Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione Classica
Scientifica e Magistrale

L'ALGEBRA
TRA TRADIZIONE E RINNOVAMENTO

Seminario di formazione per Docenti

Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri" – Lucca
Settembre 1994

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: R. Cammarata

Direttore editoriale: L. Catalano

Coordinatore editoriale: A. Portolano

Revisione scientifica: E. Bertonelli

Editing: B. Ramundo, G. Ciri

Grafica: F. Panepinto

Nota editoriale

In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico del presente Progetto di formazione per Docenti. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

INDICE

PER UN INSEGNAMENTO SENSATO DELL'ALGEBRA

Luigi Catalano
Dirigente Div. IV Direzione Generale Classica Scientifica e Magistrale, Ministero della Pubblica Istruzione

Nella fase di transizione nella quale la scuola si trova oggi, assume un significato decisivo l'aggiornamento dei docenti: esso infatti può in qualche modo mitigare la divaricazione tra l'impianto tradizionale dei programmi e le nuove esigenze didattiche che si inscrivono in uno scenario in cui sono profondamente cambiati tanto gli assetti delle discipline che i modi di apprendimento.

L'innovazione si trova a far i conti con problemi di notevole complessità. Si tratta di considerare i mutamenti degli statuti epistemologici delle discipline, recuperandone il significato e la finalità per la scuola e individuando gli obiettivi da perseguire attraverso modalità che impostino in modo adeguato il rapporto insegnamento/apprendimento.

Questo insieme di problemi ha orientato la Divisione IV a fare molto affidamento sull'aggiornamento nell'ambito della didattica delle discipline. A questo si è attribuito il compito di recuperare lo spessore problematico del rapporto dinamico tra epistemologia e metodologia didattica.

Per l'insegnamento della matematica l'impegno è stato particolarmente sentito. La matematica è forse tra le discipline scolastiche che hanno maggiormente risentito della temperie culturale. La complessiva sottovalutazione del sapere scientifico nell'impianto gentiliano dei programmi ha comportato l'esito di una denegazione di alcuni aspetti interni alle singole discipline: la dimensione teoretica e quella storica – per citare alcune questioni riguardanti anche la matematica – sono scarsamente o niente affatto considerate con la conseguente prevalenza, in campo didattico, del livello procedurale, spogliato di motivazione e significato.

Il fatto che la matematica sia presentata, nella maggioranza dei casi, sganciata dagli altri ambiti di conoscenza umana e senza dimensione storica che ne faccia comprendere lo spessore culturale, rende difficile insegnare la matematica – soprattutto in una fase in cui la motivazione all'apprendimento ha assunto grande importanza – e spiega in qualche modo anche le resistenze all'apprendimento di una parte non irrilevante degli studenti.

Ci sembra che il numero elevatissimo di richieste di partecipazione al Seminario – oltre 2000 domande – sia una spia di questa difficoltà dell'insegnamento/apprendimento della disciplina e dell'esigenza di ricercare adeguate soluzioni.

È questa complessa problematica cui in questa sede è giusto fare solo qualche rapidissimo cenno, che ha orientato il Ministero all'incontro con l'Unione Matematica Italiana.

La collaborazione tra U.M.I. e Ministero che ha già implicato l'attività congiunta delle Direzioni classica, tecnica, professionale e dell'Ispettorato artistico e che coinvolgerà in futuro le Direzioni media ed elementare, mira a realizzare un innovamento della didattica non disancorato dai problemi della ricerca e della trasformazione epistemologica delle discipline.

Il Seminario "La didattica della matematica, l'insegnamento dell'algebra tra tradizione e rinnovamento" è stato ispirato da questo obiettivo.

Non pochi mi sembrano gli stimoli che si ritrovano nei Corsi e nelle Conferenze che – come sarà illustrato dall'ispettrice Lucia Ciarrapico – caratterizzano l'organizzazione del Seminario.

Pensiamo innanzitutto alla riappropriazione del *senso* dei simboli algebrici che ci sembra la chiave di volta fondamentale per un avvicinamento agli studenti, alla loro aspettativa, ormai ampiamente diffusa, di rapportare lo studio – sia pure con il necessario padroneggiamento di tutti i codici della scienza e del sapere – alla propria esperienza di conoscenza.

Proprio da questo recupero del senso vero dei simboli algebrici può originarsi l'apertura verso la dimensione storica della disciplina. A questa dimensione si fanno non pochi riferimenti. Si pensi al ruolo del bourbakismo per esempio.

Ed è attraverso la riappropriazione della dimensione storica che si può arrivare all'avvicinamento della matematica alle altre discipline. Il riferimento allo strutturalismo e alla posizione di Piaget ci sembra una sollecitazione altrettanto importante e stimolante.

Da questa complessità deriva dunque l'organizzazione del Seminario che prevede un secondo incontro in cui la problematica esplorata dalle relazioni si trasferirà, attraverso i lavori di gruppo, alla concreta organizzazione di percorsi didattici.

Il Quaderno/sette intende proporre lo stesso andamento del Seminario, a partire dalla lettura dei problemi epistemologici più significativi, con il consueto intento di sollecitare interesse e discussione intorno alle possibili direzioni dell'innovazione didattica.

PUBBLICA ISTRUZIONE E UNIVERSITÀ: INSIEME PER UNA SCUOLA MIGLIORE

Romano Cammarata
Direttore Generale Istruzione Classica, Scientifica, Magistrale, Ministero della Pubblica Istruzione

Quando, nel novembre del '93, sottoponevo al Ministro pro tempore il Protocollo d'Intesa tra MPI e UMI-CIIM ero soddisfatto del lavoro avviato e fiducioso nella validità delle iniziative che, conseguentemente, sarebbero state attivate.

Ricordavo una considerazione espressa qualche anno prima dal Ministro per la ricerca scientifica, in una Conferenza tenuta presso la "Sala dello stenditoio" a proposito dei rapporti tra Pubblica Istruzione e Università: "Eravamo uniti e ci ignoravamo; ora siamo divisi e ci cerchiamo!".

Ero e sono pienamente convinto della verità di quella affermazione e dell'urgenza di lavorare insieme.

La collaborazione fra scuola e università è innegabilmente utile per entrambe le istituzioni: la scuola, impegnata nell'innovazione, fonda la sua ricerca nell'attività di ricerca scientifica prodotta dall'università; questa per compito istituzionale è impegnata nella formazione permanente degli insegnanti in servizio e in attività di sostegno.

Il realizzare occasioni di sinergie operative va posto, quindi, fra gli obiettivi e gli impegni prioritari delle due istituzioni.

Se nella fase operativa l'obiettivo prefissato risulta di grande interesse, non solo a livello istituzionale, ma, e in termini di netta evidenza, anche da parte dei fruitori diretti, allora la fiducia nel lavoro avviato in collaborazione e la soddisfazione per quanto intrapreso crescono e spingono a fare di più.

È quanto, ritengo, si sia verificato con la prima iniziativa legata al protocollo d'intesa tra MPI e UMI: questo seminario di formazione per docenti su "L'insegnamento dell'algebra fra tradizione e rinnovamento".

Il rilevante numero di domande di partecipazione al seminario attesta certamente la bontà del programma, ma conferma anche che l'esigenza di aggiornamento in matematica sia nei contenuti sia nelle metodologie è molto avvertita.

La qualità della partecipazione al seminario non credo abbia bisogno di molte parole per essere definita. La migliore valutazione dell'impegno prodotto nel corso dei lavori è costituita da questo quaderno che ne presenta gli atti e ne ripercorre l'itinerario scientifico.

L'auspicio: che questa agile pubblicazione possa incontrare l'esigenze di formazione dei docenti, di tutti i docenti, fin nell'estrema periferia della nostra realtà scolastica ed essere strumento utile per iniziative di aggiornamento locale, visto che quelle del centro non possono raggiungere tutti.

CORSO DI AGGIORNAMENTO IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA

L'INSEGNAMENTO DELL'ALGEBRA FRA TRADIZIONE E RINNOVAMENTO

Programma

Corsi

1) *Problemi nell'apprendimento-insegnamento dell'algebra*
Ferdinando Arzarello – Università di Torino

2) *Aspetti teorici dell'aritmetica e dell'algebra elementare*
Roberto Dvornicich – Università di Pisa

3) *Il computer nella didattica dell'algebra*
Paolo Boieri – Politecnico di Torino

4) *Momenti nella storia dell'algebra*
Paolo Freguglia – Università di Siena

Conferenze

1) *Linguaggio algebrico e linguaggio logico*
Claudio Benardi – Università "La Sapienza" Roma

2) *Algebra delle simmetrie e simmetria dell'algebra*
Giovanni Prodi – Università di Pisa

3) *Strutturalismo o post-strutturalismo*
Francesco Speranza – Università di Parma

4) *L'esame di maturità: valutazione in matematica*
Lucia Ciarrapico – Ministero della Pubblica Istruzione

Lunedì

ore	09,00	Apertura del Corso **Alberto Conte** Presidente dell'U.M.I. **Lucia Ciarrapico** Dirigente Superiore per i Servizi Ispettivo Ministero della P.I. **Claudio Bernardi** Presidente C.I.I.M. **Giuseppe Ciri** Preside del Liceo Scientifico "A. Vallisneri" – Lucca
	09,30	Lezione del Corso n. 1
	10,30	Lezione del Corso n. 2
	12,00	Lezione del Corso n. 3
	15,00	Esercitazioni Corso n. 2
	17,00	Conferenza n. 1

Martedì

ore	09,00	Lezione del Corso n. 1
	10,30	Lezione del Corso n. 2
	12,00	Lezione del Corso n. 3
	15,00	Esercitazioni del Corso n. 1
	17,00	Esercitazioni al calcolatore

Mercoledì

ore	09,00	Lezione del Corso n. 1
	10,30	Lezione del Corso n. 2
	12,00	Lezione del Corso n. 3
	15,00	Lavori di gruppo sul tema *Un itinerario didattico di algebra del biennio* (coordinano i lavori F. Arzarello, C. Bernardi, P. Boieri, R. Dvornicich)

Giovedì

ore	09,00	Lezioni del Corso n. 1

	10,30	Lezione del Corso n. 2
	12,00	Lezione del Corso n. 3
	15,00	Esercitazioni del Corso n. 2
	17,00	Esercitazioni al calcolatore

Venerdì

ore	09,00	Lezione del Corso n. 1
	10,30	Lezione del Corso n. 2
	12,00	Lezione del Corso n. 3
	15,00	Conferenza n. 2
	17,00	Esercitazioni

Sabato

ore	09,00	Riflessioni generali e lavori di gruppi spontanei

Lunedì

ore	09,00	Lezione del corso n. 1
	10,30	Lezione del corso n. 2
	12,00	Lezione del corso n. 3
	15,00	Conferenza n. 3
	17,00	Esercitazioni del corso n. 1

Martedì

ore	09,00	Lezione del corso n. 1
	10,30	Lezione del corso n. 2
	12,00	Lezione del corso n. 4
	15,00	Lavori di gruppo sul tema: *Un itinerario didattico di algebra nel triennio* (Coordinano i lavori F. Arzarello, R. Dvornicich, P. Freguglia, F. Speranza)
	18,00	Intergruppo

Mercoledì

ore	09,00	Lezione del corso n. 1
	10,30	Lezione del corso n. 2
	12,00	Lezione del corso n. 4
	15,00	Esercitazioni del corso n. 4
	17,00	Esercitazioni del corso n. 2

Giovedì

ore	09,00	Lezioni del corso n. 1
	10,30	Lezione del corso n. 2
	12,00	Lezione del corso n. 4
	15,00	Lavori di gruppo sul tema: *Integrazioni didattiche dell'algebra con altre matematiche* (Coordinano i lavori: F. Arzarello, R. Dvornicich, P. Freguglia, V. Villani)
	18,00	Intergruppo

Venerdì

ore	09,00	Lezioni del corso n. 1
	10,30	Lezioni del corso n. 2
	12,00	Lezioni del corso n. 4
	15,00	Conferenza n. 4
	17,00	Esercitazioni del corso n. 1

STAFF DI GESTIONE DEL CORSO

Direttore: Giuseppe Ciri
Comitato tecnico:
per il Ministero della Pubblica Istruzione, Lucia Ciarrapico, Mario Fierli
per l'Unione Matematica Italiana, Claudio Bernardi, Francesco Speranza, Vinicio Villani, Alberto Conte (Presidente dell'UMI)
Responsabile Ministero della Pubblica Istruzione: Luigi Catalano

Relatori:
Ferdinando Arzarello
Università di Torino

Claudio Bernardi
Università "La Sapienza" di Roma

Paolo Boieri
Politecnico di Torino

Lucia Ciarrapico
Ministero della P.I.

Roberto Dvornicich
Università di Pisa

Paolo Freguglia
Università di Siena

Giovanni Prodi
Università di Pisa

Francesco Speranza
Università di Parma

Segreteria organizzativa:
Cesare Matteoni, Maria Luisa Radini, Ilaria Ercoli, Giovanni Romani

PRESENTAZIONE DEL CORSO

Claudio Bernardi
Presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica(*)
Lucia Ciarrapico
Dirigente superiore per i servizi ispettivi

Alla fine del 1993 il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un protocollo d'intesa, per promuovere "programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni". Il protocollo, che costituisce il primo accordo del genere fra il Ministero ed una società scientifica, nasce dalla consapevolezza che una collaborazione fra mondo della scuola e università possa risultare estremamente utile per realizzare forme di aggiornamento, di formazione in servizio e, più in generale, per offrire un sostegno concreto all'attività dei docenti.

In questo quadro, il protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale della durata di due settimane, dedicato all'aggiornamento dei docenti di matematica. Così, dal 12 al 23 settembre 1994 si è svolto a Viareggio il primo Corso di didattica della matematica, sul tema "L'insegnamento dell'algebra fra tradizione e rinnovamento".

Le domande di partecipazione sono state numerosissime, più di 2100. Per ovvi motivi logistici, sono stati ammessi solo 40 docenti, scelti fra quelli di ruolo in servizio presso tutti gli ordini di Scuola Secondaria Superiore e in modo da rappresentare tutte le Regioni; a questi docenti sono stati affiancati 10 neo-laureati.

Il primo Corso è stato dedicato al tema dell'algebra, tradizionalmente uno dei settori più importanti nella didattica della matematica. Si è cercato di esaminare sia aspetti teorici sia aspetti più strettamente didattici, facendo riferimento alle nuove proposte di programmi e tenendo anche presenti i suggerimenti propri delle teorie dell'apprendimento. Naturalmente, è stato dato ampio risalto ai

(*) La Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica è una commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana, che si occupa specificamente dei problemi di carattere didattico.

legami che l'algebra presenta con altri settori matematici, come la teoria dei numeri, l'informatica, la geometria, la logica, lo studio delle strutture, senza trascurare la storia e i fondamenti della matematica.

Il Corso è stato articolato in 4 cicli di lezioni con esercitazioni, 4 conferenze, lavori di gruppo ed esercitazioni al calcolatore, per complessive 84 ore di attività. Il testo proposto è una sintesi del lavoro svolto nel Corso: lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici. È allegato al volume un dischetto con alcuni programmi informatici.

Questo libro vuole essere uno strumento didattico per attività di studio, di aggiornamento e anche di prima formazione. L'efficacia di un Corso di didattica si misura dalla sua ricaduta: l'augurio è che questo libro permetta a molti di coloro che non hanno potuto partecipare al Corso, di usufruirne, sia pure a distanza di tempo, e possa anche costituire una fonte di suggerimenti per Enti e Associazioni che vogliano contribuire con iniziative locali alla formazione dei docenti.

Un sentito ringraziamento va rivolto a quanti hanno reso possibile la realizzazione dell'iniziativa: ai relatori, per la loro competenza e disponibilità, e ai docenti partecipanti, che, con la loro concreta esperienza, hanno dato contributi preziosi.

PROBLEMI NELL'APPRENDIMENTO-INSEGNAMENTO DELL'ALGEBRA

Ferdinanzo Arzarello
Dipartimento di Matematica - Università di Torino

1. Apprendimento senza senso del linguaggio simbolico. Nel riportare i risultati di una valutazione nazionale eseguita a tappeto dalla NAEP (National Assessment of Educational Progress) negli USA qualche anno fa su allievi del settimo e dell'undicesimo grado (corrispondenti alla nostra seconda media e terza superiore), i curatori dell'indagine commentavano: "*Gli studenti della scuola secondaria generalmente sembrano avere una certa conoscenza dei concetti e delle abilità basilari in algebra e geometria. Però, i risultati di questa indagine valutativa indicano, così come risultava anche nelle precedenti indagini, che spesso gli studenti non sono capaci di applicare tali conoscenze in situazioni di problem-solving, né sembrano comprendere molte delle strutture che stanno sotto tali concetti e abilità*" (pagg. 346-347). Risulta dalla stessa indagine che gli allievi colmano tale loro incapacità a comprendere, per es. in algebra, memorizzando regole e procedure e finiscono così inevitabilmente col credere che queste rappresentino l'essenza dell'algebra: una grossa maggioranza degli allievi esaminati ritiene infatti che la matematica sia un elenco di regole e più della metà giudica che l'apprendimento della matematica consista sostanzialmente nel mandarle a memoria.

In Italia non esistono studi così ampi e sistematici, ma il quadro non penso sia molto diverso. Il problema però è ancora più complesso di quanto rilevi l'indagine NAEP citata: il punto drammatico è che non solo gli allievi spesso non conoscono il significato delle formule e dei concetti in algebra (e in generale in matematica), ma ne inventano spesso uno fasullo, che surroga quello autentico. Il problema didattico di fondo è che risulta estremamente difficile mettere in crisi tali loro misconcetti, in quanto il significato inventato ha una sua logica, eventualmente radicata in modelli precedentemente appresi (validi negli ambiti in cui sono stati appresi, ad es. i numeri interi, l'aritmetica, ecc., ma non adeguati al pensiero algebrico); è facile si generino delle vere e proprie commedie degli errori, quando un insegnante cerca di correggerli: sia l'insegnante che l'allievo usano le stesse parole, ma vi annettono significati diversi, senza che di ciò nessuno dei due riesca a prendere coscienza.

Si può ben dire che anche dopo anni ed anni di insegnamento, molti allievi delle superiori non padroneggino il senso dei simboli che hanno purtuttavia imparato a manipolare formalmente. Sistematiche ricerche (vedi Arzarello et al. [94a], [94b], nonché il volume che apparirà nel 1995 presso la Kluwier, curato da R. Sutherland, con contributi di vari studiosi, e che fa il punto sulla ricerca attuale nell'apprendimento-insegnamento dell'algebra) evidenziano che anche quegli allievi che sono buoni "calcolatori algebrici" non vedono né tantomeno usano l'algebra come strumento per comprendere, per esprimere e comunicare generalizzazioni, per svelare relazioni strutturali fra grandezze, per formulare argomenti matematici (eventualmente dimostrazioni). Questi risultati sono stati verificati in varie parti del mondo, anche con tradizioni diverse di insegnamento: in USA e Canada (Kieran [94]), in Francia (Laborde [82]), in Israele (Sfard et al. [92], Arcavi [94]), in Australia (Bell et al. [87]), in Messico (Filloy e Rojano [89]), in Brasile (R.Linns [94]), in Italia (Arzarello et al. [94a], Boero [94], Chiarugi et al. [94]), ecc.

Il problema è quello di sviluppare una opportuna didattica in cui gli allievi imparino a diventare padroni del senso vero dei simboli che usano, evitando quell'addestramento per memorizzazione di regole e meccanismi formali, il quale favorisce invece l'idea che il senso di una formula e delle trasformazioni su di essa consista soltanto nella sua struttura segnica.

Naturalmente, ci si accorge subito che per entrare nel problema in profondità occorre chiarire in forma precisa che cosa si intenda con parole come il *senso* o il *significato* delle espressioni simboliche dell'algebra (e della matematica in generale), il rapporto di queste nozioni rispetto ai *segni* con cui tali espressioni sono scritte, e le dinamiche di pensiero da esse prodotte negli allievi. La ricerca inoltre va fatta sia da un punto di vista teorico – in relazione a una precisa epistemologia della matematica – sia da un punto di vista pragmatico – in relazione a una specifica pratica dell' apprendimento – in modo da definire un modello completo per l'insegnamento dell'algebra. Ciò ci porta molto lontano e su un terreno di ricerca ancora in divenire: esso però costituisce un tassello fondamentale e indispensabile per impostare in modo radicale l'insegnamento dell'algebra nella nostra scuola. Tale tassello è oggetto della Nota Tecnica (NT); chi non ama gli approfondimenti teorici può senz'altro evitarla e continuare nella lettura delle pagine seguenti. Qui troverà alcuni esempi un po' provocatori; essi dovrebbero fare riflettere rispetto agli ostacoli che gli allievi incontrano nell'apprendimento dell'algebra e stimolare a un'impostazione diversa dell'insegnamento in questo settore. Se incuriosito o intrigato, il lettore potrà allora dedicarsi a letture più impegnative per ricercare una teoria che lo soddisfi, partendo ad es. da quella presentata in NT, o elaborare addirittura una teoria opportuna per conto suo.

Nelle pagine seguenti compariranno continuamente le parole *senso*, *significato*, *segno*; chi legge NT potrà dare loro un'interpretazione precisa, altrimenti ci si potrà attenere ad un uso "ingenuo" e impreciso dei termini in discussione, rimanendo a un livello informale ed espositivo: la comprensione non ne risulterà troppo fuorviata. Il precedente commento vale anche per l'espressione ***insegnamento sensato dell'algebra***: essa è introdotta non solo per dire insegnamento coerente e non cervellotico ma soprattutto per indicare un insegnamento/apprendimento mirato a fare cogliere agli allievi il *senso* e il *significato* dei simboli e delle formule algebriche che usano.

