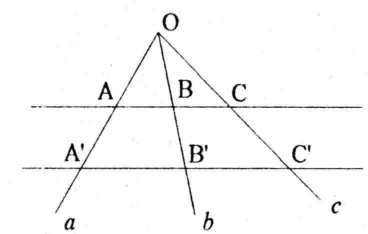
A, A'   B, B'   C, C'

in modo che sia AB = BC. Allora è anche A'B' = B'C'.

che dimostra con tre procedimenti.

I°

$\boxed{\text{nel piano}}$ con la teoria delle proporzioni



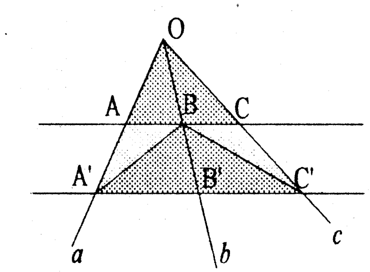
$A'B' : AB = OB' : OB = B'C' : BC$

Segue $A'B' : AB = B'C' : BC$

e, essendo $AB = BC$, risulta $A'B' = B'C'$. □

II°

$\boxed{\text{nel piano}}$ con la teoria della equivalenza



Δ(OAB) eq. Δ(OBC)

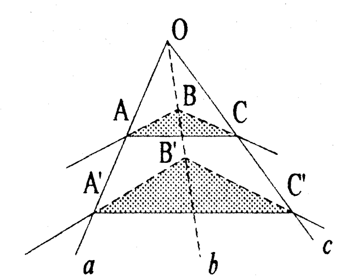
Δ(A'AB) eq. Δ(C'BC)

Quindi Δ(OBA') eq. Δ(OBC').

Poiché essi hanno base comune OB, hanno anche uguali le rispettive altezze che sono anche altezze di Δ(A'BB') e Δ(C'BB'), che risultano equivalenti avendo la relativa base BB' in comune. Segue $A'B' = B'C'$. □

III°

$\boxed{\text{nello spazio}}$ con le teorie del parallelismo e della uguaglianza *inerenti al teorema*



Si faccia ruotare l'angolo *bc* attorno a *b*, meno di 180° e si congiunga A con C, A' con C'.

$AB \parallel A'B'$ e $BC \parallel B'C'$ danno $AC \parallel A'C'$.

Il triangolo ABC è isoscele perché $AB = BC$.

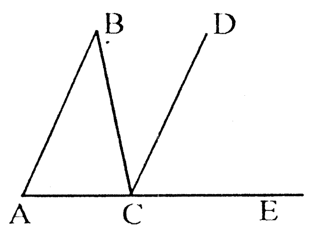
Lo è anche il triangolo A'B'C' perché per gli angoli si ha $B'A'C = BAC = BCA = B'C'A'$

Allora $A'B' = B'C'$. □

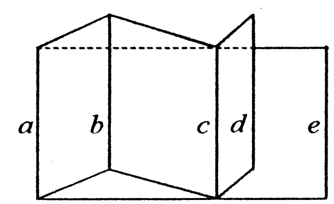
De Amicis conclude che è inutile restare nel piano e dover usare teorie diverse dal parallelismo e dall'uguaglianza, quando è possibile evitarlo lavorando nello spazio: fonde quindi spazio e piano in nome di un uso coerente dei concetti in gioco. Noi ci chiediamo se c'è una vera continuità tra spazio e piano.

Analogia e dualità sembrano invece essere presenti ad Andriani quando propone teoremi in questa forma, nella quale piano e spazio vivono paralleli come nella dualità dei testi classici di proiettiva, ma non per dualità geometrica:

Teor. *L'angolo esterno di un trilatero è uguale alla somma dei due interni non adiacenti*



Teor. *Il diedro esterno di un trispigolo è uguale alla somma dei due interni non adiacenti*



e quando commenta:

«**Scol.** Il triangolo è correlativo del trilatero in tutte le sue parti, essendoché ai vertici, lati e piano dell'uno corrispondono i lati, vertici e piano dell'altro. Quindi tutte le proprietà relative all'uno appartengono anche all'altro.

Il triedro invece non è correlativo del trispigolo in tutte le sue parti, essendo che agli spigoli e facce dell'uno corrispondono le facce e spigoli dell'altro; ma il punto comune agli spigoli dell'uno non corrisponde al punto comune delle facce dell'altro; perché le facce del trispigolo s'incontrano in un punto a distanza infinita, e gli spigoli del triedro s'incontrano in un punto a distanza finita. Quindi non tutte le proprietà relative al trispigolo appartengono al triedro.

Ed in generale, non tutte le proprietà relative al polispigolo appartengono all'angoloide, come vedremo in appresso.

Per es., il diedro esterno di un triedro non è uguale alla somma dei due diedri interni non adiacenti».

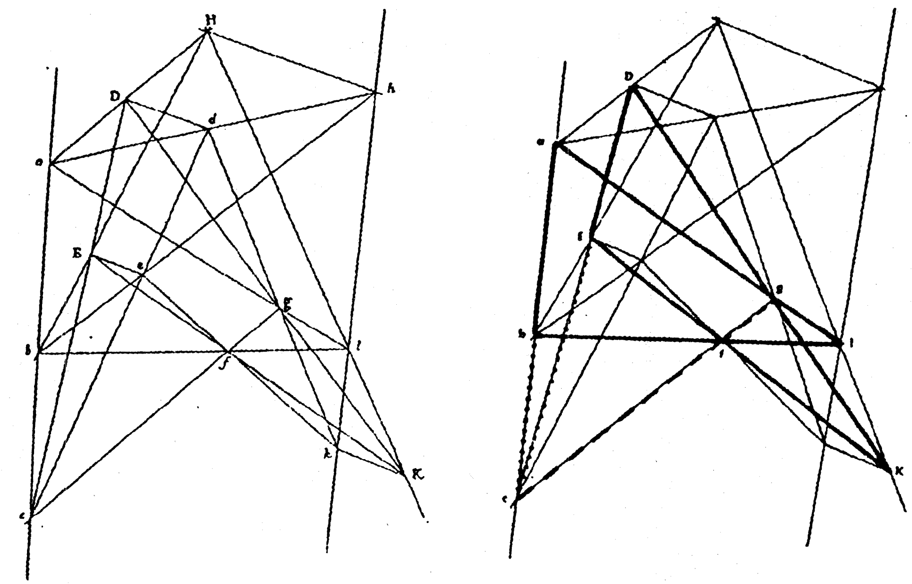
(dal quale commento si può vedere come a fine Ottocento la visione dello spazio per Andriani sia più limitata di quella di Desargues che, qualche secolo prima, con naturalezza ha introdotto gli elementi ideali).

A conferma della nostra supposizione si può leggere che cosa scrive Andriani in una lettera del 10 maggio 1904 indirizzata a Lazzeri: egli puntualizza il significato del termine fusione, da non confondere con alternazione, e insiste in modo particolare sull'importanza del principio di dualità.

Ma questa non ci pare una continuità di costruzione tra i due spazi.

Certo fusionista è la visione di Desargues nell'enunciare e dimostrare il suo famoso teorema dei triangoli, di cui riportiamo testo e figura.

Quand les droites HDa, HEb, cED, lga, lfb, HlK, DgK, EfK, soit en divers plans soit en un mesme, s'entrerencontrent par quelconque ordre ou biais que ce puisse estre, en de semblables points; les points c, f, g sont en una droite cfg.



Qui il "proiettivo" Desargues vede i due teoremi nel piano e nello spazio fusi nella stessa figura e nella stessa dimostrazione.

Certo è più imitando Desargues che si può creare continuità tra spazio e piano nel proprio insegnamento; è necessario infatti realizzare una compresenza delle due geometrie in una sola geometria, più che forzare le due geometrie a fondersi alle volte anche in modo artificioso, come afferma Candido in un suo scritto.

Bibliografia

Andriani A., *Elementi di Geometria Euclidea esposti con nuovo metodo*, Napoli, Pellerano, 1887.

Bello L., *Da un'indagine storico-critica sull'insegnamento della geometria nel XIX secolo ad una sperimentazione didattica: l'interazione tra assiomatica, fusionismo, separatismo e trasformazioni*, Tesi di Laurea, Università di Torino, a.a. 1994-1995.

Bertagna G., *La riforma necessaria*, Brescia, La Scuola, 1993.

Candido G., *Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie en Italie*, L'enseignement mathematique, Anno I, 1899.

Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Parigi, Gauthier-Villars, 1889.

De Amicis E., *Pro fusione*, Periodico di Matematica, Anno XIII, 1898.

Desargues G., *Oeuvres réunies et analysées par M. Poudra*, Parigi, 1864.

Gonseth F., *La géométrie et le problème de l'espace*, Edition du Griffon, 1945.

Hoffer A., *Geometry is more than proof*, Mathematics teacher, 74, 1981.

Klein F., *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti* (tradotto da Gino Fano), Annali di Matematica, serie II, Tomo XVII, 1889/1890.

Palatini F., *Una conversazione coi fusionisti*, Periodico di Matematica, Anno XIV, 1899.

Piaget J. e Garcia R., *Psychogenèse et histoire des sciences*, Parigi, Flammarion, 1983 (traduzione italiana: Psicogenesi e storia delle scienze, Milano, Garzanti, 1985).

Poncelet J. V., *Traité des Propriétés Projectives des figures*, Parigi, Gauthier-Villars, 1865-1866.

Van Hiele H., *La pensée de l'enfant et la géométrie*, Bull. APMEP, 198, 1959.

Continuità nella costruzione del pensiero algebrico

*Maria Reggiani**

Da alcuni anni la ricerca in didattica della matematica, a livello nazionale ed internazionale, ha rivolto la propria attenzione ai problemi legati all'insegnamento-apprendimento dell'algebra e al passaggio dall'aritmetica intesa come operatività nell'ambito di singoli insiemi numerici, all'algebra intesa nella molteplicità delle sue funzioni (di sintesi, generalizzazione, rappresentazione, trasformazione, ...).

Le principali ricerche degli ultimi anni a livello nazionale sono state recentemente sintetizzate da Bazzini, Gallo e Lemut in un articolo in Italian Research in Mathematics Education 1988-95, quaderno sulle ricerche italiane in didattica della matematica presentato a ICME 8 (cfr. Bazzini-Gallo-Lemut 1996).

Si tratta di ricerche teoriche, mirate alla costruzione di un modello atto ad interpretare difficoltà, ostacoli, errori (ad esempio quello proposto in Arzarello-Bazzini-Chiappini,1994) e di ricerche più strettamente didattiche che analizzano difficoltà nell'apprendimento e nell'uso dell'algebra o che si propongono di studiare le attività intellettuali coinvolte nell'acquisizione e nell'uso dei concetti algebrici, anche in relazione al problem solving (Boero 1992, Chiappini-Lemut 1991, Gallo 1994,...).

Molte ricerche mettono in relazione i due momenti apprendimento-insegnamento e configurano proposte di lavoro in classe o metodologie di intervento su particolari problemi cognitivi (Gallo et alii 1995, Gherpelli-Malara 1996; Reggiani 1994 e 1995).

Tali ricerche si collocano nel quadro più ampio dei numerosi studi internazionali. Fra questi possiamo ricordare in particolare quelli della Sfard nei quali viene messa in rilievo la duplicità processo-oggetto delle espressioni algebriche (Sfard 1991). Da qualche anno una serie di seminari italo-francesi sulla didattica dell'algebra, denominati SFIDA (Séminaire Franco - Italien de Didactique de l'Algèbre) consente un confronto e una interazione fra le ricerche sul tema svolte in questi due paesi.

Il problema della continuità nell'insegnamento nel passaggio dalla scuola media alla scuola secondaria superiore, affrontato in modo particolare da Malara (1994), coincide con il problema della continuità nella formazione del pensiero algebrico e dunque non può prescindere dalle ricerche citate.

---

* Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

L'algebra nei programmi di scuola media e biennio

Per affrontare il problema della continuità di insegnamento fra scuola media e biennio, è opportuno partire da uno sguardo ai programmi dei due livelli scolari relativamente ai temi in oggetto.

Gli elementi di aritmetica e algebra previsti dai programmi della scuola media inferiore sono contenuti nei punti intitolati rispettivamente "insiemi numerici", "problemi ed equazioni", "il metodo delle coordinate", "corrispondenze e analogie strutturali". Il termine "algebra" non vi compare in modo esplicito, tuttavia si parla di "esercizi di calcolo esatto e approssimato, approssimazioni successive come avvio ai numeri reali,..., individuazione di dati e di variabili significative in un problema, risoluzione mediante ricorso a procedimenti diversi (diagramma di flusso, impostazione e calcolo di espressioni aritmetiche), lettura, scrittura, uso e trasformazione di semplici formule, semplici equazioni e disequazioni numeriche di primo grado". Si tratta di un programma ampio e articolato, commentato negli 'orientamenti per la lettura dei contenuti' in cui si dice che nella risoluzione di problemi "si chiede all'allievo di farsi carico della traduzione in termini matematici. Nell'ambito di questo lavoro di traduzione si troverà, tra l'altro, una motivazione concreta per la costruzione delle espressioni aritmetiche e per le relative convenzioni di scrittura". Più avanti si trova l'invito a "evitare il calcolo letterale avulso da riferimenti concreti".

Nei programmi per il biennio della scuola secondaria superiore (proposta della commissione Brocca, programma B) i temi "Insiemi numerici e calcolo" e "Relazioni e funzioni" riprendono aritmetica e algebra. Nell'elenco dei contenuti possiamo leggere:

"- Operazioni, ordinamento e loro proprietà negli insiemi dei numeri naturali, dei numeri interi relativi e dei numeri razionali.
- Valori approssimati e loro uso nei calcoli elementari. Introduzione intuitiva dei numeri reali. Radicali quadratici ed operazioni elementari su di essi.
- Il linguaggio dell'algebra e il calcolo letterale. Monomi, polinomi, frazioni algebriche
- Equazioni e sistemi di primo e di secondo grado. Disequazioni di primo grado."

Nel commento ai singoli temi, leggiamo inoltre:

"...La sicurezza nel calcolo si acquisisce gradualmente nell'arco del biennio...

Nel presentare argomenti tradizionali di algebra è opportuno evitare di dare carattere di teoria ad argomenti che si riducono a semplici artifizi e di fornire classificazioni e regole distinte in situazioni in cui valgono gli stessi principi generali".

Analoghe osservazioni si trovano nelle "indicazioni didattiche"

Risulta dunque evidente che nei programmi è presente la continuità a livello di contenuti (gli elementi fondamentali sugli insiemi numerici sono ripresi con l'intento di sistematizzare, riflettere, approfondire) e soprattutto a livello di indicazioni didattiche e quindi di obiettivi e di metodi.

Sta dunque a chi opera nella scuola trovare i modi perché il processo di costruzione delle conoscenze algebriche sia "continuo", sottolineando, ad esempio, nei diversi momenti, gli aspetti significativi quali le differenti funzioni dell'algebra e aiutando così i ragazzi a costruire per passi il "pensiero algebrico".

La costruzione del 'pensiero algebrico'

E' necessario prima di tutto chiarire che cosa intendiamo con questo termine. In Bazzini et alii, 1996 il pensiero algebrico è definito un "registro per rappresentare e risolvere problemi". Si tratta cioè di insegnare agli alunni ad utilizzare l'algebra come mezzo di rappresentazione e di risoluzione di problemi: per fare questo bisogna padroneggiare l'algebra e le sue regole, saperne dominare l'aspetto di linguaggio formale.

Osserva giustamente Malara (1994):

"occorre insegnare a tradurre da un linguaggio ad un altro (leggere-interpretare formule in linguaggio algebrico e viceversa esprimere in formule proposizioni del linguaggio ordinario) ed insegnare ad esprimere le proprie idee nel nuovo linguaggio (argomentare e dimostrare tramite formule e loro trasformazioni algebriche)"

Si deve dunque cercare di costruire fra medie e biennio (e forse partendo anche prima) un percorso che abbia come obiettivo la costruzione del "pensiero algebrico".

La continuità consisterà allora nel fatto che attraverso diverse tappe di sviluppo, diverse modalità, momenti forti, eventuali fratture cognitive, ripensamenti, e così via si persegua uno stesso obiettivo. La continuità sarà dunque di tipo metodologico, intendendo con questo termine non tanto il complesso del comportamento didattico, ma l'attenzione agli aspetti e alle occasioni che consentano di costruire un modo di pensare.

Nei paragrafi che seguono cercherò di mettere in risalto alcuni momenti che possono far parte di questo percorso; per far questo mi servirò di osservazioni didattiche maturate nell'ambito delle ricerche svolte con gli insegnanti di scuola media e superiore del gruppo di Pavia e di spunti tratti dalle ricerche di altri gruppi (cfr. bibliografia).

Algebra e aritmetica

La prima domanda che viene spontaneo porsi quando si affronta il problema di costruire un itinerario che aiuti i ragazzi a costruirsi la capacità di usare l'algebra come "strumento di pensiero" è:

"Quando si comincia a 'fare algebra'?"

E' noto che la tradizione didattica collocava l'algebra in terza media, quando si affrontava lo studio dei numeri relativi, delle equazioni e la manipolazione di espressioni simboliche.

Abbiamo già visto che l'atteggiamento dei programmi della scuola media è invece completamente diverso e del resto è ormai opinione diffusa che le basi del pensiero algebrico si pongano fin dalla scuola elementare, quando si comincia ad operare sui numeri.

E' chiaro che in questa fase l'attenzione dell'alunno sarà completamente concentrata sul singolo problema o sulla particolare operazione, la cui soluzione di per sè presenterà ostacoli ed avrà obiettivi al proprio interno, ma sarà importante proporre fin dall'inizio attività variate che portino a riflettere non solo sul risultato ma sul processo, che facciano vedere l'uguaglianza non solo in senso procedurale ma anche relazionale (ad esempio due modi diversi di scrivere lo stesso numero, cfr. Bertolini et alii 1993, Cavallari et alii 1994), che avviino alla soluzione di semplici equazioni (anche se ovviamente non si userà il termine né si teorizzeranno metodi di soluzione).

Dunque si comincia a fare algebra quando si fa aritmetica.

Quali gli spunti nella scuola media?

Non è mia intenzione, né sarebbe possibile, tracciare un itinerario completo, né essere esaustiva.

Mi limiterò a fornire qualche esempio che possa dare un'idea del metodo di lavoro.

Le occasioni per fare pre-algebra alle medie sono svariate.

Già quando si studiano i numeri naturali e le loro proprietà è abituale evidenziare i sottoinsiemi dei pari e dei dispari. E' abbastanza usuale inoltre sottolineare alcune proprietà relative ad esempio a somme e prodotti di pari e dispari , consecutivi e non. (Cfr. ad esempio Chiappini-Lemut 1991, Gherpelli-Malara 1996, Sibilla 1994).

In queste attività che quasi tutti svolgono e che, in generale, interessano i ragazzi si presentano moltissime occasioni di avviare al pensiero algebrico, prima fra tutte la rappresentazione generale del pari e del dispari. Ad essa si può arrivare facilmente passando attraverso le consuete rappresentazioni grafiche che aiutano anche a congetturare i risultati almeno per quel che riguarda le somme.

Un problema successivo è quello di prendere in considerazione il problema della rappresentazione di due numeri (pari o dispari) del tutto generici. Risulta, come osservato da molte ricerche, che non è un passo immediato il rendersi conto della necessità di ricorrere a rappresentazioni che utilizzano variabili diverse per non ricadere sempre in casi particolari. Per convincere gli alunni sarà utile considerare sia proprietà che hanno validità generale che proprietà che valgono ad esempio per numeri dispari consecutivi e non per due numeri dispari qualunque (ad es. la somma è divisibile per quattro) e confrontare rappresentazioni e verifiche. Risulterà loro chiaro che una rappresentazione scorretta può far ritenere vere proprietà valide solo in casi particolari.

Si propone così il problema della scelta delle variabili e delle rappresentazioni adeguate, problema che può essere allargato facendo vedere che anche l'uso di scritture diverse e corrette, può non consentire di leggere le stesse cose. Fra i numerosi esempi ne citiamo due presentati in Malara (1994, pag70) "se si considera la somma di un numero con il suo quadrato difficilmente la semplice lettura della formula $n+n^2$ porterà l'allievo ad arguire che in ogni caso tale somma sarà un numero pari, ma trasformando la scrittura in $n(n+1)$, quest'ultima potrà suggerirglielo immediatamente. ", così pure la proprietà che il prodotto di tre numeri consecutivi non nulli è uguale al cubo del numero centrale meno questo stesso, si legge facilmente se si sceglie di rappresentare i numeri come $n-1$, n, $n+1$ (infatti $(n-1)n(n+1)=(n^2-1)n=n^3-n$) mentre non è altrettanto immediata, anche se ovviamente deducibile con adeguati passaggi, se si indicano i numeri con n, $n+1$, $n+2$.

Questi esempi ed altri analoghi, oltre ad avviare all'uso corretto delle variabili, educano a distinguere fra senso e denotazione di un'espressione intendendo, come è noto, per denotazione quello cui l'espressione si riferisce e per senso il modo con cui l'oggetto è dato (Arzarello et alii 1994). Gli alunni comprendono cioè che una pluralità di espressioni con senso algebrico differente possono denotare lo stesso oggetto e fornirci peraltro la possibilità di interpretazioni diverse. Così $4x+2$ e $2(2x+1)$ hanno diverso senso ma uguale denotazione, come pure due diverse equazioni che hanno le stesse soluzioni (un caso che può essere interessante è costituito da due equazioni senza soluzioni in un insieme).

Gli esempi visti consentono anche di avviare il discorso sulla funzione di generalizzazione propria del linguaggio algebrico, che può essere osservata anche in numerose altre attività di soluzione di problemi, in cui, a partire dalla soluzione del caso particolare, è possibile portare i ragazzi, attraverso la "messa in espressione" a congetture o osservazioni sulle possibilità di soluzione indipendente dai dati.

L'algebra come linguaggio

Fin qui si sono esposte questioni che riguardano le funzione di rappresentazione, di trasformazione e di generalizzazione del linguaggio algebrico.

Proprio per poter usare correttamente e con sicurezza l'algebra in situazioni problematiche è ineludibile la precondizione di una adeguata conoscenza del linguaggio algebrico anche sul piano sintattico: da questo punto di vista l'insegnamento-apprendimento dell'algebra è oggetto di numerosi studi.

L'impatto iniziale con le regole formali dell'algebra si ha quando si cominciano a considerare successioni di operazioni, ad esempio la sequenza di operazioni necessarie per risolvere un problema: nel momento in cui gli alunni passano dall'espressione verbale all'espressione scritta, constatano la necessità di opportune regole. Le prime fra queste sono la convenzionale precedenza fra operazioni e il conseguente uso di parentesi: in genere gli studenti accettano abbastanza facilmente queste convenzioni e le seguono con una certa facilità quando si tratta di eseguire calcoli già scritti. Diversa è la situazione in cui si tratta di tradurre un testo in espressione o comunque di inserire parentesi. Spesso si osserva che le parentesi esistono nella mente dell'alunno, che esegue i calcoli come se queste ci fossero, ma non compaiono sulla carta. Come è noto per ovviare a questo problema possono essere utili esercizi di lettura incrociata (decodifica di scritture elaborate da altri) o esercizi di calcolo in cui si mettano a confronto espressioni uguali ma con diversa distribuzione delle parentesi.

Un altro punto importante per far acquisire la padronanza del linguaggio algebrico fin dall'inizio della scuola media è quello di far tradurre da un codice all'altro la stessa espressione.

Una prima traduzione, come si è già detto, e la più importante, è quella dal linguaggio verbale a quello algebrico e viceversa. Questa interviene nella soluzione dei problemi, nella costruzione di semplici dimostrazioni di proprietà aritmetiche, nell'interpretazione di formule.

Può essere utile proporre anche il passaggio dal codice algebrico ad altri codici.

E' importante, ad esempio, saper tradurre dal "linguaggio delle frecce", spesso usato per la codifica delle operazioni e che risulta particolarmente efficace ad esempio quando si tratta di invertire un procedimento, al linguaggio algebrico. E' facile costruire esempi in cui la codifica in linguaggio algebrico di una espressione scritta nel "linguaggio delle frecce" richiede l'inserimento di opportune parentesi e può presentare qualche difficoltà.

Un'altra occasione perché gli alunni si rendano conto della necessità e della relatività al tempo stesso delle convenzioni di scrittura è l'uso di un linguaggio di programmazione dove si incontrano, in generale convenzioni parzialmente diverse e a volte più rigide di quelle usualmente adottate in algebra: ad esempio l'impossibilità di omettere il segno di moltiplicazione, la scrittura della potenza nella forma a^b, l'uso di una funzione al posto del segno di radice, la necessità di una maggiore attenzione nell'uso delle parentesi nella scrittura di espressioni frazionarie,...

Analogamente è interessante e, qualche volta può essere utile, scrivere un'espressione su una calcolatrice tascabile che non abbia parentesi e non rispetti la gerarchia delle operazioni

Quando si propongono attività che mettono l'accento sulle convenzioni di scrittura dell'algebra, strettamente legate al codice usato, bisogna fare attenzione ad alcuni fraintendimenti.

Infatti le convenzioni in tutta la matematica e nel linguaggio algebrico in particolare sono per noi così usuali che spesso non poniamo la necessaria attenzione alle difficoltà che queste possono costituire per un alunno.

E' forse necessario chiarire, con linguaggio accessibile, che in una visione convenzionalistica della matematica tutta la sua costruzione è basata su "regole del gioco" che possono essere stabilite in modo sostanzialmente "libero", purché il sistema che ne risulta rispetti alcune condizioni più generali (ad esempio sia non contradditorio).

Tuttavia fra le regole del gioco ve ne sono alcune da cui dipende la particolare teoria e che, se modificate, portano alla costruzione di un'altra teoria, altre che sono spesso soltanto regole di scrittura o modi di operare che devono essere conosciute e accettate per "usare la stessa lingua" ma la cui modifica non altera la teoria nel suo complesso.

Uno studio da noi condotto su alunni di terza media ci ha convinto che il problema didattico centrale è proprio quello di portare gli alunni a distinguere fra diversi livelli di "regole del gioco": parlando di ambito aritmetico-algebrico, fra proprietà delle operazioni e regole di scrittura delle stesse. Questa distinzione fra livelli diversi di convenzionalità non è agevole per gli alunni che tendono a mettere tutte le regole sullo stesso piano non essendo in grado di associare alle trasformazioni l'adeguato "senso algebrico".

Il nostro studio sul livello di conoscenza delle convenzioni del linguaggio algebrico in terza media ha suggerito di effettuare discussioni in classe, con le quali si è cercato di aiutare i ragazzi a stabilire una gerarchia fra le convenzioni e a capire meglio alcune proprietà.

Mi sembra interessante citare l'affermazione di un alunno:

"Non ho incontrato convenzioni che non sia riuscito a capire, anche se le ho capite con difficoltà infine le ho capite.". Questa frase che nell'intenzione dell'alunno significava "ho faticato ad orientarmi fra le 'regole' e le convenzioni ma ci sono riuscito", fa trasparire il fatto meno positivo che l'alunno in questione vede come convenzionale tutto quello a cui non riesce a dare un significato.

Uno dei momenti in cui la distinzione fra convenzioni di scrittura, definizioni, proprietà, regole operative risulta particolarmente delicata è l'introduzione dei numeri relativi e delle operazioni su di essi. Senza entrare in dettagli, per i quali rimandiamo ad esempio a Reggiani 1994b e 1995, osserviamo che abitualmente si fanno accettare dagli alunni, in un tempo abbastanza breve, diverse convenzioni, in particolare:

* la notazione usuale in base alla quale i numeri positivi si indicano con il segno

+ , i numeri negativi con il segno –,
* l'utilizzo delle notazioni + e – anche per le operazioni di addizione e sottrazione,
* la possibilità di omettere il segno + che indica il numero positivo,
* la possibilità di omettere anche il segno + che individua l'operazione di addizione quando precede un numero negativo.

Tra queste convenzioni la prima in genere è già nota e non pone problemi. I problemi insorgono con le operazioni. Infatti i simboli + e – sono ovviamente già noti agli alunni anche come segni di operazione (anche se con significato parzialmente diverso) e la novità consiste nell'usare lo stesso simbolo con due significati algebrici diversi. Tuttavia in genere in una prima fase segno del numero e segno di operazione rimangono due oggetti ben distinti, tanto che a volte si usano anche simboli diversi per indicarli.

Le difficoltà si determinano quando, con le due ultime convenzioni, segno del numero e segno di operazione non risultano più oggetti distinti e si ha $5-(+3)=5-3$, ma anche $5+(-3)=5-3$.

Sul piano teorico il problema si può risolvere ad esempio definendo soltanto le operazioni di somma e di opposto e non, come spesso accade nella prassi didattica e come si è detto sopra, anche una operazione di sottrazione (in questo modo la scrittura $5-3$ non ha significato se non come forma convenzionalmente abbreviata di $5+(-3)$ e dunque non è ambigua). Rimane comunque difficoltoso per l'alunno muoversi in un ambiente in cui lo stesso segno ha convenzionalmente due significati diversi, a volte indistinguibili, non ben padroneggiati.

Problemi di convenzioni e di attribuzione di significati investono, come è noto, anche l'ambito dell'introduzione del prodotto e della conseguente regola dei segni.

La giustificazione tramite la proprietà distributiva è molto formale per la fascia d'età in cui abitualmente il prodotto fra relativi viene presentato (13-14 anni), ma risulta a nostro parere meno problematica delle convenzioni inizialmente adottate per definire la cosiddetta "somma algebrica".

Le difficoltà incontrate dagli alunni nel fare proprie le convenzioni di scrittura dei numeri relativi sono state evidenziate da insegnanti del nostro gruppo di ricerca tramite l'osservazione in classe.

In particolare si è notato che i ragazzi, eseguendo semplici calcoli algebrici, anche quando svolgono correttamente i conti operano a volte secondo una sintassi inutilmente pesante e continuano a trascrivere termini del tipo $+(-6)$ o $+(-3)x$ o ancora $+(-3)\cdot(-x)$, mentre eseguono altri passaggi.

Si tratta di espressioni differenti sia sul piano concettuale che sintattico, ci sembra tuttavia che il comportamento degli alunni nel trattarle sia riconducibile a

una resistenza ad accettare le usuali convenzioni, che può essere spiegata come incertezza e motivata dalla necessità di vedere il numero con il suo segno prima di operare su di esso.

Questo fatto, riscontrato in alunni "bravi" di diverse classi, si perde quando l'operatività tende a diventare di tipo meccanico, e il desiderio di capire, di padroneggiare simboli e significati viene sostituito dall'acquisizione delle cosiddette "regole".

Si pone dunque ancora una volta per l'insegnante il problema della ricerca di un equilibrio fra "meccanismi" e significati, di favorire cioè la necessaria acquisizione di alcuni automatismi, mantenendo viva al tempo stesso la riflessione su quanto si sta facendo.

Ambienti diversi per l'approccio all'algebra

Abbiamo visto che il primo approccio all'algebra è quello di un ampliamento dell'ambiente dell'aritmetica e di una riflessione sulle sue proprietà.

Tuttavia uno dei possibili modi per condurre gli alunni a un corretto uso dell'algebra è quello di proporre l'uso di simboli e la manipolazione su di essi in contesti diversi.

Si è già osservato come l'uso di un linguaggio di programmazione imponga l'apprendimento di regole che spesso, almeno quando il linguaggio viene utilizzato per risolvere problemi di tipo aritmetico-algebrico, sono analoghe a quelle dell'algebra ma non necessariamente identiche. Il contesto informatico è motivante per la presa di coscienza delle convenzioni, in quanto i ragazzi si trovano costretti a fornire al computer messaggi codificati in base alle regole del gioco e trovano i loro errori segnalati e penalizzati dal non corretto funzionamento del programma.

Il collegamento algebra-geometria è presente già nella scuola media attraverso l'introduzione del 'metodo delle coordinate' : proprio con lo studio più ampio e approfondito della geometria analitica, la geometria diventerà per gli alunni nelle scuole superiori un terreno privilegiato di applicazione dell'algebra.

Anche da sola la geometria può costituire un interessante terreno di avvio al pensiero algebrico quando ad esempio si lavora sul calcolo di aree e perimetri, in quanto mette a contatto con l'elaborazione di formule: inoltre essa può fornire un supporto concreto che aiuti la visualizzazione delle proprietà formali.

Attività legate alla geometria sono usuali in terza media quando si riflette sulle proprietà delle operazioni e quando si introduce il calcolo letterale; la nostra ricerca si è posta invece il problema di esplorare la capacità di manipolazione algebrica "spontanea" in problemi geometrici prima di tale momento, a fine seconda media. Con il termine "spontaneo" si fa qui riferimento al fatto che gli alunni, quando si propongono loro i problemi che di seguito diremo, non sono ancora scolarizzati rispetto all'algebra, anche se nella maggior parte dei casi hanno già svolto attività di generalizzazione e di utilizzo di simboli e di formule in contesti diversi.

Sono stati proposti ad alunni di seconda media, che avevano lavorato su perimetri e aree di figure poligonali apprendendo le consuete formule, problemi in cui si richiedeva il calcolo di aree e perimetri di figure in cui le misure dei lati erano fornite in forma letterale. Le informazioni a volte erano date verbalmente, altre volte dovevano essere dedotte dalla figura.

L'obiettivo era quello di vedere se gli alunni, abituati all'uso delle formule per il calcolo di aree e perimetri sanno utilizzare una lettera come dato di un problema e inserirla correttamente nelle formule note o utilizzarla direttamente per eseguire i calcoli.

In subordine si voleva vedere se gli alunni, qualora scrivano formule che potrebbero essere semplificate attraverso gli abituali passaggi algebrici, lo fanno guidati dal contesto o no. La stessa esigenza di trasformazione potrebbe venire dal confronto di formule diverse ottenute a partire da differenti modi di vedere la figura. Tali trasformazioni non sono richieste e non ci si aspetta che l'alunno di seconda le sappia eseguire, tuttavia può essere interessante osservare se spontaneamente vengono effettuate, soprattutto per poterle utilizzare facendole emergere nella discussione in classe.

Lo studio effettuato su 150 alunni ci ha portato ad evidenziare fra questi, in base alle soluzioni, alcuni gruppi: una prima categoria è costituita da quegli alunni che trasformano il problema assegnato in uno con dati numerici e risolvono il "loro problema". Un secondo gruppo è formato da quei ragazzi che risolvono il problema utilizzando lettere ma inserendone anche altre oltre quelle assegnate. Per questi alunni se b è la base, l'altezza deve essere indicata in modo diverso, frequentemente con h, e nel trapezio le basi spesso vengono indicate con b_1 e b_2, mentre in genere per l'altezza viene accettato il valore dato . Questo dipende forse anche dai dati dei problemi assegnati in cui ad esempio una base del trapezio era $3a$. I ragazzi hanno difficoltà ad assegnare questo valore ad una base in quanto il valore assegnato viene spesso inteso come "nome".

La maggior parte degli alunni comunque rispetta la consegna e scrive le formule richieste utilizzando le lettere assegnate, tuttavia le formule prodotte presentano moltissimi errori: è chiaro che tali errori devono essere certamente attribuiti alla difficoltà dell'uso delle lettere in quanto gli stessi problemi, assegnati con dati numerici nelle stesse classi e nello stesso periodo, vengono risolti correttamente dalla quasi totalità degli alunni.

Pochissimi sono invece i ragazzi che elaborano spontaneamente le formule.

E' evidente che sarà compito dell'insegnante favorire il confronto fra i diversi metodi di soluzione e far spiegare come mai le diverse espressioni, ottenute con procedimenti geometricamente diversi possono essere uguagliate, avviando così gli alunni al calcolo letterale.

L'esame degli elaborati ha consentito anche di focalizzare ad esempio la difficoltà di molti alunni ad esprimere il fatto che un lato è il triplo dell'altro quando uno è indicato con una lettera. Si è osservato che gli alunni hanno incontrato minori difficoltà in quelle classi in cui nel primo anno si era insistito con attività di generalizzazione e uso di simboli in contesto aritmetico.

Si è notato però che, nonostante le difficoltà, il contesto geometrico è comunque favorevole per l'approccio all'algebra .

Infatti nelle stesse classi sono stati proposti, poco tempo dopo, problemi che portano esattamente alle stesse formule risolutive dei precedenti, tuttavia con un contesto di tipo aritmetico: questi sono risultati estremamente più difficili per la maggior parte degli alunni, probabilmente per la difficoltà di costruire un appoggio visivo alla decodifica del testo.

Le equazioni

La nascita dell'algebra è, anche storicamente, legata allo studio delle equazioni e alla loro soluzione. Dal punto di vista didattico le equazioni rappresentano un momento importante in quanto costituiscono un valido strumento di soluzione di problemi, offrono la possibilità di far capire l'importanza della funzione di trasformazione dell'algebra e di far riflettere sulle proprietà delle operazioni e sull'uso delle variabili.

Limitiamo qui la nostra attenzione alle equazioni di primo grado: la loro collocazione nel normale curriculum degli alunni è sia nella scuola media che nel biennio. Esse dunque rappresentano un'ottima occasione di raccordo fra i due livelli scolari.

I risultati dei test d'ingresso alla scuola superiore mettono in rilievo la difficoltà da parte degli alunni nella risoluzione di semplici equazioni e nell'inversione di formule, soprattutto per il prevalere degli aspetti di esecuzione meccanica in base a regole imparate a memoria.

Abitualmente nella scuola media inferiore le equazioni vengono dapprima affrontate con strumenti risolutivi grafici o verbali e solo verso la fine della terza si propone una sistematizzazione che spesso diventa stabilire "regole" per la risoluzione. Alla scuola media superiore si svolge in genere una trattazione sistematica, collocata solitamente alla fine del primo anno, anche se in molte scuole il saper risolvere equazioni è subito necessario per le applicazioni ad altre discipline.

Frequentemente i due modi di affrontare lo stesso tema rimangono completamente scollegati al punto che gli alunni non riconoscono nei problemi che risolvono con equazioni quegli stessi problemi che, negli anni precedenti, riuscivano a risolvere, sebbene a volte con qualche difficoltà, con metodi intuitivi elementari. Inoltre, mentre i metodi intuitivi sono in genere applicati in modo legato ai significati, la risoluzione delle equazioni diventa spesso semplice meccanismo del tutto scollegato rispetto al significato delle operazioni che si compiono.

E' dunque utile che l'insegnante di scuola superiore presenti le equazioni come uno strumento efficace, ma non unico, per risolvere problemi, valorizzi i metodi elementari di risoluzione, stabilendo un collegamento con gli strumenti risolutivi utilizzati alle medie (uso di frecce, tabelle, diagrammi di flusso e altre rappresentazioni opportune per favorire la padronanza dei significati) e trovi gli esempi adeguati a "mettere in crisi" questi metodi quando non sono "comodi". Nella soluzione di un problema tramite un'equazione il linguaggio algebrico deve essere visto con una doppia valenza: come traduzione stenografica di una strategia risolutiva e come espressione sintetica su cui operare per trarne informazioni.

Naturalmente è essenziale portare avanti anche alcuni punti fondamentali sul piano teorico quali il significato del termine uguaglianza, le ipotesi nelle quali è possibile operare trasformazioni su una uguaglianza, le questioni relative ad esistenza e unicità della soluzione, il significato di termini quali identità ed equazione indeterminata, ...

In particolare è importante condurre i ragazzi a sapere risolvere un'equazione applicando *consapevolmente* i "principi di equivalenza".

Questa consapevolezza è a nostro parere l'obiettivo centrale di un possibile itinerario didattico sulle equazioni.

Devono risultare chiari agli alunni il significato dei principi di equivalenza, il loro ambito di applicazione, e la distinzione fra equazioni equivalenti e equazioni ottenute una dall'altra applicando i principi di equivalenza.

E' l'occasione per cercare di portare alla luce i problemi legati al già citato binomio senso-denotazione e al concetto di uguaglianza.

Un altro punto centrale nello studio delle equazioni è il riconoscimento consapevole dei casi in cui la soluzione non esiste, o non appartiene all'insieme considerato, oppure ogni elemento dell'insieme è soluzione dell'equazione, che dunque, se questo è infinito, può avere infinite soluzioni.

Si tratta cioè di dare significato ai termini equazione impossibile, identità, equazione indeterminata.

Le equazioni letterali, attraverso la necessaria "discussione sui coefficienti" possono infine offrire lo spunto per sintetizzare tutto il lavoro svolto (cfr. Bovio et alii, 95)

La prima superiore: il momento della riflessione e della sistematizzazione

Con lo studio delle equazioni di primo grado siamo arrivati "con continuità" a parlare di scuola superiore. Come indicato dalle proposte di programmi, ormai seguite in molte sedi in forma sperimentale (abbiamo citato all'inizio i programmi proposti dalla commissione Brocca, ma del tutto analoghi sono quelli del Piano Nazionale per l'Informatica), nella scuola superiore gli insiemi numerici, le operazioni in essi e le relative proprietà sono ripresi in forma più sistematica.

Inoltre "....il docente deve programmare lo sviluppo da dare al calcolo letterale per abituare lo studente alla corretta manipolazione di formule, sempre sostenuta dalla comprensione delle procedure da eseguire..."

La prima superiore può essere dunque il momento in cui l'alunno, riflettendo con una diversa maturità su 'cose già fatte' le comprende meglio, le generalizza, le unifica, impara a chiamarle con linguaggio più appropriato. L'uso di variabili e la loro manipolazione diventano allora uno strumento indispensabile, che si apprende ad utilizzare in modo più consapevole acquisendo nel contempo nuovi procedimenti e imparando a manipolare nuovi oggetti matematici.

Fra gli argomenti che nel biennio di scuola superiore possono contribuire all'acquisizione di una buona padronanza del calcolo formale e al tempo stesso presentano la possibilità di mettere in rilievo aspetti teorici interessanti accenniamo ad esempio alla scomposizione di polinomi in fattori, eventualmente irriducibili.

Si tratta di un argomento che tradizionalmente viene svolto in tutte le scuole e viene spesso considerato 'difficile'. Infatti, come è noto, non esiste per la fattorizzazione un algoritmo così generale e immediato come per lo sviluppo, anzi l'insegnante deve mettere in evidenza con opportuni esempi il carattere eccezionale della fattorizzabilità almeno per i polinomi in più variabili (Prodi-Villani 1982). Ciò premesso, il tema può essere trattato a vari livelli di approfondimento ed in genere in effetti viene ripreso in diversi momenti. Il livello minimo è il 'raccoglimento a fattor comune', legato alla comprensione della proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. Il cosiddetto raccoglimento 'parziale' presenta maggiori difficoltà non sul piano teorico ma su quello operativo in quanto richiede di 'guardare' l'espressione che si ha di fronte prima di operare o tentare trasformazioni che, pur corrette, possono non portare allo scopo che ci si propone.

Si tratta di una occasione didatticamente importante, in quanto l'esercizio algebrico anche se di tipo puramente sintattico richiede la scelta di un procedimento risolutivo anziché l'applicazione di una regola. Accanto ai raccoglimenti è utile promuovere il riconoscimento dei 'prodotti notevoli'.

Più avanti, quando si tratta il problema della divisibilità fra polinomi, è importante affrontare il tema della riducibilità di un polinomio in Q[x] o in R[x] e accennare all'esistenza di 'criteri di irriducibilità'.

E' essenziale che i ragazzi non vedano questo capitolo, che può essere ricco di spunti per dare all'algebra una dimensione più ampia di quella di serie di tecniche di calcolo, come insieme di esercizi inutilmente complessi o, al contrario, banalmente ripetitivi, ma lo affrontino osservandone le analogie con procedimenti appresi nell'ambito dei numeri interi, ne riconoscano l'utilità anche all'interno del calcolo algebrico (ad esempio per semplificare espressioni razionali fratte) e lo colleghino alla risoluzione di semplici problemi o alla dimostrazione di proprietà aritmetiche.

Riferimenti bibliografici

ARZARELLO F., BAZZINI L., CHIAPPINI G.P., 1994: *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche,* Progetto Strategico del CNR Tecnologie e Innovazioni Didattiche. Quad.6

BARTOLINI BUSSI M.G., BONI M., 1995: Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol.18A n.3, pagg.221-256

BAZZINI L., GALLO E., LEMUT E., 1996: Studies on Teaching and Learning Algebra, *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995,* Malara, Menghini, Reggiani eds, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Consiglio Nazionale delle Ricerche, pagg. 40-55

BERTOLINI C., MAGGI M., PESCI A., TREVISANI M., 1993: Un test esplorativo sul segno di uguaglianza in terza elementare, *Atti Matematica e Difficoltà n.3,* Pitagora ed., pagg. 73-79

BOERO P., 1992: Sulla specificità delle ricerche in Didattica della Matematica: il caso del formalismo algebrico, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 15, pagg. 963-986

BOVIO M., REGGIANI M., VERCESI N., 1995: Problemi didattici relativi alle equazioni di primo grado nel biennio delle superiori. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol.18b, n.1, pagg. 8-32

CROSIA L., GRIGNANI T., MAGENES M.R., PESCI A., 1996: La divisione tra polinomi: una proposta didattica per la scuola media superiore. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 19b, n.1, pagg. 11-28

CAVALLARI A., DE ANGELIS A., PESCI A., TOMA D., 1994 Il segno di uguaglianza in ambito aritmetico - algebrico. attività per esplorare stereotipie e fraintendimenti, *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo,* Parma, pagg. 43-48

CHIAPPINI G., LEMUT E., 1991: Construction and interpretation of algebraic models, *Proc. PME XV* Assisi, vol.I, pagg.199-206

GALLO E, BATTÙ M., CURLETTI P., LONGO M.L., SAVARINO L., SAVIO T., TESTA C, 1995: La manipolazione algebrica: aspetti concettuali e procedurali, *Atti V Internuclei Scuola Superiore,* Pavia, in stampa

GALLO E., 1994 Algebraic manipulation as problem solving, *First Italian Spanish Research Symposium in Mathematics Education,* Malara, Rico eds. , Modena, pagg. 131-138

GHERPELLI L., MALARA N.A.1996: Argomentazione e dimostrazione in aritmetica nel triennio di scuola media, *XV Internuclei Scuola Media* , Grugnetti, Iaderosa, Reggiani eds.pagg.32-43

MALARA N. A., 1994: Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà? *L'apprendimento della Matematica dalla ricerca teorica alla pratica didattica,* D'Amore ed., Pitagora, Bologna, pagg. 67-78

PRODI G., 1975: *Matematica come scoperta,* vol.I (e Guida per insegnante), D'Anna, Firenze

PRODI G., 1977: *Matematica come scoperta,* vol.II (e Guida per insegnante), D'Anna, Firenze

PRODI G., VILLANI V., 1982: Anche il calcolo letterale può essere intelligente, *Archimede*, pagg. 163-173

REGGIANI M., 1994a: Generalization as a basis for algebraic thinking. Observations with 11 -12 year old pupils *Proceedings PME XVIII,* vol.IV , pagg. 97-104

REGGIANI M., 1996: Avvio all'algebra fra scuola media inferiore e biennio, *Rendiconti Seminari Associazione Subalpina Mathesis*, Torino,(in stampa)

REGGIANI M.,1994b:Analisi di difficoltà legate all'uso di convenzioni nel linguaggio aritmetico-algebrico *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo* , pagg.61-66

REGGIANI M.,1995: Linguaggio algebrico e convenzioni: un'analisi del punto di vista degli alunni. *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre, Documents des Séminaires SFIDA 1 à SFIDA 4 1993 - 1995,* Drouhard, Maurel eds., IUFM Nice, pagg. IV 7- IV 14

SFARD A., 1991: On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* vol.22, pagg. 1-36

SIBILLA A., 1994: Approccio alla costruzione degli enunciati, alle dimostrazioni e al formalismo algebrico attraverso lo studio di alcune proprietà nell'insieme dei numeri naturali, *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo* , pagg.49-54

I "nuovi temi" dei programmi: è realistico parlare di continuità tra medie e superiori?

*Domingo Paola**

SOMMARIO

In questo lavoro si sostiene la tesi che, nonostante nei nuovi programmi del biennio siano presenti elementi di forte continuità con il ciclo di studi precedente, testimoniati dalla scelta degli argomenti proposti e dalle indicazioni metodologiche, non è realistico parlare di continuità anche e soprattutto per i nuovi temi. L'argomentazione a sostegno della tesi viene condotta considerando:

1. i ruoli dell'insegnante e dello studente nella realtà scolastica odierna, soprattutto nei confronti delle esigenze nate con il problema di realizzare nella prassi didattica le indicazioni più innovative dei nuovi programmi;
2. i ruoli dell'istruzione universitaria e delle pubblicazioni di ricerca in didattica della matematica per quel che riguarda la formazione e l'aggiornamento della classe insegnante;
3. l'analisi di alcuni punti che ritengo didatticamente delicati per quel che riguarda la trattazione dei temi di logica, di informatica, di probabilità e di statistica.

L'argomentazione si avvale, oltre che dei risultati già riportati nella letteratura specifica, anche di due nuove ricerche che ho effettuato con la collaborazione dell'IRRSAE Liguria e con due studenti del corso di *Matematiche elementari da un punto di vista superiore* dell'Università di Genova.

CONTINUITÀ DIDATTICA: UN PROBLEMA DAI MOLTI ASPETTI

Come è detto in [Calidoni & Calidoni, 1986], "l'immagine che viene in mente quando si parla di continuità nel passaggio da un ciclo di studi a un altro, è quella delle navi che attraversano le chiuse di un canale, un passaggio reso possibile dall'adeguamento dei livelli dell'acqua in vasche contigue". È un'immagine suggestiva, ma non rende l'idea della complessità del fenomeno. Si tratta, infatti, di tener conto non solo del passato scolastico dello studente, delle conoscenze raggiunte, ma anche di molti altri fattori: l'ambiente famigliare dell'alunno; i differenti punti di vista degli insegnanti dei vari ordini scolastici; i ruoli dell'insegnante e dello studente nella società attuale; l'influenza dei mezzi di comunicazione sulla realtà scolastica; la presenza, nella didattica, di innovazioni, sia per quel che riguarda i contenuti che le metodologie; i contributi dell'Università e del mondo della ricerca ai problemi della scuola...

* Liceo scientifico "G. Bruno" Albenga
G.R.E.M.G., Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Riferimenti bibliografici

ARZARELLO F., BAZZINI L., CHIAPPINI G.P., 1994: *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche,* Progetto Strategico del CNR Tecnologie e Innovazioni Didattiche. Quad.6

BARTOLINI BUSSI M.G., BONI M., 1995: Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol.18A n.3, pagg.221-256

BAZZINI L., GALLO E., LEMUT E., 1996: Studies on Teaching and Learning Algebra, *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995,* Malara, Menghini, Reggiani eds, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Consiglio Nazionale delle Ricerche, pagg. 40-55

BERTOLINI C., MAGGI M., PESCI A., TREVISANI M., 1993: Un test esplorativo sul segno di uguaglianza in terza elementare, *Atti Matematica e Difficoltà n.3,* Pitagora ed., pagg. 73-79

BOERO P., 1992: Sulla specificità delle ricerche in Didattica della Matematica: il caso del formalismo algebrico, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 15, pagg. 963-986

BOVIO M., REGGIANI M., VERCESI N., 1995: Problemi didattici relativi alle equazioni di primo grado nel biennio delle superiori. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol.18b, n.1, pagg. 8-32

CROSIA L., GRIGNANI T., MAGENES M.R., PESCI A., 1996: La divisione tra polinomi: una proposta didattica per la scuola media superiore. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 19b, n.1, pagg. 11-28

CAVALLARI A., DE ANGELIS A., PESCI A., TOMA D., 1994 Il segno di uguaglianza in ambito aritmetico - algebrico. attività per esplorare stereotipie e fraintendimenti, *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo,* Parma, pagg. 43-48

CHIAPPINI G., LEMUT E., 1991: Construction and interpretation of algebraic models, *Proc. PME XV* Assisi, vol.I, pagg.199-206

GALLO E, BATTÙ M., CURLETTI P., LONGO M.L., SAVARINO L., SAVIO T., TESTA C, 1995: La manipolazione algebrica: aspetti concettuali e procedurali, *Atti V Internuclei Scuola Superiore*, Pavia, in stampa

GALLO E., 1994 Algebraic manipulation as problem solving, *First Italian Spanish Research Symposium in Mathematics Education,* Malara, Rico eds. , Modena, pagg. 131-138

GHERPELLI L., MALARA N.A.1996: Argomentazione e dimostrazione in aritmetica nel triennio di scuola media, *XV Internuclei Scuola Media* , Grugnetti, Iaderosa, Reggiani eds.pagg.32-43

MALARA N. A., 1994: Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà? *L'apprendimento della Matematica dalla ricerca teorica alla pratica didattica,* D'Amore ed., Pitagora, Bologna, pagg. 67-78

PRODI G., 1975: *Matematica come scoperta,* vol.I (e Guida per insegnante), D'Anna, Firenze

PRODI G., 1977: *Matematica come scoperta,* vol.II (e Guida per insegnante), D'Anna, Firenze

PRODI G., VILLANI V., 1982: Anche il calcolo letterale può essere intelligente, *Archimede*, pagg. 163-173

REGGIANI M., 1994a: Generalization as a basis for algebraic thinking. Observations with 11 -12 year old pupils *Proceedings PME XVIII,* vol.IV , pagg. 97-104

REGGIANI M., 1996: Avvio all'algebra fra scuola media inferiore e biennio, *Rendiconti Seminari Associazione Subalpina Mathesis*, Torino,(in stampa)

REGGIANI M.,1994b:Analisi di difficoltà legate all'uso di convenzioni nel linguaggio aritmetico-algebrico *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo* , pagg.61-66

REGGIANI M.,1995: Linguaggio algebrico e convenzioni: un'analisi del punto di vista degli alunni. *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre, Documents des Séminaires SFIDA 1 à SFIDA 4 1993 - 1995,* Drouhard, Maurel eds., IUFM Nice, pagg. IV 7- IV 14

SFARD A., 1991: On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* vol.22, pagg. 1-36

SIBILLA A., 1994: Approccio alla costruzione degli enunciati, alle dimostrazioni e al formalismo algebrico attraverso lo studio di alcune proprietà nell'insieme dei numeri naturali, *Atti I Internuclei Scuola dell'obbligo* , pagg.49-54

I "nuovi temi" dei programmi: è realistico parlare di continuità tra medie e superiori?

*Domingo Paola**

SOMMARIO

In questo lavoro si sostiene la tesi che, nonostante nei nuovi programmi del biennio siano presenti elementi di forte continuità con il ciclo di studi precedente, testimoniati dalla scelta degli argomenti proposti e dalle indicazioni metodologiche, non è realistico parlare di continuità anche e soprattutto per i nuovi temi. L'argomentazione a sostegno della tesi viene condotta considerando:

1. i ruoli dell'insegnante e dello studente nella realtà scolastica odierna, soprattutto nei confronti delle esigenze nate con il problema di realizzare nella prassi didattica le indicazioni più innovative dei nuovi programmi;
2. i ruoli dell'istruzione universitaria e delle pubblicazioni di ricerca in didattica della matematica per quel che riguarda la formazione e l'aggiornamento della classe insegnante;
3. l'analisi di alcuni punti che ritengo didatticamente delicati per quel che riguarda la trattazione dei temi di logica, di informatica, di probabilità e di statistica.

L'argomentazione si avvale, oltre che dei risultati già riportati nella letteratura specifica, anche di due nuove ricerche che ho effettuato con la collaborazione dell'IRRSAE Liguria e con due studenti del corso di *Matematiche elementari da un punto di vista superiore* dell'Università di Genova.

CONTINUITÀ DIDATTICA: UN PROBLEMA DAI MOLTI ASPETTI

Come è detto in [Calidoni & Calidoni, 1986], "l'immagine che viene in mente quando si parla di continuità nel passaggio da un ciclo di studi a un altro, è quella delle navi che attraversano le chiuse di un canale, un passaggio reso possibile dall'adeguamento dei livelli dell'acqua in vasche contigue". È un'immagine suggestiva, ma non rende l'idea della complessità del fenomeno. Si tratta, infatti, di tener conto non solo del passato scolastico dello studente, delle conoscenze raggiunte, ma anche di molti altri fattori: l'ambiente famigliare dell'alunno; i differenti punti di vista degli insegnanti dei vari ordini scolastici; i ruoli dell'insegnante e dello studente nella società attuale; l'influenza dei mezzi di comunicazione sulla realtà scolastica; la presenza, nella didattica, di innovazioni, sia per quel che riguarda i contenuti che le metodologie; i contributi dell'Università e del mondo della ricerca ai problemi della scuola...

* Liceo scientifico "G. Bruno" Albenga
G.R.E.M.G., Dipartimento di Matematica, Università di Genova

In genere, nel progettare una riforma, si tende più a privilegiare i principi generali che non a prestare attenzione alla loro realizzabilità. La continuità non fa eccezione: in teoria, ossia nei programmi, c'è. In pratica si constatano risultati che testimoniano la presenza di forti discontinuità: basti pensare alla dispersione scolastica nelle superiori. In [Ferrari, 1996] ci si riferisce alla continuità didattica come a un'utopia possibile. Utopia, perché i prerequisiti necessari per la realizzazione della continuità oggi non ci sono nella scuola: non c'è l'omogeneità culturale fra insegnanti di differenti livelli scolari; in genere non c'è la conoscenza dei programmi di livelli scolari diversi da quello nel quale si opera; non si avverte la stima reciproca fra insegnanti dei diversi livelli, stima che è necessaria per mettersi insieme e parlarsi, progettare, collaborare. Ma le utopie sono il motore della realtà e in tal caso vi sono alcune condizioni che dovrebbero aiutare a realizzare la continuità didattica. Innanzitutto i nuovi programmi, che offrono a tutti i livelli un'immagine unitaria della matematica, come disciplina culturale, formativa. I contenuti procedono a spirale, favorendo percorsi orientati alla continuità. Infine le indicazioni metodologiche comuni: l'insegnamento per problemi, la sempre maggiore consapevolezza che gli studenti devono raggiungere sugli argomenti che studiano e sulle operazioni che effettuano.

E' bene precisare che non necessariamente di deve identificare la continuità con il bene e la discontinuità con il male. Come si ricorda in [Kilpatrick, 1995, 112], Freudenthal ha detto che "inevitabilmente l'insegnante fa esplodere discontinuità". Ogni apprendimento richiede per sua natura salti e discontinuità concettuali: pensiamo, per esempio, all'introduzione di nuovi termini, soprattutto quando li si utilizza, con accezioni diverse, anche nel linguaggio quotidiano. In tal caso il vecchio senso del termine è *contro*, non in continuità con il nuovo significato; il vecchio ostacola il nuovo. Vi sono poi aspetti istituzionali, come la presenza di tre cicli scolari, e aspetti legati alla crescita dello studente che comportano inevitabilmente discontinuità. La discontinuità non è quindi eliminabile, nemmeno in teoria; il problema è renderla sopportabile, gestirla in modo sapiente e non traumatico per lo studente.

Continuità e discontinuità costituiscono il processo stesso di apprendimento: l'insegnante, partendo da indagini sulle concezioni degli studenti (aspetto continuista), deve talvolta progettare situazioni di apprendimento che creino forti sollecitazioni in quelle concezioni che potrebbero essere di ostacolo all'acquisizione del nuovo in modo da creare l'esigenza di una ristrutturazione delle stesse.

Il ruolo dell'insegnante nell'attuale sistema scolastico: teoria e pratica

La scuola attuale prevede per l'insegnante un ruolo diverso da quello tradizionale di colui che trasmette prodotti finiti e sistemati di conoscenza. Come è detto in [Bishop, 1995], oggi ci si aspetta che l'insegnante legittimi la conoscenza in classe, nel senso che costituisca un costante punto di riferimento nel suggerire quali delle diverse idee e conoscenze che circolano in classe potrebbero essere foriere di ulteriori sviluppi. L'insegnante dovrebbe avere un ruolo più attivo e di maggiore responsabilità rispetto a quello che aveva in passato. Dovrebbe prendere decisioni, progettare curricoli allo scopo di conciliare le indicazioni dei programmi con la reale situazione in cui opera. Dovrebbe essere in grado di valutare l'impatto di innovazioni metodologiche e tecnologiche sull'ambiente nel quale lavora e prendere posizione su di esse. Dovrebbe interessarsi ai problemi della ricerca didattica. Dovrebbe costruire percorsi individualizzati di recupero, di sostegno e di approfondimento, perché la più grave ingiustizia è dare a tutti la stessa istruzione se le condizioni di partenza sono diverse. Dovrebbe lavorare in classi poco numerose, avere la possibilità di impostare un lavoro pluriennale, potersi confrontare sistematicamente con colleghi che operano in altre realtà.

E in pratica? In pratica l'insegnante spesso lavora in classi numerose, in ambienti non adatti a una didattica flessibile, attenta anche all'individuo, alle sue esigenze di approfondimento o di recupero. In pratica spesso trova forti ostacoli a soddisfare quelli che sono suoi diritti e doveri e cioè l'aggiornamento, la formazione in servizio, la ricerca. In pratica l'insegnante è spesso lasciato solo nelle proprie decisioni, anche perché gli scambi di esperienze e i contatti con altri colleghi o con esperti di fatto costituiscono l'eccezione e non la regola. In pratica gli si chiede di realizzare nella prassi didattica una mediazione tra istruzione ed educazione, quando la scuola stessa soffre il peso di questo duplice ruolo, forse perché non adeguatamente sostenuta nel ruolo educazionale da istituzioni naturalmente preposte a ciò, come la famiglia, le associazioni, i gruppi microsociali. Ma soprattutto l'insegnante è consapevole del livello di bassa considerazione sociale nel quale è tenuta la sua professione. Tutto ciò crea demotivazione, frustrazione, alibi a non seguire le indicazioni più innovative, quelle che richiedono maggior investimento in termini di risorse intellettuali e di tempo.

Il ruolo dello studente nell'attuale sistema scolastico: teoria e pratica

Molto più che in passato, allo studente viene richiesto di partecipare attivamente al processo di costruzione di conoscenza. La classe è pensata come una comunità i cui membri sono impegnati in costruzioni di conoscenze individuali e collettive, comunità in cui si stabiliscono standard e regole di partecipazione. Più che imparare per imitazione dell'esperto, lo studente deve apprendere attraverso la mediazione di esperti, attraverso attività di riflessione individuale e di gruppo su quanto appreso [Skemp, 1986]. In teoria si vorrebbe uno studente attento, attivo, motivato, interessato, curioso, consapevole. E in pratica? C'è un bel pensiero in [Sawyer, 1979] che mi pare caratterizzi bene il rapporto che esiste tra molti studenti e la matematica: "molti studenti sentono che non saranno mai capaci di capire la matematica, ma che ne possono imparare abbastanza per far fessi gli insegnanti, facendo loro credere che ne sono capaci. Essi sono simili a messaggeri che devono ripetere un messaggio in una lingua sconosciuta, pieni di ansia nel comunicare il messaggio prima che la memoria li tradisca".

In pratica gli studenti richiedono schemi, scorciatoie pericolose per l'apprendimento: non vogliono nemmeno pensare che l'attività di apprendimento è faticosa, che spesso ci si trova immersi in una fitta nebbia nella quale è necessario procedere a tentoni, per tentativi ed errori e che è anche sugli errori che si costruisce conoscenza. La scuola, però, non crea un ambiente nel quale si possa far esperienza degli errori commessi in modo sereno. Lo studente si sente sempre valutato e tende a nascondere gli errori commessi, privando l'insegnante di una fonte insostituibile di informazioni sulle concezioni degli studenti.

In pratica gli studenti sono poco motivati perché avvertono la riduzione delle prospettive di affermazione sociale attraverso lo studio; sono esposti a una sempre maggiore produzione di esempi di affermazione sociale che avviene contro o nonostante la scuola.

Insegnanti delle medie e insegnanti delle superiori. I risultati di un'indagine.

Varie ricerche [Bolletta, 1988], [Bottino & Furinghetti, 1990], [Chiarugi & Furinghetti, 1990], [Annali P.I., 1991], [Bottino, Chiarugi & Furinghetti, 1991], [Lombardo, 1991], [Aureli & Ottaviani, 1992], testimoniano che in genere gli insegnanti, sia di scuola media, sia di scuola secondaria superiore, trascurano la trattazione degli argomenti innovativi, privilegiando quella di temi tradizionali. Allo scopo di sondare se la situazione attuale è ancora quella descritta dai lavori citati, ho preparato un questionario che, grazie alla collaborazione dell'IRRSAE Liguria, è stato distribuito a tutti gli insegnanti di matematica delle scuole medie statali e dei bienni di scuola secondaria della regione. A tale questionario hanno risposto 251 insegnanti di scuola media e 134 di biennio di scuola superiore. (circa 1/3 degli insegnanti contattati). Le varie domande proposte e una elaborazione delle risposte fornite verranno pubblicate in [Paola, 1996]. Dai dati del questionario emergono molte differenze e poche affinità tra gli insegnanti dei due ordini scolari. Queste differenze rischiano di rafforzare gli elementi di discontinuità che inevitabilmente caratterizzano il passaggio da un ordine scolare a un altro. Il fatto stesso che nella scuola media inferiore la maggioranza degli insegnanti abbia una laurea in scienze biologiche o naturali, mentre nel biennio di scuola superiore il 93.8% possieda la laurea in matematica, favorisce una differente impostazione della didattica che potrebbe anche causare allo studente qualche problema nel passaggio al livello scolare successivo. Gli insegnanti della scuola media sembrano tenere in maggiore considerazione dei loro colleghi della superiore i problemi di carattere psicopedagogico che sorgono nel rapporto con gli studenti. Sembrano lievemente più sensibili dei loro colleghi ai nuovi temi indicati dai programmi, ma anch'essi tendono comunque a privilegiare la trattazione di argomenti tradizionali. Come i loro colleghi della scuola superiore danno priorità all'acquisizione di competenze legate al calcolo, sia esso numerico o simbolico e, anche se in fondo si rammaricano di ciò, contribuiscono a creare una frattura con le indicazioni contenute nei programmi delle medie e nei nuovi programmi delle superiori. Il dato più sorprendente e sconfortante, soprattutto se si pensa che gli insegnanti che hanno risposto al questionario dovrebbero essere fra i più motivati e sensibili al problema della continuità, riguarda la conoscenza dei programmi di ordini scolari diversi da quello in cui si insegna. Il 70% degli insegnanti della scuola media dichiara di non conoscere i programmi sperimentali (PNI o Brocca) delle superiori: proprio quelli pensati in continuità con la scuola media!

Università e ricerca didattica di fronte al problema della formazione e dell'aggiornamento degli insegnanti

Gli insegnanti lamentano una preparazione inadeguata per la trattazione dei nuovi temi dei programmi: logica, informatica, probabilità e statistica. Come è detto in [Pepe, 1988], il calcolo delle probabilità compare per la prima volta tra gli insegnamenti complementari (non attivato in molte facoltà) nel 1938; solo nel 1960 entrano in gioco anche logica matematica e statistica matematica: si tratta sempre di insegnamenti complementari non attivati in molte facoltà. In [Figà-Talamanca, 1988] si ricorda che è solo negli anni settanta che si svolsero i primi concorsi universitari di teoria ed applicazioni delle macchine calcolatrici. È chiaro che, se non esiste una consolidata tradizione per questi nuovi temi nell'ambiente accademico italiano tantomeno tale tradizione potrà esistere in quello scolastico. Si deve inoltre rilevare che:

a) non in tutte le facoltà in cui sono attivati, i corsi che trattano i nuovi temi sono obbligatori.
b) molto spesso si tratta di corsi semestrali, che non danno la possibilità agli studenti di entrare in contatto con il pensiero proprio della disciplina in oggetto.
c) non sempre si tratta di corsi attivati specificamente per l'indirizzo didattico e, quindi, non sempre si tratta di corsi fatti su misura per i futuri insegnanti, cosa di cui, invece, il mondo della scuola sente l'esigenza [Anichini, 1995].

Tutto ciò crea una situazione in parte compromessa già ai nastri di partenza, non solo per quel che riguarda il problema della continuità, ma addirittura per quel che riguarda il corretto insegnamento nella scuola di alcuni dei nuovi argomenti proposti nei programmi. A ciò si aggiunga il fatto che, da un'indagine che ho con due studenti del corso di *Matematiche elementari da un punto di vista superiore* dell'Università di Genova [Bertaccini & Morgante], risulta che, dal

1994, su prestigiose riviste internazionali di didattica, come *Educational Studies in Mathematics* o *For the Learning of Mathematics* e sugli atti di convegni come il PME o il CIEAEM, gli articoli di carattere generale in educazione matematica, di geometria, di aritmetica e (se si eccettuano gli atti del CIEAEM) di algebra, sono molto più numerosi di quelli di probabilità e statistica. La situazione migliora leggermente, ma non sensibilmente, se si considerano le riviste di didattica italiane, come *La matematica e la sua didattica*, *Il periodico di matematiche*, *L'educazione matematica*, *Archimede*, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*[1].

Non si può negare che molto sia stato fatto nel campo dell'aggiornamento e della formazione sui nuovi temi in questi ultimi anni. Però ancora molto rimane da fare: soprattutto c'è il problema di creare un forte e duraturo collegamento tra ricerca e insegnamento. Lo cita anche il nuovo contratto che specifica che non solo l'aggiornamento, ma anche la ricerca è un diritto dovere. L'esplorazione delle difficoltà concettuali dell'alunno deve diventare momento fondamentale dell'attività dell'insegnante, non solo estemporanea e contingente riflessione.

ALCUNI PUNTI DIDATTICAMENTE DELICATI PER LA TRATTAZIONE DEI NUOVI TEMI: LOGICA

La logica pervade i programmi del biennio a due livelli: quello di *logica per la matematica* o *nella matematica* (quando si utilizzano strumenti e contenuti propri della logica per svolgere o meglio comprendere attività matematiche) e quello di *logica matematica* (strumenti e contenuti della logica diventano oggetto di studio). Per esempio, un'attività di formalizzazione è di *logica matematica*; l'uso corretto e consapevole del linguaggio specifico è, invece, un'attività di *logica nella matematica*. Nei commenti riferiti ai temi del programma di scuola media inferiore si legge: "la riflessione sull'uso dei connettivi concorre alla dichiarazione del linguaggio e del pensiero logico". Sembra quindi di poter affermare che attività di *logica nella* o *per la matematica* dovrebbero naturalmente favorire la continuità nel passaggio da un livello scolare all'altro, così come l'attenzione al linguaggio utilizzato dallo studente per esprimersi, per spiegare, per riferire esperienze e conoscenze. La comunicazione delle conoscenze e delle esperienze matematiche avviene, almeno inizialmente, attraverso la lingua naturale. Occorre cercare di evitare che il linguaggio utilizzato sia fonte di incomprensioni. Al tempo stesso è necessario costruire un linguaggio sempre più appropriato per la matematica. Il linguaggio, quindi, è contemporaneamente strumento e oggetto di studio; d'altra parte le competenze linguistiche degli studenti sono spesso poco adeguate all'apprendimento della matematica. Quando va bene gli studenti dicono quello che sanno: ciò però non è sufficiente, in quanto vorremmo anche che sapessero quello che dicono. Le attività di *logica nella* o *per la matematica* invitano lo studente a riflettere sulle proprie conoscenze e, quindi, a diventarne consapevole, a sentire l'esigenza di strutture linguistiche adeguate alla divulgazione e alla condivisione con i compagni di lavoro. Una didattica attenta a problemi di questo tipo pone, a mio avviso, le basi per una matura attività argomentativa che è il primo passo per apprezzare l'attività di dimostrazione intesa nella sua accezione etimologica, di *mostrare* quello che si vede, che si è intuito; mostrarlo anche e soprattutto attraverso il discorso. Meno banale è il passaggio all'esplicitazione delle regole inferenziali utilizzate in una dimostrazione. Anche qui, però, come suggerito in [Marchini, 1987], già nella scuola media inferiore si potrebbero avviare gli studenti a effettuare dimostrazioni.

[1] Tengo a sottolineare che l'indagine si riferisce agli anni 1994, 1995 e a parte del 1996. I risultati non danno alcuna indicazione sulle tendenze precedenti. Per esempio, sull'*Educazione matematica* e sull'*Insegnamento della matematica e delle scienze integrate* c'è stata attenzione per i temi della probabilità e della statistica. Inoltre, per quel che riguarda quest'ultima rivista, ho preso in considerazione solo i volumi della sezione B.

Quanto detto si può riassumere con le parole di [Bernardi, 1993, 1055], "la logica nell'insegnamento consiste in primo luogo in una riflessione su quello che si fa. In questo senso la logica è una scienza a posteriori, che mira, fra l'altro, al raggiungimento di una consapevolezza linguistica nel senso di capire e sapere spiegare quello che si dice o si scrive. Per rendere il discorso concreto, io credo che l'uso appropriato di parole come *quindi, infatti, oppure uno, e, il, o, suppongo, concludo*, o ancora, *verifico* e *dimostro*, rappresenti un traguardo fondamentale per l'educazione logica nella scuola secondaria".

Bibliografia per esempi di realizzazioni di attività di logica nella matematica: [Marchini, 1987], [Pesci, 1987], [Giuliani, Pesci, Romanoni, 1993], [Navarra, 1993], [AAVV, 1994], [Bernardi, 1994].