Degli esempi proposti, certi sono miei (per quanto ne so), altri sono attinti dalla letteratura citata in bibliografia, altri ancora fanno parte del folklore sull'argomento; va notato che alcuni si trovano anche in più autori, affrontati magari da punti di vista diversi, in un intreccio di interpretazioni che risulta difficile seguire.

2. Alcuni obiettivi per un insegnamento sensato dell'algebra. Cominciamo con un elenco di obiettivi che sembrano connessi con un *insegnamento sensato dell'algebra*. Un elenco, dettato dal buon senso e dall'esperienza è stato scritto da J. Fey [90]; esso è ben lungi dall'essere esaustivo, ma appare assai ragionevole e in accordo con lavori più scientifici fatti nel Regno Unito ormai alcuni lustri fa (Küchemann [81]) e con ricerche svolte attualmente in Israele da A.Arcavi [94], che fa propri tali obiettivi nelle sue ricerche sull'insegnamento dell'algebra:

a) Abilità ad analizzare un'espressione algebrica per fare stime approssimative degli schemi che emergeranno nella loro rappresentazione numerica o grafica.

b) Abilità a fare argomentati confronti degli ordini di grandezza per funzioni con regole del tipo $n, n^2, n^3, \dots$ e $k, k^2, \dots k^n, \dots$.

c) Abilità ad analizzare una tabella dei valori di una funzione o un grafico per interpretare condizioni enunciate verbalmente, al fine di identificare la probabile forma di un'espressione algebrica che esprime lo schema appropriato.

d) Abilità ad analizzare le operazioni algebriche da eseguire e predire la forma del risultato o, analogamente al caso delle stime aritmetiche, abilità ad analizzare il risultato e valutare se esso è stato ottenuto in modo corretto [senza eseguire materialmente i calcoli].

e) Abilità a determinare quale tra diverse forme potrebbe essere la più adatta per rispondere a una certa domanda.

L'elenco dà un'idea di alcuni aspetti da tenere particolarmente vivi se si vuole esercitare un insegnamento sensato dell'algebra; se il lettore ritiene che vi siano altri obiettivi da aggiungere è probabile che abbia ragione; l'elenco non è esaustivo ma ha solo un valore illustrativo, al fine di dare un'idea di quello che voglio dire. Un'osservazione è però necessaria a questo punto, per evitare fraintendimenti; di solito nessun insegnante nega l'interesse delle abilità in elenco, ma ritiene di solito anche che ve ne siano altre più "basse", ma molto importanti e maggiormente accessibili agli alunni medi. Si tratta, quando si va a vedere, di abilità tipicamente manipolatorie e procedurali, che costituiscono il cavallo di battaglia di moltri libri di algebra per il biennio delle superiori. Il primo punto qui è che finché gli insegnanti avranno, implicita o esplicita che sia, questa scala di valori, la trasferiranno anche ai loro allievi, che attribuiranno importanza solo a quegli aspetti dell'algebra e non agli altri (questa frase non è una congettura ma un'affermazione scientificamente provata). Il secondo punto è che non si tratta di fare cose diverse o in più rispetto a quelle che di solito si fanno; si tratta solo di farle con una prospettiva, una metodologia e in un contesto diverso (questa frase invece è un'ipotesi su cui invito tutti a lavorare sperimentalmente, per darle supporto scientifico).

3. Esempi. Illustrerò alcuni sensi con cui si possono usare le formule algebriche con esempi vari; la classificazione in famiglie è ispirata a ricerche del mio gruppo (Arzarello et al. [94a]) e di altri studiosi (Arcavi [94]) ma viene qui usata, come dicevo, a livello espositivo per dare un'idea di che cosa si intende con senso di un'espressione algebrica. Come si vedrà dagli esempi, il senso è sempre inestricabilmente legato a ciò che gli allievi fanno (spontaneamente o perché eseguono un compito), alle loro interazioni con l'insegnante, i loro compagni, il sapere ecc. Il senso di una formula non appartiene neutramente ad una formula come tale, ma in quanto è stata costruita in una certa situazione ecc., è quindi frutto di un'attività. Il senso però non ha un carattere soggettivo; è il risultato di un'attività sociale e condivisa degli allievi, che facendo tali attività vengono a condividere il senso della formula cui lavorano con altri allievi di altre classi, con i matematici, con la matematica come prodotto culturale, ecc...

Naturalmente, a seconda del contesto, della consegna, delle conoscenze dell'allievo, capita che per la stessa formula gli allievi accendano sensi diversi, o risultino poveri possessori del suo senso, limitandosi a coglierne solo gli aspetti segnici. Il fenomeno è particolarmente dannoso quando agli allievi si chiede di generare una formula, senza che la consegna contenga già (implicitamente o esplicitamente) il tipo di formula che si vuole fare costruire. Alla sordità degli allievi nel cogliere il senso di formule date corrisponde una povertà estrema nelle loro capacità di costruire formule, che interpretino matematicamente situazioni. Va anche detto che questo secondo tipo di attività è meno presente nelle scuole e comunque richiede una didattica opportuna (vedi oltre i cenni sull'apprendistato cognitivo).

	7	
4		2

Fig. 1

Cercherò di spiegarmi meglio con un esempio (ispirato a lavori di Bell et al. [87], Arcavi [94]).

Problema 1. Consideriamo un quadrato magico 3X3 (cioè un quadrato come in figura la cui somma dei valori sulle righe, colonne e diagonali ha un certo valore costante): assegnati tre valori, ad es. 4, 7, 5 bisogna determinare gli altri, sapendo che la somma costante è 21 (fig.1). Si tratta di un compito molto semplice, che gli allievi di terza media e di prima superiore fanno benissimo da soli, in modo facilmente prevedibile.

Una volta che gli allievi sono famigliari con il modo per trovare i dati mancanti, si può presentare loro il quadrato con i numeri 4, 5, 2 e somma 10 (fig.2).

Per questo esempio le strategie precedenti non funzionano; di solito gli allievi provano e riprovano ma i conti non tornano tutti. Dopo un po', alcuni cominciano a dire che il quadrato è impossibile e ben presto l'affermazione è condivisa da tutti nella classe. A questo punto è naturale chiedersi perché. Si hanno moltissime congetture, anche ingegnose, ma spesso inconcludenti; di solito l'insegnante suggerisce di usare l'algebra per cercare di capire: gli allievi da soli non ci pensano (il fatto che per loro i simboli algebrici non possiedano il loro senso profondo, inibisce la possibilità di utilizzare l'algebra come strumento per descrivere e spiegare una situazione, cioè come strumento di pensiero).

L'insegnante di solito guida la discussione tra gli allievi in modo che si asse-

	5	
4		2

Fig. 2

gnino tre nomi (variabili) per le tre caselle e un ulteriore nome (variabile) per la somma, bloccando quindi sul nascere il discorso di quanti vogliono assegnare più nomi, ad es. 10 nomi (uno per casella e in più la somma).

Ma anche in questo modo, molti allievi non riescono a "vedere" la soluzione nemmeno quando ce l'hanno di fronte. Ad es., lavorando collettivamente si giunge a risolvere le caselle 1, 2, 3, 4 senza troppa fatica; la casella 5 costa di più (fig. 3): nascono scritture diverse (S-2b-c+a lavorando sulla riga, a+b-c lavorando sulla colonna), il che causa discussioni tra gli allievi; di solito qualcuno osserva che usando la seconda formulazione, la somma della seconda riga vale 3b. Ciò desta perplessità nella classe: richiede tempo (e spesso interventi dell'insegnante) agli allievi accorgersi che se si vuole che la somma sia S, allora S deve essere uguale a 3b. La formula è lì scritta ma il suo senso è ben lontano dall'essere afferrato dagli studenti.

Esercizi di questo tipo, con attenzione alla metodologia di conduzione possono fare apprezzare agli allievi la potenza dei simboli: solo con l'uso dei simboli è infatti possibile accettare o refutare la congettura sull'impossibilità del quadrato in modo indubitabile.

Si osservi che il problema dato è semplice ma richiede un numero non indifferente di lettere. Di solito, nella scuola si ha un sacro timore sulla proliferazione

3 **S - b - c**		**2** **S - a - b**
4 **b + c - a**	**b**	**5** **a + b - c** **S-2b-c+a**
a	**1** **S - a -c**	**c**

Fig. 3

delle variabili (alcuni allievi infatti tendono a essere anti-occamisti, moltiplicando sempre il numero delle variabili in modo eccessivo, salvo poi perdere il controllo del senso e del significato di queste e produrre quindi manipolazioni insensate e bizzarre).

La cautela è somma, pesando col bilancino il numero delle variabili usate e l'anno di corso frequentato dagli allievi. Tale cautela però può finire con l'essere controproducente. Infatti, risulta da studi fatti in varie parti del mondo (ricordo il gruppo CIRADE in Canada, cfr. Bednarz N. et al. [93], Radford [94]; M. MacGregor [92] in Australia; C. Laborde [82] in Francia; F. Arzarello [92] in Italia, ecc.) che persino studenti con alle spalle parecchi anni di algebra simbolica preferiscono usare i metodi verbali piuttosto che quelli simbolici. Lo sviluppo di un linguaggio simbolico specializzato può spogliare di significato il linguaggio in cui l'attività algebrica si è precedentemente espressa. L'algebra retorica (cioè senza simboli) e quella sincopata (cioè mescolando linguaggio naturale e simboli) sono abbastanza facili da seguire e da capire, in quanto abbastanza vicine al modo di ragionare aritmetico. Ma il salto al codice simbolico dell'algebra può nascondere i significati dei termini e delle operazioni che agiscono su di essi. Il linguaggio simbolico ha il potere di rimuovere molte delle distinzioni che il linguaggio naturale preserva, espandendo in questo modo la sua applicabilità. Ne risulta una certa debolezza semantica: allo studente può sembrare che questo linguaggio, che si adatta a tutti i contesti, non appartenga in realtà a nessuno. Al contrario, il linguaggio naturale può offrire una base per accompagnare i ragionamenti fin tanto che non sono troppo complicati. Il confine tra i due ad esempio passa, come rilevano ricerche fatte da Filloy et al. [89] nel caso delle equazioni di primo grado, tra quelle del tipo ax+b=c e quelle del tipo ax+b = cx+d: nel primo caso l'algebra può ancora essere by-passata usando il linguaggio naturale (devo trovare un numero che, moltiplicato per a, dia c-b) oppure procedendo per tentativi ed errori; nel secondo caso nessuno dei due metodi funziona più (per questo si parla di *taglio didattico* fra i due casi). Un confine analogo, a un livello più avanzato, come hanno rilevato gli studi di Y. Chevallard [89], passa tra le formule con una sola lettera e quelle con più lettere. Si può affermare che solo con l'interpretazione di lettere e parametri nel senso completo del loro significato, l'algebra raggiunge la sua pienezza (ciò che si verificò storicamente con F. Viéte); la seguente citazione di Lagrange caratterizza questo punto in modo significativo: "*Ciò che distingue l'algebra in modo essenziale dall'aritmetica e dalla geometria consiste in questo che il suo oggetto non consiste nel trovare proprio i valori delle quantità cercate, ma il sistema di operazioni da eseguire sulle quantità date per derivarne le quantità cercate, secondo le condizioni del problema. La tabella di queste operazioni è ciò che in algebra si chiama una formula; e quando una quantità dipende da altre, in modo che sia possibile esprimerla con una formula che contiene queste ultime, si dice allora che è funzione di tali quantità; sicché si può definire l'algebra,* ***l'arte di determinare le incognite attraverso funzioni di quantità note, o che si considerano come tali***" (grassetto mio).

Il problema è che tale senso pieno può essere narcotizzato dal tipo di problemi di cui si richiede ad es. la messa in equazioni. Per es., situazioni didattiche in cui si richieda agli studenti di usare le lettere come parametri sono molto rare a scuola (sia alle medie che alle superiori). Questi esempi fanno intuire come l'algebra scolastica tenda a cortocircuitare l'uso pieno dell'algebra nel senso detto da Lagrange. Le conseguenze possono essere gravi: ne può infatti risultare un'inibizione di quelle forme di pensiero anticipatorio sulle formule, che l'uso delle lettere nelle varie accezioni (incognite, variabili, parametri) può indurre e che è essenziale per lo sviluppo del pensiero algebrico. Ora, non occorre aspettare il terzo anno delle superiori per avviare ciò; l'esempio appena visto è elementare, ma avvia gli studenti a leggere le formule nel loro pieno senso algebrico. Qualche ulteriore esempio in merito per supportare la tesi.

Problema 2: (Chevallard, Arcavi) "Si consideri un rettangolo; che cosa capita alla sua area se un lato diminuisce del 10% e l'altro aumenta del 10%?". Possibili risposte degli studenti: non cambia, dipende se è il lato maggiore o minore ad aumentare/diminuire, ...; calcoli fatti su esempi fanno vedere che c'è sempre una diminuzione; "ma di quanto diminuisce? di poco? di tanto?". La situazione didattica, opportunamente condotta dall'insegnante, da fluida che è all'inizio, si precisa via via, definendo i termini del problema in forma sempre più netta. È solo con il ricorso al linguaggio algebrico che essa può essere interpretata in forma chiara e incontrovertibile: se il rettangolo di partenza ha lati di lunghezza a, b, l'area del secondo rettangolo vale $1.1a \cdot 0.9b = 0.99ab$, cioè l'area diminuisce dell'uno per cento.

Problema 3. (folklore) È noto che l'espressione $y = mx + n$ rappresenta una funzione affine (retta) in forma (quasi) generale. Nessuno ha difficoltà a spiegare il senso di quello che si ottiene sostituendo ad es. i numeri 2, 3 alle lettere m, n: l'espressione risultante $y = 2x + 3$ rappresenta una certa retta fra tutte quelle rappresentate dall'espressione di partenza, precisamente quella di coefficiente angolare 2 che incontra l'asse y nel punto di coordinata 3. Facciamo ora nell'espressione di partenza la sostituzione $x=2$, $y=3$; si ottiene l'espressione $3=m2+n$: che cosa rappresenta? quale il senso delle m ed n in essa?

Problema 4. (Arzarello) L'Italgas deve decidere, in relazione all'importo annuo medio pagato dai vari clienti (supponiamo da un minimo di L 100 000 a un massimo di L 5 000 000), qual è il numero ottimale di bollette da mandare in un anno. Si tenga conto che ogni bolletta ha un costo fisso indipendente dall'importo e che si può supporre che le somme via via riscosse nel corso dell'anno rendano all'azienda un interesse mensile (diciamo dell'uno percento).

I tre problemi mettono tutti in luce, a livelli diversi di difficoltà, la costruzione/comprensione del senso algebrico pieno delle formule usate. La comprensione del senso dei problemi proposti richiede sempre che l'allievo anticipi e accordi via via il senso delle formule che produce (problemi 1, 2, 4) o interpreta (problema 3) col senso del problema che sta risolvendo. Per fare ciò, si richiede un uso dell'algebra vicino all'interpretazione di Lagrange.

Un aspetto cruciale nella risoluzione dei problemi è la messa in formula del problema stesso (processo che chiamiamo di *nominalizzazione*): difficilmente i problemi precedenti possono essere risolti se:

(i) non si ricorre al linguaggio algebrico [sono al di là del taglio didattico di cui si diceva]

(ii) non si attiva il senso delle formule algebriche in modo che si accordi col senso del problema proposto [ciò richiede molto pensiero anticipatorio e una base conoscitiva ampia e ricca di esempi].

Si può dire che almeno il 50% della risoluzione di un problema si gioca nel momento della messa in formula. Vediamo un esempio.

Problema 5. Dimostra che se a un numero di quattro cifre sommi il numero che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre del numero di partenza, si ottiene sempre un multiplo di 11. esempio: $1235 + 5321 = 6556 = 11 \cdot 596$.

Prove fatte sia con studenti dell'ultimo anno del Liceo Scientifico sia con studenti universitari di matematica provano che è cruciale per la risoluzione di questo problema la messa in formula. Gli allievi che scrivono

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

facilmente risolvono il problema in quanto sommando ottengono l'espressione

$$(a+d) \cdot 10^3 + (b+c) \cdot 10^2 + (c+b) \cdot 10 + (d+a)$$

che si prova facilmente essere un multiplo di 11, in quanto raccogliendo si ottiene la formula

$$(a+d) \cdot 1001 + (b+c) \cdot 110$$

visibilmente divisibile per 11.

Una percentuale non indifferente invece mette in formula il problema con l'espressione

$$abcd$$

e ottiene come espressione della somma

$$(a+d)(b+c)(c+b)(d+a).$$

A questo punto, la quasi totalità di chi ha imboccato questa strada invoca il criterio di divisibilità per 11 e conclude erroneamente. Il modo con cui il numero è stato scritto inibisce di considerare le variabili come variabili di numeri e fa interpretare le espressioni (a+d), ecc. come cifre, generando errori o disturbi rispetto al problema dei riporti. Il senso della scrittura posizionale non è ben incorporato nella scrittura "alfabetica" abcd e ciò causa errori.

4. Problemi aperti e suggerimenti didattici. Se l'acquisizione del senso delle espressioni simboliche dell'algebra è cruciale per l'acquisizione di conoscenze algebriche che non siano di tipo puramente meccanico e mnemonico, si pongono alcuni problemi, molto importanti per l'insegnante. Nessuno ha risposte definitive in questo momento per tali questioni; ma il solo avere chiaro che tali questioni esistono è già un passo in avanti verso la loro soluzione.

Un primo problema riguarda i requisiti necessari (e sufficienti) perché gli alunni sviluppino la consapevolezza del senso dei simboli che usano: quali conoscenze sono necessarie per questo?

Un secondo punto concerne il modo con cui tale senso può essere acquisito.

Entrambe le questioni sono cruciali ma non sembrano avere al momento ancora risposte scientificamente soddisfacenti. Ad esempio, non è chiaro quali siano le relazioni tra la consapevolezza del senso di una formula e le capacità manipolatorie di una persona: esse sono in qualche modo correlate, ma sembra che un buon interfacciamento sia frutto di capacità di controllo metacognitivo piuttosto che di conoscenze specifiche. Analogo discorso vale per la pratica e gli esercizi di routine: precedono l'acquisizione del senso dei simboli, oppure sono concorrenti, oppure sono addirittura dannosi (o indifferenti)? Anche qui la risposta non sembra dover riguardare i rapporti diretti tra i due aspetti ma piuttosto in modo sistemico le modalità con cui essi vengono impostati e fatti vivere agli allievi.

Un'ulteriore questione è se la consapevolezza del senso delle formule sia acquisita solo a livello di esperti o se la si possa avere anche da principianti.

Il problema è fondamentale, perché tocca in modo profondo la didattica e i metodi in cui ciascun insegnante crede. Il centro della questione si sposta dal che cosa al come si insegna in algebra. A questo proposito, sembrano contrapporsi due metodi di insegnamento, uno più orientato all'apprendimento di meccanismi, l'altro alla costruzione di concetti. Il problema didattico è in una loro difficile integrabilità, nonché nella loro insufficienza, se considerati singolarmente.

Dedicherò alcune righe al problema, perché mi pare fondamentale per un'impostazione corretta dell'insegnamento dell'algebra.

Le ipotesi di lavoro didattico che vedono l'insegnamento come costruzione di concetti sono rappresentate al loro livello più maturo ed equilibrato dalla teoria delle cosiddette situazioni a-didattiche di Guy Brousseau (cfr. Brousseau [86]). Come è ben noto, l'insegnamento della matematica è da lui analizzato come un sistema complesso in cui interagiscono tre componenti essenziali: il *sapere ufficiale*, quale risulta nei "sacri testi"; l'*allievo* con le sue conoscenze, misconcezioni, errori, ecc., ma anche con il suo essere in quanto soggetto sociale con i suoi problemi; l'*insegnante*, con i suoi modelli del sapere ufficiale, nonché con i suoi (pre)giudizi sugli allievi (sulle loro conoscenze, misconcetti, errori e sulla loro natura di soggetti sociali). In tale modello, l'insegnante è un ingegnere didattico in quanto progetta e prepara *situazioni di apprendimento*, (ad es. situazioni-problema come quella sul quadrato magico) che contestualizzano problemi matematici in forme opportune per gli allievi (a giudizio dell'insegnante). Seguirà una fase di istituzionalizzazione del sapere appena costruito, che porterà gli alunni, con l'intervento dell'insegnante, a disporre di un nuovo pezzo di sapere matematico opportunamente organizzato all'interno delle loro conoscenze e decontestualizzato dalla particolare situazione di apprendimento che è servita loro unicamente come iter alla costruzione di tale sapere.

Un'ipotesi di base sui cui è costruito tale modello è che *si apprende solo ciò che si costruisce dentro di sé*; l'insegnante può condurre per mano l'allievo fino a una "zona di sviluppo prossimale" (la terminologia è di Vygotsky) e può successivamente aiutarlo a sistematizzare le conoscenze, ma è l'allievo in prima persona che deve "fare" per apprendere: è il momento magico (a volte) in cui l'allievo, in zona di sviluppo prossimale, decolla con le sue forze e ristruttura le sue conoscenze risolvendo appunto il problema (nel nostro esempio quando comprende la regola per la costruzione del quadrato magico, espressa dalla formula S=3b; cfr. §3, Probl.1).

A questo punto, se l'allievo sbaglia, seguendo ad esempio una strategia errata, come procedere? Si corrono due rischi, entrambi pericolosi e molto frequenti:

a) l'allievo crede di avere risolto il problema e vive felice con il suo errore (si rinforza in lui l'idea di avere ragione: effetto Pigmalione inverso, frequentissimo in algebra);

b) l'allievo si blocca in quanto non supera la situazione e non ne viene fuori in alcun modo.

In entrambi i casi, le tentazioni di ricorrere ad una pedagogia direttiva ed esplicativa sono forti: nel primo caso si dirà all'allievo "hai sbagliato; dovevi fare così e così", nel secondo si suggerirà la soluzione (o parte di questa). In tutti e due i casi comunque si rinuncia all'ipotesi di fare costruire dall'allievo il suo sapere.

La teoria delle situazioni a-didattiche di Brousseau pare alquanto delicata nel modellizzare i processi di apprendimento nei quali sia coinvolto in modo predominante il linguaggio simbolico della matematica, tipicamente nell'algebra. Infatti, l'analisi dell'apprendimento matematico da un punto di vista cognitivo mette in luce una drammatica contrapposizione tra aspetti sintattici e semantici: da un lato vi sono quegli allievi, a volte anche con buon indice di scolarizzazione, che costruiscono il loro linguaggio matematico come sequenza di "regolarità notazionali che combacino con quelli dei membri acculturati della società" (la terminologia è ripresa da P. Cobb et al. [92], pag. 116), rimanendo pertanto a una *fruizione puramente segnica* dei simboli algebrici che usano; dall'altro quelli che costruiscono "pratiche matematiche simboliche condivise con quelle di una società più ampia" (ibid.) e quindi *afferrano il senso inteso (condiviso)* dei simboli che usano.

La contrapposizione tra i due metodi (costruzione di concetti-apprendimento di meccanismi) di cui si diceva, si riduce in sostanza a questo: se modellizzare l'apprendimento come una costruzione di concetti, cui il linguaggio matematico dà corpo in un secondo momento, oppure se il linguaggio stesso, con la sua funzione simbolica e rappresentativa, sia la chiave di volta dell'apprendimento in matematica e in algebra in particolare (e quindi i concetti siano inestricabilmente mescolati con questo).

La teoria delle situazioni a-didattiche di Brousseau sembra essere più adatta a un'impostazione del primo tipo che non ad una del secondo; d'altra parte, il secondo metodo corre il rischio di produrre un apprendimento che si riduce a puro addestramento meccanico.

Entrambe le impostazioni corrono seri rischi, duali uno dell'altro: la prima spera troppo in un adeguamento automatico del linguaggio simbolico ai concetti, intesi quali chiave di volta dell'apprendimento; la seconda rischia di ridurre l'apprendimento a un fatto puramente segnico, sperando in un'acquisizione per così dire naturale dei concetti connessi. Gli automatismi sono basati su aspetti di socializzazione e istituzionalizzazione del linguaggio come veste delle idee, nel primo caso; mentre nel secondo caso si spera in un adeguamento naturale delle idee ai segni che avverrebbe nel proprio linguaggio privato.

In entrambi i casi si trascura la costruzione del senso dei simboli matematici, cioè del nesso tra segni e concetti, rischiando un approccio squilibrato alla matematica.

Un secondo aspetto del problema dell'apprendimento come apprendimento di linguaggi simbolici in cui sono rappresentati concetti è quello riguardante la convenzionalità di molte regole e rappresentazioni: non è problema didattico di poco rilievo inserire questa problematica in una opportuna teoria dell'apprendimento.

Una posizione interessante a questo proposito è espressa da Cobb (op. cit., pag. 116): "Secondo noi, non è la notazione matematica *per se* che costringe il nostro pensiero. Piuttosto è la nostra acculturazione in attività simboliche di tipo matematico condiviso (consensual). Per tutto quello che sintassi e semantica sono interrelate riflessivamente, il processo di apprendimento di un sistema di notazioni matematiche involve la costruzione di una realtà matematica esperienziale che sia condivisa da quegli altri che si può dire conoscono la matematica. Conseguentemente, quando usiamo le notazioni convenzionali individualmente o mentre le comunichiamo ad altri, noi prendiamo parte alla rigenerazione continua di una realtà matematica condivisa, che da parte sua delimita e costringe i nostri modi individuali di pensare e di rappresentare".

Due punti interessanti per l'insegnamento dell'algebra emergono da queste considerazioni.

Il primo riguarda gli aspetti sociali dell'apprendimento ed è basato sulla distinzione tra sistemi di segni arbitrari e convenzionali: l'algebra è un codice convenzionale ma non arbitrario, in quanto prodotto culturale.

Il secondo è che la comprensione del codice algebrico coinvolge in modo sostanziale aspetti cognitivi, simili a quelli che potremmo chiamare "meccanismi di comprensione delle regole di un gioco".

La comprensione di una regola nell'ambito di un codice convenzionale può avvenire solo a livello di mediazione sociale: afferro una regola in quanto interiorizzo le funzioni rappresentative di un sistema di notazioni socialmente condiviso. È quindi su questo terreno che va impostato l'insegnamento dell'algebra. Un buon metodo per superare il dilemma didattico sopra accennato sembra essere il cosiddetto *apprendistato cognitivo*; tale metodologia (per una bibliografia in merito cfr. Arzarello et al. [93]) coinvolge gli aspetti costruttivi tipici della teoria delle situazioni didattiche alla Brousseau, ma tiene conto anche degli aspetti di supporto da parte dell'insegnante, evitando i rischi maggiori riscontrati col primo metodo. L'apprendistato tiene conto dell'apprendimento inteso anche come imitazione dell'esperto da parte del principiante, nonché del supporto che il primo può dare al secondo esternando le proprie strategie, i processi di pensiero seguiti e le difficoltà, incontrate o evitate, mentre risolve un problema. Il principiante si trova immerso in un clima da bottega d'arte del Rinascimento, in cui si apprende facendo, vedendo fare e discutendo sistematicamente quello che si fa (si è fatto) e gli aspetti cognitivi di come lo si fa sia con esperti sia con altri principianti. Un buon esempio di apprendistato cognitivo è dato dall'apprendimento di linguaggi di programmazione risolvendo problemi, con principianti ed esperti che interagiscono.

Il sistema che ne risulta è completamente diverso dalla tradizionale classe in cui si fa algebra, cioè si risolvono individualmente esercizi e si seguono i modelli dell'insegnante (questo metodo non è certo un apprendistato cognitivo, anche se c'è qualche vaga somiglianza: le riflessioni e le esternazioni cognitive dell'esperto sono sporadiche e rendono quest'ultimo metodo più vicino all'addestramento che non all'apprendimento). Naturalmente i presupposti sono di dare agli allievi esercizi che siano un po' al di là della loro massima capacità (di nuovo l'idea Vygotskyana sulla zona di sviluppo prossimale!) e che essi si sentano stimolati a fare.

A titolo esemplificativo, accennerò ad alcuni aspetti che conseguono sul piano didattico da quest'impostazione.

Il primo riguarda la necessità di scegliere situazioni ricche e stimolanti (il che non significa macchinose); questo non solo per i fini del coinvolgimento degli allievi, ma soprattutto per la necessità di andare al di là del taglio didattico che separa l'algebra dall'aritmetica, nel senso della citazione di Lagrange (cfr. i commenti alla fine del Problema 1 nel §3). A questo proposito, molto utili possono risultare i manipolatori simbolici che, ormai per poche lire girano sui personal. Un tipico esercizio è proporre un grafico e far costruire per approssimazioni successive una formula adatta: la formula diventa oggetto di manipolazioni nuove ed interessanti, generate da un flusso di pensiero opposto a quello proprio delle semplificazioni, in cui i diversi sensi delle formule vengono attivati dagli studenti in dialettica con il grafico che testa via via la bontà dell'ipotesi.

Il secondo è che tali situazioni non coinvolgono quasi mai argomenti nuovi a tutti i costi; ciò che conta è l'attività degli allievi, il modo con cui 'fanno' algebra. Invece di abbandonarli a loro stessi o di pretendere che sia la situazione didattica da sola a interagire con essi, è opportuno che l'insegnante incanali la loro attività verso la costruzione del senso delle formule (si rivedano i commenti al Problema 1). Parafrasando J. Bruner [85], pag. 29, il ruolo dell'esperto in questo è di minimizzare i costi, le possibilità di errore dell'allievo e quindi di strutturare (scaffolding), di ridurre il numero di gradi di libertà necessari per eseguire il compito. Tali attività guidate possono sviluppare discussioni, durante le quali gli studenti possono trovare aspetti impliciti del problema proposto, che rimarrebbero ad essi ignoti se si lanciassero subito in manipolazioni formali fatte individualmente e spesso ciecamente, seguendo stereotipi dettati dalla pura struttura segnica della formula (l'insegnante delle superiori può provare a trattare con questo metodo i problemi 1, 2, 4, 5).

La terza, già in parte toccata, riguarda la discussione collettiva delle diverse vie di soluzione (o di errore) trovate: tale discussione, cui l'insegnante partecipa come conduttore che fa esternare e come esperto che esterna i processi di pensiero che hanno prodotto tali soluzioni ed errori, costituisce un ingrediente fondamentale dell'apprendistato cognitivo. Fa parte di questo metodo anche il gioco di "come sarebbe se?" (un esempio è il problema 3), che è vero e proprio carburante per la testa degli allievi. Buoni esempi in algebra sono quelli, suggeriti da J.P.Drouhard, di chiedere agli studenti di costruire uguaglianze di formule che siano sempre false (cioè non siano soddisfatte per alcun valore delle variabili in gioco): la difficoltà nel trovare espressioni di questo tipo può aprire vie interessanti per la comprensione del senso dei simboli in algebra.

Una discussione più ampia di questi ultimi punti è contenuta in Arzarello et al. [95] (è in corso una traduzione in italiano che comparirà nei Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino).

NOTA TECNICA

Un modello teorico per l'analisi dei processi di pensiero in algebra

0. Introduzione. In questa Nota Tecnica analizzeremo il pensiero algebrico nel suo concreto realizzarsi in classe da un punto di vista (parzialmente) nuovo, cioè dal punto di vista della *semantica intensionale*; tale metodo permette di mettere a fuoco alcune questioni didatticamente rilevanti per l'apprendimento dell'algebra in un modello teorico elegante, che sembra spiegare le principali difficoltà segnalate dalla letteratura. Esso inoltre suggerisce direttamente linee di intervento didattico che appaiono promettenti e che coinvolgono l'insegnamento dell'aritmetica fin dai primi anni della scuola elementare.

Rimandando per la discussione sulla didattica dell'algebra alla terza e quarta parte che precedono questa nota, qui si descriverà il modello teorico con un qualche dettaglio.

La Nota è suddivisa in cinque sezioni principali:

NT.1 Si descrive l'ambiente in cui nasce e vive il pensiero algebrico e si individuano alcuni parametri fondamentali da tenere presenti nell'esame dei processi risolutivi dei problemi algebrici.

NT.2 Si fa una prima analisi di alcuni tipici errori e misconcetti in algebra, particolarmente frequenti tra i principianti, e si delinea il problema dell'apprendimento dell'algebra come problema di interpretazione.

NT.3 Si descrivono gli aspetti semantici e sintattici del pensiero algebrico e si schizzano i punti essenziali della semantica intensionale.

NT.4 Si usa la semantica intensionale per analizzare alcuni protocolli di alunni e per interpretare i tipici misconcetti degli studenti in algebra.

NT.5 Si usa l'analisi effettuata per cercare di realizzare un provvisorio modello di didattica dell'algebra.

1. Le tre dimensioni e mezzo del pensiero algebrico. I processi di pensiero algebrico prendono vita in un ambiente particolare che ne permette lo sviluppo e che sarà qui descritto come equilibrio tra opposte polarità. Ciascuna coppia di polarità individua una dimensione, che risulta un parametro essenziale per la descrizione del pensiero algebrico: si tratta comunque di condizioni necessarie ma non sufficienti, che devono essere ulteriormente precisate da un punto di vista procedurale e dinamico, compito che affronteremo nei paragrafi successivi. Per rendere più chiaro il discorso descriveremo ogni coppia di polarità come un asse cartesiano; ne risulterà un modello a tre dimensioni, con un'ulteriore graduazione in una scala dei "livelli di astrazione".

Asse x: linguaggio naturale – scrittura simbolica.

È una dimensione le cui polarità giocano un ruolo essenziale in tutti i processi di messa in segno del sapere matematico, dall'aritmetica all'algebra (per scrittura simbolica si intende la scrittura del linguaggio simbolico della matematica, tralasciando di considerare gli aspetti simbolici del linguaggio naturale, che pure esistono e sono fondamentali nei processi di apprendimento della lingua). È noto infatti che gli allievi delle elementari hanno un doppio registro nei processi di soluzione dei più semplici problemi aritmetici: vi è l'aritmetica orale coi suoi numeri parlati e in cui il flusso di ragionamento si appoggia sul linguaggio (naturale), sia come linguaggio interno sia come linguaggio esterno, e vi è l'aritmetica scritta, in cui i processi precedenti sono tradotti e il cui linguaggio simbolico possiede già alcune funzioni proprie del linguaggio algebrico (ad es., la funzione ideografica, di sintesi). Ora la traduzione tra i due linguaggi non è sempre uno-uno: ad es., nei problemi additivi e, anche se in minor misura, in quelli moltiplicativi, il linguaggio naturale è molto più ricco e sensibile alle diverse semantiche di quanto lo non sia quello scritto dell'aritmetica. La sintesi cui costringe la messa in formule aritmetiche obbliga spesso gli allievi a cambiare completamente la struttura dei processi propri dell'aritmetica orale (ciò è ampiamente dimostrato dai vari studi sulle gerarchie dei problemi additivi e moltiplicativi; per una discussione da questo punto di vista, si veda Arzarello [89]). Ciò costituisce un forte elemento di somiglianza e quindi continuità tra aritmetica e algebra, di cui occorre tenere conto fin dall'impostazione della didattica dell'aritmetica e dell'ingegneria didattica necessaria per affrontare le opposte polarità a livello di scuola elementare. Anche in algebra il processo di messa in formule di un problema è essenziale (e con caratteristiche tutte sue, come vedremo più avanti) e anche in algebra esso stravolge spesso il flusso di pensiero che accompagna i processi risolutivi orali (ad es. quelli dell'algebra sincopata, cfr. prima parte). Oltre che ad elementi di continuità, vi sono però, e sono essenziali, anche elementi di rottura: la messa in formule in algebra e il pensiero algebrico possono essere in forte dissonanza con i processi risolutivi orali: mentre un'aritmetica orale esiste ed ha senso, un'algebra orale è una contraddizione in termini, in quanto per sua natura l'algebra è scritta.

Asse y: sintassi – semantica.

Strettamente legata alla precedente dimensione è la polarità sintassi-semantica. Il linguaggio naturale, come è noto, permette un ottimo controllo semantico; i processi risolutivi orali (in cui, come già accennato, il linguaggio è coinvolto sia come linguaggio interiore sia come linguaggio esterno) garantiscono questo controllo in ogni momento del processo. Non così quando si passa al linguaggio simbolico, vuoi dell'aritmetica vuoi dell'algebra. Mentre nel primo caso la semantica prevale, per cui la sintassi del linguaggio ordinario gioca un ruolo irrilevante nel flusso di pensiero che governa i processi orali di soluzione, nel secondo caso gli aspetti sintattici del linguaggio simbolico usato (aritmetico, algebrico) diventano essenziali e prevalgono su quelli semantici. Il rapporto tra la sintassi del linguaggio algebrico e i significati coinvolti risulta un punto chiave per spiegare i tratti salienti del pensiero algebrico. Già dall'aritmetica questo è un punto essenziale: la comprensione della sintassi del linguaggio aritmetico è complessa in quanto si chiede di usarla in un linguaggio che incorpora forme di pensiero la cui struttura può essere diversa. In algebra le cose si complicheranno ancora, in quanto la sintassi deve diventare il sostegno attivo di nuove forme di pensiero, ma potrà farlo solo se essa riuscirà a incorporare nelle sue forme i tratti semantici essenziali.

In sostanza i due assi x e y esplicitano due aspetti di un unico fattore, che corrisponde, grosso modo, alle forme orali e a quelle scritte.

Asse z: relazionale – procedurale.

È una polarità ampiamente discussa in letteratura (si vedano ad es., i lavori di Skemp [71], Sfard [91], Arzarello [91b], nonché la discussione nella prima parte). Essa rischia addirittura di diventare fuorviante per la ricerca; la contrapposizione ha senso in quanto permette di cogliere un aspetto tipico del pensiero algebrico, cioè il passaggio brusco dai calcoli, dai tentativi numerici ecc. alla sintesi di tutto ciò in una formula. In generale, va osservato che si tratta di un rapporto delicato che pone problemi didattici complessi. Da un lato, gli aspetti procedurali possono essere di ostacolo per quelli relazionali: ad es., la comprensione del concetto di variabile come contatore e come accumulatore sembra a volte inibire gli aspetti relazionali delle variabili come predicati (cfr. Chiappini [91], Arzarello et al. [92]). Dall'altro, una frequentazione opportuna con gli aspetti tipicamente procedurali sembra necessario (ma non sufficiente) per garantire il salto nel relazionale, cfr. Arzarello [92].

Come accennato, la questione didattica va posta in altro modo: la nostra analisi proverà che sono gli aspetti di negoziazione didattica e il ruolo che si fa giocare in questo senso ai processi e ai prodotti degli allievi a determinare (o meno) un fruttuoso rapporto tra le due polarità per la costruzione del sapere algebrico. Un discorso analogo vale anche per le precedenti polarità.

Esiste infine una scala di livelli di astrazione diversa a cui situare i vari processi.

Il pensiero algebrico è caratterizzato da un controllo equilibrato di tutte le tre dimensioni x, y, z, ad un livello opportuno di astrazione. Altrimenti non si ha vero pensiero algebrico, ma solo surrogati più o meno efficienti. Si noti che le tre dimensioni dipingono solo lo sfondo in cui si svolgono i processi di pensiero algebrico e non pretendono di caratterizzarlo in alcun modo. I paragrafi successivi sono appunto dedicati ad un'analisi di tali processi in modo da riuscire ad animare lo sfondo con i giusti personaggi.

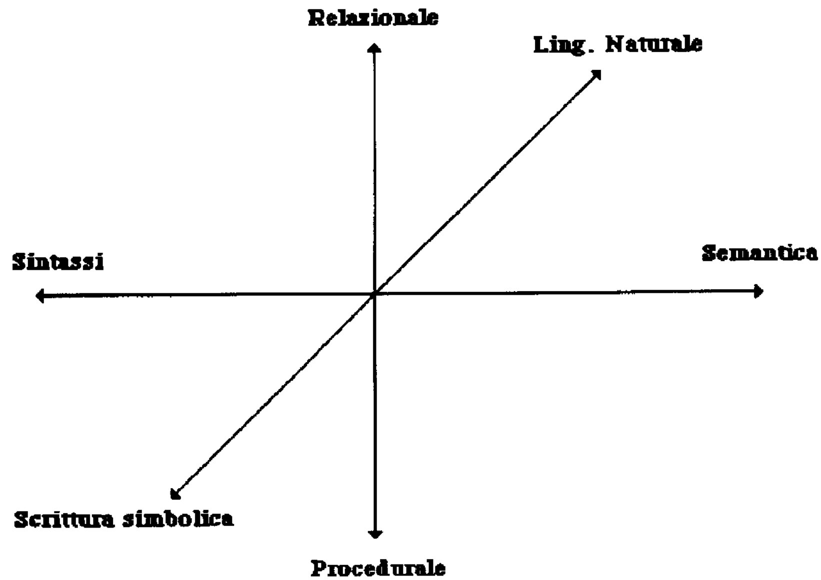

Relazionale
Ling. Naturale
Sintassi
Semantica
Scrittura simbolica
Procedurale

Fig. 4

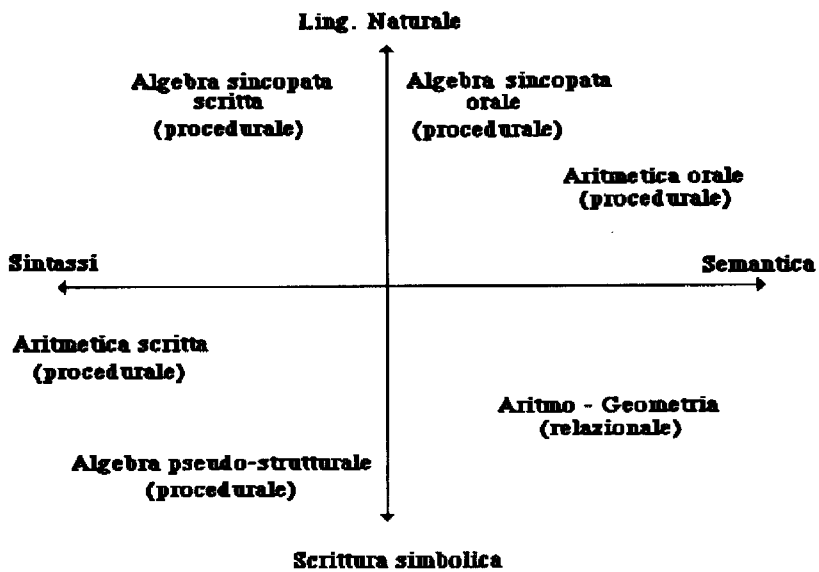

Ling. Naturale
Algebra sincopata scritta (procedurale)
Algebra sincopata orale (procedurale)
Aritmetica orale (procedurale)
Sintassi
Semantica
Aritmetica scritta (procedurale)
Aritmo - Geometria (relazionale)
Algebra pseudo-strutturale (procedurale)
Scrittura simbolica

Fig. 5

2. Problemi di interpretazione. L'analisi dei misconcetti più frequenti negli studenti che apprendono l'algebra prova che gli allievi con difficoltà non controllano e non integrano in forma equilibrata le polarità descritte al paragrafo precedente e inoltre operano ad un livello basso di astrazione. Per es., gli studenti pseudostrutturali si dimostrano "incapaci di immaginare le entità intangibili (funzioni, valori di verità) che è loro richiesto di manipolare, ... e tendono a usare disegni e simboli come sostituti: una formula algebrica, la variabile, le lettere Δ ed R, ognuno di questi segni diventa una cosa in se stessa, che non sta al posto di alcunché" (Sfard [92], p. 2), e quindi tagliano via la polarità semantica. Gli studenti "sincopati" descritti da Harper tendono a eliminare la polarità relazionale, ecc.. Le espressioni simboliche prodotte-usate-interpretate da questi studenti risultano assai raramente strumenti di pensiero, cioè oggetti su cui si appoggia il pensiero e che lo stimolano addirittura, tendono invece a essere usate come oggetti depositari del sapere, cioè oggetti cui si delega in un certo senso il ragionamento, senza però un controllo consapevole sui significati in essi incorporati, anzi incorporandovi di solito aspetti superficiali e puramente formalistici.