ALCUNI PUNTI DIDATTICAMENTE DELICATI PER LA TRATTAZIONE DEI NUOVI TEMI: INFORMATICA

Dai risultati del questionario proposto in Liguria, emerge che gli insegnanti sono in genere favorevoli all'utilizzazione del laboratorio di informatica e, anzi, lo considerano elemento di fondamentale importanza nell'attività didattica. Il problema è che vi sono almeno due modi di intendere e sviluppare l'informatica nella scuola: l'uso del calcolatore nella didattica della matematica e l'introduzione di elementi di informatica con lo scopo primario di educare lo studente alla conoscenza e all'uso di nuovi concetti, tecniche e strumenti, per affrontare e risolvere problemi anche diversi da quelli tradizionali della matematica. Questo secondo modo di intendere l'informatica, che include anche l'uso del calcolatore a vari livelli di competenza, è spesso confuso con l'insegnamento dell'informatica teorica, che ha invece tutt'altri scopi e si rivolge a studenti a livello universitario. A me sembra che nella scuola sia presente una visione riduttiva l'informatica, intesa e sviluppata come utilizzazione dell'elaboratore nella didattica della matematica e come approccio algoritmico alla matematica. Ciò, comunque, non è un fatto del tutto negativo, anche perché consente di sviluppare in modo naturale e intelligente quell'idea di scuola fatta anche *con le mani*, in naturale continuità con la scuola media inferiore; però si corre il rischio di non far cogliere agli studenti le maggiori potenzialità e innovazioni dell'informatica come disciplina. Come è detto in [Astesiano, 1990, p.160] "Oggetto dell'informatica è una parziale sostituzione di un'attività umana con una attività automatizzata, e quindi: ogni strumento informatico è un modello di parte del comportamento umano; compito essenziale dell'informatica è costruire modelli; compito essenziale dell'utente è usare modelli".

Un approccio all'informatica sulla linea di quello suggerito dalle parole di Astesiano si trova in [Ausiello, Batini, Mandrioli & Protasi, 1991]. Il problema è che non mi sembra che l'insegnante medio, non laureato in informatica, abbia le necessarie competenze, la sensibilità, la forma mentis per trasmettere ai propri studenti un'immagine della disciplina sui binari tratteggiati dalle parole di Astesiano. Mi sembra che allo stato attuale sia poco realistico pensare di andare molto al di là dell'uso strumentale dell'elaboratore e dell' approccio algoritmico alla matematica. Ritengo, comunque, che una tale impostazione possa portare a buoni risultati in classe, purché non venga proposta come *l'approccio all'informatica*.

Come indicato nella premessa di [Dapueto & Greco, 1991, premessa] il calcolatore può essere considerato come: "a) strumento per rendere accessibile a scuola attività di modellizzazione significative; b) occasione per riflettere sui contenuti di base matematici (...) ; c) via di accesso motivato allo sviluppo di abilità linguistiche (...); d) oggetto di riflessione e occasione di introduzione motivata di concetti matematici utili a padroneggiarlo (...)".

Un forte aiuto alla determinazione di buoni risultati potrebbe venire dal mondo della ricerca didattica italiana: sono ancora oggi relativamente pochi i lavori che studiano le interazioni studente-calcolatore, gli errori più comuni, le strategie spontanee, gli atteggiamenti degli studenti di fronte alla macchina, le ripercussioni sul piano cognitivo e affettivo, l'influenza sul lavoro di gruppo, sul ruolo dell'insegnante in classe e di cui già in [Prodi, 1990] si evidenziava l'esigenza. Inoltre sarebbe auspicabile un maggiore interesse a tali problemi anche da parte degli informatici.

Senza dubbio, sia nelle scuole medie inferiori che in quelle superiori il problema della gestione tempo (e in alcuni casi degli spazi) è di forte ostacolo all'utilizzazione proficua del laboratorio di informatica: fare esperimenti con e su i modelli matematici, produrre congetture, fare verifiche, visualizzare concetti astratti della matematica e aggiungervi dinamicità, imparare da esempi, programmare, affrontare progetti di lavoro con l'ausilio dell'elaboratore, richiede

tempi che non possono essere quelli ristretti dell'orario scolastico e, spesso, richiede la possibilità, per lo studente, di disporre a casa di un elaboratore per giocare, familiarizzare, provare a interagire con esso. Questo, a mio avviso, è uno dei maggiori limiti di cui ancora risentono le attività svolte con l'ausilio dell'elaboratore.

Riferimenti bibliografici per l'utilizzazione di strumenti informatici: [Testa, 1988], [Cuttica & Martini, 1991], [Dapueto & Greco, 1991], [Reggiani, 1994], [Dapueto, 1995].

ALCUNI PUNTI DIDATTICAMENTE DELICATI PER LA TRATTAZIONE DEI NUOVI TEMI: PROBABILITÀ E STATISTICA

Secondo [Aureli & Ottaviani, 1992, 34-35] le principali cause che spiegano perché mai proprio gli argomenti di probabilità e di statistica (soprattutto questi ultimi) risultano essere i meno trattati nella scuola secondaria superiore e non sono troppo amati anche nella scuola media, sono: "a) la maggior parte dei docenti non ha formazione statistica adeguata; b) il materiale didattico sul quale si può contare è frammentario e spesso superficiale, quando non addirittura errato; c) la statistica, se da un lato si presta bene all'attività interdisciplinare, trova in realtà in essa il suo limite. Predisporre attività interdisciplinari richiede infatti grande disponibilità, anche di tempo, da parte di più docenti e ciò non è facile da conseguire; d) la statistica richiede tempo, sia quando si tratta di raccogliere dati e organizzarli, sia quando si tratta i utilizzare calcolatori o elaboratori; e) non è immediato inserire la valutazione delle competenze statistiche acquisite nelle prove, sia in corso d'anno che in sede d'esame".

Vorrei provare a indicare qualche via sulla quale si potrebbero trovare soluzioni, almeno parziali. Per quel che riguarda il punto a) si tratta di un problema risolvibile definitivamente solo nel lungo periodo. Solo una solida formazione di base dei futuri insegnanti nel campo delle discipline statistico-probabilistiche potrà far compiere significativi passi in avanti; tale formazione non può che essere demandata ai corsi universitari. A mio avviso, però, si può iniziare a fare qualcosa di concreto anche a breve termine. Si potrebbero accompagnare le iniziative di aggiornamento, formazione e ricerca, con una disponibilità sistematica e strutturale di ricercatori o esperti che si occupano della didattica della probabilità e della statistica a seguire il lavoro di insegnanti e studenti della scuola media. Immaginiamo, per esempio, che un insegnante di scuola media decida di far compiere ai suoi studenti un'indagine volta a stabilire come i ragazzi dai 13 ai 15 anni trascorrono il proprio tempo libero e, eventualmente, a rilevare se esiste una correlazione tra determinate attività e il rendimento a scuola. Il ruolo dell'esperto potrebbe essere quello di valutare l'effettiva possibilità di realizzazione dell'idea dell'insegnante, aiutare a formulare meglio il problema; seguire e consigliare l'insegnante nella scelta delle operazioni da effettuare e degli strumenti da utilizzare per raccogliere dati significativi e, successivamente, per interpretarli. Per quel che riguarda il punto b) vorrei solo far notare che alcuni Nuclei di Ricerca Didattica hanno prodotto materiali molto validi, non superficiali, già direttamente trasferibili nella prassi didattica... si tratta di non essere vincolati al tradizionale libro di testo. La soluzione del problema di cui al punto c) può essere trovata solo convincendosi che non è poi così drammatico sottrarre spazio ad altre attività e argomenti più tradizionali. Inoltre è bene progettare azioni didattiche concordate con insegnanti di altre materie: geografia, scienze, storia, fisica...si prestano tutte a trattazioni ed attività che coinvolgono in modo naturale la statistica. Per quel che riguarda il punto d) potrebbero essere utili dati non ancora elaborati (o parzialmente elaborati) messi a disposizione delle scuole da istituti di ricerca. I problemi messi in evidenza nel punto e) sono difficilmente superabili nell'ottica di una valutazione e di un rapporto tradizionali con lo studente; per chi lavora in altri ambiti si tratta, invece, di pensare a nuove forme di valutazione o di ridiscutere il concetto stesso di valutazione.

Leggendo contenuti e indicazioni relativi agli argomenti di probabilità e statistica, sia per quel che riguarda i programmi della scuola media inferiore sia per quelli del biennio Brocca di scuola superiore, si nota immediatamente che sono improntati alla continuità tra i due livelli scolastici. La continuità, però, può essere in pratica compromessa da una mancata acquisizione di alcuni concetti che i programmi delle medie sembrano invece dare per acquisiti al termine del ciclo. In essi, infatti, si legge: "la nozione di probabilità scaturisce sia come naturale conclusione dagli argomenti di statistica, sia da semplici esperimenti di estrazioni casuali". Vi sono alcuni studi fondamentali, tesi a far luce sul modo di concepire la probabilità da parte dagli studenti, che mettono in guardia sul considerare facilmente raggiungibili obiettivi come quelli sopra riportati: [Kahneman & Tversky, 1974] , [Shaughnessy, 1977], [Hawkins & Kapadia, 1984], [Steinbring, 1991], [Fischbein & Schnarch, 1996], [Batanero, Serrano & Garfield, 1996]. In particolare, [Dapueto, Ghio & Pesce, 1994] discutono sui possibili fraintendimenti legati ai termini *casuale*, *incerto*, *normale variabile casuale*; su alcuni usi scorretti della statistica e della probabilità (confondere variazioni percentuali con variazioni delle percentuali, diagrammi tendenziosi o scorretti...).

Forse l'educazione scientifica tradizionale enfatizza gli aspetti deterministici e trascura lo studio delle situazioni di incertezza: sarebbe opportuno impostare attività in cui gli studenti possano condurre esperimenti in prima persona; lavorare confrontandosi in piccoli gruppi; produrre congetture e validarle con l'aiuto di strumenti di calcolo automatici; scoprire da soli regole e formule del calcolo combinatorio; provare a costruire modelli probabilistici.

Riferimenti bibliografici per probabilità e statistica: [Perelli, 1980a; 1980b; 1982], [Dupont, 1985], [Lombardo & Zuliani, 1988], [Coletti; Mencone & Pannone, 1990], [Pittino, Strudthoff, Bressan, Vetere-Rossi, Fontana, Petrossi & Todisco, 1990], [Dapueto, 1991; 1995], [Carniel, 1993], [Mascelloni, 1993; 1994], [AAVV, 1994], [Batini, M., 1994], [Gilio, Scalia & Scozzafava, 1994], [Pucci, 1994], [Bonetti, 1995] , [Brunelli & Pannone, 1995], [Dapueto, 1995], [MPI, 1995].

Bibliografia

AAVV: 1994, *Uomo e natura.Uomo e società Uomo e cultura*, Rapporto tecnico, Dipartimento di Matematica Università di Genova..

Anichini, G.: 1995, Intervento in Giovagnoli, A., Regazzini, E., (a cura di) *Convegno sull'insegnamento della probabilità e della statistica nei corsi di laurea e diploma delle facoltà di scienze*, Notiziario U.M.I., anno, XXII, suppl. al n. 6, 47-49.

Annali P.I.: 1991, La verifica del piano nazionale per l'informatica nelle scuole secondarie superiori, *Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione*, 55.

Astesiano, E.: 1990, Sapere di informatica per insegnare l'informatica, in Furinghetti, F., (a cura di), *Matematica oggi: dalle idee alla scuola*, Edizioni scolastiche Bruno Mondadori, Milano, 156-168.

Aureli, E., Ottaviani, M.G.: 1992, Insegnanti e testi: due aree di condizionamento per l'insegnamento della statistica nelle scuole secondarie superiori, *Induzioni*, 4, 33-36.

Ausiello, G., Batini, C., Mandrioli, D. & Protasi, M.: 1991, *Modelli e linguaggi dell'informatica*, Mc Graw - Hill, Milano.

Batanero, C., Serrano & L. Garfield, J.B: 1996., Heuristics and biases in secondary school students' reasoning about probability, PME 20, Valencia, vol 2, 51-58.

Batini, M.: 1994, Un primo incontro con la probabilità, *Induzioni*, 8, 133-148.

Bernardi, C.: 1993, La logica nella scuola secondaria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 16, 11-12, 1041-1055.

Bernardi, C.: 1994, Problemi per la logica (ovvero la logica per problemi), *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 17 A- 17B, 5, 507-522.

Bertaccini, A. & Morgante, A.: 1996, *Presenza di logica e probabilità in due importanti riviste sull'educazione matematica*, Dipartimento di matematica, Università di Genova.

Bishop, A.J.:1995, Mathematics education between technology and ethnomathematics. Should it be commun? Does it make sense?, *Mathematics education and common sense*, CIEAEM 47, 53-62, Berlin.

Bolletta, R.: 1988, *Preparazione matematica in Italia al termine della Scuola Media*, Rapporto dell'indagine Vamio, Quaderni del CEDE, Frascati.

Bonetti, R.: 1995, L'insegnamento della probabilità e della statistica nella scuola liceale. Effetti di un seminario, *Induzioni*, 11, 113-126.

Bottino, R.M. & Furinghetti, F.: 1990, ' Computer science in basic education: curricular issues and school practice prospects' in A. Mc Dougall & C.Dowling (editors), *Computer in education. Proceedings of IFIP TC3 world conference on Computer in Education - WCCE 90,* Sydney, Elsevier, Amsterdam, 25-30.

Bottino, R.M, Chiarugi, I. & Furinghetti, F.: 1991, 'Teachers'opinions about maths teaching at ages 14-16' in Ciosek, M. (editor), *Proceedings of the CIEAEM 42*, (Szczyrk, 1990), 178-190.

Bressan, C., Fontana, R., Todisco & L., Vetere Rossi, A.: 1986, Probabilità dal punto di vista non assiomatico, in Mariotti, M.A., (a cura di) *Decimo convegno sull'insegnamento della matematica: la scuola secondaria superiore*, Notiziario UMI., anno XIII, suppl. al n. 7, Salsomaggiore, 112-114.

Brunelli, L.& Pannone, M.A.: 1995, La statistica e la valutazione diagnostica attraverso un test di ingresso, *Induzioni*, 11, 127-142.

Calidoni, M., Calidoni, P.: 1986, *Continuità educativa e scuola di base*, La Scuola, Brescia.

Carniel, A.: 1993, Un'attività di statistica nella scuola media, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 16, 8, 713-730.

Chiarugi, I. & Furinghetti, F.: 1990, La matematica nei bienni: nuovi programmi e vecchi problemi, in Furinghetti, F. (a cura di) *Matematica oggi: dalle idee alla scuola*, Edizioni scolastiche Bruno Mondadori, Milano.

Coletti, G., Menconi, F.& Pannone, M.A.: 1990, *L'insegnamento della statistica e della probabilità nella scuola media*, Quaderno 11, Progetto strategico del C.N.R. TID.

Cuttica, A. & Martini, D.: 1991, 'I numeri reali nel laboratorio di matematica', in A. Gisolfi (editor), *Atti del convegno Informatica e didattica*, Salerno, 123-131.

Dapueto, C. & Greco, S.: 1991, *Calcolatore e insegnamento della matematica. Corso di aggiornamento per insegnanti di matematica della S.S.S. a.s. 1990/1991*, Centro Stampa Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova.

Dapueto, C., Ghio, S., Pesce, G.:1994, Statistica e probabilità nel biennio: nodi culturali e didattici da affrontare, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 17B, 4, 309-316 e 357-384.

Dapueto, C.: 1995, (a cura di), *MaCosa: Matematica per Conoscere e per Sapere*, vol 1, Maggi Editore.

Dupont, P.:1985, *Primo incontro con la probabilità*, SEI, Torino.

Ferrari, M.: 1996, Continuità: utopia possibile, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 19A, 3, 207-222.

Figà-Talamanca, A.: 1988., Relazione al convegno U.M.I, in Anichini, G., (a cura di) *Ristrutturazione del corso di laurea in matematica*, Notiziario U.M.I., anno XV suppl. al n. 1-2, ., 36 - 41.

Fischbein, E.& Schnarch, D.: 1996, Intuitions and schemata in probabilistic thinking, *PME*, 20, Valencia, vol 2, 353-360.

Gilio, A., Scalia Tomba, G.& Scozzafava, R.: 1994, La probabilità nella vita reale attraverso esempi, *Induzioni*, 8, 69-78.

Giuliani, E., Pesci, A., Romanoni, M.C.: 1993, Un'esperienza di avvio alla simbolizzazione in prima media, *La matematica e la sua didattica*, 1, 21-38.

Hawkins, A.S. & Kapadia, R.: 1984, Children's Conceptions of Probability- a Psychological and Pedagogical Review, *Educational studies in mathematics*, 15, 349-377.

Kahneman, D. & Tversky, A.: 1974, Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Science*, 185, 1124-1131

Kilpatrick, J.: 1995, Riflessione e ricorsione, in Bernardi, C (a cura di), *Sviluppi e tendenze internazionali in didattica della matematica*, 93-126, Pitagora, Bologna.

Lombardo, E.& Zuliani, A.: 1988, *Statistica per esempi*, La Nuova Italia, Firenze.

Lombardo, E.: 1991, La statistica: dove, come e quanta ne viene insegnata, *Epsilon*, 9, 51-55.

Marchini, C.: 1987, Argomentazione e dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 10, n. 2, 122-140.

Mascelloni, A.: 1993, Sprint, analisi di un gioco, *Induzioni*, 7, 107-109.

Mascelloni, A.: 1994, Probabilità per sopravvivere, *Induzioni*, 8, 129-132.

Navarra, G.: 1993, Itinerari attraverso la logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 16, n.8, 731-756.

Paola, D.: 1996, *Analisi delle risposte al questionario sulla continuità nella didattica della matematica nel passaggio dalle medie alle superiori*, suppl. Boll. IRRSAE Liguria (da pubblicare).

Pepe, L.: 1988, Relazione al convegno U.M.I., in Anichini, G., (a cura di) *Ristrutturazione del corso di laurea in matematica*, Notiziario U.M.I., anno XV suppl. al n. 1-2, 7-19.

Perelli D'Argenzio, M.P.: 1980a, Un'esperienza di statistica nella scuola media, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 3, 5, 39-48.

Perelli D'Argenzio, M.P.: 1980b, Un'esperienza di statistica nella scuola media, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 3, 6, 37-42.
Perelli D'Argenzio, M.P.,: 1982, Un'esperienza di statistica nella scuola media, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 5, 3, 35-50.
Pesci, A.: 1987, Un problema di affidabilità: alcuni spunti didattici, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 10, 4, 314-345.
Pittino Rocco, M., Strudthoff, Markò, R., Bressan, C., Vetere-Rossi, A., Fontana, R., Petrossi, F. & Todisco, L.: 1990, *Tre proposte didattiche per l'insegnamento della statistica e della probabilità con l'utilizzo del computer*, Quaderno 5, Progetto strategico del C.N.R., TID.
Prodi, G.: 1990, Quale informatica per la scuola medie, in Pluchino, S., (a cura di), *Tredicesimo convegno sull'insegnamento della matematica: i programmi di matematica nella scuola media 10 anni dopo*, notiziario U.M.I., anno XVII, suppl. al n. 3, 1- 4.
Pucci, A: 1994., La statistica nell'insegnamento della geografia, *Induzioni*, 9, 107-112.
Reggiani, M.: 1994, Insegnare a programmare nella scuola media inferiore: obiettivi, risultati, difficoltà, riflessioni, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 17B, 1, 65-91.
Shaughnessy, J.M.: 1977, Misconceptions of probability: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level, *Educational studies in Mathematics*, 8, 295-316.
Sawyer,W.W.: 1979, *Mathematician's Delight*, Penguin.
Skemp, R.: 1986, *The Psychology of learning mathematics*, Penguin.
Steinbring, H.: 1991, The Theoretical Nature of Probability in the Classroom, in Kapadia, R. & Borovcnik, M.(editors), *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 135-167.
Testa, G.: 1988, Un'esperienza in prima liceo scientifico, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 11, 12, 1253-1298.

DIBATTITO

"Programmi scolastici a confronto"

Intervento di Raimondo Bolletta (Roma)

Non entro nel merito dei contenuti poiché questa analisi e questo tipo di confronto sarà sviluppato in altre sezioni del convegno e mi limito a presentare alcune riflessioni di tipo generale sul problema della leggibilità e quindi della confrontabilità dei programmi scolastici.

Quando parliamo di programmi a confronto ci dovremmo chiedere: di quali programmi stiamo parlando? E' ormai largamente accertato che una cosa sono i programmi ufficiali, scritti nella Gazzetta, altra cosa è l'interpretazione degli stessi operata dagli insegnanti, altra cosa ancora è il programma effettivamente sviluppato dal singolo insegnante in classe, che differisce da ciò che i ragazzi effettivamente apprendono. Quando si analizzano, si valutano o si interpretano dei programmi scolastici occorre sempre avere la consapevolezza dei diversi piani in cui può collocarsi il discorso: lo stesso significato del testo letterale del programma varierà a seconda che sia letto da un insegnante, da un genitore o da un ispettore. E una certa polisemia del testo, o meglio certe ambiguità certi rinvii alla fase della progettazione didattica assumono una notevole importanza in un contesto in cui largo spazio è stato lasciato alla interpretazione e all'adattamento alle situazioni assai mutevoli.

La distanza che intercorre tra i curricoli ufficiali e la loro effettiva attuazione sia nella scuola media sia nella scuola superiore appariva già molto accentuata 10 anni fa' nella rilevazione effettuata nella ricerca VAMIO[1]: intervistando un campione rappresentativo di docenti di scuola media era emerso che l'applicazione del programma era tutt'altro che uniforme. Si aveva una discreta omogeneità solo su un nucleo di contenuti estremamente ridotto, che peraltro coincideva con il programma tradizionalmente sviluppato già prima dell'introduzione dei programmi di terza media del 1979. Una seconda area dei programmi veniva trattata come fosse un'area *opzionale* in cui poter scegliere sulla base dell'impostazione didattica del docente, ed infine una terza area di contenuti era di fatto *esclusa* essendo tali contenuti sviluppati in modo episodico, solo da percentuali minime del campione dei docenti. La parte opzionale copriva essenzialmente gli argomenti considerati innovativi all'epoca dell'introduzione dei programmi.

E' ora in corso una seconda indagine VAMIO ma la parte sul curricolo è ancora nella fase di registrazione dei questionari. Un primissimo controllo manuale su un certo numero di protocolli fa comunque intuire che la situazione emersa dieci anni fa si sia consolidata e forse aggravata. Si aggiunga che le differenze riscontrate sia nell'interpretazione dei programmi come negli esiti

---

[1] Raimondo Bolletta, *La preparazione matematica al termine della scuola media*. I quaderni di Villa Falconieri, Frascati 1988

conseguiti dagli studenti dipendono anche dalla zona geografica oltre che dal livello socioculturale del bacino di utenza della scuola esaminata. Una così accentuata disomogeneità della preparazione degli studenti che passano dalla scuola media alla superiore pone evidenti problemi di gestione delle prime classi del superiore con gli esiti scolastici che ben conosciamo. Ma la differenza tra curricolo formale e curricolo *interpretato* è apparsa evidente anche tra i docenti del biennio: tutte le volte che il test VAMIO è stato presentato a tali docenti come test d'ingresso in prima, la reazione più immediata, verificata ormai su svariate centinaia di docenti, è stata di sconcerto o di sfiducia: i ragazzi che ci vengono dalla scuola media mai sapranno rispondere a tutte quelle domande e... d'altra parte a noi serve effettivamente ben poco... che sappiano fare.....

Gli stessi insegnanti, incontrati dopo la somministrazione e l'analisi dei risultati, mostravano però una certa sorpresa, quasi incredulità poiché dal test emergevano delle competenze inaspettate.

In sostanza, le attese degli insegnanti circa le competenze dei nuovi studenti non facevano riferimento al curricolo formale né probabilmente a quello effettivo realizzato dai colleghi della media, ma piuttosto alle esigenze del programma del biennio e, soprattutto, ad alcune esperienze negative accumulate in passato.

Ma, e qui sta un'ulteriore difficoltà, se si prova a misurare il grado di omogeneità tra queste attese, emerge ancora una volta un livello molto basso di concordanza: sempre utilizzando gli item del VAMIO, abbiamo chiesto a gruppi consistenti di docenti del biennio[2] di indicare a quali item fosse indispensabile saper rispondere correttamente all'inizio del superiore: le scelte dei docenti si sono disperse su molti item mentre pochi item, una quindicina su 110, hanno ottenuto più del 75 % delle scelte dei docenti: ciò farebbe pensare che le stesse attese sui prerequisiti dipendano più dalle scelte metodologiche dei singoli (si noti che quest'ultimo esperimento è stato condotto su gruppi di docenti appartenenti allo stesso provveditorato) che dalle prescrizioni dei programmi.

E' ben evidente allora che preoccuparsi della continuità formale e della coerenza tra programmi che vengono attuati con una certa libertà potrebbe risultare un inutile esercizio formale.

D'altra parte occorre riconoscere che negli estensori dei programmi questa preoccupazione, e cioè assicurare una coerente continuità tra programmi contigui, c'è sempre stata. Se ad esempio si va a rileggere una delle prime formulazione dei

---

[2] Raimondo Bolletta, Il rendimento in matematica all'inizio della scuola superiore: gli esiti del test VAMIO-CEDE in *La Produttività della scuola nella provincia di Bergamo* Quaderno n. 2 del Proveditorato agli Studi di Bergamo, Bergamo 1990.
Raimondo Bolletta, Accertamento e valutazione delle abilità matematiche mediante il test VAMIO in *Scuola che vai voto che trovi*, quaderno n.4 dell'IPRASE Trentino, Trento 1993.

programmi del PNI, che poi è rimasto alla base degli stessi programmi Brocca, si troverà nelle avvertenze che una ipotesi di lavoro, ipotesi in verità piuttosto forte era quella che i programmi della scuola media fossero stati svolti effettivamente nella loro integrità. Con ciò si voleva evidentemente raggiungere due scopi:

- adottare un modello di programma, quello di scuola media, cui ispirarsi sviluppandolo con continuità e coerenza,
- fornire un ulteriore rinforzo esterno ad un più fedele rispetto della lettera e dello spirito dei programmi di scuola media.

In realtà, in quelle avvertenze si diceva qualcosa di più, qualcosa di più rischioso: che i programmi del biennio non potevano aver successo se non erano stati svolti bene i programmi di scuola media. Si avvalorava un'interpretazione di prerequisito che potrebbe fornire un buon alibi al docente che legge il programma: se per qualche motivo il prerequisito non è posseduto si è autorizzati a ritenere irraggiungibili gli obiettivi del nuovo ciclo. Conosciamo tutti bene il rimpallo di responsabilità all'indietro che in certi casi arriva fino al grembo materno.

Premessa questa precauzione fondamentale, che cioè un'analisi comparativa dei programmi vigenti non possa prescindere dal confronto con la loro effettiva implementazione ad opera degli insegnanti, vorrei segnalare solo alcuni punti di carattere generale che sono a mio avviso all'origine delle difficoltà che motivano questo dibattito sulla continuità tra i due livelli scolastici.

Nella lettura e nell'interpretazione dei programmi non possiamo prescindere dalla considerazione del come sono stati concepiti e scritti:

i programmi di scuola media sono stati preparati nel contesto attuativo di una riforma strutturale politicamente molto importante, già decisa; sono l'espressione di un clima positivo e fortemente proiettato verso l'espansione della scolarizzazione e si basano sull'idea che per questo tramite fosse possibile realizzare un grande e diffuso progresso culturale e sociale;

i nuovi programmi del biennio e della superiore, parlo solo di quelli poiché di fatto ormai è come se quelli tradizionali non esistessero più, originano dalla constatazione dell'impossibilità di ottenere in tempi rapidi una riforma strutturale dal Parlamento. L'allora sottosegretario Brocca presentò proprio questa giustificazione alla commissione di esperti riunita ad Ostia per scrivere i programmi. Si trattava di utilizzare i varchi amministrativi esistenti per realizzare quelle innovazioni che si ritenevano improcrastinabili. Chi ha scritto quei programmi non sapeva se il biennio dovesse essere considerato un ciclo terminale dell'obbligo o un ciclo propedeutico al superiore o una parte di un ciclo più lungo, non sapeva se dovesse essere un programma *forte* per un popolazione selezionata o un programma *debole* per tutti. Queste incertezze trovarono comunque delle soluzioni imposte dalla fretta di ottenere un risultato, soluzioni non sempre ottimali alla verifica della loro attuazione nelle classi.

L'assenza di chiari criteri per effettuare delle scelte, ha fatto sì che, in particolare i programmi delle superiori, siano piuttosto ecumenici, onnicomprensivi ed in qualche parte persino ambigui. Vi sono punti in cui si consente all'insegnante di operare in sede di programmazione quelle scelte metodologico-didattiche o di contenuto sulle quali i membri della commissione che hanno steso i programmi avevano fatto fatica a trovare un accordo.

Entrambi i programmi risentono probabilmente dello stesso clima ideologico: la fiducia che tramite dei buoni programmi fosse possibile consentire e stimolare un processo di rinnovamento e di miglioramento della qualità dell'istruzione. I programmi sono in certa misura una elencazione di buone intenzioni, un ricco menu in cui scegliere, una provocazione culturale per una classe docente ritenuta un po' restia a seguire l'innovazione. Ma programmi così concepiti non rispondono poi efficacemente nel momento in cui si pretende di avere strumenti di gestione verificabili che garantiscano processi di apprendimento tra loro raccordati e congruenti. E' naturale che la variabile insegnante diventi decisiva per spiegare le differenze che diventano sempre più vistose con il consolidarsi di esperienze sui vari livelli scolastici che comunicano tra loro molto poco.

I programmi sono stati comunque il risultato di un processo di sintesi e di ripensamento che è maturato in un contesto di esperienze e di dibattiti piuttosto ricco, a volte più che decennale. Nel momento in cui sono stati promulgati vi è stato un certo investimento in termini di aggiornamento e di informazione che permetteva a moltissimi insegnanti di cogliere lo spessore e la ricchezza di formulazioni inevitabilmente sintetiche. Mi chiedo se, con il passare del tempo, con l'avvicendarsi di nuove generazioni di docenti, questi testi, che ad alcuni di noi più vecchi evocano tante discussioni e ripensamenti, possano suggerire analoghe suggestioni. Gli stessi programmi Brocca, più recenti di quelli della media, hanno già risentito di un processo di rapido invecchiamento che modifica il significato complessivo di alcune proposte in essi contenuti; ad esempio la parte sull'inserimento dell'informatica si connota diversamente da qualche anno fa anche perché nel frattempo l'impatto sulla società della stessa informatica è cambiata.

Come dovrebbero essere concepiti dei programmi perché venga meglio realizzata su vasta scala una didattica che sviluppi un processo di apprendimento e di maturazione continuo privo di salti troppo frustranti o di discontinuità eccessive? La gestione del raccordo tra livelli diversi o tra insegnanti che si avvicendano in una nuova classe diventa problematica anche per l'assenza nei programmi di descrizioni *operativamente verificabili* delle competenze o delle conoscenze che i ragazzi dovrebbero acquisire in ogni fase dello sviluppo del programma. Non vi è un contesto in cui siano condivisi quelli che nel gergo

vengono chiamati degli *standard*. Ma su questo spero di poter tornare nel secondo giro di interventi.

<u>Secondo intervento</u>

Non sono del tutto d'accordo su alcune opinioni emerse negli interventi del pubblico e vorrei precisare meglio alcune cose dette nel primo giro di interventi.

Vi è il rischio di valutare troppo negativamente la situazione della scuola media: i problemi ci sono, preoccupa l'eccessiva disomogeneità dei livelli tra classi, all'interno della classe, tra gruppi sociali e tra zone geografiche ma non dobbiamo assolutamente sottovalutare quanto viene fatto dalla scuola media e soprattutto dobbiamo cercare di partire da ciò che i ragazzi sanno fare e non da ciò che non sanno fare. Troppo spesso nella verifica iniziale puntiamo tutta la nostra attenzione sulle difficoltà più tipiche, andiamo ad indagare sui punti di debolezza mettendo in rilievo tutti gli aspetti negativi che riusciamo a trovare senza valorizzare sufficientemente i molteplici aspetti positivi delle competenze sviluppate nella scuola media.

Sono d'accordo con chi vede il processo di crescita e di apprendimento come un itinerario complesso con numerosi punti di discontinuità con piccoli e grandi conflitti, ripensamenti, errori, piccole e grandi delusioni, sono d'accordo con chi intravede tra la media e la superiore un gradino più alto ed impegnativo, un approccio alla matematica significativamente più astratto e formalizzato di quello già avuto nella scuola media ma credo che tali passaggi non debbano mai evidenziare una contraddizione con l'esperienza precedente in particolare con il lavoro svolto dal collega del livello precedente. Una cosa è far capire che una conoscenza non è più adeguata a risolvere nuovi problemi ed altra è dire che tale conoscenza è sbagliata o peggio che ci è stata male insegnata. Se deligittimiamo il collega che ci ha preceduto poniamo i presupposti per insinuare nel ragazzo gli stessi dubbi nei nostri confronti. Nella gestione didattica degli errori, ovvero di tutti quei momenti in cui il processo di apprendimento segna un momento di maggiore o minore discontinuità, sta a noi insegnanti saper alimentare la fiducia dello studente in se stesso, la curiosità, la voglia di trovare un superiore livello di accomodamento, una nuova sistemazione delle proprie conoscenze matematiche. Purtroppo, assai spesso, accade che l'errore venga solo sanzionato, portato a dimostrazione di una inadeguatezza difficilmente superabile e così diventa una fonte di ansia o di disaffezione che può condurre a sconfitte ancora più gravi.

Torno infine sull'idea degli standard. Quando prima ne parlavo pensavo all'esperienza condotta in questi anni dal National Council of Teachers of Mathematics americano. Si tratta di una organizzazione omologa alla nostra che ha cercato di influire sulla realtà americana tramite la pubblicazione di volumi contenenti una descrizione il più possibile condivisa e chiara dei livelli cui giungere nei vari stadi del curricolo. Oltre a disporre di obiettivi e finalità troppo spesso generici o irraggiungibili, di contenuti che evocano interi capitoli più o meno lunghi della matematica, si cerca di dare esempi di ciò che il ragazzo dovrebbe saper fare alla fine di ciascuna classe di un corso di studi. Se rileggiamo i nostri programmi troviamo finalità ed obiettivi che si ripetono quasi identici dalle elementari alle superiori; la graduazione e la progressività dei livelli è lasciata alla scelta di docenti che non possono però concordare effettivamente tali raccordi quando i ragazzi passano da un ciclo al successivo e si disperdono in molte classi diverse. Sui contenuti più tradizionali vi è una maggiore concordanza mentre su quelli più innovativi, o più impegnativi per la competenza dei docenti o per le possibilità del ragazzi, le discordanze sono più forti e più pericolose. Se ci si impegnasse a definire degli standard, non in via teorica, ma empiricamente basandosi anche su ciò che realmente viene fatto, riusciremmo da un lato a fornire uno strumento operativo di programmazione ai docenti e dall'altro avremmo un mezzo effettivo per monitorare i processi di cambiamento messi in atto da programmi innovativi.

Intervento di Loredana Gherpelli (Modena)

Sommario. *Si sviluppa per sommi capi una lettura dei programmi della scuola media inferiore discutendo la loro attualità circa motivi ispiratori, contenuti e metodologia ed evidenziando problematiche relative alla loro applicazione. Si affronta poi il problema della rispondenza delle prove di esame di licenza in riferimento a contenuti e obiettivi dei programmi stessi ed infine si delineano variazioni possibili (approfondimenti, tagli, esempi di attività, ecc.) di questi ultimi sulla base dell'esperienza maturata dal '79 ad oggi, nell'ottica dei nuovi programmi per la scuola secondaria e dell'elevamento dell'obbligo scolastico.*

Introduzione

Il prolungamento dell'obbligo scolastico fino ai sedici anni, fatto ormai acquisito, sollecita alcune riflessioni su problematiche che nascono dall'esigenza di facilitare il raccordo scuola media inferiore-biennio scuola superiore.

In questo ambito, riteniamo che si possano utilmente inserire alcune considerazioni sui programmi della media inferiore, programmi che, entrati ufficialmente nel mondo della scuola nel 1979, sono stati di riferimento per quelli, più recenti, delle scuole elementari ed anche per le proposte dei programmi per le scuole superiori.

I punti che prenderemo in esame sono:

- problematiche connesse alla applicazione dei programmi della scuola media;
- prove di licenza quali indicatori della rispondenza della attività didattica ai programmi
- attualità dei programmi - variazioni possibili alla luce delle esperienze fatte dal '79 ad oggi e nell'ottica di un raccordo con il biennio.

Problematiche connesse all'attuazione dei programmi

Le innovazioni più forti dei programmi hanno riguardato due aspetti dell'insegnamento della matematica: a) *la didattica*, b) *i contenuti*.

Relativamente alla didattica, la novità è consistita in una richiesta chiara e rigorosa di un insegnamento volto a costruire la matematica con gli allievi, e con un obiettivo importante: la messa in evidenza dell'aspetto intuitivo accanto a quello razionale, favorendo così la possibilità di esprimere fantasia e creatività individuali.

I contenuti, ampliati con l'inserimento di argomenti nuovi, sono stati raggruppati in temi - compiendo così una parziale operazione di rottura con una tradizione scolastica che da sempre aveva distinto la Matematica in Aritmetica, Geometria e Algebra - e nell'ottica dello sviluppo storico della Matematica.

Entrambe le innovazioni hanno sollevato il problema della *formazione del docente*. Una volta abortita l'idea di un corso di laurea specificamente rivolto allo scopo, forse si pensava che tale problema avrebbe potuto essere superato in tempi ragionevolmente brevi grazie all'introduzione di attività di aggiornamento (pensate soprattutto per coloro che già erano in servizio), ed anche attraverso la libera circolazione di idee e di esperienze all'interno delle scuole.

Nella realtà dei fatti, gli sviluppi non sono stati esattamente quelli previsti, analizzarne in modo approfondito il perchè comporterebbe uno spazio a parte, dunque ci limitiamo ad evidenziare quella che riteniamo essere la causa di fondo di difficoltà che, in parte, ancora permangono e che sono inerenti le competenze professionali dei docenti.

I maggiori ostacoli che gli insegnanti hanno incontrato traggono origine dalle singole esperienze culturali, molto eterogenee e, nella maggioranza dei casi, non sufficienti per reggere il confronto con il notevole spessore culturale dei programmi.

Privilegiando il carattere formativo dell'insegnamento della matematica, rispetto a quello nozionistico,e volendo che, in qualche modo, nell'insegnamento si affrontassero temi relativamente recenti, nel rispetto dello sviluppo storico della disciplina, si è sottovalutata la portata del peso di cui i docenti avrebbero dovuto farsi carico.

In effetti, agli insegnanti è stato chiesto non solo uno studio di contenuti nuovi, ma la capacità di recepire la matematica in una dimensione per così dire storica, che tenesse conto dell'evoluzione del suo pensiero, richiesta difficile per laureati in matematica, quasi impossibile per laureati in altre discipline.

A questo proposito, due classici esempi di argomenti sui quali si sono verificate vistose distorsioni di interpretazione sono la *Teoria degli insiemi* e le *Trasformazioni geometriche*, di cui hanno tristi esperienze scolastiche molti dei nostri studenti.

Un secondo problema correlato alla applicazione dei programmi è stato di ordine pratico: ci si chiese allora come fosse possibile mettere in atto un insegnamento a misura di allievo all'interno di programmazioni didattiche tradizionalmente strutturate per un tipo di insegnamento centrato su comportamenti e tempi diversi.

Le risposte dei programmi si possono trovare nei suggerimenti allegati ai sette temi:

a) si dice che gli allievi dovranno essere sollecitati ad affrontare *semplici esercizi* (tale aggettivazione viene utilizzata per *problemi, equazioni, leggi matematiche ecc.*);
b) si invita il docente a porre attenzione verso un insegnamento più rivolto a qualificare le conoscenze, meno alla acquisizione di tecnicismi la cui piena conquista viene rimandata agli anni e agli studi successivi.

Dunque alle previste obiezioni degli insegnanti, si dà una risposta in termini di *razionalizzazione* della didattica: la selezione di attività formative e tagli su contenuti non idonei ad allievi di questa fascia scolare, sono le linee indicate per consentire al docente un insegnamento migliore e, nel contempo, più individualizzato.

Prove di licenza

Abbiamo ritenuto importante soffermarci sulle prove di licenza, perchè pur essendo sovente il prodotto di mediazioni necessarie per uniformare la prova d'esame all'interno di una medesima scuola, esse possono comunque essere dei buoni indicatori di quanto e come sono stati applicati i programmi del '79.

I contenuti considerati, le domande fatte agli allievi, le possibilità loro date per esprimere idee attraverso il linguaggio naturale e quello simbolico matematico, tutti parametri sui quali si valuta il livello di apprendimento, sono anche indici della reale applicazione dei programmi

In varie regioni gli istituti IRRSAE hanno compiuto indagini in questo senso, raccogliendo prove di licenza provenienti da numerose scuole medie, quanto è emerso mette in luce una realtà estremamente diversificata, si è infatti rilevato che:

- i livelli di difficoltà delle prove presentano divari profondi, anche tra scuole di un medesimo distretto;
- molti tra i contenuti proposti vanno al di là di quanto indicato nei sette temi (per esempio sono presenti aspetti della geometria analitica generalmente trattati nella scuola superiore);
- raramente esistono quesiti la cui soluzione preveda la possibilità di verificare le capacità argomentative degli alunni ed ancor meno la capacità di formulare e discutere ipotesi;
- eclatante l'evanescenza dell'insegnamento di elementi di probabilità e statistica (tuttora cenerentole dei programmi!) argomenti che, quando figurano tra i contenuti proposti, spesso mostrano quanto sia stato limitato e superficiale il coinvolgimento dei ragazzi.

Dunque ci pare che se la prova di licenza è rivelatrice delle scelte che l'insegnante fa in merito a contenuti e didattica, ne segue che questa libertà di decidere finisce per incidere pesantemente sulla preparazione di base degli allievi che si presentano alla scuola superiore con esperienze scolastiche troppo differenti.

Attualità dei programmi - Variazioni possibili

Sulla base delle precedenti considerazioni in merito alle problematiche connesse alla applicazione dei programmi, e alla luce di un collaudo quasi ventennale, ci chiediamo quali osservazioni è lecito fare sulla valenza dei programmi

Possiamo considerarli ancora attuali o, paradossalmente, attuali solo oggi?

La nostra opinione è che solo in anni recenti si sono avuti i primi riscontri positivi, almeno sotto il profilo didattico: è entrata, generalmente, nelle classi la logica del costruire la matematica con il contributo dei ragazzi, c'è una maggiore sensibiltà alle problematiche ed agli obiettivi educativi correlati all'apprendimento. Tale atteggiamento si ritrova anche in diversi libri di testo che propongono situazioni adeguate allo spirito dei programmi.

Ci pare che, all'interno delle scuole, si viva oggi in un clima di minori incertezze rispetto ad un passato in cui l'insegnante interessato a non lasciare lettera morta i programmi ha dovuto agire, costruire, decidere in modo autonomo senza punti di riferimento, senza poter contare su libri di testo adeguati, che spesso costituiscono il sostegno principale per i docenti (pensiamo alla fortuna di certi libri di testo concepiti più per l'insegnante che per gli alunni).

Ma, preso atto che è generalmente diffusa la consapevolezza che è possibile far "fare matematica" secondo le indicazioni metodologiche indicate nei programmi, rimane invece ancora aperta la discussione sulla gestione dei tempi di cui il docente può disporre, e a questo proposito, a nostro avviso, occorre che vengano definite in modo trasparente alcune fondamentali priorità nelle scelte dei contenuti programmatici, ai fini anche di una progressivo superamento delle problematiche emerse dalle prove di licenza.

In analogia a quanto si è fatto per la scuola elementare, si possono meglio specificare quei requisiti minimi che dovrebbero essere competenza di ogni allievo in uscita dalla media ed in ingresso alle superiori: questa chiarezza della scuola nei confronti dell'utente (allievo) ci pare sia condizione indispensabile per dare sicurezza a chi si appresta ad accedere ad un'altra scuola sapendo di avere le carte in regola.

Alcune riflessioni sui temi dei programmi

Abbiamo già citato le trasformazioni geometriche come uno dei temi più penalizzati, sia per i tagli che generalmente vengono operati (è un dato di fatto che le trasformazioni si riducono spesso alle sole isometrie) sia perchè l'argomento viene sviluppato secondo una didattica che stravolge, in larga misura, le finalità del tema stesso.

Viene quindi da chiedersi -anche in previsione di un raccordo con le scuole superiori, i cui programmi propongono lo studio di trasformazioni geometriche, anche se con una strutturazione diversa- se non sia necessario un maggior chiarimento sul piano della didattica e relativamente agli obiettivi specifici dei due ordini di scuola.

Un altro punto sul quale crediamo utile soffermarci è l'insegnamento dell'algebra negli aspetti con cui è presente nei programmi (*problemi ed equazioni*, *corrispondenze ed analogie strutturali*). Condividiamo l'idea di

sollecitare l'attenzione dei ragazzi più su aspetti formativi connessi all'insegnamento-apprendimento dell'algebra ed in particolare sul linguaggio algebrico (la traduzione formale di espressioni verbali o di regolarità numeriche, l'interpretazione critica di scritture formali, la trasformazione di semplici formule finalizzate ad evidenziare regolarità) piuttosto che sugli aspetti tecnici che, in caso, trovano la loro giusta collocazione nella scuola superiore. Ma proprio perchè pensiamo che sia fondamentale e prioritario intervenire didatticamente sul linguaggio, auspichiamo una revisione dell'usuale insegnamento dell'algebra, evitandone l'iniziazione al terzo anno ed articolandola nell'intero triennio, in modo da darle un respiro più ampio, e seguendo poi quei criteri didattici abitualmente adottati per l'insegnamento delle lingue straniere (si veda Malara 1994 e Malara e Gherpelli 1996, o anche Reggiani in questi atti).

Riguardo al tema *Corrispondenze ed analogie strutturali*, fortemente trasversale, sono nati tanti equivoci che hanno indotto miriadi di insegnanti o ad ignorarlo o a stravolgerne il senso, coinvolgendo gli allievi in assurde memorizzazioni di concetti, quali le strutture algebriche di gruppo, campo ecc, assolutamente decontestualizzati e comunque prematuri rispetto all'età ed allo stato psicologico e culturale dei ragazzi.

A quanto ci risulta, oggi la situazione è migliorata: chiarimenti frutto di confronti, discussioni anche in corsi di aggiornamento, hanno contribuito ad evidenziare la specificità degli obiettivi didattici legati all'inserimento di questo tema, attraverso il quale, a nostro avviso, si è voluto ribadire la valenza che hanno, nel pensiero matematico e non, la capacità di osservare, di cogliere analogie e differenze, di analizzare criticamente situazioni, sia collocate in ambiti diversi all'interno della matematica sia in altri settori scientifici.

Non entriamo volutamente sui temi *Insiemi numerici*, *La geometria come prima rappresentazione dello spazio fisico*, sia perchè condividiamo pienamente i contenuti e le proposte metodologiche indicate, sia perchè, sulla base della esperienza personale, riteniamo che questi siano anche gli spazi nei quali meglio si sono mossi gli insegnanti, mentre vorremmo rivolgere un appello ai colleghi docenti affinchè venga riservato uno spazio più ampio agli elementi di probabilità e statistica prendendo in considerazione nella propria programmazione aspetti culturalmente importanti del tema presenti anche in svariati testi scolastici (si veda Malara 1990). In particolare, riteniamo che soprattutto la parte riguardante alcuni elementi di statistica trovi neiprogrammi un percorso ottimale che da un lato favorisce un raccordo indolore con il biennio, da un altro consente di focalizzare, già in questo ordine di scuola, quali sono le finalità di questa disciplina. Riguardo al più generale tema *Matematica del certo e del probabile*, in cui questi argomenti si collocano, ci appare riduttivo e forzoso l'inserimento accanto ad essi degli elementi di logica (tra l'altro purtroppo sviliti nel significato educativo da una trattazione nei testi scolastici banale ed impropria) anche se riteniamo importante, da un punto di vista educativo generale, far cogliere agli allievi la distinzione tra situazioni deterministiche ed aleatorie.

A conclusione di questo nostro commento ai programmi, una sollecitudine va rivolta a chi di competenza (oggi il ministro Berlinguer) affinchè ponga in discussione se e come debba essere introdotto il computer nell'insegnamento della matematica nella scuola media inferiore. Pur consapevoli dei vantaggi derivanti dalla possibilità e dalla capacità di utilizzare un computer, riteniamo tuttavia che non si debbano sottovalutare i rischi di una didattica che finisca con il far prevalere la sola interazione allievo-macchina rispetto ad un'altra in cui si dia priorità alla conversazione tra pari ed a quella con l'insegnante con la finalità ultima di permettere all'allievo di comunicare con gli altri. Ci pare questo un tema di estrema attualità dal momento che viene denunciata da più parti e quasi quotidianamente la difficoltà che molti studenti di scuola superiore, ed anche universitari, manifestano sia nella espressione scritta che in quella orale.

Bibliografia

MALARA N.A., 1990, *Probabilità e Statistica nella scuola media: analisi di alcuni libri di testo*, quaderno n. 6 della collana Innovazioni e tecnologie didattiche, CNR, Mucchi, Modena

MALARA N.A., 1994a, Analisi dei programmi Spagnoli di Matematica per la scuola primaria e secondaria obbligatoria, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 17A, n. 4, 1994, 307-333

MALARA N.A., 1994b, La geometria nei programmi di alcuni paesi europei per allievi dai 6 ai 16 anni, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 1994, vol. 17A-B, n. 6, 676-700

MALARA N.A., 1994c, Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?, in D'Amore B. (a cura di), *L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica*, Pitagora (BO), 1994, 67-77, ora anche in *L'Educazione Matematica,* anno XVII, serie V, vol. 1, 80-99

MALARA N.A., 1996, L'insegnamento della geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico-metodologiche, in stampa su atti seconda scuola ministeriale per insegnanti ricercatori (Viareggio novembre 1995 e febbraio 1996)

MALARA N.A.,, GHERPELLI L., 1996, Argomentazione e dimostrazione in aritmetica nel triennio di scuola media, in Grugnetti L. et Alii, *Argomentare e Dimostrare nella scuola media*, Atti del XV Convegno Nazionale Internuclei Scuola Media, Salice Terme (PV) aprile 1996, versione inglese in stampa su *Proc. Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Nicosia gennaio 97)

MPI (a cura di), 1985, *Programmi didattici della scuola primaria*, La Nuova Italia 1986

MPI (a cura di), 1991, Studi e Documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, n. 56, *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni. Le proposte della commissione Brocca*

PRODI G., 1988, Un esame comparativo dei nuovi programmi di Matematica, relazione scritta *L'Educazione Matematica nella Scuola Media: problemi esperienze prospettive*, IV ciclo, Modena

REGGIANI M., 1996, Continuità nella costruzione del pensiero algebrico, *atti del XVIII Convegno Nazionale UMI-CIIM*, Campobasso ottobre 1996

SPERANZA F., 1990, Nuove prospettive per la geometria nelle scuole superiori, 1 e 2, *Nuova Secondaria*, anno VII, n. 8, 77-75, n. 9, 65-67

UMI (Notiziario), 1979, *Sui programmi di Matematica della scuola media - Alcune tracce didattiche*, suppl. n. 10

UMI (Notiziario), 1986, *Nuovi programmi per il Biennio della Scuola Secondaria Superiore*, anno XIII, n. 2

VILLANI V., 1991, Quale matematica per l'Europa del 1992, *Archimede*, n. 4, 163-175

VILLANI, 1992, Vecchio e Nuovo nell'insegnamento della Matematica, *Annali della Pubblica Istruzione*, anno XXXVIII n. 5/6, 568-577

Intervento di Vinicio Villani (Pisa)

Nel parlare di programmi scolastici, noi tutti siamo portati ad esprimerci in termini di cose "fatte" o non "fatte": il tale argomento, io *l'ho fatto (o non l'ho fatto)* il mio collega *l'ha fatto (o non l'ha fatto)* ecc.

Questi modi di dire riflettono il nostro punto di vista di insegnanti. Ma non è detto che corrispondano a ciò che passa per le teste degli allievi. Siamo sicuri che quel tale argomento, che pure noi siamo convinti di avere "fatto" a dovere, sia stato recepito dai nostri studenti? E che sia entrato stabilmente a far parte della loro cultura matematica? E siamo poi sicuri che i nostri studenti sapranno trasferire le conoscenze acquisite dal contesto specifico ad altri contesti (matematici o extra-matematici)?

Purtroppo le risposte a queste domande sono particolarmente insoddisfacenti nel caso degli argomenti più innovativi, per i quali manca una tradizione scolastica consolidata. A volte tali argomenti non vengono neppure "fatti". Ma anche quando vengono "fatti" rischiano di lasciare scarsissima traccia perché privi di collegamenti significativi con le rimanenti parti del programma. E' sintomatico il fatto che in molti libri di testo gli argomenti innovativi si trovino confinati in apposite appendici o comunque in capitoli slegati dal resto della trattazione. Lo stile dell'esposizione risente poi di un'impostazione troppo "universitaria", perché non vi è stata ancora un'adeguata mediazione didattica. Infine, gli esercizi relativi agli argomenti innovativi sono spesso banali o astrusi.

Per una seria valutazione del grado di attuazione dei nuovi programmi, occorre quindi spostare l'attenzione dalla semplice contrapposizione "fatto-non fatto" ad un'analisi più approfondita del *perché determinati argomenti devono essere fatti*, del *come vanno fatti* e del *come risultano recepiti (o non recepiti)*.

Queste considerazioni introduttive possono essere riferite indifferentemente ai nuovi programmi di ogni ordine scolastico. In quanto segue prenderò invece in esame più specificamente il primo biennio della scuola secondaria superiore e quindi nel parlare di "nuovi programmi" mi riferirò a quelli sperimentali del progetto Brocca.

Come già ricordato in questo stesso convegno in vari interventi precedenti, per es. nella relazione del prof. Pellerey, i contenuti più innovativi dei programmi Brocca sono:

Probabilità
Trasformazioni geometriche
Logica
Informatica.

Tutti e quattro questi argomenti *devono* essere "fatti" perché *devono* entrare a far parte della cultura dei nostri giovani. Ecco, in sintesi, alcune motivazioni a sostegno di questa affermazione.

La probabilità va introdotta per la sua rilevanza teorica e pratica, all'interno della matematica e nelle sue più svariate applicazioni in settori che vanno dalla fisica alla biologia alle scienze economiche e sociali.

Le trasformazioni geometriche vanno introdotte per dare maggiore sistematicità e generalità alla trattazione della geometria tradizionale. Per rivitalizzarla, non per soppiantarla.

Quanto alla logica, che in passato interveniva solo in forma implicita nei ragionamenti ipotetico-deduttivi della geometria e dell'algebra, al giorno d'oggi non si può prescindere da una sua formalizzazione più esplicita, soprattutto in vista dei collegamenti con l'informatica.

Quest'ultima, poi, va introdotta perché rappresenta ormai uno dei cardini della tecnológia e della società moderna.

Ma la constatazione che gli argomenti innovativi or ora citati vanno introdotti deve essere accompagnata dalla consapevolezza del fatto che l'insegnamento-apprendimento di ciascuno di essi presenta specifiche difficoltà metodologiche oltre che contenutistiche.

La probabilità è difficile sul piano psicologico prima ancora che su quello tecnico, in quanto si tratta di uno strumento per misurare l'incertezza, cioè un qualcosa che è profondamente diverso dalle finalità "deterministiche" della matematica tradizionale.

Le trasformazioni geometriche sono difficili a causa del livello di astrazione al quale si collocano: mentre una singola figura geometrica si può visualizzare con un disegno, è impossibile visualizzare una trasformazione geometrica in quanto tale. Al più si può visualizzare l'effetto di una trasformazione su una particolare figura, disegnando sia la figura iniziale, sia la sua immagine, generata dalla trasformazione. Ma neppure questo è sufficiente a dare un'idea corretta della trasformazione, che deve essere pensata operante su tutti i punti dell'ambiente (piano o spazio) nel quale la figura è immersa, siano essi disegnati o non.

La logica implica una riflessione metamatematica sulle leggi del ragionare. Quindi una sua trattazione formale è in certo senso prematura all'inizio della scuola secondaria superiore, quando gli allievi non hanno ancora acquisito sufficiente familiarità con ragionamenti matematici di tipo ipotetico-deduttivo. E infatti i programmi suggeriscono di introdurre le nozioni e le notazioni della logica con la massima gradualità, e solo quando se ne avverte un'effettiva esigenza, non in un unico blocco a sé stante, all'inizio del corso! D'altra parte, una riflessione sull'uso dei connettivi e dei quantificatori, nonché una distinzione abbastanza netta tra sintassi e semantica diventa inevitabile non appena si affrontano questioni di tipo informatico.

Infine, nel caso dell'informatica una difficoltà da non sottovalutare sta nel fatto che è lo stesso rapporto didattico tra docente e allievi a venire modificato dalla presenza di uno strumento, il calcolatore, per cui è necessario mettere in atto strategie e tecniche di insegnamento-apprendimento profondamente diverse da quelle della tradizionale lezione frontale, seguita da interrogazioni alla lavagna.

Il docente che si accinge a pianificare il suo insegnamento deve essere ben convinto delle valenze culturali dei diversi temi previsti dai programmi (e quindi porsi il problema del *cosa* insegnare) ma anche delle difficoltà insite in ciascun argomento e regolarsi di conseguenza (ossia porsi il problema del *come* insegnare), se gli sta a cuore che al suo insegnamento corrisponda un apprendimento effettivo e non solo formale, di facciata, da parte dei suoi allievi.

A quanto detto finora, va aggiunta un'ulteriore riflessione. L'indubbio appesantimento dei programmi che deriva dall'inserimento di nuovi argomenti deve essere bilanciato da un alleggerimento delle parti più ripetitive e meno formative degli argomenti tradizionali. Penso per es. all'eccessiva insistenza sulle manipolazioni formali di espressioni algebriche complicate e fine a se stesse, o allo studio inutilmente ridondante di certe proprietà dei radicali.

Inoltre va evitata un'eccessiva frammentazione delle conoscenze. Si deve piuttosto cercare di mettere in luce analogie e differenze tra i vari temi (tradizionali e innovativi). Nell'impossibilità di fornire un'esemplificazione esauriente, mi limito a qualche suggerimento, rinviando per maggiori dettagli alla bibliografia citata qui di seguito:

- Lo studio delle proprietà delle varie strutture numeriche (dagli interi ai reali) acquista maggiore interesse e attualità se collegato ad una riflessione sulla logica di funzionamento dei calcolatori (per es. quando si opera con gli "integer" o con i "real" in Pascal), vedi il testo di A. Villani - R. Porcaro: "Laboratorio di Informatica con il Turbo Pascal" e relativa "Guida per l'Insegnante", Loescher Ed. 1995.
- A partire da uno stesso problema di geometria sintetica, può essere istruttivo mettere a confronto le soluzioni di tipo euclideo tradizionale con quelle che fanno ricorso alle trasformazioni geometriche, vedi per es. l'articolo di V. Villani: "Le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore" in: L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 18A - 18B, n.6, 1995, pagg.669-688.
- Le proprietà matematiche dei connettivi e dei quantificatori possono essere utilmente confrontate con l'uso che se ne fa nel linguaggio naturale, vedi per es. l'articolo di G. Dantoni: "Promemoria per educatori del duemila" in Archimede, Vol. 48, 1996, pagg. 3-14.

Voglio ora passare a parlare brevemente di un secondo aspetto, perché lo considero molto importante e perché riguarda il dibattito su "continuità - discontinuità tra medie e superiori", che è poi il tema centrale di questo convegno.

Un evidente elemento di continuità tra i due ordini scolastici è ravvisabile nel fatto che gli stessi argomenti (ivi inclusi quelli più innovativi) compaiono sia nei programmi della scuola media sia nelle proposte Brocca. Può quindi suonare stonata e fuori luogo la mia insistenza nell'enfatizzare, in quanto detto finora, le prevedibili difficoltà e l'elevato livello di astrazione che la trattazione dei vari temi comporta all'inizio della scuola secondaria superiore.

Ma la contraddizione è solo apparente. Infatti altro è affrontare un tema da un punto di vista solo intuitivo, e altro è trattare lo stesso tema in maniera sistematica e (ragionevolmente) rigorosa. A mio parere è opportuno che tra la scuola media e la scuola secondaria superiore vi sia una continuità in termini di contenuti, ma al tempo stesso una discontinuità metodologica e didattica abbastanza netta ed esplicitamente dichiarata. Le ragioni di tale discontinuità (o, per dirla con i francesi, di "rottura del precedente contratto didattico") non vanno tenute nascoste, anzi è bene che gli allievi ne siano resi consapevoli e partecipi. Altrimenti essi rischiano di non raccapezzarsi più e di attribuire alle idiosincrasie personali del nuovo insegnante la colpa di tutte le loro difficoltà: "Perché quello che andava bene al professore delle medie non va più bene a quello delle superiori?"

In sostanza si tratta di far riflettere gli allievi sul fatto che i progressi in tutti i campi del sapere passano inevitabilmente attraverso momenti di crisi e di messa in discussione di fatti apparentemente ovvi e fino a quel momento accettati da tutti. Gli esempi non mancano davvero: dalla concezione dell'universo (sistema tolemaico - sistema copernicano) alla confutazione della teoria delle generazione spontanea dei microrganismi, dalla teoria darwiniana dell'evoluzione delle specie alla relatività,....

La matematica non fa eccezione. Basti ricordare la crisi della scuola pitagorica a seguito della scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato, oppure la scoperta delle geometrie non euclidee, per finire con i paradossi della logica.

Orbene, anche per quanto riguarda l'apprendimento scolastico della matematica, nel passaggio dalla scuola media alle superiori un momento di crisi è inevitabile, vorrei dire fisiologico. Occorre rimettere in discussione le conoscenze matematiche acquisite, non già per negare la loro validità o per pretendere di ricominciare tutto daccapo, quanto piuttosto per collocare in un contesto più globale, più organico, più critico una serie di fatti apparentemente slegati tra loro e accettati fino a quel momento come "veri" sulla base di constatazioni o verifiche

puramente empiriche. Per fare emergere l'esigenza di un vero e proprio salto di qualità possono essere opportune discussioni mirate, col coinvolgimento di tutta la classe, sulle ambiguità e sugli interrogativi che nel corso degli studi precedenti erano rimasti più o meno nell'ombra. Per es.: è possibile da re una definizione di "punto", di "retta", di "piano"? Che differenza c'è tra le nozioni di "retta" e di "segmento"? Che cos'è un numero? Perché su molte calcolatrici, accanto al tasto del "meno" c'è anche un altro tasto per il "cambiamento di segno"? Dove si nascondono gli errori di certe ben note pseudo-dimostrazioni in ambito geometrico o algebrico? Qual è il significato di una frase del tipo "il caso non ha memoria"?

Solo se gli allievi comprendono l'esigenza di questo salto di qualità ci si può ragionevolmente attendere che essi accettino le nuove regole del gioco, secondo le quali occorre una maggiore precisione di linguaggio e non bastano controlli su casi numerici particolari per giustificare la validità generale di una proprietà algebrica, né basta l'evidenza grafica per assicurare la validità generale di un teorema di geometria.

Non pretendo certo che si dimostri tutto. Mancherebbe il tempo e non ne varrebbe neppure la pena. Ma non vorrei nemmeno che il "dimostrare" fosse confinato alla sola geometria euclidea. Tanto meno vorrei che il dimostrare fosse trascurato del tutto. E' importante che gli studenti capiscano e condividano l'esigenza logica di una dimostrazione in qualsiasi settore della matematica; è meno importante che essi ricordino a memoria troppi dettagli tecnici delle dimostrazioni studiate.

Riassumendo, l'attuazione dei nuovi programmi passa attraverso una revisione dei contenuti ma anche attraverso un ripensamento dei metodi di insegnamento - apprendimento e di verifica delle conoscenze. Nell'epoca delle calcolatrici e dei calcolatori sarebbe anacronistico continuare ad insegnare come venti o quaranta anni fa. Sono cambiate le aspettative della società ed è cambiata la scala dei valori del "sapere" e del "saper fare". Diventano sempre meno importanti le conoscenze mnemoniche e le abilità di tipo ripetitivo, e diventano sempre più importanti le capacità critiche, progettuali, di ragionamento, nonché la capacità di comprendere ed usare in modo appropriato i vari linguaggi matematici (verbale, algebrico, grafico, informatico), ivi compresa la flessibilità necessaria per passare dall'uno all'altro.

In questa direzione molto lavoro rimane ancora da fare!

DIBATTITO

“Obiettivi dei docenti delle Medie

ed aspettative dei docenti delle Superiori”

Intervento di Nella Benedetti (Roma)

1. Gli obiettivi "ufficiali"

Nei programmi della scuola media sono esplicitamente enunciati gli obiettivi come "capacità concettuali ed operative" che gli alunni dovrebbero acquisire attraverso l'insegnamento delle discipline scientifiche. Questi sono indicati, in una prima parte, come finalità dell'insegnamento delle scienze in generale.

Ad esempio :

- inquadrare in un medesimo schema logico questioni diverse ;
- porsi problemi e prospettare soluzioni ;
- riconoscere proprietà varianti ed invarianti, analogie e differenze ;

Nell'ambito delle indicazioni proprie dell'insegnamento della matematica sono stabiliti gli obiettivi non più come capacità da acquisire ma come scopi che l'insegnante dovrebbe proporsi di raggiungere.

Sempre com'esempio :

- suscitare un interesse che stimoli le capacità intuitive degli alunni ;
- condurre gradualmente a verificare la validità delle intuizioni e delle congetture con ragionamenti via via più organizzati ;

Da un'analisi fatta oggi, dopo parecchi anni dall'introduzione dei "nuovi" programmi nella scuola media, appare che forse questi obiettivi sono troppo generali, che difficilmente possono essere utilizzati come parametri di un reale processo di apprendimento e come utili descrittori di processi logici e cognitivi di ragazzi in fase evolutiva.

Si ha inoltre l'impressione che prevalga l'esigenza di dare delle indicazioni di tipo "pedagogico" piuttosto che di tipo "didattico".

Si potrebbero forse fare molte altre considerazioni rileggendo oggi i programmi.

Ad esempio ci si potrebbe chiedere se la scelta di unificare l'insegnamento della matematica e delle scienze sia davvero dettata dall'esigenza di dare una visione unitaria del sapere scientifico e non piuttosto dalla necessità di utilizzare molti insegnanti laureati in scienze anche per insegnare matematica.

Ancora, perché la scelta di qualcosa che somiglia più ad una "tassonomia" che ad un reale elenco di obiettivi didattici di tipo disciplinare ?

E' chiaro che c'è la volontà che sia il singolo insegnante a fare una "sua" programmazione diversa secondo la realtà della classe, della situazione di partenza degli alunni, delle possibilità offerte dalla realtà scolastica, ecc.

Questo, a priori, può essere considerato molto positivo ma la realtà della scuola dimostra che programmare, e soprattutto mettere in pratica una programmazione, non è per niente facile, che richiede abilità operative ed intellettuali complesse e disponibilità a lavorare anche oltre l'orario scolastico.

Ci sono vari momenti ufficiali nei quali è richiesto all'insegnante di programmare il proprio lavoro esplicitando gli obiettivi propri dell'insegnamento della matematica :

- la stesura della programmazione generale della classe (insieme agli insegnanti delle altre materie) ;
- la definizione del piano di lavoro annuale ;
- l'organizzazione delle attività di recupero ;
- la valutazione ;

Ma è forse necessario domandarsi che relazione c'è tra quello che è scritto sulla carta e le reali attività della pratica didattica quotidiana .

2. Gli obiettivi "reali"

Sono influenzati da vari fattori :

- la realtà del docente, la sua laurea, la sua formazione come insegnante, il suo stile di insegnamento ...
- la realtà degli alunni che inoltre sono diversi all'interno della stessa classe, diversi da scuola a scuola, diversi nel tempo...
- le caratteristiche proprie della situazione insegnamento/ apprendimento .

In particolare :

a) risulta molto difficile definire "a priori" obiettivi generali ; o, meglio, risulta molto teorico ed astratto perciò difficilmente gli obiettivi stabiliti diventano un reale strumento per programmare, attuare e verificare l'attività didattica quotidiana ;

b) la realtà di una classe è così varia e i tempi e le modalità di apprendimento sono così difficili da stabilire che quotidianamente c'è la necessità di riadattare la programmazione delle attività e la definizione degli obiettivi ;

c) i processi di apprendimento sono di difficilissima "gestione" e, quotidianamente l'insegnante è costretto a confrontarsi con domande del tipo "avranno capito ?", "cosa hanno capito ?", "perché continuano a fare questo errore ?", ecc.

3. Il passaggio dalla scuola media alla scuola superiore

La scuola media ha delle sue particolarità .

E' per tutti, è scuola dell'obbligo, la frequentano ancora molti ragazzi che non andranno mai alle suole superiori e che saranno subito inseriti nella realtà del lavoro o della disoccupazione, ha tra le sue molte finalità anche quella di integrare ragazzi in situazione di handicap e alunni che provengono da altri paesi e che hanno diverse esperienze sociali e culturali.

La scuola superiore ha naturalmente caratteristiche diverse e, comunque, sia la scuola media che la scuola superiore si rivolgono a ragazzi che, per il fatto di essere in una particolarissima fase evolutiva, richiedono, in molti casi, se non un'individualizzazione dell'insegnamento, sicuramente un'attenzione ai diversi tempi, riti e modalità di crescita psicologica e cognitiva.

Ora, per il fatto che la scuola media si avvia a non essere più l'ultima fase dell'obbligo scolastico, molte cose potrebbero cambiare ma, a tutt'oggi, sembra inevitabile che molti de ragazzi vivano il passaggio dalla scuola dell'obbligo alla scuola superiore come un "salto" sia dal punto di vista psicologico che da quello del tipo di prestazioni richieste.

Anche in funzione di ciò gli obiettivi della scuola media andrebbero forse ridefiniti.

In che senso ?

- Si potrebbe provare a stabilire cosa gli alunni della scuola media dovrebbero sapere e saper fare,
- provare cioè a definire un *syllabus* del genere di quello studiato dall' U.M.I. per la scuola superiore.
- Nel frattempo, gli insegnanti della scuola media potrebbero provare ad esplicitare maggiormente gli obiettivi raggiunti "in uscita" (cosa che è molto lontana da i contenuti del compito d'esame o della relazione ufficiale).
- Si dovrebbe studiare il modo per creare una efficace forma di comunicazione tra gli insegnanti dei due tipi di scuole.

4. Un criterio per stabilire ciò che è fondamentale

Anche per quanto riguarda i contenuti dell'insegnamento della matematica, gli insegnanti esplicitano in vari documenti ufficiali (piano di lavoro, registro personale, relazione finale sulle attività della classe ...) quali sono gli argomenti trattati con riferimento ai temi indicati nei programmi.

Ora, in apparenza, sembra che, soprattutto per le parti più tradizionali del programma, tutti gli insegnanti trattino i contenuti "fondamentali".

Ma forse per avere una conoscenza chiara delle competenze acquisite dagli alunni non basta sapere quali sono gli argomenti di cui, in un modo o in un altro, hanno sentito parlare, ma è importante conoscere chiaramente cosa "sanno" e cosa "sanno fare".

Andrebbero quindi forse, sia nel momento della programmazione sia in quello della verifica, esplicitate le abilità accanto ai contenuti.

E forse, comunque, stabilire cosa è fondamentale che gli alunni conoscano è più soggettivo di quanto sembra.

A questo proposito, Z. KRIGOWSKA suggerisce tre criteri a cui ci si può riferire per stabilire se un contenuto è fondamentale :

a) *Criterio di scientificità :* un contenuto è fondamentale se lo è in relazione alla struttura ed al metodo della matematica
b) *Criterio di elementarità :* un contenuto è fondamentale se può essere reso astratto attraverso una naturale ed immediata matematizzazione delle relazioni reali già ben note all'alunno
c) *Criterio di utilità :* un contenuto è fondamentale se lo è per il proseguimento degli studi e per le necessità professionali.

5. Un esempio : i numeri razionali

Rappresentano sicuramente un contenuto "fondamentale".
Nei programmi della scuola media :

TEMA 2 (insiemi numerici)
- *dalle frazioni (come operatori) ai numeri razionali*
- *rappresentazione dei numeri sulla retta orientata*
- *scrittura decimale*

Nei programmi della scuola superiore :

I numeri razionali, <u>già noti agli studenti,</u> sono ripresi in forma più sistematica

E' un contenuto considerato da tutti gli insegnanti come contenuto "di base" ed è trattato a lungo e in vari momenti nel corso dei tre anni della scuola media.

La conoscenza di questo argomento, e la relativa competenza, implicano, come capacità quella di "leggere" e "scrivere" i numeri razionali e, conseguentemente, la capacità di "tradurre" frazioni in numeri decimali e viceversa.