L'analisi delle difficoltà incontrate dagli studenti mostra che uno dei principali problemi nell'apprendimento dell'algebra è dato da *questioni di interpretazione*. Basta riflettere sui seguenti fatti. Primo, l'algebra si presenta spesso agli studenti come un linguaggio straniero più o meno noto in cui tradurre il problema e il processo di risoluzione, dopo che il problema è stato risolto in un linguaggio più familiare. Secondo, il cruciale processo di nominalizzazione consiste nell'interpretare il testo del problema in modo da evidenziare il (o i) protagonista(i) della storia, elaborandola già mentalmente in modo da riferirla ad esso (è un tipico processo di collaborazione testuale, vedi Eco [79], che è presente anche in matematica, ad es. quando si legge un testo di problema). Terzo, riprendendo la citazione di Lagrange con linguaggio moderno, essa ricorda che fare algebra significa essenzialmente studiare $\forall\exists$-formule, cioè formule come:$\forall a \forall b \forall c\ \exists x \exists y\ [ax + by = c]$ e non solo come: $\exists x\ [3x + 5= 0]$ (cioè come equazione numerica) oppure come: "$\forall a\ [2a = a + a]$ (cioè come identità). In effetti mentre le formule con un solo tipo di quantificatori sono più semplici (anche se tutt'altro che banali), l'interpretazione delle $\forall\exists$-formule è difficile per la maggior parte degli studenti (un punto interessante per le speculazioni dei logici). Inoltre, la differenza tra variabili e parametri dipende da una quantificazione universale fatta una volta per tutte e quindi valida per tutto il corso dell'argomento (calcolo), oppure una quntificazione universale fatta ad un certo punto, all'interno del processo dimostrativo o di calcolo.

Ma le cose sono messe ancora peggio di quanto si può immaginare: come osserva J.P. Drouhard in [92], e come alcune esperienze didattiche hanno provato (vedi gli ultimi lavori della Sfard), l'usuale semantica della teoria logica dei modelli usata dai matematici professionisti (e che è dovuta a Tarski) è inutile per spiegare le difficoltà incontrate dagli studenti che imparano l'algebra (anche nel caso delle formule con un solo quantificatore). Essa ha senso solo per quelli che hanno già superato le difficoltà cui siamo interessati: infatti interpreta le asserzioni matematiche con il linguaggio della teoria degli insiemi, che a sua volta usa, sia a livello informale che formale, i quantificatori e le lettere allo stesso modo delle asserzioni matematiche che interpreta. La sottigliezza della semantica tarskiana (cioè capire che "la neve è bianca" perché la neve è bianca) è un punto di arrivo (a un livello logico, ancora più astratto del livello, già difficoltoso, cui si pone l'algebra) e non uno strumento per esplicitare le difficoltà che si incontrano nell'apprendimento dell'algebra.

Nel paragrafo seguente svilupperemo una semantica, che ci sembra più adatta per i nostri scopi.

3. Semantiche intensionali, sceneggiature e funzioni trasformative del linguaggio algebrico. In questa sezione affronteremo i due seguenti aspetti del problema:

(i) un'analisi teorica precisa del significato delle espressioni simboliche in algebra; tale analisi è fortemente finalizzata alla descrizione dei processi di apprendimento/insegnamento dell'algebra e quindi dovrà dare

(ii) una descrizione convincente dei processi di costruzione del sapere algebrico, dei misconcetti e degli errori tipici manifestati dagli allievi (un elenco dei quali è stato discusso nella prima parte).

In questo quadro seguendo Laborde [82] intenderemo per *espressione simbolica*:

i) termini: sono costanti e/o variabili o loro combinazioni per mezzo dei simboli di operazioni che sono utilizzati per designare gli elementi extralinguistici (matematici e non matematici) che sono coinvolti nell'attività matematica (5, 3+2, a, a+b,...)

ii) le proposizioni o le funzioni proposizionali costruite mediante l'uso dei termini e dei predicati ($5+3=8$ è una proposizione; $x-2>0$ è una funzione proposizionale).

Il punto di partenza delle semantiche intensionali è l'analisi fatta dai logici delle semantiche per le logiche modali (si vedano i lavori fondamentali di Kripke [63a,b,c]), ma per la nostra discussione faremo uso anche di alcuni concetti presi dalla semiotica e dalla linguistica e anche dalla filosofia: per questo faremo riferimento alle opere di Eco [75, 79, 84], Frege [92a,b, 77], Jakobson [56], Dummett [73] e Cauty [84].

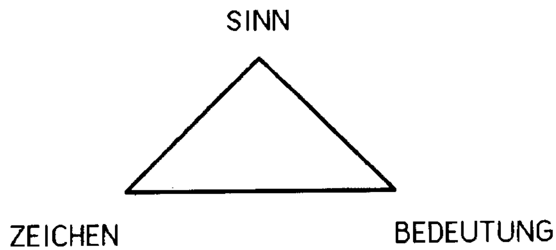


Fig. 6

Come osservato da Drouhard, le idee di Frege sulla semantica sembrano adatte per analizzare il modo in cui le espressioni simboliche vengono utilizzate in algebra, alla luce degli obiettivi didattici discussi all'inizio del paragrafo.

In particolare, sarà utile distinguere tra senso (Sinn) e denotazione (Bedeutung) di un'espressione (Zeichen): la denotazione di un'espressione è l'oggetto (Gegenstand) cui l'espressione si riferisce, mentre il Sinn è il modo con cui l'oggetto ci è dato (tutti conoscono l'esempio di Frege sui due diversi sensi dell'espressione /Venere/, vale a dire come /Espero/, cioè la stella della sera e come /Fosforo/, vale a dire come stella del mattino: le due espressioni hanno sensi diversi ma denotano lo stesso oggetto. (Le traduzioni per Bedeutung sono diverse e tutte insoddisfacenti: significato, riferimento, significazione, ecc.)

3.1. Senso e denotazione in algebra. Anche in matematica abbiamo espressioni i cui sensi sono diversi ma che hanno la stessa denotazione. Per es., le espressioni $4x + 2$ e $2(2x + 1)$ esprimono una regola diversa (senso) ma denotano la stessa funzione, cioè lo stesso insieme di coppie ordinate; analogamente le due equazioni (da risovere in **R**) $(x+5)^2 = x$ e $x^2+x+1 = 0$ denotano lo stesso oggetto (l'insieme vuoto) ma hanno un senso diverso. Sia il linguaggio matematico che quello naturale sono ricchi di espressioni che hanno sensi diversi e uguale denotazione. La denotazione riguarda gli aspetti estensionali di un'espressione, mentre il senso riguarda i suoi aspetti intensionali: le due coppie di espressioni hanno a due a due la stessa estensione (risp. la funzione f: $x \rightarrow 4x+2$ come insieme di coppie ordinate e l'insieme vuoto), ma hanno intensioni diverse (vale a dire le due diverse regole di calcolo per la funzione f e i due modi diversi di descrivere l'insieme vuoto, a dire "non c'è alcun numero reale uguale al quadrato del suo valore aumentato di cinque" e "non c'è alcuna soluzione reale per un'equazione di secondo grado con discriminante negativo").

La *denotazione* di un'espressione simbolica in algebra, è l'insieme numerico, eventualmente vuoto, rappresentato dall'espressione. Tale insieme risulta determinato oltre che dall'espressione simbolica anche dall'universo numerico in cui l'espressione viene considerata. Ad esempio le due equazioni di secondo grado di cui sopra, che abbiamo visto denotare l'insieme vuoto in R, se considerate in C denotano rispettivamente gli insiemi $\{1/2(-9+i\sqrt{19}),\ 1/2(-9-i\sqrt{19})\}$ $\{1/2(-1+i\sqrt{3}),\ 1/2(-1-i\sqrt{3})\}$.

Osserviamo inoltre che le espressioni incorporano in modo sintetico, nella propria forma segnica, un senso, che chiameremo *senso algebrico*, che è l'esplicitazione del modo in cui il denotato può essere ottenuto attraverso l'applicazione di regole computazionali. Ad esempio data l'espressione /n(n+1)/ nell'ambito dei numeri naturali esprime una regola di calcolo, che esplicita operativamente il modo in cui può essere ottenuto l'insieme denotato {0, 2, 6, 12, 20,....}. Le trasformazioni algebriche possono produrre espressioni diverse che hanno un senso algebrico diverso. Per esempio la trasformazione di /n(n+1)/ in /n^2+n/ non cambia ovviamente la denotazione ma solo il senso algebrico, cioè la regola di calcolo per ottenere l'insieme denotato. Si osserva che non sempre se due espressioni diverse hanno la stessa denotazione sono riducibili l'una all'altra con trasformazioni algebriche (cfr. l'uso che Sfard [92] ha fatto di questa proprietà nei suoi test sulle espressioni "non trasformabili" con uguale denotazione e con senso diverso). Inoltre, come è noto, certe trasformazioni algebriche possono essere effettuate solo sotto certe condizioni che possono comportare dei vincoli all'universo numerico in cui l'espressione trasformata deve essere considerata.

Un'espressione simbolica può essere impiegata in domini di conoscenza diversi per risolvere problemi, matematizzare situazioni, descrivere fenomeni ecc. Tali domini possono essere di tipo matematico (aritmetico, geometrico, analitico....) o extramatematico (fisico, biologico, economico...). In tali domini l'espressione, oltre la denotazione e il senso algebrico che le sono propri, può assumere sensi diversi che dipendono dalla natura del dominio in cui viene impiegata. Ad esempio la formula /n(n+1)/ in un contesto di geometria elementare piana, può rappresentare un modo di esprimere l'area di un rettangolo di lati /n/ e /n+1/, nell'ambito di una teoria elementare dei numeri essa ha il senso di 'prodotto di due numeri consecutivi'.

All'interno dei vari domini di conoscenza i simboli algebrici possono essere utilizzati per dare nomi agli elementi extralinguistici (matematici e non matematici) che entrano in gioco nella soluzione di un problema, al fine di costruire una espressione simbolica che attraverso opportune manipolazioni sintattiche e/o interpretazioni possa dare l'evidenza della soluzione.

Questo processo di nominalizzazione porta alla costruzione di espressioni che, oltre al senso algebrico precedentemente descritto, assumono altri sensi che sono dipendenti dagli aspetti culturali, socialmente condivisi, del dominio di conoscenza in cui l'espressione viene impiegata. Chiameremo senso contestualizzato il senso che un'espressione assume all'interno di un certo dominio di conoscenza.

Per esempio l'espressione $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2$ nel dominio della teoria dell'informazione può essere utilizzata per esprimere l'energia totale di un segnale, note le ampiezze $x_1, x_2, ..., x_n$ di campioni successivi e opportunamente scelti di un segnale a banda limitata. Se la stessa espressione viene considerata nel dominio geometrico, in uno spazio ad n dimensioni $x_1, x_2, ..., x_n$ possono essere utilizzate per indicare le coordinate di un punto in tale spazio e l'espressione E rappresenta il quadrato della distanza del punto dall'origine. A tale riguardo è interessante notare che lo stabilire una connessione tra questi due sensi ha permesso a Shannon di dimostrare un teorema fondamentale della teoria dell'informazione (cfr. Pierce [1961])

Inoltre, data una espressione simbolica all'interno di un certo dominio di conoscenza, notiamo che le trasformazioni algebriche possono permettere di mettere in evidenza altri sensi sotto cui guardare le relazioni tra gli elementi della situazione.

Un esempio suggerito da Guidoni e illustrato da Boero[92b] può essere illuminante al riguardo.

La seguente espressione simbolica:

(1) $$T_f = (m_1 T_1 + m_2 T_2) / (m_1 + m_2)$$

se interpretata all'interno del dominio di conoscenza della termodinamica permette di mettere in evidenza il modo di calcolare la temperatura di equilibrio T_f di due masse d'acqua, m_1 e m_2, di temperatura rispettivamente T_1 eT_2.

Osserviamo che una semplice trasformazione algebrica permette di ottenere la seguente espressione simbolica:

(2) $$T_f (m_1 + m_2) = m_1 T_1 + m_2 T_2$$

a cui può essere attribuito il senso di conservazione della quantità di calore. Alcune semplici trasformazioni conducono alla seguente espressione:

(3) $$(T_f - T_1) / (T_2 - T_f) = m_2 / m_1$$

che mette in evidenza l'esistenza di una proporzionalità inversa tra le due masse d'acqua e le variazioni assolute di temperatura.

Notiamo che l'attualizzazione dei tre sensi connessi alle trasformazioni algebriche compiute è resa possibile dal riconoscimento di specifiche proprietà nella forma delle espressioni simboliche. In questo quadro il *senso* *contestualizzato* di un'espressione simbolica è il risultato di una corrispondenza che si viene a stabilire tra gli aspetti culturali del dominio di conoscenza in cui l'espressione viene impiegata e la forma segnica dell'espressione in cui risultano inglobati i(l) suo(i) senso(i) algebrico(i) e la sua denotazione. A volte attraverso tale corrispondenza si potranno mettere in evidenza le relazioni quantitative che si stabiliscono tra elementi della situazione, altre volte si potra` mettere in evidenza il modo attraverso il quale si può ottenere una certa grandezza, note le altre, altre volte ancora si potrà esplicitare un (nuovo) concetto o una (nuova) idea all'interno del dominio di conoscenza in oggetto.

Osserviamo inoltre che anche il senso contestualizzato di una espressione, oltre al senso algebrico, può comportare dei vincoli all'universo numerico in cui l'espressione viene considerata. Mentre i vincoli di tipo algebrico dipendono dall'esplicitazione delle condizioni di calcolo sotto le quali una espressione è valida, quelli posti dal contesto dipendono dalle conoscenze all'interno del dominio e dagli scopi soggiacenti alla soluzione. Nell'esempio precedente, a seconda che si scelga la scala Celsius o la scala Kelvin, dovranno essere posti vincoli diversi all'universo numerico in cui risulta determinato l'insieme delle quintuple rappresentato dall'espressione (2). Ovviamento la scelta dipende dagli scopi del risolutore. Nell'espressione (3) invece il senso algebrico conduce anche a porre vincoli di tipo algebrico.

Osserviamo infine che il senso algebrico e il senso contestualizzato di un'espressione simbolica hanno una dimensione sociale in quanto possono essere condivisi dai membri di una comunità e coincidono con il modo in cui tali membri *interpretano* tale espressione nel dominio e nelle circostanze di enunciazione in cui essa viene impiegata. Da ciò consegue che sia il senso algebrico che quello contestualizzato hanno un carattere oggettivo in quanto risultano inglobati nel codice e nella cultura socialmente condivisi da una comunità.

Non c'è quindi una corrispondenza uno a uno tra senso e denotazione. Come evidenziato da molte ricerche (vedi Drouhard [92], Kieran [89]), gli aspetti intensionali sono molto importanti in quanto può essere molto difficile per gli studenti afferrare l'invarianza della denotazione rispetto ai cambiamenti di senso: c'è una sorta di rigidità che li fa operare come se ci fosse una corrispondenza uno-uno tra senso e denotazione, che di fatto li porta alla loro identificazione. Questi studenti rimangono con una denotazione banale, cioè un'espressione simbolica che denota se stessa: la loro algebra è puramente sintattica e per loro i processi secondari, dei quali parla la Sfard (cfr. prima parte), sono pure regole sintattiche e niente di più. Il loro significato vero, cioè il triangolo di Frege (fig. 3) è collassato nel segmento segno-senso. Questo ostacolo alla semantica dell'algebra affonda le sue radici nella semantica dell'aritmetica, molto più semplice, che rende difficoltoso interpretare le espressioni algebriche nel modo giusto:

in aritmetica l'invarianza della denotazione è pressoché automatica, in quanto essa si verifica rispetto ad espressioni numeriche la cui denotazione è un numero ben preciso, che può essere concretamente calcolato ogni volta (in algebra, non solo ci si scontra con l'ostacolo del termine in sospeso, discusso nella prima parte, ma occorre anche cogliere l'invarianza della denotazione di tali termini sospesi in quanto funzioni, impresa davvero ardua!).

Però, anche la semantica alla Frege risulta insoddisfacente per spiegare la dinamica di processi che risultano coinvolti nell'uso del linguaggio simbolico dell'algebra. Senso e Denotazione sono gli ingredienti giusti cui guardare, ma essi sono utili solo per darci alcune istantanee delle difficoltà algebriche, non per ricostruire l'intero film.

Per questo, abbiamo trovato molto utili alcuni concetti propri della linguistica tradizionale (si chiamava retorica) ed altri della semiotica e della logica modale.

Il modello illustrato sopra descrive le difficoltà algebriche come deficienze nel modo in cui gli allievi padroneggiano l'invarianza della denotazione rispetto al senso. Per es., gli studenti pseudostrutturali analizzati dalla Sfard non si rendono conto, nel caso delle equazioni, "che il concetto di insieme verità – cioè l'insieme dei numeri che non devono cambiare rispetto alle operazioni ammesse – ... è proprio il concetto che dovrebbe chiarire come mai alcune manipolazioni sono permesse" (Sfard [92], p. 2) e altre no; siccome essi non afferrano l'invarianza, diventano "formalisti", nella terminologia della Sfard, cioè rivelano una "fondamentale incapacità di collegare le leggi dell'algebra con quelle dell'aritmetica" e quindi "le manipolazioni formali... [rimangono] come unica sorgente di significato" (ibid., p. 8).

3.2. Studio di un caso. Cercheremo di illustrare l'importanza ai fini dell'apprendimento delle relazioni che si stabiliscono tra senso e denotazione attraverso un caso di studio di una studentessa del terzo anno di matematica (Anna) alle prese con una attività di problem solving algebrico.

Per rendere chiara la nostra analisi ci riferiamo ad un protocollo, ma le nostre definizioni ed osservazioni hanno un carattere generale. Il protocollo è scelto perché è un caso emblematico che assomma quasi tutti gli aspetti, secondo i quali si scompongono i processi di pensiero in algebra, in accordo alla nostra analisi.

Il protocollo di Anna è tipico di uno studente 'medio' (quindi anche di un futuro insegnante medio!)[(1)].

[(1)] Come osservazione in margine, per chi insegna matematica: ammesso che tali prove abbiano un minimo di significato, è evidente che, al di fuori delle occasioni ufficiali di esame, in cui

PROBLEMA.
Dimostrare che il numero $(p-1)(q^2-1)/8$ è pari, se p e q sono primi dispari.

EPISODIO 1. Anna sviluppa la formula scrivendo le parole *pari dispari* sul foglio vicino alle formule:

$(p-1)(q^2-1)/8 = (p-1)(q+1)(q-1)/8$

Anna indica via via le varie parti della formula e dice:
«pari, pari, pari...hmm...il numero che rimane non è pari...».

EPISODIO 2. Anna sviluppa la formula proprio sotto le parole pari, dispari:

$(p-1)(q^2-1)/8 = (pq^2-q^2-p+1)/8$

fa qualche calcolo orale del tipo *«dispari per dispari fa dispari»*, poi dice: *«... hmm...non funziona!»*.

EPISODIO 3. Come il precedente, ma con i calcoli del tipo *«dispari per dispari fa dispari»* riferiti ai fattori $(p-1)$, (q^2-1); poi Anna dice: *«Ci deve essere qualche formula per i numeri primi che bisogna usare!»*.

gli studenti danno prove ufficiali più o meno brillanti del loro sapere matematico, e del cui livello i professori hanno un'idea, in condizioni di normalità, vale a dire senza preparazione specifica, questo è il modo in cui ragiona uno studente medio di matematica. Come diceva Klein cent'anni fa, si ha l'impressione che essi mettano tra parentesi quasi tutto quello che hanno appreso (?!) all'Università e riprendano i vecchi schemi di ragionamento delle medie, come pure le vecchie rigidità, misconcezioni, errori. In questo senso, le prestazioni date su semplici problemi che non coinvolgono specifiche conoscenze acquisite all'Università, non sono molto lontane da quelle degli studenti della scuola media, inferiore e superiore.

EPISODIO 4. Anna cancella con lunghi segni le formule dei precedenti episodi e inizia col verificare la formula con alcuni primi: raccoglie i dati in una tabella:

p	q
3	5
5	7
3	7

$$\frac{(3-1)(25-1)}{8} = \frac{2 * \cancel{24}^{\,3}}{\cancel{8}}$$

$$\frac{(5-1)(49-1)}{8} = \frac{4 * \cancel{48}^{\,6}}{\cancel{8}}$$

$$\frac{(3-1)(49-1)}{8} = \frac{2 * \cancel{48}^{\,6}}{\cancel{8}}$$

Anna commenta: «*Perciò è già q due meno uno che è multiplo di otto!*».
[tra gli episodi 4 e 5 non c'è soluzione di continuità nel tempo]

EPISODIO 5. Anna cambia foglio di carta e scrive la seguente formula:

$$\frac{(p-1)(q^2-1)}{8}$$

multiplo di 2 multiplo di 8

Poi Anna scrive la formula:

$(2h + 1 - 1)[(2k+1)^2-1]/8 = 2h(4k^2+4k+1-1)/8 = 2h\ 4k(k+1)/8$

[la linea di frazione è solo sotto 4k(k+1) e il numero 8 è sotto di essa]

e dice: «*... se k è pari, quattro k è multiplo di 8* [Anna indica il numero 8 della formula], *così rimane un multiplo di 2* [Anna indica il numero 2 della formula], *e siamo a posto. Se k è dispari...*
[Anna semplifica 8 con 4 nel solito modo, scrivendo 2 vicino a 8; poi semplifica il 2 col 2 che è coefficiente di h nella formula]
Se k è dispari, non va....NO! se k è dispari, k più uno [Anna indica il k+1 della formula *è pari e siamo a posto!*».

EPISODIO 6. Anna guarda di nuovo il testo del problema e dice: «Ma i primi non c'entrano niente! Bastano i dispari!».

Se leggiamo attentamente il protocollo di Anna, possiamo osservare che il momento risolutivo consiste nell'improvviso cambiamento di strategia dall'episodio 4 all'episodio 5. Ciò è contrassegnato dal cambiamento di frame dove la studentessa sviluppa la propria attività interpretativa[(2)].

Infatti, Anna inizia il processo risolutivo attivando il frame "*numeri pari e dispari*" con un copione preciso (episodi 1, 2, 3), quindi passa al frame più vago "*numeri primi*" seguendo copioni più incerti (episodi 3, 4) e infine arriva al frame "*multipli*" usando un copione preciso (episodi 4, 5). La prima fase è caratterizzata da trasformazioni sintattiche stereotipe guidate dal frame "numeri pari e dispari". Come risulta chiaro dall'involuzione di questa fase, il controllo semantico è molto debole.Il frame "pari-dispari" è usato solo per testare la formula passo passo, ma essa continua ad essere manipolata secondo stereotipi standard e quindi non è utilizzata come uno strumento di pensiero. L'idea che si debba usare qualche formula magica culmina con la fine dell'episodio 3, che segna un cambiamento di frame (numeri primi) e un profondo cambiamento di metodo: ora il ragionamento diviene aritmetico. Qui la semantica è forte, il frame assume forti connotazioni aritmetiche, è abitato da espressioni numeriche che diventano strumento di pensiero e a lungo andare attivano forme di ragionamento ipotetico che permette nuove interpretazioni in un un nuovo preciso frame (multipli), parzialmente sovrapposto al primo. Ora (episodio 5) Anna può leggere la vecchia formula con un occhio nuovo: essa viene scritta in modo da incorporare il vecchio frame "pari-dispari" e inoltre è manipolata in conformità a un pensiero anticipatorio legato al nuovo frame. Non è più il modo in cui la formula è scritta a suggerire manipolazioni standard per vedere "quel che capita", ma la formula viene scritta e trasformata con il preciso obiettivo di provare una congettura. In altre parole, nel nuovo frame, la relazione Sinn-Beduetung

[(2)] Il termine frame è preso dagli studiosi di AI (cfr. Minsky [75]); un frame è una struttura di dati in grado di rappresentare una situazione stereotipa, ad es. andare al supermercato o a una festa di compleanno. Ogni frame implica un certo numero di informazioni. Alcune riguardano ciò che ci si aspetta debba succedere; altre invece riguardano il da farsi, nel caso che tali attese non si realizzino. Un frame è una sorta di storia condensata, che ha i suoi copioni (scripts) e in cui ci si aspetta che il soggetto faccia qualcosa. I frames sono attivati quali testi virtuali mentre si interpreta un testo, per esempio di un problema, in conformità al contesto e alle circostanze (collaborazione testuale).

della formula appare come uno strumento di pensiero, ovvero la sua duplice natura è usata dialetticamente per testare un'ipotesi: gli aspetti intensionali sono guidati e costruiti da quelli estensionali, e viceversa (episodio 5, prima parte). Questo è un primo aspetto di quello che chiamiamo *formule come strumenti di pensiero*, ovvero quando le manipolazioni sono fatte in profonda connessione con gli aspetti denotativi.

Ma vi è un secondo modo in cui le formule possono essere usate come strumenti di pensiero.

La seconda parte dell'episodio mostra una certa rigidità degli aspetti sintattici: la formula incorpora il fatto che /4k(k+1)/ è un multiplo di 8 in modo trasparente solo quando k è pari. Anna incontra qualche difficoltà nel caso che k sia dispari; gli aspetti di forma la forzano a semplificare in una certa maniera e per un po' Anna non accorda la denotazione congetturata per la formula /k(k+1)/ (cioé l'insieme dei pari) con un suo senso algebrico corretto. Per realizzare tale accordo non è necessario manipolare la formula ma basta attivare una nuova interpretazione e cogliere che /k+1/ permette di ottenere un pari se k denota l'insieme dei numeri dispari. È lo slittamento del senso algebrico di /k+1/, a seconda della denotazione di k, a rendere possibile ciò. Rispetto al primo modo con cui abbiamo visto le formule come strumenti di pensiero (trasformazioni dell'espressione formale per esplicitarne la denotazione), ora l'espressione formale non cambia; è il senso a cambiare, in quanto occorre guardare la sua denotazione in un nuovo modo, slittando dal frame *multipli* a quello *pari-dispari.*

Si possono fissare le precedenti osservazioni nelle proposizioni seguenti che riguardano i modi di pensare con una formula:

(i) il primo modo è di trasformare la formula per ottenere un'espressione che presenti un senso adeguato per il compito da risolvere, avendo chiaro o mettendo eventualmente a fuoco la corretta estensione da associare alla formula;

(ii) il secondo è di scoprire una nuova intensione, senza fare trasformazioni formali ma interpretando l'espressione in nuovo frame, avendo chiaro o mettendo eventualmente a fuoco la corretta estensione da associare alla formula.

In entrambi i casi i cambiamenti sono resi attivi in quanto sia l'intensione che l'estensione di una formula sono immersi in uno o più frames.

Il secondo aspetto è più evidente nelle soluzioni date da un altro studente dell'indirizzo didattico al seguente problema:

"*Verifica se tra tutti i rettangoli di data area ce n'è uno, il cui perimetro è minimo. Giustifica le tue affermazioni*".

Un tipico studente 'medio', Roberto, ha risolto il problema come segue: dapprima ha scritto la formula S=bh; poi ha controllato 'che cosa capita' con alcuni casi numerici; dopodiche, ha scritto la formula S=xy, ha espresso il semiperimetro come x+S/x ed ha poi usato gli strumenti standard del calcolo per trovare il minimo. Osseviamo che gli studenti di livello alto in genere scrivono indifferentemente una formula come S=bh oppure S=xy, ma passano subito ad usare le derivate in modo standard. Quelli di livello basso si perdono in calcoli numerici per esempi specifici; al più provano l'asserto per valori precisi di S. È chiaro che la riscrittura della formula fatta da Roberto segna un cambiamento di frame, cioè dal frame *formula per l'area* al frame *formula per le funzioni*. Il senso cambia in quanto Roberto cambia il dominio di conoscenza in cui l'espressione viene impiegata.

Un ulteriore commento sembra importante a questo punto. Quando non prevalgono aspetti puramente sintattici (come negli studenti pseudoformalisti) né puramente sincopati, gli studenti 'medi' (e anche quelli di livello alto) nei loro ragionamenti algebrici usano un doppio registro, che corrisponde alla polarità Linguaggio Naturale-Scrittura Simbolica (asse x di fig.1). L'integrazione non è sempre perfetta e talvolta è una delle due polarità a prevalere; per es., i primi tre episodi del protocollo di Anna mostrano che il frame *pari-dispari* non è stato incorporato nella scrittura simbolica: è solo nella terza fase che Anna giunge a un migliore bilanciamento delle due polarità, dopo che ha cambiato frame. In ogni caso, nell'ultima fase (frame *multipli*), l'essere multiplo di 8 viene incorporato con difficoltà e solo parzialmente nel linguaggio simbolico. Invece gli studenti 'alti' sembrano usare la polarità Linguaggio Naturale solo come sottofondo, in quanto saltano gran parte dei frames usati dagli studenti 'bassi' e 'medi' e vanno direttamente all'ultimo. Però nelle interviste fatte loro subito dopo di avere risolto il problema, essi esplicitano spontaneamente gran parte dei frames saltati con dovizia di dettagli; ciò sembra confermare che anche nel loro caso sembrano esserci più frames, ma essi non vengono esplicitamente sviluppati (si ricordi la definizione di frame come testo virtuale).

La presenza di frames nei processi di soluzione può dare evidenza al fatto che gli studenti usano una semantica piena (vale a dire con senso e denotazione) e generalmente è evidenziata da spie linguistiche: per es., Anna scrive esplicitamente e sottolinea nelle sue spiegazioni i tre successivi frames, dove sviluppa i suoi ragionamenti algebrici; Roberto rinomina le variabili, quando passa da un frame all'altro.

3.3 Nominalizzazione, connotazione e designatori rigidi. Abbiamo visto come i processi di costruzione-interpretazione delle lettere (variabili-parametri) siano cruciali in algebra. In particolare notiamo che nel processo di nominalizzazione intervengono sia aspetti di *predicazione* (cioè attribuire ad un oggetto una o più proprietà atte a classificarlo e a distinguerlo da altri oggetti) che quelli *ideografici*, propri del linguaggio algebrico.

La scelta dei nomi per indicare gli oggetti in gioco si lega strettamente al controllo delle variabili che vengono introdotte per caratterizzare le proprietà che si vogliono magnificare di tali oggetti in relazione al contesto di enunciazione del problema. Questo richiede la capacità di disambiguare, alla luce del codice algebrico, le relazioni tra gli oggetti in gioco nella soluzione del problema. La difficoltà didattica sta nel fatto che il pensiero non può operare con il codice algebrico appoggiandosi sulla semantica del linguaggio naturale per esplicitare le proprietà che si vogliono magnificare. Quindi l'allievo, pur in grado di esprimere con il linguaggio naturale le relazioni tra gli elementi in gioco nella risoluzione del problema (come fa nell'algebra sincopata) può non essere in grado di esprimere tali relazioni attraverso un uso appropriato del codice algebrico.

Questo ruolo tipico dell'algebra, che estende ampiamente i metodi aritmetici, è stato bene colto già da Viète, che ha messo in luce il problema della predicazione come punto chiave per potere applicare i metodi analitici della *logistica speciosa* (cioè sostanzialmente quelli propri delle equazioni algebriche, radicalmente nuovi rispetto a quelli tipici dell'aritmetica, in cui si trattano come note le grandezze incognite, per giungere alla soluzione): "*Logistica numerosa est quae per numeros, Speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa*" (cfr. Freguglia [91], p. 208; [88]; [89]).

Il processo di nominalizzazione dei concetti non solo ha un notevole rilievo storico-epistemologico per l'algebra, ma si presenta importante anche per le teorie dell'apprendimento: esso è stato discusso da alcuni studiosi sovietici, per quanto ne sappiamo, in contesti tipicamente linguistici (ad es. nell'activity theory) ma è fondamentale anche per l'apprendimento dei linguaggi simbolici della matematica. Purtroppo, non siamo a conoscenza di studi su questo problema per quanto riguarda il pensiero algebrico, eccetto i lavori di Chevallard.

L'analisi che abbiamo effettuato ci porta a ritenere che il processo di nominalizzazione si carichi di aspetti *connotativi* quando il soggetto, in relazione allo scopo del problema, ritenga più proficuo evidenziare per mezzo di nominalizzazione appropriate specifiche relazioni piuttosto che altre, in quanto a suo giudizio più adeguate alle circostanze di enunciazione e risoluzione del problema.

In questo quadro la connotazione risulta essere una importante componente degli aspetti intensionali di una espressione simbolica. Essa appare strettamente connessa con gli aspetti anticipatori ed euristici che legano il processo di nominalizzazione allo scopo del problema.

La connotazione interviene nella scelta della nominalizzazione più appropriata quale punto di partenza di un flusso di pensiero orientato verso un obiettivo. Una buona capacità connotativa caratterizza i buoni risolutori algebrici, coloro che riescono ad intravedere sin dall'inizio un possibile percorso, incorporandolo implicitamente nelle prime attività di nominalizzazione.

D'altra parte il processo di nominalizzazione può risultare impoverito e spesso bloccato quando il soggetto costruisce e interpreta i termini in modo rigido cioè senza capire la relazione che si stabilisce tra senso e denotazione all'interno del nome. Di conseguenza non vengono colte le possibilità del codice algebrico di incorporare proprietà diverse all'interno dei nomi. Il nome diventa un *designatore rigido*, fonte di ostacolo per il ragionamento algebrico, in quanto inibitore della flessibilità necessaria al sostegno delle due funzioni, algoritmica e simbolica, durante il processo risolutivo.

3.4 Funzione simbolica e algoritmica del linguaggio algebrico. Da quanto abbiamo detto nei precedenti paragrafi risulta che per interpretare opportunamente i processi algebrici degli studenti e per esplicitare che cosa significa pensare algebricamente, è necessario integrare la semantica di Frege in un contesto più dinamico, dove si dia conto dei seguenti aspetti del pensiero algebrico:

(i) l'uso dei frames;

(ii) le relazioni dinamiche tra sensi e denotazione, resa attiva nei vari domini di conoscenza dall'attivazione di frames;

(iii) il passaggio da un frame ad un altro e da un dominio di conoscenza ad un altro.

La dinamicità del linguaggio algebrico è garantita da due funzioni principali: la funzione simbolica e quella algoritmica. La *funzione simbolica* esprime tipicamente una creatività semantica; richiede di selezionare in un contesto tra diverse alternative; è governata dalle analogie e dalle somiglianze. Essa è attiva quando si cambia il frame o addirittura il dominio di conoscenza all'interno dei quali si rendono attivi i processi interpretativi, in breve, quando l'espressione non cambia ma il suo senso muta. Nell'esempio di Anna, all'episodio 5 la funzione simbolica è attiva quando la studentessa che interpreta in un modo nuovo la formula (passando dal frame "pari-dispari" al frame "multipli"); analogamente Roberto quando rinomina le variabili (passando dal dominio "area" a quello "funzioni").

La figura 7 mette in evidenza come nel nostro modello la nozione di funzione simbolica può risultare integrata all'interno della semantica di Frege in cui il concetto di significato viene scomposto nella due componenti senso e denotazione. All'interno di un dominio di conoscenza il triangolo di Frege E, S1, D mette in evidenza la relazione che si realizza tra espressione E, senso S1 e denotazione D all'interno di un frame che il soggetto attiva. Un cambiamento di frame provoca il passaggio al nuovo triangolo di Frege E, S2, D. In questo passaggio risulta

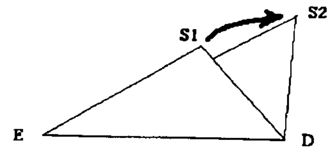


Fig. 7

attivata la funzione simbolica del linguaggio algebrico che permette di mettere a fuoco il nuovo senso S2 da associare alla espressione E in base al nuovo frame attivato.

La *funzione algoritmica* permettere invece lo sviluppo dei calcoli. Ed è proprio questa funzione che gli studenti pseudostrutturali possiedono solo parzialmente: le loro trasformazioni infatti perdono il controllo sulle denotazioni. La funzione algoritmica esprime tipicamente una efficienza sintattica(3).

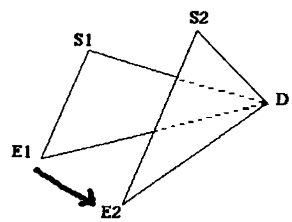


Fig. 8

(3) Per comprendere le due funzioni del linguaggio, simbolica e algoritmica, può essere utile il seguente passo di Jakobson:
"*Any linguistic sign involves two modes of arrangement.*
1) Combination. Any sign is made up of constituent signs and/or occurs only in combination with other signs. This means that any linguistic unit at one and at the same time serves as context for simpler units and/or finds its own context in a more complex linguistic unit...
2) Selection. A selection between alternatives implies the possibility of substituting one for the other, equivalent to the former in one respect and different from it in another. Actually, selection and substitution are two faces of the same operation...
These two operations provide each linguistic sign with two sets of interpretants...there are two references which serve to interpret the sign – one to the code, and the other to the context, whether coded or free; and in each of these ways the sign is related to another set of linguistic signs through an alternation in the former case and through an alignment in the latter...
The development of a discourse may take place along two different semantic lines: one topic may lead to another either through their similarity either through their contiguity. The metaphoric way would be the most appropriate term for the first case and the metonymic way for the second, since they find their most condensed expression in metaphor and metonymy respectively...In normal behaviour both processes are continually operative" (Jakobson [56], pp. 60-62).

La figura 8 permette di mettere in evidenza come la nozione di funzione algoritmica risulta integrata all'interno della semantica di Frege. All'interno di un dominio di conoscenza per mezzo del triangolo di Frege E1, S1, D viene messa in evidenza la relazione che si realizza tra espressione E, senso S1 e denotazione D all'interno del frame che il soggetto attiva. Attraverso la trasformazione nella quale risulta coinvolta la funzione algoritmica del linguaggio algebrico l'espressione E1 viene trasformata nell'espressione E2. A tale espressione il soggetto può associare un nuovo senso S2.

BIBLIOGRAFIA

ARCAVI A. [1994], Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics, manuscript circulated in the Algebraic Working Group e-mail network (e-mail: ntarcavi@weizmann.bitnet).

ARZARELLO F. [1992], The role of natural language in pre-algebraic and algebraic thinking, Proceedings of Working Group 7 at ICME 7, *Language and communication in the mathematics classroom*, Quebec; apparirà in un volume a cura di H. Steinbring e A. Sierpinska presso la la Kluwer.

ARZARELLO F., CHIAPPINI G.P., LEMUT E., MALARA N., PELLEREY M. [1993], Learning to program as a cognitive apprenticeship through conflicts, in Lemut et al. (eds.), *Cognitive Models and Intelligent Environment for Learning Programming*, NATO ASI Series, vol. F111, Springer Verlag, Berlin.

ARZARELLO F., BAZZINI L., CHIAPPINI G. [1993b], Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework, *Proceedings PME-XVII*, Tokyo.

ARZARELLO F., BAZZINI L., CHIAPPINI G. [1994a], L'algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche; Quaderno n. 6 del CNR, Progetto strategico: Tecnologie e Innovazioni didattiche.

ARZARELLO F., GALLO E. [1994b], International workshop on algebraic learning, Turin, october 1992, *Rendiconti dell'Università e del Politecnico di Torino*, vol. 52/1 e 52/2 (numeri speciali contenenti le relazioni del convegno).

ARZARELLO F., BAZZINI L., CHIAPPINI G. [1995], The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice, Research Forum Paper, in corso di pubblicazione nei *Proceeding PME XIX*, Recife, Brasile.

BEDNARZ N., JANVIER B., LEPAGE A., RADFORD L. [1992], Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving, *Proceeding PME XVI*, New Hampshire, I, pp. 65-72.

BELL A., MALONE J.A., TAYLOR P.C. [1987], Algebra – An exploratory teaching experiment, *Shell Centre*, Nottingham.

BOERO P. [1994], International workshop on algebraic learning, Turin, october 1992, *Rendiconti dell'Università e del Politecnico di Torino*, vol. 52/1 (numero speciale contenente le relazioni del convegno), a cura di F. Arzarello ed E.Gallo.

BROUSSEAU G. [1981], Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(1), 37-127.

Brousseau G. [1986], Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-116.
Brown C.A., Carpenter T.P., Kouba V.L., Lindquist M.M., Silver E.A., Swafford J.O., [1988], Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry, mathematical methods and attitudes, *Mathematics Teacher*, **81**, 337-347.
Bruner J. [1985], Vygotsky: a historical and conceptual perspective, in: Wertsch J.V. (curatore), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives*, Cambridge University Press, 19-34.
Chevallard Y. [1989], Arithmetique, Algebre, Modelisation, *Publications de l'IREM* d'Aix-Marseille.
Chiarugi I., Fracassina G., Furinghetti F., Domingo P. [1994], Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe, apparirà in: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*.
Cobb P., Yackel E., Wood T. [1992], Interaction and learning in mathematics classroom situations, *Educational Studies in Mathematics*, 23 (1), 99-122.
Fey J. [1990], Quantity, in: Steen L.A. (curatore), *On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy*, National Academic Press, Washington, D.C., 61-94.
Filloy E., Rojano T.[1989], Solving equations, the Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9.
Kieran C. [1994], A Functional Approach To The Introduction Of Algebra – Some Pros And Cons, *Proceeding PME XVIII*, Lisboa, (157-175).
Kripke S. [1984], Wittgenstein su regole e linguaggio privato, Boringhieri, Torino.
Küchemann D. [1981], Algebra, in: K.M. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119), London, John Murray.
Laborde C. [1982], *Language naturelle et ècriture symbolique*, These, Universitè J. Fourier, Grenoble.
Linns R. [1994], Eliciting the meanings for algebra produced by students: knowledge, justification and Semantic Fields, *Proceeding PME XVIII*, Lisboa, vol. III, 184-191.
MacGregor M. [1992], How students interpret equations: intuition versus taught procedures, Proceedings of Working Group 7 at ICME 7, *Language and communication in the mathematics classroom*, Quebec; apparirà in un volume a cura di H. Steinbring e A. Sierpinska presso la la Kluwer.
Radford L. [1994], Moving through Systems of Mathematical Knowledge: from algebra with a single unknown to algebra with two unknowns, *Proceeding PME XVIII*, Lisboa.
Sfard A., Linchevsky L. [1992], Equations and inequalities: processes without objects?, *Proc. of PME XVI*, New Hampshire, USA.