6. Alcuni errori significativi

Da un'analisi dei test e cui sono sottoposti gli alunni all'ingresso nella scuola superiore, appare evidente che gli insegnanti si aspettano che i ragazzi possiedano tra le capacità "di base" anche quella di leggere e scrivere i numeri razionali.

Invece dalle risposte che frequentemente sono date è evidente che queste abilità non possono essere considerate un prerequisito posseduto da tutti.

Alla domanda :

Quale numero decimale corrisponde alla frazione $\frac{4}{3}$?

non pochi alunni rispondono :

$$4{,}3$$

Così alla domanda :

Quale frazione corrisponde al numero decimale 1,5 *?*

molti rispondono :

$$\frac{1}{5}$$

Ancora, alla domanda :

Quale percentuale corrisponde a 0,2 *?*

molti rispondono :

2% oppure 5%

Alla richiesta :

Ordina i numeri $\frac{11}{30}$; 0,3 ; $\frac{1}{3}$ *dal più piccolo al più grande*

gli alunni incontrano evidenti difficoltà a rispondere correttamente .

Da questo appare evidente che :

- nel corso della scuola dell'obbligo forse non sempre si fanno sufficienti esperienze significative sui numeri razionali ;
- forse non è ben interiorizzato neppure il concetto di sistema di numerazione posizionale decimale visto che ci sono evidenti difficoltà a dare il giusto significato alla parte decimale di un numero ;
- forse sono stati indotti "meccanismi" che, quando non vengono usati nel modo corretto, creano confusione e generano errori ;
- forse alcune abilità richiedono, oltre a strategie didattiche diverse, anche un tempo maggiore per essere acquisite ed interiorizzate.

7. Un'attività proposta

Dal libro di testo per la scuola media *I Numeri* di E. Castelnuovo (La Nuova Italia, Firenze 1977).

Quanto fa $\frac{1}{3}$ *di* 100 *aumentato della metà di* $\frac{1}{3}$ *di* 100 *?*

State attenti a fare il calcolo ! non cominciate ad esprimere come numero decimale la terza parte di 100, e poi a calcolare la metà di questo numero ; ma riflettete che la metà di $\frac{1}{3}$ *è uguale a* $\frac{1}{6}$.

Disegnate allora un segmento di 6 quadretti e immaginate che rappresenti il numero 100.

Questo tipo d'esercizi è interessante e significativo dal punto di vista didattico perché costringe l'alunno a confrontarsi con i diversi modi con cui si possono scrivere numeri razionali e a scegliere quello più utile per la soluzione del problema.

Potrebbe diventare ancora più significativo se fosse dato, magari come attività da svolgere in gruppo, senza dare indicazioni sulla soluzione.

Bibliografia

Krigowska Z. , *Cenni di didattica della matematica 1*, Edizione Pitagora, Bologna 1979

Castelnuovo E. , *La via della matematica I Numeri*, La nuova Italia, Firenze 1977

Maraschini W. , Palma M, , *Manuale dei numeri e delle figure*, Editori Riuniti, Roma 1985

Benedetti N, , Clerico M. , Il passaggio dalla scuola dell'obbligo alla scuola superiore, *Epsilon*, n. 13, 1993, p. 45-48

Intervento di Lucia Grugnetti (Parma)

Premessa

Il mio intervento, più che analizzare obiettivi e aspettative dei docenti, prende in considerazione la possibilità di un *raccordo* fra i diversi livelli scolari. Tale raccordo è per me basato essenzialmente su un mutamento, che vedo necessario e prioritario, di *atteggiamento* verso la problematica dell'apprendimento.

1. «Gli studenti provenienti dalla scuola superiore incontrano notevoli difficoltà nel primo anno di università». Comincia così la relazione di G. Accascina (e altri) presentata nell'ottobre 1995 al Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica di Pisa. La relazione riguarda i problemi di raccordo tra Scuola Secondaria Superiore e Università. Ognuno dei presenti qui può senza dubbio adattare questa frase al livello scolare in cui opera: gli studenti provenienti dalla scuola ... incontrano notevoli difficoltà nel primo anno di ...

Dalla presa di coscienza delle difficoltà alla necessità di un raccordo fra i vari livelli il passo dovrebbe essere breve.

Ma quali sono le difficoltà?

Nella relazione di Pisa ne vengono elencate alcune:

- difficoltà legate a mancanza o scarso approfondimento di contenuti e strumenti fondamentali (insufficienti prerequisiti);
- difficoltà legate al livello di astrazione e all'uso di nuovi simbolismi e formalismi;
- difficoltà "ambientali" legate ad una diversa organizzazione dell'attività didattica, a diversi ritmi e metodi di studio.

Ognuna di tali "classi" di difficoltà meriterebbe di essere qui analizzata, ma laddove nella terza, per *diversa organizzazione didattica,* si intenda un diverso atteggiamento verso la problematica dell'insegnamento-apprendimento, tale "classe" di difficoltà può inglobare le altre due, come cercherò di mostrare più avanti ricorrendo ad alcuni esempi (anche se rischiano di essere interpretati in modo riduttivo).

Se ci si mette in un'ottica di superamento delle "resistenze alle innovazioni" e si tiene conto dei "nuovi" programmi per la scuola superiore (programmi Brocca) si trova il conforto di una visione "culturale" della matematica: *«La matematica, parte rilevante del pensiero umano ed elemento motore dello stesso pensiero filosofico, ha in ogni tempo operato su due fronti: da una parte si è rivolta a risolvere problemi ed a rispondere ai grandi interrogativi che via via l'uomo si poneva sul significato della realtà che lo circonda: dall'altra, sviluppandosi autonomamente, ha posto affascinanti interrogativi sulla portata, il significato e la consistenza delle sue stesse costruzioni culturali.»*

Ma non solo; si legge anche *«Il problema didattico centrale che si pone al docente nell'attuazione dei programmi risiede nella scelta di situazioni particolarmente idonee a far insorgere in modo naturale congetture, ipotesi, problemi. per una pratica didattica così finalizzata, offrono prioritaria ispirazione i risultati delle ricerche*

- *in campo storico-epistemologico,*
- *in quello psico-pedagogico,*
- *nonché in quello metodologico-didattico».*

2. L'attenzione agli aspetti storico-epistemologici può indicare un possibile percorso critico-costruttivo ai vari livelli scolari e, in particolare alla scuola secondaria superiore. Per ciò che riguarda l'ambito geometrico, ad esempio, il non fermarsi solo alla visione della dimostrazione di tipo euclideo (dimostrazione per "convincere", che riconosce il carattere assoluto ed universale di una affermazione), ma il fare riferimento anche ai metodi di matematici del XVII secolo (metodi meno rigorosi di quello euclideo, ma che tendono a chiarire o a "scoprire" piuttosto che a convincere, si veda ad esempio il metodo degli indivisibili) e infine un ritorno al rigore di tipo hilbertiano (che non è più assoluto, ma relativo ad un sistema di assiomi) può consentire di rispondere alle esigenze evidenziate dai "nuovi programmi" e da una didattica che vede l'allievo protagonista di una costruzione critica e consapevole del sapere.

E' di questo tipo di didattica che mi preme dire qualcosa per ciò che riguarda, in particolare, il senso che annetto al *raccordo*.

3. Favorire nell'allievo di qualunque età lo sviluppo di un atteggiamento critico-costruttivo, che trae origine dalla curiosità (dal chiedersi perché?), è il "fil rouge" che, al di là dei particolari obiettivi e contenuti, tipici di ciascun livello, nonché dalle particolari aspettative dei docenti, consente di non creare salti o addirittura voragini tra un livello e l'altro e aiuta a superare le difficolà di tipo 'ambientale'. Nel corso della scolarità la curiosità si evolve poi nel congetturare, si rafforza nell'argomentare, per giungere infine a maturare nella deduzione.

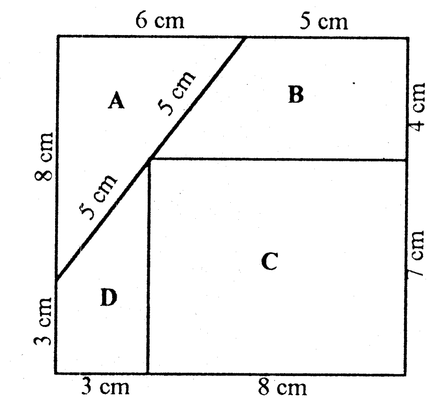
3. 1. Per insegnare la nozione di ingrandimento di figure, ad esempio, si possono descrivere direttamente i metodi opportuni da utilizzare o si può ricorrere ad esempi che diano chiaramente un'idea della procedura, o, ancora, si può mettere l'allievo di fronte ad un problema insieme interessante e non di immediata soluzione. Nei primi due casi si priva l'allievo di un'occasione importante, quella, cioé, della presa di coscienza delle sue concezioni errate in merito a quella nozione. L'insegnamento trasmissivo, diretto o a partire da esempi troppo semplici, tenta di sovrapporre conoscenze corrette a conoscenze errate, senza aver prima rimosso queste ultime, che ritorneranno e diventeranno "resistenti".

E nel terzo caso? Analizziamolo nei dettagli mediante il ricorso ad un

problema ben noto proposto da Guy Brousseau nel 1981.

Il problema del PUZZLE

L'insegnante propone agli allievi, suddivisi in gruppi di 4, la situazione seguente:



«A partire dal puzzle rappresentato in figura ogni allievo di ciascun gruppo riceve uno dei quattro pezzi. Poiché ogni gruppo dovrà ottenere un ingrandimento del puzzle, ogni allievo di ciascun gruppo ha il compito di fare un ingrandimento del proprio pezzo in modo da poter ricostruire l'intero puzzle ingrandito. Il lato che misura 4 cm deve misurarne 6 sul puzzle ingrandito.

Naturalmente in ogni gruppo sarà necessario accordarsi sul metodo da seguire.»

Si tratta di una situazione che fa venire alla luce la concezione (additiva) erronea del tipo:

Bisogna aggiungere 2 cm a ciascun lato per fare l'ingrandimento richiesto.

Quando si cercherà di ricostruire il puzzle ovviamente le cose andranno male.

Alcuni non rimetteranno in causa la procedura, ma penseranno di aver tagliato in maniera troppo grossolana i pezzi.

Saranno necessari altri tentativi maldestri e il confronto fra i diversi gruppi (confronto di congetture, discussione) perché la procedura seguita sia "messa sotto accusa".

Una strategia spesso proposta è del tipo: *se un segmento di 4 cm si trasforma in uno di 6 cm, un segmento di 8 cm (che è doppio del primo) si trasformerà in uno di 12 cm ...*

Questo tipo di strategia è poi facilmente adattabile ad altre situazioni di ingrandimento.

Per poterla "vedere" è stato necessario **rinunciare** alla concezione additiva (erronea).

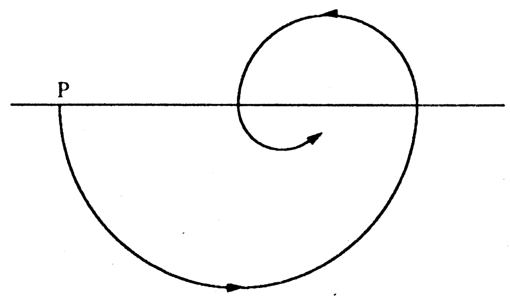
E' l'inizio della "costruzione" del pensiero proporzionale.

E' possibile e interessante anche un altro approccio che, studiando le proprietà geometriche, piuttosto che quelle metriche, porta comunque alla soluzione.

3. 2 A livello di scuola secondaria superiore, una situazione dinamica, atta a costruire nuove conoscenze (o quantomeno a introdurle con il ricorso a ipotesi, congetture, argomentazioni) potrebbe essere la seguente:

UNA "STRANA SPIRALE"

«Dal punto di partenza P si percorre una semicirconferenza di raggio 1, poi si continua su una semicirconferenza di raggio 1/2 (si veda il disegno). E così di seguito, si percorrono semicirconferenze di raggio che è, ogni volta, la metà del raggio della semicirconferenza precedente.



A quale distanza, sull'asse, dal punto di partenza si potrebbe trovare "l'arrivo"?

Quale sarà la lunghezza del cammino percorrendo le semicirconferenze?»

Un allievo di 15, 16 anni può cominciare ad affrontare autonomamente questa attività che richiede, all'inizio, solo conoscenze elementari sulle frazioni e la circonferenza. Tali conoscenze, però, non sono sufficienti per permettergli di risolvere il problema.

L'allievo si trova così in una situazione in cui il reinvestimento delle conoscenze pregresse non sono sufficienti, benché gli siano certamente utili.

La situazione è abbastanza ricca per suscitare congetture e abbastanza "consistente" perché i primi tentativi non portino alla soluzione, perché emergano conflitti cognitivi.

Un primo approccio consiste generalmente nel ricorso al disegno geometrico che, però, rivela molto presto i propri limiti.

In seguito, la ricerca delle ascisse dei punti di intersezione delle semicirconferenze con l'asse, a partire dal punto di partenza, conduce ad una successione 'irregolare'. E' un momento importante: l'andata e il ritorno tra il contesto geometrico e aritmetico si moltiplicano. Il punto di arrivo si troverà forse tra i punti di ascissa 1 e 2: *1 + 'qualcosa'*.

A questo punto, il lavoro collettivo e le discussioni mettono in evidenza l'alternanza di termini positivi e negativi. Nascono interrogativi, perplessità: è allora il tempo dei tentativi, delle congetture. Per quel che riguarda il cammino percorso, secondo alcuni, *questo sarà lungo quanto si vuole*, altri, nel 'sommare' alcune lunghezze delle semicirconferenze cominciano a dubitare che *il cammino non potrà essere poi tanto lungo*.

L'attività, coordinata dall'insegnante, porta alla somma di una progressione geometrica e all'emergere dell'idea di 'infinitesimale', di 'infinito', di 'convergenza di una serie', di 'limite': solamente una prima idea, è chiaro.

Una risposta alle due domande del problema può essere costruita secondo il seguente percorso:

1) La somma dei termini della successione 'irregolare' di cui si è detto più sopra: $1 + 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + \dots$ (serie geometrica di ragione $q = -1/2$) può essere riscritta nella forma $1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots$ laddove si sommino il secondo e il terzo termine, il quarto e il quinto e così via[1]. Indicata con S tale somma, se si considera $S/4 = 1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots$ e si effettua la differenza $S - S/4$, si ottiene 1, da cui $S = 4/3$. La congettura *1 + 'qualcosa'* diventa $1 + 1/3$.
2) In merito alla lunghezza del cammino: $\pi + \pi/2 + \pi/4 + \pi/8 + \dots$, una volta scritta la somma nella forma $\pi\,(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots)$ se si pone la somma in parentesi uguale a S' e si sottrae S'/2, si ottiene 1 da cui $1/2\ S' = 1$, quindi $S' = 2$ e la lunghezza del cammino è 2π.

In una fase successiva ci sarà la 'istituzionalizzazione' delle conoscenze, ma sarà uno sviluppo di attività (di questa e di altre) e non una teorizzazione fine a se stessa.

4. Situazioni-problema di questo tipo si ispirano ad un **modello socio-costruttivista** dell'apprendimento:

- apprendere non consiste nel ricevere il sapere in maniera passiva, ma nell'agire sulle informazioni ricevute dalla situazione. Le nuove conoscenze sono costruite a partire da quelle che si posseggono già.

La prima fase è quella dell'*assimilazione*, nel corso della quale si stabiliscono delle analogie, si fanno confronti, si cercano somiglianze e differenze con conoscenze anteriori.

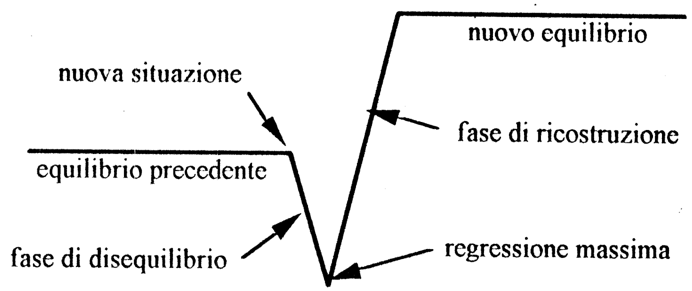
Se le informazioni ricevute e riorganizzate sono giudicate conformi a ciò che si sa già, non si apprende niente di nuovo. Ci si esercita, si hanno conferme, si rinforzano le conoscenze precedenti.

Se, al contrario, ci si rende conto che le concezioni precedenti non consentono di assimilare i nuovi dati della situazione, oppure che quelle concezioni si rivelano insufficienti, si instaura un disequilibrio. Le conoscenze precedenti costituiscono un ostacolo che bisognerà eliminare. Come dice Bachelard, "si conosce contro una conoscenza anteriore distruggendo ciò che è mal fatto".

---

[1] Si tenga però presente che in generale nel caso di somme di infiniti termini non è 'garantita' la proprietà associativa , che qui di fatto vale. Ciò succede se la serie è assolutamente convergente, cioè se converge la somma dei valori assoluti dei suoi termini.. A livello didattico sarebbe importante considerare anche un'esempio di serie, come la famosa serie di Grandi: 1–1+ 1–1+ 1–1+ ..., che viene 'spontaneo' (come la storia ricorda) porre uguale a 1/2 oppure a 0, o ancora, uguale a 1, i valori assoluti dei cui termini non conducono ad una serie convergente: da qui il paradosso.

Per costruire una nuova conoscenza, bisogna che ne venga riconosciuta la necessità; in altri termini, che serva a qualcosa.



A partire da un problema, l'apprendimento di una nuova conoscenza si caratterizza tramite un'attività di ricerca, di produzione di ipotesi, di esplorazione, di tentativi, di verifiche. Segue poi una fase importante di strutturazione, nel corso della quale la conoscenza viene decontestualizzata e formulata in varie forme . Le interazioni sociali (comunicazione e dibattito) vi giocano un ruolo importante.

In una tale ottica di insegnamento-apprendimento che esalta un atteggiamento critico-costruttivo, le due prime classi di difficoltà (di cui al punto 1.) cambiano di prospettiva: possono diventare un'occasione di 'messa in crisi' utile alla costruzione di una nuova conoscenza, piuttosto che un'occasione di frustrazione per discente e docente, e questo al di là del livello scolare in cui si opera e dei contenuti matematici e non presi in considerazione.

Bibliografia

G. Brousseau, *Problèmes de didactique des decimaux*, RDM, vol 2.1, 1981,37-280

R. Charnay, *Pourquoi des mathématiques à l'école?*, ESF, 1996.

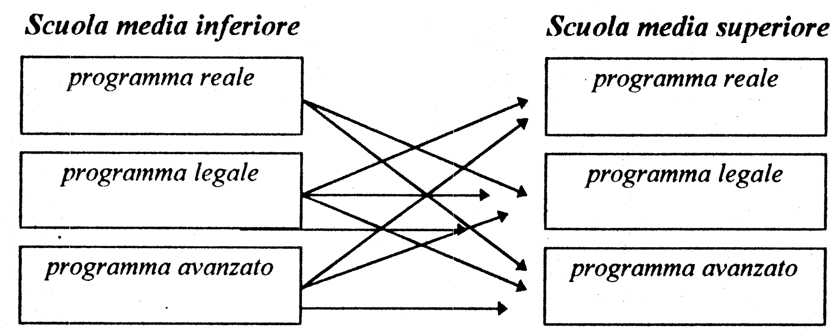
J. A. Calame & F. Jaquet, *Mathématique 7-8-9,* Neuchâtel, Departement de l'instruction publique, 1989.

L. Grugnetti & F. Jaquet, *Senior Secondary School Practices (chapter 16)*, in corso di stampa su A. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers.

Intervento di Walter Maraschini (Roma)

Il tema su cui si svolge questa tavola rotonda riguarda gli *obiettivi* e le *aspettative*, ma mi chiedo se non sarebbe meglio parlare di *vincoli* (nel senso di vincoli istituzionali, programmi da rispettare, tempo a disposizione e reali studenti che entrano nella scuola superiore) e *desideri* (nel senso di ciò che si vorrebbe assicurare come pacchetto formativo matematico per uno studente che termini il percorso formativo della scuola superiore).

La situazione è oggi infatti piuttosto complessa e – per certi versi – indeterminata. Sia nel livello della Scuola media inferiore sia in quello della Scuola media superiore, possono infatti distinguersi tre generi di sviluppo dei programmi di matematica, che – come sottolineava nel suo intervento Raimondo Bolletta – possono diversamente intrecciarsi:



In ogni scuola, infatti, convivono situazioni ed insegnamenti che sviluppano una sorta di "programma diffuso" che poco ha a che vedere con quello che la norma indica (ad esempio sono poco o nulla sviluppati argomenti quali probabilità e statistica, oppure logica), accanto a situazioni che cercano di realizzare gli obiettivi che le ordinanze ministeriali indicano, accanto ad altre nelle quali si sviluppano interessanti sperimentazioni.

Di fronte a questa caotica, ma forse inevitabile situazione, nelle scuole superiori si sono in questi anni diffusi tentativi di soluzione del problema, che sono consistiti principalmente in:

a) elaborazione e somministrazione di *prove di verifica* (o prove di ingresso o d'accesso), a livello nazionale (come il progetto *Prometeo*) o locale, che mentre da un lato tentano di offrire un quadro più preciso delle competenze mancanti e di quelle presenti negli studenti, dall'altra parte corrono il rischio di creare un pericoloso effetto "Pigmalione" (l'insegnante rafforza l'immagine "buona" o "cattiva" che si fa dello studente fin dal primo impatto e "crea la creatura che s'aspetta") o non tengono conto di quel desiderio di "palingenesi" che naturalmente ogni soggetto in formazione prova quando cambia l'ambiente formativo in cui opera;

b) predisposizione di *fasi d'accoglienza* che mentre sottolineano il problema di creare un'atmosfera ed un ambiente aperto agli studenti, d'altra parte rischiano di tradursi in ricette e norme da "Galateo" che – nei casi peggiori – tendono a giustificare la successiva selezione ("ho fatto di tutto per te, studente, e tu ti dimostri ingrato ...");
c) corsi *accelerati* in cui si "ripetono" concetti e nozioni che si sarebbero dovute apprendere nei periodi formativi precedenti. Corsi del genere oramai si stanno diffondendo anche a livello universitario (*pre-corsi*) e, se rappresentano una meritoria attenzione ai livelli pregressi, talvolta cadono nell'illusione che la "ripetizione" possa di per sé costituire la cura.

Un'ottica diversa (verso la quale possono convergere test di ingresso, fasi d'accoglienza e corsi accelerati) è quella di analizzare, più che l'assenza di contenuti, il possesso di particolari abilità e competenze.

Su ciò – come anche sottolineava nel suo intervento Nella Benedetti – occorre una particolare riflessione, perché troppo spesso si dà una lettura "bassa" o "sbagliata" dei programmi, anche sui temi che possono apparire elementari.

A tale proposito, analizziamo una questione che, pur appartenendo ad un medesimo contenuto, coinvolge abilità diverse.

Nel test *Prometeo* di ingresso per la scuola superiore (nato per monitorare le sperimentazioni Brocca) figurano queste due domande:

3) Scrivi il il risultato dell'espressione $\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{10}{3}$

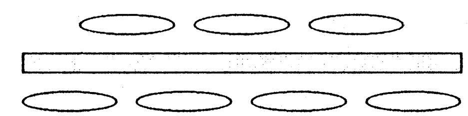
4) Il doppio di $\frac{3}{4}$ è ...

☐3/8 ☐6/8 ☐5/4 ☐3/2

Ambedue gli *item* riguardano il contenuto "frazioni"; ma alla domanda 3) (che coinvolge la semplice applicazione di regole in un contesto del tutto formalizzato) risponde correttamente l'82.9% degli studenti (esiti di *Prometeo*, 1992: campione 6920 studenti sul territorio nazionale). Alla domanda 4), invece lo stesso campione fornisce le seguenti risposte:

- risponde 3/8 il 3.7%
- risponde 6/8 il 70.2%
- risponde 5/4 lo 0.8%
- risponde 3/2 il 24.3%

Le due percentuali di risposte giuste a confronto (l'82.9% nel primo caso contro il 24.3% nel secondo caso) segnalano un diverso "attivamento cerebrale" ed un particolare modo di "comprendere" le frazioni, che peraltro già alcuni anni fa rilevai in una ricerca compiuta su una popolazione adulta. Là si chiedeva di rappresentare con un disegno o un'immagine la frazione 3/4 e non poche furono le risposte in cui tale frazione era rappresentata in un modo simile al seguente



nel quale una "mensola" (la linea di frazione!) divideva due "scaffali", quello sopra contenente tre panini (o tre torte), quello sotto contenente quattro oggetti dello stesso genere.

Le frazioni sono quindi "viste" come coppie, ordinate sì, ma – come dire? – "non sposate" di numeri naturali. Tra i due numeri naturali non c'è alcun rapporto.

Risulta quindi come ipotesi che esistono modelli mentali persistenti, blocchi e nodi concettuali sui quali, per varie ragioni, le purtuttavia esistenti *valenze educative* della società non riescono ad intervenire. Pregiudizi ed idee sbagliate, con conseguenze negative sia sul piano intellettivo sia su quello dell'operare pratico, sui quali solo l'istruzione, solo la scuola può intervenire. Su questo ho trovato molto convincente la relazione di Michele Pellerey.

Di tali *modelli errati e persistenti* che l'esperienza quotidiana non permette di correggere e sui quali solo l'istruzione può intervenire vi sono numerosi esempi, che sono anche *fonte* di molti errori matematici scolastici. Accenno qui ad alcuni – quelli più evidenti nella mia esperienza didattica:

1. *L'insieme dei numeri naturali (*N*) come unico modello mentale di riferimento* (è la "causa" dell'alta percentuale d'errore sulle frazioni di cui s'è visto sopra);
2. *La tendenza a seguire, in matematica, l'ordine sequenziale della lettura e della scrittura, da sinistra verso destra* (è la causa di numerosi errori di calcolo, originata probabilmente dalla tensione infantile di riuscire a leggere e a scrivere);
3. *La tendenza ad utilizzare modelli additivi, o comunque a non comprendere la differenza tra "mondo della addizione" e "mondo della moltiplicazione"*

(su questo rimando alla relazione di Pellerey sul «ragionamento proporzionale»);
4. *L'attivazione di automatismi di calcolo precoci, che sostituiscono il calcolo al ragionamento ed aboliscono il "vedere"* (ad esempio, risolvere un'equazione in questo modo: $3=x \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=3$);
5. *La tendenza ad utilizzare continuamente proprietà di linearità* (ad esempio: $(a+b)^2=a^2+b^2$);
6. *La falsa generalizzazione* (per cui una proprietà verificata su uno due casi, su uno due triangoli, viene immediatamente estesa ad infiniti casi);
7. ...

Se si potessero facilmente stilare delle "ricette didattiche" direi che, ad esempio, sui precedenti punti 1., 2., 3., 6. la Scuola media inferiore, complessivamente deve porsi il problema di diminuire la persistenza di *modelli di ragionamento sbagliati*.

Su punti quali invece i precedenti 4. o 6., la Scuola media inferiore deve avere invece cautele diverse giacché è forse essa stessa che, con indebite anticipazioni, genera maggiori probabilità d'errore.

In ogni caso, un equilibrio è difficile perché ogni livello scolare deve realizzare opportuni livelli di operatività, esperienza e manipolazione con gli oggetti matematici su cui si innestano successivi livelli di astrazione. Anticipare l'astrazione è sempre difficile e può essere rischioso se non corrisponde ad una esigenza intellettuale profondamente sentita dal soggetto che apprende; tuttavia correggere un modello mentale sbagliato è sempre necessario.

D'altra parte, in ogni contesto, vi sono dei *non detti* convenzionali, ma potenti, che possono sconcertare o lasciare indifferenti o ammutoliti, sbalorditi o distanti chi ascolta. Ed il ragazzo che per la prima volta sente una frase per noi familiare quale

"Sia x un qualunque numero reale..."

vive probabilmente uno "sballottolamento" mentale altrettanto intenso, ma meno consapevole, di quello che noi stessi proveremmo ascoltando qualcuno che ci dicesse:

"Sia 3 una qualunque lettera dell'alfabeto..."

PRESENTAZIONE DEL PROGETTO PROMETEO

Il Progetto Prometeo

Lucia Ciarrapico - Marcello Ciccarelli***

Il "Prometeo" è un progetto d'iniziativa ministeriale (Dir. Gen.le. Istruzione Classica, Scientifica e Magistrale, Dir. Gen.le. Istruzione Tecnica, Dir. Gen.le. Istruzione Professionale), promosso in collaborazione con l'IRRSAE Marche.

Esso si pone l'obiettivo di rilevare le competenze possedute dallo studente al suo ingresso nella scuola secondaria e al termine del primo biennio. E' un lavoro compiuto da una équipe di ispettori, presidi e docenti, suddivisi in quattro aree disciplinari: lingua italiana e straniera, storia ed economia, matematica, scienze sperimentali.

Al gruppo di matematica hanno collaborato, nel corso dei 4 anni, molti docenti e Presidi.

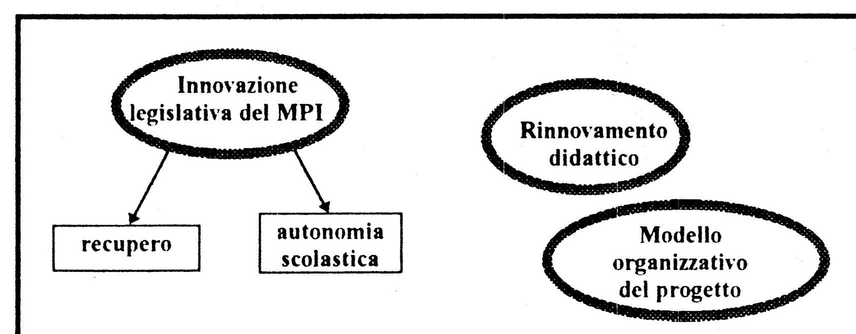
Per quanto riguarda l'ultima fase di lavoro, hanno partecipato stabilmente i docenti E.Carlomagno, M.Ciccarelli, L.Girello, M.Pasquinucci, W.Maraschini coordinati dall'ispettrice Ciarrapico, responsabile scientifico.

L'elaborazione del software del Prometeo 1 è stata opera della prof.ssa Anna Maria Caputo.

L'elaborazione del software del Prometeo 2 è stata opera dei docenti M. Ciccarelli, T. Lattanzi, W. Maraschini.

Contesto generale e obiettivi del progetto: una visione d'insieme.

IL CONTESTO : elementi costitutivi



* Ispettrice MPI

** Docente di matematica, liceo sc. Maiorana, Latina

Innovazione legislativa

Recupero

L'abolizione degli esami di riparazione ha fatto emergere, già in questa prima fase sperimentale, tutte le contraddizioni di una scuola che cerca di rinnovarsi senza una contemporanea strategia d'intervento per contenere il fenomeno della dispersione scolastica, fenomeno inteso in tutte le sue manifestazioni fino agli abbandoni, particolarmente alti nel biennio della scuola superiore.

In ogni occasione di confronto e dibattito è emersa la necessità di predisporre strumenti di supporto all'azione del docente ed il " Prometeo" intende rappresentare una possibile risposta.

Volendo affrontare il problema degli insuccessi scolastici con un atteggiamento di ricerca delle soluzioni non è possibile eludere la fase della conoscenza della situazione reale dello studente nel momento di accesso alla scuola secondaria.

E il supporto cognitivo all'azione del docente non può consistere solo nella disponibilità di uno strumento di rilevazione, per quanto attendibile. Un'azione, veramente tesa al recupero, necessita anche e soprattutto di informazioni qualitative che supportino il docente sulle competenze disciplinari dello studente in modo da organizzare una programmazione più individualizzata.

Autonomia scolastica

L'altra innovazione legislativa riguarda il disegno di legge sull'Autonomia Scolastica che, per una sua congrua efficacia, pone l'esigenza di garantire standard di qualità ragionevolmente omogenei sia nel contesto nazionale che nel rapporto con gli altri Paesi.

Infatti la flessibilità del percorso formativo, che deriva dall'Autonomia Scolastica, è mirata ad una maggiore integrazione dell'azione scolastica con i bisogni del territorio ed è espressa con chiarezza dalla ratio della legge. Ma tale flessibilità comporta il rischio di un dislivello di risultati, intesi in termini di formazione in senso lato.

In quest'ottica assume particolare rilevanza per l'Amministrazione Scolastica avere a disposizione dati relativi alla situazione effettiva circa gli apprendimenti acquisiti dagli studenti.

Il test d'uscita del Prometeo relativo al biennio della secondaria, può costituire un contributo di conoscenza sui risultati ottenuti dalle scuole e, indirettamente, anche sulle strategie impiegate per contenere gli insuccessi.

Rinnovamento didattico

Nell'ultimo decennio si è sempre più affermato, fra i docenti, un rinnovamento della didattica che utilizza, in termini consapevoli, le conquiste della pedagogia.

Le attenzioni dei docenti si sono soprattutto concentrate sulla ricerca valutativa, intesa come strumento per decodificare i nodi della progettazione curriculare.

Tale nuova consapevolezza si è però distribuita, a macchia di leopardo, sul territorio nazionale, concentrandosi principalmente, ma non solo, intorno alle sperimentazioni del progetto Brocca e del progetto '92.

Il Prometeo si muove in questo solco di rinnovamento della didattica ed ambisce a contribuirvi, pur avendo un'autonomia di progetto ed una peculiarità, che è suo vanto e, al tempo stesso, suo limite.

Modello organizzativo del progetto

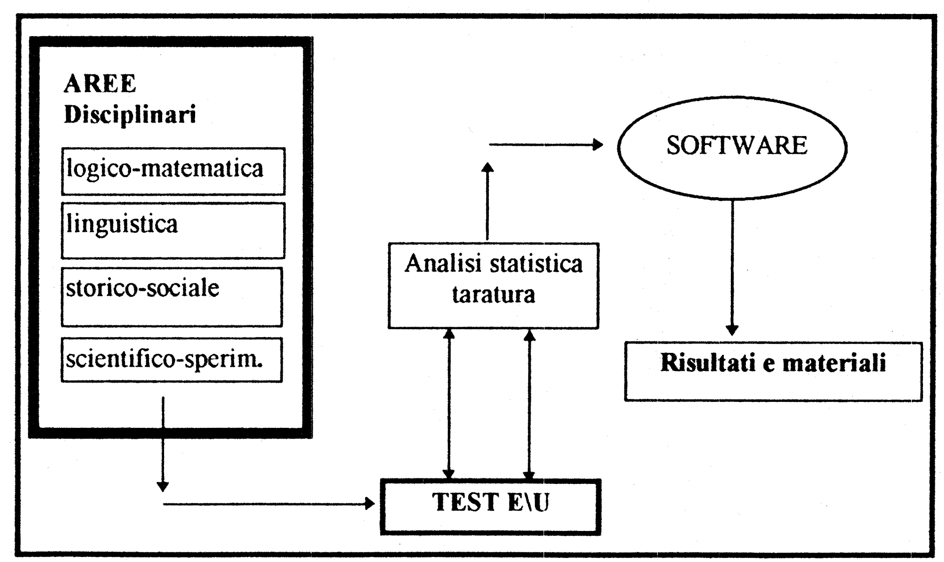
Il modello organizzativo si caratterizza per il determinante coinvolgimento delle scuole nella costruzione delle prove e nell'interpretazione dei risultati.

I gruppi di lavoro, coordinati da ispettori tecnici, sono stati costituiti da docenti e presidi provenienti da scuole in maggioranza sperimentali o, comunque, con esperienze maturate nel campo della ricerca valutativa.

Questa metodologia ha comportato un iter realizzativo forse più lento ma sicuramente più aderente al senso comune quotidiano dei docenti.

Inoltre ha permesso di valorizzare le risorse di "esperienze sul campo" accumulate in questi anni nella scuola italiana.

Il progetto PROMETEO: il percorso



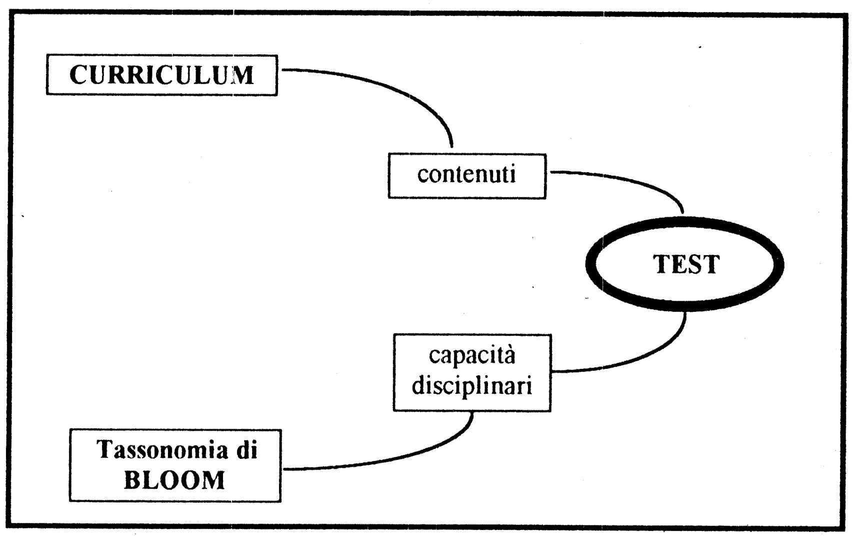
Le aree disciplinari e il campo di misurazione

Le aree disciplinari, prese in considerazione, sono state quelle delle discipline comuni, secondo l'ipotesi contenuta nel progetto "Brocca".

Il campo di misurazione per il test d'ingresso è stato definito assumendo come termine di riferimento i programmi della scuola media; per quello di uscita, pur mantenendo inalterato il concetto di area, ha tenuto conto della maggiore differenziazione disciplinare del biennio.

I test prodotti corrispondono agli insegnamenti comuni a tutti gli indirizzi, con la sola eccezione del Laboratorio di fisica\chimica presente solo in alcuni di essi.

La costruzione del test



Capacità e contenuti nella costruzione del test

Pur nell'autonomia degli ambiti disciplinari è stato definito un comune impianto concettuale ed è stata concordata una medesima metodologia di lavoro.

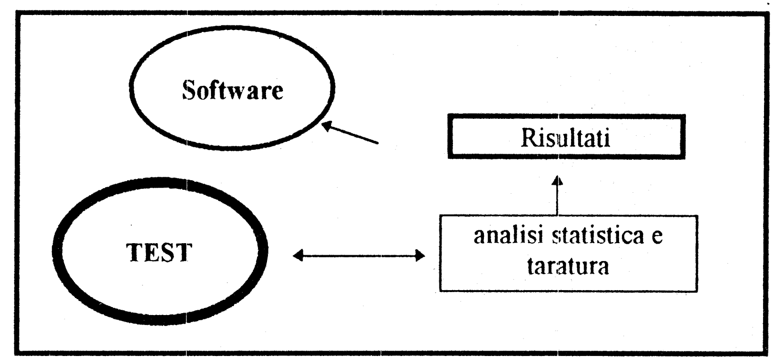
Lo strumento comune è stata una tabella a doppia entrata nella quale la mappa degli item è scaturita dall'incrocio tra le capacità assunte come obiettivi e gerarchicamente ordinate ed i contenuti.

Per quanto riguarda le capacità considerate ci si è riferito, in prima approssimazione, alla tassonomia di Bloom semplificata e a quella di Klopfer per l'area scientifico-sperimentale.

Le capacità-tassonomia di Bloom, utili per orientare le scelte e guidare correttamente la distribuzione degli item, hanno tutti i limiti di genericità delle tassonomie. Ed il primo lavoro svolto dai gruppi di lavoro è stato quello di esplicitarle in termini disciplinari, individuando, con una prima approssimazione, un insieme di competenze disciplinari che potessero rendere, didatticamente, concrete le tassonomie.

Anche i contenuti, con riferimento ai programmi ministeriali, sono stati manipolati dai gruppi di lavoro al fine di individuare settori particolarmente significativi.

La taratura del test e il software



Analisi statistica

Il test, composto da item a risposta multipla, è stato distribuito ad un insieme di scuole, assunte come campione della popolazione studentesca.

I risultati sono stati sottoposti una prima volta ad analisi statistica, basata su indici di facilità, indici di discriminazione, punto biseriale, percentuali di risposte date ai distrattori e risposte omesse.

In base ai risultati dell'analisi statistica, i test sono stati corretti e riformulati per essere nuovamente riproposti al campione.

I risultati della seconda distribuzione sono stati nuovamente sottoposti ad item-analisi per poter ancora eseguire correzioni ed aggiustamenti. Il test, finalmente tarato, è stato distribuito alle scuole per avere dei risultati che potessero essere assunti come standard cognitivo.

Software e risultati

Su tali standard è stato costruito un software in modo da rendere, per il docente, semplice ed immediata l'elaborazione dei dati della propria classe. Tale software permette di avere le seguenti informazioni sulle performance degli alunni:
punteggi globali di tutti i test per ogni alunno
punteggi globali per ogni singolo test
trasformazione del punteggio in voti con diversi criteri

punteggi relativi a settori di contenuti
indicatori statistici per ogni area
indicatori statistici per la scuola
indicatori statistici per gli item.

Riflessioni:

Il tipo di risultati ha un limite oggettivo, quello di non uscire da graduatorie di classe e di collocare un alunno solo all'interno di tali graduatorie.

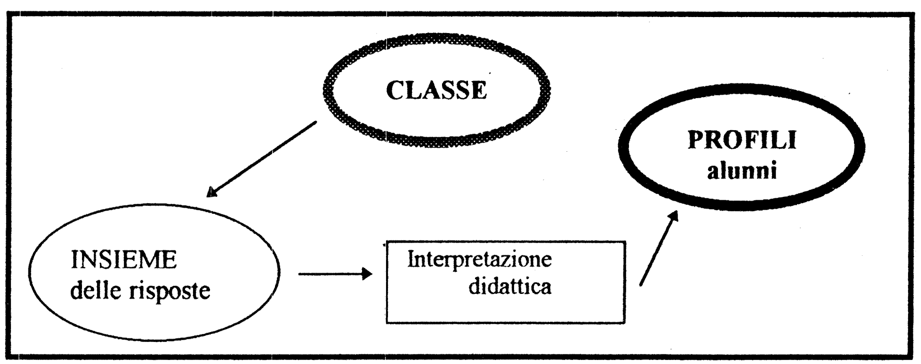
Tale tipo d'informazione nulla dice sul singolo alunno se non che è più o meno bravo di un altro in un test o in un settore di contenuti.

Le informazioni del Prometeo 1 sono più utili per avere dati sulla classe che sull'alunno.

Per esempio sapere che in matematica l'80% della classe è situato nella zona della sufficienza è una informazione utile per una programmazione che può far leva su un dato di conoscenza omogenea. Ma uno studente che ha delle carenze, magari anche con punteggi generali sufficienti, non viene individuato con questo tipo di software e quando l'insegnante lo rileva è sicuramente passata molta acqua sotto il ponte dell'apprendimento.

Tale problema, di un accertamento precoce delle carenze del singolo alunno, è stato l'obiettivo della seconda parte del progetto, denominato Prometeo II. Con tale iniziativa si è voluto fornire al docente uno strumento che cercasse, pur nei limiti dello strumento, di disboscare la giungla delle carenze.

Il percorso del Prometeo 2



Associazione alunno-insieme delle risposte

Ogni alunno fornisce, nel test di matematica, 30 risposte; il software del Prometeo 1 prende in considerazione solo quelle corrette la cui somma determina il punteggio dell'alunno. L'idea base del Prometeo II è invece quella di prendere in considerazione tutte le risposte anche quelle errate. In tal modo si associa ad uno alunno, anziché il suo punteggio, un vettore di 30 componenti.

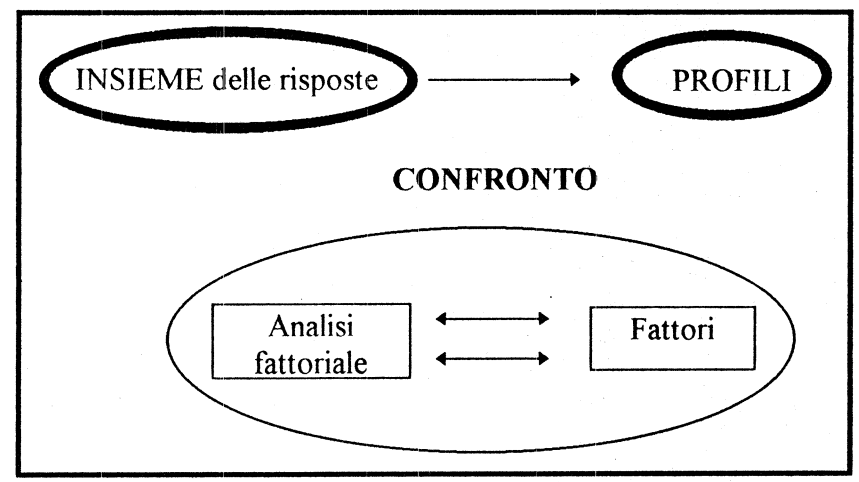
In tal modo si stabilisce una corrispondenza pressoché biunivoca fra gli studenti e un insieme di vettori-risposte. Infatti la probabilità che due studenti forniscano lo stesso vettore-risposta è quasi nulla.

Interpretazione didattica dell'insieme delle risposte

La corrispondenza costruita offre una buona base di partenza per un percorso che possa condurre ad una analisi individuale.

Il problema è come trasformare in informazioni didatticamente qualitative l'insieme delle risposte.

Metodo del confronto nel gruppo



Analisi fattoriale

Il punto di partenza, per l'interpretazione dei vettori-risposte, è stato l'esame dell'analisi fattoriale che l'item-analisi aveva compiuto[1]. Tale analisi aveva fornito sei blocchi di item con differenti indici di correlazione ma tutti e sei significativi. Cioè, rispetto a sei blocchi di domande, pur appartenenti a settori di contenuti diversi, lo studente aveva dimostrato lo stesso comportamento cognitivo.

Da cosa era causato tale comportamento?

Perché di fronte ad una domanda di geometria, ad una di calcolo numerico, all'interpretazione di un grafo lo studente dimostrava comportamenti analoghi? Qual era l'ulteriore competenza trasversale che entrava in gioco oltre a quella delle conoscenze sui singoli contenuti?

---

[1] L'analisi fattoriale fornisce i gruppi di item rispetto ai quali gli studenti hanno fornito lo stesso tipo di risposta; tale tipo di dato individua la presenza di correlazioni tra le risposte.

Nel cercare una risposta, le tassonomie di Bloom o altre ci aiutavano poco in quanto fornivano categorie troppo generali mentre cercavamo, ovviamente, una specificità matematica di correlazione fra i 6 blocchi di domande.

Fattori

Il metodo utilizzato per dare i nomi ai sei blocchi è stato quello del confronto fra i componenti del gruppo, composto da docenti con maturata esperienza. Abbiamo presunto che una nostra ragionata valutazione, confortata da un confronto, fosse il miglior strumento interpretativo.

Al termine di tale confronto sono stati dati i nomi ai sei blocchi di item

1 capacità di esecuzione dei calcoli;
2 consapevolezza delle regole di calcolo;
3 conoscenza dei termini matematici;
4 comprensione di definizioni e testi;
5 capacità di leggere rappresentazioni grafiche di vario tipo;
6 capacità di analisi di situazioni problematiche o insolite;

Abbiamo così individuato quelle competenze che trascendevano i contenuti, anche se da essi erano partorite. Abbiamo chiamato queste competenze fattori sia in omaggio alla dimensione statistica dell'analisi fattoriale ma anche per il loro significato matematico perché pensavamo che il prodotto di essi dovesse costituire il profilo disciplinare dello studente.

Campo di misurazione dei fattori

Alla luce di questi fattori abbiamo esaminato tutte le possibili risposte che il test offriva agli studenti. In ognuna delle 150 possibili (30 item con 4 risposte + la non risposta) scelte che aveva lo studente abbiamo cercato la presenza o meno dei fattori.

Ad ognuna di queste possibilità si è, in tal modo, associato un fattore o più fattori.

Tale associazione può avvenire sia per presenza di un fattore. o più fattori, che incide positivamente (+1) ma anche per l'assenza di un fattore che causa quella determinata risposta errata (-1).

Al termine di tale disamina avevamo che ognuno dei fattori poteva variare in un intervallo di punteggio. Il test, per quel fattore, ammetteva un minimo ed un massimo punteggio.

Tale intervallo è stato poi suddiviso in tre sotto-intervalli che indicavano, dal basso verso l'alto, rispettivamente scarsa padronanza di quel fattore (e quindi necessità di recupero), sufficiente e ottima padronanza.

Costruzione dei profili

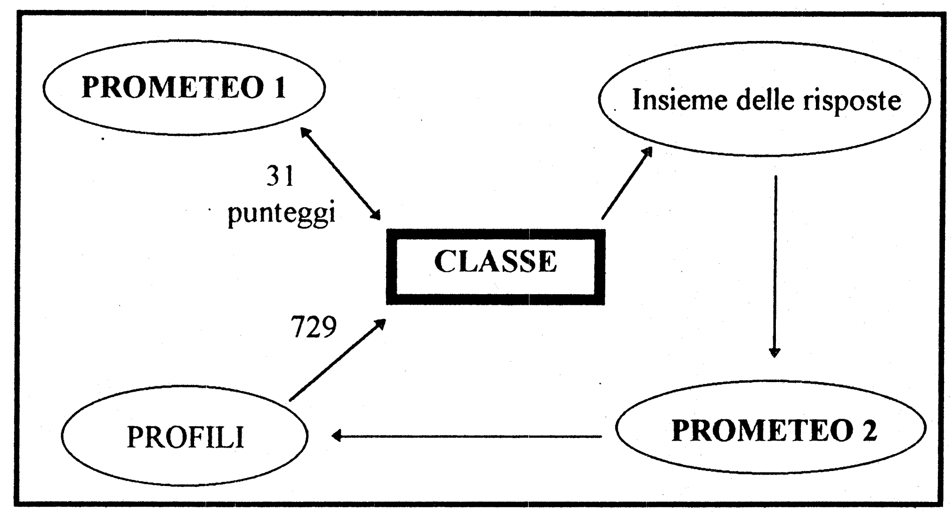
Dunque per ogni fattore vi sono tre livelli di misurazione ed essendo, nel caso dell'area logico-matematica, 6 i fattori, sono possibili 3^6=729 combinazioni di questi livelli.
Ognuna di queste combinazioni rappresenta un profilo cognitivo che viene associato all'insieme delle risposte che lo studente fornisce.

In tal modo si è giunti alla possibilità di classificare gli alunni di una classe attraverso 729 profili differenti che permette una discriminazione maggiore rispetto ai possibili 31 punteggi che forniva il Prometeo 1.

Software

Su questa base quantitativa è stato costruito un software che ha utilizzato gli stessi archivi di dati del Prometeo 1 e quindi su esso implementabile. Il docente, senza operazioni e tempo aggiuntivo, ottiene così ulteriori informazioni.

Schema riassuntivo



I materiali

I materiali che il docente può avere a disposizione è, oltre a quelli forniti dal software del Prometeo 1, quelli del Prometeo 2 che consistono in un profilo delle competenze dell'alunno e un quadro riassuntivo delle carenze presenti nella classe.

COMUNICAZIONI

Errori nei libri di testo

Mimmo Arezzo *

Parte prima : Considerazioni preliminari

Spinti anche dalla voglia di captare la benevolenza degli insegnanti, autori ed editori hanno recentemente posto maggiore attenzione nei riguardi dell'aspetto estetico del libro, che negli ultimi anni è generalmente assai migliorato, e delle attività complementari all'insegnamento, proponendo ogni sorta di schede di verifica, esempi di prove d'esame e persino lettere già scritte con le motivazioni della proposta di cambio del testo in adozione.

È invece diminuita, in molti casi, l'attenzione per la correttezza formale e gli errori concettuali gravi sono, nelle ultime edizioni, notevolmente aumentati in numero e gravità.

Scopo di questa comunicazione è quello di suscitare una maggiore attenzione nei confronti di questo importante problema, di aiutare gli insegnanti nell'individuazione degli errori e di guidarli nella utilizzazione degli stessi (quando è possibile!) in attività didattiche costruttive.

Quanto segue è estratto da una serie di miei articoli in corso di pubblicazione sul Periodico di Matematiche, l'organo nazionale della Mathesis.

Iniziamo osservando che gli errori, anche nei libri di Matematica, non sono sempre così oggettivi come si potrebbe pensare. Tanto per fare un esempio, la scelta fra le due definizioni :

Un trapezio è un quadrilatero con due lati paralleli

Un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli

potrebbe suscitare accesi e interessanti, ma sterili dibattiti. Naturalmente, è necessario che lo sviluppo successivo della teoria, compresi gli eventuali diagrammi di Venn, sia coerente con la definizione scelta.

Un'altra importante considerazione preliminare è che gli errori più gravi non sono necessariamente quelli legati a una frase sbagliata, ma piuttosto a una costruzione incongrua, a una scelta infelice, a una omissione che inficia un costrutto logico.

Ad esempio, alcuni insegnanti non trattano affatto i numeri periodici, determinando nell'alunno tutta una serie di interrogativi senza risposta :

a) perché una delle due divisioni 1:2 e 1:3 deve essere possibile e l'altra no ?

b) e se usassimo la base 6 ?

---

* Dipartimento di Matematica, Università di Genova

c) può l'eseguibilità di una operazione essere condizionata dalla rappresentazione dei numeri ?

e così via.

E anche quando i numeri periodici vengono trattati, capita che non ne venga chiarito adeguatamente il legame con i numeri razionali, intesi come classi di equivalenza di frazioni, mediante una scaletta del tipo

a) se si esegue la divisione sottintesa da una frazione si ottiene sempre un numero decimale limitato o periodico; si ha quindi una corrispondenza dall'insieme delle frazioni a quello dei numeri decimali limitati o periodici;
b) questa corrispondenza *passa al quoziente*, cioè a frazioni equivalenti corrisponde lo stesso numero decimale; essa induce quindi una corrispondenza dall'insieme dei numeri razionali all'insieme dei numeri decimali limitati o periodici;
c) questa corrispondenza è *iniettiva*, cioè a numeri razionali diversi corrispondono numeri decimali diversi (cioè a frazioni non equivalenti corrispondono numeri decimali diversi);
d) questa corrispondenza è anche *surgettiva* (e quindi è una corrispondenza biunivoca), cioè ogni numero decimale limitato o periodico è il corrispondente di un numero razionale;
e) le operazioni fra numeri decimali limitati e quelle fra i numeri razionali di cui sono i corrispondenti danno risultati corrispondenti.

Capire la necessità del quadro precedente non è difficile, quindi esso non va taciuto; sono laboriose le dimostrazioni. Per esse l'insegnante potrà limitarsi a quanto ritiene possibile; al limite (inferiore) insegnando soltanto a trovare una frazione generatrice per ciascun numero periodico.

E infine, un errore ben individuato può essere trasformato dall'insegnante in un'occasione preziosa per sviluppare il senso critico dell'alunno e per fissare con efficacia l'argomentazione corretta.

A questo intento è dedicata l'ultima parte di questa comunicazione.

Naturalmente, questa analisi non sarebbe significativa se non si dicesse che un libro che contiene troppi errori, e troppo gravi, non consentendo adeguate correzioni che salvaguardino l'alunno, soprattutto quello più debole, da guasti irreparabili, va accuratamente evitato.

Parte seconda : Un elenco di errori "no comment"

1. La successione ordinata dei numeri naturali è in corrispondenza biunivoca con **i punti equidistanti** di una retta.
2. Consideriamo due numeri naturali **divisibili fra loro**.
3. Se due frazioni sono equivalenti, sappiamo che rappresentano la stessa parte di grandezza, **quindi sono anche uguali**.
4. Nell'uso corrente, comunque, chiameremo numero razionale, o frazione, **una frazione qualsiasi irriducibile**.

5. Prima di effettuare qualsiasi operazione con le frazioni, **esse vanno ridotte ai minimi termini**.
6. La retta è il secondo ente fondamentale; possiamo immaginarla come **un insieme consecutivo e infinito di punti aventi sempre la stessa direzione**.
7. Disegnate una retta qualsiasi di un piano e dite qual è l'insieme di tutti i punti del piano **equidistanti** da questa retta.
8. Consideriamo tre punti qualsiasi A, B e C e disegniamo la retta che passa per questi tre punti. Ci accorgiamo subito che se i tre punti non sono *allineati*, non esiste alcuna retta che passi contemporaneamente per tutti e tre i punti. Diremo quindi che ***per tre punti passa una e una sola retta se sono allineati, nessuna in caso contrario***.
9. Un poligono equilatero ed equiangolo si dice regolare. Un poligono si dice irregolare quando ha **tutti gli angoli e i lati disuguali**.
10. Sono figure dotate di centro di simmetria tutte quelle in cui **le diagonali si bisecano e, ovviamente, il cerchio**.
11. Il principio di Archimede ci assicura che un solido immerso in un liquido **sposta una quantità di liquido pari al suo volume**.
12. Le due rette orientate perpendicolari prendono il nome di assi cartesiani ortogonali e, precisamente, **quello orizzontale** asse delle ascisse o asse x, **quello verticale** asse delle ordinate o asse y.
13. L'equazione della retta passante per i due punti $A(x_1;y_1)$ e $B(x_2;y_2)$ è data da $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
14. La retta a è tale che tutti i suoi punti appartengono al piano a : si dice che *la retta giace nel piano*. **Usando la simbologia insiemistica** scriveremo :
$$a\in\{\alpha\},\ \{a\}\subset\{\alpha\},\ \{a\}\cap\{\alpha\}=\{a\}$$
15. Il calcolatore è in grado di eseguire qualsiasi compito **purché adeguatamente programmato**.
16. Se vogliamo rappresentare quindi un determinato numero irrazionale **basterà scriverlo come somma di due quadrati perfetti, di cui uno uguale a 1**, e quindi costruire il triangolo rettangolo che ha come cateti la radice quadrata di questi numeri.
17. Come potrai leggere nella scheda storica alla fine di questa U.D., π è un numero trascendente, **ovvero un numero la cui parte decimale è infinita e non periodica**.
18. In seguito è stato dimostrato che π è un numero irrazionale, ma che non può essere rappresentato sulla retta usando riga e compasso, **per cui viene definito *numero trascendente***.

19. La tabella a doppia entrata è una tabella nella quale **ogni colonna è suddivisa in due colonne**.
20. Si dice che a un insieme A è stata data una struttura S, o semplicemente che l'insieme A è una struttura S, quando è definita tra i suoi elementi una relazione d'ordine R o **un procedimento che ne stabilisce un legame**.

Parte terza : Errori con commenti e spunti didattici

1. Sulla proprietà associativa (e dintorni).

Citazione. In pratica, data l'addizione

2+5+4 = 11

possiamo sostituire ai primi due addendi la loro somma già effettuata.

Per indicare l'applicazione di tale procedimento, chiudiamo fra parentesi i due addendi considerati:

2+5+4 = (2+5)+4 = 7+4 = 11

La proprietà applicata si chiama:

Proprietà associativa. **La somma di tre o più addendi non cambia se a due o più di essi si sostituisce la loro somma**.

Commento e proposta. L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni binarie o, per dirla in linguaggio più semplice, operazioni che riguardano due numeri per volta e che quindi il primo problema che ci si pone quando ci si trova di fronte a un'espressione del tipo 2+5+4 è quello di darle un significato. E il modo più naturale per farlo, se quell'espressione non scaturisce da un problema che suggerisca il contrario, è proprio quello di porre, per l'appunto,

2+5+4 = (2+5)+4

uguaglianza che quindi è vera per definizione e non per la proprietà associativa.

La corretta esemplificazione della proprietà associativa, quindi, non è quella presentata, ma la seguente

(2+5)+4 = 2+(5+4)

oppure, se è stata fatta la convenzione precedente,

2+5+4 = 2+(5+4)

Inoltre, l'enunciato verbale :

La somma di tre o più addendi non cambia se a due o più di essi si sostituisce la loro somma

attribuisce alla proprietà associativa anche la validità dell'uguaglianza 2+5+4=(2+4)+5 che dipende invece anche dalla proprietà commutativa :

(2+5)+4 = 2+(5+4) = 2+(4+5) = (2+4)+5

Si osservi, poi, che la cosiddetta *proprietà dissociativa* non è una proprietà a se stante, ma un procedimento di calcolo basato sulla proprietà associativa :

7+3 = (5+2)+3 = 5+(2+3) = 5+5 = 10

Infine, le proprietà delle operazioni vengono presentate (qualche volta, come abbiamo visto, in modo insoddisfacente) solo per l'insieme dei numeri naturali e

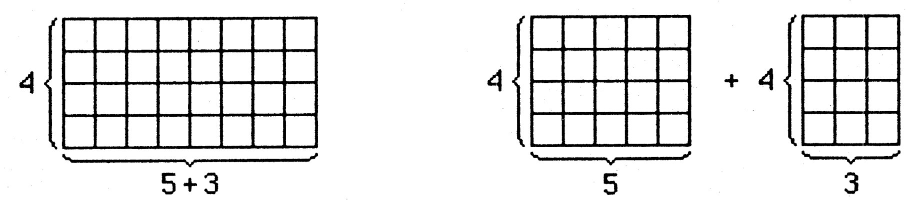
poi vengono assunte quando si parla di operazioni fra numeri razionali, decimali, relativi.

Qualcuno, addirittura, "dimostra" che $(-7)\cdot(-2) = +14$ basandosi su varie proprietà delle operazioni in Z, operazioni che sono invece in corso di definizione.

Nel caso dei numeri relativi, che è il più difficile, sarebbe sufficiente dire che *vogliamo che continuino a valere le proprietà x e y e quindi dobbiamo porre ...* per non far perdere allo studente il senso di quello che sta facendo.

Nel caso dei numeri assoluti, invece, si può utilmente fare riferimento alla rappresentazione dei numeri sulla retta, presente in quasi tutti i libri di testo, in un modo o nell'altro, ed utilizzarla per dare dell'operazione e della proprietà che si vuole dimostrare una interpretazione geometrica.

Per esempio, la dimostrazione della validità della proprietà distributiva in N basata su un disegno simile al seguente

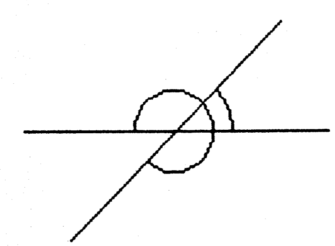


può facilmente essere estesa alle frazioni, o ai numeri decimali, una volta stabilito che questi rappresentano, al pari dei numeri naturali, lunghezze di segmenti.

2. Angoli opposti al vertice.

Citazione. Due angoli si dicono *opposti al vertice* se i loro lati sono uno il prolungamento dell'altro, ovvero semirette opposte.

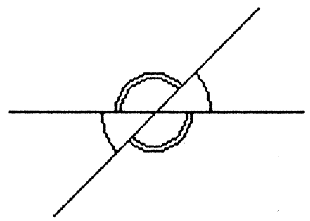
Commento e proposta. Il disegno seguente mostra implacabilmente che la definizione è sbagliata.



Inoltre l'espressione "... se i loro lati sono uno il prolungamento dell'altro" è poco felice, perché un angolo piatto ha i suoi stessi lati che sono l'uno il prolungamento dell'altro.

Un itinerario didattico per fissare adeguatamente la definizione corretta può essere questo :

- si disegna una figura del tipo



e si sollecita da parte degli alunni una definizione di coppia di angoli opposti al vertice;
- si guidano gli alunni, anche mostrando la figura precedente, alla definizione corretta :

Due angoli, entrambi concavi o entrambi convessi, si dicono opposti al vertice *se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.*

3. Sui numeri primi.

Citazione I. Per riconoscere se un numero è primo, lo dividiamo per i successivi numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, ..., senza tralasciarne alcuno.

Citazione II. Per stabilire se un numero è primo basta consultare le tavole numeriche che sono in fondo al testo e che riportano i numeri primi minori di 5000.

Commento e proposta. Questa volta non si tratta di un vero e proprio errore tecnico, ma della rinuncia a informare i ragazzi del fatto che capire se un numero è primo è un problema difficile. E così si determina una cascata di ipocrisie successive, perché l'alunno crederà che sia sempre facile scomporre un numero in fattori primi e quindi che sia sempre facile trovare il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo di due numeri, cercherà sempre di ridurre le frazioni ai minimi termini, cercherà di eseguire le operazioni fra numeri razionali cercandone il minimo comune denominatore, e così via.

Dichiarare invece la difficoltà del problema e guidare gli alunni a trovare, quando ce ne sono, strategie particolari, sarebbe certamente più corretto e formativo.

Ad esempio, se si cerca il massimo comun divisore dei numeri 5041 e 3195, la determinazione dei fattori primi del primo numero si presenta complicata, ma quella del secondo è relativamente semplice:

$3195 = 3 \cdot 1065 = 3^2 \cdot 355 = 3^2 \cdot 5 \cdot 71$

e siccome 5041 non è divisibile né per 3 né per 5, basterà controllare se è divisibile per 71. Se lo è, il massimo comune divisore cercato è proprio 71, altrimenti è 1, cioè i due numeri sono primi fra loro.

Ma si può "aguzzare l'ingegno" anche in altri modi. E' relativamente facile osservare che se a è uguale a b il massimo comun divisore di a e b è a e che se

a>b le coppie (a,b) ed (a–b,b) hanno gli stessi divisori comuni e quindi lo stesso massimo comun divisore. Ma allora si può sostituire il numero più grande con la differenza fra il più grande e il più piccolo, e poi continuare a farlo finché i due numeri non diventino uguali, e allora il valore comune è il massimo comun divisore cercato.

Nell'esempio dei numeri precedenti si ha

MCD(5041,3195) = MCD(3195,1846) = MCD(1846,1349) =
= MCD(1349,497) = MCD(852,497) = MCD(497,355) =
=MCD(355,142) =MCD(213,142) = MCD(142,71) = MCD(71,71) = 71

Questo metodo per calcolare il massimo comun divisore di due numeri ha il vantaggio di consentire il calcolo anche quando non si sa scomporre in fattori primi nessuno dei due numeri, ma può essere assai laborioso. Basta immaginare di applicarlo al caso dei numeri 1.000.000 e 1, per capire che il numero delle differenze da calcolare prima di ottenere due numeri uguali può essere molto elevato.

Tutto ciò può essere un'ottima premessa all'algoritmo di Euclide, che può essere introdotto così:

Se a>b, non soltanto le coppie (a,b) e (a–b,b) hanno gli stessi divisori comuni, ma anche le coppie (a,b) e (a–bc,b), quale che sia c, purché sia a>bc.

Ma allora per calcolare il massimo comun divisore di a e b possiamo calcolare quello di a–bq e b, dove q è il massimo intero tale che a>bq. In sostanza eseguiamo la divisione con resto a = bq+r ($0 \le r < b$) e calcoliamo il massimo comun divisore di b ed r. E naturalmente possiamo iterare il procedimento come abbiamo fatto prima fino ad ottenere due numeri, a e bq, uguali.

Il loro valore comune è allora il massimo comun divisore cercato.

Chi ha possibilità e buona volontà ha a questo punto in mano tutti gli strumenti per uno splendido esempio di programma da far girare in qualsiasi calcolatore:

```
10 INPUT "a = ",a:IF a<2 OR a<>INT(a) THEN 10
20 INPUT "b = ",b:IF b<2 OR b<>INT(b) THEN 20
30 c=a:d=b
40 r=c–INT(c/d)*d
50 IF r=0 THEN PRINT "Il massimo comun divisore di ";a;" e ";b;" è
   ":d:GOTO 10
60 c=d:d=r:GOTO 40
```

Si notino nelle righe 10 e 20 i controlli che i numeri immessi siano interi e maggiori di 1, mentre le assegnazioni della riga 30 servono per potere scrivere il risultato come previsto dalla riga 50, visto che i valori immessi vengono successivamente modificati secondo le righe 40 e 60.

Resoconto su ICME 8

Bruno D'Amore *

Si intende con la sigla ICME l'Internacional Congress on Mathematical Education cioè il Congresso Internazionale sulla Educazione Matematica, che si svolge ogni 4 anni.

L'ICME ha un *Comitato esecutivo internazionale* attualmente composto da 4 membri:

Presidente: Miguel de Guzman (Spagna)

Vice: Jeremy Kilpatrick (USA)

Vice: Anna Sierpinska (Canada)

Segretario: Mogens Niss (Danimarca).

ICME 8 si è svolto a Sevilla nei giorni 14-21 luglio 1996; in questa occasione le lingue ufficiali erano: inglese e spagnolo (ma era gradito anche il francese).

L'elenco dei partecipanti a ICME 8 si può così riassumere:

programma scientifico (cioè persone implicate in relazioni o altro): 756 (dei quali 16 italiani)

la lista generale (al 7 di luglio) comprendeva: 3672 partecipanti (dei quali 56 italiani).

Il totale generale dei partecipanti è stato valutato attorno ai 4000 circa, mentre i Paesi partecipanti sono stati circa 80. Ciò ha creato un clima molto interessante sul piano degli scambi scientifici ed umani. Far parte di una comunità così ricca e variegata accresce la solidarietà e l'entusiasmo.

Nell'àmbito di ICME 8 vi sono state svariatissime attività che elenco.

Conferenze generali (4):

Anna Sierpinska (Canada): *Dove va l'Educazione Matematica?*

Miguel de Guzmán (Spagna): *Sul ruolo del matematico nella Educazione Matematica*

David Tall (UK): *Tecnologia informatica ed Educazione Matematica, possibilità e realtà*

Jan de Lange (Olanda): *Problemi reali con la matematica del mondo reale.*

Conferenze ordinarie (56, delle quali 7 di studiosi degli USA, 6 Spagna, 4 Germania, 4 Francia, eccetera. 1 all'Italia: Mariolina Bartolini Bussi).

---

* Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Gruppi di lavoro: 26, ciascuno con un Chief Organizer (Responsabile): 4 affidati a studiosi degli USA, 3 Israele, 2 Germania, 2 Olanda, 2 Canada, 2 Australia, eccetera. 1 all'Italia: Nicolina Malara.

Gruppi tematici: 26, ciascuno con un C.O.: 3 affidati a studiosi di Francia, 3 Australia, 3 Germania, 2 USA, 2 UK, 2 Canada, 2 Finlandia, eccetera. 1 all'Italia: Bruno D'Amore.

Gruppi permanenti di lavoro (4):

Gruppo Internazionale di Psicologia dell'Educazione Matematica

Gruppo Internazionale di studio sulle relazioni tra storia e pedagogia della matematica

Organizzazione internazionale Donne ed Educazione Matematica

Federazione internazionale Competizioni Nazionali di Matematica

Seminari ICMI di studio: 3, uno dei quali affidato a Vinicio Villani (*Prospettive dell'Insegnamento della Geometria nel secolo XXI*) (Ricordo che su questo tema si sono fatti incontri preliminari, per esempio l'incontro ICMI a Catania, 28 settembre - 2 ottobre 1995, con pubblicazione di Atti a cura di Carmelo Mammana).

Presentazioni nazionali:

Spagna, Australia, Ungheria, ..., Italia.

In questa occasione l'Italia ha presentato volumetti:

1. UMI-CIIM (a cura di C. Bernardi e F. Arzarello), *Educational System and Teacher Training in Italy*
2. Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica (a cura di: N. Malara, M. Menghini e M. Reggiani), *Italian Research in Mathematics Education*.

Entrambi sono disponibili (fino ad esaurimento); il primo si può richiedere alla CIIM, presso l'UMI; il secondo si può richiedere ad uno qualsiasi dei tre curatori.

Sessioni speciali (4, tre delle quali a carattere storico; l'altra era l'assemblea della Società Andalusa di Educazione Matematica).

Comunicazioni brevi: 685, con brevi riassunti riuniti in un volume a disposizione già dal primo giorno del Congresso.

Presentazioni di progetti didattici: 10.

Esposizioni di progetti: 10.

Varie esposizioni commerciali e non commerciali.

Workshop: 9.

Incontri vari: 19; per esempio: Incontro tra i direttori di riviste di didattica della matematica; incontri di varie altre Associazioni a carattere internazionale.

Al di là dei dati numerici, la cosa più produttiva è senz'altro stata quella di incontrare colleghi di tutto il mondo, stabilendo contatti che potrebbero avere intressanti ripercussioni. Sarà stata l'Andalusia, terra famosa per l'ospitalità e la cortesia, ma il *clima* che si respirava era quello di un entusiasmo contagioso. Qualche piccolo problema organizzativo non ha sollevato che garbate polemiche, soprattutto per quanto concerne difficoltà di comprensione da parte di persone non tropo avvezze a sentir parlare lingue diverse dalla propria.

A proposito di *clima*, un pomeriggio alle 14 un termometro lungo il viale dell'Università è stato visto segnare 49°; io personalmente però ho potuto osservare "solo" un 47° un altro giorno. Il che spiega gli orari di lavoro: la mattina e la sera, con lunghe *sieste* pomeridiane.

Molti i Giapponesi presenti; ciò si spiega soprattutto con il fatto che ICME 9 si terrà a Tokio nell'agosto del 2000.

Dalle costruzioni geometriche al rigore linguistico: un'esperienza didattica all'inizio del biennio

Carla De Santis (Roma) - Zelinda Percario (Grosseto)

Sicuramente è successo a tutti di constatare che gli alunni non sono in grado di esprimere in modo rigoroso i vari concetti di matematica (ma anche di altro) pur riconoscendoli nell'ambito di un problema, di una situazione nella quale invece sono poi capaci di realizzare, anche con prontezza, strategie di risoluzione. A questo scopo abbiamo realizzato alcune schede di lavoro da proporre agli alunni all'inizio della Scuola superiore: l'idea base consiste nel fatto che gli alunni, attraverso attività manuali di disegno, modifica e osservazioni su una figura imparino a definirla e a individuarne le proprietà.

Questa attività si colloca all'inizio del biennio proprio perché questo è il momento del passaggio dalla fase intuitiva a quella del rigore concettuale: lo scopo però non è quello di abbandonare l'intuizione per il rigore, ma di utilizzarla per conquistare la precisione del linguaggio. Ci sembra, secondo la nostra esperienza, che gli alunni a questo livello di Scuola, pur conoscendo le figure geometriche, non hanno familiarità con le proprietà particolari di esse, cioè non sempre sanno evidenziare le differenze specifiche da esprimere nelle definizioni, da usare nelle costruzioni: anche se sanno riconoscere le proprietà che diversificano le figure non vedono la stretta connessione che esiste tra l'aspetto tecnico della costruzione e quello teorico delle definizioni. D'altra parte spesso si constata che gli alunni realizzano nella loro mente diverse rappresentazioni successive legate ad un concetto, seguono cioè una via di approssimazioni sempre più precise prima di arrivare ad una comprensione che sia lucida, stabile, matematicamente giusta. Ci rendiamo conto inoltre che il linguaggio matematico esige concisione e precisione: questo rende i testi particolarmente "densi" di significato e quindi di lettura molto difficile, anche perchè tale lettura non corrisponde alle abitudini linguistiche degli alunni di questo livello. Con questo lavoro vogliamo aiutarli ad acquistare la capacità di collegare immagini e definizioni utilizzando le proprietà particolari delle figure, vogliamo cioè proporre condizioni per instaurare situazioni che mirino all'apprendimento di un linguaggio che sia appropriato e preciso rispetto alle proprietà da riconoscere e da esprimere.

Si è pensato quindi di predisporre un lavoro semplificando e trattando anche parzialmente argomenti, senza per altro denaturarne i concetti, con lo scopo di chiarire gli elementi essenziali da puntualizzare nelle definizioni.

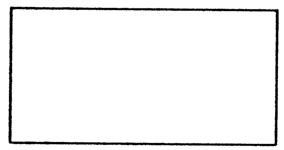
Sui triangoli, dopo alcune schede introduttive, proponiamo costruzioni ad esempio di questo tipo:

> Disegna, quando è possibile, un triangolo
> a) isoscele rettangolo;
> b) equilatero rettangolo;
> c) isoscele equilatero;
> d) ....

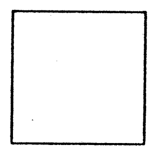
Gli alunni devono riflettere sulla doppia aggettivazione e questo all'inizio non è stato per tutti molto facile.

Sui quadrilateri si sono preparate delle schede che hanno l'intento di portare gli alunni a riflettere sulle proprietà caratteristiche specifiche: si sono sottolineate le differenze tra quadrato, rombo, rettangolo, parallelogramma, trapezio rispetto alle proprietà dei lati, degli angoli, delle diagonali con schede di questo genere:

La figura disegnata è un rettangolo
Osservala attentamente: gli angoli sono tutti retti? si/no
I lati opposti sono uguali/disuguali



La figura disegnata è un quadrato
Sia il rettangolo sia il quadrato possiedono quattro lati e quattro angoli.
Che cosa distingue un quadrato da un qualsiasi rettangolo?
I lati del quadrato sono tutti ....



Concludendo:
Il quadrato ha quattro angoli .... e quattro lati ....
Il rettangolo ha quattro angoli .... e i lati opposti ....
Il quadrato è rettangolo? si/no
Il rettangolo è quadrato? si/no

Vedi disegnato un quadrato ABCD formato con le aste di un meccano:

Se con la stessa intensità comprimi il quadrato nei punti A e C, indicati con le frecce, nella direzione AC, i segmenti AO e OC diminuiranno nella loro lunghezza, ma resteranno uguali fra loro (vedi fig. 2).

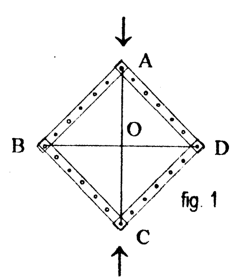


fig. 1

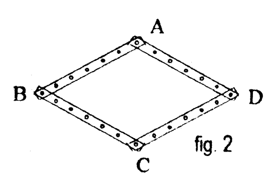


fig. 2

Le diagonali sono ancora uguali fra loro? si/no
I lati della figura 2 sono uguali/disuguali
La figura 2 è un rombo? si/no
Ti pare che si possa dire: "il rombo è un quadrilatero con i lati tutti uguali"? si/no
Il quadrato ha tutti i lati uguali: possiamo affermare che il quadrato è un rombo? si/no
Possiamo dire che il rombo è un quadrato? si/no
Dal modo in cui è stato costruito il rombo puoi dedurne che le diagonali sono perpendicolari? si/no

Considera il rettangolo ABCD costruito con i pezzi del meccano nella fig. 1:
I lati opposti sono ....e sono ....
Gli angoli sono ....
Le diagonali sono ....

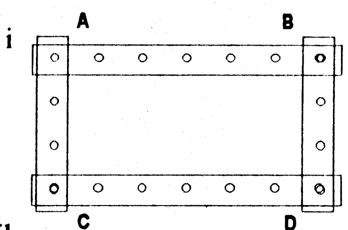


fig.1

Nel vertice A si spinge l'asta AB secondo il verso indicato dalla freccia: ottieni un parallelogramma (fig. 2):
I lati opposti sono uguali? si/no
I lati opposti sono paralleli? si/no
Gli angoli sono tutti uguali? si/no
Le diagonali sono uguali? si/no
Il rettangolo è un parallelogramma? si/no
Il parallelogramma è un rettangolo? si/no
Il quadrato è un parallelogramma? si/no
Il parallelogramma è un quadrato? si/no
Il rombo è un parallelogramma? si/no
Il parallelogramma è un rombo? si/no

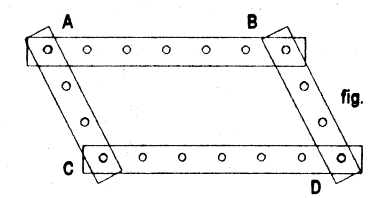


fig. 2

Nel seguente eserizio si chiede collegare proprietà e figure :

il quadrilatero	rettangolo	parallelo-gramma	quadrato	rombo	trapezio
è sufficiente che abbia una coppia di lati uguali per essere					
è necessario che abbia una coppia di lati paralleli per essere					
è sufficiente che abbia due coppie di lati paralleli per essere					
è sufficiente che abbia le diagonali uguali per essere					
è sufficiente che abbia le diago-nali perpendicolari per essere					

Ancora a proposito dei quadrilateri sottolineiamo che in questo lavoro essi sono stati presentati agli alunni a partire dal quadrilatero più particolare (il quadrato) fino ad arrivare al trapezio procedendo con la diminuzione dei vincoli sulla figura, mettendo in risalto il fatto che al diminuire dei vincoli la figura ha un numero sempre minore di proprietà: ci si avvia così al concetto di invariante. Ci è stata utile la costruzione dei quadrilateri realizzata con i pezzi del meccano: è significativo il passaggio da un quadrato ad un rombo, da un rettangolo ad un parallelogramma agendo sui nodi che collegano le aste che raffigurano i lati, dando libertà a tali collegamenti.

Abbiamo proposto una scheda finale con richieste di questo tipo:

a) costruisci il quadrato di cui sia assegnato il segmento AC che ne sia la diagonale. Descrivi il procedimento seguito;

b) costruisci un rombo di cui sia assegnato un lato AB. Descrivi il procedimento seguito;

c) costruisci il parallelogramma del quale siano assegnati tre vertici A, B, C. Descrivi il procedimento seguito;

d) ecc. ecc.

Questo tipo di esercizio ha l'intento di far riflettere l'alunno sulle proprietà delle figure utilizzandole in maniera ragionata secondo le costruzioni richieste; è essenziale che egli dia la spiegazione della costruzione per poter valutare con quanta consapevolezza sono state utilizzate le proprietà conosciute e per rendersi conto se invece l'alunno ha ripensato staticamente alle figure , percorrendo un processo mentale alla rovescia di quello da noi voluto.

Osserviamo che in una precedente esperienza avevamo proposto agli stessi alunni di realizzare una costruzione geometrica seguendo delle informazioni da noi indicate: può anche darsi che avessimo scelto un esempio un po' complesso, ma il risultato fu molto scoraggiante : alla fine di questo lavoro gli alunni sono stati più consapevoli nell'affrontare lo stesso tipo di esercizio.

Le richieste di costruzioni come sono state proposte in quest'ultima scheda possono essere utilizzate significativamente anche come approccio al " cabri " e diventano un'occasione importante per accostarsi all'uso del computer all'inizio del biennio.

Un'esperienza di "laboratorio di matematica"

Grazia Grassi - Aurelia Orlandoni
Paola Nanetti - Cristina Silla (Bologna)

1. Descrizione dell'esperienza

Nel 1993 l'IRRSAE-ER ha proposto ad un gruppo di insegnanti di scuola elementare, media e del biennio di scuola superiore un'esperienza di aggiornamento-ricerca con lo scopo di mettere in rilievo i vantaggi di un insegnamento basato su un'attività di "Laboratorio" rispetto a quello più legato alla trasmissione diretta delle conoscenze da parte dell'insegnante. L'idea iniziale della prof. A. De Flora è stata poi coordinata e portata a conclusione dalla prof. A. M. Arpinati.

L'adesione da parte nostra, insegnanti delle superiori, è stata motivata dall'esigenza sia di conoscere più a fondo le problematiche relative all'insegnamento della matematica negli altri livelli di scuola sia di costruire un legame fra metodi e contenuti propri della scuola media inferiore e del biennio delle superiori. La partecipazione ha inoltre rafforzato la nostra convinzione che la miglior forma di aggiornamento sia un'attività di ricerca finalizzata alla costruzione di un percorso didattico sperimentabile in classe, i cui risultati siano confrontati e discussi tra tutti i docenti partecipanti.

Nella fase iniziale gli insegnanti si sono confrontati sui significati e sulle peculiarità del "Laboratorio di matematica" nei vari ordini della scuola. In particolare è emerso che, se nella scuola media per laboratorio si intende un'attività legata più ad un'esperienza concreta di tipo manipolativo e/o operativo, nel biennio della scuola superiore è necessario passare ad un'attività di laboratorio prevalentemente informatico che porti gli studenti ad acquisire la capacità di costruire modelli e di generalizzare proprietà e regole.

Il nostro gruppo ha individuato come argomento che rispondesse all'esigenza di costruire una continuità con l'uso del laboratorio nella scuola media l'introduzione al concetto di funzione, tema portante nei nuovi programmi di matematica. Inoltre nella scuola media l'argomento viene prevalentemente trattato a livello di scienze sperimentali, abbiamo quindi pensato di partire proprio dalle funzioni empiriche e dalla rappresentazione di dati statistici per introdurre il concetto di funzione in modo rigoroso.

Gli obiettivi che ci siamo proposti sono stati:

1) favorire la creatività e l'autonomia nel lavoro

2) stimolare il confronto e la critica propositiva
3) condurre alla capacità di astrarre e generalizzare.

A partire da un approccio euristico, il percorso didattico si sviluppa in modo da consentire allo studente di compiere il passaggio dal concreto all'astratto attraverso un'attività di laboratorio prima con carta e penna, poi prevalentemente di tipo informatico. Gli strumenti usati sono stati il foglio elettronico in una prima fase e successivamente un linguaggio di programmazione.

La scelta metodologica di fondo è stata quella di proporre un lavoro, ora per gruppi ora individuale, che producesse una discussione i cui risultati trovassero poi una sistemazione formale in un intervento, possibilmente breve, dell'insegnante. Ogni proposta di attività è stata strutturata secondo la sequenza:

- analisi del problema
- formulazione dell'ipotesi risolutiva
- sviluppo attuativo dell'ipotesi stessa
- verifica delle ipotesi.

Sulla base dell'esperienza realizzata possiamo affermare che questo lavoro ha realmente favorito negli studenti lo sviluppo:

- della creatività, dell'autonomia e dell'abitudine al confronto con gli altri;
- della capacità, di fronte a situazioni problematiche, di motivare le affermazioni, avviandoli all'acquisizione di un linguaggio specifico rigoroso;
- dell'abitudine a individuare , tra risposte ugualmente corrette, la soluzione più adeguata perché più sintetica.

Questi risultati sono di particolare importanza nel biennio in cui gli studenti devono effettuare il passaggio dal concreto all'astratto, solo tentato nella terza media, attraverso la motivazione e poi la dimostrazione sempre più rigorosa delle affermazioni.

In una fase successiva il materiale è stato rielaborato sulla base dei risultati ottenuti dalle classi ed è stato acquisito come parte integrante nei programmi delle scuole dove lavoriamo.

2. Sintesi del percorso didattico

"La funzione delle funzioni ... quando funzionano!"

Il percorso didattico è stato articolato nelle seguenti fasi:

1. *Dal problema alla definizione dei diversi tipi di rappresentazione* - Si propongono varie situazioni e si chiede di darne una rappresentazione grafica: variazioni di prezzo nel tempo, popolazione residente in Italia divisa per regioni, crescita di una pianta nel tempo, ecc. .

2. *Dalla definizione dei vari tipi di rappresentazione ai loro adeguati ambiti di utilizzo* - Si chiede di rappresentare un grande numero di dati e individuare il tipo di rappresentazione più idoneo per il problema in esame.

Scheda 2

Abbiamo ricevuto dal giornale "Il Resto del Carlino" l'incarico di aiutarli nella stesura di un articolo sulla composizione della popolazione italiana e sulle sue variazioni negli anni.

- Osserva la prima tabella, completala e rappresenta la popolazione complessiva per regioni; successivamente rappresenta la popolazione per regioni suddivisa in maschi e femmine: (usa tipi di grafici diversi altrimenti l'articolo risulta monotono!) e, alla fine, scrivi un commento. Riporta le elaborazioni e i commenti negli spazi appositi.
- Rappresenta con un altro tipo di grafico (ma nello stesso grafico) la variazione nel tempo e procedi come per la prima tabella.

L'ITALIA IN CIFRE

POPOLAZIONE RESIDENTE (per sesso)
AL 12° CENSIMENTO GENERALE
25.10.1981 (dati assoluti in migliaia)

REGIONI	MASCHI	FEMMINE	TOTALE
Emilia-Romagna	1918	2040	
Abruzzo e Molise	756	790	
....	...	...	...

POPOLAZIONE ITALIANA CENSITA
DAL 1861 AL 1981, PER SESSO (dati in migliaia)

ANNI	MASCHI	FEMMINE
1861	13399	12929
1871	14316	13835
...	...	...
1981	27506	29051

3. *Quale tabella per il grafico XY?* - Si propongono situazioni problematiche rappresentabili mediante un grafico XY e si chiede di fare previsioni sull'andamento del grafico.

Scheda 3A

1) Questi fenomeni, conoscendone i dati, potrebbero essere rappresentati in un grafico xy ? Che senso ha congiungere i punti ? In quali casi esiste una legge che lega algebricamente fra loro le variabili ? Che ipotesi fai sull'andamento del grafico corrispondente?

a) Temperature di un malato al passare del tempo, nell'ipotesi che:
- la temperatura venga registrata da uno strumento istante per istante,
- la temperatura venga misurata alle 5, alle 11, alle 16 e alle 23.

b) L'incasso giornaliero di un teatro al variare del numero di spettatori.

c) Il voto riportato dai singoli alunni di una classe nell'ultimo compito di matematica.

d) Il numero di auto Fiat vendute nei 12 mesi dell'anno 93.

e) Il ricavo totale di una ditta che vende un prodotto al prezzo unitario p al variare dei pezzi venduti.
Cambierebbe se fosse un prodotto venduto a peso (ad esempio farina) ?

2) Considera le seguenti tabelle e rispondi alle domande :

A)

peso (Kg)	costo (migliaia)
1	1.5
...	...
4	6

- Quanto costa la merce al Kg ?
- Si può trovare la formula che lega il costo al peso ? Se sì qual è ?

B)

t (h)	(S Km)
0	0
1	90
...	...
7	630

- A quale velocità si muove il corpo ?
- Si può trovare la formula che lega S a t ? Se sì qual è ?

C)

ore a Bologna	T in °C
5	5
8	11
...	...
23	6

- Si può trovare la formula che lega T alle ore? Se si qual è ?

4. *Dal problema al modello algebrico* - Si propongono problemi formalizzabili nella forma y = f(x) con funzioni lineari, quadratiche e di proporzionalità inversa.

1 - SITUAZIONE

Ho deciso di comperare un tappeto e un lampadario per rendere più accogliente la mia camera. Per quanto riguarda il lampadario ne ho visto uno piuttosto economico che costa £. 120'000, per il tappeto, che mi serve quadrato, la mia amica Paola mi ha consigliato per risparmiare di rivolgermi a un rivenditore di moquette e farmene ritagliare un pezzo su misura,in questo modo il tappeto viene a costare £ 5'000 al m^2.
Inoltre la mamma mi ha suggerito di contornare il tappeto con un bordo colorato che costa £ 10'000/m.
Le mie risorse finanziarie sono piuttosto limitate e vorrei esaminare le spese sulla base delle varie condizioni di acquisto, rinunciando, di volta in volta, a qualcosa.
Come posso prevedere la spesa ?
Viste le limitate disponibilità finanziarie potrei decidere di rimandare gli acquisti ad uno dei prossimi anni, ma dovrò fare i conti con la variazione dei prezzi . Vorrei riuscire a generalizzare il piano di spesa, indipendentemente dai prezzi.

2 - ANALISI

A) Individua le variabili e costruisci una tabella, scegliendo valori $\in$ N.
B) Quale relazione intercorre tra le variabili ? Riesci ad individuare una legge matematica che lega le variabili ?
C) Rappresenta graficamente i dati delle tabelle
D) Nei problemi che hai incontrato, avrebbe significato attribuire valori $\in$Q ? E valori $\in$R ?

3 - FORMALIZZAZIONE E GENERALIZZAZIONE

Situazione	Formalizzazione	Generalizzazione
tappeto	$y = 5000\ x^2$	$y = ax^2$
tappeto+lampadario	....	$y = ax^2+c$
tappeto+bordo		$y = ax^2+bx$
tappeto+bordo+lampadario		$y = ax^2+bx+c$
lampadario		$y = c$

4 - SVILUPPO E VERIFICA CON UN FOGLIO ELETTRONICO

Riprendi il problema 1 della **scheda 4** (tappeto-lampadario).
Riprendi la legge del costo in funzione dell'acquisto che voglio fare e rappresentala.

1° caso - Acquisto solo il tappeto (£ 5'000 al m^2)
y = spesa in £ x = lato del tappeto in m.
y $\in$ .... x $\in$ ....
legge: y = ...

5. *La funzione lineare* - Facendo riferimento alla funzione lineare y = mx+q, si chiede di esaminare come varia il grafico al variare dei parametri m e q.

6. *Sistemi di funzioni lineari* - Viene affrontato il problema della posizione reciproca di due rette nel piano.
7. *La funzione della proporzionalità inversa* - Facendo riferimento alla funzione $xy = k$, si chiede di esaminare come varia il grafico al variare del parametro k.
8. *La funzione quadratica* - Facendo riferimento alla funzione $y = ax^2 + bx + c$ si chiede di analizzare come varia il grafico al variare di a, b, c.

Scheda B4

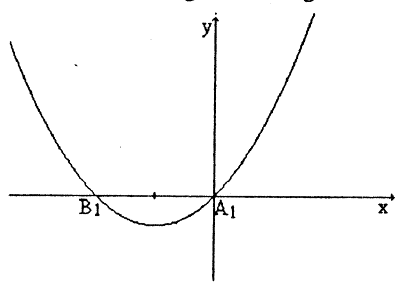
LA FUNZIONE QUADRATICA (3° parte)

Considera la funzione: $y = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in R$

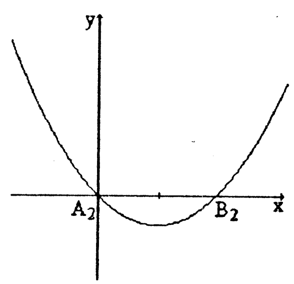
Sia $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$, cioè $y = ax^2 + bx \quad a, b \in R$

A) Fissa $a > 0$, per esempio $a = 3$.

- Attribuisci al parametro b i seguenti due valori, opposti tra loro: $b = -2$, $b = 2$.
- Scrivi, qui di seguito, le equazioni delle due parabole ottenute:
  y = ... y = ...
- Esamina i seguenti due grafici:



1



2

- Associa a ciascun grafico la corrispondente equazione della parabola:
  grafico 1) .... grafico 2) ....
- Osservando i due grafici, rispondi per ciascuna funzione ai seguenti quesiti:
  - In quali punti il grafico interseca l'asse x ?
    A_1 (...,....) B_1 (.....,....) A_2 (...,....) B_2 (.....,....)
  - L'asse y è asse di simmetria per il grafico in esame? Perchè?........................
  - Traccia l'asse di simmetria, scrivine l'equazione corrispondente e individua le coordinate del punto in cui la curva interseca tale retta (vertice):
    x_1 =........ V_1 (.....,.....)
    x_2 =....... V_2 (.....,....)
  - Qual è il legame tra la x del vertice e la x dei punti di intersezione della parabola con l'asse x ? ....
  - Riesci ad esprimere la x del vertice in funzione dei parametri a e b ?
    ....
  - Cosa osservi circa il segno delle intersezioni con l'asse x ? In che modo dipendono da b ?...

Bibliografia minima

Cannizzaro L., Laboratorio matematico, *Riforma della scuola* Editori Riuniti, n.2, '77

D'Amore B., Imparare in laboratorio, *Riforma della scuola*, Prima parte n. 11, novembre '90; seconda parte n. 1-2, gennaio '91; Terza parte n.5, maggio '91; quarta parte n.9, settembre '91

De Flora A., Il laboratorio di matematica orientato all'alunno, *Matematica nella scuola primaria a cura di A. De Flora*, IRRSAE-ER, Nicola Milano editore

Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli

La Torre M., Per trasformare la scuola in ambiente di apprendimento, *da "Viaggio a Matelandia" matematica fra rigore e fantasia a cura di G. Aloisio*, '90, F. Angeli editore

IRRSAE-ER (a cura di A. Orlandoni), Il Laboratorio di Matematica, '95, Synergon editore

Fare geometria con software didattico

Un metodo per realizzare la continuità

Franca Noè - Giuliana Bettini (Bologna)

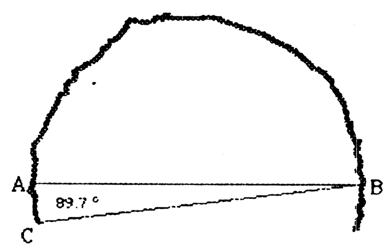
Avviare un discorso ipotetico deduttivo nell'insegnamento della geometria al biennio si rivela, per la nostra esperienza, spesso difficoltoso: per aiutare i ragazzi a passare gradualmente dalla "osservazione" alla "dimostrazione" riteniamo sia didatticamente valida la strategia di fare geometria come attività di laboratorio informatico. A questo proposito si può far ricorso a software didattici come Cartesio, Get, Cabri-géomètre, Sketch-Pad. Soprattutto gli ultimi due citati si rivelano particolarmente efficaci nell'insegnamento della geometria euclidea in quanto permettono di simulare con facilità le costruzioni con "riga e compasso" e consentono successivamente di deformare le figure per osservarne proprietà e invarianze; nella media inferiore, l'insegnante limiterà l'attività alla descrizione, nel biennio superiore i ragazzi verranno indotti a giustificare le loro osservazioni. Abbiamo avuto la possibilità di conoscere e apprezzare in particolare le potenzialità del software Cabri-géomètre: esso è "uno strumento virtuale che può evolvere e trasformarsi in funzione del livello di conoscenza e di pensiero dell'utilizzatore. Per un bambino sarà una matita, una riga, un compasso, una gomma.....Per un ragazzo più grande, infine, sarà anche uno strumento di inattesa e sorprendente capacità intellettuale: un costruttore di luoghi geometrici." (Gianni Zanarini). L'IRRSAE Emilia Romagna diffonde il bollettino CABRIRRSAE su cui vengono pubblicate esperienze didattiche realizzate con Cabri da docenti di ogni ordine di scuola; nella nostra attività all'interno del comitato di redazione, abbiamo visionato un gran numero di lavori e da varie esperienze che trattano gli stessi argomenti in diversi ordini di scuola, abbiamo desunto possibili percorsi didattici atti a realizzare una continuità di discorso dalle inferiori alle superiori. Abbiamo privilegiato le esperienze sui luoghi geometrici poiché, a nostro parere, pur essendo il luogo di punti uno dei concetti più trascurati nell'insegnamento della geometria nella scuola media inferiore e nel biennio, le possibilità di lavoro offerte da Cabri si prestano in modo particolare a fare da raccordo fra i due livelli scolastici. Infatti la dinamicità di Cabri permette di scoprire in modo sperimentale i luoghi geometrici fondamentali e poi di realizzare e reiterare in tempi brevi la costruzione di curve dando possibilità di acquisire familiarità con le loro proprietà caratteristiche. Nel percorso didattico che presentiamo utilizziamo materiale pubblicato su CABRIRRSAE integrato da nostre osservazioni e proposte. Per la scuola media inferiore proponiamo una serie di esperienze che possiamo intitolare

"Alla scoperta dei luoghi geometrici"; alcune di esse offrono l'aggancio per riprendere e approfondire il discorso nel biennio superiore per il quale presentiamo alcune attività che potremmo intitolare "Costruzioni con Cabri-géomètre".

Alla scoperta dei luoghi geometrici

(asse, bisettrice, circonferenze, rette parallele e coniche)

1) **Da "A proposito di triangoli rettangoli..."** (*sezione* Cabriole *del* CABRIRRSAE *n.9*)



«Si chiede di tracciare un triangolo ABC, di misurare il segmento BC e l'angolo A, e di manipolare la figura fino ad avere BC lungo 20 e il triangolo ABC rettangolo in A. Si propone quindi di muovere il punto A cercando di mantenere l'angolo A di 90 gradi e, per vedere tutte le posizioni possibili di tali punti A, si propone di utilizzare l'opzione traccia che ci darà la "traccia" lasciata da A durante il suo spostamento.

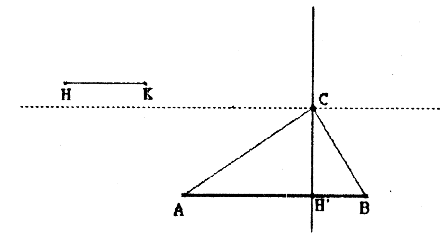
Da tutto questo si ricava una immagine sul video come la precedente e un "disegno" che si può osservare e studiare nelle sue caratteristiche: una volta identificata questa circonferenza di diametro BC, la si può costruire e si può in seguito verificare, muovendo A sulla circonferenza, che l'angolo A è retto per tutti i punti della circonferenza. L'occasione serve, dopo questi movimenti un po' pietosi, per introdurre il "legame" del punto A con la circonferenza, al fine di riprendere, in modo questa volta soddisfacente, lo spostamento di A e una nuova "verifica".»

Procedendo in modo analogo possiamo scoprire come luoghi l'asse di un segmento (si chiede di tracciare un triangolo isoscele, di misurarne i lati, di manovrarne il vertice in modo che il triangolo resti isoscele; studiare la traccia lasciata dal vertice), la bisettrice di un angolo (si disegna un angolo, si cerca un punto interno all'angolo che abbia distanze congruenti dai lati; si muove il punto in modo da conservare la equidistanza; studiarne la traccia).

Dopo aver scoperto e definito il luogo geometrico possiamo evitare che tale concetto cada nell'oblio proseguendo nell'arco del triennio l'attività di laboratorio con altre esperienze che utilizzano l'opzione "luogo di punti" presente in Cabri. Ne diamo alcuni esempi:

2) **La retta come luogo di punti**

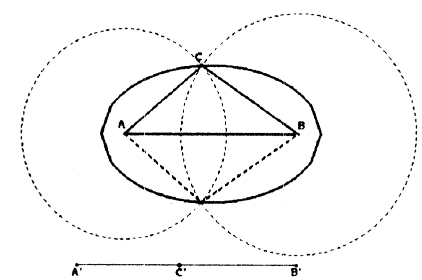
Tratto da "*Luogo dei punti dei vertici C di triangoli equivalenti con ugual base*" di Maria Rosa Sanfelici (*sezione* Come fare *del* CABRIRRSAE *n.8*)



Fissati due vertici A e B, estremi della base, e assegnata l'altezza HK, si costruisce un triangolo il cui terzo vertice, C, selezionato tramite l'opzione luogo di punti, descrive, al variare di H' sulla retta AB, una retta parallela alla base data. Si può osservare che fra tutti i triangoli equivalenti ottenuti quello di perimetro minimo è il triangolo isoscele.

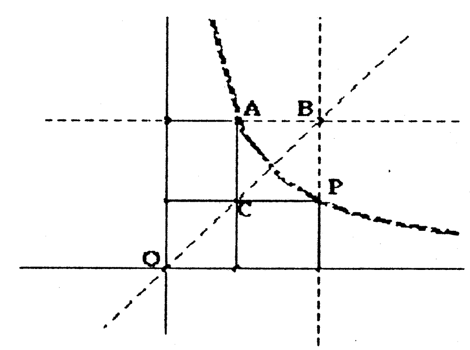
3) **Luogo del vertice C dei triangoli isoperimetrici ABC**

Tratto da "*Luogo di punti del vertice C dei triangoli isoperimetrici ABC*" di Attilio Macrelli (*sezione* Come fare *del* CABRIRRSAE *n.2*)



Per costruire triangoli ABC isoperimetrici si assegnano la base AB, che rimarrà fissata, e un segmento A'B' (A'B'>AB), lungo quanto la somma degli altri due lati, su cui si sceglie un punto C'. L'intersezione delle due circonferenze aventi per centro gli estremi A e B della base e per raggi, rispettivamente, AC' e BC' è il vertice C del triangolo. Facendo variare C' su A'B' il punto C descrive un'ellisse.

4) **Rettangoli equiestesi: la curva della proporzionalità inversa**



Dato il rettangolo di vertici opposti O ed A (vedi figura) e scelto a piacere un punto B sulla retta per A parallela all'asse delle ascisse, si costruisce la retta OB che incontra in C il lato del rettangolo assegnato. Condotte da C e da B le parallele rispettivamente agli assi coordinati, si ottiene un rettangolo equivalente a quello dato con vertici opposti O e P. Facendo variare il punto B sulla retta AB il punto P descrive un ramo di iperbole.

Costruzioni con Cabri-géomètre

Con i ragazzi del biennio superiore il laboratorio di geometria deve diventare uno stimolo per capire e dimostrare. Cabri sarà uno strumento eccezionale per visualizzare in modo agile le proprietà delle figure piane (es. punti notevoli del triangolo e la retta di Eulero), per eseguire problemi grafici (es: baricentro di un quadrilatero); ma soprattutto con Cabri possiamo proporre costruzioni con riga e compasso che conducono alla scoperta di coniche e altri luoghi. Ne diamo alcuni esempi:

1) Una sola costruzione per due luoghi

Tratto da "*Metodo unitario per costruire l'ellisse e l'iperbole come luogo geometrico*" di Ottavio Tarabelloni (*sezione* Come fare *del* CABRIRRSAE *n.8*)

Come abbiamo già visto negli esempi dedicati alla scuola media inferiore, i vertici di triangoli isoperimetrici di data base descrivono una ellisse; con una costruzione più completa e più articolata della precedente è possibile ottenere anche l'iperbole.

«...Dato il segmento AB si consideri la circonferenza di centro A e raggio r.

Sia P un punto qualsiasi sulla circonferenza e si traccino i segmenti PA e PB e l'asse a di PB.

Sia C il punto d'intersezione tra PA (o il suo prolungamento) e a. Distinguiamo ora due casi:

a) r>AB. Essendo CB=CP, AC+CB=r. Il punto C vertice del triangolo ABC descrive quindi, mentre P si muove sulla circonferenza, un'ellisse di fuochi A e B e asse maggiore r (fig. a).

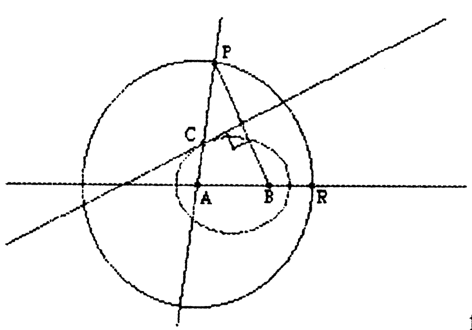


fig.a

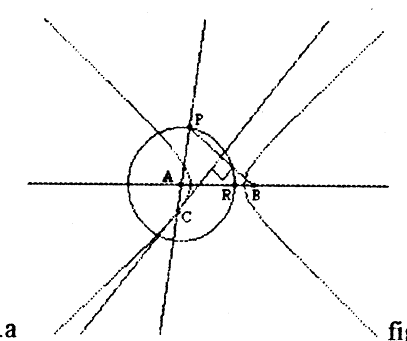


fig.b

b) r≥AB. Si può avere AC-CP=r oppure CP-AC=r a seconda della posizione di P; in ogni caso, essendo sempre CB=CP, vale | CB-CA | = r e pertanto il punto C descrive un'iperbole di fuochi A e B.

Se r=AB si ha AC=0 e l'iperbole degenera in un punto (il punto A) (fig. b).»

2) Maturità 1990

Problema assegnato alla Maturità 1990, II quesito.

«Trovare il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti ad una retta d e passanti per un punto F dato, non appartenente alla retta data (figura c).

Trovare il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti ad una circonferenza C data e passanti per un punto F dato esterno alla circonferenza (figura c).»

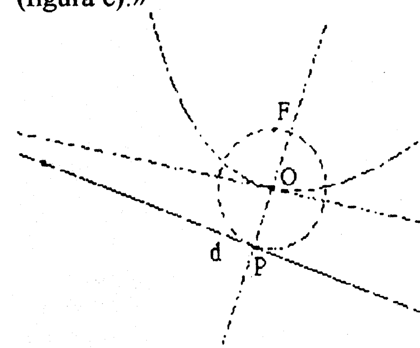


fig.c

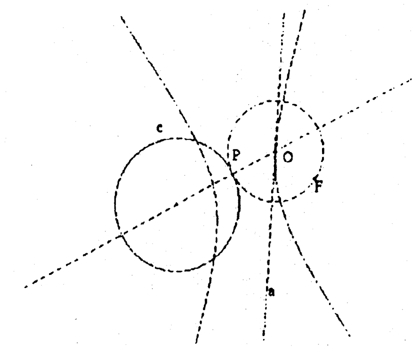
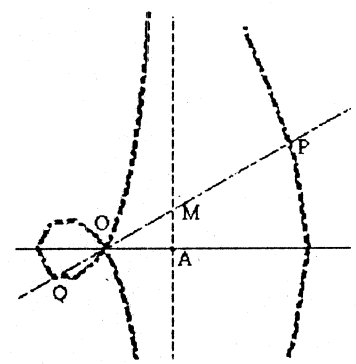


fig.d

3) Concoide



Dati un punto O e una retta r non passante per O, si consideri un punto M su r e la retta s per M e per O. Il luogo descritto dai punti P e P' di s che hanno distanza assegnata l da M al variare della retta s è detto concoide della retta o concoide di Nicomede (matematico del periodo ellenistico). Al variare della distanza a di O da r (a>l,a<l,a=l) varia la forma del luogo.Scegliendo MP=2OM, come in figura, si ottiene la concoide che può essere utilizzata per risolve il problema della trisezione dell'angolo offrendo al docente l'occasione di una digressione storica sull'argomento.(1)

4) Cissoide

E' assegnata una circonferenza, un suo punto O e la tangente t nel punto diametralmente opposto T. Si prenda A sulla circonferenza e conduca la retta per A e per O, essa interseca la tangente t in M. Detto P il punto della retta r tale che OP=AM la cissoide è il luogo descritto da P al variare della retta r per O.

Tramite la cissoide scoperta da Diocle (II sec. A.C.) si può risolvere il problema di Delo della duplicazione del cubo secondo la via suggerita da Ippocrate di Chio (V sec. A.C.) (2).

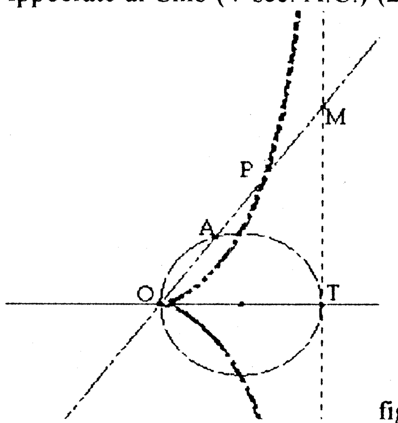


fig.e

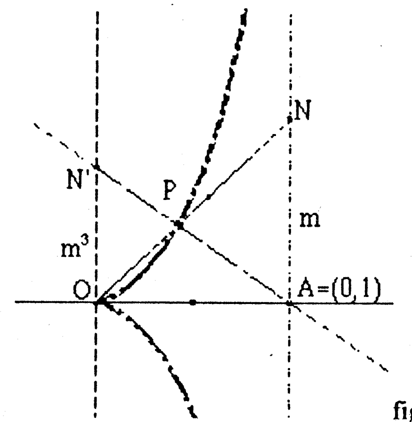


fig.f

Il problema di Delo si potrà risolvere per via analitica nel triennio, in quanto non è difficile ricavare l'equazione del luogo e dimostrare che (vedi figura) se AO=1 e AN=m si ha ON'=m3. Posto ON'=2 sarà

$$AN = \sqrt[3]{2}$$

Bibliografia

(1)-Carruccio *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Ed Pitagora

(2)-*Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*- Ed. Hoepli

(3)-G. Castelnuovo *Lezioni di geometria analitica*, Ed. S.A.E. Dante Alighieri

Progetto SO.TE.R.: un'esperienza realizzata in un Liceo Scientifico per favorire il passaggio dalla Scuola Media al Biennio Superiore

*Anna La Torre - Caterina Speranza**

Il progetto **So. te. r.** (Sostegno e tecniche di recupero, ma in greco anche "salvatore"!) è stato ideato e realizzato da un gruppo di docenti del Liceo Scientifico "Farnesina" di Roma a partire dall'anno sc. 1990-91 ed è nato dalla consapevolezza delle difficoltà che gli alunni del primo anno frequentemente incontrano nel passaggio alla scuola superiore; difficoltà che oltre a produrre disorientamento e demotivazione nei confronti dello studio, spesso si traducono in insuccessi ed abbandoni nel corso del biennio.

Obiettivo primario del progetto è quello di offrire agli alunni che rivelassero evidenti incertezze nella preparazione di base un sostegno didattico immediato, mirato alla compensazione dei prerequisiti (conoscenze di base, linguaggio, metodo,. ...) necessari ad affrontare positivamente l'impegno scolastico curricolare.

Il progetto si articola in **tre momenti** principali:

1. rilevamento delle condizioni di partenza degli alunni, entro i primi giorni di scuola, attraverso **test d'ingresso** differenziati in area linguistica e matematica
2. attivazione di **corsi di sostegno** nei mesi di ottobre e novembre in orario extracurricolare, finalizzati al recupero delle conoscenze di base per quegli alunni che ne abbiano rivelato una insufficiente padronanza
3. valutazione dei risultati ottenuti attraverso un **test di verifica** dato nuovamente a tutti gli alunni che frequentano il primo anno, a conclusione dei corsi di sostegno.

La prova di ingresso di matematica ha come principali obiettivi:

- accertare la preparazione matematica con cui l'allievo si presenta alla Scuola Superiore
- verificare quanto tale preparazione risulti idonea ad affrontare gli studi scientifici
- evidenziare alcune aree nelle quali i ragazzi presentano maggiori difficoltà ed organizzare il lavoro di recupero relativamente a tali aree.

* Liceo Scientifico "Farnesina" di Roma

Dall'esame dei programmi della Scuola Media sono state, perciò, desunte le conoscenze di base di cui gli studenti dovrebbero essere in possesso al termine di tale corso di studi. Si sono, poi, confrontate tali conoscenze con i prerequisiti necessari ad affrontare il biennio di Liceo Scientifico e si sono delimitate le cognizioni e le capacità che si intendevano esaminare. Sono state, così, individuate le seguenti aree:

◊ capacità di valutare (stabilire relazioni di >, =, <, operare approssimazioni ed equivalenze)

◊ conoscenza dei termini aritmetici (numeri decimali, frazioni, numeri primi, m.c.m., M.C.D., potenze, percentuali)

◊ capacità di passare dal linguaggio verbale a quello simbolico e viceversa

◊ capacità di calcolo

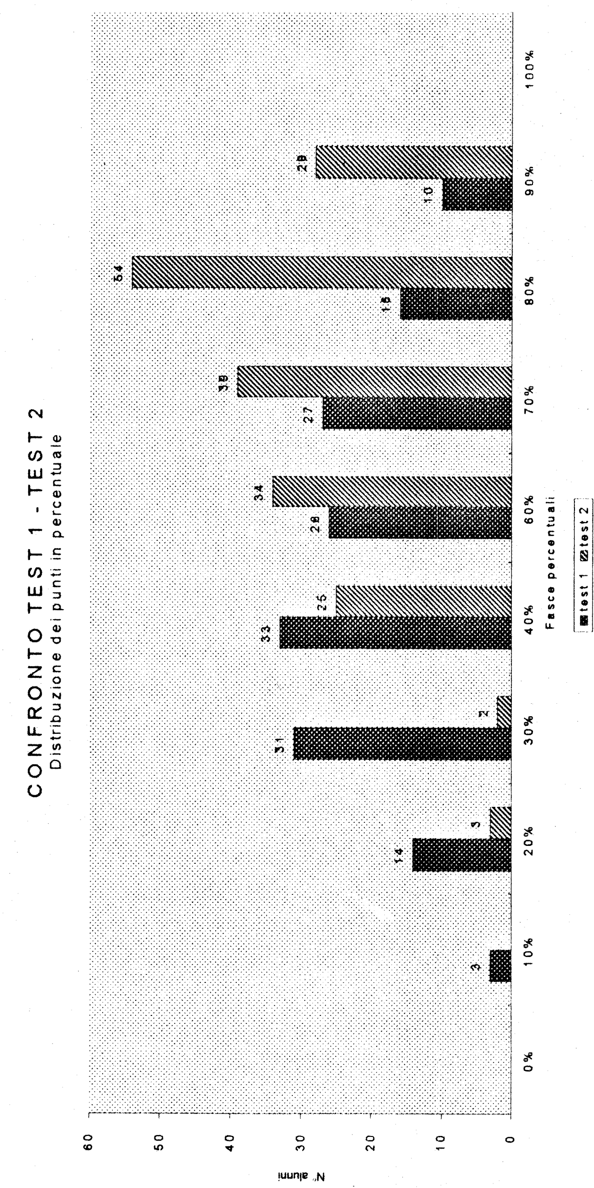
Il 1° test sperimentato all'inizio dell'anno sc.'90-'91 prevedeva 134 quesiti con 4 alternative di risposta; i quesiti, suddivisi in tre aree di "conoscenze", dovevano essere eseguiti in tre diversi momenti della durata di 1 ora ciascuno. Negli anni successivi, sulla base dei risultati ottenuti calcolando **indici di difficoltà** e di **discriminazione**, sono state operate diverse e significative modifiche. Attualmente il test di ingresso è suddiviso in due parti: la prima presenta 40 quesiti alcuni dei quali a risposta multipla, altri a risposta aperta (univocamente determinata); la seconda comprende 29 quesiti, alcuni dei quali indagano anche su abilità logiche e di comprensione del testo.

La valutazione delle prove impone tempi estremamente ristretti per attivare con tempestività i corsi integrativi ed è quasi interamente automatizzata. Le modalità di valutazione delle prove risultano molto semplici dal momento che i test vengono strutturati proprio a tale scopo. Il **punteggio grezzo** di ogni prova si ottiene sommando le risposte esatte di ciascun alunno; il numero ottenuto, di per sé poco significativo, viene poi **standardizzato** secondo semplici procedure statistiche. Per rendere omogeneo il peso di ciascuna prova nell'individuazione del livello di partenza dell'alunno viene calcolato per ciascuno il cosiddetto **punto Z**, sulla base del quale si decide l'eventuale inserimento dello studente nei corsi di sostegno: generalmente tale inserimento è determinato da un punto Z minore o uguale a –0,5.

I corsi sono tenuti dai docenti dell'Istituto e prevedono un numero minimo di lezioni in cui vengono ripresi gli argomenti oggetto del test, approfondendo maggiormente quelli in cui si è riscontrata una percentuale più elevata di risposte errate.

Al termine dei corsi di recupero viene somministrato a "tutti" gli studenti un test di verifica, composto da 30 quesiti (con caratteristiche analoghe a quelle del test d'ingresso) atti a rilevare i livelli di acquisizione sia degli argomenti trattati nelle prove di ingresso, sia di quelli svolti durante i primi mesi dell'anno in corso.

Riportiamo un grafico di confronto tra i risultati del test di ingresso e del test di verifica effettuati nello stesso anno scolastico, a dimostrazione dell'utilità del lavoro svolto.



Qualche osservazione

Ridimensionando il facile ottimismo che il significato del termine greco "soter" potrebbe far supporre, tale progetto non può ovviamente garantire il successo scolastico finale, ma può semmai rendere più omogenee le condizioni di partenza di un percorso che ciascuno studente dovrà poi costruire autonomamente per tutto l'arco dell'anno.

Una valutazione di sette anni di attività appare, però, positiva non solo per gli obiettivi specifici, ma anche per le dinamiche che il progetto ha prodotto all'interno della scuola. Un bilancio dell'attività del So. te. r. ha al suo attivo almeno i seguenti risultati:

- il sostegno didattico e psicologico per gli alunni che, resi immediatamente consapevoli delle loro carenze, non si sono sentiti abbandonati da una istituzione scolastica distante e fiscalmente punitiva, ma sono stati aiutati ad affrontare serenamente le loro difficoltà
- la tempestiva attivazione di un rapporto più consapevole e proficuo con le famiglie, che sono state sensibilizzate ed incentivate a collaborare per la riuscita dell'intervento di sostegno
- la possibilità per i docenti di avere a disposizione fin dai primi giorni di scuola dati attendibili sulle condizioni di partenza degli alunni e di poter, perciò, programmare il proprio intervento didattico in forma più mirata e produttiva
- il consolidarsi di rapporti di collaborazione tra gli insegnanti di matematica ha portato all'esigenza di uniformare il più possibile i propri programmi di lavoro e di effettuare delle scelte comuni, come quella di approfondire alcuni argomenti (ad esempio l'aritmetica) la cui conoscenza veniva, in precedenza, data per scontata.

L'infinito nell'intuizione matematica

*Gaetano Antonio Laganà**

Al fine di individuare il livello di conoscenza riguardo il concetto di infinito acquisito dagli studenti abbiamo realizzato una prima volta un questionario costituito da 20 item, e lo abbiamo quindi testato su di un campione di circa 500 studenti della terza media e del biennio superiore.

In base ai risultati ottenuti lo abbiamo rielaborato e ampliato. Nella versione definitiva il Test contiene 26 item di cui 13 a carattere numerico e 13 a carattere geometrico; il Test è quindi stato riproposto ad un nuovo campione di 500 studenti delle fasce scolari suddette. I risultati ottenuti dagli studenti del Liceo Scientifico erano decisamente migliori di quelli ottenuti dagli altri studenti del biennio superiore e pertanto si è deciso di studiarli separatamente.

Attraverso una analisi successiva dei risultati abbiamo voluto verificare l'attendibilità del Test calcolando l'indice di selettività di ogni item. Abbiamo suddiviso gli studenti in "bravi" e "meno bravi", bravi quelli che hanno risposto bene a più di 18 domande su 26, meno bravi gli altri. Il grado di selettività è stato ottenuto facendo la differenza tra la percentuale di risposte esatte fornita dai "bravi" e le percentuali di risposte esatte fornite dagli altri. Solo la domanda numero 4 presenta un grado di selettività invertito, mentre gli altri si possono giudicare da buoni a ottimi, dunque nel suo complesso il Test è risultato attendibile (cfr.Tabella n.1-b).

Riguardo la domanda n. 4 si può dire:

- La domanda non è ben posta e quindi ha tratto in inganno.
- Il contesto della domanda è fortemente non correlato con il resto del questionario.

Il test è stato distribuito, successivamente, anche ad un gruppo di 26 studenti universitari frequentanti il III anno del corso di Laurea in Matematica. Come vedremo più avanti le risposte fornite sono risultate interessanti anche in relazione a quelle date dagli studenti del biennio scientifico.

Esaminiamo ora in particolare alcune domande per le quali notiamo un andamento particolare delle risposte fornite dagli studenti di tutte le fasce scolari.

[Domande 4, 10, 17 (Insiemi numerici densi)]

* Liceo Scientifico "F. Enriques" Lido di Ostia RM

PERCENTUALI DELLE RISPOSTE ESATTE

	Densi			Periodici					Discr.			Infinitesimi							Continuo				Corrisp.			
Numero Domanda	4	10	17	3	9	19	20	21	6	11	18	2	5	13	16	24	25	26	1	8	15	23	7	12	14	22
III MEDIA	6	11	18	29	41	37	36	32	67	58	52	31	31	52	52	57	39	46	57	32	27	33	35	20	28	25
I SCIENTIFICO	11	42	12	49	58	29	54	27	80	73	75	82	66	66	64	24	74	69	89	56	62	85	82	51	56	26
II SCIENTIFICO	16	49	38	75	80	51	77	33	84	64	81	78	70	70	64	63	80	70	76	77	51	77	78	44	58	29
I NON SCIENT.	6	16	19	25	36	28	26	30	74	56	66	25	31	40	33	23	23	23	51	35	36	50	45	29	46	19
II NON SCIENT.	14	20	19	34	38	23	36	19	70	53	67	31	19	48	38	41	25	27	52	30	41	31	36	16	33	19
UNIVERSITA'	31	54	54	69	92	96	77	50	88	85	81	96	88	88	92	85	88	100	96	96	88	100	100	100	88	81

Tabella n. 1-a

Tabella relativa all'analisi a-posteriori degli item

Numero Domanda	4	17	18	6	22	1	11	24	9	21	20	3	15	2	16	14	13	25	8	12	10	7	16	5	23	26
Bravi	11	42	94	92	53	94	78	68	88	53	81	75	74	93	67	82	89	93	94	74	76	97	89	94	100	94
Meno Bravi	13	13	63	58	15	55	38	28	45	10	38	30	28	45	15	28	33	35	30	8	10	30	15	18	20	10
Discriminante	-1	29	32	34	38	39	40	41	43	43	43	45	46	48	52	54	56	58	64	66	66	67	74	77	80	84

Tabella n. 1-b

Domanda n. 4

Il numero 9 è il più grande numero intero minore di 10. Qual è il più grande numero decimale minore di 1?

a) non esiste
b) 0,9
c) 0,99999
d) $0,\overline{9}$

Questa domanda è di tipo Numerico coinvolge l'Infinito potenziale e l'infinitesimo. Dai risultati ottenuti (cfr. Tabella n. 1-a) non sembra che gli studenti abbiano acquisito in modo consapevole il procedimento di avvicinamento indefinito che richiama da un lato il concetto di infinitesimo e dall'altro l'infinito potenziale.

Domanda n. 10

Nei numeri naturali il successivo di 4 (cioè il numero che viene subito dopo 4) è 5. Nei numeri decimali, qul è il numero che viene subito dopo 3,5?

a) 3,6
b) 4,5
c) 3,51
d) non esiste

Questa domanda ha una articolazione simile alla precedente, tuttavia i risultati ottenuti risultano migliori in particolare per gli studenti del Liceo Scientifico e dell'Università.

Domanda n. 17

Dati gli insiemi

A = insieme dei numeri con due cifre decimali compresi tra 0 e 10
B = insieme dei numeri decimali limitati compresi tra 0 e 10

puoi dire che:

a) non si possono elencare tutti gli elementi né dell'insieme A né di B
b) gli elementi di A si possono elencare tutti, quelli di B no
c) si possono elencare tutti gli elementi sia dell'insieme A sia di B
d) gli elementi di B si possono elencare tutti, quelli di A no

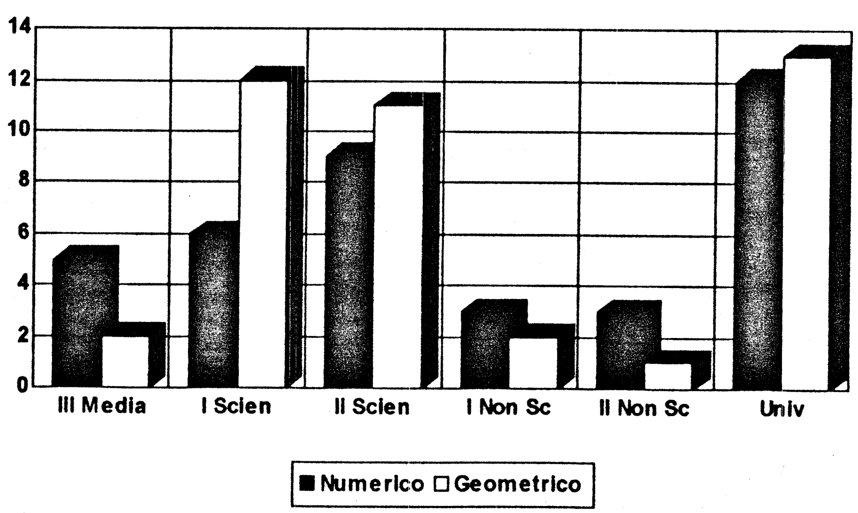
Dall'analisi delle risposte fornite dagli studenti alle precedenti domande, come si può facilmente osservare dalla Tabella n. 2, si può ritenere che il concetto di densità, che pure sembra piuttosto semplice, non è recepito in modo soddisfacente neanche dagli studenti universitari. Probabilmente sembra impossibile che un insieme limitato contenga infiniti punti; ritroviamo cioè uno dei classici motivi di diffidenza degli antichi verso il concetto di infinito. Alcune domande del Test presupponevano una conoscenza di concetti esplicitamente studiati, per tali domande si nota che vi è una elevata percentuale di risposte esatte.

Risposte, in percentuale, distinte per livello scolare.

dom. n. 4	III Media	I Scient.	II Scient.	I Non Scient.	II Non Scient.	Univers.
a	6%	11%	16%	6%	14%	31%
b	25%	14%	10%	31%	13%	4%
c	12%	7%	3%	12%	5%	4%
d	57%	68%	71%	51%	68%	61%
dom. n. 10	III Media	I Scient.	II Scient.	I Non Scient.	II Non Scient.	Univers.
a	40%	26%	14%	40%	38%	8%
b	10%	5%	1%	18%	9%	4%
c	40%	27%	37%	26%	33%	32%
d	19%	42%	48%	16%	20%	56%
dom. n. 17	III Media	I Scient.	II Scient.	I Non Scient.	II Non Scient.	Univers.
a	14%	20%	21%	22%	28%	23%
b	18%	12%	33%	19%	19%	54%
c	55%	48%	40%	53%	45%	19%
d	12%	20%	6%	6%	8%	4%

Tabella n. 2

Numero di domande per le quali la percentuale di risposte esatte è maggiore o uguale al 50%.



Questi risultati confermano il pensiero di G. Prodi [5]: "L'idea di infinito non si può catalogare (per dirla con Fischbein) fra le intuizioni primarie. Essa ha indubbiamente una radice culturale [...] Tuttavia l'idea dell'infinito non appena suscitata, si instaura con spontasneità nella mente, così da apparire del tutto naturale".

Osserviamo i risultati ottenuti distinguendo le domande di tipo numerico da quelle di tipo geometrico. Nel grafico precedente è rappresentato il numero di domande alle quali almeno la metà degli studenti ha fornito la risposta esatta.

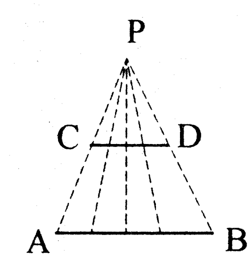
L'esperienza di tipo metrico più comune ai ragazzi della scuola media ha probabilmente determinato l'esito negativo delle risposte ad alcune domande a contesto geometrico, ciò non avviene per buona parte dei ragazzi del biennio scientifico che forse grazie allo studio della geometria razionale sono riusciti a distaccarsi da un approccio esclusivamente metrico, tale tendenza è confermata dall'esito negativo ottenuto nelle stesse domande dai ragazzi del biennio non scientifico per i quali lo studio della geometria non viene affrontato in modo sistematico e approfondito.

Osserviamo ancora in particolare la domanda n. 22 in quanto le percentuali delle risposte esatte sono basse pure per gli studenti del biennio scientifico.

Domanda n. 22

Considerati i segmenti AB e CD con AB di lunghezza 4 cm e CD 2 cm puoi dire che :

$AB = 2\,CD$



a) CD ha più punti di AB

b) non si possono confrontare i numeri dei punti dei due segmenti ma solo le rispettive lunghezze

c) i punti di CD sono tanti quanti quelli di AB

d) AB ha più punti di CD

Si tratta di una domanda che ha come contenuto la geometria, l'infinitamente grande, l'infinito attuale. Qui è però possibile la confusione, ancora di natura epistemologica, tra misura e cardinalità: il numero dei punti di un segmento sembra proporzionale alla lunghezza del segmento. Alcuni ragazzi non riescono a pensare ad un segmento costituito da infiniti punti e contemporaneamente come una figura geometrica con una sua misura finita.

Va anche segnalato che in 20 Item su 26 i ragazzi del non scientifico presentano una percentuale di risposte esatte inferiore ai ragazzi della terza media; tra i motivi possibili citiamo una selezione al negativo per l'attitudine alla matematica e l'attività prevalentemente incentrata su esperienze legate al concreto. Per il Liceo Classico occorrerebbe un'analisi diversa, in quanto l'esito negativo delle risposte fornite potrebbe trovare una giustificazione nel tempo molto ridotto per lo studio della matematica (solo due ore settimanali) e in una diversa distribuzione del programma nei due anni.

Per il Biennio dello Scientifico un aspetto importante riguarda la maturazione del concetto di infinito in algebra che sembra essere più lenta che non in geometria. È forse più difficile cogliere il concetto di infinito utlizzando contenuti di tipo algebrico rispetto a quelli geometrici? Oppure in algebra gli stimoli forniti sono indiretti e non adeguati allo scopo?

Una possibile conclusione da trarre in seguito ai risultati ottenuti attraverso il presente lavoro potrebbe essere la seguente:

il fatto che l'infinito è una conquista dell'attività mentale dell'uomo, non basata sull'esperienza concreta, fa sì che si tratti sia di un argomento che richiede opportuni stimoli per essere acquisito in maniera adeguate, ma anche di un elemento di grande inderesse nello sviluppo cognitivo del ragazzo.

Bibliografia

[1] F. ARZARELLO, *Matematica dell'infinito,* Vol. I, CLU, Torino, 1980.

[2] M. BARTOLINI BUSSI, *La discussione collettiva nell'apprendimento della Matematica: Analisi di dur casi,* L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, Maggio 1989, pag. 600.

[3] E. FERRARI, G.A.LAGANA', E. LUZI, E. TROVINI, *Il concetto di infinito nell'intuizione matematica,* L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, Giugno 1995, pag. 211.

[4] P. LINATI, *Quando a scuola parliamo di infinito,* raccolta di interventi, Mathesissez. Varese, 1990.

[5] G. PRODI, *Ancora a proposito dell'infinito,* Lettera Pristem, n. 5 1992, pag. 19.

Come differenziare, per formalizzazione e sviluppo "tecnico", l'insegnamento dei vari temi nei diversi livelli scolastici?

Carlo Dapueto *

1. Premessa

La struttura dell'intervento che avevo previsto inizialmente era la seguente: breve introduzione generale al problema, riflessioni sui raccordi media-biennio-triennio ed esempi riferiti alle attività di progettazione e sperimentazione nelle superiori del gruppo didattico MaCoSa, considerazioni critiche sui nuovi programmi della scuola secondaria superiore (in relazione allo sviluppo di alcuni temi e ai rapporti con i programmi della media inferiore).

Ma la brevità dello spazio a disposizione, il taglio della maggior parte delle relazioni e delle comunicazioni che ho ascoltato (molto generali o molto locali) e la presenza di molti insegnanti non coinvolti in attività di ricerca didattica, mi hanno indotto a cambiare l'articolazione dell'intervento: farò emergere, un po' "metaforicamente", i vari aspetti del problema enunciato nel "titolo" riferendomi allo sviluppo nell'intero arco scolastico di un particolare tema, anzi, dell'insegnamento di uno specifico concetto.

2. La situazione

Ipotizzo di trovarmi ad insegnare matematica in una strana scuola, in cui dovrò seguire gli alunni dall'inizio delle elementari alla fine delle superiori. Ho già fatto scelte di "impostazione" dell'insegnamento della matematica (traspariranno nel seguito); in questo momento sto approfondendo la riflessione su come distribuire nei vari anni lo sviluppo del concetto di angolo.

È una situazione irreale per vari aspetti: posso progettare l'insegnamento senza condizionamenti da parte di insegnanti "precedenti" o "posteriori", isolo il ragionamento su un singolo argomento matematico (cosa che in sé sarebbe poco sensata, ma, ripeto, è una metafora), ... ; tuttavia nella sua idealità facilita la messa in luce, spero in modo concretamente comprensibile, di alcuni aspetti importanti del problema della differenziazione e del raccordo dell'insegnamento della matematica nei diversi livelli scolastici.

Posso, dunque, pensare "liberamente", riferendomi a mie esperienze prece-

* Dipartimento di Matematica, Università di Genova

denti, miei studi, ... , leggendo cose che mi facciano venire idee (anche cose di "ricerca didattica"), tenendo presente quanto prevedono i programmi scolastici ufficiali, ...

3. Angolo e ...

Incomincio individuando alcuni *concetti matematici* che dovrò, prima o poi, intrecciare a quello di angolo: direzione, pendenza, misura, rotazione, semiretta, poligono, funzioni circolari, ...

Mi prefiggo, nella riflessione sullo sviluppo didattico del concetto, di tener conto degli usi degli angoli (in vari significati) nelle altre *discipline*, nelle esperienze di *vita quotidiana*, ...

Tengo conto dei miei studi universitari e "personali" di matematica (e di fisica e di filosofia), da cui ho imparato che la geometria è un'area dai contorni non ben definiti, che si sviluppa inizialmente come insieme di tecniche (prima sparse, poi organizzate) di misurazione spaziale diretta e indiretta, poi si intreccia a riflessioni gnoseologiche e metafisiche sulla natura dello spazio e del tempo, ... e che la sua autonomia (nelle definizioni e nelle argomentazioni) dalla *fisica* è una conquista relativamente recente, che passa attraverso le modellizzazioni numeriche dello spazio da parte di Fermat e Cartesio, lo sviluppo graduale del concetto di modello matematico e la messa a fuoco dell'esigenza di dare una fondazione autonoma a una scienza come la matematica divenuta d'uso generale nella società industriale, il delineamento del concetto di sistema formale da parte di Hilbert, ...

Tener conto di questi aspetti mi sarà utile per realizzare itinerari didattici efficaci rispetto alle motivazioni e alle esigenze culturali degli alunni nei vari livelli scolastici, per stabilire se/come/quando introdurre definizioni, dimostrazioni, attività sugli oggetti matematici in quanto tali, ...

4. Scuola elementare

È il primo approccio alla scuola da parte degli alunni; in esso si gioca in gran parte la possibilità di avviare un *rapporto culturale profondo* (non solo a fini di valutazione o sopravvivenza scolastica, su binari paralleli o divergenti rispetto alle esperienze extrascolastiche) con l'alunno. Mi preoccupo, quindi, di farmi una rassegna degli usi del termine e del concetto di angolo (e dei concetti correlati) nella vita *quotidiana* con i quali può avere a che fare l'alunno (angolo di un oggetto, «dietro l'angolo», «star in un angolo», ... , «gira a destra», «vai dritto», punti cardinali, ... nelle comunicazioni verbali, nelle nei disegni, nei giochi e nelle varie attività di tutti i giorni).

È una fase in cui il bambino sta arricchendo, con un alto tasso di crescita, il suo bagaglio *linguistico-espressivo* (relativamente alla lingua naturale, al disegno

"non tecnico", ...). Anche per questo starò attento a non fare precoci specializzazioni matematiche dei significati dei termini; il rischio sarebbe quello di favorire confusioni concettuali, bruciare potenzialità espressive e conoscitive, ...

Tengo conto, poi, che, in questa fase scolastica, per fortuna, *non insegno solo matematica*, ma insegno anche altre discipline: posso quindi predisporre itinerari didattici (in collaborazione con l'altro eventuale insegnante della classe) in cui l'aspetto matematico sia naturalmente integrato con gli altri e possa essere fatto emergere gradualmente.

Mi dò da fare per trovare materiali e resoconti di esperienze didattiche che mi diano spunti e orientamenti per muovermi in queste direzioni (non è facile: quasi tutti i *materiali didattici* che si possono trovare in una libreria sono esempi in negativo di quello che vorrei fare).

5. Ancora scuola elementare

Come prime attività a cui riferire gli sviluppi matematici dell'area dei concetti legati a quello di angolo (vedi punto 3) penso, ad es., alla descrizione di *percorsi* seguiti dagli alunni (per compiere "uscite" da scuola, con qualche finalità – ad es. osservare cambiamenti in un orto –, per andare da casa a scuola, ...). Questo contesto, in cui si possono integrare e/o fare traduzioni tra descrizioni a parole, descrizioni con disegni, con foto, con prime mappe, ... , offre molteplici occasioni per introdurre, precisare, delimitare, ... i concetti che ci interessano: le direzioni dei tratti di percorso, le loro pendenze, l'orientamento di edifici, i modi in cui si innestano le strade, i versi delle svolte, la relatività dei riferimenti (rispetto a uno che segue il percorso o rispetto al foglio o ...), la misura (che vuol dire tratto più lungo? rispetto al tempo, in linea d'aria, rispetto alla strada da percorrere, ... o all'umore con cui lo si è percorso?), le forme e le proporzioni, ...

Penso anche ad altre attività (inseribili facilmente in vari ambiti di lavoro di ampio respiro): la *descrizione dei movimenti* di una persona che fa una certa attività, la descrizione di *come è fatto* e/o di *come funziona* un certo oggetto, ... con vari linguaggi (verbali, iconici, misti, ...). Entrano in gioco anche trasformazioni geometriche, forme nuove, ...

La *delimitazione dei significati* diventa importante (per gli alunni) al fine, in queste attività, di riuscire a comunicare capendosi, di essere in grado di passare da una rappresentazione verbale a una grafica, ... ; la *riflessione* sui concetti aiuta, poi, a fare meglio le cose; scoprire che a volte ci sono ambiguità, che una stessa parola può essere con *significati diversi*, che in certi ambiti le parole assumono significati più ristretti o diversi da quelli usati nel linguaggio comune, ... diventa una tappa verso la organizzazione (in settori, discipline, ...) del sapere; ... .

Penso di ricorrere ad attività in ambiti esperienziali altrettanto ricchi per introdurre la misura degli angoli, usare gli angoli per modellizzazioni più astratte, ... : ad es. il confronto tra indicazione digitale e analogica del tempo, l'uso dell'*orologio* e della *bussola* per indicare le direzioni e i versi e le ampiezze (come differenze di direzioni) delle rotazioni, lo studio del fenomeno delle *ombre* (che è l'altezza del sole? perché e come si deforma l'ombra di un oggetto al passare del tempo o cambiando posizione dell'oggetto? ...), ...

6. Quale definizione?

Mi sono già fatto un po' di idee. Prima di dettagliare meglio gli itinerari mi fermo a riflettere su come eventualmente dare la definizione di angolo. Ho chiaro che è importante la gradualità nella costruzione dei significati dei vari concetti e nella messa a punto del lessico, oltre che nella "astrazione" delle prestazioni richieste agli alunni (un conto è affrontare direttamente una situazione, un conto è affrontare una situazione problematica reale descritta, un conto è affrontare una situazione problematica già formalizzata o pre-formalizzata, come i cosiddetti "problemi scolastici").

Devo circoscrivere il concetto di angolo esplicitandone una descrizione formale in termini più astratti? Come?

Come intersezione di semipiani? Ma come potrei definire cos'è un *semipiano*? Come potrei collegarmi naturalmente alle attività che ho intenzione di svolgere (vedi punto 5)? E questa definizione di angolo quando è stata pensata? in che contesto è significativa? ... .

Poi dietro a questo concetto c'è l'idea di angolo come "figura" nel senso di "parte" di piano, con tutti i rischi di pensare (giustamente, pensando agli usi comuni di "figura", di "parte", ... e all'uso ambiguo della parola "lato", ora riferito a segmenti, ora a semirette) a un angolo come a una specie di triangolo (se è una figura avrà una certa estensione, finita, è naturale pensare).

Potrei definirlo come *rotazione* (forse l'introduzione del concetto di rotazione è più facile di quella del concetto di semipiano)? Ho letto alcune proposte al riguardo. Ma, rileggendole, mi lasciano perplesso: mi sembra che si confondano ampiezze delle rotazioni, che sono numeri, e angoli, che sono figure.

Mi sto infilando in questioni da cui non è facile uscire. Rinuncio a pretendere di dare una definizione che esaurisca il concetto di angolo. Del resto concordo con quanto suggeriscono i *programmi*: nella scuola elementare la geometria va intesa come graduale acquisizione di capacità di orientamento, riconoscimento, localizzazione, organizzazione e schematizzazione nello/dello spazio fisico. Mi limiterò, dunque, a far lavorare opportunamente gli alunni in contesti che chiariscano, implicitamente, il significato (astratto) del concetto di angolo (della geometria euclidea piana). I contesti più atti a fungere da *situazioni prototipo* mi sembrano quelli più corrispondenti all'idea di angolo come parte di piano spazzata da una

semiretta che ruota: se la semiretta è un raggio di luce, lo sguardo o una traiettoria rettilinea a partire da una posizione fissata, ... è possibile evitare che gli alunni si rappresentino mentalmente gli angoli con parti limitate di piano. Le situazioni su cui ho pensato di far lavorare gli alunni (vedi punto 5) mi sembrano adatte a questo scopo.

7. Scuola media (inferiore)

Nella (strana) scuola "6-18 anni" dove insegno, all'inizio delle medie in genere arrivano alcuni nuovi alunni, che hanno fatto le elementari altrove. Nella progettazione dell'itinerario didattico devo tener conto anche del problema del *raccordo* del mio insegnamento alle loro conoscenze e al loro atteggiamento nei confronti della scuola: come hanno studiato? che cosa sanno? quali attività per esplorare ciò? quali attività per inserirli?

Proporrò inizialmente, a tutta la classe, alcune attività simili a quelle che ho svolto nella scuola elementare. In questo modo cercherò di affrontare sia una valutazione della produttività del mio insegnamento sia un'analisi del "livello" di ingresso dei nuovi alunni, senza "prove ad hoc", con cui sarebbe difficile esplorare le loro effettive capacità e si rischierebbe di creare una frattura con gli altri alunni. Cercherò, comunque, di inserire momenti di lavoro per esplorare specifici aspetti, ad es., stando sempre al concetto di "angolo", eventuali concettualizzazioni degli angoli come figure limitate (potrei pensare ad occasioni in cui, di fronte a due angoli di diversa ampiezza con i lati del più ampio rappresentati con segmenti più corti di quelli dell'altro, si deve individuare qual è l'angolo più ampio).

8. Quale definizione? - bis

Parte dei contenuti dei programmi per le medie sono già presenti in quelli delle elementari. Ovviamente, nel nuovo livello scolastico dovrò avviare a una presentazione più formale e astratta degli stessi. Per l'angolo, sviluppando quanto già osservato nel punto 6, potrei utilizzare i concetti di semiretta e di rotazione, che, a loro volta, dovrei in qualche modo introdurre.

Come introdurre la *semiretta*? Non è certamente praticabile la strada assiomatica. Non vedo altro modo che darne una descrizione attraverso l'idealizzazione di una situazione fisica: la traiettoria (potenzialmente) percorribile a partire da una certa posizione e senza mai cambiare direzione. Potrò dare a questa descrizione una maggiore formalizzazione e/o farne percepire meglio la natura astratta quando introdurrò (appoggiandomi alle esperienze di lettura e costruzione di grafici di fenomeni già avviata alle elementari) attività di rappresentazione grafica di funzioni e di *rappresentazione analitica* di semplici figure: "$y=3x$, $x\geq 0$" è una semiretta "matematica", non "fisica".

Non parlerò né di enti primitivi (avrebbe senso nell'ambito di una sistemazione assiomatica), né tenterò di dare definizioni più formali di "semiretta" o di "retta". Mi preoccuperò, invece, nel modo detto, di consolidare negli alunni delle situazioni prototipo più astratte.