ELEMENTI DI ARITMETICA E DI ALGEBRA ELEMENTARE

Roberto Dvornicich
Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

1. Elementi di aritmetica

1.1. Notazioni e preliminari. Con il simbolo $\mathbf{N}$ indichiamo l'insieme dei numeri naturali e con il simbolo $\mathbf{Z}$ l'insieme dei numeri interi:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Ricordiamo che i numeri naturali hanno la proprietà del buon ordinamento, ossia

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{N}$ *possiede un elemento minimo.*

Se a, b sono due numeri interi di dice che a è un *multiplo* di b se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $a = kb$. In questo caso si dice anche che b è un divisore di a e si scrive $b|a$.

Un numero intero $p > 1$ si dice *primo* se i suoi unici divisori positivi sono 1 e p. I numeri primi sono anche caratterizzati dal fatto che sono gli unici numeri maggiori di 1 per i quali vale la proprietà:

$$\text{se } p|ab \text{ allora } p|a \text{ oppure } p|b$$

1.2. Il massimo comune divisore. In questo paragrafo richiamiamo la definizione di massimo comune divisore fra due numeri e i modi per calcolarlo. Cominciamo col ricordare le proprietà della divisione euclidea negli interi.

Proposizione 1.1. *Dati due interi* a,b con $b \neq 0$ *esistono e sono unici due interi* q, r *tali che*

(*i*) $a = qb + r$
(*ii*) $0 \leq r < |b|$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme X di tutti i numeri della forma $a - xb$ al variare di x fra i numeri interi:

$$X = \{a - xb \mid x \in \mathbf{Z}\}$$

In X ci sono certamente sia dei numeri positivi che negativi; infatti ponendo $x = (|a| + 1)\, b$ si ottiene

$$a - (|a| + 1)\, b^2 \leq |a| - (|a| + 1) < 0$$

e ponendo $x = -(|a| + 1)b$ si ottiene

$$a + (|a| + 1)b^2 \geq -|a| + (|a| + 1) > 0$$

In particolare, l'insieme $Y = X \cap \mathbf{N}$ costituito dagli elementi di X positivi o nulli non è vuoto. Sia m l'elemento minimo di Y e sia $x_0 \in \mathbf{Z}$ tale che

$$a - x_0 b = m$$

Osserviamo ora che $0 \leq m < |b|$. Infatti $m \geq 0$ per ipotesi; se fosse $m \geq |b|$, allora avremmo

$$0 \leq m - |b| = a - x_0 b \pm b = a - (x_0 \pm 1)b$$

cioè $m - |b|$ sarebbe un elemento di Y più piccolo di m, e questo è assurdo. Se ora poniamo $q = x_0$ e $r = m$ abbiamo dimostrato l'esistenza di interi q ed r con le proprietà richieste.

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che q, r e q', r' siano entrambe coppie di interi che soddisfano le proprietà richieste. Abbiamo allora

$$a = qb + r = q'b + r' \; (0 \leq r, r' < |b|)$$

da cui

$$(q - q')b = r' - r$$

$$|q - q'||b| = |r' - r|$$

Il termine a destra dell'ultima uguaglianza è certamente minore di $|b|$, mentre quello a sinistra è maggiore o uguale a $|b|$ se $q - q' \neq 0$; ne segue che necessariamente $q - q' = 0$, cioè $q = q'$ e, sostituendo, $r = r'$. □

Definizione 1.1. *Dati due numeri interi a, b, non entrambi nulli, un intero d di dice un massimo comune divisore fra a e b se:*

(*i*) $d|a$ $d|b$

(*ii*) $x|a$, $x|b \Rightarrow x|d$.

Per indicare che d è un massimo comune divisore fra a e b si scriverà $d = (a, b)$.

Osservazione 1.1. La proprietà (*i*) dice che d è un divisore comune di a e b. La proprietà (*ii*) dice che d è il massimo dei divisori comuni secondo l'ordine della divisibilità, in cui un numero viene considerato più grande di un altro se è un suo multiplo.

Proposizione 1.2. *Ogni coppia di numeri interi a, b, non entrambi nulli, possiede un massimo comune divisore.*

DIMOSTRAZIONE: Usiamo il metodo delle divisioni successive, definite ricorsivamente come segue:

$$a_1 = a, b_1 = b$$

$$a_1 = q_1 b_1 + r_1$$

(q_1 e r_1 sono il quoziente e il resto della divisione euclidea).Data la divisione euclidea $a_i = q_i b_i + r_i$, poniamo

$$a_{i+1} = b_i, b_{i+1} = r_i$$

Si definisce così una successione di divisioni euclidee che ha termine al passo n tale che $r_n = 0$. Osserviamo che ciò avviene sempre dopo un numero finito di passi, perché la successione dei resti $r_1, r_2, r_3, \dots$ è una successione di numeri naturali strettamente decrescente.

Proveremo che b_n ($= r_{n-1}$) è un massimo comune divisore fra a e b. Infatti, $b_n|a_n$ e $b_n|b_n$. Ma poiché $a_n = b_{n-1}$ e $b_n = r_{n-1}$ dall'equazione

$$a_{n-1} = q_{n-1}\, b_{n-1} + r_{n-1}$$

si ottiene che $b_n | b_{n-1}$ e $b_n | r_{n-1}$, dunque anche $b_n | a_{n-1}$. Risalendo a ritroso la successione delle divisioni si deduce allo stesso modo che $b_n | a_i$ e $b_n | b_i$ per ogni indice i, fino ad arrivare a $b_n | a_1 = a$ e $b_n = b_1 = b$, che dimostra la proprietà (i).

D'altra parte, se $x | a_1$ e $x | b_1$ dall'equazione

$$a_1 = q_1 b_1 + r_1$$

si ricava che $x | r_1$. Sostituendo, abbiamo che $x | a_2$ e $x | b_2$ da cui $x | r_2$ e così via. Alla fine otteniamo che $x | r_{n-1} = b_n$ e quindi anche la (ii) è dimostrata. □

Osservazione 1.2. Il massimo comune divisore così definito non è unico; infatti si vede facilmente che se d è un massimo comune divisore fra a e b allora lo è anche $-d$. Normalmente, quando si parla *del* massimo comune divisore, si intende quello positivo fra i due.

Un altro metodo per ottenere il massimo comune divisore fra due numeri è quello di usare la fattorizzazione. Se

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$$

sono le fattorizzazioni in primi di a e b (dove gli esponenti possono essere anche nulli), allora

$$d = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k}$$

dove $\delta_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ è un massimo comune divisore.

Osserviamo però che, dal punto di vista algoritmico, il metodo delle divisioni successive è molto più efficiente quando si ha a che fare con numeri grandi. In effetti si può dimostrare che il numero delle divisioni successive necessarie per ottenere il massimo comune divisore è dell'ordine, al più, di $\log(\max\{|a|, |b|\})$, mentre gli algoritmi di fattorizzazione sono molto più lunghi.

1.3. L'equazione diofantea di primo grado. Con il termine equazione diofantea intendiamo un'equazione polinomiale in cui i coefficienti sono numeri interi e in cui si cercano solamente le soluzioni con valori interi delle incognite.

Proposizione 1.3. *L'equazione diofantea $ax + by = c$, dove a, b, c sono numeri interi e a, b non sono entrambi nulli, ha soluzioni se e solo se $(a, b)/c$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia d il più piccolo numero positivo dell'insieme

$$X = \{ax + by \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$$

Siano x_0, y_0 interi tali che $d = ax_0 + by_0$ e dimostriamo che $d = (a, b)$. Infatti, facendo la divisione euclidea di a per d,

$$a = qd + r,$$

si ottiene

$$a = q(ax_0 + by_0) + r$$

$$r = a(1 - qx_0) + b(-y_0)$$

da cui $r \in X$. Ma $0 \leq r < d$, da cui, per la minimalità di d, $r = 0$ e $d|a$. Analogamente si dimostra che $d|b$.

Se poi t è un intero tale che $t|a$ e $t|b$, allora t divide anche tutti i numeri della forma $ax + by$, quindi $t|d$.

In particolare abbiamo ottenuto che il massimo comune divisore d appartiene all'insieme X; dall'equazione

$$a(kx_0) + b(ky_0) = kd$$

si vede facilmente che anche ogni multiplo di d appartiene a X. Viceversa, se $n \in X$, dalla divisione

$$n = q'\, d + r'$$

si ottiene che anche $r' \in X$, da cui, per la minimalità di d, $r' = 0$ e quindi n è un multiplo di d. □

Corollario 1.4. *Se $d = (a, b)$ allora esistono due interi x, y tali che $ax + by = d$.*

Osservazione 1.3. Usando le divisioni successive è facile trovare un metodo effettivo per trovare una soluzione dell'equazione diofantea $ax + by = c$ (quando esiste). Illustriamo il metodo con un esempio. Consideriamo l'equazione

$$78x + 33y = 6$$

Per calcolare il massimo comune divisore fra 78 e 33 dobbiamo fare le seguenti divisioni successive:

$$\begin{aligned}
78 &= 2 \cdot 33 + 12 \\
33 &= 2 \cdot 12 + 9 \\
12 &= 1 \cdot 9 + 3 \\
9 &= 3 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

Risalendo dal basso verso l'alto si ottiene

$$\begin{aligned}
3 &= 12 - 9 \\
&= 12 - (33 - 2 \cdot 12) = 3 \cdot 12 - 33 \\
&= 3 \cdot (78 - 2 \cdot 33) - 33 \\
&= 3 \cdot 78 - 7 \cdot 33
\end{aligned}$$

Dunque $x = 3$, $y = -7$ è una soluzione dell'equazione $78x + 33y = 3$. Per ottenere una soluzione dell'equazione data basta moltiplicare tutto per due: $x = 6$, $y = -14$.

Supponiamo ora di conoscere una soluzione (x_0, y_0) dell'equazione $ax + by = c$, dove, per semplicità, supponiamo $(a, b) = 1$. Se (x_1, y_1) è un'altra soluzione, si ha

$$\begin{aligned}
ax_1 + by_1 &= c \\
ax_0 + by_0 &= c
\end{aligned}$$

da cui, sottraendo,

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$$

Poiché $(a, b) = 1$ si ha $b | x_1 - x_0$, cioè $x_1 - x_0 = bk$ con $k \in \mathbf{Z}$ e, sostituendo, $y_0 - y_1 = ak$, da cui

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + bk \\ y_1 = y_0 - ak \end{cases} \tag{1}$$

D'altra parte è immediato verificare che per qualsiasi valore di k la (1) è una soluzione dell'equazione diofantea.

Riassumendo, se l'equazione diofantea $ax + by = c$ ha soluzione, tutte le soluzioni si possono trovare nel modo seguente:

(1) si dividono tutti i termini dell'equazione per $d = (a, b)$, ottenendo

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

con $(a_1, b_1) = 1$;

(2) si cerca una soluzione particolare (x_0, y_0) con il metodo delle divisioni successive;

(3) l'insieme di tutte le soluzioni sarà dato allora dalle formule

$$\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases} \tag{2}$$

Concludiamo il paragrafo con una proposizione che verrà spesso utilizzata nel seguito.

Proposizione 1.5. *Se a/bc e $(a, b) = 1$ allora a/c.*

DIMOSTRAZIONE: Per il corollario 1.4 esistono due interi x, y tali che $ax + by = 1$. Moltiplicando questa equazione per c si ottiene $acx + bcy = c$. Ora abbiamo che $a|acx$ e $a|bcy$, quindi $a|c$. □

1.4. Congruenze. Sia $m > 0$ un numero intero.

Definizione 1.2. *Si dice che due interi x e y sono congrui modulo m (e si scrive $x \equiv y \pmod{m}$) se $m/x - y$.*

Osservazione 1.4. Si ha $x \equiv y \pmod{m}$ se e solo se x e y danno lo stesso resto nella divisione euclidea per m.

Osservazione 1.5. Se x e y sono positivi, si ha $x \equiv y \pmod{10}$ se e solo se nella rappresentazione decimale x e y hanno la stessa cifra delle unità.

Definizione 1.3. *Una classe di congruenza (o classe resto) modulo m è l'insieme di tutti gli interi congrui ad un intero prefissato.*

Poiché ogni numero è congruo al suo resto nella divisione per m, le classi di congruenza sono rappresentate in modo unico dai numeri 0, 1, ..., $m - 1$. In alcuni problemi ciò che interessa di un numero è soltanto la sua classe di congruenza con un modulo opportuno; l'esempio più facile è fornito dalla misurazione del tempo, in cui spesso si cita solo l'ora del giorno (ossia la classe di congruenza delle ore modulo 24) o il giorno della settimana (ossia la classe di congruenza dei giorni modulo 7).

Osserviamo che

- Se $x_1 \equiv y_1 \pmod m$, $x_2 \equiv y_2 \pmod m$ allora

  $$x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \pmod m$$

  Infatti da $x_1 = y_1 + mk_1$, $x_2 = y_2 + mk_2$ si ricava $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + m(k_1 + k_2)$, cioè $m|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$.

- Se $x_1 \equiv y_1 \pmod m$, $x_2 \equiv y_2 \pmod m$ allora

  $$x_1 x_2 \equiv y_1 y_2 \pmod m$$

  Infatti da $x_1 = y_1 + mk_1$, $x_2 = y_2 + mk_2$ si ricava $x_1 x_2 = y_1 y_2 + m(k_1 y_2 + y_1 k_2 + mk_1 k_2)$, cioè $m|x_1 x_2 - y_1 y_2$.

Si possono allora definire le operazioni di somma e di prodotto anche sulle classi di congruenza, nel modo seguente.

Indicando con $\overline{x}$ la classe di congruenza modulo m del numero intero x, poniamo

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$$

In altre parole, la somma (il prodotto) delle classi di congruenza di due numeri è uguale alla classe di congruenza della somma (del prodotto) dei numeri stessi. Per quanto osservato precedentemente, questa definizione è ben posta, ossia il risultato non cambia se al posto di x e y si sostituiscono due numeri x', y' congrui a x e y rispettivamente.

1.5. Equazioni di primo grado con congruenze. L'equazione

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

ha soluzione se e solo se esistono due interi x, y tali che

$$ax = b + my$$

e quindi se e solo se $(a, m)|b$. Per trovare le soluzioni si ricorre all'equazione diofantea studiata più sopra. In particolare, osserviamo che se $(a, m) = 1$ allora l'equazione (3) ha soluzione per ogni valore di b, e, poiché l'equazione diofantea associata ha una soluzione generale del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + mk \\ y = y_0 + ak \end{cases}$$

le soluzioni intere della (3) sono tutti e soli i numeri congrui a x_0 modulo m, cioè

$$x \equiv x_0 \pmod{m}$$

Se invece $(a, m) = d > 1$, risolvendo l'equazione diofantea associata si divide tutto per d, ed è immediato verificare che questo equivale a ricondursi alla congruenza

$$a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1}$$

dove $a = a_1d$, $b = b_1d$ e $m = m_1d$. Quest'ultima congruenza ha una soluzione generale del tipo

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1}$$

Osservazione 1.6. Per quanto detto precedentemente le classi resto modulo n formano un gruppo rispetto all'addizione e formano un anello con le due operazioni di addizione e moltiplicazione. Se ci si limita al sottoinsieme delle classi resto modulo n che sono rappresentate da numeri relativamente primi con n, queste formano un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione.

1.6. Il teorema cinese del resto.

Teorema 1.6. *Dati due numeri interi positivi m, n con $(m, n) = 1$ e assegnati comunque due resti r, s $(0 \leq r < m,\ 0 \leq s < n)$, è possibile trovare un numero intero a che nella divisione per m dia resto r e nella divisione per n dia resto s.*

DIMOSTRAZIONE: In effetti si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \equiv r \pmod{m} \\ x \equiv s \pmod{n} \end{cases} \tag{4}$$

ossia di vedere se esistono interi x, y, z tali che

$$\begin{cases} x = r + my \\ x = s + nz \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$my - nz = s - r \tag{5}$$

e quest'ultima equazione ha una soluzione intera (y_0, z_0). Per ottenere una soluzione x sel sistema (4) basta sostituire. □

Notiamo che, poiché la soluzione generale dell'equazione (5) è

$$\begin{cases} y = y_0 + nk \\ z = z_0 + mk \end{cases}$$

la soluzione generale del sistema (4) è

$$x = r + my_0 + mnk,$$

ossia $x \equiv r + ny_0 \pmod{mn}$. Quindi la soluzione generale è una classe di congruenza modulo mn.

Corollario 1.7. *Se $(m, n) = 1$ l'equazione*

$$x \equiv a \pmod{mn}$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv a \pmod{n} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti la soluzione generale del sistema è del tipo $x \equiv x_0 \pmod{mn}$, e ponendo $x_0 = a$ si ha certamente una soluzione. □

1.7. Le prove di divisibilità. La scrittura decimale di un numero naturale n,

$$n = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$$

dove con a_0 si intende la cifra delle unità, con a_1 la cifra delle decine, e così via, corrisponde all'espressione aritmetica

$$n = \mathrm{a}_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

La prova del 9. *Un numero ha lo stesso resto nella divisione per 9 del numero ottenuto sommando le sue cifre decimali.*

Infatti $10 \equiv 1 \pmod 9$, $10^2 \equiv 10 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 9$, ..., $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 9$, da cui

$$\begin{aligned} a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 &\equiv a_k \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 1 + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ &\equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9 \end{aligned}$$

La stessa proprietà vale anche se si considerano i resti della divisione per 3.

La prova di divisibilità per 11. *Un numero ha lo stesso resto nella divisione per 11 del numero ottenuto sottraendo la somma delle cifre di posto dispari dalla somma delle cifre di posto pari.*

Infatti $10 \equiv -1 \pmod{11}$ da cui $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$ e

$$a_k 10^k + \ldots + a_1 10 + a_0 \equiv a_k(-1)^k + \ldots - a_1 + a_0 \pmod{11}$$

La prova di divisibilità per 4. *Un numero ha lo stesso resto nella divisione per 4 del numero costituito dalle sue due ultime cifre decimali.*

Infatti, per $i \geq 2$, $10^i \equiv 0 \pmod 4$, da cui

$$
\begin{aligned}
a_k 10^k + \ldots + a_1 10 + a_0 &\equiv a_k \cdot 0 + \ldots + a_2 \cdot 0 + a_1 10 + a_0 \\
&\equiv a_1 10 + a_0 \pmod 4
\end{aligned}
$$

Una prova analoga si ottiene considerando i resti nella divisione per ogni potenza di 2 e per ogni potenza di 5.

Osservazione 1.7. Si può utilizzare lo stesso principio per costruire una prova di divisibilità per 7, ma essa è molto più difficile da memorizzare, poiché si verifica che

$$
\begin{array}{lll}
10^1 \equiv 3 \pmod 7, & 10^2 \equiv 2 \pmod 7, & 10^3 \equiv 6 \pmod 7 \\
10^4 \equiv 4 \pmod 7, & 10^5 \equiv 5 \pmod 7, & 10^6 \equiv 1 \pmod 7
\end{array}
$$

e $10^{6q+r} \equiv 10^r \pmod 7$. Alle volte si ricorre ad un analogo della prova di divisibilità per 11 raggruppando le cifre a 3 a 3, ossia scrivendo

$$n = b_k 10^{3k} + b_{k-1} 10^{3(k-1)} + \ldots + b_1 10^3 + b_0$$

dove $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sono numeri di tre cifre. Osservando che $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$ si ottiene

$$n \equiv b_k(-1)^k + b_{k-1}(-1)^{k-1} + \ldots - b_1 + b_0 \pmod{11}$$

1.8. Il piccolo teorema di Fermat. Sia p un numero primo.

Lemma 1.8. *Se $x, y \in \mathbf{Z}$, allora*

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p$$

DIMOSTRAZIONE: Abbiamo

$$(x+y)^p = x^p + px^{p-1}y + \binom{p}{2} x^{p-2}y^2 + \ldots + pxy^{p-1} + y^p$$

Tutti i coefficienti binomiali $\binom{p}{i} = \dfrac{p!}{i!(p-i)!}$ tranne il primo e l'ultimo sono divisibili per p, in quanto p compare a numeratore ma non a denominatore, da cui la tesi. □

Teorema 1.9. (Fermat) *Per ogni intero x vale la congruenza*

$$x^p \equiv x \pmod p$$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo dapprima $x \geq 0$ e ragioniamo per induzione su x. Per $x = 0$ si verifica immediatamente che $0^p \equiv 0 \pmod p$. Supposta la tesi vera per x, dimostriamola per $x + 1$; abbiamo

$$(x + 1)^p \equiv x^p + 1^p \equiv x + 1 \pmod p$$

da cui la tesi. Se $x < 0$, osserviamo che

$$(-x)^p = (-1)^p x^p \equiv -x^p \equiv -x \pmod p$$

(la formula è vera anche per $p = 2$, in quanto in questo caso $x \equiv -x \pmod 2$). □

Il piccolo teorema di Fermat può essere enunciato anche nella forma

Teorema 1.10. Se $x \not\equiv 0 \pmod p$ allora $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

DIMOSTRAZIONE: Infatti da $x^p \equiv x \pmod p$ si ottiene

$$\begin{aligned} x^p - x &\equiv 0 \pmod p \\ x(x^{p-1} - 1) &\equiv 0 \pmod p \end{aligned}$$

cioè $p \mid x(x^{p-1} - 1)$. Ma, poiché $p \nmid x$ e p è primo, necessariamente $p \mid x^{p-1} - 1$, cioè la tesi. □

La dimostrazione del teorema 1.10 può essere fatta anche nel modo seguente. Sia

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-2) \cdot (p-1) = (p-1)!$$

Se $x \not\equiv 0 \pmod p$, i numeri $x, 2x, 3x, \ldots, (p-1)x$ sono non divisibili per p e a due a due non congrui modulo p; infatti, la relazione

$$ix \equiv jx \pmod p \ (1 \leq i, j \leq p - 1)$$

implica che $p \mid (i - j)x$; poiché $p \nmid x$ si ha $p \mid i - j$ e dunque $i = j$. Ciò significa che le classi di congruenza di $x, 2x, ..., (p-1)x$, essendo tutte distinte, devono essere tutte le classi diverse dalla classe $\overline{0}$, e cioè le classi $\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{p-1}$, seppure in un altro ordine. Ne segue che

$$P \equiv x \cdot 2x \cdot (p-1)x \equiv Px^{p-1} \pmod p$$

ossia

$$P(x^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$$

Poiché p non divide P si ottiene

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

□

Consideriamo ora un modulo m qualsiasi e denotiamo con $\phi(m)$ il numero degli interi a compresi fra 0 e $m-1$ tali che $(a, m) = 1$. (Nel caso di un numero primo p si ha $\phi(p) = p-1$; per la formula nel caso generale si veda il capitolo sul calcolo combinatorio). Sia $\{a_1, a_2, ..., a_{\phi(m)}\}$ l'insieme di questi numeri. Se x è relativamente primo con m, allora lo sono anche tutti i numeri $a_1x, a_2x, ..., a_{\phi(m)}x$ e inoltre sono a due a due non congrui modulo m; infatti $a_ix \equiv a_jx \pmod m$ implica che $m|(a_i - a_j)x$; ma poiché $(x, m) = 1$ deve essere $m|a_i - a_j$ e dunque $i = j$. Analogamente a prima abbiamo

$$Q = a_1a_2 \dots a_{\phi(m)} \equiv a_1xa_2x \dots a_{\phi(m)}x \equiv Qx^{\phi(m)} \pmod m$$

da cui

Teorema 1.11. *Se $(x, m) = 1$ allora $x^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$*

Abbiamo inoltre il seguente

Corollario 1.12. *Se $(x, m) = 1$ le classi resto delle potenze di x modulo m si ripetono periodicamente con periodo $\phi(m)$.*

DIMOSTRAZIONE: Abbiamo infatti

$$x^{k+\phi(m)} = x^k \cdot x^{\phi(m)} \equiv x^k \cdot 1 \equiv x^k \pmod m$$

□

Osserviamo che $\phi(m)$ è un periodo comune alle potenze di tutti gli x tali che $(x, m) = 1$. Per x fissato, comunque, il minimo periodo può essere più piccolo; per esempio, se $x = 1$, il minimo periodo è uguale a 1. Poiché però dopo $\phi(m)$ passi si ottiene comunque una ripetizione, per ogni x il periodo minimo è un *divisore* di $\phi(m)$.