Del resto avevo provato a comprendere, facendo finta di non conoscerli già, i concetti geometrici (e algebrici) usando solo le definizioni presenti in vari libri scolastici o definizioni che ho dato io stesso ai miei alunni in precedenti esperienze, e mi sono accorto che da esse non capivo un gran ché: erano in grado di evocare (a chi li conosce già) i concetti ma non di individuarli, essendo piene di aspetti non precisati, di riferimenti ad altri concetti mai definiti, ... Forse la difficoltà maggiore che trovo nell'insegnamento è proprio quella di *decentrare*, di pormi dal punto di vista di che le cose non le sa già, ma deve acquisirle attraverso le attività e i materiali che gli propongo.

9. Ancora scuola media

Le rotazioni, nelle medie, sono da inquadrare nel contesto di una presentazione più generale delle trasformazioni geometriche. Anche in questo caso è importante tener presente che non si può prescindere dai riferimenti alla *fisica*: lavorando con trasformazioni geometriche il lessico stesso, i tipi di situazioni analizzate, ... sottointendono in genere la presenza della variabile *tempo*; mentre i passi delle traslazioni sono facilmente descrivibili in termini astratti (riferendosi alle coordinate, senza unità di misura di lunghezza), per la ampiezza delle rotazioni dobbiamo appoggiarci a misure fisiche (col *goniometro*); ...

Ma io insegno anche scienze. E questa "confusione" con la fisica non è un gran svantaggio: mi consente da una parte di fare delle economie (posso trattare in un colpo solo argomenti che fanno capo a entrambe le discipline), dall'altra mi consente di chiarire, per contrasto, alcune caratteristiche delle varie discipline. Ad esempio posso affrontare contestualmente i *vettori* per rappresentare traslazioni e i vettori per rappresentare spostamenti e posso, poi, mettere a fuoco come i vettori (con la loro addizione) siano utilizzabili come modello non solo per gli spostamenti successivi (confondibili con le traslazioni), ma anche per quelli contemporanei; questo passaggio, culturalmente molto importante, mi consentirà di avviare alcune riflessioni sulla natura dei modelli matematici, sull'uso dei concetti geometrici in altri ambiti, ...

Nelle medie posso fare anche altri passi verso la precisazione matematica del concetto di angolo (e dei concetti collegati), in relazione all'avvio delle prime attività di geometria analitica. Ho già accennato a ciò nel punto 8. Un altro aspetto è la quantificazione della *pendenza* in senso fisico (rapporto tra dislivello e spostamento orizzontale) e il collegamento con la pendenza (coefficiente angolare) delle rette nel piano cartesiano (cambiando la scala orizzontale o quella verticale cambia la pendenza "fisica" della retta y=2x, non quella "matematica").

10. Superiori

All'inizio delle superiori dovrò affrontare problemi di raccordo analoghi a quelli affrontati all'inizio delle medie. Ma ho un ulteriore problema: i "*nuovi*" *programmi* per il biennio ripropongono, senza molte variazioni o nuove indicazioni, i contenuti geometrici già previsti per le medie: non è più contemplata una presentazione assiomatica della geometria (solo successivamente, alla fine del triennio, vi sarà un'eventuale riflessione su di essa; e su ciò non posso che essere d'accordo), ma non è chiarito (o è addirittura confuso) come sia possibile dare una presentazione alternativa; le trasformazioni geometriche sono da affrontare in modo intuitivo-sintetico, come alla scuola media; e, in particolare, gli angoli e la loro misura sono sempre quelli della fisica, e così le direzioni (si prevede l'introduzione delle funzioni circolari ristrette agli angoli convessi, non è prevista l'introduzione del cerchio, ...); ... . Che fare?

Devo, nell'interpretare/tradurre i programmi in itinerari didattici, vedere come *proseguire nel passaggio dalla geometria fisica alla geometria matematica*. Intanto, come alternativa alla presentazione assiomatica, mi riferirò a una presentazione analitica di alcuni concetti di base (punto, movimento, ...) per poi utilizzarli (nello sviluppo della geometria, nella dimostrazioni di teoremi, ...) combinando metodi analitici e sintetici: rispetto alla scuola media il *piano cartesiano* non sarà più solo un contesto per rappresentare funzioni o per dare forma algebrica a concetti geometrici, ma diventerà il (modello matematico del concetto intuitivo di) "piano"; le variabili e le equazioni diventeranno non solo strumenti per modellizzare relazioni tra grandezze reali ma strumenti per definire nuovi oggetti matematici (figure geometriche); la *relazione pitagorica* diverrà il cardine per una definizione astratta di distanza; ...

Questo cambiamento di prospettiva mi sembra una significativa differenziazione rispetto alla scuola media. Ma, per realizzarlo, sarò costretto a *forzare i programmi*: per dare una presentazione matematica ai concetti di movimento, semiretta, angolo, ... dovrò, in qualche modo, dare forma numerica alle *direzioni*, e non potrò fare a meno di una introduzione (non rigorosa, ma già "matematica") al concetto di lunghezza d'arco (attraverso un passaggio al limite, concetto su cui avrò già lavorato con gli alunni affrontando gli argomenti delle approssimazioni e dei numero reali) e alle funzioni circolari in senso pieno (seno e coseno come componenti del versore, tangente come relazione tra inclinazione e pendenza).

Affinché poi, alla fine del triennio, diventi possibile una riflessione sull'approccio assiomatico (ma non solo per questo), sin da ora cercherò, rispetto alla scuola media, di avviare ad altre astrazioni. Ad esempio potrò mettere in luce che, in matematica, si possono usare anche *spazi* più "poveri", in cui non si parla di angoli, in cui i punti sono in quantità finita, ... (i grafi per rappresentare reti ferroviarie, reti stradali, ...); che un quadrato rappresentato in un sistema non monometrico potrà apparire con angoli diversi per il goniometro; che si possono definire distanze diverse (con la distanza urbanistica il cerchio di centro (0,0) e raggio 1 appare graficamente come un quadrato); che il concetto di eguaglianza è relativo (dire che due triangoli, o due altre figure, cioè due insiemi di punti, sono uguali come figure non vuol dire che sono uguali come insiemi, se no sarebbero lo stesso oggetto, ma che uno può essere trasformato nell'altro con un movimento o con una isometria o con una similitudine o ... a seconda delle considerazioni "geometriche" che voglio fare); che su una superficie terrestre "sferica" due punti sull'equatore diametralmente opposti e un polo possono essere congiunti con tre percorsi rettilinei formando un triangolo con angoli interni di somma 270°; ...

11. Concludendo

Non proseguo questa "simulazione" fantastica. Pur avendo toccato solo alcuni aspetti, spero di aver sottolineato come, affrontando, anche concretamente, in una specifica attività didattica, i rapporti con un altro livello scolastico, sia importante tener conto di quanto e come devono essere delineati e precisati natura e ruolo della matematica rispetto alle altre discipline e ai sistemi di conoscenze degli alunni.

GRUPPI DI LAVORO

Scuola elementare e scuola media: un percorso unitario di formazione[◊]

Gruppo di lavoro Raccordo Scuola Elementare - Scuola Media

Coordinatori: C. Caredda[*] - M.R. Puxeddu[**]

Premessa

La continuità educativa è al centro del dibattito e della ricerca pedagogica per rispondere ai bisogni di sviluppo unitario dei singoli soggetti a prescindere dai diversi ordini scolastici.

Le finalità educative presenti nei diversi testi programmatici della scuola di base sottolineano l'importanza della formazione dell'uomo, del cittadino e della sua educazione alla convivenza democratica.

Risulta, quindi, importante che l'azione educativa investa l'uomo nella sua totalità e nello stesso tempo non può essere limitata a determinati momenti della vita umana.

L'intervento della scuola, istituzione preposta ad esercitare azione educativa, deve svolgersi lungo un percorso diacronico inteso a mettere in rapporto i successivi cicli di apprendimento, ma anche lungo un percorso sincronico teso a promuovere ed attivare i processi contemporanei di apprendimento di tipo formale e informale.

L'idea stessa di continuità racchiude il concetto di formazione dell'uomo, il quale pur manifestando cambiamenti evolutivi di varia natura, mantiene una sostanziale identità, inoltre la continuità trova la sua giustificazione nel fatto che ciascuna conoscenza tiene conto di quella precedente, meglio, la comprende e costituisce la base della conoscenza successiva.

Il compito della scuola è quello di organizzare queste conoscenze in modo che non ci siano fratture, rallentamenti inusuali o eccessive fughe in avanti.

La scuola dell'infanzia, che con gli Orientamenti del 1991, ben chiarisce la specificità della sua azione intesa appunto come diritto dell'infanzia ad essere educata, la scuola elementare che promuove la prima alfabetizzazione culturale e si preoccupa di fornire gli elementi fondanti della convivenza democratica, la

---

[◊] Lavoro eseguito nell'ambito delle ricerche finanziate con contratto C.N.R. n.93.00521CT01

[*] Dipartimento di Matematica, Università di Cagliari

[**] Insegnante elementare laureata in Psicologia

scuola media che organizza e amplia ciò che si è appreso nei segmenti scolastici precedenti, costituiscono un nucleo irrinunciabile per un processo di apprendimento che deve essere armonico e continuo.

La legge 148 del 1990 sottolinea che la continuità educativa è un obbligo giuridico che non può essere ignorato. Il tentativo di una certa omogeneizzazione tra scuola elementare e scuola media è datato al 1977 che con la legge 517 consegnava, a questi due ordini di scuola, un documento di valutazione molto simile.

I programmi della scuola media del 1979 riattivano il dibattito sulla continuità che diventa uno dei paragrafi più importanti nella premessa dei programmi del 1985 per la scuola elementare.

Un ulteriore passo avanti viene fatto con la C. M. n.1/1988 rivolta ai soggetti in situazione di handicap. Bisogna quindi arrivare al 1992 con la legge quadro n.104, per soggetti in situazione di handicap, che fa riferimento alla necessità di lavorare anche su altri versanti.

La C. M. n.339 del 1992 rappresenta la sintesi di ciò che l'istituzione pubblica intende e sollecita a fare perché venga assicurata la continuità educativa.

La circolare fornisce una serie di indicazioni che chiariscono e danno il senso di ciò che si deve fare per promuovere e favorire la continuità.

L'intesa tra capi d'istituto dei diversi ordini di scuola, il coordinamento tra insegnanti e la collaborazione con e delle famiglie, di enti locali, di unità sanitarie, ... rappresenta un primo livello di intervento. A questo se ne aggiunge un secondo che riguarda la conoscenza reciproca ed approfondita dei programmi dei diversi livelli scolari, l'analisi e l'individuazione dei vincoli, ma soprattutto delle risorse presenti nelle diverse istituzioni scolastiche per definire obiettivi in continuità e approntare sistemi di verifica e di valutazione condivisi dai collegi dei docenti impegnati in un progetto comune.

D'altra parte non si può prescindere dalla continuità orizzontale che rappresenta l'extra-scuola in generale e la famiglia in particolare. In questa prospettiva la scuola non è più un luogo in cui gli alunni si incontrano e/o si scontrano, ma deve diventare, con la collaborazione delle famiglie, dei gruppi culturali, sportivi, ... che insistono nel quartiere un luogo che si fa comunità, che oltre a trasmettere cultura sia capace di elaborarla non per gli studenti ma con gli studenti. Infatti il problema della continuità non può ridursi al semplice aspetto istituzionale, si devono invece elaborare soluzioni perché il processo di sviluppo di ciascun alunno si evolva in modo personale e diverso da quello di qualunque altro.

La continuità nell'insegnamento della Matematica

Uno degli elementi fondamentali dell'insegnamento-apprendimento della matematica è certamente la gradualità. In nessun'altra didattica il concetto di gradualità è così pregnante e fortemente significativo come in matematica. Questo concetto è strettamente legato a quelli di tempo e spazio la cui conquista

costituisce un punto saldo dello sviluppo cognitivo.

Se è vero, come è vero, che il concetto di buono, di bello, di bene esistono perché ci sono i loro contrari si può affermare che al concetto di continuità faccia da contrappunto quello di discontinuità. In effetti non devono meravigliare i cambiamenti che subisce il processo cognitivo. La conoscenza delle diverse tappe dello sviluppo evolutivo ha fatto si che chi ha elaborato i programmi della scuola di base tenesse in conto questa diversità includendola in un percorso di maturazione e di conoscenze in continuità.

I sei campi di esperienza analizzati negli Orientamenti del 91 sono impegnati a sollecitare tutte le risorse cognitive ed emotive per assicurare al bambino il consolidamento delle competenze, la conquista della autonomia e la maturazione della propria identità.

Nel campo specificatamente matematico, *"lo spazio, l'ordine e la misura"*, già si comprende che il bambino deve imparare a raggruppare, ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà.

Il bambino che frequenta la scuola dell'infanzia sa esprimere le prime intuizioni numeriche, è in grado di eseguire valutazioni approssimative delle quantità, sia quando conta gli oggetti, sia quando confronta le quantità e le grandezze.

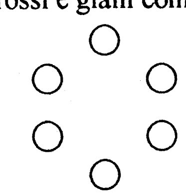
Possiede senza alcuna intenzionalità didattica il concetto di numero, particolarmente in termini simbolici.

L'esperienza guidata e concreta aiuterà il bambino all'acquisizione del concetto di quantità che deve inserirsi nel rapporto col simbolo sia in termini pratici ed applicativi, sia attraverso il linguaggio.

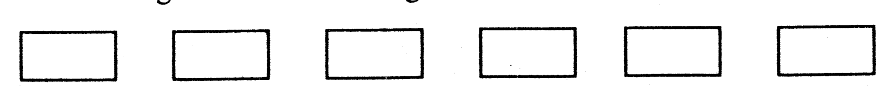
L'osservazione diretta della realtà e la ricerca della realtà stessa nel materiale strutturato, che è ormai presente in tutte le scuole dell'infanzia, rendono possibile un apprendimento significativo e stabile.

L'utilizzazione, ad esempio, di cerchi e di mattoni colorati diventa un efficace esercizio per riconoscere forme, colori e collegare oggetti ad altri oggetti, per riconoscere quantità maggiori o minori, ma anche, come dicevamo più sopra, ricercare nella realtà oggetti simili.

Una disposizione di cerchi rossi e gialli come questa



e una di mattoni gialli e blu come la seguente



permette molte attività e risponde alla esigenza di trovare relazioni biunivoche, riconoscimento di colori e l'individuazione di quegli oggetti di un certo colore che sono presenti, in una configurazione, in maggior numero.

Il passaggio alla scuola elementare non può, e noi diciamo non deve, ignorare le conoscenze già costruite, ma deve partire dalla conoscenza dei prerequisiti che i bambini già possiedono.

conoscenze di base	**conoscenze da costruire**
• simbolo • quantità • classificazioni • relazioni	♠ concetto ♠ conservazione della quantità ♠ insiemi numerici • naturali • relativi ♠ operazioni

Il concetto di numero naturale si evolve attraverso l'ordinalità, la cardinalità e la misura e deve essere acquisito a livelli sempre più elevati di astrazione e di interiorizzazione.

I passaggi successivi riguardano la classificazione e le relazioni, tenendo ben a mente che il bambino durante la scuola elementare acquisisce il concetto di conservazione della quantità, di insiemi numerici, di numeri naturali, relativi e diventa così capace di eseguire le varie operazioni.

Un discorso a parte merita l'insieme dei numeri razionali e le relative operazioni. Infatti in questo segmento scolastico il tema frazioni si sviluppa secondo una prospettiva che vede la frazione come "operatore".

Ci è stato detto che il termine attività ludica o similari è ripetuto negli Orientamenti ben trentacinque volte, non abbiamo contato quante volte questo termine è ripetuto nei programmi della scuola elementare, in ogni caso è la metodologia privilegiata per l'ambito logico-matematico.

Un esempio di continuità può esprimersi in attività che diano al bambino l'opportunità di confrontare quantità attraverso la modificazione della dimensione degli oggetti.

☺ ☺☺
☺ ☺
☺ ☺ ☺
☺☺
☺ ☺

☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺
☺ ☺ ☺
☺

Una attività aggiuntiva può essere quella di disegnare oggetti collegando punti numerati ordinatamente dal più piccolo al più grande.

Un percorso didattico di continuità deve permettere al bambino che frequenta le scuola elementare di esercitare abilità e velocità nel calcolo mentale per giungere alla capacità di astrazione e quindi al pensiero ipotetico-deduttivo indispensabile per poter frequentare con sufficiente soddisfazione la scuola media.

Si tratta cioè di proporre attività che mantengano inalterata la curiosità e la motivazione ad apprendere per dare appunto spazio ad un adeguato sviluppo cognitivo.

È il caso di questa proposta: disegna un percorso con frecce rosse e frecce nere, parti da 0 e arriva fino a 2534 usandone meno di venti, la freccia rossa vuol dire "**x10**" quella nera "**+1**".

• **2534**

• **0**

Il punto forte di ogni insegnamento ben calibrato è sicuramente la creazione di situazioni problematiche che suscitano stati di attesa e di aspettativa.

Se si deve trovare, ad esempio, il numero segreto chiamato "Mister X" che si trova all'estremità di un percorso che parte da 100 e che deve essere coperto da due frecce del valore +30 e da una del valore x20, allora il calcolo dà origine a tre possibilità per identificare il cosiddetto "Mister X"; siccome però il gioco prevede un solo valore, viene fornita un'altra informazione: Mister X è il numero che diviso per 10 è primo.

Poiché il discorso che abbiamo affrontato nei termini della continuità riguarda soprattutto il concetto di numero, nella scuola media non può che essere presentato l'ampliamento degli insiemi numerici.

conoscenze di base	**conoscenze da costruire**
• capacità di contare • scrittura e lettura di numeri naturali e decimali	• successione dei numeri e regola generativa • rappresentazione decimale posizionale di numeri naturali e decimali • ordinamento e rappresentazione • operazioni

conoscenze di base	conoscenze da costruire
• sistema di rappresentazione decimale dei numeri naturali e con la virgola • valore di posizione delle cifre • significato e uso dello zero	♦ concetto di operazione aritmetica • addizione • sottrazione • moltiplicazione • divisione ♦ proprietà delle operazioni ♦ espressioni aritmetiche

conoscenze di base	conoscenze da costruire
♠ numeri naturali e decimali operazioni ♠ misura di grandezze operazioni	♠ concetto di frazione • operatore su grandezze • operatore su quantità • divisione ♠ ordinamento di frazioni ♠ trasformazione di frazioni in numeri decimali e viceversa ♠ numeri razionali

Il passaggio successivo riguarda i numeri naturali e decimali per giungere al concetto di frazione inteso sia come operatore su grandezze e quantità, sia come divisione indicata.

A questo passaggio deve necessariamente essere collegato quello della trasformazione delle frazioni in numeri decimali e viceversa.

A questo punto il concetto emergente è quello di rapporto riferito non solo alle grandezze e ai numeri ma anche alle grandezze commensurabili e alle grandezze incommensurabili.

La fine di questo percorso sono le proporzioni tra numeri e la loro rappresentazione.

Non è possibile ignorare il concetto di proporzionalità perché è in grado di spiegare oltre che situazioni matematiche e geometriche, soprattutto situazioni pratiche che sollecitano diversi punti di vista per dare risposte originali a situazioni date.

Infatti se vogliamo calcolare il tempo che diminuisce per svolgere un determinato lavoro ma in presenza di un numero maggiore di persone è necessario avere ben chiari i concetti di rapporti diretti e inversi, di proporzioni e delle loro proprietà, per giungere al concetto di variabile e di funzione. È fuori discussione

che per arrivare a questo concetto finale, almeno per la scuola media, sia necessario conoscere la proporzionalità diretta e la proporzionalità inversa.

L'analisi dei programmi di Matematica della scuola media rende possibile quella gradualità di conoscenze che abbiamo ripetutamente sottolineato.

Alcune riflessioni

La necessità di un percorso educativo che parta dal più semplice al sempre più complesso è un imperativo che nell'insegnamento della matematica deve essere soddisfatto.

Se in altre categorie cognitive è possibile costruire singole conoscenze senza collegamento fra loro, in ambito matematico non è possibile costruire conoscenze stabili che non siano tra loro collegate attraverso il filo della gradualità e della continuità.

Quindi il discorso di un raccordo pedagogico, curriculare e organizzativo tra i diversi segmenti della scuola di base, così come indicato dalla C.M. n.339/1992 trova la sua giustificazione non solo sul piano didattico ma anche e soprattutto sotto il profilo pedagogico e psicologico.

Si tratta cioè di coinvolgere i nostri alunni a costruire il loro processo di crescita perché attendono alla loro maturazione come protagonisti piuttosto che fruitori passivi della trasmissione culturale.

Tutto ciò con particolare riferimento all'insegnamento/apprendimento della matematica che tanta parte ha nella organizzazione del pensiero, nella scelta logica delle decisioni e nella capacità di giudizio.

Bibliografia

Calidoni M., Calidoni P. - *Continuità educativa e scuola di base*, Brescia, La Scuola 1985

Caredda C., Polo M., - *Insegnare Matematica in prima elementare,* Teramo, Lisciani & Giunti,1987

Documents Pedagogiques, Ministere de l'education nationale et de la culture francaise, 1981

C.M.n 1, 1988 - L. 148, 1990 - C.M. n.339, 1992

Quale algebra nella scuola media?

Gruppo di lavoro Scuola Media

Coordinatori: L. Gherpelli - G. Navarra *

1. Cominciamo col porre alcune questioni concernenti la normale attività che l'insegnante di matematica svolge quando affronta l'algebra.

- In quali momenti (argomenti, temi, episodi, problemi, passaggi logici, ecc.) gli studenti incontrano maggiori difficoltà?
- Quali sono gli errori più frequenti?
- Quali attività possono influenzare / favorire / ostacolare l'apprendimento dell'algebra?

Come si vede, si tratta di questioni essenziali per una valutazione non solo degli atteggiamenti degli studenti, ma anche di quelli degli stessi insegnanti. Esse fanno parte di una questione molto più generale: "Qual è l'algebra che *io* insegno?"

Su queste tematiche si sono sviluppati negli ultimi anni molti filoni di ricerca in conseguenza delle difficoltà e degli ostacoli riscontrati ovunque nel mondo quando gli studenti affrontano l'algebra, dai primi approcci sino all'università.

Lo scopo che ci ripromettiamo è di illustrare, attraverso l'analisi di attività svolte in classi di scuola media inferiore, alcune parziali conclusioni alle quali è giunto su questi argomenti il nostro gruppo di ricerca. Evidenzieremo degli atteggiamenti che a nostro avviso sarebbe opportuno che gli insegnanti affinassero nell'affrontare l'algebra e nel considerare gli elaborati degli alunni e mostreremo inoltre come sia utile (vorremmo scrivere *necessario)* che l'insegnante impari a sviluppare, nella sua attività di routine, un atteggiamento simile a quello del *ricercatore*, con l'obiettivo di fondo di capire come impostare, gestire, modificare una didattica che *dia un senso all'algebra*.

Ma prima di fare questo svolgeremo brevemente qualche riflessione di carattere generale, soffermandoci su alcuni nodi attorno ai quali è impegnata la ricerca internazionale in didattica della matematica.

2. L'insegnamento tradizionale dell'algebra è in crisi. Due delle probabili cause sono

- l'investimento di un tempo eccessivo nell'esercizio delle tecniche;

* GREM - Dipartimento di Matematica - Università di Modena

- il mancato riconoscimento dei blocchi psicologici che impediscono l'accettazione del linguaggio algebrico da parte degli studenti.

Ci si chiede

- "Perché così tanti studenti sbagliano nell'imparare il linguaggio formale dell'algebra?"
- "Perché le opinioni e le conoscenze sbagliate sono così resistenti al cambiamento?" Esperienze con alunni di 12-13 anni portano a ritenere che le nozioni di algebra elementare non siano necessariamente difficili in sé, piuttosto che i difetti si trovino nella pratica didattica che non tiene sufficientemente conto
- di una diffusa inadeguata comprensione dell'aritmetica,
- delle difficoltà di tipo linguistico connesse con l'apprendimento di un linguaggio formale.

Dedicheremo ora la nostra attenzione a quattro tematiche all'interno delle quali i ricercatori si stanno confrontando:

(i) l'individuazione dei blocchi psicologici che possono ostacolare l'accettazione del linguaggio algebrico;
(ii) l'analisi degli errori commessi dagli studenti;
(iii) le influenze del linguaggio naturale sulla comprensione e l'uso di un linguaggio formale
(iv) le attività che possono influenzare / favorire l'approccio all'algebra.

Ne ricordiamo altre tre, anch'esse di grande importanza:

- il passaggio dall'aritmetica all'algebra,
- i processi cognitivi che influenzano la comprensione dell'algebra,
- le difficoltà e i misconcetti nello studio dell'algebra.

(i) I blocchi psicologici. Alcune cause possono essere individuate nell'assenza di appropriate strutture aritmetiche dalle quali generalizzare (per es: aver confidenza col fatto che 'aggiungere quattro a dieci' può essere scritto sia come '4 + 10' che come '10 + 4'). In altre parole, si suppone che, senza una completa consapevolezza delle procedure in aritmetica e del modo in cui esse sono scritte, gli studenti possiedano una base concettuale troppo povera sulla quale costruire successivamente le conoscenze algebriche.

Altre cause si trovano nella presenza di primitivi (o intuitivi) modelli relativi alle operazioni che - pur legittimi - possono risultare fuorvianti, oppure inibire, delle progressioni concettuali. Per es. il modello della moltiplicazione come addizione ripetuta richiede che il moltiplicando sia un numero *intero*. Se '3x' viene interpretato come 'x+x+x' (cioè: 'tre volte x'), allora per lo studente '0,3x' ('0,3 volte x') non ha senso.

Oppure: spesso moltiplicando e moltiplicatore non sono visti come cose aventi *identico status*. Lo studente cioè vede '2' in '2y' come un entità diversa da 'y'. Dovrebbe essere in grado di parafrasare '2y' come 'due volte y' e cogliere così l'equivalenza con 'y volte 2'; però accade che se lo studente scrive 'y2', l'insegnante gli dice che ha sbagliato (naturalmente è di fondamentale importanza approfondire il concetto di convenzione).

(ii) Ha assunto importanza sempre più rilevante l'analisi fine degli errori commessi dagli studenti quando traducono in una equazione una situazione problematica. Alcuni esempi:

- tentano (come ogni cattivo traduttore) una traduzione "letterale" del testo;
- non conoscono oppure non usano le convenzioni della notazione algebrica;
- interpretano i numeri come aggettivi, e le lettere come etichette o come abbreviazioni;
- interpretano un'equazione come sequenza di istruzioni, nel quale caso l'"=" significa 'dà luogo a';
- non sanno interpretare testi di problemi "a traduzione non sequenziale" vale a dire problemi nei quali l'ordine con cui i vari termini figurano nel testo non è quello adeguato alla loro elaborazione;
- non distinguono chiaramente somme, prodotti e potenze (ambiguità fra struttura additiva e moltiplicativa);
- hanno idee confuse su rapporto e differenza.

Si ipotizza inoltre che abitudini inconsce e processi cognitivi presenti nell'uso del linguaggio naturale possano entrare in conflitto con le procedure richieste per lavorare con un linguaggio formale (ad es: 'y è tre volte più grande di z' viene tradotto in modo errato '$y = 3x + z$' oppure '$y = 3x > z$').

Sembra opportuno però sottolineare come gli errori e le misconcezioni degli allievi spesso non siano né prese a cuor leggero né stupide, ma rappresentino il risultato di riflessioni e di tentativi ragionevoli per attribuire un senso ad espressioni matematiche altrimenti prive di significato. Alcuni potrebbero indicare, più che ragionamenti scorretti, ragionamenti *interrotti*, rappresentando così l'inizio di riflessioni potenzialmente produttive.

(iii) Per quanto concerne le influenze del linguaggio naturale sulla comprensione e sull'uso di un linguaggio formale, si è evidenziato come procedure intuitive nell'uso del linguaggio naturale possano inibire la comprensione e l'uso di un linguaggio formale. Capiamo meglio questo ricordando alcuni caratteri della lettura che conveniamo di chiamare "normale":

- non è accurata: parole saltate o lette frettolosamente spesso non impediscono di cogliere il senso; questa tecnica è insufficiente per leggere un linguaggio formale.
- non necessita di identificare i simboli in ordine sequenziale: per un lettore competente, la lettura di un testo non è un processo di riconoscimento di ogni parola una dopo l'altra; in algebra invece deve essere così.

- privilegia le chiavi contestuale e semantica per supportare la costruzione del significato: nell'interpretazione delle espressioni algebriche è determinante il controllo dell'aspetto sintattico.
- non richiede un'attenzione particolare per la struttura del testo: spesso gli studenti si concentrano sul contenuto del problema e non sono in grado di cogliere la sua "identità strutturale".

Bisogna quindi che gli alunni siano messi sull'avviso che sono necessarie strategie diverse da quelle "normali" per leggere e trattare simbolismi scritti.

(iv) Accenniamo infine ad attività che è assodato che possano favorire, o comunque influenzare, lo studio dell'algebra.

(a) Che possono favorire:

- tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico;
- rifettere su parafrasi di frasi traducibili con le stesse equazioni;
- in generale, riflettere costantemente sui significati;
- analizzare accuratamente - da parte dell'insegnante da solo e/o con la classe - gli errori commessi nella traduzione.

(b) Che certamente influenzano:

- lo stile in cui vengono presentate agli allievi le situazioni problemiche;
- le consegne che richiedono risposte in ambiti linguistici differenti (ad es: far esprimere la stessa informazione con un diagramma e in notazione matematica).

3. A conclusione di quanto abbiamo scritto sinora, il linguaggio algebrico andrebbe insegnato in analogia con le lingue naturali, portando l'allievo a

- padroneggiare la grammatica e la sintassi (termini, segni, convenzioni di scrittura per la generazione di espressioni);
- conoscere le regole di trasformazione;
- saper effettuare traduzioni da un linguaggio all'altro (leggere-interpretare formule in linguaggio algebrico e viceversa);
- saper esprimere in formule le proposizioni del linguaggio ordinario e le proprie idee nel nuovo linguaggio (argomentare e dimostrare tramite formule e loro trasformazioni algebriche).

Nell'insegnamento questi aspetti dovrebbero intrecciarsi ed essere sviluppati in modo equilibrato, ma nella prassi difficilmente si punta allo sviluppo contemporaneo di tali abilità e in generale si finisce con il privilegiare lo studio formale del linguaggio senza far acquisire quelle capacità interpretative ed espressive legate alle attività di matematizzazione e di risoluzione di problemi che stanno alla base del fare matematica. Mostreremo ora come queste linee di principio trovino invece attuazione pratica all'interno del nostro progetto di ricerca nella scuola media inferiore, evidenziando le modalità degli interventi e gli obiettivi che ci siamo posti sia sul piano educativo (acquisizione di conoscenze e di competenze da parte degli alunni) che su quello della ricerca (affinamento di un'attività mirata a fornire un contributo al miglioramento della didattica dell'algebra).

4. Il progetto nasce dall'ipotesi che una maggiore gradualità nell'approccio all'algebra, rispetto a quanto appartenga alla prassi abituale, possa consentire agli alunni di conoscere in modo più approfondito e consapevole il linguaggio algebrico, e ai docenti di seguire con maggiore attenzione e consapevolezza gli ostacoli che gli allievi incontrano.

Come indicazione di carattere generale, questo è il piano di lavoro nel triennio:

classe prima: introduzione al codice algebrico, la lettera come incognita / costante / variabile, le lettere per argomentare e dimostrare;

classe seconda: le lettere per generalizzare, avvio alla conoscenza e all'uso del metodo algebrico per la soluzione dei problemi, interpretazione e confronto di scritture (con l'obiettivo della semplificazione);

classe terza: approfondimento del linguaggio delle lettere (per un'interpretazione più raffinata delle scritture algebriche), tecniche di calcolo letterale (per un utilizzo migliore del linguaggio algebrico), analisi critica di scritture (ricerca della loro sensatezza), problemi con più di una incognita affrontati e risolti per via algebrica, studio di equazioni di primo grado ad una incognita, sistemi lineari in più incognite.

Entriamo ora nel merito del progetto.

5. Abbiamo sottolineato nel secondo paragrafo come molti degli insuccessi degli allievi siano spesso riconducibili a scelte didattiche tanto diffuse quanto rischiose (tempo eccessivo - se non, di fatto, esclusivo - nell'esercizio delle tecniche), e quindi sbagliate, o quanto meno opinabili, perché legate ad una tradizione più preoccupata di preparare sul piano tecnico che su quello formativo (obiettivo quest'ultimo più volte sottolineato dai Programmi Ministeriali).

La preoccupazione dei docenti (e delle famiglie) di agevolare l'inserimento degli alunni nella scuola superiore fa sì che si sposti l'attenzione su questioni che favoriscono solo apparentemente (e momentaneamente) una continuità di apprendimento. In realtà, indipendentemente dagli sforzi dei docenti della scuola media inferiore - soprattutto, lo rimarchiamo, nella direzione dell'acquisizione delle tecniche di calcolo - i docenti del biennio (di qualsisi tipo di scuola) registrano puntualmente le difficoltà degli allievi nell'analisi critica della scrittura algebrica, nel controllo delle regole sintattiche e, più in generale, nel controllo di tutte quelle problematiche che si possono affrontare solo se si è in grado di dominare il <u>linguaggio algebrico</u>. Citando Schoenfeld: solo se l'algebra è entrata nelle *concezioni epistemologiche* dell'alunno.

Nel terzo paragrafo abbiamo introdotto il concetto di insegnamento dell'algebra in analogia alle lingue naturali e sappiamo, in generale, quanto sia lungo e difficile il cammino per conquistare un'accettabile capacità di esprimersi attraverso una lingua nuova (padroneggiare grammatica, sintassi, regole di trasformazione, saper tradurre usando, se necessario, un linguaggio formale) soprattutto quando - come nel caso dell'algebra - le occasioni per conoscerla e per usarla sono saltuarie e spesso insufficienti.

Vediamo come possiamo intervenire in questo senso.

6. Una prima operazione di metodo è naturalmente quella di <u>aumentare le possibilità di incontrare il linguaggio algebrico lungo l'arco dell'intero triennio</u> attraverso occasioni che consentano agli allievi di arricchire progressivamente le loro conoscenze in questo ambito. Ad esempio, iniziando da situazioni relativamente semplici - come ad esempio rappresentare in generale i numeri pari, o i multipli di un intero - che danno utili opportunità sia per arricchire il linguaggio matematico che per affrontare prime situazioni a sfondo algebrico.

Evidentemente lo scopo ultimo di diluire nel tempo l'insegnamento dell'algebra non è quello di "fare più algebra", quanto di cercare di costruire lentamente un embrione di mentalità algebrica promuovendo in modo significativo - è importante sottolineare questo aspetto - il contributo attivo da parte degli allievi. Sulla scorta della nostra esperienza, se vengono opportunamente indirizzati sin dalla prima media, già nel corso della seconda sono in grado di distinguere con una accettabile autonomia le situazioni nelle quali è sufficiente il controllo del "linguaggio dei numeri" da altre nelle quali invece occorre sfruttare il "linguaggio delle lettere".

7. Ma le difficoltà degli allievi non derivano solo dal linguaggio. Per "fare algebra" occorrono non solo <u>requisiti</u> collegati direttamente a specifiche conoscenze, ma anche <u>atteggiamenti</u> - che sono probabilmente più difficili da raggiungere - la cui importanza è spesso sottovalutata dagli insegnanti. Parliamo di quegli atteggiamenti che consentono (i) di affrontare <u>argomentazioni</u> e <u>dimostrazioni</u>, (ii) di <u>risolvere problemi per via algebrica</u> o, più semplicemente, (iii) di <u>*saper leggere*</u> (cioè interpretare) una scrittura algebrica.

(i) Per esempio, prerequisito per affrontare una <u>dimostrazione</u> è la capacità di <u>ragionare sotto ipotesi</u>, e di argomentare poi su di esse; sulla base della nostra esperienza, e dei risultati della ricerca, tale capacità non è né innata né facile da conquistare.

(ii) Oppure: la <u>soluzione dei problemi per via algebrica</u>, di cui ci siamo specificatamente occupati nel nostro progetto mette anch'essa in gioco quel modo di ragionare, tipicamente matematico, che porta a supporre come data una certa informazione ("se chiamo 'a' la misura di un segmento AB, allora... ") e poi a costruire su quel gioco di finzione delle relazioni algebriche (di uguaglianza) dallo sviluppo delle quali si potrà verificare il valore delle supposizioni iniziali.

(iii) Ancora: la lettura di una frase scritta nel linguaggio algebrico, e ancor più delle sue eventuali trasformazioni, richiede una disposizione mentale da parte dell'allievo che gli consenta di superare un atteggiamento precedentemente acquisito - e fortemente consolidato, in molti casi addirittura radicato - che lo induce a "ricercare il risultato" nella forma esclusiva del valore numerico, o al più di un monomio, ma non, per esempio, di un binomio.

8. In conclusione, riteniamo che nel corso del triennio della scuola media vadano coltivati entrambi questi atteggiamenti (l'attenzione verso gli aspetti procedurali, l'attenzione verso gli aspetti linguistici), perché ad essi sono collegate finalità molto diverse e altrettanto importanti. Gli alunni dovrebbero essere educati (attraverso attività sulle espressioni come "stima di risultati", o su numeri scritti come prodotto di fattori o somma di addendi, ecc.) a leggere criticamente il linguaggio matematico, imparando a trarre il massimo delle informazioni possibili da una scrittura matematica. Ad esempio, l'analisi di $z=3x5x2^2x12$ permette di individuare numerose informazioni sulla divisibilità di z (e quindi di riflettere su di esso *argomentando)*, ma offre anche la possibilità di conoscerne l'identità *(calcolandola)*.

Coerentemente con questa impostazione si possono proporre nella terza classe - in una chiave che pone l'accento sul confronto di strategie - molto diversa rispetto alla comune metodica - degli esercizi che solitamente vengono considerati di passaggio tra il calcolo numerico e quello letterale. Alludiamo alle attività del tipo "Calcola il valore della seguente espressione letterale, sostituendo alle lettere i valori numerici indicati: $2a+6-(a-2b)-3b$ per $a=5/2$; $b=-1/3$". In questi casi, se invitiamo gli allievi a seguire due strategie diverse ("sostituisci i valori numerici e risolvi l'espressione numerica corrispondente" e "semplifica e poi sostituisci i valori numerici") essi potranno rendersi conto di due cose altrettanto importanti: che in molti casi vale realmente la pena (in termini di *economia di pensiero)* di seguire la strada della manipolazione della scrittura algebrica e che l'ultimo passaggio di tale manipolazione, qualunque sia, anche un polinomio, va "accettato" come risultato.

Un'altra esperienza comune per gli insegnanti è che l'alunno scriva $5a+7b=12ab$ oppure $3b^2+4b^2+5b^2=12b^6$. In questi casi, a nostro avviso, si evidenzia la mancata comprensione, nella fase aritmetica, del ruolo della proprietà distributiva.

La capacità di leggere e di manipolare una scrittura algebrica diventa elemento fondamentale anche nella soluzione di problemi attraverso equazioni, attività che nel nostro progetto abbiamo anticipato alla prima media - lavorando

su semplici frasi aperte del tipo $a*5+7=27$, oppure su giochi del tipo "pensa un numero, raddoppialo, aggiungi 3, ..." - e che abbiamo continuato nella seconda proponendo situazioni con più di una incognite.

È molto importante sottolineare ancora una volta - a completamento di queste brevi note - che tutte queste attività siano rese possibili (e danno complessivamente risultati confortanti) proprio perché vengono accuratamente impostate le condizioni al contorno per poterle svolgere, e cioè gli alunni vengono abituati sin dall'inizio:

- ad utilizzare le lettere come numeri nascosti;
- ad affrontare l'interpretazione delle scritture algebriche;
- a convertire relazioni in termini di uguaglianza nel linguaggio matematico.

Bibliografia

Arzarello F, Bazzini L., Chiappini G., 1994, *L'algebra come strumento di pensiero, Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico del CNR, Quaderno n°6

Bell A., 1976, A study of pupils'proof explanations, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, 23-40

Chevallard Y, 1989-1990, Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, II e III parte, *Petit X*, n.19, 43-72 e n. 23, 5-38

Herscovics N., 1989, Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra, in Wagner S. e Kieran K. (a cura di), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, LEA, Reston Virginia, 60-86

Kieran K., 1992, The Learning and Teaching of School Algebra, in Grouws D.A. (a cura di), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NY, 390-419

Kuchemann D.E., 1981, Algebra, in Hart K. (ed.) *Children Understanding Mathematics*: 11-16, Murray, London

Mac Gregor M., 1991, *Making Sense of Algebra: Cognitive Processes Influencing Comprehension*, Geelong: Deakin University

Mac Gregor M., Stacey K., 1993, Cognitive Models underlying students' formulation of simple linear equations, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, n. 3, 217-232

Malara N.A., 1994, Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?, in D'Amore B. (a cura di), *L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica*, Pitagora (BO), 1994, 67-77, ora anche in *L'Educazione Matematica*, 1996, anno XVII, serie V, vol. 1, 80-99

Malara N.A., Gherpelli L., 1994, Argomentazione in Aritmetica, in Basso e altri (a cura di), *Numeri e Proprietà*, CSU, Parma, 55-60

Malara N.A., Gherpelli L., 1995, Un aspetto di una ricerca sperimentale nel triennio di scuola media: la risoluzione di problemi algebrici, *V Seminario Italo-Francese SFIDA*, Nizza dicembre 1995

Malara N.A., Gherpelli L., 1996, Argomentazione e dimostrazione in aritmetica nel triennio di scuola media, in Grugnetti L. et Alii, *Argomentare e Dimostrare nella scuola media*, Atti del XV Convegno Nazionale Internuclei Scuola Media, Salice Terme (PV) aprile 1996, versione inglese in stampa su *Proc. Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Nicosia gennaio 97)

Reggiani M., in stampa, Continuità nella costruzione del pensiero algebrico, *atti del XVIII Convegno nazionale UMI-CIIM* (Campobasso, ottobre 1996)

La probabilità nella Scuola Media, verso le Superiori

Gruppo di lavoro Scuola Media

*M. Barra**

Nel gruppo di lavoro sull'insegnamento della probabilità gli insegnanti dovevano compilare, in momenti diversi, i due questionari che seguono. Questi sono stati accompagnati da alcune informazioni storiche sugli abbagli presi sull'argomento, da alcuni matematici, anche molto famosi. Non si riportano, nei dettagli, i dati dello svolgimento dei test, perché la numerosità del campione è troppo esigua per considerarlo statisticamente significativo. Ciò verrà fatto nel prossimo convegno di Roma sull'insegnamento del calcolo delle probabilità, ove, più che accennare ai dati relativi al convegno di Campobasso, si riporteranno i risultati ottenuti nell'arco di più di 10 anni, parlando anche dell'evoluzione nelle conoscenze degli insegnanti in questo periodo, almeno per quanto riguarda le risposte date ai questionari sui temi contenuti.

Come viene anche dichiarato esplicitamente, le risposte ai test hanno costituito l'occasione di parlare di alcuni argomenti di probabilità, dopo una prima riflessione degli insegnati.
La discussione sembra essere stata attenta e soddisfacente.

Qui si può dire soltanto, considerando anche i limiti di spazio, che in alcuni casi permane qualche difficoltà sulla rappresentazione degli eventi e che questa sembra essere collegata a degli errori che si commettono nella comprensione di alcuni aspetti della nostra materia.
Molti item sono relativi alla "Legge dei Grandi Numeri" e qui verrà riportata qualche argomentazione che appare efficace per affrontare alcuni nodi concettuali dell'argomento.
In positivo risulta l'evoluzione della percentuale di risposte esatte (30 Km orari) all'item n.10, rispetto alla quasi totalità di risposte errate (40 Km orari) che si ottenevano anni addietro, quando non veniva in mente di ponderare la media aritmetica rispetto al tempo. A questa, più che all'uso, egualmente corretto della media armonica, si giunge facilmente calcolando il tempo totale che occorre su un tragitto qualsiasi (es.: 60 Km percorsi sia a 60 Km/h, che a 20 Km/h).

Su questo argomento, come forse per molti altri, si può ipotizzare una

* Dipartimento di Matematica, Università "La Sapienza" di Roma

crescita collettiva delle conoscenze, pur se molto graduale.

Gli ultimi due item sono serviti di introduzione per alcuni aspetti semplici della statistica Bayesiana.

La Legge dei Grandi Numeri

Per la Legge dei Grandi Numeri, riferendosi al lancio di una moneta "simmetrica", l'ulteriore domanda cui si chiede di rispondere è:

> "se la frequenza relativa di testa tende alla frequenza relativa di croci, come mai, se c'è un "eccesso" nel numero di teste, non è necessario un "recupero" di quello delle croci ?"

Qui le risposte sembrano influenzate dalle difficoltà connesse con il concetto di infinito che, per la media della differenza in assoluto fra i numeri di teste e di croci, che indichiamo con D, è dell'ordine di $\sqrt{n}$.

Questa, ad esempio, si può valutare tenendo presente che, per n variabili aleatorie indipendenti (nel nostro caso si tratta di eventi, che in generale, si possono considerare variabili aleatorie che assumono i valori zero ed uno), la varianza della somma è pari alla somma delle varianze, e che quindi il totale cresce con n. Ma allora valutando per eccesso la media dello scostamento da zero di D, con il suo scarto quadratico medio, questa risulta dell'ordine di $\sqrt{n}$. Contrariamente quindi a quanto si afferma spesso rispondendo all'item n.5, ove è possibile confondersi fra valore assoluto e relativo, non si può dire che "all'aumentare del numero dei lanci aumenta la probabilità che il numero delle teste differisca sempre meno dal numero delle croci" perché viceversa la media di D tende all'infinito. L'affermazione fra virgolette è vera solo nel calcolo analogo del valore relativo, perché $\sqrt{n}/n$ tende a zero come $1/\sqrt{n}$.

Spesso si incontrano in proposito errori, o esposizioni che allontanano dalla comprensione, come accade nella trattazione dell'argomento da parte dello stesso School Mathematics Project (SMP) ove si pone in evidenza un esempio in cui, all'aumentare del numero delle prove, diminuiscono gli scarti fra i numeri che esprimono le uscite in un dado. Egualmente l'errore potrebbe essere indotto dalla pratica di mettere uno stesso segno sotto l'indicazione di un risultato, ogni volta che questo si verifica. Ciò che implicitamente se ne potrebbe indurre è che, anche per la frequenza relativa, i risultati continuino a valere sempre allo stesso modo e non con un "peso" che diminuisce secondo n.

Così, anche se nei primi 100 lanci di una moneta "simmetrica" venisse sempre testa (questo accade con probabilità bassissima (2^{-100}, che è dell'ordine di 10^{-30}) tanto da "far gettare via la moneta"), la frequenza relativa di testa di $\frac{100}{100}$

all'aumentare del numero dei lanci, può tendere ad $\frac{1}{2}$ senza bisogno di alcun "recupero" nel numero delle croci. Infatti se, per esempio, testa comparisse su metà dei lanci successivi (ed ugualmente, più in generale se le teste su n lanci risultassero, come in teoria per la loro media, dell'ordine di $n/2 \pm c\sqrt{n}$, ove c'è una costante) egualmente, all'aumentare del loro numero n, si avrebbe $\frac{100+\frac{n}{2}}{100+n} \to \frac{1}{2}$.

In altri termini, l'apporto alla frequenza relativa dei primi risultati, tende a zero: $\frac{100}{100+n} \to 0$.

Questo suggerisce una traduzione grafica, di quanto abbiamo visto, che in alcune sperimentazioni svolte in terza media, è sembrata utile.

Si lancia più volte una moneta e si rappresentano le uscite di testa e croce <u>sempre all'interno dello stesso quadrato</u> (ad es.) <u>con dei simboli che divengono in tal modo sempre più piccoli</u>.

Così ad esempio, in questa sperimentazione nella scuola media, nei primi 9 lanci di una moneta, sono state ottenute 7 teste, rappresentate ciascuna con una lettera T di colore rosso, e 2 croci, per ognuna delle quali è stata usata una lettera C di colore giallo. Le T e le C sono state inserite in 9 spazi uguali in cui è stato diviso un quadrato Q. Aumentando il numero dei lanci sono stati rappresentati, in altri 3 quadrati grandi come Q, i risultati che si sono avuti rispettivamente in 100 (56 teste e 44 croci), 625 (319 teste e 306 croci) e in 10.000 lanci (4972 teste e 5028 croci), ottenuti facendo collaborare più studenti di varie classi. L'andamento della frequenza relativa era così molto "soddisfacente" perché, alla fine, differiva da 1/2 di pochi centesimi. Poiché Q era un quadrato quadrettato di 25 quadretti per lato, nella rappresentazione finale, ogni quadretto ha dovuto ospitare 4 righe e 4 colonne di puntini colorati. Le dimensioni del quadrato e i colori erano cioè sempre gli stessi ma, come già detto, le lettere divenivano necessariamente sempre più piccole, traducendo così correttamente il loro apporto, gradualmente minore, all'interno della frequenza relativa. Era così impossibile indicare con continuità le varie uscite sulle monete, e per 3 volte sono stati copiati i risultati già ottenuti, ma la traduzione globale di uno dei nodi concettuali più importanti della Legge dei Grandi Numeri, è sembrata convincente. Lo scarto assoluto fra i numeri di teste e croci era stato rispettivamente di 7, 16, 13 e 56, cioè tendenzialmente in aumento, come da copione teorico, ma ugualmente le masse di colore giallo e rosso, da molto differenti, erano divenute apparentemente uguali.

L'ordine di grandezza di $\sqrt{n}$ della media degli scarti assoluti fra testa e croce, viene così rappresentato dalla differenza di una sola riga fra i numeri di quelle dei due colori: mezza riga in più e mezza in meno, rispetto alla metà del quadrato. E con questa metà, ciascuna massa di colore sempre più si confonde.

Questionario n.1 sulle conoscenze e sui tipi di ragionamento relativi ad alcuni aspetti del calcolo delle probabilità.

Sigla di chi compila il test .... Orario di: inizio test ...... fine test ......
Hai sostenuto l'esame di calcolo delle probabilità ? .... Stai insegnando ? ....
Se stai insegnando, indica la qualifica e il tipo di scuola ....
Ci interessa conoscere le frequenze o le eventuali correlazioni fra le risposte alle domande che seguono, anche come occasione per parlare di alcune questioni di calcolo delle probabilità. Tieni presente che:

- Puoi dare le risposte nell'ordine che preferisci.
- Se non riesci a determinare numericamente una probabilità, puoi dare una risposta qualitativa del tipo: "poco probabile", "circa il 50%", "più (o meno) probabile".
- Se non hai tempo di rispondere ad una domanda puoi barrare la lettera (t) che si trova alla fine dello spazio per la risposta.
- Se non credi di saper rispondere ad una domanda puoi barrare la lettera (c).
- Sei pregato di usare solo questo foglio, o il retro, anche per: calcoli, disegni, scarabocchi ...

<u>Significato dei termini</u>: "prendere una pallina a caso" ≡ stessa probabilità di estrarre ogni pallina; "moneta o dado simmetrici" ≡ uguale probabilità per ogni faccia; B ≡ pallina bianca, N ≡ pallina nera.

Rappresenta i seguenti eventi con i diagrammi di Venn ("frittate" all'interno di un rettangolo), curandone la posizione reciproca (eventuali sovrapposizioni o inclusioni):

I) "Lancio di 2 monete":
A = esce testa sulla I moneta e testa sulla II
B = esce testa sulla I moneta e croce sulla II

II) "Lancio di 2 dadi":
C = esce 6 sul I dado
D = esce 2 sul II dado

III) Ancora "lancio di 2 dadi":
E = la somma delle 2 facce che si presentano è 9
F = le facce dei due dadi sono differenti

IV) G = mi sveglio la mattina
H = l'unico mezzo che mi può portare in ufficio arriva a destinazione
L = prendo un caffé al bar dell'ufficio

V) M = Mario va a pattinare
N = Nino si sposa

1) Nel gioco del Lotto (5 numeri estratti fra 1 e 90, senza reimbussolamento) la probabilità che escano i numeri 7,83,32,41,19 è maggiore uguale o minore della probabilità che escano i numeri 1,2,3,4,5 ? Rispondi con un cerchio su una delle parole sottolineate: la probabilità di (7,83,32,41,19) è <u>maggiore</u> <u>uguale</u> <u>minore</u> della probabilità di (1,2,3,4,5) ? .... (t) (c)

2) In un'urna ci sono queste palline: BBNN. Si prendono a caso 2 palline contemporaneamente: quale è la probabilità che abbiano colore differente ? .... (t) (c)

3) Qual'è la probabilità di ottenere 3 teste nel lancio di 3 monete simmetriche ? .... (t) (c)

4) Qual'è la probabilità che esca almeno un 4 nel lancio di 3 dadi simmetrici ? .... (t) (c)

5) Viene lanciata più volte una moneta simmetrica. Si può dire che all'aumentare del numero dei lanci aumenta la probabilità che il numero delle teste differisca sempre meno dal numero delle croci ? .... (t) (c)

Questionario n.2 sulle conoscenze e sui tipi di ragionamento relativi ad alcuni aspetti del calcolo delle probabilità.

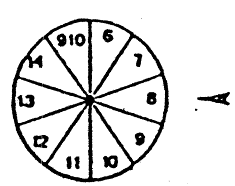
Sigla di chi compila il test .... Orario di: inizio test ...... fine test ......
Hai sostenuto l'esame di calcolo delle probabilità ? .... Stai insegnando ? ....
Se stai insegnando, indica la qualifica e il tipo di scuola ....
(Stessa premessa del test precedente)

6) Viene lanciata più volte una moneta simmetrica. Nei primi 30 lanci la frequenza relativa di testa risulta essere 2/3. Si può dire che all'aumentare del numero dei lanci aumenta la probabilità che la frequenza relativa di testa differisca sempre meno da 1/2 (considerando nella frequenza anche i primi 30 lanci) ? .... (t) (c)

7) Viene lanciata più volte una moneta simmetrica. Se viene testa guadagni una lira, se viene croce perdi una lira. Dopo 1000 lanci stai perdendo 100 lire (il guadagno è cioè: -100). All'aumentare del numero dei lanci quale sarà, in media, il tuo guadagno (considerando anche quanto è avvenuto nei primi 1000 lanci) ? .... (t) (c)

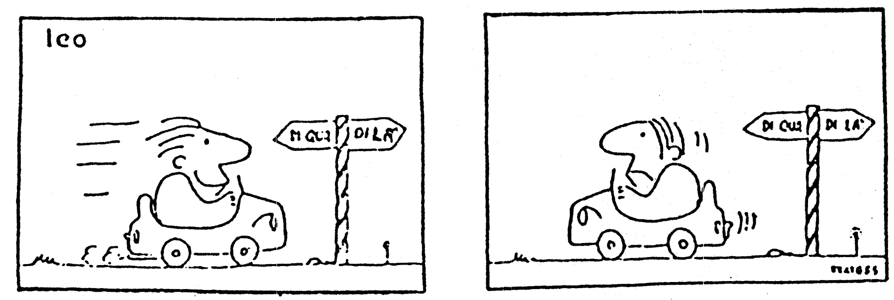
8) Quale è il numero medio di lanci per ottenere per la prima volta 5 con un dado simmetrico ? .... (t) (c)

9) Nella roulette disegnata a fianco si svolge il seguente gioco: si fa girare la roulette e prima che si fermi ciascun giocatore scrive un numero x_i, **uguale o diverso** rispetto a quelli indicati sulla roulette. Conosciuto il risultato x ciascun giocatore paga al banco la differenza assoluta $|x_i - x|$.
Alla fine del gioco il capitale del banco viene diviso fra i giocatori in parti uguali. E' chiaro che vince di più chi ha pagato di meno. In questo gioco:



- quale numero conviene scrivere? .... - E' dannoso scrivere sempre lo stesso numero ? .... - Che cosa conviene considerare per decidere quale numero scrivere ? .... (t) (c)

10) Leo Gali va al mare alla velocità media di 60 Km/ora. Al ritorno, sullo stesso percorso, la velocità media di Leo Gali é di 20 Km/ora. Quale è la velocità media di Leo sull'intero percorso? .... (t) (c)



11) In un'urna U ci sono 2 palline di colore ignoto. Potrebbero esserci 3 tipi di composizione: NN, BN, BB e si assegna uguale probabilità (1/3) alle 3 ipotesi. E' come se ci fossero 3 urne con le composizioni date e se ne scegliesse una a caso. Si estrae da U una pallina a caso. Quale è la probabilità che sia bianca ? .... (t) (c)

12) Dall'urna precedente U, vengono estratte: una B, che si rimette nell'urna, e poi ancora una B, anch'essa reimbussolata. Si effettua una terza estrazione. Quale è ora la probabilità di estrarre una pallina bianca ? .... (t) (c)

Logica e linguaggio

Gruppo di lavoro Scuola Media

*Coordinatore: R. Tortora**

Originariamente il gruppo doveva essere riservato ad insegnanti di scuola media inferiore, ma nei fatti si è svolto con la presenza anche di numerosi insegnanti di scuola superiore, ed alcuni universitari, con una partecipazione complessiva di un numero di persone superiore al previsto. Il lavoro è stato coordinato da me con la collaborazione del prof. Giulio De Cunto, insegnante di scuola media della provincia di Benevento.

Punto di partenza della discussione è stata una introduzione sulla storia della Logica nell'ambito della scuola italiana. Da quando è stata inserita questa materia nei programmi scolastici, il dibattito è tutt'altro che concluso su varie questioni: quali argomenti trattare, come, in che momento del curriculum. A questi problemi si è dedicata una parte della discussione, arrivando a concludere che, anche tenendo conto delle indicazioni dei programmi ufficiali, la logica non deve essere un capitolo a se stante del programma di matematica, ma piuttosto deve informare di sé ogni altro argomento di matematica, allo scopo di stimolare negli studenti un uso attento e consapevole del linguaggio e una progressiva capacità critica nel capire e produrre una argomentazione.

Purtroppo al conseguimento di questo obiettivo, si oppongono vari ostacoli: in primo luogo nei libri di testo quasi sempre la logica risulta confinata in un capitolo o due a parte - la stessa cosa capitata anni addietro alla teoria degli insiemi. Messa così, la logica serve a ben poco, e addirittura rischia di essere controproducente. Una sistemazione astratta di nozioni che hanno motivazione intuitiva e spontanea, come potrebbe essere ad esempio la naturalezza di un ragionamento corretto, rischia di capitare o troppo presto o troppo tardi, irreparabilmente sfasata rispetto alle necessità cognitive e operative degli studenti. Diventa una nuova cosa da imparare, può in certi casi perfino essere divertente, ma solo da parte di pochissimi potrà essere capita.

Un altro ostacolo è la scarsa preparazione di base degli insegnanti, che troppo spesso non hanno avuto occasione di studiare questa disciplina nel loro curriculum formativo, e non si tratta di un tipo di conoscenza che può essere improvvisato. E tuttavia questo ostacolo va tenuto presente, ma non può costituire un impedimento totale rispetto all'assunzione di iniziative nella scuola.

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli

L'importanza del linguaggio è stata sottolineata da molti e si è riconosciuta l'opportunità di un possibile momento di collaborazione tra insegnanti di diverse materie, soprattutto di Matematica e di Italiano: attività di Logica potrebbero essere anche realizzate in forma sperimentale con una compresenza di due insegnanti nella stessa classe.

Un punto molto delicato è infatti la notevole distanza che intercorre tra il linguaggio ordinario e quello formale. Gli esempi sono sotto gli occhi di tutti e non è il caso di riportarne: basti solo pensare all'uso formale del connettivo implicazione che si discosta completamente dal senso abituale di parole come "se ... allora" o simili. Da questo punto di vista un lavoro utile è quello di analizzare con una certa cura il linguaggio, sia ordinario che simbolico, di cui si fa uso in matematica e confrontarlo con l'analoga analisi del linguaggio naturale. E' stato proposto nel gruppo di provare ad analizzare frasi come "$\frac{3}{4}x = 1$", utilizzando gli strumenti dell'analisi grammaticale e logica e quelli della logica matematica. Questo tipo di esercizi, oltre a costituire occasione di attività interdisciplinare, offrono inaspettate opportunità di approfondimento di concetti di matematica, e contribuiscono ad attivare le capacità critiche degli studenti.

Per la comprensione di nozioni come vero/falso, e dei connettivi, si può cercare di analizzare la correttezza di ragionamenti tratti da testi ordinari (giornali - TV - testi letterari - testi scolastici - vario materiale scritto, in particolare testi prodotti dagli studenti - linguaggio parlato), ma per vari motivi appare preferibile cominciare con situazioni inventate, rimandando ad una situazione di classe più matura quello che è certamente il punto di arrivo più significativo di questo genere di attività e cioè per l'appunto acquistare una certa padronanza critica della correttezza e coerenza del ragionamento, sia quello ascoltato o letto, sia quello prodotto.

Per le situazioni artificiali, una vera miniera sono i libri di indovinelli logici di R. Smullyan. In particolare possono essere usati e sono stati già sperimentati in vari contesti scolastici, gli indovinelli in cui compaiono gli abitanti di un'isola del tutto particolare, che si dividono in due categorie, i Cavalieri e i Furfanti: i primi dicono sempre la verità, i secondi mentono sempre. Nascono una miriade di possibilità di varia difficoltà, il divertimento è assicurato, il raggiungimento di obiettivi didattici pure.

Analoghe a queste invenzioni sono le situazioni da libro giallo, e molte altre che si possono trovare prendendo spunto da situazioni concrete o approfittando di sperimentazioni già effettuate.

Il gioco viene individuato come un momento importante dell'attività didattica per una sua doppia valenza. Intanto è un'attività che contiene significativi aspetti cognitivi, logici, linguistici, che possono essere sfruttati per introdurre, arricchire, precisare nozioni della matematica, della lingua italiana e di altre materie. L'altro aspetto è la motivazione: un'attività avvertita come piacevole crea in classe un clima favorevole all'apprendimento, condizione indispensabile per qualunque impresa didattica efficace.

Un'ampia parte del lavoro del gruppo è stata dedicata alla presentazione di un'esperienza didattica, relativa ad un uso di cruciverba in classi di terza media. Essa mostra come sia possibile, senza entrare nel meccanismo formale della logica, svolgere attività di tipo matematico riservando una particolare attenzione al linguaggio. Si fornisce qui di seguito una breve descrizione di questa attività, segnalando anche possibili varianti.

Si parte dal gioco delle Parole Crociate. Ma invece che far risolvere uno schema, l'attività consiste nel proporre agli studenti un facile schema già risolto, ma privato delle definizioni e invitarli a fornire essi delle definizioni alle parole. Gli studenti della classe vengono divisi in gruppi: a ciascun gruppo viene assegnato un cruciverba diverso e quando un gruppo ha dato tutte le definizioni può ridisegnare lo schema senza le parole e darlo da risolvere ad un altro gruppo. Alla fine di questa fase si discute tutti insieme sulla qualità delle definizioni date, tenendo conto delle caratteristiche particolari che devono avere le definizioni adoperate nei cruciverba.

Questa prima fase dell'attività si può ripetere con prove successive. Si può graduare la difficoltà dello schema, si può alternare il lavoro in gruppetti con quello individuale, eventualmente anche lasciando una parte dell'attività da completare a casa, e sono possibili altre modalità alternative. Attraverso il lavoro svolto in questa prima fase gli studenti si familiarizzano con la nozione di definizione, e riflettono sul ruolo, l'importanza, la ricchezza delle parole.

Nella seconda fase si indaga sulle definizioni di particolari parole di significato matematico. Questa parte dell'attività presa da sola non è nuova, ma è invece stata più volte sperimentata con successo in vari contesti scolastici, specialmente per esplorare nozioni di geometria. Si fissa l'attenzione su una o più parole (per esempio *angolo, parallele, poligono, zero, funzione, monomio,* e così via) e se ne cerca la definizione:

a) nella propria memoria, con tutte le inesattezze del caso;
b) sui libri di testo di matematica (o della materia specifica) - meglio se consultando più libri;
c) su vocabolari - anche qui meglio consultarne più di uno.

Questa ricerca si può fare singolarmente o in gruppo, ma alla fine tutti saranno al corrente delle varie definizioni trovate per la stessa parola. Le parole matematiche potranno scaturire dai cruciverba ma anche dal lavoro che

l'insegnante sta svolgendo nella classe o da qualunque altra fonte, anche occasionale. La ricerca di una definizione dal libro di testo è di per sé un'attività non banale, anche perché bisogna saper distinguere tra definizioni e proprietà: una cosa è la definizione di minimo comune multiplo, altra cosa è la regola per determinarlo. Inoltre questa ricerca richiede e stimola una certa confidenza con il libro.

Si discute delle varie definizioni, per cercare di capire bene il concetto in questione (con un'attività così orchestrata rimane certamente più impresso il significato di un concetto di quanto non accada normalmente), ed inoltre per riflettere su varianti, imperfezioni o anche errori presenti nei vari testi: si troveranno sfumature diverse di significato tra lingua comune (vocabolari) e linguaggio tecnico, si possono fare ricerche e considerazioni etimologiche e storiche, si riflette sull'importanza delle parole e del loro uso appropriato.

Nel confronto con le definizioni enigmistiche e da vocabolario, vien fatto di riflettere sulle caratteristiche di una buona definizione matematica. Essa deve essere chiara, non ambigua, non circolare; essa è inoltre "normativa": quando ad esempio si dichiara che un rettangolo è un quadrilatero con gli angoli retti, poi bisogna attenervisi rigorosamente e concludere ad esempio che un quadrato è un particolare rettangolo. Sono cose ovvie per un insegnante, ma che spesso sfuggono agli studenti anche perché sono presenti solo nella matematica e (molto parzialmente) nelle altre materie scientifiche.

Si possono porre e discutere questioni come: perché occorre dare definizioni, qual è l'uso che se ne fa (nelle dimostrazioni, nelle affermazioni, nella risoluzione di problemi). Si può parlare della libertà che c'è nel definire, delle scelte possibili a volte diverse (un parallelogramma è o no un trapezio? un triangolo regolare è o no isoscele?), della necessità di nozioni primitive, in certa misura dell'arbitrio nella loro scelta, e così via. Se la classe è vivace e la situazione lo consente si può arrivare a capire il ruolo delle definizioni in un sistema matematico di tipo assiomatico (esempio: la Geometria euclidea), oppure si potrà rimandare questo tipo di conclusioni ad un altro momento, anche in un altro anno scolastico, quando richiamando il lavoro svolto, lo si può utilizzare in un contesto di maggiore maturità nel frattempo conseguita.

Nel corso del lavoro del gruppo sono state infine proposte altre attività possibili in una scuola media ma anche in un biennio superiore. Alcune hanno come obiettivi il confronto tra i connettivi della logica matematica e del linguaggio naturale, la ricerca di corrispondenze tra frasi aperte e sottoinsiemi, l'attenzione da riservare ai quantificatori: abituarsi a scovarli là dove sono nascosti nelle frasi della lingua comune e della lingua scientifica (ad esempio in

Italiano nei vari usi possibili dell'articolo indeterminativo) e imparare a collegarli in modo corretto con i vari connettivi, in particolare con la negazione.

Altre attività sono ancora collegate al gioco. E' stato in particolare descritto il gioco MU tratto dal libro di Hofstadter e ne sono state indicate le valenze didattiche per la comprensione delle particolari caratteristiche di un sistema formale.

Si riportano, qui in conclusione, alcuni riferimenti bibliografici che sono stati forniti agli insegnanti in relazione ai temi discussi:

Riferimenti bibliografici

F. ARZARELLO - Matematica e linguistica, idee per un loro sviluppo nelle scuole medie - Franco Angeli, Milano, 1987.

C. BERNARDI - Problemi per la logica (ovvero la logica per problemi) - *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 17 (1994), 507-521

C. BERNARDI - La logica nella scuola secondaria - *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 16 (1993), 1041-1060

B. D'AMORE - Giochi logici, linguistici e matemagici - Franco Angeli, Milano, 1992

G. DOSSENA - Dizionario dei giochi con le parole - Garzanti-Vallardi, Milano, 1994.

D. HOFSTADTER - Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda bizzarra - Adelphi, Milano, 1984.

A. MORELLI e altri - Un'esperienza didattica basata sulle definizioni in Geometria - in corso di stampa su *La Matematica e la sua didattica*

G. NAVARRA - Itinerari attraverso la logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative - *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 16 (1993), 731-756

R. SMULLYAN - Qual è il titolo di questo libro? L'enigma di Dracula ed altri indovinelli logici - Zanichelli, Bologna, 1981.

R. SMULLYAN - Donna o tigre? - Zanichelli, Bologna, 1982.

R. SMULLYAN - Satana, Cantor e l'infinito e altri inquietanti rompicapi - Bompiani, Milano, 1994.

R. TORTORA - Matematica, linguaggio e gioco: un'esperienza interdisciplinare - in *Cento Anni di Matematica*, atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895-1995" - Palombi, Roma, 1996, 417-425.

AA.VV. - Atti degli incontri di Logica Matematica, vol. 5: La Logica Matematica nella Didattica, Roma, 1988. - Dip. di Matematica, Università di Siena.

La valutazione come "raccordo" fra i diversi livelli scolari

Gruppo di lavoro Raccordo Scuola Media - Biennio

Coordinatori: L. Grugnetti - E. Uselli *

L'atelier, che ha visto la partecipazione di numerosi insegnanti dei vari livelli scolari, è stato impostato in momenti di attività di diversa tipologia:

- presentazione di alcune tematiche concernenti la valutazione da parte dei due coordinatori;
- lavori di gruppo 'eterogenei' (in merito ai livelli scolari) su esempi;
- scambi di vedute fra i diversi gruppi;
- sintesi del dibattito da parte dei due coordinatori.

Alle attività vere e proprie si è fatto precedere una breve sintesi degli aspetti salienti riguardanti la valutazione e relativi ai programmi dei diversi livelli scolari.

La valutazione nei programmi

Scuola elementare

I programmi del 1985 sintetizzano con le seguenti parole i criteri di valutazione degli alunni: " al fine di assicurare un'effettiva valutazione dei punti di partenza e di arrivo, dei processi, delle difficoltà riscontrate e degli interventi compensativi attuati, gli insegnanti devono raccogliere in maniera sistematica e continuativa informazioni relative allo sviluppo dei quadri di conoscenza e di abilità, alla disponibilità ad apprendere, alla maturazione del senso di sé di ogni alunno ... secondo criteri che assicurino un positivo confronto dei livelli di crescita individuali e collettivi ... per la continua regolazione della programmazione, permettendo agli insegnanti di introdurre per tempo quelle modificazioni o integrazioni che risultassero opportune."

La valutazione degli alunni si esplica nel corso dell'intero anno scolastico.

Per ciascun alunno viene compilata una scheda, articolata in tre parti che riguarda:

- la conoscenza dell'alunno: raccoglie dati e informazioni utili a tracciare il profilo dell'alunno, nella fase iniziale dell'anno scolastico - anche sulla base delle informazioni trasmesse dalla scuola materna (3-5 anni, non

* Dipartimento di Matematica di Parma - CRSEM di Cagliari

obbligatoria), per gli alunni di classe prima;

- la rilevazione degli apprendimenti: riporta l'apprezzamento, per ciascuno degli aspetti essenziali dei campi disciplinari previsti dai programmi, del grado di padronanza dell'apprendimento dimostrata dell'alunno e di ogni apprezzabile progresso, unitamente all'indicazione di eventuali interventi individualizzati;
- la valutazione dei processi formativi: contiene un bilancio dell'incidenza dell'esperienza formativa sugli aspetti cognitivi, relazionali ed etico sociali della personalità dell'alunno.

Per ogni disciplina la valutazione cognitiva si basa su quelli che vengono detti "indicatori" uguali per tutte le cinque classi.

La decisione del passaggio da una classe all'altra è di competenza del gruppo docente.

La scuola elementare si conclude con un esame interno/locale che rilascia un attestato che consente l'accesso alla scuola secondaria di primo grado (scuola media).

La scuola elementare trasmette alla scuola media un "fascicolo dell'alunno" che contiene tutta la documentazione informativa e valutativa che lo riguarda, unitamente ad una "sintesi globale" sul percorso formativo realizzato nell'arco della scuola elementare.

Scuola media

Anche alla scuola media è in vigore quella che viene detta "scheda dell'alunno" in una concezione di scuola dell'obbligo formativa e non selettiva. Tale sceda si articola nei seguenti passaggi:

- la valutazione parte da un accertamento della situazione sulla base del quale si deve sviluppare il processo di progressivo avvicinamento agli obiettivi progammati per ciascun alunno, da raggiungersi attraverso percorsi individualizzati e scelte organizzative che tengano conto dei ritmi e delle condizioni soggettive dell'apprendimento;
- la scheda indica, per ciascuna disciplina, alcuni criteri ricavati dai programmi: la conoscenza dei contenuti, l'iniziazione al metodo disciplinare, le operazioni intellettuali più complesse e specifiche di ogni linguaggio, la competenza nella conoscenza e nell'uso di strumenti. Ad essi i consigli di classe (composti dagli insegnanti di tutte le discipline) si rifanno per declinare gli obiettivi individuali. La scala di valutazione indica il grado di approssimazione all'obiettivo inteso come progressione dal livello di partenza, attraverso cinque gradi (A - B - C - D - E);
- la valutazione non riguarda soltanto i progressi cognitivi compiuti dall'alunno ma deve documentare anche il processo di maturazione della sua personalità,

valorizzando ed evidenziando le mete - anche minime - già raggiunte e le sue risorse, per aiutarlo, così, a costruirsi un concetto positivo e realistico di sé.

La decisione del passaggio da una classe all'altra è di competenza del consiglio di classe. E' possibile la ripetenza di ogni anno.

La scuola media si conclude con un esame scritto (lingua italiana, matematica, lingua straniera) e un colloquio orale condotto dagli insegnanti della classe guidati da un presidente di commissione esterno.

Il risultato positivo dell'esame è certificato con una valutazione su quattro livelli (sufficiente, buono, distinto, ottimo) e da un consiglio di orientamento non vincolante.

Il certificato dà accesso a tutti i tipi di scuola secondaria di secondo grado.

Scuola superiore

In tema di valutazione la scuola superiore che non è stata globalmente riformata, è ancora legata ai canoni più tradizionali. Valutazione tramite voti espressi su prove scritte e prove orali. Esame di maturità alla fine del quinquennio, a carattere nazionale, con prove che in qualche modo "bloccano" negli ultimi anni vere innovazioni metodologiche.

Nonostante la percentuale dei promossi sia molto alta (oltre il 95%), l'esame di maturità influenza in modo negativo l'ultimo anno delle scuole superiori. All'inizio di aprile si conoscono le materie d'esame: da allora le altre vengono abbandonate dagli studenti. Per il liceo scientifico, che è di solito il canale relativamente più seguito per gli studi scientifici universitari, la matematica è stata sempre presente come prova scritta e mai come prova orale: questo ha diffuso un'immagine della matematica come "insieme di esercizi", allontanando gli aspetti critici e di approfondimento (dobbiamo dire che negli ultimi anni gli argomenti della prova scritta sono diventati più innovativi)[1].

Tema d'esame di terza media: che tipo di valutazione?

La fase produttiva dell'atelier ha avuto inizio con un'analisi da parte dei partecipanti, suddivisi in gruppi, di temi d'esame che potremmo classificare come 'problemi di sola applicazione di nozioni' (tuttora proposti in alcune - o forse - molte scuole) e un tema d'esame incentrato piuttosto su una situazione per la quale non si disponga di una soluzione immediata e che induce a inventare strategie risolutive, a fare dei tentativi, a tornare sui propri passi, a verificare

---

[1] Oltre ai programmi ufficiali per la scuola elementare e per la scuola media, si fa riferimento ai programmi della Commissione Brocca per la scuola Secondaria Superiore, nonché alla pubblicazione del MPI *I quaderni di Eurydice, La valutazione degli alunni*, Quaderno n. 10, 1995.

(tutto ciò nei dettami del D. M. relativo alle prove d'esame: quesiti indipendenti per ciò che attiene alla loro risoluzione, aspetti legati anche alle altre scienze, oltre che alla matematica)[2].

La discussione che è seguita è stata incentrata sull'importanza di una funzione orientativa di una valutazione che avviene al termine di un corso di studi come quello della scuola media nei cui programmi (nella premessa) è , fra l'altro, detto: «la scuola media è orientativa in quanto favorisce l'iniziativa del soggetto per il proprio sviluppo e lo pone in condizione di conquistare la propria identità di fronte la contesto sociale tramite un *processo formativo continuo* ...».

Temi d'esame che chiedano agli allievi solo la 'dimostrazione' di raggiunta abilità di calcolo e di diligenza nell'applicazione di regole sfuggono ad ogni possibilità di verifica del livello di maturazione personale, di comunicazione, di argomentazione, di riflessione critica, di autonomia di giudizio.

Un tema d'esame innovativo mostra invece come la prova scritta di matematica - come dice un partecipante - «l'atto finale di un triennio di lavoro», l'ultima importante verifica di un processo educativo organico e completo di una metodologia didattica coerente.

La valutazione di situazioni problematiche

Negli ultimi anni è stato messo l'accento, almeno nelle intenzioni, su un tipo di insegnamento che utilizza situazioni problematiche aventi come obiettivo quello di mettere l'allievo in condizioni che necessitano la messa in opera di processi esplorativi, di sperimentazione e di verifica. Ma la effettiva attuazione di un tale tipo di insegnamento è **ostacolato dalle pratiche di valutazione**.

In realtà, troppo sovente si continua a valutare tecniche matematiche isolate tramite domande chiuse, stereotipate, inserite in contesti poveri e artificiali. Le situazioni problematiche sono ancora poco utilizzate in classe ed una delle cause di questa "reticenza" è legata al fatto che è difficile, in generale, collegare tale attività agli obiettivi pedagogici previsti normalmente in una programmazione didattica.

La **possibilità** e la **capacità** di **valutare situazioni problematiche** è centrale laddove si intenda ottemperare alla esigenza di **valutare** se un allievo è in grado di:

* risolvere problemi matematici in differenti situazioni di esperienza e di apprendimento;
* risolvere problemi matematici utilizzando opportuni concetti, rappresentazioni e tecniche.

---

[2] Negli anni '80 è stata pubblicata su L'Educazione Matematica tutta una serie di temi d'esame di questo tipo.

Tra i tanti aspetti insiti nella didattica delle situazioni problematiche (Jaquet, 1993) ci soffermiamo, in particolare, su quelli più direttamente legati alla valutazione e alle difficoltà da superare in quest'ambito. Non si tratta più solo di effettuare una valutazione **quantitativa** (sui contenuti matematici sul piano delle conoscenze formali), ma di effettuare anche una valutazione **qualitativa** riguardante:

* la maniera di organizzare i dati a disposizione e di ricavare dati mancanti: la logica seguita è accettabile o no?;
* la maniera di sviluppare l'attività: è molto importante rendersi conto della capacità (o meno) dell'allievo di formulare delle ipotesi e di metterle in discussione.

Laddove una valutazione qualitativa si accompani ad una valutazione quantitativa è possibile, non solamente fare il punto sulle conoscenze e i «saper fare» acquisiti, ma anche osservare le *evoluzioni importanti* negli «atteggiamenti» degli allievi e di facilitare una *ricognizione delle difficoltà* che sono ostacoli alle acquisizioni successive.

Al fine di mantenere i crismi di obiettività (o quatomeno di coerenza) anche in una valutazione non solo quantitativa, ci sembra opportuno fare riferimento ad una griglia di valutazione che preveda varie voci, come ad esempio quella proposta da un gruppo di insegnanti ricercatori (Melis, Nuvoli, Orrù, Uselli-Nucleo di ricerca didattica di Cagliari, nel 1993):

GRIGLIA DI VALUTAZIONE

nome	riconosc. della situazione come probl.mat. si/no	strategie risolutive 0-3	uso di tabelle o schemi 0-3	argomentazione 0-3	risposta esatta si/no	calcolo 0-3	aderenza alla realtà si/no

Ciò che ci sembra importante è, la salvaguardia di una certa obiettività e coerenza nel valutare, tramite le situazioni problematiche, l'acquisizione di capacità che non siano meramente meccaniche e calcolistiche.

Tale griglia di valutazione indica una delle possibili strada da seguire, ma ovviamente non è utilizzabile per una qualunque situazione problematica; volta per volta andrà attualizzata. In alcuni casi sarà necessario aggiungere qualche voce (come, ad esempio, l'uso appropriato di tabelle, o altre rappresentazioni), in altri casi le voci saranno sovrabbondanti (non sempre, ad esempio, si valuterà la capacità di fare delle generalizzazioni).

Analisi di alcune situazioni problematiche

I partecipanti, suddivisi in gruppi di lavoro, hanno analizzato le prove di allievi relative ai due problemi seguenti, nell'ottica di valutazione più sopra riportata:

• I gemelli
Maria è più giovane di Paolo.
Luca è più vecchio di Silvia.
Silvia ha un anno di più di Maria.
Nessuno ha la stessa età di Luca.

Chi sono i gemelli?
Giustifica la tua risposta.

• Il problema "provocatorio"
Versione 1) «Esiste un triangolo di lati 5 cm, 9 cm, 4 cm?».
Versione 2) «Disegna un triangolo i cui lati misurano 5 cm, 9 cm, 4 cm e un triangolo di lati 3, 2 e 8 centimetri»[3].

Il primo problema si presta bene a **valutare l'uso di rappresentazioni grafiche** nella ricerca della soluzione.

Molti allievi hanno fatto uso di rappresentazioni grafiche per cercare di risolverlo. Non tutte le rappresentazioni scelte, però, si sono mostrate veramente utili. In alcuni casi si evince che la soluzione è stata trovata per altra via e che una certa rappresentazione grafica è stata inserita perché *Le usiamo molto e all'insegnate piacciono.*

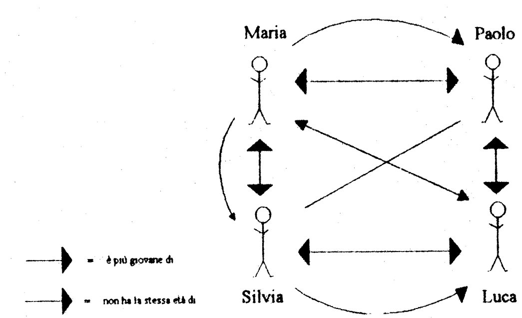
3 La seconda versione è nata dalla perplessità sulla prima versione espressa da alcuni insegnanti implicati nella ricerca - si veda Becchere, Grugnetti, Puxeddu, Uselli, 1996 - : per alcuni di essi la domanda esplicita sull'esistenza di quel triangolo, mette già gli allievi "in stato d'allarme": forse quel triangolo non esiste; peraltro, se si chiede di disegnare l'allievo disegnerà. E ciò può porre dei problemi di tipo "etico". Si è così deciso che, nella seconda versione, si chiedesse di disegnare anche un altro triangolo, smaccatamente "difficile" da disegnare. Questa scelta si è rivelata molto interessante).

Un allievo, ad esempio, benché dia la risposta esatta, presenta questa tabella:

... è più vecchio di ↗	Luca	Maria	Silvia	Paolo
Luca		X	X	X
Maria				
Silvia		X		
Paolo		X		

che è ben fatta, ma non è il mezzo che gli ha permesso di dare la risposta. Infatti la tabella non fa altro che ripetere le prime tre frasi dell'enunciato. La crocetta sulla riga di Luca e la colonna di Paolo proviene da un altro ragionamento che porta alla frase corretta "Paolo e Silvia sono gemelli".

In un altro caso invece, un allievo utilizza la seconda relazione "non ha la stessa età di" che è quella che permette di decidere:



Laddove si voglia valutare l'uso appropriato di rappresentazioni grafiche, al di là della correttezza della risposta, è il secondo allievo che ha lavorato in maniera più appropriata. Se si facesse riferimento alla precedente griglia di valutazione, il livello di risposta alla voce "uso di tabelle o schemi" sarebbe 3.

Nel caso del secondo problema, mediante l'analisi di alcune prove di allievi, è apparsa l'importanza di una valutazione che, anche in caso di risposta errata tenga conto delle congetture fatte e delle argomentazioni portate, oltre che delle conoscenze pregresse degli allievi. In un caso, ad esempio, un'allieva di 12 anni dice «*Il primo triangolo è stato possibile disegnarlo, anche se è venuto molto stretto, l'altro proprio no: il triangolo si può fare solo se la somma dei due lati sia almeno uguale a quella della base*»

Qualcosa ancora non va bene, questo è chiaro, ma è certamente auspicabile non fermarsi a dichiarare che l'allieva non ha "dato la risposta esatta"; è necessario ampliare gli 'orizzonti valutativi', andare molto più in là e considerare l'evoluzione delle sue conoscenze, una volta ripreso in maniera consona il suo ragionamento.

Bibliografia

Becchere M, Grugnetti L., Puxeddu S., Uselli E., *Argomentare e dimostrare ... una problematica "interdisciplinare"*, XV Convegno nazionale dei Nuclei di Ricerca in Didattica della Matematica per la Scuola Media, 18-20 aprile 1996, Salice Terme (PV), Quaderno a cura di Grugnetti L., Iaderosa R., Reggiani, M.

Grugnetti L., *La problèmatique de l'évaluation: de la recherche à la pratique scolaire*. Atti del 45esimo Incontro Internazionale della CIEAEM "La valutazione centrata sull'allievo", Cagliari 5-10 luglio1993, a cura di L. Grugnetti, CLAS Bergamo 1994.

Jaquet F., *2e Rallye mathématique romand*, Math Ecole, n. 162, 1994 pp. 17-21.

Jaquet F., *Dalla ricerca in didattica alla pratica in classe*, L'Educazione Matematica, Anno XIV-Serie III-Vol. 4-n.2, 1993, pp. 48-66.

Melis C.& Nuvoli L.& Orrù G.& Uselli E., *La valutazione di un problema di ottimizzazione*, L'Educazione Matematica, Anno XIV-Serie III-Vol. 4-n.3, 1993, pp. 109-122.

La dimostrazione in geometria

Gruppo di lavoro Raccordo Scuola Media - Biennio

*Coordinatori: R. Iaderosa - N. A. Malara**

Tradizionalmente in Italia l'iniziazione dell'allievo alla dimostrazione avviene all'ingresso della scuola secondaria superiore con lo studio della geometria euclidea. Il passaggio dalla scuola media, dove lo studio della geometria è essenzialmente di tipo operativo e basato sull'intuizione, alla scuola secondaria, dove lo studio si concentra sulle proprietà delle figure geometriche che si desumono per inferenza logica da un sistema di assiomi (o meno rigorosamente da un insieme di proprietà elementari assunte come vere), determina negli allievi un grosso disorientamento. Questo stato di cose è comune a molti altri paesi, come documentato in Malara (1996) e come testimoniato da alcuni interventi al Congresso Internazionale "*Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21-st century*" promosso dall'ICMI (si veda Mammana, 1995).

Nel porsi specificamente il problema didattico dell'avvio alla dimostrazione due sono gli aspetti che vanno considerati: a) il condurre gli allievi a comprendere una dimostrazione (aspetto semantico); b) il condurre gli allievi a comprendere la struttura di una dimostrazione e più in generale i metodi di dimostrazione (aspetto sintattico).

Come già rilevato da alcuni studiosi (si veda ad esempio Duval, 1991) le difficoltà maggiori nell'apprendimento riguardano l'aspetto sintattico più che quello semantico: molti sono gli allievi che confondono premesse con conseguenze ed al limite ipotesi con tesi, soprattutto se queste non sono costituite da un'unica proprietà, o utilizzano impropriamente un teorema o più in generale non colgono la concatenazione logica tra passi dimostrativi. Notevoli inoltre sono le difficoltà a livello linguistico, che coinvolgono sia il piano semantico che quello sintattico e sono correlate con la più generale capacità espressiva dell'allievo e la sua padronanza del linguaggio sia naturale che matematico.

Nell'insegnamento pertanto occorre dedicare cura:

- alle proposizioni condizionali portando gli allievi a distinguere tra implicazione, sua inversa, contronominale e contraria;
- all'uso della negazione e dei quantificatori, soprattutto in combinazione;

* GREM - Dipartimento di Matematica - Università di Modena

- alla costruzione e/o analisi di definizioni.

Attività di tale genere sono da avviarsi precocemente e trasversalmente sin dall'ingresso nella scuola media, dando ampio spazio alla discussione tra allievi ed all'esplicitazione scritta dei propri processi di pensiero. Anche se riteniamo che sia molto difficile per gli allievi alla fine della scuola media giungere ad una visione globale dello sviluppo di un ragionamento deduttivo, riteniamo però importante portare gli allievi a familiarizzare con modelli di dimostrazione (diretta, per assurdo), con termini quali ipotesi, tesi, congettura, esempio, controesempio, confutazione e generalizzazione e che la realizzazione di semplici dimostrazioni, organizzate dall'insegnante come sintesi di un lavoro di costruzione collettiva, siano comprese ed accettate da tutti (solo se gli studenti impareranno modi di pensiero logico acquisteranno l'abilità e la confidenza necessaria a valutare e costruire una dimostrazione).

Al fine di affinare la sensibilità degli insegnanti sulle tematiche su esposte e, più in particolare, con l'obiettivo di portarli ad analizzare ed esplicitare difficoltà soggiacenti alle attività di tipo argomentativo e dimostrativo ed a focalizzare gli aspetti che la scuola media dell'obbligo potrebbe e dovrebbe curare per lo sviluppo di tali capacità (non solo nell'ottica del raccordo ma soprattutto per contribuire allo sviluppo delle capacità critiche e di ragionamento degli allievi) si è realizzato il laboratorio, che si è articolato nelle fasi:

1) analisi di alcuni problemi geometrici di tipo dimostrativo;
2) introduzione alle problematiche didattiche e alle ricerche sulla dimostrazione;
3) indagini in terza media: risultati - difficoltà;
4) prove preparatorie per il raccordo: proposte - discussione.

Il laboratorio si è aperto ponendo agli insegnanti il compito di analizzare nella formulazione e nelle difficoltà i problemi riportati in tavola 1.

La discussione dei lavori prodotti è stata preceduta dalla presentazione dell'analisi di un problema diverso da quelli proposti, secondo il seguente schema in cinque passi:

1°: individuazione degli elementi di conoscenza indispensabili per la comprensione del testo;
2°: ristrutturazione del testo in termini di "se ... allora ...";
3°: comprensione di ciò che basta per provare la tesi
4°: assunzione ed elaborazione dell'ipotesi;
5°: intuizione del concatenamento delle informazioni per giungere alla tesi.

La discussione si è poi sviluppata confrontando gli elaborati prodotti alla luce del modello presentato, riportato in tavola 2. Dalla discussione svolta è emersa, da parte degli insegnanti, una nuova consapevolezza circa l'attenzione da dare nella pratica didattica agli aspetti da noi evidenziati, spesso da loro poco

considerati e sottovalutati nelle difficoltà, data l'importanza che essi rivestono per lo sviluppo delle soluzioni di problemi dimostrativi.

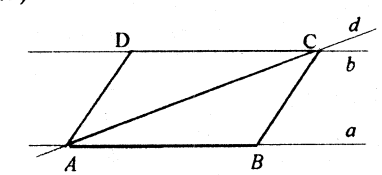
Tavola 1

Problemi proposti per l'analisi

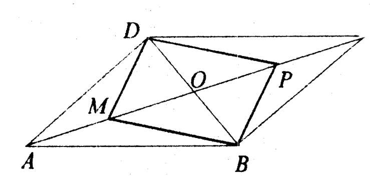
Problema per il biennio (dal libro di testo: Melzi - Tonolini, Corso di Geometria per il Liceo Scientifico. Minerva Italica - pag.158 n.47)
Sia ABC un triangolo rettangolo in A e sia M il punto medio dell'ipotenusa BC. Sui cateti AC e AB si costruiscano, esternamente al triangolo, i due triangoli rettangoli isosceli ACE e ABD, rispettivamente di ipotenusa AC ed AB. Dimostrare:
a) che i punti E, A, D sono allineati;
b) che il quadrilatero DBCE èun trapezio rettangolo;
c) che il triangolo EMD è rettangolo isoscele.

Problemi per la scuola media inferiore (dal libro di testo: Rossi dell'Acqua - Moggi Orler, MAT 2, Giunti Marzocco, pag.153 n.4 e n.9)

Problema 1 *Tenendo presente che a e b sono rette parallele tagliate dalla trasversale d e ricordando i criteri di congruenza dei triangoli, spiega perchè ABC e CDA sono congruenti.* (*)



Problema 2 *ABCD èun parallelogramma. M è il punto medio di [AO]. P è il punto medio di [OC]. BPDM è un parallelogramma? Perchè?*



(*) Il problema è insolubile se non si suppone anche il parallelismo dell'altra coppia di rette costituenti i lati del quadrilatero in figura

Nel prosieguo del laboratorio sono state poi illustrate alcune delle problematiche didattiche attualmente oggetto di ricerca riguardanti l'insegnamento dell'argomentazione e della dimostrazione, soprattutto per quanto riguarda gli studi della scuola francese (si veda Arsac 1990, Balacheff 1987-1991, Barbin 1994, Duval, 1991). E' stato sottolineato come sia necessario, soprattutto in ambito dimostrativo, ancor prima di insegnare a *fare*, insegnare a *comprendere* una dimostrazione. Si è poi evidenziata l'ulteriore difficoltà per l'insegnante di Matematica: quella della valutazione. Infatti, se la conquista del pensiero dimostrativo richiede un graduale percorso di apprendimento e di maturazione, non è così facile valutare, nel biennio della scuola superiore, le capacità acquisite dall'allievo. E' stato richiamato il lavoro di indagine che si sta attuando nel nostro

Tavola 2

Il problema esaminato

Un triangolo avente la bisettrice di un angolo esterno parallela al lato opposto del corrispondente angolo interno è isoscele. (dal libro Maraschini-Palma, Manumat, Manuale per il biennio, Paravia, n. 227, p. 601).

1° Comprensione del testo: è legata alla conoscenza dei concetti di: *bisettrice di un angolo; angolo esterno ad uno assegnato; retta parallela ad una data; lato opposto ad un angolo; corrispondenza tra angolo interno ed esterno; triangolo isoscele.*

2° Riformulazione del testo in termini di "*se.... allora*" (per individuare ipotesi e tesi): Dato un triangolo, *se* "*la bisettrice di un angolo esterno è parallela al lato opposto del corrispondente angolo interno*" ***allora*** "*il triangolo è isoscele*".

3° Comprensione di ciò che basta per per provare la tesi: *uguaglianza di due lati del triangolo* o, equivalentemente, *uguaglianza di due angoli del triangolo.* (La scelta di una o l'altra proposizione da provare è di tipo metacognitivo ed è correlata al tipo di informazioni possedute, si veda più avanti il punto 5).

4° Assunzione ed elaborazione dell'ipotesi: 1) *parallelismo fra due rette e conseguenti relazioni fra gli angoli individuati da una loro trasversale* (difficoltà nel "saper vedere" le opportune trasversali); 2) *proprietà della bisettrice di un angolo.*

5° passo: Intuizione del concatenamento delle informazioni per giungere alla tesi. Si basa sulla capacità di: 1) *elaborare le proprie conoscenze*; 2) *dare nome a convenienti elementi* (punti, rette, angoli,ecc.); 3) *esplicitare simbolicamente le informazioni conseguenti alle ipotesi;* 4) *leggere e gestire convenientemente il linguaggio simbolico.*

5.1 *Elaborazione delle proprie conoscenze.* Occorre innanzi tutto rilevare che perchè un triangolo sia isoscele è sufficiente provare che ha due lati uguali o equivalentemente due angoli uguali; occorre comprendere inoltre che nel caso in esame è più conveniente puntare a provare l'uguaglianza degli angoli, dal momento che le ipotesi consentono di trarre direttamente informazioni su questi ultimi.

5.2 *Assegnazione di nomi ad opportuni elementi in gioco.* Nel nostro caso vi è necessità di dare un nome a:

- i vertici del triangolo assegnato (denominazione data: $A\ B\ C$)
- un punto su un lato dell'angolo esterno, prolungamento del lato del triangolo (denominazione data: R)
- un punto della bisettrice dell'angolo esterno (denominazione data: S)

5.3 *Esplicitazione simbolica delle informazioni conseguenti alle ipotesi*

1) $R\hat{A}S = S\hat{A}C$	angoli individuati dalla bisettrice di $R\hat{A}C$
2) $R\hat{A}S = A\hat{B}C$	angoli corispondenti individuati dalla trasversale AB sulla coppia di rette parallele AS e BC
3) $S\hat{A}C = A\hat{C}B$	angoli alterni interni individuati dalla trasversale AC sulla coppia di rette parallele AS e BC

5.4 *Capacità di lettura e gestione del linguaggio simbolico*

Da 2) e 3) di 5.3, per 1) di 5.3 segue che l'angolo $A\hat{B}C$ è uguale all'angolo $A\hat{C}B$

gruppo al fine di operare un'analisi fine delle difficoltà che si presentano nell'avvio al pensiero dimostrativo. In particolare ci si è soffermati sui risultati delle nostre sperimentazioni condotte in ambito geometrico da cui sono emersi elementi significativi che provano che anche su un campione di livello medio-basso, il percorso formativo è già in atto, seppure a livelli diversi, alla fine della scuola media. Si riscontrano infatti:

- tentativi spontanei di generalizzazione;
- uso di controesempi;
- processi "induttivi" originati dalla osservazione di una figura geometrica per spiegare alcune proprietà;
- capacità di cogliere, almeno localmente, la sequenzialità delle proposizioni in catene di deduzioni;
- capacità, per molti, di fornire un'argomentazione coerente anche se non sempre corretta da un punto di vista logico-linguistico.

Inoltre è emerso che l'osservazione di figure e modelli, nonostante favorisca l'intuizione di proprietà, pone tuttavia anche ulteriori difficoltà, precisamente:

- l'evidenza a volte non dà motivazione alla giustificazione razionale;
- gli aspetti percettivi sono a volte fuorvianti;
- la figura non sempre rappresenta per l'allievo una "classe di figure".

Si sono rilevate inoltre notevoli difficoltà di lettura linguistica e simbolica.

Nel tentativo di aggirare le difficoltà rilevate, sono state da noi elaborate prove di vario genere, di seguito riportate, che sono state presentate durante il laboratorio perchè i partecipanti potessero valutarne e discuterne difficoltà ed eventuale fattibilità da parte degli allievi. Tali prove, di tipo sia logico sia linguistico, possono essere viste come una proposta didattica preparatoria al raccordo tra scuola media e biennio della scuola secondaria superiore e possono aiutare il docente anche a formulare una valutazione più precisa del livello di maturazione raggiunto dall'allievo in ambito argomentativo e dimostrativo. Le attività di tipo logico riguardano: 1) l'analisi di enunciati; 2) la giustificazione di proprietà (aspetto semantico) e il concatenamento logico di assegnate proposizioni (aspetto sintattico). Le attività di tipo linguistico riguardano: 1) la traduzione dal linguaggio verbale a quello grafico-simbolico; 2) la decodifica del linguaggio simbolico.

ATTIVITÀ DI TIPO LOGICO

Il primo genere di attività è più rivolta alla comprensione del testo e punta ad educare gli allievi ad individuare, eplicitandole, implicazioni logiche e quantificazioni implicite nonché a convertire date proposizioni in altre logicamente equivalenti. Il secondo genere di attività punta ad educare gli allievi al ragionamento ed ad esprimere il loro pensiero.

Analisi di enunciati

A) Trasforma ciascuno dei seguenti enunciati nella forma "se.....allora":

1) *Rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti uguali*
2) *Coppie di rette che formano con una trasversale angoli corrispondenti uguali sono parallele*
3) *La congiungente i punti medi di due lati di un triangolo èparallela al terzo lato e lo divide a metà*
4) *In un triangolo equilatero ogni altezza èanche bisettrice e mediana*
5) *Due triangoli che abbiano le lunghezze dei lati ordinatamente congruenti sono congruenti.*

B) Trasforma i seguenti enunciati usando i quantificatori universali: "tutti" oppure "ogni"

1) *In un rombo le diagonali sono perpendicolari fra loro*
2) *In unà circonferenza corde che hanno uguale distanza dal centro sono uguali*
3) *In un triangolo la somma degli angoli interni è uguale ad un angolo piatto*
4) *In un parallelogrammo gli angoli opposti sono uguali.*

C) Converti gli enunciati in A, già trasformati in implicazioni, usando i quantificatori universali, e gli enunciati già trasformati in B), contenenti i quantificatori universali, nella forma "se....allora".

Attività di giustificazione (aspetto semantico)

A) Giorgio e Federica discutono sulle seguenti affermazioni fatte dall'insegnante in classe:

1) *Se un quadrilatero è un rettangolo allora ha le diagonali uguali*
2) *Due triangoli isosceli che abbiano uguali l'angolo al vertice e la base sono uguali.*

Giorgio è convinto che siano vere, ma deve trovare il modo di spiegare il perchè a Federica, che non vuole convincersi che sia sempre così. Vuoi aiutarlo tu, spiegando se sono vere o false in maniera convincente?

B) Osserva attentamente le seguenti figure. Stabilisci:
- se hanno lo stesso perimetro
- se hanno la stessa area

Spiega le motivazioni di ciascuna risposta.

Attività di tipo sintattico

Da un punto di vista sintattico, un lavoro che ci è sembrato molto significativo con allievi di terza media è stato quello di proporre brevi "dimostrazioni" scomposte in vari passi, assegnando le proposizioni costituenti tali passi in ordine casuale e richiedendo loro di riordinarle in sequenza logica.

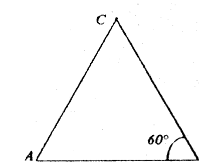
C'è da osservare che in ambito geometrico le attività di riordino dei vari passi del discorso dimostrativo sono certamente più complesse che in ambito algebrico: la pluralità di codici da dominare e soprattutto la maggiore difficoltà di lettura di ipotesi, tesi, proprietà utilizzate (che riportano all'aspetto semantico), rendono senz'altro il compito più difficile. Nonostante ciò si potrà provare a proporre problemi, come quello riportato in tavola 3, dopo aver affrontato con la classe la giustificazione argomentata della tesi.

Tavola 3

Attività di riordino di una sequenza deduttiva

Riordina nella sequenza corretta, numerandole, le varie proposizioni che concorrono a giustificare la seguente affermazione:

Un triangolo ABC tale che:
AB=AC e mis $\hat{ABC}$ =60°
è equilatero



PROPOSIZIONI

a)	proposizione n. ... *mis $\hat{ABC}$ + mis $\hat{BCA}$ = 120°*	motivo: *perché somma di angoli uguali e ciascuno di ampiezza 60°*
b)	proposizione n. ... *Il triangolo ABC è isoscele*	motivo: *perché AB = AC (ipotesi)*
c)	proposizione n. ... *AC = BC*	motivo: *per la proposizione in f) e per la proposizione "se in un triangolo due angoli sono uguali allora i lati ad essi opposti sono uguali*
d)	proposizione n. ... *mis $\hat{ABC}$ = mis $\hat{BCA}$ = 60°*	motivo: *perché mis $\hat{ABC}$ = 60° (ipotesi) e per la proposizione "in un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali"*
e)	proposizione n. ... *il triangolo ABC è equilatero*	motivo: *perché AB = AC (per ipotesi) e AC=BC per la proposizione in c).*
f)	proposizione n. ... *mis $\hat{BCA}$ = 180° – 120°= =60° = mis $\hat{ABC}$*	motivo: *per la proposizione "la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°" e la proposizione in a) .*

A livello di biennio, un'altra attività, più complessa, può essere quella di dare la sequenza di proposizioni atte a provare una certa tesi disordinata e con una proposizione mancante e di chiedere poi agli allievi di individuare quest'ultima.

ATTIVITÀ DI TIPO LINGUISTICO

Nella pratica didattica, anche per lo spazio dato ai problemi, il passaggio dal testo verbale alla rappresentazione grafica è abbastanza usuale, anche se spesso sottovalutato nelle difficoltà dovute anche all'intrecciarsi del linguaggio simbolico. Al riguardo basta considerare il seguente esempio: *Disegna una circonferenza e due suoi diametri perpendicolari. indica con a e p le rette che contengono questi diametri e con A ed A' le intersezioni della retta a con la circonferenza. Disegna poi due rette r ed s tra loro perpendicolari e passanti per A: scegli un punto B su r. Disegna la retta r' per B ed A' e la retta s' per A' e perpendicolare ad r'. Indica con B' l'intersezione di s con s'.*

C. Laborde (1995) fa presente che l'enorme economia di espressione consentita dall'uso di simboli comporta, come prezzo da pagare per tale concisione, la difficoltà nella lettura della loro interpretazione e sostiene l'importanza di attività specifiche rivolte allo scopo.

E' stato pertanto suggerito agli insegnanti, come attività propedeutiche alla risoluzione dei problemi, di proporre agli allievi attività di passaggio dal testo verbale alla rappresentazione grafica ed alla codifica simbolica delle informazioni date e delle richieste dal testo di un problema, indipendentemente dalla sua risoluzione, come indicato in tavola 4.

Tavola 4

Attività di passaggio dal codice verbale a quello grafico-simbolico

Costruisci la rappresentazione geometrica descritta dal testo dei seguenti problemi esprimendo simbolicamente i dati e le richieste:

Sia ABCD un rettangolo. Le perpendicolari condotte alla diagonale AC dai punti B e D la incontrano rispettivamente nei punti P e Q. Provare che i segmenti AQ e PC sono uguali.

Sia ABCD un parallelogrammo. I punti E, F, G ed H sono i punti medi rispettivamente dei segmenti AB, BC, CD e DA. La retta DE incontra le rette HC ed AF rispettivamente in N e P. La retta BG incontra le rette AF ed HC rispettivamente in Q ed M. Dimostrare che il quadrilatero MNPQ è un parallelogrammo.

Si consideri un triangolo LAI. Si indichi con M il punto medio del segmento LI e con N quello del segmento LA. La parallela alla retta AI passante per L incontra la retta AM in D e la retta IN in E. Dimostrare che i segmenti LD ed LE hanno la stessa lunghezza

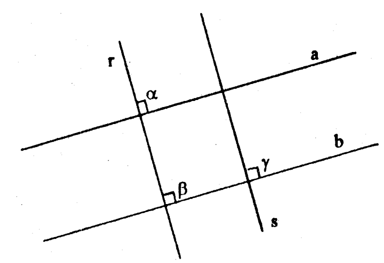
Essenziali per la comprensione e sviluppo del discorso geometrico, eppure assolutamente trascurate, sono le attività volte alla decodifica di proprietà ed implicazioni espresse in simboli in riferimento a situazioni rappresentate graficamente (si veda tavola 5). Tali attività sono state da noi raccomandate perché, sulla base della nostra esperienza, risultano indispensabili per affrontare questioni di tipo sintattico, come quelle di tavola 3.

Tavola 5

Attività di passaggio dal codice simbolico al linguaggio verbale

Considera le situazioni geometriche rappresentate in (1) e (2). In entrambi i casi esprimi verbalmente l'enuciato della proprietà descritta simbolicamente in (*).

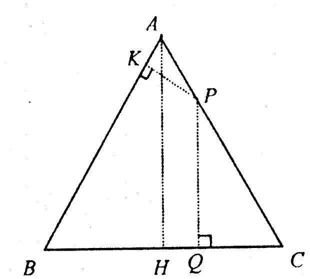
(1)



(*)

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ r \perp a \\ s \perp b \end{array}\right] \Rightarrow \quad r \parallel s$$

(2)



(*)

$$\left.\begin{array}{r} AB=BC=AC \\ PK \perp AB \\ PQ \perp BC \\ P \in AC \\ AH \perp BC \end{array}\right] \Rightarrow \quad PK+PQ=AH$$

Bibliografia

ARSAC G. et ALII, 1990, Les recherches actuelles sur l'apprendissage de la démonstration et les phénomè-nes de validation en France, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol. 3/3, 261-304

BALACHEFF N., 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, 147-189

BALACHEFF N., 1991, Treatment of Refutations: aspects of the complexity of a constructivistic approach to Mathematics learning, in VON GLASERSFELD E. (a cura di), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluver Academic Publishers, The Netherlands, 89-110

BARBIN E., 1994, La dimostrazione in matematica: significati epistemologici e questioni didattiche, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 17B, n. 3, 212-245

DUVAL R., 1991, Structure di raisonnement deductif et apprendissage de la demonstration, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, 233-261

HANNA G., 1995, Challenges to the importance of proof, *For the Learning of Mathematics*, vol. 15, n. 3, 42-49

IADEROSA R., 1994, *L'avvio alla dimostrazione nella scuola dell'obbligo*, Tesi di perfezionamento in didattica della matematica (rel. prof. C. Marchini), Università Cattolica di Brescia, A.A. 1993-1994

IADEROSA R., 1996, L'avvio all'argomentazione e alla dimostrazione nella scuola media, in GRUGNETTI L. et al. (a cura di) *Argomentare e dimostrare nella scuola media*, atti XV convegno nazionale dei Nuclei di Ricerca Didattica sez. scuola media, Salice Terme (PV), aprile 1996

LABORDE C., 1995, Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?, *La Matematica e la sua Didattica*, 2, 121-135

MALARA N.A., 1996, Il problema dell'avvio alla dimostrazione in geometria, parte di L'insegnamento della geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico-metodologiche, in stampa su *Atti scuola MPI* per insegnanti ricercatori (Viareggio nov.1995- feb.1996)

MAMMANA C. (a cura di) *Pre-Proceedings of ICME Study on Geometry*, Catania

FUNZIONI ED EQUAZIONI CON CARTA, PENNA E CALCOLATORE

Gruppo di lavoro Raccordo Scuola Media - Biennio

Coordinatori: L. Capelli - C. Dapueto[*]

1. Premessa

Questo lavoro di gruppo, rivolto a insegnanti sia delle medie che delle superiori, si è svolto in un'aula computer e ha utilizzato vario software: software di sistema (Qbasic ed Edit) e software ("artigianale") messo a punto dal gruppo didattico MaCoSa (Grafun, Compila, Polinomi, ...), liberamente utilizzabili, e Derive. Durante il lavoro è stata seguita una scheda che indicava dettagliatamente attività da svolgere e proponeva elementi di riflessione e di discussione.

In questa sintesi verranno presentate, già sviluppate, alcune delle attività proposte nel lavoro a gruppi e verranno delineati alcuni dei problemi didattici discussi.

Chi è interessato ad avere la scheda di lavoro, commenti ai quesiti, ... o indicazioni su come reperire il software, informazioni su come inviare richieste, suggerimenti, critiche, ... può prendere contatto via Internet (con *ftp anonymous* presso *dima.unige.it* prelevare e leggere il file *readme.txt* in *pub/STAFF/DAPUETO/MaCoSa*; se non si usa direttamente FTP, ma un browser, l'indirizzo da dare è *ftp://dima.unige.it/pub/STAFF/DAPUETO/MaCoSa*; in alternativa si può inviare un messaggio in posta elettronica a *dapueto@dima.unige.it*).

Il lavoro si è sviluppato attraverso alcuni esempi di uso del calcolatore relativamente all'argomento "funzioni ed equazioni" e riflessioni su tale uso e su problemi didattici connessi. Il taglio, specie nei confronti degli insegnanti di scuola media, è stato a livello "adulto": l'obiettivo non era tanto illustrare delle attività svolgibili in classe quanto stimolare, più o meno direttamente, riflessioni su come impostare l'insegnamento alla luce del ruolo dei mezzi di calcolo nel fare matematica oggi (quali sono le abilità da privilegiare? che cosa è importante per la prosecuzione degli studi? il linguaggio matematico scolastico usuale è da rivedere? quali sono potenzialità e limiti del software? come educare ad un uso consapevole di esso? ...).

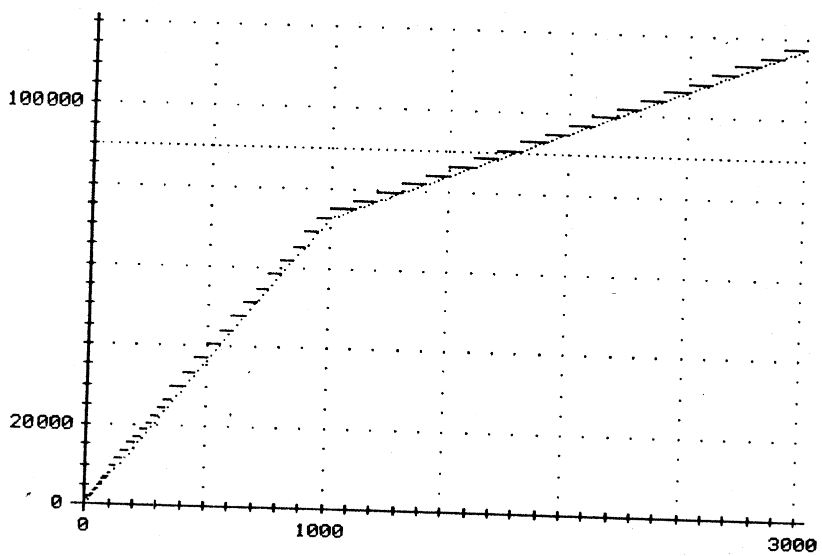
[*] Liceo Artistico P. Klee, Genova - Dipartimento di Matematica, Università di Genova

2. Che cos'è una funzione

La prima attività è consistita nella rappresentazione grafica e nell'esame diretto, con l'applicazione Grafun, di un file in cui sono opportunamente registrate le tariffe (percorrenza $\mapsto$ prezzo) ferroviarie italiane dell'inverno 1995/96 ($\rightarrow$ figura seguente). Poi, posto:

$$F(x) = \frac{72400}{1000}x \quad e \quad G(x) = 72400 + \frac{117600 - 72400}{2000}(x - 1000)$$

dove 72400 e 117600 sono i prezzi per le percorrenze di 1000 e 3000 chilometri, si sono tracciati i grafici di $x \in [0, 1000] \mapsto F(x)$ e $x \in [1000, 3000] \mapsto G(x)$ (rappresentati punteggiati nella figura). Si è visto anche come tradurre il calcolo di "F(x) se $x \leq 1000$ lire, G(x) altrimenti" in Qbasic.

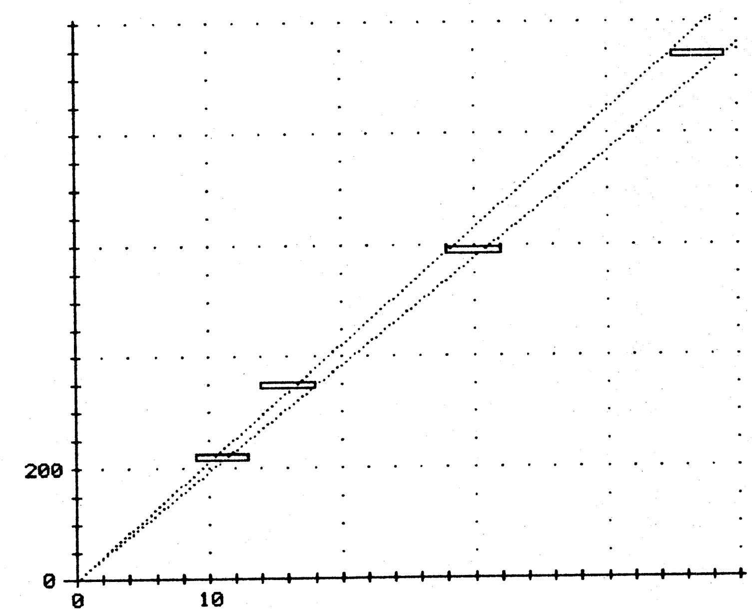


Questioni:

- La rappresentazione grafica della tabella è il grafico di una funzione?
- Il grafico unione dei grafici di F, in $[0, 1000]$, e di G, in $[1000, 3000]$, è il grafico di una funzione? (o di due?)
- Tabella, grafico di essa, "x km se $x \leq 1000$ costano F(x) lire, altrimenti costano G(x) lire" sono tre modelli diversi del tariffario. Quali sono vantaggi/svantaggi di essi?
- In quali modi si può descrivere/memorizzare con un computer una funzione?
- "regione $\mapsto$ insieme dei suoi capoluoghi" e "successione di dati $\mapsto$ loro media" sono funzioni?

- Che cosa è una funzione? Se e come definirla (in modo che sia comprensibile, che catturi gli usi più frequenti, dalle quattro operazioni alle funzioni statistiche) nella scuola media e alle superiori?
- Quali attività senza computer è utile/necessario svolgere prima di usare il computer per realizzare/leggere rappresentazioni grafiche di funzioni?

Sotto è riprodotta la rappresentazione (con Grafun) di un file in cui sono opportunamente registrati gli esiti (allungamento, peso) relativi allo studio sperimentale dell'allungamento di una molla alla cui estremità inferiore siano attaccati man mano pesi diversi. I dati, in mm e g, sono (11 ± 2, 220 ± 5), (16 ± 2, 350 ± 5), (30 ± 2, 590 ± 5), (47 ± 2, 930 ± 5).



- Con quale modello matematico rappresentare la relazione tra allungamento e peso? (nella figura sono tratteggiate le due rette di pendenza massima e minima fra tutte quelle passanti per (0,0) e per tutti i rettangolini)
- Basta la matematica per individuarlo?

3. Che cos'è, come si risolve un'equazione?

Quanti chilometri posso fare (in treno, nel dicembre 1995) con 90 mila lire? Qual è il modello matematico di questo problema?

Interpreto il problema come: quanti chilometri di ferrovia posso al massimo percorrere con 90 mila lire? Posso tracciare il grafico di $x \mapsto 90000$ (è già tracciato, punteggiato, nella prima figura). Dal grafico o dalla tabella trovo che con 90000 posso comprare un biglietto per al più 1700 km. Ma mi avanzano dei soldi. Dalla tabella (o con degli zoom sul grafico) ricavo che mi rimangono 1700 lire, con 1500 delle quali posso acquistare un biglietto per altri 10 km. In conclusione, posso (teoricamente, cioè cercando, e sperando di trovare, le linee giuste) percorrere 1710 km.

Per una risposta approssimata potevo trovare graficamente l'intersezione tra $y=90000$ e $y=G(x)$ ($\rightarrow$ punto 2). Ovvero l'intersezione con l'asse x di $G(x)-90000=0$. Grafun, con un metodo numerico, consente di trovarne il valore anche senza ricorrere a successivi zoom; si ottiene 1778.7 ... (e la rappresentazione sotto forma di frazione 201000/113).

- Le equazioni sono sufficienti per modellizzare tutti i problemi a una incognita numerica?
- I metodi grafici (o numerici) consentono di risolvere equazioni di cui si comprende il significato ma per le quali non si è in grado (per ignoranza o per effettiva impossibilità) di usare tecniche simboliche di risoluzione. Quali risvolti didattici può avere ciò?
- Riesco a risolvere graficamente e numericamente tutte le equazioni?
- Quante sono le soluzioni di $x^3+x-7=0$? Bastano degli zoom per essere sicuri di aver trovato tutte le soluzioni?

Ritornando alla risoluzione di $G(x)=90000$, come posso procedere simbolicamente? Devo, innanzi tutto, avere chiara la struttura dei due membri dell'equazione. Il programma Compila, che illustra come avviene la traduzione in assegnazione elementari (in cui compare un'unica operazione) di una assegnazione più complessa, dando un'idea del funzionamento di un compilatore, ci consente di evidenziare la struttura di (un termine simile a) G(x):

```
ASSEGNAZIONE:                L=7+(1-7)/2*(x-1)
variabili->REGISTRI:         R0=7+(1-7)/2*(R1-1)
Traduzione in istruzioni elementari:
                                        1  R2 = 1 - 7
                                        2  R3 = R2 / 2
grafo ad albero corrispondente:         3  R4 = R1 - 1
                                        4  R5 = R3 * R4
              +                         5  R0 = 7 + R5
 ____________/ \_____________
7                            *
                   _________/ \_________
                  /                     -
               __/ \__               __/ \__
              -       2             x       1
             / \
            1   7
```


La struttura può essere evidenziata anche in Derive, muovendosi lungo il termine con i tasti-freccia. Derive consente di risolvere l'equazione simbolicamente con un unico comando. Nella figura che segue è illustrato come Derive è impiegabile per risolvere l'equazione anche passo passo, analizzando man mano la struttura dell'equazione e applicando una opportuna funzione a entrambi i membri. Per "distribuire" un'operazione rispetto a "=" (per passare da #2 a #3, da #4 a #5, ...) si aziona Simplify.

$$\#1:\quad 72400 + \frac{117600 - 72400}{2000}\cdot(x - 1000) = 90000$$

$$\#2:\quad \left[72400 + \frac{117600 - 72400}{2000}\cdot(x - 1000) = 90000\right] - 72400$$

$$\#3:\quad \frac{113\cdot(x - 1000)}{5} = 17600$$

$$\#4:\quad \left[\frac{113\cdot(x - 1000)}{5} = 17600\right]\cdot 5$$

$$\#5:\quad 113\cdot(x - 1000) = 88000$$

$$\#6:\quad \frac{113\cdot(x - 1000) = 88000}{113}$$

$$\#7:\quad x - 1000 = \frac{88000}{113}$$

$$\#8:\quad \left[x - 1000 = \frac{88000}{113}\right] + 1000$$

$$\#9:\quad x = \frac{201000}{113}$$

- Che cos'è un'equazione (per Derive e in generale)? Come è definita nei libri di testo?
- Quali sono le principali difficoltà degli alunni nella manipolazione dei termini e nella risoluzione delle equazioni?
- L'uso di software didattico (come Compila), l'uso "ragionato" di software come Derive, l'uso di linguaggi di programmazione, ... può essere di aiuto per il superamento o la prevenzione di queste difficoltà?

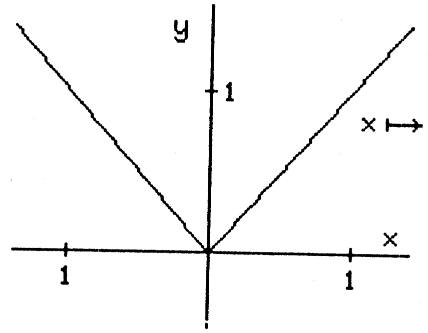
Sotto sono riprodotti alcuni comportamenti "strani" di Derive:

- alla richiesta di risolvere $|x|=2x+1$ trasforma l'equazione ma non dà soluzioni; se si restringe il dominio ne dà, ma non tutte sono effettivamente soluzioni;
- nell'esempio successivo dà come soluzione un valore per cui l'equazione è indefinita;
- nel grafico il ramo a sinistra non dovrebbe essere tracciato.

$|x| - 2 \cdot x = 1 \qquad x :\in \text{Real } [0, \infty) \qquad x = -1 \qquad x :\in \text{Real } (-\infty, 0) \qquad x = -\frac{1}{3}$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = 1$$

$x = -1$

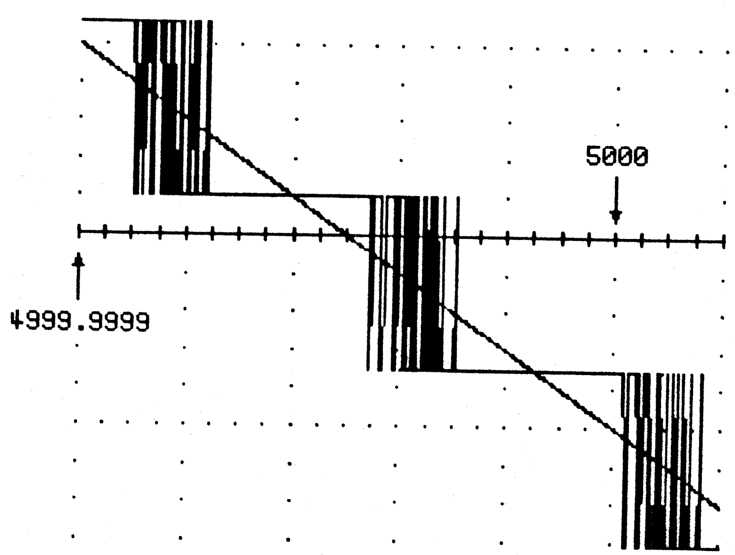


$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$$

- Che cosa c'è dietro a questi "errori"?
- Quali sono le abilità, le conoscenze, gli atteggiamenti da sviluppare per usare consapevolmente software come questo?

Sotto è riprodotto l'esito, dopo alcuni zoom, della ricerca con Grafun delle intersezioni con l'asse x dei grafici di F e G così definite:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x \cdot x + 1} + x} - 0.0001 \qquad G(x) = \sqrt{x \cdot x + 1} - x - 0.0001$$

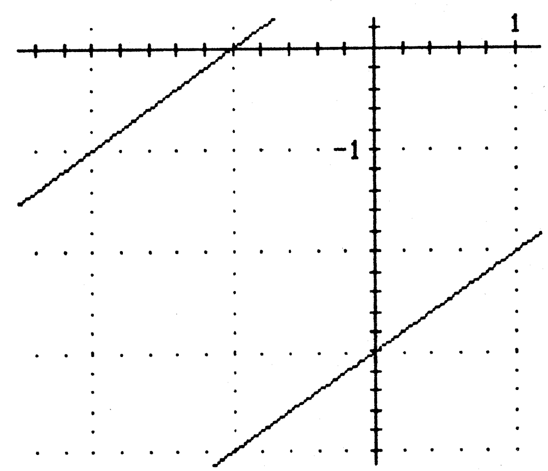


- F e G sono la stessa funzione?
- Quale, tra i due termini, algebricamente equivalenti, è il più "bello"? Perché?
- 0.12345678+12345678−12345678 e 12345678−12345678+0.12345678 sono equivalenti per una calcolatrice tascabile a 10 cifre?
- Quali attività sono affrontabili nella scuola media per avviare una riflessione sulla "matematica" dei mezzi di calcolo?

4. Che cos'è un polinomio? e altro

Sotto, a sinistra, sono riprodotti parzialmente i grafici ottenuti con Grafun di F e G così definite: $F(x) = (x^2-2x-3)/(x+1)$, $G(x) = (x^3+x^2+x+1)/(x^2+1)$.

- F e G sono due funzioni polinomiali? F(x) e G(x) sono due polinomi?
- La continuità di una funzione in un intervallo è verificabile tracciandone il grafico con Grafun o con Derive?




```
A(x)= x^2 - 2 x - 3
B(x)= x + 1
C(x)= x^3 + x^2 + x + 1
D(x)= x^2 + 1
H=re(A,B)  H(x)= 0
F=qu(A,B)  F(x)= x - 3
G=qu(C,D)  G(x)= x + 1
K=re(C,D)  K(x)= 0
```

Nella figura, a destra, è riprodotto il calcolo delle due divisioni tra polinomi che compaiono in F(x) e G(x) realizzato con l'applicazione Polinomi.

- La divisione tra polinomi è una funzione? da dove a dove? e quella tra numeri interi?
- 8/4 è un numero intero? Confrontare questo quesito col primo quesito di questo paragrafo.
- Quali differenze e quali analogie tra polinomi e numeri interi?
- Quando e come introdurre il concetto di polinomio?

La geometria nei nuovi programmi: parliamone!

Gruppo di lavoro Triennio Superiori

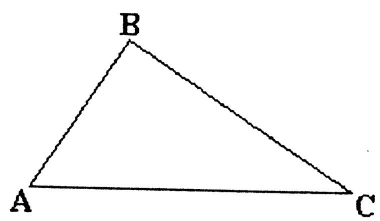
*P. Vighi - M.G. Delfrate**

Il lavoro di gruppo si è articolato in due parti: la prima, di carattere teorico, ha riguardato una rapida lettura ed un'analisi critica dei programmi di Matematica per il Biennio di Scuola Superiore relativamente al tema "Geometria"; nella seconda parte sono stati presentati ai partecipanti al lavoro di gruppo alcuni esercizi di geometria (qui allegati) con il compito di leggerli e di analizzarli in base ad una griglia preparata in precedenza (Scheda n.1). Si è inoltre proposta un'attività di individuazione di concetti geometrici particolarmente difficili e di strategie per superare le difficoltà; infine i partecipanti sono stati invitati a costruire esercizi idonei per il raggiungimento di prefissati obiettivi (Scheda n.2)

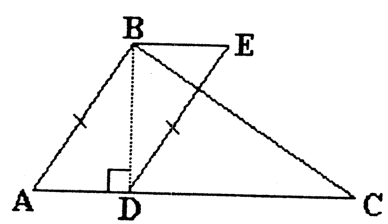
ESERCIZI

1) Nel triangolo ABC, prolunga AB dalla parte di B di un segmento BD uguale a BC e prolunga CB, dalla parte di B, di un segmento BE uguale ad AB. Congiungi D con E.
Dimostra che i due triangoli ABC e BDE sono uguali.

2) Scrivi tu le istruzioni per passare dalla "forma (a)" alla "forma (b)" e formula un problema.



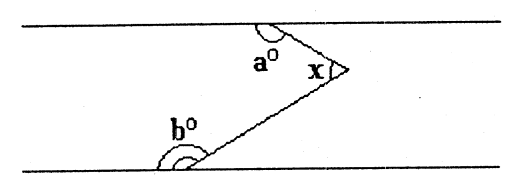
(a)



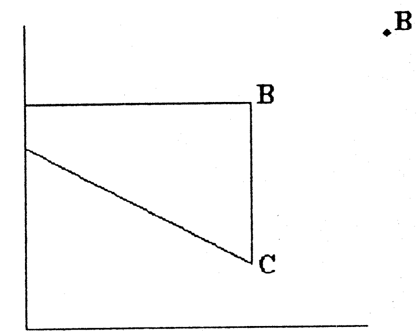
(b)

3) Sapendo che $r||s$, trova la misura di x.

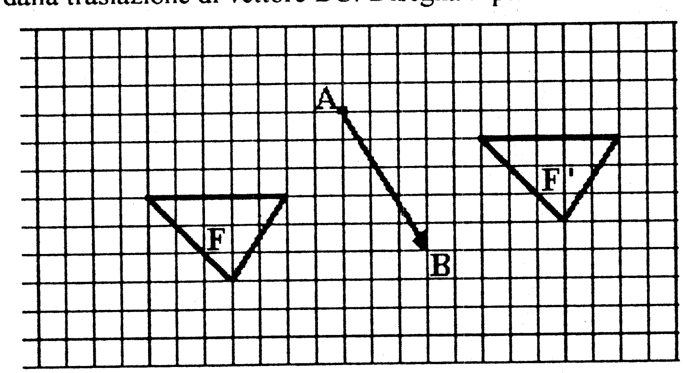
* Dipartimento di Matematica, Università di Parma



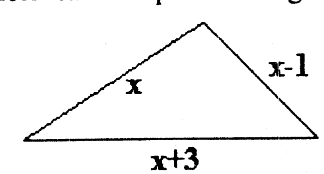
4) Il vertice A del triangolo ABC non è visibile. Costruisci τ (ABC) nella traslazione di vettore $\vec{\tau} = \overrightarrow{BB'}$ (senza "completare" il triangolo ABC): è possibile? Perché?



5) La figura F' è stata ottenuta da F mediante la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$, seguita dalla traslazione di vettore $\overrightarrow{BC}$. Disegna il punto C.



6) Stabilisci se esistono valori reali di x per cui il seguente triangolo è rettangolo.



7) Risolvi in due modi il seguente problema, utilizzando prima gli strumenti della geometria analitica e poi quelli della geometria sintetica.
"Un triangolo rettangolo OAB ha i cateti OA e OB che misurano rispettivamente 6 cm e 4 cm. Individua sull'ipotenusa un punto P in modo tale che, dette H e K le sue proiezioni su OA e OB rispettivamente, l'area del rettangolo PHOK sia uguale a 2 cm^2".

SCHEDA n.1

A) Quali prerequisiti sono necessari per affrontare l'esercizio?
....
....

B) Quali obiettivi si possono raggiungere? (sapere-saper fare)
....
....

C) Quale metodologia adottereste per risolvere l'esercizio?
....
....

D) Quali difficoltà possono emergere?

1- costruzione della figura
2- comprensione dei termini o del testo
3- conoscenza di proprietà o teoremi
4- applicazione di proprietà o teoremi
5- apparato logico troppo complesso (per esempio, dimostrazioni per assurdo)
6- individuazione di ipotesi e tesi
7- discussione dei risultati
8- ....

E) Presentereste questo esercizio in classe? ....

F) Se sì, in quale anno e quadrimestre lo collochereste? ....
....
Perché? ....

H) Come valutereste le varie tipologie di errore?
....
....

SCHEDA n.2

A) BasandoVi sulla Vostra esperienza di insegnanti individuate alcuni concetti geometrici la cui comprensione risulta particolarmente difficile.

B) Quali strategie adottate, di solito, per superare le difficoltà?

C) Costruite un esercizio volto a raggiungere uno o più obiettivi, quali, ad esempio:
- sa riconoscere triangoli congruenti applicando i criteri di congruenza?
- sa riconoscere rette parallele o perpendicolari sfruttando relazioni tra angoli?
- sa applicare il teorema ...?
- sa applicare le proprietà delle traslazioni (simmetrie, similitudini)?
- sa riconoscere triangoli simili applicando i criteri di similitudine?
- altro

Riflessioni sull'insegnamento dell'Algebra: un orientamento verso la riforma dei curricola

Gruppo di lavoro Raccordo Biennio - Triennio

*Coordinatori: M. Moscucci, M. Piccione, L. Salomone**

I lavori sono stati aperti dalle coordinatrici con l'esposizione della esperienza che le ha condotte ad occuparsi dei problemi inerenti la didattica dell'Algebra nel biennio delle Scuole Medie Superiori.

Si è dunque riferito del Progetto Accoglienza "Vivere bene a scuola" elaborato nel giugno 1994 da un gruppo di insegnanti del Distretto Scolastico n. 38 di Siena nell'ambito delle iniziative volte a contrastare la dispersione scolastica e, in particolare, ad affrontare i problemi legati al passaggio dalla Scuola Media Inferiore alla Scuola Media Superiore. Alla realizzazione di tale progetto (sostenuto dalla Regione Toscana e dalle Amministrazioni Provinciale e Comunale senesi), le coordinatrici hanno partecipato in qualità di referenti per l'area Logico - Matematica.

Dal confronto con gli insegnanti che avevano aderito al Progetto, era emerso che il disagio scolastico era da ricondursi, sul piano generale, a questioni metodologiche e, su quello disciplinare, alle caratteristiche della didattica tradizionale dell'Algebra. L'attenzione fu rivolta all'Algebra, perché questa rappresenta di fatto l'oggetto predominante dell'insegnamento della Matematica nel biennio.

Si è pertanto ritenuto opportuno , in primo luogo, descrivere ai partecipanti al gruppo di lavoro le linee generali dell'orientamento metodologico delle coordinatrici, che ha indirizzato, in particolare, l'attività in seno al Progetto Accoglienza. Tale orientamento è caratterizzato dal superamento della "didattica per obiettivi" a favore della "didattica per oggetti" [1]. Le linee essenziali dei due indirizzi sono state commentate e poste a confronto in modo da consentire al gruppo di rilevare le differenze tra questi sia sul piano strutturale che su quello operazionale e di intuire la diversità di efficacia dei corrispondenti interventi educativi.

Sinteticamente, si può dire che gli aspetti fondamentali della didattica per obiettivi sono:
- l'individuazione degli obiettivi da perseguire,
- il rilevamento e la misurazione dei gradi del relativo conseguimento.

* Dipartimento di Matematica, Università di Siena

[1] Per un approfondimento si rimanda ai lavori indicati in Bibliografia

In questo approccio didattico, i docenti hanno un ruolo centrale e determinante. I prodotti di apprendimento che mediamente si ottengono risultano "parcellizzati", i processi di apprendimento reciprocamente separati e le strutture cognitive organizzate a "canne d'organo"; ciò di fatto impedisce l'utilizzo di concetti e metodi all'interno di contesti diversi da quello in cui sono stati introdotti. Inoltre, nell'ambito delle dinamiche personali e interpersonali, la didattica per obiettivi comporta negli allievi, da un lato, una scarsa presa di coscienza nei confronti degli apprendimenti acquisiti e dei processi che li hanno determinati e, dall'altro, limitate capacità di interazione all'interno della classe.

La didattica per oggetti , invece, ha come scopo primario:
- l'individuazione di ambienti funzionali all'acquisizione di apprendimenti esperti,
- la valutazione dei livelli di apprendimento raggiunti.

Questa metodologia didattica prevede che docenti e allievi, insieme, costruiscano i percorsi di apprendimento in una collaborazione paragonabile a quella che si stabilisce tra " timoniere e marinai di una nave durante la navigazione". L'obiettivo è quello di condurre gli allievi a prendere coscienza dei personali processi e prodotti di apprendimento e a riconoscere i propri talenti, in modo da sviluppare la cosiddetta "intelligenza delle decisioni ".Il lavoro è caratterizzato dalla individuazione di numerose occasioni di allenamento al transfert analogico al fine di sviluppare negli allievi la capacità di collegare, far interagire e generalizzare gli apprendimenti. La possibilità della realizzazione di questa metodologia didattica si incentra sulla capacità dei docenti di creare in classe un clima "autenticamente laboratoriale ",cioè di suscitare, intorno alla ricerca della soluzione dei problemi, uno stile di lavoro fortemente interattivo.

Il "sapere" che si costruisce con la didattica per obiettivi, è essenzialmente:
- **sapere che cosa**, cioè acquisizione di nozioni,
- **sapere come fare**, cioè acquisizione di metodologie che permettono l'utilizzo delle nozioni;

Con la didattica per oggetti, esso diviene anche:
- **sapere verso dove**, cioè acquisizione delle finalità dell'utilizzo delle nozioni.

Questo è l'aspetto qualificante e caratterizzante la didattica per oggetti: in essa, oltre a processi di conoscenza dichiarativa e procedurale, vengono messi in atto anche processi di conoscenza ideativo-immaginativa.

In questa impostazione didattica, lo scopo primario è la costruzione di **padronanze,** che si realizza dopo il raggiungimento di tre livelli di specializzazione successivi:
- **capacità**: saper utilizzare nozioni,
- **abilità**: saper utilizzare nozioni in modo qualitativamente apprezzabile,
- **competenza:** saper utilizzare nozioni in contesti diversi.

Una padronanza si considera acquisita quando il soggetto è in grado di scegliere le strategie più appropriate nell'ambito delle proprie competenze.

Dopo questa premessa, si è iniziato il lavoro di gruppo vero e proprio, alternando la proposta di spunti di riflessione, da affrontare in piccoli gruppi, alla discussione collettiva sulle considerazioni formulate e al confronto di queste con i risultati acquisiti dalle coordinatrici.

Le domande poste sono state:

1) Quali sono secondo voi i prerequisiti algebrici necessari per affrontare il triennio?
2) Quali sono le difficoltà che gli studenti del biennio incontrano nello studio dell'Algebra e quali ne sono le cause?
3) Quali sono secondo voi le finalità dell'insegnamento dell'Algebra nel biennio?
4) Quali sono i "difetti" dell'usuale modo di insegnare l'Algebra?
5) Quali sono i punti fondamentali di un "buon curriculum" di Algebra nel biennio?

Dal punto di vista dei contenuti, i Programmi della Commissione Brocca sembrano porre l'accento sui nodi fondamentali.

Dal punto di vista didattico, il gruppo ha unanimemente rilevato la necessità della organizzazione , da parte dei docenti, di un accurato lavoro adatto a condurre gli allievi alla comprensione profonda dei vari concetti algebrici , dei termini del linguaggio algebrico, della valenza di certi strumenti algebrici, degli aspetti particolarmente significativi di certe definizioni. Questioni centrali di tale attività dovranno essere, per esempio, il concetto di *equazione*, il concetto di *soluzione* di una equazione, la differenza tra le parole *variabile, parametro, indeterminata, incognita,* l'utilizzo della *fattorizzazione,* quando sia possibile, nella risoluzione di una equazione, la definizione di *radicale algebrico* e di *radicale aritmetico.* E' stato, infatti, osservato, anche sulla base dei risultati di un questionario proposto nelle classi 3° del Liceo Scientifico di Siena, che i ragazzi raggiungono, in generale, una buona abilità di calcolo algebrico, inteso come semplice meccanismo o pura applicazione delle regole formali dell'Algebra, e trovano, invece, notevoli difficoltà in situazioni anche leggermente non standard nelle quali sia richiesta la comprensione dei concetti.

Il gruppo ha riconosciuto che le difficoltà incontrate dai ragazzi nello studio dell'Algebra sono essenzialmente di due tipi: la eccessiva, quanto inutile, complessità dei calcoli richiesti e la insufficiente acquisizione dei concetti fondamentali. In questo contesto si è convenuto sulla necessità di rifondare, nel biennio, le conoscenze aritmetiche dei ragazzi ponendo particolare attenzione all'analisi strutturale degli insiemi **N** , **Z** , **Q** , **R** , e alle relazioni che intercorrono tra di essi.

E' stato osservato che finalità specifiche dell'insegnamento dell'Algebra sono l'acquisizione di strumenti utili per la soluzione di problemi e la costruzione di una mentalità che permetta di affrontare e tradurre in linguaggio algebrico situazioni problematiche di natura e contesti anche molto diversi tra loro. Purtroppo, tali finalità rimangono, spesso, largamente disattese a causa, soprattutto, del modo in cui l'Algebra viene insegnata. Sono stati, infatti, individuati come principali "difetti" della didattica dell'Algebra:

- la scarsa attenzione al significato dei simboli occorrenti nelle scritture algebriche
- la ripetitività e l'astrusità degli esercizi proposti
- la discontinuità tra calcolo numerico e calcolo algebrico
- la limitata proposta di stimoli in grado di motivare allo studio dell'Algebra.

Riassumendo, è stata largamente condivisa la necessità di promuovere un **insegnamento sensato** dell'Algebra, mirato, cioè, a far cogliere agli allievi il **significato (che cosa** e **come)** e il **senso (verso dove)** dei simboli, delle scritture e dei procedimenti algebrici. Non si tratta, dunque, tanto di individuare un itinerario nuovo per i contenuti, quanto di adottare una metodologia nuova più adatta a dare ampio risalto agli aspetti semantici dell'Algebra e a limitare quelli sintattici allo stretto necessario per l'acquisizione delle abilità di calcolo. Troppo frequentemente il calcolo assorbe così tanto l'attenzione degli allievi da far perdere di vista il senso delle operazioni che vengono compiute e la consapevolezza delle proprietà che vengono utilizzate.

Per precisare e quantificare l'ultima affermazione, le coordinatrici hanno presentato ai partecipanti al gruppo di lavoro uno "schema di livello", cioè un elenco di esercizi indicativi dei livelli di difficoltà, quello minimo e quello "ragionevole", relativi ai settori fondamentali del calcolo algebrico. Il livello minimo stabilisce la soglia al di sotto della quale viene a mancare la capacità di un uso sicuro dello strumento algebrico; il livello "ragionevole" si propone di determinare il grado di complessità oltre il quale l'esercizio perde ogni valenza formativa e diviene sterile acrobazia. Superando questo grado di complessità, si produce non solo distrazione dal valore effettivo dell'Algebra ma, conseguenza assai più grave, disaffezione verso la Matematica.

Bibliografia

[1] Arzarello F., (1994); *Problemi nell'apprendimento-insegnamento nell'Algebra,* Atti del Seminario di Formazione per Docenti "L'Algebra tra tradizione e rinnovamento", Ministero della P.I., Lucca, pp. 19-54.

[2] Bernardi C. (1994); *Uso delle lettere in Algebra e in Logica,* Atti del Seminario di Formazione per Docenti " L'Algebra tra tradizione e rinnovamento", Ministero della P.I., Lucca, pp.189-194.

[3] Gardner H. (1987); *Formae Mentis Saggio sulla pluralità delle intelligenze,* Milano, Feltrinelli.

[4] Malara N.A. (1994); *Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?*, in D'AMORE B. (a cura di), "L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica", (BO), 1994, 67-77.

[5] Margiotta U. (1987); *La continuità educativa nella scuola di base*. Rimini, Maggioli

[6] Margiotta U.,Rigo R., Tessaro F., Varagnolo L., (1994); "PROGETTO ARIANNA", Ministero P.I. (Dir. Gentile. Istr. Prof.9.- CIRED (Università di Venezia).

[7] Prodi G., Villani V. (1992); *Anche il calcolo letterale può essere intelligente*, Archimede, n.4, XXXIV .

[8] PROGETTO MOBIDIC, (1996); Ministero della P.I., CEDE , Roma.

Le prove scritte degli esami di maturità

Gruppo di lavoro Triennio Superiori

*Coordinatori: E. Castagnola - A. Morelli - A. Olivello**

I docenti partecipanti al convegno che hanno scelto di lavorare sui temi delle prove scritte degli esami di maturità sono stati divisi in due gruppi di circa 25 ciascuno. Per la guida si sono alternati A. Morelli e A. Olivello insieme e E. Castagnola.

A. Morelli e A. Olivello hanno commentato e discusso alcuni temi delle maturità italiane, delle scuole tradizionali e delle scuole sperimentali, evidenziando alcune differenze di contenuti e di stile dei temi dei due tipi. Fra l'altro sono state fatte varie osservazioni sulla presenza di questioni nelle quali intervenivano, in modo esplicito e implicito, le trasformazioni geometriche, ed inoltre nozioni, concetti e processi dimostrativi di geometria sintetica; sono stati anche considerati esempi di problemi, che, risolti con l'ausilio di metodi algebrici, del riferimento cartesiano, e con i mezzi dell'analisi, erano tali che le soluzioni del problema algebrico o di analisi traducente il problema geometrico, non corrispondenti a questo, dette comunemente non accettabili, potevano essere interpretate come soluzioni di un problema geometrico più ampio.

E. Castagnola ha presentato, commentato e discusso temi assegnati alle prove di maturità delle scuole europee e delle scuole delle nazioni europee, precisamente Francia, Germania ed Inghilterra; in particolare si è soffermato su questioni di analisi, calcolo delle probabilità e algebra lineare, evidenziando le differenze di contenuto ed anche di articolazione dei temi, rispetto a quelli delle maturità delle scuole italiane.