Esempio 1.8. *Qual è l'ultima cifra decimale di* 47^{95}?

Abbiamo

$$47 \equiv 7 \pmod{10}$$

da cui

$$47^{95} \equiv 7^{95} \pmod{10}$$

Si verifica facilmente che le potenze di 7 hanno periodo 4 ($=\phi(10)$) modulo 10; infatti

$$7^1 \equiv 7, 7^2 \equiv 9, 7^3 \equiv 3, 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

Ne segue che

$$7^{95} = 7^{23 \cdot 4 + 3} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$$

Dunque la cifra cercata è 3.

Osservazione 1.9. Se p è un numero primo, si può dimostrare che esiste un intero x le cui potenze modulo p hanno un periodo minimo uguale a $p-1$. Se m è un numero composto, invece, può succedere che per tutti gli x si abbia un periodo minore di $\phi(m)$. Infatti se

$$m = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$$

è la scomposizione di m in fattori primi, le potenze di x si ripetono non appena si trovi un esponente h tale che $x^h \equiv 1 \pmod{m}$. Perché ciò avvenga è necessario e sufficiente (vedi il corollario 1.7) che

$$\begin{cases} x^h \equiv 1 \pmod{p_1^{a_1}} \\ \dots \\ x^h \equiv 1 \pmod{p_k^{a_k}} \end{cases}$$

Le singole equazioni sono sicuramente soddisfatte se h è un multiplo comune di $\phi(p_1^{a_1}), \dots, \phi(p_k^{a_k})$ e quindi per

$$h = m.c.m. \{p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1}, \dots, p_k^{a_k} - p_k^{a_k - 1}\}$$

Se x è un intero qualsiasi, non necessariamente primo con m, è ancora vero che le potenze di x si ripetono periodicamente modulo m, ma solo *da un certo punto in poi*. In effetti, se x non è relativamente primo con m allora non lo è neanche nessuna sua potenza e perciò non esiste un esponente h tale che $x^h \equiv 1 \pmod m$. Tuttavia, poiché le classi di congruenza modulo m sono in numero finito, esistono sicuramente due interi h, k tali che

$$x^h \equiv x^k \pmod m$$

e quindi avremo anche

$$x^{h+1} \equiv x^{k+1}, x^{h+2} \equiv x^{k+2}, \dots \pmod m$$

In questo caso siamo in presenza di un *antiperiodo*.

Esempio 1.10. $x = 2$, $m = 16$.

Abbiamo

$$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 2^5 \equiv 2^6 \dots \equiv 0 \pmod{16}$$

1.9. I numeri nella rappresentazione decimale. Per semplicità consideriamo i numeri della forma $\frac{m}{n}$ con $0 \leq m < n$; nel caso generale basta aggiungere un intero. Se

$$\frac{m}{n} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

dove $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono le sue cifre decimali,

– a_1 si ottiene dividendo $10m$ per n:

$$10m = a_1 n + r_1$$

– a_2 si ottiene dividendo $10r_1$ per n:

$$10r_1 = a_2 n + r_2$$

$$\ldots \ldots$$

– la cifra generica a_k si ottiene dividendo $10r_{k-1}$ per n:

$$10r_{k-1} = a_k n + r_k$$

Osserviamo inoltre che:

– r_1 è il resto della divisione di $10m$ per n:

$$10m = a_1 n + r_1$$

– r_2 è il resto della divisione di $100m$ per n:

$$\begin{aligned} 100m &= 10(a_1 n + r_1) \\ &= 10a_1 n + a_2 n + r_2 \\ &= (10a_1 + a_1)n + r_2 \\ &\ldots \ldots \end{aligned}$$

– r_k è il resto della divisione di $10^k m$ per n:

$$10^k m = (10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \ldots + 10a_{k-1} + a_k)n + r_k$$

Dunque la scrittura decimale di $\frac{m}{n}$ è periodica se e solo se i resti $r_1, r_2, r_3, \ldots$ formano una successione perodica.

1° caso. $(n, 10) = 1$ (il denominatore non contiene i fattori 2 e 5).

Le potenze $10, 10^2, 10^3, \ldots$ hanno resti periodici modulo n, dunque anche la successione

$$10m, 10^2m, 10^3m, \ldots$$

ha resti periodici modulo n. Per quanto concerne la lunghezza del periodo, essa è certamente un divisore di $\phi(n)$.

2° caso. $(n, 10) \neq 1$.

Scriviamo n nella forma

$$n = 2^a 5^b n_0$$

dove $(n_0, 10) = 1$.

1° metodo: Consideriamo i resti della successione $10, 10^2, 10^3, \ldots$ modulo n. Più precisamente, analizziamo le successioni doppie $(r_1, s_1),(r_2, s_2), \ldots$ dei resti della successione delle potenze di 10 rispettivamente modulo $2^a 5^b$ e modulo n_0:

$$10^k \equiv r_k (\text{mod } 2^a 5^b)$$
$$10^k \equiv s_k (\text{mod } n_0)$$

Osserviamo che, per il corollario 1.7, $10^k \equiv 10^h$ (mod n) se e solo se

$$10^k \equiv 10^h \ (\text{mod } 2^a 5^b) \text{ e } 10^k \equiv 10^h \ (\text{mod } n_0)$$

per cui per studiare la periodicità della successione dei resti $10, 10^2, 10^3, \ldots$ è sufficiente studiare la periodicità della successione doppia $(r_1, s_1),(r_2, s_2), \ldots$ I resti $r_1, r_2, \ldots$ sono diversi da zero se e solo se $10^k = 2^k 5^k$ non è multiplo di $2^a 5^b$, cioè se e solo se $k < \mathrm{M} = \max\{a, b\}$. Per $k \geq \max\{a, b\}$ i resti sono tutti nulli. Quindi la successione si stabilizza a zero, ma solo dopo M passi. I resti $s_1, s_2, \ldots$ sono puramente periodici modulo n con periodo di lunghezza un divisore di $\phi(n)$.

Ne segue che la scrittura decimale è periodica con un antiperiodo di M cifre.

2° metodo: Possiamo scrivere $\frac{m}{n}$ nella forma

$$\frac{m}{n} = \frac{A}{2^a 5^b} + \frac{B}{n_0}$$

con A, B interi. Infatti basta prendere per (A, B) una soluzione dell'equazione diofantea

$$n_0 x + 2^a 5^b y = m,$$

che è risolubile poiché $(n_0, 2^a 5^b) = 1$. Inoltre l'equazione diofantea ha infinite soluzioni, quindi possiamo scegliere una soluzione con $B > 0$. Abbiamo allora

$$\frac{A}{2^a 5^b} = \text{intero}, a_1 a_2 \ldots a_M \quad \text{dove } M = \max\{a, b\}$$

$$\frac{B}{n_0} = \text{intero}, \overline{b_1 b_2 \ldots b_k} \quad \text{(periodico puro)}$$

Sommando i due membri solo le prime M cifre dopo la virgola differiscono da quelle di $\frac{B}{n_0}$ (e formano l'antiperiodo) mentre le altre sono uguali a quelle di $\frac{B}{n_0}$ e dunque sono periodiche.

1.10. Il metodo RSA. Il sistema *RSA* (dai nomi dei suoi inventori, Rivest, Shamir e Adleman) è un sistema di codificazione di messaggi a chiave pubblica, ossia un sistema in cui può essere reso pubblico il modo in cui il messaggio viene codificato, senza per questo consentire ad un osservatore esterno di dedurre la regola di decodificazione.

Innanzitutto ogni parola viene trasformata in un numero (per esempio, sostituendo ad ogni lettera il suo numero d'ordine nell'alfabeto) e il numero così ottenuto viene considerato come un resto modulo N, dove N è sufficientemente grande per non creare ambiguità.

Il funzionamento del sistema si basa sulle seguenti osservazioni aritmetiche:

1) Se p è un numero primo, vi sono infiniti interi positivi k per i quali

$$x^k \equiv x \pmod{p} \ \forall x \in \mathbf{Z}$$

Un caso banale si ha scegliendo $k=1$; un secondo caso si ha per $k = p$ (piccolo teorema di Fermat). In generale osserviamo che

$$x^{n+p-1} \equiv x^{n-p+1} \equiv x^{n-1}x^p \equiv x^{n-1}x \equiv x^n \pmod{p}$$

e quindi abbiamo $x^k \equiv x \ \forall x \in \mathbf{Z}$ per tutti i k della forma

$$k = 1 + (p-1)t \text{ con } t \in \mathbf{Z}.$$

2) Se $N = p_1 p_2 \dots p_s$ è un numero libero da quadrati, ossia prodotto di primi p_1, $p_2, \dots, p_s$ distinti, allora esistono infiniti interi positivi k per cui

$$x^k \equiv x (\mathrm{mod}\, N)\ \forall x \in \mathbf{Z}$$

Infatti, per il corollario 1.7, l'equazione $x^k \equiv x \pmod N$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^k \equiv x \pmod{p_1} \\ \dots \\ x^k \equiv x \pmod{p_s} \end{cases}$$

Se $k - 1$ è un un multiplo comune di $p_1 - 1, \dots, p_s - 1$, allora tutte le equazioni del sistema sono soddisfatte, per cui il sistema è soddisfatto. Concludendo, una successione di interi che risponde al problema è

$$k = 1 + mt\ (m \in \mathbf{Z})$$

dove $m = m.c.m.(p_1 - 1, \dots, p_s - 1)$.

Passiamo ora ad illustrare il funzionamento del sistema.

(a) Si sceglie $N = pq$ uguale al prodotto di due primi distinti (p e q avranno, nei sistemi più sofisticati, circa 50 cifre decimali ciascuno). *N viene reso pubblico, ma i fattori p e q vengono tenuti segreti.*

(b) Si sceglie un numero A relativamente primo con $M = (p - 1)(q - 1)$. *A viene reso pubblico.*

(c) Si calcola un intero B tale che

$$AB \equiv 1 \pmod M$$

(L'equazione $Ax \equiv 1 \pmod M$ ha soluzione perché $(A, M) = 1$). *B viene tenuto segreto.* Osserviamo che per calcolare B bisogna conoscere M. Ma poiché $M = (p - 1)(q - 1) = N - (p + q) + 1$, conoscere M, una volta noto N, equivale a conoscere la somma $p + q$; d'altra parte, se si conoscessero p + q e pq si ricaverebbero facilmente p e q, cioè i fattori di N. *Quindi il problema di determinare M è equivalente al problema di fattorizzare N.*

(d) (Codificazione)
Si trasforma la parola x (che va considerata come una classe resto modulo N) nella parola x^A (considerata come una classe resto modulo N).

(e) (Decodificazione)
Si trasforma la parola y (classe resto modulo N) nella parola y^B (classe resto modulo N)

È evidente che la doppia operazione di codificazione e di decodificazione

$$x \longrightarrow x^A \longrightarrow x^{AB} = x$$

trasforma la parola x in se stessa. Infatti poiché $AB \equiv 1 \pmod{M}$ si ha che AB è uno degli infiniti k per i quali $x^k \equiv x \pmod{N}$ per ogni $x \in \mathbf{Z}$.

2. Elementi di calcolo combinatorio

2.1. I concetti di base. In questo paragrafo diamo la soluzione di alcuni problemi di base per il calcolo combinatorio. Se X è un insieme finito, indicheremo con $|X|$ la sua cardinalità, ossia il numero degli elementi di X.

Problema 2.1. *Contare il numero delle funzioni $f\colon A \longrightarrow B$ dove A e B sono due insiemi tali che $|A| = n$ e $|B| = m$.*

SOLUZIONE: Ponendo $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $B = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ osserviamo che una funzione $f\colon A \longrightarrow B$ è definita dalla sequenza di valori $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \in B$. Per $f(x_1)$ ci sono m scelte possibili (ciascuno dei valori $y_1, ..., y_m$); ciascuna di queste scelte può essere associata con m scelte possibili per $f(x_2)$, dando un totale di m^2 possibilità; ciascuna di queste possibilità può essere associata con m scelte possibili per $f(x_3)$, e così via, per un totale di $m \cdot m \cdots m = m^n$ possibilità. □

Esempio 2.1. *Quante sono le colonne possibili nella schedina del totocalcio?*

Sia A l'insieme delle partite della schedina (dunque $|A| = 13$) e sia $B = \{1, X, 2\}$. Una colonna è precisamente una funzione $f\colon A \longrightarrow B$, per cui la risposta è 3^{13}.

Problema 2.2. *Con le notazioni precedenti, contare tutte le funzioni iniettive $f\colon A \longrightarrow B$.*

SOLUZIONE: Si hanno m scelte possibili per il valore $f(x_1)$; per avere una funzione iniettiva bisogna che $f(x_2) \neq f(x_1)$, per cui, per ogni scelta di $f(x_1)$, ci sono $m - 1$ possibili scelte per $f(x_2)$ (tutti i valori diversi da $f(x_1)$); analogamente ci sono $m -$

2 scelte possibili per $f(x_3)$ (tutti i valori diversi da $f(x_1)$ e da $f(x_2)$), e così via, per cui la risposta è

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

□

Osserviamo che questa formula dà il valore zero se $n > m$; infatti in questo caso non esistono funzioni iniettive $f: A \to B$.

Definizione 2.1. *Una permutazione di un insieme A è una funzione bigettiva* $f: A \to A$.

Osserviamo che l'insieme delle permutazioni di un insieme A forma un gruppo, non commutativo se $|A| > 2$, rispetto all'operazione di composizione fra funzioni. Infatti:

(i) la funzione identità $i: A \to A$ definita da $i(x) = x \;\forall\, x \in A$ è una permutazione;

(ii) se f e g sono due permutazioni, allora lo è anche la funzione composta $f \circ g$;

(iii) se f è una permutazione, allora lo è anche la funzione inversa f^{-1}.

Una proprietà importante del gruppo delle permutazioni di un insieme finito A è che esso è generato dagli scambi di due elementi, o trasposizioni; altrimenti detto, ogni permutazione di un insieme finito si può ottenere effettuando successivamente degli scambi fra due elementi. Infatti, posto $f(x_i) = y_i$ per $i = 1, \ldots, n$, con un primo scambio tra x_1 e y_1 si può ottenere una funzione f_1 tale che $f_1(x_1) = y_1$, con un secondo scambio tra $f_1(x_2)$ e y_2 si può ottenere una funzione f_2 tale che $f_2(x_1) = y_1$ e $f_2(x_2) = y_2$ e così procedendo si arriva dopo un numero finito di passi alla funzione assegnata.

Problema 2.3. *Con le notazioni precedenti, contare il numero delle permutazioni di A.*

Soluzione: Si tratta di un caso particolare del problema precedente, con $A = B$. Infatti una funzione da un insieme *finito* in se stesso è iniettiva se e solo se è anche surgettiva (e quindi bigettiva), in quanto se manda n elementi distinti in n elementi distinti allora raggiunge tutti i valori e viceversa. Pertanto la risposta è

$$n\,(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

□

Problema 2.4. *Sia A un insieme con n elementi e sia k un intero con $0 \le k \le n$. Contare quanti sono i sottoinsiemi di A con esattamente k elementi.*

SOLUZIONE: Sia X un sottoinsieme di A con k elementi, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. La scelta di k elementi distinti di X in un ordine assegnato corrisponde alla scelta di una funzione iniettiva $f\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to X$ e pertanto può essere fatta in $n\,(n-1) \cdots (n-k+1)$ modi. Poiché però gli elementi di X possono essere ordinati in $k!$ modi (uno per ogni permutazione di X), con questo procedimento ogni scelta dello stesso insieme viene effettuata $k!$ volte, per cui la risposta è

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

□

Definizione 2.2. *Il numero precedente si dice coefficiente binomiale di n sopra k e si scrive*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Osservazione 2.2. Il nome di coefficienti binomiali deriva dal fatto che si tratta dei coefficienti dello sviluppo delle potenze del binomio, ossia dalla formula

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{6}$$

Per dimostrare la (6) si può osservare che

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\,(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ volte}}$$

e che in questa espressione il monomio $x^k y^{n-k}$ si ottiene tante volte quante sono le possibilità di scegliere k volte il fattore x da uno degli n binomi $x + y$ (e il fattore y negli altri $n - k$ binomi); ma ciò corrisponde a scegliere un sottoinsieme di k elementi (i binomi nei quali si sceglie x) di un insieme di n elementi (tutti i binomi).

Osservazione 2.3. La formula del triangolo di Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

si può dimostrare osservando che

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

$$= (x+y)^{n-1}(x+y) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-1-i} \right)(x+y)$$

Poiché nella moltiplicazione del termine più a destra il monomio $x^k y^{n-k}$ si ottiene in due modi, e cioè moltiplicando $x^{k-1} y^{n-k}$ per x e $x^k y^{n-k-1}$ per y, la formula deriva dal confronto dei coefficienti di $x^k y^{n-k}$ nella (7).

Osservazione 2.4. Dalla definizione del coefficiente binomiale è evidente che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ per $0 \leq k \leq n$. In effetti si può osservare che i sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi sono in naturale corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di $n - k$ elementi: basta associare ad ogni sottoinsieme il suo complementare.

Esempio 2.5. *Qual è la probabilità di azzeccare un terno secco ad una ruota del lotto?*

Ogni insieme di 5 numeri contiene $\binom{5}{3}$ terni, mentre il totale dei terni possibili è $\binom{90}{3}$. Pertanto la probabilità è

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}} = \frac{1}{11748}$$

Esempio 2.6. *Quattro persone giocano a poker usando 32 carte, dal 7 all'asso per ogni seme. Qual è la probabilità di avere un full servito?*

Gli insiemi di 5 carte che possono essere distribuiti sono $\binom{32}{5}$. Un full si può ottenere avendo 3 carte del tipo principale e 2 del tipo secondario, dunque ci sono $\binom{4}{3}$ modi di ottenere 3 carte del tipo principale e $\binom{4}{2}$ modi di ottenere 2 carte del tipo secondario. Inoltre ci sono 8 scelte possibili per il tipo principale e 7 del tipo secondario (tutti meno quello principale). Dunque la probabilità è

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2} \cdot 8 \cdot 7}{\binom{32}{5}} = \frac{6}{899}$$

Problema 2.5. *Quanti sono tutti i sottoinsiemi di un insieme A con n elementi?*

1a Soluzione: Sommiamo i sottoinsiemi con zero elementi, con 1 elemento, ..., con n elementi, cioè facciamo la somma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Dalla formula per lo sviluppo del binomio $(x + y)^n$, ponendo $x = y = 1$, si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2a Soluzione: I sottoinsiemi X di A corrispondono biunivocamente alle funzioni f: $A \to \{0, 1\}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x \notin X \end{cases}$$

Pertanto i sottoinsiemi sono tanti quante le funzioni da A in $\{0, 1\}$ e cioè 2^n.

3a Soluzione: Dimostriamo che il risultato è 2^n ragionando per induzione su n. Per $n = 1$ il risultato è chiaro, perché si hanno solo i due sottoinsiemi f e A. Supposta vera la tesi per $|A| = n$, dimostriamola per $|A| = n + 1$. Fissiamo un elemento $x \in A$ e dividiamo i sottoinsiemi di A in due categorie:

- i sottoinsiemi che non contengono x
- i sottoinsiemi che contengono x.