E' seguita una discussione sulle modalità degli esami di maturità., con particolare riferimento alla prova di matematica, per eventuali modifiche da proporre. Si è presentato, come base per la discussione, un articolo dei Prof. V. Villani ed A. Giambò, apparso recentemente sulla rivista Archimede, nel quale, fra l'altro si propongono varie questioni da discutere. I pareri emersi dalla discussione con i docenti sono sintetizzati di seguito.

Pareri emersi dalle discussioni sugli esami di maturità, a Campobasso, convegno U.M.I., con la partecipazione di 50 docenti:

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli

Non è tanto facile trarre conclusioni molto nette dalle discussioni avute con i docenti. Partendo da una questione, la discussione si spostava facilmente su altre; spesso si arrivava a dire: "dipende dal tipo di riforma generale della scuola che si vuole attuare", oppure "bisogna stabilire se la commissione è fatta dai docenti della classe oppure è esterna".

Sulla questione (non elencata nell'articolo apparso su Archimede), dell'opportunità e della necessità di una prova orale, quasi l'unanimità dei docenti è favorevole ad una prova orale, con o senza una prova scritta. I motivi sono vari: si va dall'inattendibilità delle prove scritte alla importanza di abituare gli alunni all'esposizione orale, alla possibilità di valutare con la prova orale la preparazione sulle varie parti del programma (solo con un colloquio si può valutare la preparazione sui fondamenti, su questioni critiche, su fatti storici e su aspetti culturali, che pure sono ben presenti nei nuovi programmi dell'ultimo anno di scuola secondaria).

Sui punti elencati nell'articolo di Archimede:

1) una grande maggioranza, quasi la totalità, è favorevole che si diano valutazioni sulle singole discipline oggetto o non oggetto di esame, o almeno su gruppi di materie (scientifiche, umanistiche, linguistiche), valutazioni chiaramente e pubblicamente espresse, non soltanto scritte in qualche registro semiriservato;
2) i pareri sulla opportunità di rendere noti in partenza i punteggi parziali attribuiti ai singoli quesiti sono diversi; alcuni sono contrari, altri molto favorevoli; altri pensano che basterebbe presentare i quesiti ed i problemi secondo l'ordine crescente di una supposta difficoltà e stabilire un punteggio massimo per i quesiti ed un punteggio massimo per i problemi senza dare indicazioni troppo rigide;
3) tutti sono favorevoli che si stabiliscano con chiarezza i sussidi di calcolo (e non solo di calcolo) consentiti; non invece che si forniscano formulari ufficiali (quali?);
4) molto consenso ha la proposta che vengano rese note con congruo anticipo e con chiare motivazioni le previste modifiche di contenuti e di modalità delle prove; qualcuno ha detto che "non bisogna fare esperimenti sulla pelle degli allievi";
5) chiaramente è auspicabile che agli esami si possa indagare sulle varie parti del programma; ma ciò è possibile solo se c'è anche la prova orale;
6) la grande maggioranza è d'accordo sulla presenza di più domande indipendenti; ed anche sulla presenza di quesiti con risposte brevi; ma non tanto su quelli a risposte multiple; questi possono pure starci ma non in modo esclusivo;
7) a tutti sembra opportuno che si lasci agli alunni la libertà di scegliere le proprie strategie risolutive (agli ultimi esami, un commissario non ha accettato la risoluzione geometrica di un allievo perché la figura relativa al problema era data in un riferimento cartesiano!); ma molti sono favorevoli che ci sia qualche guida ben dosata e soprattutto che sia dica, quando è il caso, che si possono seguire più vie per le risposte.

Tornando ad una questione emersa ripetutamente nelle discussioni (il tipo di commissione) molti concordano nell'affermare che se la commissione dovesse essere formata solo da docenti della classe, con la inutile presenza di una specie di presidente esterno, allora sarebbe meglio non fare affatto questi esami. La solita motivazione per sostenere la convenienza delle commissioni interne, cioè che nessuno può conoscere gli alunni meglio dei loro docenti, porta proprio alla conclusione detta.

εεεεεεεεε... cercasi disperatamente

Gruppo di lavoro Triennio Superiori

Coordinatori: M. Michelotti Venè - A. Maffini***

Il più è partire....; ma quando si deve introdurre il corso d'analisi la partenza è sempre irta di difficoltà poiché ci si scontra immediatamente con la definizione di **limite**.

Introdurre intuitivamente il concetto di limite è semplice in quanto si capisce abbastanza bene che $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$ significa che "approssimando x°, y=f(x) si approssima ad l" qualora tali "approssimazioni" siano possibili. Ben più difficile è far comprendere la definizione di limite secondo la teoria di Weierstrass; perché?

Il problema è stato ben analizzato dal prof. Invernizzi[1]; egli afferma che tale difficoltà è dovuta a:

1) la definizione è controvariante, nel senso che, mentre intuitivamente dal "comportamento della variabile x risalgo al "comportamento" di y, nella definizione parto da y per arrivare ad x;
2) la definizione inizia con un quantificatore universale ($\forall\varepsilon>0$....) e mostra allo studente che sono necessarie "infinite verifiche";
3) la definizione è forse troppo generale per il primo insegnamento dell'idea di limite (vale per spazi metrici e per funzioni fra spazi topologici);
4) la definizione è totalmente formalizzata, lontana da ogni intuizione geometrica;
5) la definizione ε-δ è un terribile *pons asinorum* dell'analisi dal quale cadono molti allievi.

Riteniamo che questa analisi sia condivisa da molti ed è proprio per costruire un ponte più largo per gli studenti che ci siamo rivolti all'analisi non standard.

In questo lavoro di gruppo vedremo a grandi linee l'origine delle idee di fondo che l'hanno generata partendo dall'analisi di tre problemi-tipo attraverso un

* Dipartimento di Matematica, Università di Parma
** Liceo Scientifico "P.A.Maggi"- Viadana (MN)

[1] Sergio Invernizzi: "Limiti e visualizzazione". Quaderno n°15, aprile 1993, Trieste

questionario a cui i partecipanti sono tenuti a rispondere.

1) Considera il seguente ragionamento, proposto da N. Cusano nel XVI secolo, relativo alla determinazione dell'area di un cerchio:
   "La circonferenza può essere pensata come composta di un numero infinito di segmenti rettilinei tutti uguali tra loro e infinitamente corti. L'area del cerchio è data allora dalla somma delle aree di triangoli infinitesimi aventi tutti altezza 1. Poiché l'area del triangolo è data dal semiprodotto della base per l'altezza e poiché la somma delle basi dei triangoli fornisce la circonferenza, l'area del cerchio è data dal semiprodotto del raggio per la circonferenza."
2) Considera il seguente ragionamento, proposto da Archimede, relativo alla determinazione dell'area di un cerchio:
   "Supponiamo che l'area del cerchio non sia metà del prodotto del raggio per la sua circonferenza; sia allora d la differenza fra la maggiore e la minore delle due quantità. Se circoscriviamo alla circonferenza un poligono di n lati, l'area di tale poligono sarà la somma delle aree degli n triangoli che lo compongono, tutti di altezza 1, e quindi l'area complessiva sarà p, essendo p il semiperimetro del poligono. Preso n sufficientemente grande, possiamo far sì che l'area del poligono differisca dall'area del cerchio meno della metà di d. Poiché il perimetro del poligono differirà dalla circonferenza per meno della meta di d, l'area del cerchio e il semiprodotto del raggio per la circonferenza differiranno meno di d, contro l'ipotesi di partenza. Quindi d deve essere zero".
3) Considera il seguente ragionamento, proposto da Leibniz nel XVIII secolo, relativo al calcolo della velocità istantanea al tempo t=2 s per un corpo che si muove con una legge oraria del tipo $s=t^2$ (con s misurato in metri e t in secondi):
   "Preso l'istante t=2, si consideri la quantità "infinitesima" che indicheremo con Δt e si valuti la posizione del punto materiale all'istante $t1=2+\Delta t$ data da $s1=4+4\Delta t+\Delta t^2$ e quindi $\Delta s=4\Delta t+\Delta t^2$, cioè una quantità infinitesima. Poiché la velocità è data dal rapporto $\Delta s/\Delta t=4+\Delta t$, 4 e $4+\Delta t$ si possono considerare "la stessa cosa", cioè Δt è una quantità trascurabile rispetto a 4 e quindi la velocità istantanea al tempo t=2 s è 4 (m/s)".

Relativamente ai problemi precedenti, rispondi alle seguenti domande:

a) Quali considerazioni ti sorgono spontanee con simili modi di procedere?
b) Cosa intendono, secondo te, gli autori con i termini "infinito" e "infinitesimi"?
c) Ricordano qualche procedimento a te noto?
d) Li proporresti in un contesto didattico?
e) Riusciresti a darne una esplicitazione formale o, in alternativa, una generalizzazione che li possa rendere operativi anche in altro contesto?

f) Proponi dei problemi della matematica (diversi dai precedenti!) e risolvili in modo analogo.

Alcune (spontanee) considerazioni:

Il ragionamento proposto da **Nicola Cusano** (1407-1464) nel XV secolo porta ad un risultato corretto, ma con una forma ed una terminologia che sarebbero state respinte da Euclide e da tutta la cultura greca in quanto presupponeva la presenza di infiniti ed infinitesimi in atto.

D'altra parte anche senza scomodare Euclide le obiezioni ad un siffatto modo di procedere vengono spontanee: innanzi tutto non è chiaro cosa si intenda con triangolo di base infinitesima: è zero o è diversa da zero? Nel primo caso l'area del triangolo è zero e quindi la somma di termini nulli darebbe sempre zero; nel secondo caso avremmo la somma di infiniti termini non nulli e quindi, per la proprietà archimedea dei numeri reali, avremmo una somma infinitamente grande. In sostanza, se esistessero triangoli siffatti, la loro area sarebbe un numero non archimedeo. Il problema che si trascinerà sino al novecento, è dunque questo: esistono numeri di questo tipo?

Un'altra obiezione che si può fare è di carattere più filosofico: è possibile ricavare le proprietà di una figura nella sua interezza a partire dalle proprietà delle infinite parti che la compongono? E' chiaro come una risposta positiva porterebbe a pericolose conclusioni legate ad una sorta di induzione che dall'infinito (o dall'infinitesimo) porterebbe al finito.

Archimede (287 a.C.- 212 a.C.) risolve il problema rimanendo nella tradizione classica usando il metodo di esaustione. In questo modo Archimede evita il ricorso agli infinitesimi, argomento che consentirà ai critici del calcolo infinitesimale del '600 e del '700 di chiedersi se fosse lecito o no utilizzare questioni che i greci avevano scrupolosamente evitato. Nelle intenzione degli assertori dell'analisi infinitesimale si sarebbe potuto passare da enti di una (esempio linee o segmenti) oppure due dimensioni (ad esempio superfici piane) a enti di due (superfici) o tre dimensioni (volumi). Questo modo di procedere, tipico per esempio di **Cavalieri** (1598-1647), viene criticato da Guldino che dall'analisi che compie di ogni teorema di Cavalieri stesso arriva alla medesima critica: "*Rispondo che il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali [parti] non possono essere mai esaurite*". In fondo Guldino mette in evidenza quello che sarà il reale problema alla base di tutte le successive disquisizioni: l'esistenza (o l'accettazione) dell'infinito e dell'infinitesimo in atto.

Rimaneva però un dubbio: come mai i ragionamenti con gli infinitesimi e gli infiniti (alla "Cusano", per intenderci) sembra funzionino? E se funzionano per risolvere taluni problemi non è possibile trascurarne l'aspetto prettamente epistemologico? A prescindere dal fatto che difficilmente un matematico accetta di buon

partito una teoria od un metodo semplicemente perché "funziona", i problemi sono anche altri, riguardanti, ad esempio, una visione teologica del mondo.

Come spesso succede nel campo della matematica e della scienza in genere, è lo scontro fra due grosse personalità che mette in evidenza l'importanza di nuove scoperte o teorie; nel nostro caso, **Leibniz** (1647-1716) e **Newton** (1642-1727).

I due pensatori arrivarono al calcolo differenziale in modo diverso e separatamente: per Newton era uno strumento necessario per risolvere alcune questioni di cinematica e di dinamica, mentre per Leibniz tali studi si inserirono nel contesto generale della sua filosofia.

Il critico più lucido del modo di fare analisi di Leibniz e Newton fu il vescovo inglese **George Berkeley** (1685-1753) nella sua opera *L'Analista o discorso indirizzato ad un matematico incredulo* del 1734 aveva lucidamente rivolto alla teoria di Leibniz. Di fatto però considerando Δt come una quantità finita, il rapporto $\Delta s/\Delta t$ diventava $4+\Delta t$ e per eliminare il termine "trascurabile" Δt Newton lo pone uguale a zero. In sostanza Newton afferma che l'errore che si commette considerando 4 la velocità al tempo $t=2\ s$ è trascurabile, o meglio può essere reso talmente piccolo (verrebbe da dire "a piacere") da poterlo ritenere nullo.

La critica di Berkeley risulta persino banale nella sua ovvietà: Δt è uguale a zero oppure non lo è. Se è diverso da zero allora Δs è diverso da zero e quindi il rapporto non è 4; se Δt è zero, anche Δs lo è e quindi il rapporto $\Delta s/\Delta t$ diventa 0/0, cioè privo di significato. In sostanza afferma Berkeley "*...una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa.......Che cosa sono queste flussioni? La velocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi stessi incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite , né quantità infinitamente piccole e neppure nulle*".

Per oltre un secolo non si riuscì a dare risposta alle obiezioni di Berkeley, seppure i matematici continuassero ad operare (e con successo) con gli infinitesimi.

Soffermiamoci sulla critica di Berkeley per capire meglio lo spirito dell'atteggiamento di Leibniz.

La forza di tale critica risiede nel fatto che i ragionamenti degli analisti "funzionerebbero" se gli infinitesimi esistessero; il problema quindi non è solo di carattere logico, ma è anche e soprattutto un problema realista: se gli infinitesimi esistessero, avrebbero un corrispettivo nella realtà. Ma se così fosse esisterebbero degli infiniti e degli infinitesimi in atto. Comunque si guardi la questione, il punto d'arrivo è sempre lo stesso: negare i presupposti su cui si era basata la geometria e la matematica in genere dei greci, matematica ritenuta comunque "della realtà".

Strettamente legato a questo c'è un altro aspetto che emerge dalle critiche di Berkeley e su cui è opportuno porre l'accento: egli rimprovera a Leibniz e Newton di uscire dal contesto dei numeri reali per ragionare in termini di infinitesimi "quando serve" per poi rientrarvi per trarre le conclusioni.

Leibniz di fatto non affermava che gli infinitesimi esistevano realmente, ma solo che "***si può ragionare come se esistessero***"; nella sua raffigurazione li aveva pensati come numeri positivi o negativi infinitamente piccoli che ancora godevano delle "stesse proprietà" degli usuali numeri della matematica. Dal punto di vista logico si hanno non poche difficoltà ad accettare un'idea di questo tipo: se godono di tutte le proprietà dei numeri reali, come possono essere positivi e minori di ogni numero reale positivo?

Per capire la posizione di Leibniz rispetto ai contenuti dell'analisi non si può prescindere dalla sua filosofia, il cui punto di partenza risiede nella critica al concetto di verità formulata da Cartesio. Per il filosofo francese, la verità di un asserto è garantita dalla sua evidenza. Questa visione ha il limite, secondo Leibniz, di non permettere di cogliere la verità in se stessa, ma di limitarsi a considerare il modo con cui il soggetto la percepisce.

Leibniz distingue invece due tipi di verità: le verità di ragione e le verità di fatto.

Le prime risultano necessarie, ma non riguardano la realtà e si basano sul principio di identità (quando sono affermative) e sul principio di non contraddizione (quando sono negative; questo comporta, fra l'altro, che le realtà di ragione non possono essere contraddittorie). Le verità di ragione delineano il mondo della pura possibilità che è assai più vasto ed esteso di quello della realtà. Si passa così da un piano intuizionista ad uno rigorosamente formalista e questo fa pensare ad una sorta di verità "in atto" (esistente indipendentemente dalla mia capacità di coglierla) contrapposta ad una verità cartesiana che sembrava più "in potenza" (legata cioè alla mia capacità di coglierla).

Accanto alle verità di ragione Leibniz pone le verità di fatto, di minore importanza rispetto alle prime, legate più a conoscenze di carattere storico e concernenti la realtà effettiva, e come tali deducibili a posteriori. Ritiene tuttavia che anche queste verità "con un procedimento infinito" potrebbero essere riportate a verità di ragione. Malgrado Leibniz non approfondisca a cosa si riferisca esattamente, questo pone il problema di cosa intenda per "infinito". Queste verità non sono fondate sul principio di non contraddizione (il che comporta che sia possibile anche il loro contrario), ma sul principio di ragion sufficiente.

C'è pero un altro aspetto che distingue le verità di fatto da quelle di ragione: quest'ultime, pur essendo assolute, riguardano solo le essenze possibili, non le esistenze. La loro assolutezza dipende dal carattere formale che hanno, dal riferirsi cioè a delle possibilità, non a delle realtà: la realtà contiene in sé un fattore di contingenza che non può venire eliminato. I due ordini della coerenza logica e dell'esistenza sono così ben distinti. Volendo trasportare questa visione in ambito matematico, risulta piuttosto evidente come la questione dell'esistenza o meno nella realtà di infiniti e infinitesimi non ha molta importanza se questi enti vengono percepiti e compresi da un punto di vista logico.

All'interno della sua filosofia si può però riscontrare un possibile modello di una strutturazione logica del concetto matematico di infinitesimo "in atto"; d'altra parte se tale modello non esistesse sarebbe difficile ricondurre i concetti di carattere matematico ad un aspetto filosofico, come in fondo si vuol fare. Si arriva così alle monadi leibniziane che in modo semplicistico potremmo dire che stanno ad indicare le sostanze indivisibili, atomi spirituali senza parti, privi di estensione e di figura. Non è questa la sede per approfondire il concetto di monade; è interessante però chiederci: se gli atomi fisici non esprimono un modello per la monade (che, ricordiamo, è **sostanza**), a cosa si potrebbe pensare? Ai punti geometrici, forse, pur essendo enti astratti al contrario delle monadi che sono effettiva sostanza. Si può pensare ai numeri? Prima di rispondere esaminiamo brevemente alcune caratteristiche delle monadi.

Per avere una conoscenza perfetta della sostanza servirebbe un intelletto infinito (gli intelletti finiti si possono limitare solo alle verità di fatto), ma la limitatezza dell'intelletto conoscente è irrilevante per la sostanza conosciuta poiché ciascuna monade non solo possiede in sé la ragione profonda del susseguirsi dei suoi attributi, ma è anche una sostanza in continuo movimento, movimento che scaturisce dall'interno della monade stessa e non dal suo esterno. Leibniz al proposito paragona una monade ad una casa priva di porte e di finestre: essa possiede la capacità di evolversi da uno stato all'altro, ma non di uscire fuori di sé. Può in particolare rappresentarsi le altre monadi, ma questa rappresentazione non costituisce un penetrarle, bensì un rispecchiarle.

In questo contesto filosofico si inseriscono gli studi di carattere matematico di Leibniz. In diversi matematici anche successivi a Leibniz verrà preso in considerazione il concetto di infinito in atto, ma raramente (in Democrito, per certi aspetti) il concetto di infinitesimo in atto. L'idea di monade permette di individuare gli infinitesimi senza fare ricorso agli infiniti. Per comprendere il legame tra infinitesimi e monade, consideriamo il problema 3) posto all'inizio. Utilizzando le notazioni di Leibniz potremmo prendere un istante $2+dt$, essendo dt un intervallo infinitamente piccola; il rapporto incrementale relativo ai due punti $P(2,4)$ e $Q(2+dt,4+4dt+(dt)^2)$ sarebbe $4+dt$, nell'ipotesi che si possa operare con dt come con un parametro non nullo (cioè, come dice Leibniz, come se fosse un numero). Si può concludere, come fa Leibniz, che tale valore può essere considerato uguale a 4, senza incorrere nelle obiezioni di Berkeley? Possibile che

Leibniz non si ponesse il problema? La questione riguarda il concetto di "trascurabile", che se può essere introdotto ed accettato in un ambito fisico, risulta del tutto estraneo ad un contesto matematico; ma se al concetto di trascurabile si sostituisse quello di infinitamente vicino, la cosa diventerebbe più attualizzabile: basta chiarire ovviamente cosa si intende per infinitamente vicino. Immaginiamo allora di vedere un numero come una monade, cosa non così arbitraria se si pensa ai numeri come la sostanza di cui è fatta la matematica. Due valori si potrebbero considerare infinitamente vicini se appartengono alla stessa monade; quindi un "numero" non sarebbe come noi lo immaginiamo (legato tra l'altro ad una concezione statica dello stesso; nell'analisi standard si considerano gli intorni di un punto per porsi in un'ottica dinamica, o, per lo meno, che studia le variazioni), ma avrebbe attorno a sé un'insieme di elementi "infinitesimi" che , pur fornendo valori diversi, di fatto permettono di rimanere sempre all'interno della monade-numero. In questo modo due valori appartenenti alla stessa monade (come ad esempio 4 è $4+dt$, nel nostro caso) sono indistinguibili dal punto di vista macroscopico (cioè rispetto ad un esterno), ma la loro distinzione all'interno della monade-numero permette di operare con essi in modo dinamico: il movimento scaturisce all'interno del numero stesso, non dall'esterno (per parafrasare quanto detto in precedenza a proposito delle monadi), fornendo comunque un risultato "esterno". Siamo in un'ottica decisamente non-standard e le analogie tra le proprietà matematiche degli infinitesimi e le caratteristiche delle monadi sono sorprendenti; si pensi ad esempio alla proprietà archimedea, al fatto che due monadi siano distinte così come due monadi-numero sono disgiunte oppure al fatto che ogni monade, pur essendo distinta dalle altre, ne rispecchia la struttura. Leibniz è ricordato soprattutto per la simbologia che ha introdotto nell'analisi (tra gli altri, i simboli di integrale e di differenziale), simbologia che permette un uso più maneggevole, se non addirittura algebrico, del calcolo differenziale (si pensi per esempio ai teoremi sulle regole di derivazione), mentre si dimentica il grosso contributo fornito nel campo dell'introduzione dei concetti di infinito e infinitesimo in atto. Uno dei motivi per cui l'analisi di Leibniz non ha avuto successo, se non dal punto di vista simbolico, viene riscontrato, secondo i commentatori, nell'eccessivo misticismo presente nella sua filosofia (che fa ricondurre tutte le monadi alla monade suprema, Dio, che le ha create) e, necessariamente, nella sua matematica.

Per avere una formalizzazione rigorosa dei concetti dell'analisi e dare una risposta alle questioni sollevate da Berkeley occorrerà attendere la seconda metà dell'ottocento. Ma come viene data tale risposta?

La teoria universalmente riconosciuta e tuttora largamente usata nella didattica dell'analisi sia a livello di media superiore che universitaria è quella di **Weierstrass** (1815-1897). Com'è noto Weierstrass risolve il problema degli infinitesimi....eliminandoli attraverso il concetto di limite.

Per ritrovare in modo formale le idee di Leibniz, e con esse gli infinitesimi e gli infiniti in atto, bisognerà attendere ancora un altro secolo.

Nel 1966 A. Robinson pubblica presso la North-Holland Publishing Co. un libro, *Non-Standard Analysis*, che segna ufficialmente la nascita dell'analisi non-standard.

L'idea di Robinson in fondo è semplice: riprendere il concetto di infinitesimo nella versione di Leibniz, costruire un mondo in cui operare con questi infinitesimi in modo da dedurre i risultati che non è possibile trovare in R. Detto in modo così superficiale però non risulterebbero chiare quali condizioni permettevano al matematico americano di superare il limite e le riserve rappresentate dall'accettazione di un infinitesimo in atto.

Il problema in fondo è sempre quello: esistono gli infinitesimi? In un contesto matematico il concetto di esistenza non è più così chiaramente legato ad un'idea di modello reale, ma a quello di modello logico. Ciò che Robinson aveva a disposizione rispetto al filosofo tedesco erano soprattutto i risultati riguardanti la teoria dei modelli come i teoremi di Skolem relativi ai modelli non-standard del "contare" e, soprattutto, il teorema di compattezza del logico russo A. Malcev (successivamente generalizzato da L.A.Helkin), dedotto a sua volta dal teorema di completezza di Godel.

Il teorema di compattezza può essere espresso in questo modo:
"*Supponiamo di avere un insieme di proposizioni nel linguaggio L e supponiamo che ogni sottoinsieme finito di tali proposizioni sia vero in un universo standard U: esiste allora un universo non-standard U* in cui tutte le proposizioni dell'intera collezione sono simultaneamente vere*".

Vediamo allora come il teorema di compattezza garantisce l'esistenza di infinitesimi.

Si consideri l'insieme (infinito) P di proposizioni:

"*ε è un numero maggiore di zero e minore di $1/2$*"
"*ε è un numero maggiore di zero e minore di $1/3$*"
"*ε è un numero maggiore di zero e minore di $1/4$*"
....
"*ε è un numero maggiore di zero e minore di $1/n$*"
e così via.

Gli elementi di P possono essere scritti con un linguaggio formale del prim'ordine, inoltre se ci si riferisce all'universo (standard) R dei numeri reali, ogni suo sottoinsieme finito è vero poiché nell'intervallo $]0,1/n[$ cadrebbero infiniti numeri reali. Tuttavia l'insieme di tutte queste proposizioni risulta falso in R poiché dovrebbe esistere un numero reale positivo ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale. Per il teorema di compattezza esiste però un universo non-standard (che indicheremo con R*) in cui tutte le proposizioni di P sono vere. In tale insieme esiste allora un ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale; e questa condizione caratterizza ε come infinitesimo.

Una volta trovato un modello in cui esistono gli infinitesimi, il resto risulta conseguente; in particolare si possono definire gli infiniti (sempre col teorema di Malcev-Henkin; si invita il lettore a farlo come utile esercizio), le operazioni tra elementi non standard e le funzioni definite in R*. Il dubbio che può tuttavia rimanere è come diventa l'insieme dei numeri reali in una versione non-standard, se è possibile cioè darne una rappresentazione analoga all'usuale retta reale. In onore a Leibniz, Robinson introdusse proprio il termine di monade per indicare l'estensione non-standard di un numero reale r. Una monade contiene un solo numero reale r (standard) ed infiniti numeri non-standard ottenuti aggiungendo ad r quantità infinitesime. E' come se ogni numero reale fosse circondato, in R*, da una nube "elettronica" di infiniti infinitesimi, per cui potremmo dire che a livello "macroscopico" r* si confonde con r, mentre a livello "microscopico" i due valori sono distinti.

Il concetto di monade permette, come si è fatto in precedenza parlando di Leibniz, di comprendere meglio il concetto di vicinanza: un numero reale non-standard s appartiene alla monade individuata da un numero reale standard r se la loro differenza è un infinitesimo; quindi due numeri reali non-standard sono infinitamente vicini se appartengono alla stessa monade. In questo modo è possibile esprimere in senso matematico anche il concetto di "trascurabile": si potrebbe dire che all'interno di una monade è trascurabile ciò che non è reale, considerando il numero reale che la caratterizza come l'essenza (per usare una terminologia leibniziana); in generale potremmo generalizzare dicendo che è trascurabile ciò che non è standard (questo ovviamente per gli iperreali finiti).

Riprendiamo come esempio il problema 3) e vediamo come verrebbe risolto nell'analisi non-standard:
preso un infinitesimo positivo ε, si consideri lo spazio relativo all'istante $2+\varepsilon$ (si osservi che $2+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da 2); lo spazio percorso dall'istante $t=2$ all'istante $t1=2+\varepsilon$ è dato da $ds=4\varepsilon+\varepsilon^2$ e quindi il rapporto $\frac{ds}{dt}=\frac{4\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}=4+\varepsilon$ (si osservi come con ε si sia operato in modo algebrico). Il valore $4+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da 4, cioè la parte standard di $4+\varepsilon$ è 4. In pratica la velocità istantanea è data dalla parte standard di $4+\varepsilon$ che in genere viene indicata con $st(4+\varepsilon)$.

Com'è facile verificare, questo modo di procedere non è molto dissimile da quello utilizzato da Leibniz e da quello che normalmente usano i fruitori della matematica (fisici, ingegneri, biologi, ecc.); la non trascurabile differenza è che ora, per la prima volta, il metodo infinitesimale è stato reso rigoroso, grazie soprattutto alla logica formale.

Questo modo di procedere presenta il non trascurabile vantaggio di avere una trasposizione didattica estremamente semplice ed intuitiva: tramite essa la definizione di limite non è controvariante, non occorrono infinite verifiche, non è troppo generale né troppo formalizzata. La monade di un punto appare all'allievo come qualcosa di "visibile ed intuibile" ed anche studenti non particolarmente attenti studiosi riescono ad afferrare il significato matematico di limite. Tramite l'introduzione dei numeri iperreali, scritture scorrette, ma che gli studenti usano per "vedere" i risultati, tipo $\frac{1}{\infty}=0$ o $\frac{1}{0}=\infty$, assumono un significato preciso e oltremodo corretto: detto H un iperreale infinito, $\frac{1}{H}=\varepsilon$, essendo ε un infinitesimo e così via.

La nostra esperienza didattica è stata molto confortante: l'analisi non standard presenta difficoltà per noi insegnanti, abituati a ragionare in termini ε-δ e con degli stereotipi mentali dovuti ai nostri studi "tradizionali", ma non certo per gli studenti che vedono in essa una quasi naturale trascrizione matematica delle proprie intuizioni.

Non vogliamo proporre qui un trattato di Analisi non-standard; il nostro lavoro di gruppo serve solo ad evidenziare come le nostre scelte didattiche siano state supportate da un consistente retroterra filosofico e matematico. In fondo "nihil novi sub soli": l'analisi non standard è certamente la più antica analisi!

Bibliografia

L'ANALISI NON STANDARD - M.Davis, R.Hersh- Le Scienze n°49, settembre 1972

DAI GRAFICI AL CONCETTO DI LIMITE ATTRAVERSO L'ANALISI NON STANDARD - M. Michelotti Venè, C. Cervi, M.G. Delfrate, L. Ferraris, A. Maffini, A. Melej - Quaderno n°100 del Dipartimento di Matematica, Università di Parma - 1994

ANALISI NON STANDARD: NOZIONI PRELIMINARI - M. Michelotti Venè, C. Cervi, M.G. Delfrate, L. Ferraris, A. Maffini, A. Melej - Quaderno n°150 del Dipartimento di Matematica, Università di Parma - 1996

NON-STANDARD ANALYSIS - A. Robinson, North-Holland Publishing Co., 1966

ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - H.J.Keisler, Piccin Editore, 1982

QUADERNI P.R.I.S.T.E.M.- n° 3- Atti Convegno "Per una storia dell'analisi", MI, 24-26 marzo 1993.

INDICE

Gruppi di lavoro

COLLANA DI QUADERNI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ISSN 0393-0998

Ottobre 1999
Supplemento al n. 10

Period. mensile spedizione in A.P.
art. 2 comma 20/c legge 662/96
Filiale di Bologna

Anno XXVI

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

VENTESIMO CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«LA MATEMATICA E LE ALTRE SCIENZE: MODELLI, APPLICAZIONI, STRUMENTI DIDATTICI»

ORVIETO (TR), 22-23-24 OTTOBRE 1998
a cura di Giuseppe Anichini e Bruno D'Amore

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Stampa: Tecnoprint s.n.c., Via del Legatore 3, 40138 Bologna (Italia)

INDICE

GRUPPI DI LAVORO

COMUNICAZIONI

XX Congresso Nazionale U.M.I. - C.I.I.M.
sull'Insegnamento della Matematica

LA MATEMATICA E LE ALTRE SCIENZE: modelli, applicazioni, strumenti didattici

Orvieto, 22, 23, 24 ottobre 1998

In data 22 - 24 ottobre 1998 si è svolto presso il Centro Congressi di Orvieto il *XX Congresso Nazionale sull'insegnamento della Matematica:* **LA MATEMATICA E LE ALTRE SCIENZE: modelli, applicazioni, strumenti didattici.**

Il Congresso è stato organizzato dalla C.I.I.M., commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana per l'insegnamento della Matematica.

La C.I.I.M. è attualmente presieduta dal prof. Ferdinando Arzarello (Univ. di Torino) ed è formata dai professori: Giuseppe Anichini (Univ. di Firenze), Anna Maria Arpinati (IRRSAE Emilia Romagna), Aldo Brigaglia (Univ. di Palermo), Lucia Ciarrapico (M.P.I.), Bruno D'Amore (Univ. di Bologna), Mario Marchi (Univ. di Brescia), Roberto Tortora (Univ. di Napoli).

Nella C.I.I.M., che ha progettato il Congresso di Orvieto, faceva parte anche il prof. Francesco Speranza, recentemente scomparso. Ancor oggi i colleghi della commissione, l'Unione Mateamtica Italiana e tutti i partecipanti al Convegno lo vogliono ricordare con profonda stima e commozione.

Il Convegno è stato organizzato con notevole impegno e con eccellenti risultati: la C.I.I.M. si è potuta avvalere del grande lavoro e del prezioso contributo della prof. Francesca Conti e di altri colleghi dell'Università di Perugia.

Il programma del Convegno è pubblicato in questo supplemento del Notiziario: da esso possiamo vedere che sono state tenute 6 conferenze generali che hanno avuto una grandissima partecipazione.

Sono state anche seguitissime le Tavole rotonde sul "documento dei saggi" e sul "Matematica: linguaggio della scienza e della tecnologia" e la presentazione delle "Olimpiadi della Matematica" con successivi cortometraggio sull'orientamento scolastico (a cura del prof. Franco Conti).

I partecipanti hanno poi apprezzato particolarmente quello che è stato presentato nell'ambito dei "Gruppi di lavoro" e delle "Comunicazioni".

Purtroppo per una delle conferenze, e per qualche altro intervento, non è stato possibile pubblicare qui il testo: tutto il resto, dalle Tavole rotonde alle comunicazioni ed ai Gruppi di lavoro, ha qui una sua traccia. La CIIM ringrazia di questo tutti i relatori che hanno collaborato alla pubblicazione del presente fascicolo.

Una delle conferenze generali è stata tenuta, con particolare successo, in teleconferenza con studenti ed insegnanti di Matematica di 6 scuole secondarie equidistribuite sul territorio nazionale.

Per tre delle conferenze generali la CIIM aveva organizzato una giornata di preparazione, nel giugno 1998, con alcuni insegnanti di scuola secondaria delle due provincie dell'Umbria. Questi insegnanti hanno successivamente "preparato" gli alunni delle loro classi alla conferenza proponendo loro alcuni problemi, suggeriti dai relatori delle conferenze, che gli allievi hanno poi portato all'attenzione del convegno (e di ciò si può trovare traccia nelle "Comunicazioni").

Questa iniziativa, proposta per la prima volta nell'ambito di questo tipo di congresso, ha avuto un grande successo da parte degli studenti, dei loro insegnanti (e Presidi) e varrà forse la pena di riproporlo in futuro.

Il coinvolgimento diretto degli studenti e degli insegnanti potrà essere una delle leve che stimola ad una maggiore conoscenza della Matematica, delle sue applicazioni e della sua travolgente vitalità.

Giuseppe Anichini, Bruno D'Amore

PROGRAMMA

Giovedì, 22 ottobre 1998

- saluti delle Autorità e del Presidente dell'U.M.I.
- Prof. Vinicio Villani (Univ. Pisa), *Modellizzazioni Matematiche: dal conto della spesa alle dimensioni dell'Universo.*
- Prof. Silvano Milani (Univ. Milano), *Possiamo rappresentare matematicamente l'adolescenza?*
- Gruppi di lavoro
- *Le olimpiadi della Matematica* a cura dei Professori Claudio Bernadi (Univ. "La Sapienza" - Roma) e Franco Conti (Scuola Normale - Pisa). Proiezioni dei cortometraggi "Esporre la matematica", "Orientamento scolastico" a cura del prof. Franco Conti.

Venerdì, 23 ottobre 1999

- Prof. Albrecht Beutelspacher (Univ. Giessen), *Crittologia: l'arte e la scienza dei segreti.*
- Prof. Carlo Dapueto (Univ. Genova), *Le applicazioni della matematica nei curricoli: finalità modalità, discipline e contesti coinvolti.*
- Prof. Franco Conti (Scuola Normale - Pisa), *Matematica ed ecologia.*
- Comunicazioni
- Dibattito sul tema: "Luci ed ombre nel futuro dell'educazione matematica"

Sabato, 24 ottobre 1999

- Tavola rotonda su: "La matematica: linguaggio della scienza e della tecnologia"
- Prof. Giorgio Israel (Univ. Roma), *Mille lenti per osservare il mondo: ottant'anni di modellistica matematica*

SALUTO DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il Presidente dell'UMI non ha potuto partecipare al Congresso per motivi di salute. Il saluto al Congresso è stato portato dal Segretario dell'Unione, prof.Giuseppe Anichini.

Il XX Congresso Nazionale sull'Insegnamento della Matematica, organizzato dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (C.I.I.M.), commissione permanente dell'Unione, conferma l'impegno, da sempre, dell'UMI nel promuovere e stimolare lo studio e l'approfondimento delle varie tematiche collegate alla didattica della Matematica in ogni ordine di Scuola. E' questo un momento, storico - politico, in cui la richiesta dello "strumento Matematica" è particolarmente pressante dal mondo delle applicazioni, dal mondo universitario e dal mondo del cittadino comune, sempre più deciso a non subire passivamente l'immersione ormai continua nelle innovazioni tecnologiche della realtà di oggi.

Corrispondere a questo impegno costituirà un punto significativo non solo per l'UMI ma per la Scuola e per l'intero Paese: è dunque particolarmente vitale auspicare che la necessità di tali richieste venga riconosciuta da tutti coloro che hanno responsabilità di Governo della Scuola italiana.

Un primo passo in questa direzione può essere già quello di intensificare le iniziative, tradizionali e più recenti, volte al miglioramento della preparazione matematica degli studenti e dei cittadini innalzando la qualità dell'insegnamento di questa disciplina. Il raggiungimento degli obiettivi dell'UNESCO, che ha dichiarato il 2000 "anno mondiale della Matematica", sarà, ne siamo certi, una spinta fondamentale per far arrivare all'opinione comune la percezione del ruolo che la Matematica occupa oggi all'interno della sfida tecnologica e della cultura più in generale.

Due parole adesso sui temi del Congresso di quest'anno.

Possiamo subito dire che la scelta delle tematiche che sono state poste al centro dei lavori del Congresso si sposa felicemente con quanto appena detto. L'argomento scelto dalla C.I.I.M. evidenzia infatti già quella che è la prerogativa principale della Matematica ovvero il suo rapporto con tutte le altre discipline. Se è universalmente noto infatti il fatto che della Matematica fanno uno strumento ineliminabile discipline quali la Fisica, la Biologia, l'Economia, la Chimica e l'Ingegneria, è altrettanto vero, oggi, che lo stesso tipo di richiesta viene fatta anche da Medicina, da Agraria, dalle Biotecnologie e da altre discipline fino alle Scienze Giuridiche. E' stata proprio infatti la richiesta di Matematica per quest'ultima disciplina, finora considerata ai suoi antipodi, che i partecipanti al XV Congresso UMI di Padova (nel 1995), hanno potuto sentire dalla viva voce del Rettore di quell'Ateneo, uomo di Giurisprudenza.

Val anche la pena di ricordare che, in assenza di Premi Nobel per laMatematica, si possono annoverare, nell'ultimo decennio, ben 5 massimi riconoscimenti dati a matematici, anche se, ufficialmente, per "la Chimica" o per "l'Economia".

Il modello matematico sarà dunque l'anello di congiunzione fra il mondo reale, ovvero il mondo dei problemi concreti, e la teoria astratta: sperimentatore -- e chiameremo così il fisico, lo statistico, l'agrario, ecc.. -- affronta il problema e si trova di fronte a grafici, tabelle, dati numerici che dovranno essere "ripuliti" per essere "letti"; a questo punto è il matematico che interviene (e può essere lo stesso sperimentatore se in possesso di una buona base matematica) per dire se il problema ha senso, se ha soluzione, se quest'ultima è unica, se possiamo permetterci di scegliere (in modo "ottimale") una soluzione fra più soluzioni e così via. Successivamente la risposta del matematico deve essere "riletta" nell'ambito del problema che l'aveva stimolata e, successivamente, dovrà essere confrontata con la sua ammissibilità.

E' in questa ottica che gli insegnanti di discipline matematiche dovranno avvicinare le tematiche disciplinare ai loro allievi: pensando non solo a coloro che faranno ricerca matematica -- i possessori del "sacro fuoco" matematico sempre ci saranno ed a qualunque impostazione saranno reattivi -- ma a coloro che l'opinione pubblica vede in futuro come economisti, medici, bancari, biologi, ecc...

Ed è qui che emerge la grande responsabilità che investirà i colleghi insegnanti di Matematica: essi dovranno far contemperare l'aspetto della "Matematica Queen of Sciences" con l'altro aspetto, che abbiamo visto poche righe fa essere altrettanto vitale, di "Matematica Servant of Sciences". Ciò impone di dover collegare aree diverse, linguaggi diversi e solo l'aspetto modellistico potrà, in parte, attenuare queste difficoltà. Per questo, nell'ambito di questo convegno, la *Tavola rotonda* sul *Linguaggio della Matematica nelle altre Scienze* appare come una delle iniziative particolarmente convincenti.

Gli organizzatori del Congresso hanno cercato, con felice intuizione, di allargare gli usuali confini tematici coinvolgendo scienziati d'altre discipline e forti utilizzatori dello strumento matematico; essi sono qui con i matematici dell'Università e, fatto forse innovativo, insieme a molti, moltissimi docenti di scuola secondaria. Ancor più significativo è il fatto che, a memoria di chi scrive, per la prima volta gli studenti di scuola superiore sono personalmente implicati: molti, e da ogni parte del nostro Paese, per teleconferenza; altri qui ad Orvieto in prima persona.

Di ciò, ovvero del sicuro successo di una tale iniziativa, va dato atto al gruppo degli organizzatori coordinati magistralmente dalla Prof. Francesca Conti. Essi hanno saputo dare, al di là dell'impeccabile organizzazione, anche quel tocco in più -- aiutati, bisogna dirlo, dalla scelta particolarmente felice della città e del luogo del Congresso -- che renderà questi giorni altamente proficui per tutti i partecipanti.

Credo infine di poter interpretare il pensiero del Presidente dell'Unione, prof. Alberto Conte e dei colleghi impegnati nelle attività dell'UMI, nel ringraziare sentitamente la Prof. Conti, i colleghi del comitato organizzatore, le autorità di Orvieto, per quanto sarà fatto, in questi giorni, a favore della Matematica e degli insegnanti di tale disciplina.

RELAZIONI

CODICI SEGRETI

Albrecht Beutelspacher

1. Introduzione

La crittologia o crittografia (dal greco κρυπτοσ = segreto, λογοσ = parola, γραφειν = scrivere) è l'arte e la scienza di scrivere segreti.

La crittologia ha due scopi, la *segretezza*, cioè la garanzia che un messaggio non possa essere *letto* da persone non autorizzate, e *l'autenticità*, cioè la garanzia che un messaggio non possa essere *cambiato* da persone non autorizzate. Mentre la segretezza ha costituito lo scopo della crittologia fin dall'inizio, cioè da più di 2000 anni fa, l'autenticità è uno scopo abbastanza nuovo, ma è uno strumento molto importante nelle applicazioni moderne.

Il cifrare ha avuto sempre moltissime applicazioni, come, ad esempio il nascondere i messaggi diplomatici; ma anche il cellulare cifra le parole e non è possibile immaginare il pay-TV senza metodi per cifrare. Metodi di autenticità giocano un ruolo importante sia nel pagamento elettronico, che nel telefonino o nel bancomat.

Chiaramente sono stati usati meccanismi tradizionali di tipo fisico o organizzativo per ottenere la sicurezza, ad esempio le casseforti, il controllo occulto delle persone, il principio dei quattro occhi, ... In particolare sono stati inventati mezzi per la sicurezza delle banconote.

Chiediamoci perchè si usano meccanismi della crittologia e non altri meccanismi. Ci sono almeno due risposte: Nella crittologia, essendo una parte della matematica, si può dimostrare logicamente la sicurezza di un algoritmo. Questa proprietà ha un valore principalmente teorico, in quanto si conoscono pochissimi algoritmi la cui sicurezza è dimostrabile. La seconda risposta, molto importante per la pratica, è che nella crittografia si può aumentare la sicurezza di un meccanismo in modo arbitrario.

2. La crittologia classica

La situazione più semplice è che due persone A e B vogliano parlare in segreto, ma che ci sia pure un avversario cattivo che vuole sentire i loro messaggi.

Lo scopo del trasmettitore A è quello di trasformare il messaggio in modo che l'avversario non riesca a capire, ma il ricevitore B possa capire facilmente. (Non è difficile trasformare il messaggio in modo che nessuno possa capire.)

* Math. Institut, Arndtstr. 2, D-35392 Giessen,
albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de
http://www.uni-giessen.de/beutelspacher

La crittologia è un'arte molto antica; infatti tra i metodi crittologici usati nel passato troviamo la scitala lacedemonica, la griglia di Polibio e gli alfabeti di Giulio Cesare.

Osservando il codice di Cesare vediamo una cosa molto importante, precisamente la variabilità dell'alfabeto cifrante. Infatti, l'alfabeto cifrante si ottiene dall'alfabeto normale „spostandolo" di alcune posizioni. Un testo cifrato si ottiene sostituendo ad ogni lettera dell'alfabeto in chiaro la lettera dell'alfabeto cifrante sotto di essa. Lo „spostamento" eseguito è la *chiave* dell'algoritmo.

La chiave è il segreto noto esclusivamente al mittente e al destinatario, che, usandola, sono in grado di proteggere la loro comunicazione da tutti gli altri. È chiaro che la chiave deve essere trasmessa prima che il messaggio stesso possa essere trasmesso.

Già al nostro livello di discussione è possibile dire se un algoritmo sia sicuro o no. Se il nemico riesce a decrittare il testo oscuro senza conoscere la chiave, l'algoritmo è cattivo. Se invece nessun nemico può avere successo, l'algoritmo è sicuro.

Distinguiamo codici *monoalfabetici* e *polialfabetici*. Il codice di Cesare è un tipico esempio di algoritmo monoalfabetico; in generale, un algoritmo monoalfabetico è una permutazione delle lettere dell'alfabeto. Quindi, ci sono precisamente 26! (circa 10^{26}) codici monoalfabetici. Ma essi danno solo poco sicurezza, perchè possono essere forzati facilmente.

Il seguente crittogramma è stato ottenuto con un algoritmo monoalfabetico. Il lettore è invitato a decifrarlo:

ABCB DC DBEB.

La crittologia fece un passo molto importante nel 1500 circa, con l'invenzione dei cosiddetti codici *polialfabetici*, ad opera dell'italiano Gerolamo Cardano, del tedesco Tritemio e del francese Blaise de Vigenère. L'idea era di usare non un solo alfabeto cifrante, ma molti. La chiave non è una sola lettera, ma una parola, le cui lettere individuano gli alfabeti da usare.

Descriviamo nei dettagli un codice polialfabetico che ha avuto molto successo in passato: il codice di Vigenère. Esso usa una tavola, nota come *quadrato di Vigenère*, formata da 26 righe date dai 26 alfabeti di Cesare, le righe appaiono in ordine naturale.Ad ogni alfabeto viene dato il nome della prima lettera che in esso compare.

Mittente e destinatario hanno una chiave segreta in comune che è una parola, ad esempio la parola VIA. Per cifrare un testo in chiaro, si scrive la parola chiave sul testo in chiaro, tante volte quante sono necessarie per avere una sequenza VIAVIAV... lunga quanto il testo in chiaro. Si cifra ogni lettera del testo con l'alfabeto di Cesare che comincia con la lettera della parola chiave che compare sopra ad essa.

Nel nostro esempio la prima, la quarta, la settima, ... lettera del testo sono cifrate con l'alfabeto di Cesare che comincia con V, e così via.

Il metodo descritto può diventare anche numerico nel modo seguente. Ogni lettera dell'alfabeto viene sostituita da un numero, così A=0, B=1, ..., Z =25.

Per cifrare una lettera si calcola la somma modulo 26 dei numeri corrispondenti ad essa ed alla lettera della parola chiave corrispondente.

Con la parola *crittoanalisi* indichiamo tutti i metodi che possono permettere di leggere un messaggio cifrato senza conoscere la chiave usata, cioè di „rompere" o „forzare" un codice.

Ci sono due modi che permettono di forzare il codice di Cesare facilmente.

Il primo è il metodo esaustivo, che consiste nel provare tutte le chiavi possibili, che in un codice di Cesare sono solo 26.

L'altro metodo è basato su una analisi statistica del testo cifrato. Si trovano le lettere più frequenti del testo cifrato. Esse corrispondono alle lettere più frequenti della lingua italiana, cioè E, I, A, O. Così si determina l'alfabeto di Cesare che è stato usato e si può risalire al testo in chiaro.

Anche i codici polialfabetici possono essere forzati. Il passo più importante è quello di calcolare il numero delle lettere della parola chiave. Se si riesce, poi forzare il codice diventa una cosa abbastanza facile.

Se come chiave non usiamo una parola (corta), ma una sequenza casuale di lettere, otteniamo un codice insuperabile. Se non parliamo di lettere, ma di bit casuali, il codice ottenuto si chiama *one-time pad*.

3. La crittologia moderna

Nell'anno 1976 avvenne una rivoluzione nella crittologia. Due giovani americani, Diffie ed Hellman, si chiesero se fosse possibile una comunicazione segreta senza una chiave segreta comune. Hanno provato che è necessario un segreto, ma non comune. Questo è stato l'anno di nascita della crittologia moderna, detta *a chiave pubblica*. Due anni dopo, Rivest, Shamir ed Adleman hanno inventato il primo algoritmo a chiave pubblica, l'algoritmo RSA. Questo algoritmo è basato sulla teoria dei numeri ed in particolare sul teorema di Eulero.

Alla fine del loro lavoro Diffie ed Hellman presentarono un algoritmo molto intelligente per lo scambio delle chiavi, algoritmo del quale ora parleremo.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto dei mezzi che permettono a due persone di scambiarsi messaggi segreti, ma che richiedono che i due abbiano già una chiave segreta comune. La trasmissione di tale chiave segreta costituisce un grande problema, che non può essere risolto totalmente con metodi della crittografia classica.

La crittografia moderna risolve questo problema eliminando la trasmissione di un segreto. Si immagini che due persone senza aver mai comunicato prima, scambiando notizie davanti agli occhi di tutti, possano costruire un loro segreto.

Ciò è realizzabile usando la teoria dei numeri. Vediamo più in particolare un metodo di realizzare questo scopo: il *metodo di Diffie ed Hellman*.

Fissiamo un numero primo p e l'insieme $Z_p = \{0,1,\ldots,p-1\}$ di interi minori di p. Definiamo in Z_p una operazione di moltiplicazione come segue: Il prodotto di due numeri a, b di Z_p è ab, se ab < p, mentre è il resto della divisione di ab per p, se ab ≥ p. La moltiplicazione così definita gode ancora di tutte le proprietà della moltiplicazione negli interi.

In particolare è possibile definire ancora la funzione esponenziale, cioè la funzione $x \mapsto g^x$ mod p, essendo g un numero fissato.

È bene mettere in evidenza che, mentre è molto facile calcolare un $y=g^x$ mod p, è praticamente impossibile, dato y, determinare x, se p è abbastanza grande, avente cioè 100 o 200 cifre decimali. Si è soliti chiamare una funzione con questa proprietà *funzione unidirezionale.*

Il metodo di Diffie ed Hellman, che ora descriveremo, sfrutta proprio questa proprietà della funzione esponenziale in Z_p.

Supponiamo che un gruppo di persone si vogliano scambiare, a due a due, messaggi segreti. Prima di tutto vengono fissati due numeri, un numero primo p ed un intero g, con 1 < g < p, che possono essere gli stessi per tutte le persone del gruppo.

Due persone A e B di tale gruppo, per calcolare una chiave segreta comune, procedono nel modo seguente. A sceglie un numero random a e calcola $\alpha=g^a$ mod p; contemporaneamente B sceglie un numero b e calcola $\beta= g^b$ mod p. A e B inviano l'un l'altro le informazioni α e β. Infine A calcola β^a mod p e B calcola α^b mod p.

Poichè β^a mod p = g^{ba} mod p = g^{ab} mod p = α^b mod p, A e B hanno una chiave segreta comune k = β^a mod p, che può essere usato come chiave segreta di un algoritmo simmetrico.

I lettori incuriositi alle tecniche crittografiche, sia classiche che moderne, possono soddisfare la loro curiosità consultando [BB].

Bibliografia

[BB] Berardi, L., Beutelspacher, A.: Crittologia. FrancoAngeli 1966.

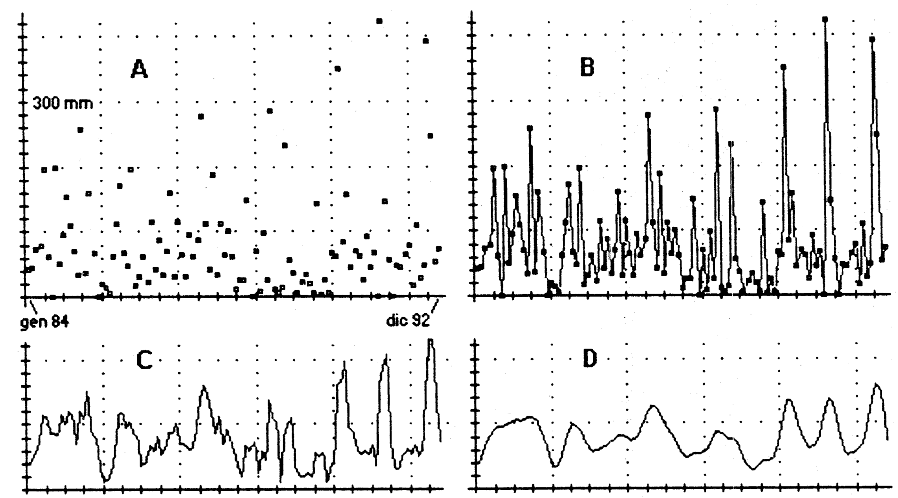
[S] Sgarro, A.: Crittografia. Muzzio (Padova) 1986.

LE APPLICAZIONI DELLA MATEMATICA NEI CURRICULI:
FINALITÀ, MODALITÀ, DISCIPLINE E CONTESTI COINVOLTI

Carlo Dapueto*

01 In questo intervento, attraverso esempi riferiti ad aree matematiche differenti e a interazioni con diverse aree disciplinari, cercherò di mettere a fuoco i principali aspetti della problematica annunciata nel titolo.

02 Il primo esempio è introdotto dalla figura seguente:



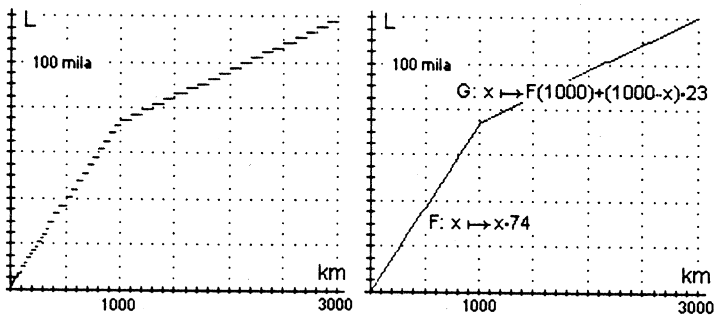
In **A** sono rappresentati i millimetri mensili di pioggia a Genova in un certo arco di anni. In **B**, per migliorare la "lettura" della evoluzione del fenomeno, si sono congiunti i punti mediante segmenti. In **C**, per "interpretare" meglio i dati (individuare tendenze, ciclicità, ...), si sono rappresentate le loro medie mobili: al posto di x(i) si è considerato M(x(i-1), x(i), x(i+1)). **D** è stato ottenuto iterando 5 volte questo procedimento. A-D sono tutti **modelli descrittivi**, più o meno astratti, dello stesso fenomeno.

03 Nella successiva figura, a sinistra, sono rappresentate le tariffe ferroviarie (di 2a classe) in vigore in Italia all'inizio del '96. A destra la funzione a scalini è stata approssimata con una funzione continua lineare a tratti. Il modello grafico (a sinistra) mi ha consentito di individuare la regolarità dell'andamento. Il modello analitico ottenuto (a destra) non solo costituisce una **modellizzazione concisa** del tarif-

* Dipartimento di Matematica dell'Univeristà di Genova

fario, ma rivela la **logica soggiacente** alla definizione delle tariffe: quest'ultimo modello matematico è in realtà il tariffario iniziale, che poi è stato discretizzato per motivi contabili e di comunicazione.

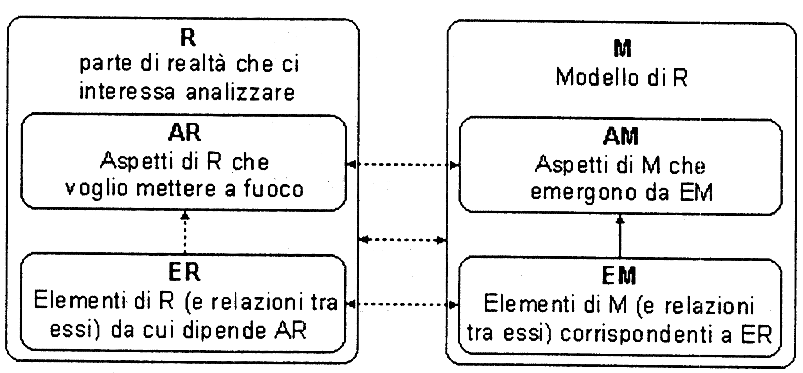
In altre parole, con il modello "descrittivo" abbiamo esplorato il "modello normativo", ossia la **matematica incorporata** nel tarriffario.



04 La sovrapposizione di aspetti **normativi** e **descrittivi** è tipica dei rapporti tra matematica e altre discipline: economia, fisica (con alcune specificità), informatica, scienze naturali, ...

Dagli esempi introduttivi emergono anche alcuni aspetti del ruolo del **computer** nelle attività di matematizzazione (facilitare la rappresentazione e/o i calcoli, la verifica e correzione del modello approssimante, ...).

05 Concetto chiave nei rapporti tra matematica e altre discipline è quello di **modello**, inteso non come particolarizzazione/esemplificazione (i "campioni", la struttura dei numeri interi come modello della teoria dei gruppi, ...), ma in quello, duale, di astrazione/idealizzazione (le riproduzioni in scala, la teoria dei gruppi come modello che astrae aspetti che accomunano molte strutture matematiche, ...), schematizzabile nel modo seguente:

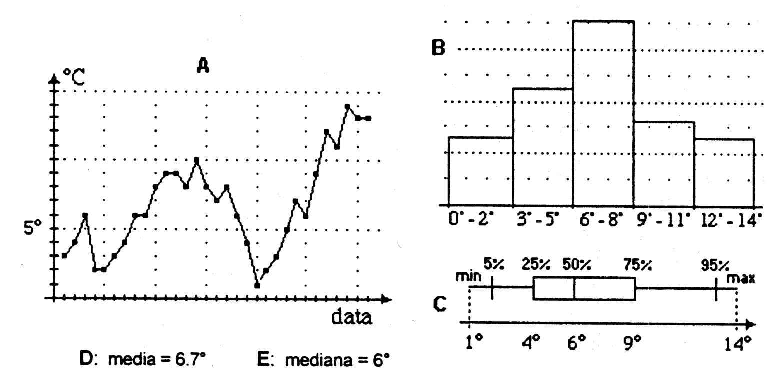


Nel caso della modellizzazione a destra nella figura in 03, R è il tariffario, AR è il modo in cui il prezzo cresce al crescere della percorrenza, gli elementi ER che abbiamo individuato come significativi nel determinare AR sono costituiti dalle inclinazioni dei tratti rettilinei lungo cui tendono a disporsi i segmentini che costituiscono la rappresentazione grafica del tarriffario; ad esse abbiamo associato come EM le pendenze 74 e 23. AM è la funzione che a x associa F(x) se $x \le 1000$, G(x) altrimenti. Le frecce sono tratteggiate in quanto sono frutto di semplificazioni o approssimazioni (nella scelta di ER abbiamo trascurato l'articolazione in scaglioni del tariffario, nella valutazione degli EM abbiamo fatto delle approssimazioni); EM→AM non è tratteggiata: la funzione dipende esattamente dalle pendenze 74 e 23.

Nel caso della "regola grammaticale" «per formare la 1ª persona dell'imperfetto applica la riscrittura *-are* → *-avo*» si tratta di un modello (che utilizziamo per orientarci nella comunicazione verbale) che ha come R il comportamento linguistico degli italiani. La scelta delle parti finali dei verbi e dei loro cambiamenti come ER è una semplificazione: le eccezioni (fare →facevo) testimoniano il fatto che si sono trascurati altri aspetti, ad esempio legati all'origine delle parole (fare segue la seconda coniugazione come il latino facere).

Anche vari schemi di ragionamento diffusi nell'ambiente scolastico, come «X "sbaglia i calcoli", quindi non è portato per la matematica», sono dei modelli. In questo caso la scelta della destrezza nei calcoli come elemento caratterizzante la bravura in matematica non è tanto frutto di una approssimazione o semplificazione, quanto di una profonda incomprensione della natura della matematica.

06 Non esiste **il** modello **migliore**:



A-E sono modelli diversi dello stesso fenomeno (il regime termico in un certo mese di una certa località). Il modello A consente di ricostruire l'andamento temporale. B perde la storia ma evidenzia la distribuzione delle temperature e permette di confrontarla con quella di altri mesi o località. Il box-plot C è più compatto e include una quantificazione della dispersione delle temperature, ma perde alcune delle informazioni presenti in B. I modelli D ed E sono molto più sintetici, facilitano il confronto con altri mesi o altre località, ma perdono ogni informazione sia sulla storia che sulla distribuzione.

07 Una **disciplina** è caratterizzata essenzialmente dall'area fenomenologica per la quale mette a punto modelli (e linguaggi e teorie per elaborare questi modelli).

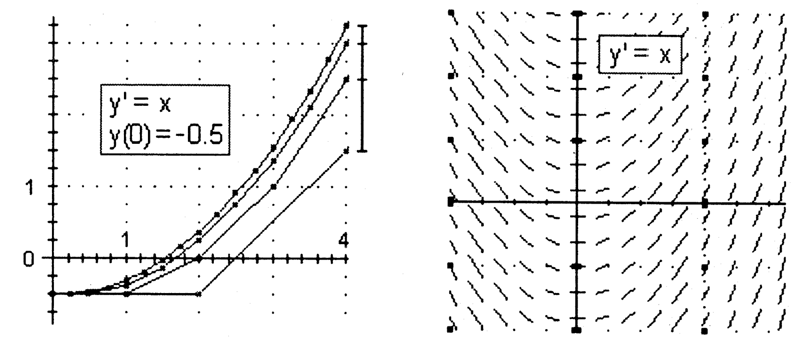
La **matematica**, anche se per lungo tempo si è presentata soprattutto come linguaggio della fisica (le definizioni e le dimostrazioni nella geometria di Euclide erano basate su concetti e argomentazioni di tipo fisico, i concetti di funzione e di continuità inizialmente sono stati lasciati alla intuizione fisica, ...), oggi ha la specificità di caratterizzarsi (e di articolarsi internamente) non per gli ambiti applicativi ma essenzialmente per la tipologia degli strumenti di modellizzazione che mette a punto. E più delle altre discipline presenta attività di modellizzazione *interna*: il concetto di "gruppo" è un modello (M) che ha come realtà (R) strutture matematiche, la "logica" mette a punto modelli che hanno come realtà metodi e linguaggi matematici, ... Sta in questa astrattezza la potenza applicativa della matematica.

Che cosa facciamo percepire, nell'**insegnamento**, di tali intrecci e tali differenziazioni?

08 I concetti matematici sono in genere presentati come **cose** da studiare piuttosto che come **modelli** (interni o esterni). Quando si fa riferimento a dei **contesti** ciò avviene quasi solo nell'ambito di problemi stereotipati, in cui la matematizzazione (in particolare l'associazione ER→EM) è caricaturale (le situazioni sono solo messaggi per evocare problemi formalizzati, gli oggetti reali sono nomi a cui associare in base all'esperienza scolastica, senza una riflessione contestuale, oggetti matematici). A volte, nel motivare l'introduzione di un nuovo argomento matematico, si premette l'illustrazione, esplicitamente semplificata, di un problema "reale", ma in genere è tràscurata la fase iniziale della modellizzazione (la delimitazione di AR).

Mentre l'insegnante di matematica tende a strumentalizzare i contesti per fare della "matematica", quello di **altre materie** tende a far usare *acriticamente* tecniche e concetti matematici, sviluppando un ricettario che ad ogni problema (studiato) associa un procedimento matematico ad hoc, spesso *sproporzionato* rispetto alle esigenze. Entrambi, in genere, fanno matematica decontestualizzata, depurata da intuizioni e prototipi di matematizzazione che possano aiutare l'alunno nella gestione del **transfer** dei concetti. Ed entrambi fanno una *propria* matematica, con linguaggi, procedure, forme di presentazione spesso conflittuali: la matematica dell'insegnante di matematica, la matematica dell'insegnante di economia, quella dell'insegnante di elettronica, ... e quella dell'insegnante di matematica quando insegna fisica.

09 Approfondisco queste considerazioni con qualche esempio riferito alla scuola superiore.



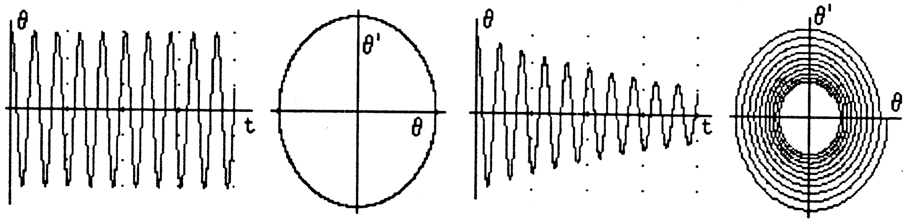
La figura precedente, a sinistra, illustra, in un caso elementare, l'applicazione del metodo di Eulero per risolvere **equazioni differenziali** (che consiste nell'approssimare la soluzione con una funzione continua lineare a tratti). Con un opportuno programma è facile studiare (graficamente e/o numericamente) la convergenza della soluzione approssimata all'aumentare del numero dei sottointervalli. A destra è raffigurato il campo direzionale, anch'esso rappresentabile con un semplice programma. L'analisi del campo direzionale consente di studiare esistenza e unicità delle soluzioni, individuare le biforcazioni, ...

Il concetto di derivata storicamente è nato, nell'ambito della matematizzazione della fisica, non a sè, ma come elemento costitutivo delle equazioni differenziali. Nel liceo scientifico è in terza, all'inizio dell'insegnamento della fisica, che si incontrano le prime equazioni differenziali, anche se non vengono individuate come tali. Poi, dopo un lungo letargo, in quinta ricompaiono (solo) le derivate, nelle ore di matematica, per studiare funzioni! Negli isituti tecnici, invece, si imparano meccanicamente un po' di formulette e procedimenti più o meno laboriosi per risolvere alcune particolari classi di equazioni differenziali.

L'idea di modello differenziale, fondamentale nella storia e nel ruolo della matematica, rimane così oscurata. Le motivazioni? Per i licei: non c'è il tempo per studiare le equazioni differenziali. Per gli istituti tecnici: i concetti sono difficili, e le formule risolutive devono impararle per le altre materie. Occorrerebbe, invece, mettere a fuoco e delimitare il ruolo delle **tecniche**: che cosa è delegabile al computer (o alla consultazione di un manuale)? che cosa è essenziale per imparare a scegliere e usare criticamente le tecniche? vi sono tecniche più "trasparenti" e/o che si integrano meglio con la costruzione/comprensione dei concetti?

Riflettere su che cosa si può fare (risoluzione di singole equazioni, sperimentazioni e congetture generali, ...) con il semplice metodo di Eulero (o metodi simili) è uno dei possibili punti di partenza per sviluppare considerazioni su questi problemi. Le conclusioni potrebbero divergere da quelle della commissione dell'U.M.I. sul nuovo "**syllabus**", che, per combattere l'immagine della matematica come insieme di tante cose da studiare con tante tecniche, ha lanciato un messaggio del tipo: «insegnare poche "cose" di base; sarà poi l'università a innestare su queste lo studio dei "concetti" più significativi»; l'avvio ai modelli differenziali e stocastici sarebbe un lusso, in questa logica che, di fatto, trascura gran parte delle riflessioni degli ultimi decenni sui processi mentali attraverso cui si costruiscono i concetti matematici.

10 Un altro esempio. Lo studio sperimentale (con una doppia applicazione del metodo di Eulero o di un metodo simile) della equazione differenziale del 2° ordine che modellizza il comportamento di un pendolo senza (a sinistra) e con (a destra) smorzamento.



Questi grafici, ottenuti mediante un metodo "approssimato", rappresentano le soluzioni "esatte" per casi in cui il pendolo viene rilasciato da un angolo θ di 30°; per il caso senza smorzamento, il diagramma θ-θ' consente di individuare chiaramente la peiodicità. Con l'usuale metodo simbolico, basato sull'ipotesi delle piccole oscillazioni, si ottiene "esattamente" una "approssimazione" della soluzione, ma non se ne valuta la precisione, e in genere non si spiega come dalla periodicità di questa si possa dedurre quella della soluzione giusta. Non è detto che un approccio numerico sia meno rigoroso di un approccio simbolico!

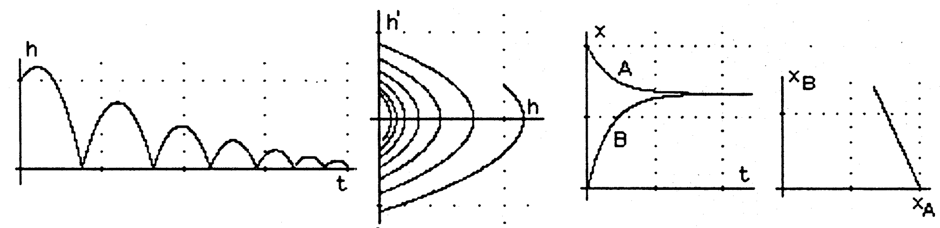
La rappresentazione grafica, e il metodo stesso di approssimazione numerica, la possibilità di vedere facilmente che cosa accade variando qualche parametro, ... (per questo e altri fenomeni, di meccanica, termodinamica, elettronica, ...) mettono bene in luce la natura "concettuale" della modellizzazione matematica attraverso cui si articola la fisica classica.

Si parla di **modelli formali** (o empirici) quando M viene costruito preoccupandosi solo del fatto che vi sia una *analogia* di comportamento tra AM e AR. Si parla di **modelli concettuali** quando invece i parametri EM del modello vengono scelti e messi in relazione tra loro in modo da riprodurre il modo in cui i fattori ER determinano il comportamento AR.

Il ruolo della matematica nell'**insegnamento della fisica** viene invece spesso mistificato, proponendo modellizzazioni "formali" nei casi in cui sarebbe più significativo un approccio "concettuale", come quando la messa a fuoco di una legge fisica viene banalizzata alla rappresentazione grafica di qualche dato sperimentale e alla ricerca di una funzione approssimante. Può capitare di far scoprire agli alunni per questa via (con il "metodo sperimentale") la legge della dilatazione termica, mentre la temperatura è stata "definita" come grandezza in relazione lineare con la lunghezza della colonnina di mercurio!

Il rapporto tra aspetti *normativi* e aspetti *descrittivi* (vedi 02-04) offrirebbe invece numerosi spunti didattici per uno sviluppo interattivo di concetti fisici e concetti matematici (sia di analisi che di geometria).

11 Sono modelli normativi anche quelli che regolano il funzionamento dei videogiochi: è mediante l'incorporamento di matematica che essi *simulano la realtà*. Si pensi più in generale alle applicazioni software (grafiche, musicali, ...) e agli automatismi di tipo elettronico (che sono ormai praticamente tutti hardware+software). Scorpire come funzionano, analizzarne i limiti, ... comporta un intreccio tra la messa a punto di modelli descrittivi e la scoperta dei modelli normativi. Sotto a sinsitra è riprodotto lo studio del modello differenziale di una palla che rimbalza. Le interazioni, in questi contesti, riguardano, naturalmente, anche l'**informatica**.

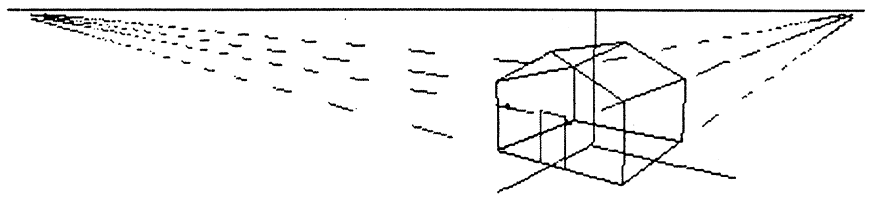


12 La parte destra della figura precedente è lo studio della modellizzazione differenziale di «A e B vanno uno incontro all'altro con velocità proporzionale alla distanza tra loro, con coefficienti di proporzionalità 1 e 2 rispettivamente». A e B si incontrano (in un punto che dista dalla posizione iniziale di A un terzo della distanza iniziale tra A e B)?

Nel modello A e B non si incontrano, così come, nei modelli matematici, l'oggetto tolto dal frigo non raggiunge mai la temperatura ambiente, l'isotopo C-14 non sparisce dal fossile organico, ... Il confronto tra "**in teoria**" e "**in pratica**" è un altro aspetto tipico dei rapporti tra matematica e altre discipline. Ma questo esempio permette di accennare anche ad un'altra problematica: quella del ruolo svolto dalla idealizzazione matematica nell'evoluzione del pensiero scientifico e filosofico. Qui abbiamo a che fare con il problema del *continuo*, sia spaziale che temporale, e con quello dell'*infinito*.

Quanto, l'insegnante di matematica-fisica e quello di **filosofia**, sfruttano le occasioni di confronto che la storia del pensiero (e la vita stessa dei filosofi-matematici-scienziati che hanno fatto questa storia) offre loro? E quale responsabilità ha l'insegnante di matematica che sfrutta l'"ignorante" Zenone, che non conosceva le serie, per motivare l'introduzione dei "potenti" strumenti dell'analisi, quando i suoi paradossi non ponevano solo problemi di convergenza (per altro alla portata della teoria geometrica delle proporzioni del pensiero greco dell'epoca), ma affrontavano problematiche gnoseologiche quali la natura dello spazio e del tempo (continua o non, archimedea o non, ...)? Quanto vengono esplicitati i rapporti tra matematica e fisica, evidenziate le differenze, messo a fuoco, ad esempio, il ruolo ambiguo che la variabile **tempo** assume implicitamente in varie *attività geometriche* (la confusione tra il movimento della fisica e quello delle trasformazioni geometriche era lecita nella geometria-fisica di Euclide, non lo è più nella matematica dei nostri giorni, basata su una distinzione tra modelli e realtà)?

13 Non c'è solo la fisica. La figura seguente introduce i rapporti con il **disegno**.



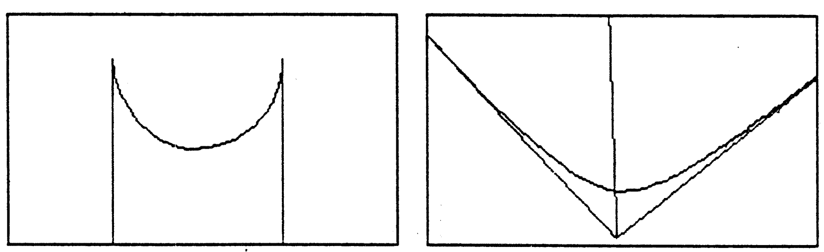
Il problema della *rappresentazione prospettica* è stato un altro momento importante nell'evoluzione del pensiero matematico. E nella storia del pensiero scientifico hanno svolto un ruolo importante non solo i matematici-filosofi naturali, ma anche i matematici-artisti.

Perchè con l'insegnamento geometrico non sviluppare una maggiore consapevolezza sulle tecniche di disegno apprese in altre materie? Perchè non sfruttare il software grafico per fare esplorazioni geometriche? Perchè non cogliere le occasioni che questo contesto offre per dare un respiro maggiore alla problematica dei concetti di limite e di infinito?

Osserviamo la figura seguente. Si tratta di due visioni dello stesso oggetto, ottenute con un semplice programma di grafica 3D. È un ramo di iperbole nel piano x,y del sistema tracciato.

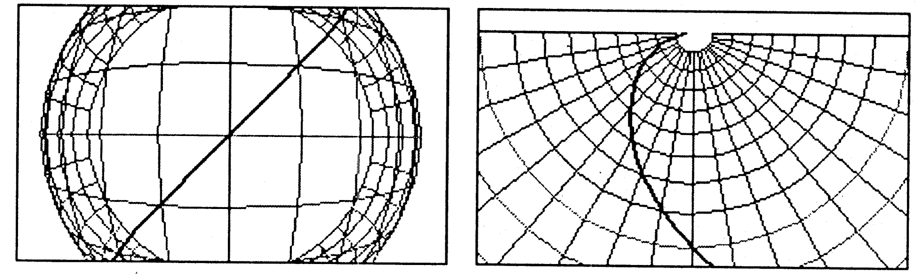
A sinistra l'iperbole appare circolare in quanto è vista con uno sguardo orizzontale e parrallelo alla bisettrice dell'angolo x,y. L'origine degli assi diventa un punto all'infinito, gli assi x e y diventano paralleli, i punti all'infinito loro direzioni diventano gli estremi del semicerchio.

Lo studio delle **coniche** in questo contesto può assumere motivazioni e operatività nuove.



Lo studio delle **coniche** in questo contesto può assumere motivazioni e operatività nuove.

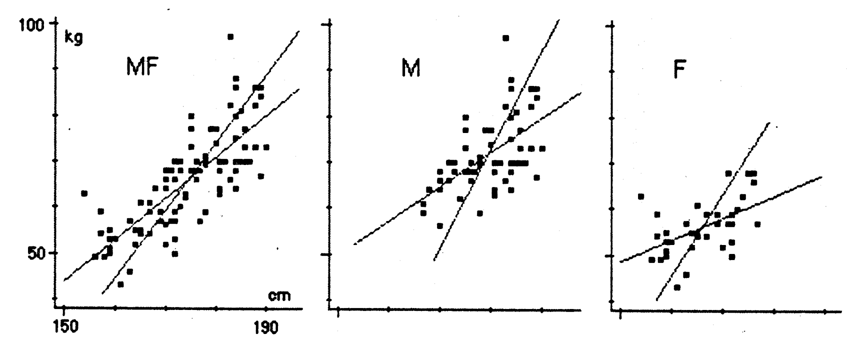
14 La **cartografia**, argomento "freddo" di *scienze*, è un'altra tematica che ha appassionato l'umanità e ha accompagnato lo sviluppo della matematica (sia della geometria che di concetti come quello di logaritmo). La problematica delle rotte, quella della interpretazione delle informazioni deducibili da una rappresentazione cartografica, l'uso di software per esplorare il globo da diversi punti di vista (sotto sono riprodotte due visioni di un emisfero con la rotta y =x, x longitudine, y latitudine), la relatività del concetto "rettilineo", l'esistenza di diversi modelli di "spazio", ... offrono spunti per ricche e motivate attività didattiche.



15 L'ultimo esempio fa riferimento agli impieghi della **statistica**. Già in 02 e 06 abbiamo considerato modellizzazioni statistiche. La statistica, e la probabilità, possono svolgere un ruolo importante nell'educazione alla matematizzazione:

- da una parte, al livello degli studi pre-universitari, i problemi statistici non sono "interni": viene presentata una realtà (più o meno pre-modellizzata) di cui occorre costruire un modello matematico e la soluzione del problema in genere passa attraverso forme di ragionamento che intrecciano considerazioni formali e riferimenti diretti o metaforici a contesti;
- dall'altra la statistica consente attività di modellizzazione significative utilizzando concetti e tecniche matematiche relativamente elementari, facilitando la messa a fuoco della problematica della modellizzazione (natura e limiti dei rapporti tra M e R).

L'esempio sotto raffigurato si riferisce alla rappresentazione di pesi e altezze degli studenti di un corso universitario. La nuvoletta allungata obliquamente fa supporre che vi sia un'alta correlazione tra peso e altezza; il calcolo fornisce il valore 0.78. Ma se ci si restringe alla popolazione femminile si trova il valore molto più basso 0.52 (un'ingannevole intuizione farebbe invece supporre che, restringendosi a un campione più omogeneo, la correlazione dovrebbe aumentare). La rappresentazione grafica delle sottopopolazioni maschile e femminile mette in luce come il fenomeno sia dovuto all'unione di due sottopopolazioni omogenee e con caratteristiche diverse l'una dall'altra: le due nuvolette sono più tozze della nuvola unione (e la coppia delle rette di regressione per M e F è più divaricata che per MF).



Quest'esempio offre lo spunto per qualche ulteriore considerazione:

- l'importanza di individuare **situazioni prototipo**, semplici ma significative, che l'alunno possa poi richiamre mentalmente per orientarsi nelle attività di matematizzazione (come associare relazioni matematiche ad aspetti del fenomeno, tener conto dei **limiti** dei modelli, ...);
- l'importanza e la potenza dei linguaggi **grafici** e delle metafore **geometriche**, sempre più usati nelle applicazioni ma piuttosto trascurati nell'insegnamento della matematica, mentre (vedi 09) consentirebbero in molti casi approcci ad argomenti importanti (per la cultura di base) che sono concettualmente, ma non "tecnicamente", alla portata degli alunni.

16 Concludendo, il messaggio che ho cercato di lanciare può essere così sintetizzato. L'insegnamento della matematica ha in comune con quello delle altre materie la questione della modellizzazione, sia in generale che in relazione a contesti e/o concetti specifici; su questo terreno si possono trovare forme di collaborazione che consentano di ottimizzare le attività didattiche, di motivare e dare agli alunni una visione meno scolastica delle discipline, di educarli alla gestione del transfer delle conoscenze da un contesto all'altro, da un ambito formale a un ambito applicativo e viceversa. Se non ci si sporcano le mani con i contesti, non si può comprendere la natura astratta della matematica.

Riferimenti

Blum, W. & Niss, M.:1991, Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects, *Educational Studies in Mathematics*, v. 22

Dapueto, C. & Parenti, L.:1999, Contributions and Obstacles of Contexts in the Development of Mathematical Knowledge, *Educational Studies in Mathematics* [to appear]

Israel, G.: 1996, *La visione matematica della realtà*, Il Mulino, Bologna

Norman, D.A.:1995, *Le cose che ci fanno intelligenti*, Feltrinelli

MILLE LENTI PER OSSERVARE IL MONDO: OTTANT'ANNI DI MODELLISTICA MATEMATICA

Giorgio Israel*

La costruzione di modelli matematici per la descrizione dei fenomeni è una prassi recente, mai impiegata prima del Novecento. Un modo semplice di convincersene è di mettere a confronto due brani divisi da più di due secoli e mezzo.

Quarant'anni fa John von Neumann, uno dei massimi scienziati del nostro secolo, indicava la modellizzazione come il nucleo del fare scienza e ne definiva così le caratteristiche: «... le scienze non cercano di spiegare, a malapena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto dei modelli. Per modello si intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un siffatto costrutto matematico è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni — cioè descriva i fenomeni in un'area ragionevolmente ampia. Inoltre, esso deve soddisfare certi criteri estetici — cioè, in relazione con la quantità di descrizione che fornisce, deve essere piuttosto semplice.»

Quindi, la scienza non vuole *spiegare* l'essenza intima dei fenomeni, non è alla ricerca della *verità*, non è *specchio* dei fenomeni; ma si limita a fornire delle immagini matematiche — i modelli — che vanno valutate sulla base di criteri di efficacia, in quanto permettono di prevedere certi effetti o di farsi delle idee qualitative parziali dei fatti.

Leggiamo ora questo brano: «Il compito principale della filosofia della natura è quello di argomentare a partire dai fenomeni senza immaginare ipotesi, e di dedurre cause a partire da effetti, fino a che giungiamo alla Causa Prima, che certamente non è meccanica; ed è suo compito non soltanto di dispiegare il meccanismo del mondo, ma fondalmente di risolvere queste e simili questioni. Che cosa c'è in luoghi che sono quasi completamente vuoti di materia, e donde deriva che il sole e i pianeti gravitano gli uni verso gli altri, senza che vi sia tra loro nessuna materia densa? Donde viene che la Natura non fa nulla invano; e da dove trae origine tutto quell'ordine e tutta quella bellezza che vediamo nel mondo? A qual fine esistono le comete, e donde viene che i pianeti si muovano tutti in un unico e medesimo modo in orbite concentriche, mentre le comete si muovano in ogni sorta di modi in orbite molto eccentriche; e che cosa impedisce alle stelle fisse di precipitare le une sulle altre? Come avviene che i corpi degli animali siano congegnati con tante arte, e quale è lo scopo delle loro numerose parti? È possibile che l'occhio sia stato costruito senza conoscenza d'ottica, e l'orecchio d'acustica? Come avviene che i movimenti del corpo derivano dalla volontà, e donde viene l'istinto degli animali? ... E una volta che siano state stabilite con esattezza tutte queste cose, non risulta con evidenza dai fenomeni che esiste un Essere incorporeo, vivente, intelligente,

* Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"

onnipresente, il quale nello spazio infinito come nel Suo sensorio, vede intimamente le cose stesse e le percepisce completamente, e le capisce interamente in virtù della loro presenza immediata a Lui stesso? [...] E sebbene ogni vero passo fatto in questa filosofia non ci porti immediatamente alla conoscenza delle Prima Causa, tuttavia ci avvicina ad essa, e per questo motivo va tenuto in grande considerazione.»

Queste frasi sono tratte dall'Ottica di Isaac Newton ed è facile convincersi che esse delineano un'immagine della scienza — filosofia naturale, nel linguaggio dell'epoca — opposta a quello illustrata da von Neumann. Per Newton, il criterio direttivo non è l'utilità ma la *verità*, la *spiegazione* delle cause, fino a giungere alla Causa Prima. L'analisi scientifica ricerca cause a partire da effetti senza «fingere ipotesi», fisiche o metafisiche che siano, ovvero senza ricorrere a costruzioni concettuali *ad hoc*, prive di una relazione con i fatti. Il famoso «Hypotheses non fingo» di Newton potrebbe essere parafrasato dicendo: «io non costruisco modelli»... non ricorro a immagini o costrutti arbitrari, bensì ricerco la verità intima dei fatti. Per circa tre secoli questo è stato il credo della scienza, in particolare del suo nucleo, la fisica-matematica. Esso ha ruotato attorno all'idea di Galileo secondo cui il libro della natura è scritto da Dio in lingua matematica. Se la natura è strutturata matematicamente, la matematica non è un mero strumento descrittivo — un arsenale di modelli — ma esprime l'intima essenza dei fenomeni.

Abbiamo detto che questa visione è stata abbandonata nel nostro secolo. Ma con quanta riluttanza! Ancora Einstein affermava che «abbiamo il diritto di essere convinti che la natura è la realizzazione di ciò che può essere immaginato di più semplice dal punto di vista matematico». E la ricerca di un insieme di leggi unitarie che *spieghino* il meccanismo del mondo sembra ancora essere l'aspirazione di ogni fisico teorico. Tuttavia, malgrado queste nostalgie, la scienza contemporanea sempre più è dedita alla costruzione di modelli, di *modelli matematici*.

Un modello matematico è uno schema concettuale volto a rappresentare un insieme di fenomeni nel linguaggio della matematica. Il modello, in quanto non è specchio del fenomeno, non ambisce ad esserne l'unica rappresentazione possibile: non esiste una corrispondenza biunivoca fra modelli e fenomeni. Lo stesso fenomeno può essere rappresentato mediante più modelli fra i quali si può scegliere secondo criteri di efficacia, ma che non sono necessariamente in competizione, potendo offrire prospettive diverse e compatibili fra di loro. Viceversa, uno stesso modello può rappresentare fenomeni diversi, fra i quali istituisce una sorta di "omologia" strutturale. Questo aspetto identifica un approccio caratteristico della modellistica matematica, e cioè il metodo dell'*analogia matematica*. Esso consiste nell'identificare aspetti comuni fra fenomeni anche lontani fra di loro e scoprire collegamenti spesso inattesi. Se uno di questi fenomeni è suscettibile di una descrizione matematica efficace, essa può essere considerata come un *modello matematico* di tutti gli altri fenomeni analoghi (od "omologhi"). Ad esempio, nella moderna dinamica non lineare si è pervenuti ad una trattazione unificata di fenomeni di turbolenza idrodinamica, di cinetica chimica, del comportamento di certi circuiti elettronici della radiotecnica, e di molti altri processi: il modello matematico più soddisfacente è ricavato dalla descrizione di certi processi oscillatorii che trovano la

loro manifestazione più evidente nei detti circuiti elettronici.

In definitiva, un modello matematico è un frammento di matematica che serve a rappresentare un fenomeno, senza che questa rappresentazione sia unica: lo stesso frammento di matematica può esser atto a descrivere più fenomeni indipendenti. Un singolo fenomeno può essere osservato con tante lenti (o modelli) e la stessa lente dar conto di fenomeni diversi e offrirne la stessa immagine.

Abbiamo usato il termine ambiguo di *rappresentazione*, perché un modello può avere una funzione *descrittiva* oppure una funzione *prescrittiva*. Ad esempio, un modello dei fenomeni meteorologici è descrittivo, mentre un modello del traffico automobilistico o un modello di allocazione di risorse scarse fra consumatori, sono modelli prescrittivi o di *controllo*. Qui non si mira alla descrizione, bensì alla determinazione delle procedure mediante cui conseguire un fine: nel nostro caso, realizzare uno scorrimento fluido e veloce del traffico e una distribuzione delle risorse "ottimale" secondo criteri di equità o efficienza. Tuttavia questi due punti di vista possono coesistere. Ad esempio, l'influsso sempre più evidente delle attività umane sui fenomeni meteorologici induce ad abbandonare l'approccio puramente descrittivo, per valutare gli effetti di tale influsso al fine di contrastarne gli aspetti negativi. Il numero crescente di modelli prescrittivi o normativi è un'ulteriore prova del carattere originale della modellistica come prassi di ricerca rispetto all'approccio quasi esclusivamente descrittivo-esplicativo della scienza classica.

A queste caratteristiche della modellizzazione matematica ne va aggiunta un'altra che costituisce una grande novità: l'applicazione ai fenomeni biologici, sociali, economici, psicologici, ecc. Prima del nostro secolo, l'uso della matematica in questi contesti "non fisici" era stato fortemente osteggiato. A partire dagli anni venti, l'applicazione della matematica alla biologia, prima episodica, si sviluppa impetuosamente in tre filoni di ricerca: la *dinamica delle popolazioni*; la *genetica delle popolazioni* (che contribuisce alla sintesi fra mendelismo e darwinismo); la *teoria matematica delle epidemie* (che fornisce uno strumento per la previsione quantitativa della diffusione delle malattie contagiose); l'elaborazione di modelli matematici della fisiologia e della patologia degli organi umani. Il ventennio 1920-40 è stato definito come il "golden age", l'età d'oro della biologia matematica. Un'esplosione analoga avviene nel campo socio-economico, dove i tentativi ottocenteschi più o meno abortiti di Léon Walras e Vilfredo Pareto di fondare una scienza economico-matematica, vengono ripresi dai matematici Abraham Wald e John von Neumann e poi ripensati nel nuovo contesto della *teoria dei giochi*.

È naturale chiedersi perché siano cadute le due barriere che si frapponevano allo sviluppo dell'approccio modellistico: la visione realista e oggettivista dei fenomeni, la diffidenza per la matematizzazione dei fenomeni non fisici.

Una delle cause risiede nei processi che modificano la fisica agli inizi del secolo. Difatti, le ricerche nella sfera atomica e subatomica spingono la fisica ad abbandonare il realismo, a chiedersi sempre meno cosa siano gli oggetti di cui si occupa bastandole di fornirne una rappresentazione formale coerente ed efficace: proprio in questo contesto si diffonde il termine "modello", in riferimento ai "*modelli dell'atomo*" che mirano a rappresentarne le proprietà senza pretendere di rifletterne la struttura reale.

Un altro fattore è legato allo sviluppo della tecnologia (ovvero della tecnica fondata sulla scienza) che impone un rapporto sempre più stretto della matematica con le applicazioni, le quali non si lasciano racchiudere nei confini tradizionali della fisica, anche quando riguardano tematiche strettamente fisiche. Tali sono le tematiche legate ai fenomeni a regime turbolento; e quelle suggerite dai nuovi sviluppi tecnologici, come la radio, i circuiti elettrici non convenzionali, gli apparecchi in cui intervengono servomeccanismi, il volo aereo. I modelli matematici elaborati per trattare queste tematiche — che ricorrono alla teoria delle equazioni differenziali non lineari — suggeriscono applicazioni e connessioni impensate: in particolare, ai fenomeni ciclici che si presentano in economia e in biologia.

Una simile varietà ed eterogeneità di temi non rende facile l'inserimento dei nuovi sviluppi della modellistica nella struttura rigida della scienza classica. Il loro studio è spesso promosso da studiosi ai margini della comunità scientifica ufficiale, ma comprendenti (o sostenuti da) alcune figure di prestigio. Un esempio di studioso tanto ricco di idee fertili quanto eclettico nell'approccio e isolato dalla comunità scientifica ufficiale, è dato da Alfred J. Lotka, funzionario di una compagnia di assicurazioni di New York, che scrisse negli anni venti un volume (*Elements of mathematical biology*) misconosciuto all'epoca ma che ebbe poi un grande influsso nella formazione di uno dei maggiori matematici applicati del secolo, Norbert Wiener. Un altro grande scienziato che si impegnò nel nuovo fronte della matematica applicata e della modellistica fu il tedesco Theodore von Kármán (poi emigrato negli Stati Uniti presso il California Institute of Technology). Mentre il celebre fisico-matematico italiano Tullio Levi-Civita fu uno dei principali fautori del nuovo corso.

È impossibile fare un elenco degli innumerevoli problemi applicativi che stimolano l'espansione della modellistica matematica negli anni della Seconda Guerra Mondiale. Ricordiamo alla rinfusa: meteorologia, questioni di allocazione ottimale delle risorse (logistica militare, organizzazione del Piano Marshall, pianificazione e programmazione economica, gestione industriale), problemi di aereodinamica e di balistica (ottimizzazione del tiro contraereo, modelli della bomba atomica e termonucleare, missilistica), questioni di tecnologia industriale (estrazione del petrolio, organizzazione razionale della produzione). Le applicazioni della matematica sono tante che il diffondersi, fra i matematici degli anni cinquanta, di un approccio tendente all'astrazione e alla visione pura della ricerca — promosso dal collettivo di matematici francesi raccolti sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki — rappresenta soltanto una parentesi, per quanto influente. La modellistica non si limita tuttavia agli aspetti tecnologici ed industriali ora accennati. Essa riprende i temi della modellistica biologica ed economico-sociale degli anni venti: dopo una pausa di qualche decennio, la dinamica delle popolazioni e l'epidemiologia ritornano al centro degli interessi e conoscono, negli anni settanta, uno sviluppo impressionante; e, a partire dagli anni cinquanta, l'economia matematica si concentra di nuovo sullo studio della teoria dell'equilibrio economico, mentre riprende vigore l'interesse per la teoria dei giochi, i cui fondamenti erano stati codificati negli anni quaranta in un celebre libro di Von Neumann e Morgenstern. In anni più recenti, lo studio matematico dei problemi meteorologici ha condotto alla scoperta di un fenomeno — il cosidetto "caos deterministico" — da taluni considerato come una rivoluzione concettuale di grande portata. Lo studio dei fenomeni "caotici", così come quello dei fenomeni "complessi", si ricollega all'interesse per i processi turbolenti e ha indotto un radicale mutamento nella visione matematica dei fenomeni: all'antica convinzione di un mondo strutturato in forme semplici ed ordinate, che si rifletterebbero nelle strutture chiare ed armoniose della matematica, si sostituisce l'idea di un'irriducibile complessità e di un intreccio straordinariamente complicato di relazioni che può essere soltanto rappresentato nell'ambito della "nuova" matematica del caos o delle strutture frattali o descritto mediante la teoria delle probabilità.

Un fattore di importanza cruciale nello sviluppo della modellistica matematica è rappresentato dal calcolatore e dal suo uso sempre più diffuso nella ricerca. A partire dagli anni ottanta, la costruzione di macchine sempre più potenti, veloci e maneggevoli ha condotto a un'esplosione del calcolo numerico. Inoltre, l'introduzione della grafica su calcolatore e la sostituzione della rappresentazione numerica con la rappresentazione geometrica delle soluzioni dei sistemi studiati, permette una valutazione qualitativa diretta del comportamento delle soluzioni stesse. Ciò mette capo a un radicale mutamento nella prassi della ricerca. L'analisi numerica non è più un supporto per lo studio delle soluzioni laddove esse non sono direttamente esplicitabili con gli strumenti dell'analisi ordinaria, ma diviene uno strumento di simulazione del comportamento dei sistemi matematici studiati e, di riflesso, dei sistemi reali che essi pretendono di rappresentare. Mediante il calcolatore diviene quindi possibile *simulare* il comportamento di un sistema reale, nella speranza, almeno in certi casi, di sostituire questo approccio con la verifica empirica diretta.

Un altro aspetto che caratterizza la prassi modellistica è dato dal progressivo abbandono di un principio fondamentale della scienza classica: l'idea della *semplicità della natura*. Esso ha radici lontane ma è nell'opera di Galileo Galilei che si connette con l'idea che il mondo ha una struttura matematica semplice. Abbiamo già osservato che il fascino che questo principio ha esercitato sulle menti degli scienziati è testimoniato dalla sua persistenza. Il principio della semplicità della natura ebbe una traduzione matematica verso la fine del Settecento soprattutto ad opera di J. L. Lagrange. L'idea consisteva nell'ammettere che, in un'equazione differenziale rappresentativa di un processo reale il contributo della parte lineare delle funzioni in gioco sia quello che esprime gli aspetti caratterizzanti la dinamica del processo stesso. Pertanto a quelle funzioni può sostituirsi la loro componente lineare senza danno. Quel che si trascura (la parte non lineare) rappresenta aspetti del processo che sono soltanto "perturbazioni" del processo fondamentale: la loro omissione fornisce una descrizione lievemente alterata che non modifica le caratteristiche fondamentali di quella "vera". *Linearizzare* l'equazione differenziale (e quindi il processo) significa ricorrere a una descrizione più semplice, in cui perdiamo soltanto aspetti marginali. In cambio, guadagniamo in semplicità, perché potremo trattare matematicamente il processo in modo più agevole. Insomma, la *linearizzazione* rappresenta il procedimento matematico con cui si attinge all'essenza di un processo fisico e si svelano le intime strutture *semplici* che lo governano.

È chiaro che questo approccio ha senso se e soltanto se è vera l'ipotesi che la soppressione dei termini non lineari dell'equazione equivale a trascurare perturbazioni secondarie. Questa ipotesi è falsa, almeno in linea di principio. Tuttavia, la fisico-matematica l'ha considerata come un'evidenza per un almeno un secolo, fornendo così una prova del fatto che la scienza è governata da ipotesi metafisiche nelle sue scelte concettuali e che essa era accettata non perché ne fosse provata l'aderenza con i fatti, ma perché esprimeva la fede nell'idea della semplicità della natura.

Agli inizi del nostro secolo, ci si è resi conto che il metodo della linearizzazione poteva condurre a gravi errori e non possedeva alcun fondamento oggettivo. In molti casi importanti proprio la componente non lineare conteneva gli aspetti significativi del fenomeno. Lo sviluppo della modellistica matematica è legato all'affermarsi di un paradigma della *non linearità* in opposizione a quello tradizionale della linearità, e questa contrapposizione corrisponde all'affermarsi dell'idea che i processi naturali non sono in generale semplici, bensì *complessi*: la semplicità (e quindi la linearità) diventa l'eccezione, la *complessità* (ovvero la non linearità) la regola.

Il ruolo della modellistica nell'affermarsi del paradigma della non linearità e della complessità può essere inteso se si tiene conto del fatto che il dogma della linearità dominava non soltanto la fisica classica ma anche quella più recente: la meccanica quantistica è strutturata attorno allo schema dell'oscillatore lineare e, come è stato detto, rappresenta l'apoteosi del paradigma lineare, per l'uso sistematico che in essa si fa della teoria degli operatori lineari in uno spazio di Hilbert. L'attenzione per la non linearità e la complessità emerge quindi entro ambiti non convenzionali della fisica e della tecnologia (teoria delle oscillazioni nella meccanica applicata, problemi di turbolenza, radiotecnica, processi di autoregolazione, fenomeni di biforcazione) e nelle applicazioni della matematica alle scienze biologiche ed economico-sociali. Va sottolineato, al riguardo, il ruolo di punta assunto dalla scienza russa nel costituirsi del paradigma della non linearità, fin dagli inizi del secolo, sotto l'impulso di un'importante tradizione nel campo dell'ingegneria, delle scienze applicate e della meccanica.

Per illustrare meglio questi temi conviene riferirsi all'evoluzione del concetto di oscillazione nei primi decenni del secolo. È superfluo insistere sulla centralità di questa nozione: innumerevoli fenomeni oscillatori e periodici si trovano in natura e nei processi artificiali, dalle vibrazioni meccaniche ai cicli economici, dall'acustica alla dinamica delle popolazioni, dalla contrazione del cuore ai cicli di riproduzione delle piante. Ove si tenga conto che uno strumento fondamentale della matematica, la trasformata di Fourier, permette di decomporre ogni evoluzione nella somma di contributi periodici, è facile intendere che i fenomeni oscillatori hanno un ruolo di straordinaria generalità nella descrizione matematica dei fenomeni. La struttura matematica più semplice per la descrizione di un fenomeno oscillatorio è data dall'oscillatore armonico lineare. Tuttavia, molti processi oscillatori periodici non sono riconducibili a questo modello. Ad esempio, esso è inadeguato a descrivere un meccanismo antico come l'orologio, in quanto non rende conto della sua capacità

di stabilire in modo "automatico" un bilancio fra immissione e dissipazione di energia: l'orologio — come tanti altri dispositivi o processi naturali — "autoregola" le sue oscillazioni mediante un meccanismo di *retroazione* (o *feedback*). A questo tipo di oscillazioni si addice la denominazione di "auto-oscillazioni" e la loro descrizione più appropriata è data un modello matematico non lineare che è una variante di un'equazione introdotta dal radiofisico olandese B. L. Van de Pol nel 1926, per rappresentare il comportamento di circuiti elettrici in cui sono inseriti triodi o tubi a neon e che fu da lui applicata con successo alla descrizione di fenomeni come il battito cardiaco. L'equazione di Van der Pol aprì la strada allo studio di molti processi auto-oscillatori con retroazione.

Quanto precede vale a illustrare il profondo mutamento che ha subito il rapporto fra matematica e tecnologia nel nostro secolo. La considerazione del più semplice sistema non lineare mostra l'emergere di comportamenti non riconducibili alla somma del comportamento delle singole parti. In un sistema a due sole componenti, se esiste una relazione di retroazione della prima componente sulla seconda, è impossibile descrivere il comportamento dell'insieme come risultato del comportamento delle due componenti. Ciò testimonia di un legame preciso fra complessità, non linearità e taluni processi tecnologici non tradizionali come i processi di retroazione, i quali sono legati all'introduzione di dispositivi di autoregolazione nelle macchine.

Al riguardo, occorre osservare che la concezione classica delle macchine è fondata su un principio riduzionistico che può essere espresso nell'aforisma: «*il tutto è la somma delle parti*». Una macchina le cui componenti sono connesse da una concatenazione causale lineare, in cui ogni elemento agisce sul successivo secondo uno schema senza diramazioni o retroazioni, può essere ricondotta a questo principio. Quest'ultimo esprime il paradigma meccanicista della fisica classica, secondo cui ogni sistema non è altro che l'aggregato di parti elementari e la descrizione dell'evoluzione dell'insieme si ottiene come risultante della descrizione dell'evoluzione delle componenti elementari. Tuttavia, lo schema della concatenazione causale di componenti isolate o isolabili si è rivelato inadeguato di fronte alle nuove concezioni tecnologiche. La tematica che per prima entra in contraddizione con questo paradigma è quella della retroazione e dei servomeccanismi. Norbert Wiener, alla fine degli anni quaranta, sulla base degli sviluppi della tecnologia dei calcolatori, della teoria dell'informazione e delle macchine automatiche, propose i concetti di retroazione, di cibernetica e di informazione come centrali anche in contesti molto più vasti di quello strettamente tecnologico. Non minore importanza ebbero, in questa direzione, la teoria dell'informazione di Claude Shannon e la teoria dei giochi di von Neumann.

Tuttavia, l'insufficienza del riduzionismo meccanicistico si manifesta a un livello più profondo. La tecnologia moderna pone problemi assai più complessi della descrizione di un dispositivo isolato o di una singola macchina: ci si trova di fronte a *sistemi*, in cui intervengono livelli diversi fra loro e spesso neppure riducibili a fattori puramente fisici. Non si tratta soltanto dei problemi posti da tecnologie come quella aereospaziale, in cui intervengono problematiche meccaniche, elettroniche, chimiche e anche biologiche. Si tratta di problemi come quelli della regolazione del traffico o dei problemi delle file d'attesa, per non parlare della trattazione scientifica dei problemi economici, produttivi, finanziari, sociali. Qui interviene una molteplicità di livelli che richiedono le competenze di specialisti che nel passato operavano in sfere separate: il biologo, lo psicologo, l'economista, il programmatore, ecc. Inoltre, la modellizzazione matematica di questi processi non richiede un approccio descrittivo ma talvolta deve esplicitamente negarlo per determinare le condizioni sotto le quali il processo può assumere un comportamento ottimale. Nel vasto dominio dei modelli di controllo la matematica è chiamata a giocare un ruolo inedito.

In definitiva, la tecnologia del Novecento determina l'abbandono del rapporto esclusivo fra matematica e fisica, e del nucleo costitutivo di tale rapporto, il riduzionismo meccanicistico. Resta aperto il problema se la matematica — per tanti aspetti profondamente plasmata dal rapporto con la fisica — abbia subito un'evoluzione tale da fondare un nuovo rapporto costitutivo con le scienze non fisiche, libero da ogni residuo del meccanicismo causale lineare, e quindi adeguato a riflettere la specificità dei problemi biologici, sociali o economici. Difatti, come ha osservato il teorico dei sistemi L. von Bertalanffy, molti approcci modellistici o sistemistici appaiono più come *estensioni* e *sostituzioni* della visione meccanicista e quindi, mentre offrono un potenziamento indiscutibilmente efficace dell'analisi matematica dei fenomeni fisici, non sempre può dirsi la stessa cosa in ambiti in cui si richiede una visione originale.

Queste osservazioni appaiono pertinenti ove si tenti di valutare lo stato presente della modellistica matematica. Naturalmente, una siffatta valutazione è molto complessa e deve essere fatta con gran prudenza. Ma non è difficile constatare che le applicazioni della matematica a questioni che possono essere viste come un'estensione di problematiche fisiche in cui persiste un'approccio di tipo meccanicistico, sono chiaramente efficaci, e riconosciute come tali dalla comunità scientifica: nessuno mette in discussione la straordinaria efficacia della matematica nella teoria della turbolenza. Ben diverso è il discorso per le applicazioni alle scienze biologiche ed economico-sociali, per non parlare della psicologia, della psicoanalisi, delle scienze del comportamento.

Fuori dall'ambito fisico, il discrimine sembra essere fra modelli descrittivi o modelli normativi: i primi sono in genere i più deludenti. È difficile negare l'efficacia dei modelli di allocazione delle risorse o della cosidetta "activity analysis", dei modelli dei processi produttivi nell'industria o della dinamica dei capitali finanziari. Invece, i modelli di equilibrio economico generale appaiono particolarmente mediocri. I primi confezionano un'immagine artificiale e semplificata della realtà, in una prospettiva normativa, mentre i secondi hanno un fine descrittivo che deve tener conto della complessità del processo economico e, di fatto, riduce tale complessità, in modo quasi caricaturale, a uno schema meccanico semplificato del modello.

Un esempio più chiaro è dato dai modelli matematici degli ecosistemi. È noto che la crescita in laboratorio di alcune specie animali di prede e predatori coesistenti, corrisponde discretamente alla dinamica descritta dalle equazioni di Volterra. Altrettanto dicasi nel caso di un ecosistema ipersemplificato, come un terreno

agricolo gestito con metodi industriali. In entrambi i casi si tratta di situazioni *artificiali*, ridotte a uno schema semplificato di tipo meccanico. Ma non appena si affronti il problema della *descrizione* di un ecosistema reale complesso (come l'ecosistema di una foresta pluviale) i risultati di tutti i modelli noti divergono dalle osservazioni empiriche in modo sconcertante. Particolarmente significative, al riguardo, sono le ricerche condotte da R. M. May negli anni settanta circa la relazione fra stabilità e complessità negli ecosistemi. Il problema che si poneva May era il seguente: può dirsi che, alla luce dei modelli matematici di Volterra e delle loro generalizzazioni, un *aumento di complessità* dell'ecosistema (ovvero un incremento del numero delle specie e delle loro interazioni) conduca a un suo *aumento di stabilità* (nel senso che la sua struttura resiste alle perturbazioni esterne)? Gli ecologi sono orientati verso una risposta affermativa, sulla base dei fenomeni noti e studiati. May ha mostrato invece che i modelli matematici conducono a una risposta opposta: *quanto più il modello è complesso tanto più è instabile*. Questa gravissima incoerenza fra modelli e osservazioni empiriche è un problema tuttora irrisolto.

Una situazione analoga si presenta nella modellizzazione matematica dell'AIDS, la quale non sembra avviata a riscuotere i successi della modellizzazione matematica di epidemie "semplici", come la peste, il colera o certe malattie veneree, in cui il meccanismo di diffusione è riducibile a uno schema fisico del tipo "teoria cinetica dei gas". Qui la estrema complessità della malattia, il quadro troppo complicato e dai contorni mal definiti dei suoi meccanismi di trasmissione, per non parlare delle idee assai incerte circa il suo tempo d'incubazione (o di latenza), hanno condotto allo sviluppo di una modellistica tanto vasta quanto di utilità e validità incerta. In un recente congresso, negli USA, modellisti matematici, biologi e medici si sono confrontati su questo tema e il dibattito si è trasformato in un dialogo di sordi: i secondi manifestavano il loro scetticismo e non si dichiaravano disposti a fornire i dati empirici in mancanza di una prova dell'utilità dei modelli; mentre i primi dichiaravano di non poter far molto in assenza di un panorama quantitativo più chiaro e di una conoscenza più profonda dei meccanismi biologici della malattia.

Agli inizi della grande ripresa degli studi biomatematici, nel 1976, i matematici G. Oster e J. Guckenheimer osservavano: «I sistemi biologici tendono ad essere molto più complessi dei sistemi studiati in fisica o in chimica. Nell'analisi dei modelli ci si trova di frequente di fronte a due alternative: o il ricorso alla forza bruta della simulazione mediante il calcolatore, oppure la riduzione del modello mediante approssimazioni talmente draconiane che esso perde di interesse dal punto di vista biologico. Né l'una né l'altra di queste due alternative è seducente. In effetti, è raro il poter perseguire la prima delle due alternative nella maggior parte delle situazioni che si presentano in ecologia, perché raramente disponiamo di dati sufficienti allo scopo di convalidare un modello dal punto di vista quantitativo. È questa una situazione del tutto diversa da quella che si presenta nelle scienze fisiche, dove piccole differenze permettono spesso di scegliere fra diverse teorie in competizione. La situazione è talmente difficile che molti ecologisti mettono seriamente in dubbio la possibilità che la matematica possa giocare un ruolo di qualsiasi utilità in biologia. Vi sono persone che dicono che non esiste un solo progresso nel campo della biologia che possa essere attribuito alle teorie matematiche. Essi dicono che quando entrano in gioco i sistemi complessi il linguaggio appropriato è l'inglese e non quello della matematica.»

Queste conclusioni pessimistiche non hanno frenato l'esplosione della biomatematica nel ventennio 1974-1994, durante il quale l'editore Springer ha pubblicato la serie di volumi *Lecture Notes in Biomathematics*. Nel n° 100 del 1994, chiudendo la pubblicazione della serie, l'"editor" S. A. Levin tracciava un bilancio "bittersweet", "dolce-amaro": la disciplina è talmente esplosa, osservava Levin, che questa serie di volumi non serve più. Nessuno è più interessato a panorami di sintesi generale, ognuno si scavato la sua nicchia specialistica dentro la quale trivella in profondità e nel più completo disinteresse per quel che succede anche immediatamente accanto a lui. Così, proprio mentre il numero dei ricercatori aumentava esponenzialmente, la serie di volumi doveva chiudere per crisi economica, perché nessuno comperava più i volumi! Insomma, le domande di Oster e Guckenheimer, alla fine del secondo ventennio "d'oro" della biomatematica non hanno trovato risposta: sono state semplicemente accantonate in quanto prive di interesse per una ricerca sorda ai problemi di orientamento generale.

Un discorso analogo potrebbe essere fatto per l'economia matematica. Mi limiterò a dire che, in analogia con quanto accadde per le ricerche di May in biomatematica, i risultati matematici ottenuti nella teoria dell'equilibrio economico negli anni settanta e ottanta ebbero un impatto devastante per la teoria medesima. A tal punto, che molti ricercatori di punta, come il matematico Steven Smale, abbandonarono questo settore di ricerca. Tuttavia, l'elaborazione di modelli è andata avanti e va avanti come una macchina impazzita, senza tener conto del carattere critico o negativo di certi risultati, trovando alimento e giustificazioni soltanto all'interno di sé stessa.

Quanto precede permette di concludere che il panorama generale della modellistica matematica, alla fine del millennio, si presenta con dei forti chiaroscuri — o, per dirla con Levin, ha un sapore agrodolce.

La matematica appare sempre più come uno strumento pervasivo, come la via obbligata per ogni analisi dei fenomeni che ambisca a definirsi "scientifica". La scienza appare sempre più pervasa da un ideale di tipo "*panmatematico*" che sembra riproporre l'idea galileiana secondo cui la natura è scritta in linguaggio matematico, anche se — come si è detto — senza ambizioni di realismo e sostituendo al dogma della semplicità l'idea della complessità. Tuttavia, mentre le rappresentazioni matematiche della complessità sembrano rispondere abbastanza bene alla complessità dei fenomeni fisici, i livelli di complessità che si presentano nei fenomeni biologici e, ancor più, in quelli economici, sociali e psicologici, rappresentano una sfida straordinariamente ardua e del tutto aperta per l'analisi scientifica formale.

In questa situazione, la modellistica matematica, in quanto attività multiforme, dispersa in una pleiade di settori e priva di criteri unificanti sul piano dei concetti e dei metodi, propone sfide affascinanti e presenta rischi seri. La sfida affascinante consiste chiaramente nell'estensione del metodo matematico a settori che gli sembravano preclusi. I rischi sono connessi proprio a questa estensione: nella misura in cui non poggia su solidi criteri di controllo obbiettivi, la modellistica apre la

strada all'arbitrario, si avvicina proprio alla prassi di quelle scienze verbali e informali di cui la scienza ha criticato tanto il carattere incerto, opinabile, inverificabile. Molto spesso il modello rassomiglia a un "*racconto*", a una narrazione, e se può averne tutto il fascino rischia anche di condividerne il soggettivismo e l'arbitrarietà.

Vorrei concludere osservando che, in questo contesto di sfide affascinanti e rischiose, proprio *i matematici hanno un ruolo importante da giocare*. Infatti, la parcellizzazione della modellistica conduce i suoi protagonisti ad un atteggiamento sempre più pragmatico nei confronti della matematica, al limite del praticismo più strumentale. Il biologo, l'economista, l'ingegnere aspirano sempre più a confezionarsi da soli e a far uso indipendente di una *matematica "alla carta"*, ovvero espressamente adattata ai loro specifici scopi; e manifestano insofferenza nei confronti degli standards di rigore richiesti dalla "matematica dei matematici". Questa tendenza presenta un duplice rischio, i cui primi effetti sono già evidenti: da un lato, il deperimento del ruolo e dell'influsso della matematica, come l'abbiamo conosciuta finora, a profitto di una matematica molto più pratica e "pronta all'uso" (con il conseguente rischio di un declino della ricerca matematica e della sua marginalizzazione); d'altro lato, una caduta di livello degli standards di rigore della modellistica, che può divenire persino drammatica.

A fronte di questa situazione, la risposta dei matematici non può essere quella di limitarsi a una sorta di rivendicazione di primogenitura oppure a un'affermazione di principio degli standards di rigore della propria disciplina. Si sa che le rivendicazioni dei nobili in declino o i proclami finiscono sempre nel nulla, soprattutto quando si mettono di traverso a correnti più o meno inarrestabili. L'unico atteggiamento ragionevole consiste nel non isolarsi dalle nuove tendenze della matematica applicata e nell'influire attivamente sul corso di queste correnti. Ovvero nell'*intervenire* in queste tendenze portandovi un *atteggiamento critico e rigoroso*. In concreto, il mondo della matematica — *che si tratti di quello della ricerca come di quello dell'insegnamento* — deve far propri certi temi: occorre che i metodi di programmazione e la teoria dei giochi, l'analisi matematica dei processi genetici e l'analisi dei mercati finanziari, l'epidemiologia o la dinamica delle popolazioni non siano più materie estranee al corpo della matematica, ma anzi che dal mondo della matematica parta l'impulso a svilupparne lo studio, secondo criteri scientifici. Occorre che i matematici siano in prima linea negli sviluppi della modellistica, per trattarli con il rigore e lo spirito critico che già tanti anni fa venne indicato da Federigo Enriques, proprio trattando dei temi analoghi che si ponevano a quel tempo. Nel campo dell'insegnamento, la rivendicazione da parte del mondo matematico di un ruolo primario nel campo delle tematiche applicative significa difendere il ruolo di una visione *culturale* e *critica* nell'apprendimento, spesso messa in discussione dalla tendenza a correre in modo scomposto e superficiale dietro alle mode.

Riferimenti bibliografici— P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'ordre dans le chaos, Vers une approche déterministe de la turbulence*, Paris, Hermann, 1984; L. von Bertalanffy, *General System Theory*, New York, 1968; L. Glass, M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos, The Rythms of Life*, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1988; J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations,* *Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, New York-Berlin, Springer-Verlag, 1983; B. Ingrao, G. Israel, *La Mano Invisibile, L'equilibrio economico nella storia della scienza*, Roma-Bari, Laterza, 1987, 1996; G. Israel, *La visione matematica della realtà, Introduzione ai temi e alla storia della modellistica matematica*, Roma-Bari, Laterza, 1996, 1997; G. Israel, A. Millán Gasca, *Il mondo come gioco matematico. John von Neumann, scienziato del Novecento*, Roma, La Nuova Italia Scientifica, 1995; S. A. Levin (ed.), *Frontiers in Mathematical Biology*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1994; A. J. Lotka, *Elements of Physical Biology*, Baltimore, 1925 (nuova ed. col titolo *Elements of Mathematical Biology*, New York, Dover, 1956); B. Mandelbrot, *Les objets fractals, Forme, hasard et dimension*, Paris, Flammarion, 1984; R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton, Princeton University Press, 1973; J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1944; V. Volterra, U. D'Ancona, *Les associations biologiques étudiées au point de vue mathématique*, Paris, Hermann, 1935 (ed. ital. a cura di G. Israel, *Le associazioni biologiche dal punto di vista matematico*, Roma, Teknos, 1995); N. Wiener, *Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine*, Cambridge, Mass., Mit Press, 1948.

POSSIAMO RAPPRESENATARE MATEMATICAMENTE L'ADOLESCENZA?

di Silvano Milani
(Istituto di Statistica Medica e Biometria - Università di Milano)

Premessa

Per l'adulto contemporaneo, almeno di quello che vive nelle società industrializzate, il fenomeno adolescenza si associa ai concetti di *metamorfosi* e *crisi*. L'adolescenza è pertanto oggetto di attenzione, non sempre esente da timori e da opportunismi, da parte di una schiera di *-ologi*, *-isti* e *-atri*. La complessità biologica e psicologica della transizione verso l'età adulta sembra poter essere meglio evocata dalla metafora dell'artista che espressa dal linguaggio formale dello scienziato. La visione *olistica* del primo ha di certo un fascino maggiore di quello della rappresentazione *riduzionistica* del secondo. Tuttavia, mentre il medesimo quadro, o il medesimo film o il medesimo brano di musica o di poesia sono variamente percepiti da soggetti diversi e persino dallo stesso soggetto in momenti diversi, una formula chimica o matematica o una legge fisica hanno significato univoco, purché chi le esprime e chi le interpreta condividano la conoscenza dei segni e delle regole del linguaggio.

Per Galileo, il gran libro dell'Universo è scritto in linguaggio matematico che, nell'immaginario collettivo, è sinonimo di rigore, aridità, astrazione, indiscutibilità ed antonimo di vita, variabilità, concretezza, opinabilità. Nel corso della nostra formazione scolastica ci siamo abituati a considerare affini la matematica (disciplina essenzialmente *deduttiva*) e la fisica (disciplina essenzialmente *induttiva*). Meno abituati siamo all'idea che tutti i fenomeni che possono essere misurati possono anche essere rappresentati da modelli espressi con il formalismo matematico.

Quali caratteristiche dell'adolescenza possono essere espresse in linguaggio matematico?

La caratteristica più evidente del periodo adolescenziale è il rapido cambiamento che ragazzi e ragazze manifestano nelle dimensioni, nella forma, nelle abilità fisiche ed intellettuali, e nelle attitudini psicologiche. Appare inoltre evidente che la transizione verso lo stato adulto avviene con tempi e modalità differenti da individuo a individuo, da popolazione a popolazione, da epoca ad epoca. La peculiarità del fenomeno crescita ha fatto convergere gli interessi di studiosi di differente estrazione (pediatri, medici dello sport, biologi umani, antropologi fisici, psicologi) sino a formare, dalla fine degli anni Cinquanta, una nuova disciplina intrinsecamente interdisciplinare (se mi si passa l'ossimoro) che ha preso nome di Auxologia, e la cui anima è stata ed è tuttora il professor James Mourylian Tanner (Camberley (UK), 1920 -), straordinaria figura di pediatra e studioso. Nello sviluppo dell'auxologia ha avuto ed ha un ruolo essenziale la bio-statistica, il cui oggetto di studio è la valutazione quantitativa dei fenomeni biologici (con particolare riferimento a quelli di interesse medico) e la formulazione di modelli espressi in forme matematiche e capaci di descrivere tali fenomeni non solo negli aspetti invarianti (del resto assai rari in ambito biologico) ma soprattutto nella loro variabilità.

Per quel che riguarda l'oggetto di questa esposizione i fenomeni più facilmente misurabili sono quelli concernenti l'accrescimento somatico e a questi modelli si farà cenno nel prosieguo.

I cicli della *crescita* somatica e la *velocità di crescita*.

Si è soliti pensare che il processo di crescita somatica nell'uomo sia costituito da 3 grandi cicli: l'infanzia (dalla nascita sino a 2 o più anni di vita), la fanciullezza (dalla fine dell'infanzia sino all'inizio della pubertà), e la pubertà (che termina con lo stato adulto). In modo molto schematico si può affermare che questi cicli sono controllati da differenti ormoni: l'ormone tiroideo (TT4) nell'infanzia, cui si aggiunge l'ormone della crescita (GH) durante la fanciullezza, cui si aggiungono gli estrogeni (nelle ragazze) o il testosterone (nei ragazzi) durante l'adolescenza. Un ciclo comincia o termina quando si raggiunge un minimo nella *velocità di crescita*.

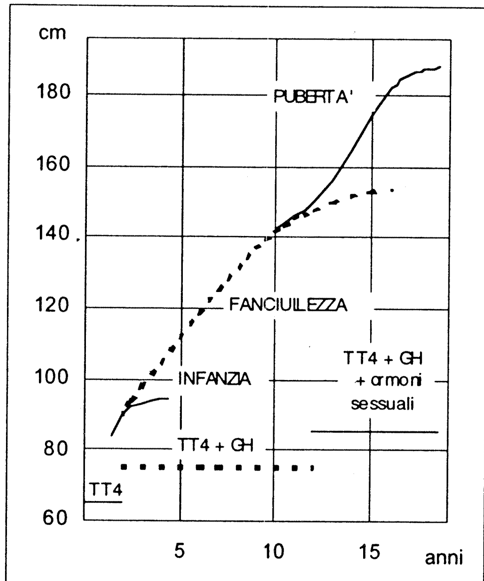


Figura 1

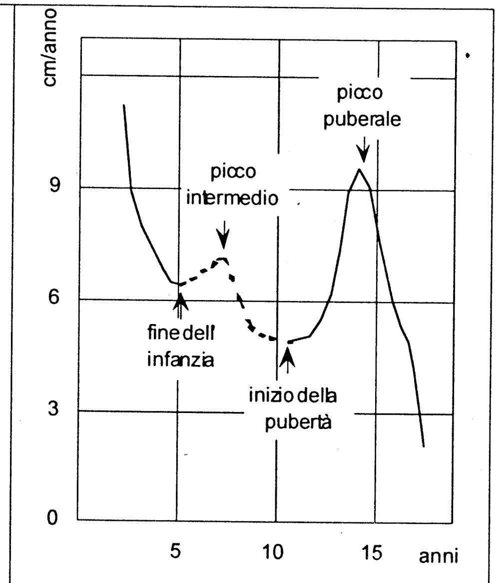


Figura 2

Le figure 1 e 2 danno una visione molto idealizzata dell'andamento della crescita. Quando si riportano in grafico dati reali, l'andamento appare molto diverso. Ciò emerge in modo chiaro se consideriamo il *profilo* di crescita staturale del figlio di de Montbeillard, che venne misurata ogni 6 mesi tra il 1759 e il 1777 (tale profilo è il primo esempio di misure staturali ripetute sullo stesso soggetto). I cicli di accrescimento non son ben distinguibili né nel profilo di crescita né in quello delle velocità di crescita ricavate da misure contigue. L'andamento alquanto irregolare del profilo della velocità di crescita è in gran parte dovuto agli errori di misura che sono relativamente grandi rispetto ai modesti incrementi staturali che si osservano a distanza di 6 mesi. Se le velocità sono derivate da misure prese a distanza di un anno, il loro profilo diventa assai più regolare, e consente di distinguere agevolmente l'infanzia dalla pubertà.

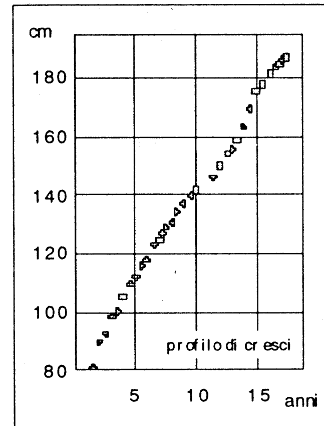


Figura 3

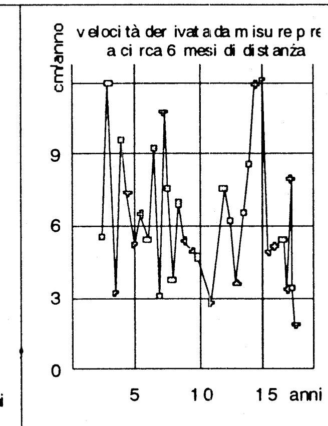


Figura 4

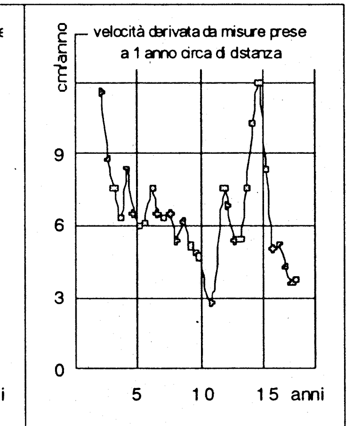


Figura 5

Esempi di modelli matematici per la crescita somatica

Il valore di statura y(t) osservato all'età t può essere espresso come somma del valore assunto da una funzione matematica dell'età $f\{t, parametri\}$ e di un termine $\varepsilon(t)$ che esprime la differenza tra il valore osservato all'età t ed il valore assunto dalla funzione a quell'età:

$$y(t) = f\{t, \textit{parametri}\} + \varepsilon(t)$$

La forma della funzione dipende sia dalla sua struttura (ad es. logaritmica, esponenziale, logistica) sia dai valori assunti dai suoi parametri. Il termine $\varepsilon(t)$, detto termine casuale, include sia l'errore di misura sia l'espressione della variabilità biologica, che è l'effetto cumulativo delle fluttuazioni dell'ambiente esterno e interno (di temperatura, luce solare, dieta, attività fisica, stato di salute, e dei loro effetti sul sistema endocrino), che tendono a spostare il valore della statura raggiunto ad una certa età da quello che la ragazza o il ragazzo avrebbero espresso in assenza di tali variazioni, (il cosiddetto potenziale genetico).

Uno dei criteri di scelta della funzione adatta per descrivere l'accrescimento somatico consiste nel basarsi su quanto si è ricavato dall'osservazione di un gran numero di profili di crescita. Si cercano quindi funzioni *continue* che abbiano le seguenti caratteristiche:

- un asintoto obliquo per descrivere la crescita staturale alla fine dell'infanzia;
- due flessi per descrivere lo scatto di crescita intermedio e quello puberale;
- un asintoto orizzontale per descrivere la statura adulta.

Una delle funzioni di crescita più complicate (ben 9 parametri!) è formata da tre componenti logistiche (C_0, C_1, C_2) corrispondenti ai tre cicli di crescita, e prende il nome di tripla logistica (Bock e Thissen 1980):

$$\textit{crescita: } f(t) = \frac{\mu_0}{1+exp[-\beta_0(t-\tau_0)]} + \frac{\mu_1-\mu_0}{1+exp[-\beta_1(t-\tau_1)]} + \frac{\mu_2-\mu_1}{1+exp[-\beta_2(t-\tau_2)]} = C_0 + C_1 + C_2$$

velocità: $$f'(t) = \frac{\beta_0 C_0 (\mu_0 - C_0)}{\mu_0} + \frac{\mu_1 C_1 (\mu_1 - \mu_0 - C_1)}{\mu_1 - \mu_0} + \frac{\mu_2 C_2 (\mu_2 - \mu_1 - C_2)}{\mu_2 - \mu_1}$$

in questa funzione, la cui forma è illustrata nelle figure 6 e 7,

μ_0 e μ_1-μ_0 sono i contributi delle componenti infanzia e fanciullezza alla statura finale (μ_2);

β_0, β_1 e β_2 sono le costanti di velocità per i 3 cicli di crescita;

τ_0, τ_1 e τ_2 sono le età al picco per le 3 componenti di velocità.

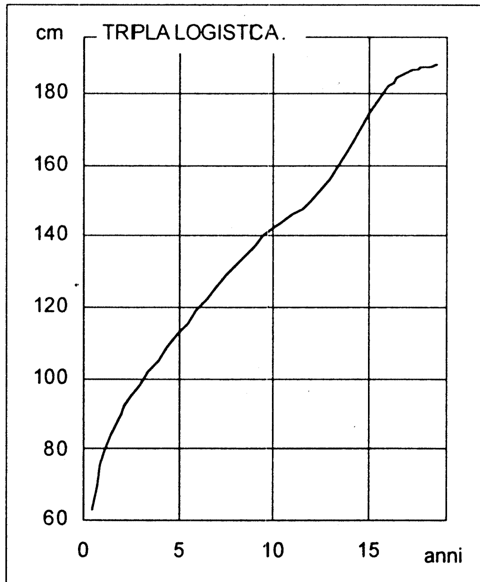


Figura 6

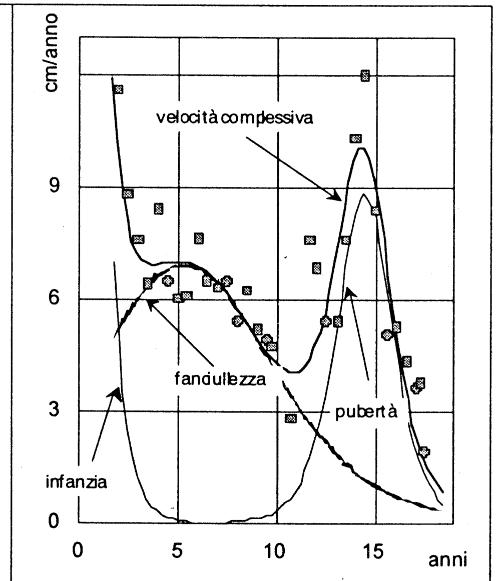


Figura 7

Una funzione assai utilizzata per descrivere la crescita somatica è quella proposta da Preece e Baines (1978) che ignora, nella sua struttura, sia la componente infanzia sia lo scatto di crescita intermedio ed include 5 parametri soltanto:

crescita: $$f(t) = \mu_2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{exp[\beta_1 (t-\tau)] + exp[\beta_2 (t-\tau)]} = \mu_2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{C_1 + C_2}$$

velocità: $$f'(t) = \frac{2(\mu_2 - \mu_1) \times \beta_1 C_1}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{2(\mu_2 - \mu_1) \times \beta_2 C_2}{(C_1 + C_2)^2}$$

in tale funzione, che mira soprattutto a descrivere il periodo adolescenziale (fig. 8 e 9),

τ è l'età al picco di velocità della componente di crescita puberale;

μ_1 e μ_2 sono la statura all'età τ e la statura finale;

β_1 e β_2 sono le constanti di velocità per i cicli fanciullezza e pubertà.

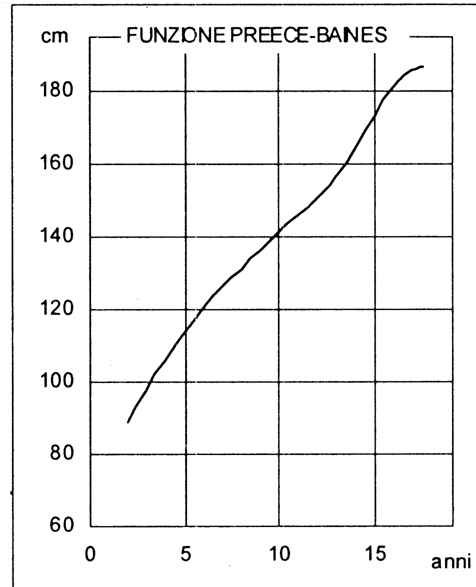


Figura 8

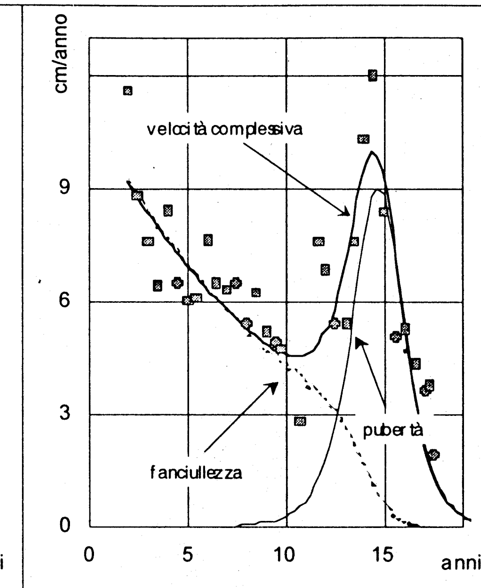


Figura 9

Al variare del valore dei loro parametri tali funzioni sono in grado di descrivere andamenti differenti dell'accrescimento somatico, come quelli delle femmine e dei maschi (fig. 10 e 11).

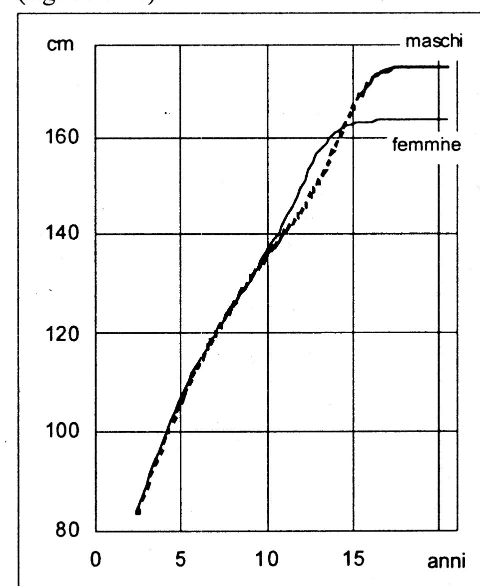


Figura 10

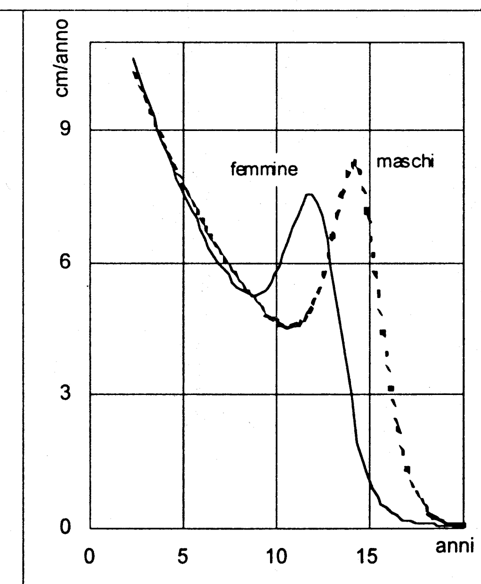


Figura 11

ALCUNI SUGGERIMENTI PER UN LAVORO DI RICERCA NELLA CLASSE

COMPRENSIONE DEL TESTO 1

Qual è il significato etimologico dei termini *metamorfosi* e *crisi*?
Chi sono gli *-ologi*, gli *-isti* e gli *-atri* che si interessano dell'adolescenza?
Qual è il significato dei termini *olistico* e *riduzionistico*?
Qual è il significato dei termini *induttivo* e *deduttivo*

TEMA A

Che cosa vi evocano i versi?

I feel stupid and contagious
A mulatto and albino
A mosquito, my libido
A denial, a denial, a denial.
(Kurt Cobain, Smells like teen spirit, 1991)

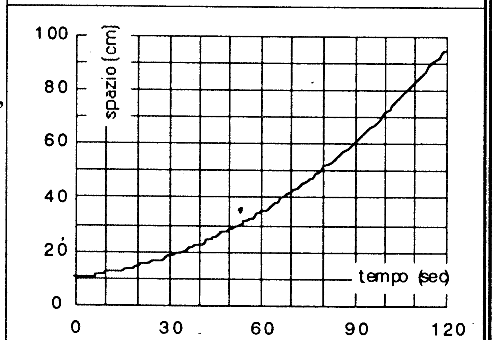
I'm not like them, but I can pretend
The sun is gone, but I have a light
The day is done, but I'm having fun
I think I'm dumb or maybe just happy
(Kurt Cobain, Dumb, 1993)

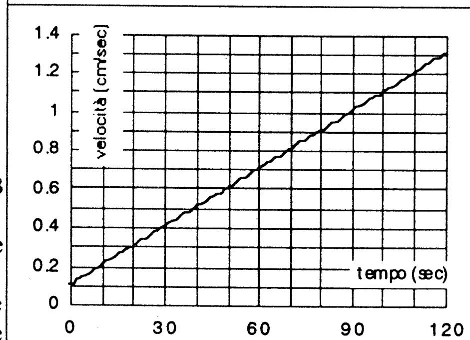
Sia per il tema A sia per il tema B indicate

a) quali sono i motivi delle differenze tra le risposte che avete dato.
b) quali sono i motivi delle differenze tra le risposte date da voi e quelle date dai vostri insegnanti.

TEMA B

Sapete interpretare i due grafici qui mostrati?





Qual è la distanza dal punto di partenza dopo 90 secondi?
Qual è la velocità al 90° secondo?
La velocità è costante tra 0 e 120 secondi?
Cosa rappresenta la pendenza del grafico 1?
E quella del grafico 2?

TEMA C

Ricercate analogie e differenze tra le affermazioni di uno dei padri del metodo scientifico ed il creatore dell'investigatore scientifico.

PAROLA DI GALILEO

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

Galileo Galilei, Il Saggiatore (1623).

PAROLA DI SHERLOCK HOLMES

While the individual man is an insoluble puzzle, in the aggregate he becomes a mathematical certainty. You can, for example, never foretell what any one man will do, but you can say with precision what an average number will be up to. Individuals vary, but percentages remain constant. So says the statistician.

Sir Arthur Conan Doyle, The sign of four (1890).

TEMA D

età	statura	età	statura	età	statura	età	statura	età	statura
0.00	51.4	4.00	105.2	7.50	128.9	12.67	154.1	16.62	183.3
0.50	65.0	4.58	109.5	8.00	130.8	13.00	155.3	17.01	184.6
1.00	73.1	5.00	111.7	8.50	134.3	13.50	158.6	17.11	185.4
1.50	81.2	5.58	115.5	9.00	137.0	14.00	162.9	17.43	186.5
2.00	90.0	6.00	117.8	9.62	140.1	14.53	169.2	17.59	186.8
2.50	92.8	6.55	122.9	10.00	141.9	15.01	175.0		
3.00	98.8	7.00	124.3	11.50	146.1	15.52	177.5		
3.50	100.4	7.25	127.0	12.00	149.9	16.27	181.4		

Questa tabella riporta i valori della statura (cm) del figlio di de Montbeillard, rilevata alle varie età (anni e centesimi di anno).

a) Provate a ricostruire le figure 3, 4 e 5.
b) Come sono state calcolate le velocità di crescita in figura 4?
c) Come sono state calcolate le velocità di crescita in figura 5?

TEMA E

a) Analizzate la forma delle funzioni logaritmica, esponenziale e logistica e ricercate quali fenomeni fisici o biologici possono descrivere.
b) Per quale motivo le tre componenti della funzione tripla-logistica, pur avendo identica struttura, hanno forme così differenti?
c) Per quale motivo le due componenti della funzione di Preece e Baines, pur avendo identica struttura, hanno forme così differenti?
d) Quali parametri interpretano in maggior misura il differente andamento della crescita somatica delle femmine e dei maschi.
e) Uno stesso fenomeno può essere descritto da funzioni matematiche caratterizzate da differente struttura: discutete le implicazioni di questo fatto.

ALCUNI SUGGERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Per gli aspetti concettuali (e non tecnici) dei modelli in fisica (e non solo):

LAWRENCE KRAUSS. **Paura della Fisica.** Edizione italiana a cura di Alberta Rebaglia (1994). Raffaello Cortina Editore.

Per i vari aspetti dell'auxologia, inclusi quelli qui brevemente illustrati:

AAVV. **Human Growth, a comprehensive treatise** (2ª edizione). A cura di F. Falkner e J.M. Tanner (1986). Plenum Press (New York).

AAVV. **Auxologia normale e patologica** A cura di I.Nicoletti (1994). Edizioni Centro Studi Auxologici (Firenze)

AAVV. **Essays on Auxology presented to James Mourilyan Tanner by former colleagues and fellows.** A cura di R.Hauspie, G.Lindgren, F.Falkner (1995). Castlemead Publications (Welwin Garden City - Hartfordshire.

Per le funzioni di crescita qui presentate:

PREECE M.A., BAINES M.K. A new family of mathematical models describing the human growth curve. *Annals of Human Biology*, **7,** 507-528 (1978).

BOCK R.D., THISSEN D.M. Statistical problems of fitting individual growth curves. In "*Human Physical Growth and Maturation: Methodologies and Factors*". A cura di F.E. Johnston, A.F. Roche, C. Susanne (1980). Plenum Press (New York); pp. 265-301.

Modellizzazioni matematiche: dal conto della spesa alle dimensioni dell'universo

Vinicio Villani

PREMESSA

Nel maggio '98, in vista della relazione che avrei tenuto di lì a qualche mese a questo convegno, ho inviato agli organizzatori una breve traccia delle problematiche che contavo di affrontare. Nella mia lettera di trasmissione esprimevo poi la speranza che le "provocazioni" contenute nella traccia potessero fornire a qualche insegnante di scuola secondaria lo spunto per un lavoro da proporre ai suoi allievi, onde offrire una testimonianza diretta di ciò che è possibile fare con un po' di impegno e di creatività nell'ambito delle modellizzazioni matematiche, nonostante tutte le difficoltà e le carenze della struttura scolastica italiana. In effetti la "provocazione" è stata raccolta al di là delle mie aspettative da due classi del Liceo Scientifico di Perugia, la 5ª B e la 5ª H (insegnanti le Proff. C. Angiolini e F. Menconi). Così nel corso di questo convegno avremo modo di sentire dalla viva voce degli studenti una presentazione del lavoro che essi hanno fatto a partire da uno dei problemi da me proposti.

A questo punto mi sembra opportuno riportare integralmente la traccia che avevo redatto nel maggio '98. Farò seguire brevi cenni su come io stesso avrei affrontato i problemi proposti, usando solo strumenti matematici elementari, alla portata degli studenti di scuola secondaria. Va da sé che le mie "soluzioni" (ma sarebbe più appropriato dire: le mie "modellizzazioni") non sono le uniche possibili, né che pretendono di essere le migliori possibili.

1. LA TRACCIA

Fin dai primi anni della scuola elementare agli allievi vengono proposti problemi di matematizzazione del tipo seguente:

PROBLEMA 1. *La mamma compra* 3 *kg di mele. Sapendo che* 1 *kg di mele costa* 1600 *lire, quanto spende la mamma?*

Il procedimento risolutivo si basa su un ragionamento di proporzionalità diretta, per cui la risposta attesa è: 4800 lire.

Cosa cambierebbe nel problema precedente, se ne lasciassimo inalterata la struttura, modificando però l'ordine di grandezza della quantità di mele che la mamma intende comprare, per es. 30 kg?

Da un punto di vista strettamente matematico non cambierebbe nulla, ma ora lo schema della proporzionalità diretta sarebbe assai meno aderente alla situazione reale. Infatti probabilmente nessuna mamma acquisterebbe 30 kg di mele al dettaglio.