I sottoinsiemi della prima categoria sono tutti e soli i sottoinsiemi di $A \setminus \{x\}$, che ha n elementi, e dunque sono 2^n. I sottoinsiemi della seconda categoria sono formati dall'elemento fisso x più un sottoinsieme qualsiasi di $A \setminus \{x\}$ e dunque sono anch'essi 2^n. Il totale è dunque $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

2.2. Le combinazioni con ripetizione. In questo paragrafo risolviamo il seguente

Problema 2.6. *In quanti modi si possono disporre n oggetti indistinguibili in k scatole?*

Soluzione: Supponiamo di allineare le k scatole segnando una crocetta per significare la separazione fra una scatola e la successiva. In questo modo utilizziamo dunque $k - 1$ crocette:

1ª scatola ★ 2ª scatola ★ ... ★ k^a scatola

Per ogni possibile disposizione riempiamo poi gli spazi relativi alle scatole con tante palline quanti sono gli oggetti disposti nelle rispettive scatole. Per esempio, il grafico

❍❍❍★❍❍★★❍★❍❍❍❍★❍❍❍

corrisponde ad una disposizione di 13 oggetti in 6 scatole così suddivisi: 3 oggetti nella prima scatola, 2 nella seconda, 0 nella terza, 1 nella quarta, 4 nella quinta e 3 nella sesta. È chiaro che la corrispondenza fra le disposizioni e i relativi schemi grafici è biunivoca, quindi basta contare il numero degli schemi grafici. Ognuno di essi è costitutito da n palline e da $k - 1$ crocette, per un totale di $n + k - 1$ simboli, ed è determinato dalla posizione delle n palline (o, ciò che è lo stesso, delle $k - 1$ crocette). Pertanto la risposta è

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

□

Osservazione 2.7. Il problema appena studiato corrisponde al problema algebrico di trovare il numero delle soluzioni intere positive o nulle $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \qquad (8)$$

È facile vedere come con lo stesso metodo si possano risolvere molti problemi analoghi. Consideriamo per esempio il problema di determinare il numero delle soluzioni strettamente positive della (8). Ponendo $x_i = y_{i+1}$ *per* $i = 1, \ldots, k$ si ha che ad ogni soluzione positiva della (8) corrisponde biunivocamente una soluzione positiva o nulla dell'equazione

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - k$$

Pertanto la risposta è

$$\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

2.3. Il principio di inclusione-esclusione. Dati due insiemi finiti A, B, la cardinalità dell'insieme unione, $A \cup B$, è legata alle cardinalità di A e di B dalla formula

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Infatti, facendo la semplice somma $|A| + |B|$ si vengono a contare due volte gli elementi che appartengono all'intersezione, per cui è necessario sottrarre $|A \cap B|$.

La formula precedente si può generalizzare al caso dell'unione di n insiemi nel modo seguente

Teorema 2.1. (Principio di inclusione-esclusione).

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots A_n| \tag{9}$$

Osservazione 2.8. La formula va interpretata nel modo seguente: il termine generico

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_h} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_h}|$$

significa che vanno sommate le cardinalità di tutte le possibili intersezioni di h insiemi scelti fra $A_1, \ldots, A_n$.

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che ogni elemento $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ viene contato esattamente una volta nella formula (9). Supponiamo che x appartenga ad esattamente h fra i sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_n$. Senza ledere la generalità possiamo anche supporre che $x \in A_1, \ldots, x \in A_h$ ma $x \notin A_{h+1}, \ldots, x \notin A_n$. Nel primo addendo della (9) x viene contato h volte. Nel secondo addendo viene contato tante volte quante sono le coppie $\{i,j\}$ con $1 \leq i < j \leq$ h, e cioè $\binom{h}{2}$ volte; nel terzo termine viene contato $\binom{h}{3}$ volte, e così via. Pertanto x viene contato complessivamente un numero di volte pari a

$$h - \binom{h}{2} + \binom{h}{3} - \ldots + (-1)^{h-1}\binom{h}{h}$$

Per dimostrare che questo numero è uguale a 1 basta vedere che

$$1-h+\binom{h}{2}-\binom{h}{3}+\ldots+(-1)^{h-1}\binom{h}{h}=0$$

ossia che

$$\sum_{i=0}^{h}(-1)^i\binom{h}{i}=0$$

Quest'ultima formula si ricava dallo sviluppo binomiale di $(x+y)$h ponendo $x=-1$ e $y=1$:

$$0=(-1+1)^h=\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}(-1)^i$$

□

Esempio 2.9. *La funzione di Eulero.*

Sia ϕ(n) (vedi 1.11) il numero degli interi a compresi fra 1 ed n tali che $(a, n) = 1$. Se $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ è la fattorizzazione di n, osserviamo che $(a, n) = 1$ se e solo se

$$(a, p_1)=1, \ldots, (a, p_k)=1$$

Sia X l'insieme cercato e consideriamo gli insiemi

$$A_1=\{a \mid 1\le a\le n, (a, p_1)\ne 1\}, \ldots, A_k=\{a \mid 1\le a\le n, (a, p_k)\ne 1$$

L'insieme X è costituito da quegli elementi che non appartengono a nessuno degli insiemi $A_1, \ldots, A_k$ ed è quindi l'insieme complementare:

$$X=\{1, 2, \ldots, n\}\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_k)$$

Pertanto

$$|X|=n-\sum_i |A_i|+\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|-\ldots+(-1)^k|A_1\cap\ldots A_k|$$

Poiché $p_1, \ldots, p_k$ sono primi distinti, $x\in A_i$ se e solo se x è divisibile per

p_i, $x \in A_i \cap A_j$ se e solo se x è divisibile per $p_i p_j$, e così via. Abbiamo quindi

$$|X| = n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdots p_k}$$

$$= n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Osservazione 2.10. La formula precedente può essere interpretata nel modo seguente: la probabilità che un numero a compreso tra 1 ed n sia relativamente primo con n, cioè $\frac{\phi(n)}{n}$, è uguale al prodotto delle probabilità che il numero sia relativamente primo con $p_1, \ldots, p_k$, e cioè $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Esempio 2.11. *Le funzioni surgettive.*

Il numero delle funzioni surgettive $f\colon A \to B$, dove $|A| = n$ e $|B| = m$, si può contare come segue. Posto $B = \{y_1, \ldots, y_m\}$ sia

$$X_i = \{f\colon A \to B \mid f(x) \neq y_i \ \forall x \in X\}$$

per $i = 1, \ldots, m$. È chiaro che una funzione è surgettiva se e solo se non appartiene a nessuno degli insiemi X_i, pertanto l'insieme delle funzioni surgettive è l'insieme complementare di $X_1 \cup \ldots \cup X_m$. Il numero delle funzioni surgettive è quindi

$$m^n - \sum_i |X_i| + \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| - \ldots + (-1)^m |A_1 \cap \ldots A_m|$$

Ora le funzioni di X_i sono tutte e sole le funzioni

$$f\colon A \to B \setminus \{yi\}$$

e dunque sono $(m-1)^n$; per ogni scelta di $i < j$ le funzioni di $X_i \cap X_j$ sono tutte e sole le funzioni

$$f\colon A \to B \setminus \{y_i, y_j\}$$

e dunque sono $(m-2)^n$, e così via. Il numero delle funzioni surgettive è dunque rappresentato dall'espressione

$$m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n \quad -\ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}1^n$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i}(m-i)^n$$

Esempio 2.12. *Qual è la probabilità che, infilando a caso n lettere indirizzate a n persone diverse in n buste con i relativi indirizzi, nessuna lettera sia infilata nella busta giusta?*

Il problema può essere trasformato nel modo seguente. Numeriamo le persone a cui sono indirizzate le lettere da 1 a n e ad ogni possibile disposizione delle lettere nelle buste associamo la funzione

$$f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

tale che $f(i) = j$ se la lettera indirizzata alla persona i viene infilata nella busta contenente l'indirizzo j. Il problema quindi consiste nel contare tutte le permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$ tali che $f(i) \neq i$ per ogni i. Come negli esempi precedenti, contiamo l'insieme complementare. Esso è l'unione degli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ *dove*

$$A_i = \{f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ è bigettiva e } f(i) = i\}$$

Per ogni i la cardinalità di A_i è $(n-1)!$, perché ogni funzione di A_i corrisponde ad una permutazione di $n-1$ numeri (quelli diversi da i). Per ogni scelta di $i < j$ la cardinalità di $A_i \cap A_j$ è $(n-2)!$ (si tratta di tutte le permutazioni degli elementi diversi da i e da j), e così via. Pertanto la soluzione del problema è data dall'espressione

$$n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}1$$

$$= n!\left\{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

Osserviamo infine che la *percentuale* delle funzioni cercate, ossia $1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$, tende al numero $\frac{1}{e}$ quando n tende all'infinito.

2.4. I metodi ricorsivi. Illustriamo con alcuni esempi come molti problemi di carattere combinatorio possano essere affrontati con successo con metodi ricorsivi.

Supponiamo di avere un alfabeto con due sole lettere, $\{a, b\}$.

Problema 2.7. *Contare le parole di n lettere che non hanno due "b" consecutive.*

Sia P_n l'insieme delle parole di n lettere cercato e consideriamo una parola di P_n $(n \geq 3)$. Distinguiamo due casi:

– se la parola termina con la lettera a, allora le prime $n - 1$ lettere formano una qualsiasi parola di P_{n-1};

– se la parola termina con la lettera b, allora la penultima lettera deve essere una a e, analogamente a prima, le prime $n - 2$ lettere formano una qualsiasi parola di P_{n-2}.

Per quanto osservato, ponendo $a_n = |P_n|$, abbiamo la formula ricorsiva

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{10}$$

Poiché si verifica facilmente che $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, il valore di a_n può essere calcolato utilizzando ripetutamente la formula (10).

Per le successioni definite per ricorrenza come la (10) esiste anche un modo per calcolare il valore di a_n con una formula chiusa, cioè per via diretta e senza dover applicare ripetutamente la formula di ricorrenza. Supponiamo infatti di avere una successione $a_1, a_2, a_3, \dots$ che soddisfa la formula

$$a_n = ha_{n-1} + ka_{n-2} (n \geq 3) \tag{11}$$

con h, k numeri reali e $k \neq 0$. Associamo ad essa l'equazione di secondo grado

$$x^2 = hx + k$$

e supponiamo che α e β siano le sue radici; esse possono essere reali o complesse coniugate, distinte o coincidenti.

1° caso: $\alpha \neq \beta$.

• Le successioni $a_n = \alpha^n$ e $a_n = \beta^n$ soddisfano la (11). Infatti moltiplicando l'equazione $\alpha^2 = h\alpha + k$ per α^{n-2} si ottiene

$$\alpha^n = h\alpha^{n-1} + k$$

e analogamente si ottiene la formula per $a_n = \beta^n$.

• La successioni $a_n = A\alpha^n$ e $a_n = B\beta^n$, con A, B costanti qualsiasi, soddisfano la (11). La verifica è immediata.

• Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ soddisfano la (11), allora la soddisfa anche la successione $\{a_n + b_n\}$. La verifica è immediata.

Possiamo allora concludere che

Proposizione 2.2. *Tutte le successioni della forma*

$$A\alpha^n + B\beta^n \tag{12}$$

con A, B costanti qualsiasi soddisfano la (11).

Viceversa, sia ora $\{a_n\}$ una successione che soddisfa la (11) e siano a_1, a_2 i suoi primi due valori. La successione è quindi univocamente determinata. Il sistema

$$\begin{cases} A\alpha + b\beta = a_1 \\ A\alpha^2 + B\beta^2 = a_2 \end{cases} \tag{13}$$

nelle incognite A, B è risolubile in modo unico perché il determinante ad esso associato è uguale a $\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta = \alpha\beta(\beta - \alpha) \neq 0$. Pertanto esiste una successione $\{b_n\}$ del tipo (12) che soddisfa la (11) con $b_1 = a_1$ e $b_2 = a_2$. Ma poiché $\{a_n\}$ è univocamente determinata dai valori a_1 e a_2, si deve avere $b_n = a_n$ per ogni n. Ne segue

Proposizione 2.3. *Se $\alpha \neq \beta$ ogni soluzione della (11) è del tipo*

$$A\alpha^n + B\beta^n$$

con A, B costanti opportune.

Osservazione 2.13. Nel caso del problema 2.7 l'equazione associata alla ricorrenza è

$x2 = x + 1$

che ha soluzioni $\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Sapendo che $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, il sistema (13) ha per soluzione

$$A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \quad B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

Pertanto la soluzione si può scrivere nella forma

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

I numeri di questa successione si dicono anche *numeri di Fibonacci.*

2° caso: $\alpha = \beta$. Abbiamo che

$$(x-\alpha)^2 = x^2 - hx - k = 0$$

da cui

$$h = 2\alpha, k = -\alpha^2$$

Si verifica direttamente che le successioni

$$a_n = \alpha^n \text{ e } a_n = n\alpha^n$$

verificano la (11). Pertanto, ragionando come nel primo caso, si ha che la soluzione generale della ricorrenza è

$$a_n = (An + B)\,\alpha^n$$

con A, B costanti qualsiasi.

Osservazione 2.14. Ricorrenze lineari più lunghe, cioè del tipo

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$$

si risolvono in modo completamente analogo, considerando le radici $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ del polinomio associato

$$x^k = c_1 x^{k-1} + \dots + c_k$$

Problema 2.8. *In quante regioni al massimo si può dividere il piano con n rette?*

SOLUZIONE: Sia a_n il numero cercato. La retta n-esima può incontrare le altre $n - 1$ in al più n punti distinti (uno per ciascuna delle rette già tracciate) e questo numero può essere raggiunto se non ci sono né due rette parallele né tre rette che si incontrano nello stesso punto. Pertanto

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Sommando le equazioni

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= n - 1 \\ \dots\quad &\quad \dots \\ a_2 - a_1 &= 2 \end{aligned}$$

si ha che $a_n - a_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Poiché ovviamente $a_1 = 2$, otteniamo infine

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

□

Problema 2.9. *Quante sono le partizioni di un insieme di n elementi?*

SOLUZIONE: Per questo problema non siamo in grado di fornire una soluzione con formula chiusa. Tuttavia, chiamando B_n il numero cercato, possiamo trovare una formula di ricorrenza che permette di calcolare il valore di B_{n+1} una volta noti i valori $B_0, B_1, \ldots, B_n$. I primi valori possono essere calcolati direttamente. Per esempio abbiamo

$$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, \ldots$$

Supponiamo dunque noti di valori di B_i per $0 \leq i \leq n$ e calcoliamo il valore di B_{n+1}. Sia x un elemento fissato di un insieme X con $n + 1$ elementi. Senza ledere la generalità possiamo supporre che l'insieme sia $X = \{1, \ldots, n + 1\}$ e che $x = n + 1$. Data una partizione di X, sia A il sottoinsieme della partizione che contiene x. Poniamo $|A| = k + 1$, dove k è un intero che può variare tra 0 e n. Per k fissato, il sottoinsieme A può essere scelto in $\binom{n}{k}$ modi: bisogna infatti scegliere i k numeri tra 1 ed n da affiancare al numero $n + 1$. L'insieme $X \setminus A$ ha $n - k$ elementi e, per ipotesi induttiva, può essere partizionato in B_{n-k} modi. Sommando per tutti i valori possibili di k, otteniamo la formula

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \end{aligned}$$

□

3. Appendice: Le simmetrie dei poligoni e dei poliedri regolari. Questo capitolo è staccato dal resto delle lezioni ed è il frutto di un seminario concordato con i docenti su un argomento di comune interesse.

Con il termine di simmetrie di un poligono (di un poliedro) ci si riferisce, forse in maniera un po' imprecisa ma comunque nell'uso comune, a quelle isometrie del piano (dello spazio) che mandano il poligono (il poliedro) in se stesso. In entrambi i casi è facile vedere che si tratta di un gruppo, poiché l'identità è una di queste isometrie, la composizione di due isometrie di questo tipo è ancora dello stesso tipo e l'inversa di una isometria di questo tipo è ancora dello stesso tipo.

3.1. Le simmetrie dei poligoni regolari. Le isometrie del piano che mandano un poligono regolare in se stesso devono anzitutto mandare il centro del poligono in se stesso. Le isometrie del piano che lasciano un punto fisso O (il centro del poligono) sono di due tipi:
– rotazioni intorno ad O;
– simmetrie rispetto a rette che passano per O.

Interpretate come movimenti, le isometrie del primo tipo possono essere fatte all'interno del piano e conservano l'orientazione delle figure del piano, mentre le seconde si possono fare solo uscendo dal piano e ribaltano l'orientazione delle sue figure.

Se consideriamo un poligono regolare con n lati, ci sono esattamente n rotazioni che portano il poligono in sé, poiché un vertice del poligono deve necessariamente andare in un altro vertice. Esse sono le rotazioni intorno ad O di angoli multipli di $\frac{2\pi}{n}$.

Anche le simmetrie rispetto a rette che passano per O sono n; i loro assi di simmetria sono:

- le n rette congiungenti un vertice del poligono al punto medio del lato opposto (se n è dispari);
- le $\frac{n}{2}$ rette congiungenti due vertici opposti più le $\frac{n}{2}$ rette congiungenti i punti medi di due lati opposti (se n è pari).

Possiamo dunque affermare che

Proposizione 3.1. *Il gruppo delle simmetrie di un n-agono regolare ha 2n elementi.*

Osservazione 3.1. Il gruppo delle simmetrie di un n-agono regolare non è commutativo. Infatti è facile verificare che, se s indica una simmetria rispetto ad una retta che passa per O e r_α è la rotazione intorno ad O in senso antiorario dell'angolo α, vale la regola

$$s \circ r_\alpha = r_{-\alpha} \circ s$$

Ne segue che una rotazione commuta con una simmetria rispetto ad una retta se e solo se $\alpha = -\alpha$, ossia se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \pi$, che corrispondono all'identità e alla simmetria rispetto al punto O (che si ha solo nel caso di n pari).

Osservazuibe 3.2. Il gruppo delle simmetrie di un n-agono regolare può essere interpretato come un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di n elementi, ossia dei vertici del poligono. Per far questo basta associare ad ogni isometria il cambio di posizione che subiscono i suoi vertici tramite il relativo movimento. Per esempio, se numeriamo i vertici di un pentagono regolare da 1 a 5 in senso antiorario e consideriamo la rotazione intorno ad O dell'angolo $\frac{4\pi}{5}$, la permutazione corrispondente è la funzione definita da

$$f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 5, f(4) = 1, f(5) = 1$$

Osservazione 3.3. Il gruppo delle simmetrie di un n-agono regolare ha un sottogruppo normale con n elementi, ossia il sottogruppo formato dalle sole rotazioni. Questo sottogruppo è ciclico ed è isomorfo al gruppo delle classi resto modulo n con l'operazione di addizione. Infatti alla composizione di due rotazioni corrisponde la somma degli angoli di rotazione.

3.2. Le simmetrie dei solidi platonici. Esistono soltanto 5 tipi di solidi che sono completamente regolari, cioè che hanno per facce tutti poligoni regolari uguali fra loro e tutti gli angoli solidi fra le facce uguali. Essi sono: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Per convenienza riportiamo il numero di vertici, spigoli e facce di ciascuno di essi.

	Vertici	Spigoli	Facce
TETRAEDRO	4	6	4
CUBO	8	12	6
OTTAEDRO	6	12	8
DODECAEDRO	20	30	12
ICOSAEDRO	12	30	20

Anche in questo caso le isometrie che mandano un poliedro regolare in se stesso devono mandare il centro O del poliedro in se stesso. Le isometrie dello spazio che lasciano fisso il punto O e che possono essere interpretate come movimenti all'interno dello spazio stesso sono solo le rotazioni intorno ad una retta che passa per O. Se consideriamo invece anche le isometrie che non possono essere interpretate come movimenti all'interno dello spazio, come per esempio una simmetria rispetto ad un piano passante per O, allora il gruppo delle simmetrie che otterremo avrà un numero doppio di elementi, di cui il primo è un sottogruppo normale, esattamente come nel caso dei poligoni regolari. In questo caso scegliamo di studiare solo i movimenti che avvengono all'interno dello spazio, perché ci sembra un problema più naturale. L'altra metà dei movimenti si potrà comunque ottenere componendo una simmetria rispetto ad un piano opportuno con tutte le rotazioni. In tutti i casi sarà utile il seguente

Lemma 3.2. *Il numero delle simmetrie di un poliedro regolare è uguale al prodotto del numero delle simmetrie che lasciano fisso un vertice assegnato per il numero dei vertici del poliedro.*

DIMOSTRAZIONE: Sia A un vertice del poliedro e sia m il numero delle simmetrie che lasciano fisso A. È immediato vedere che ci sono simmetrie del poliedro che mandano il vertice A in qualsiasi altro vertice B. Per dimostrare il lemma basterà dunque far vedere che per ogni vertice B il numero delle simmetrie che mandano A in B è uguale a m. Supponiamo che $f_1, \ldots, f_m$ siano le simmetrie tali che $f_i(A) = (A)$ e sia g una simmetria tale che $g(A) = B$. Considerando le simmetrie $g \circ f_1, \ldots, g \circ f_m$ si vede che $g \circ f_i(A) = B$ per $i = 1, \ldots, m$ e dunque ci sono almeno m simmetrie che mandano A in B. D'altra parte, se h è una qualsiasi simmetria tale che $h(A) = B$, si ha

$$g^{-1} \circ h(A) = A$$

da cui $g^{-1} \circ h = f_i$ e $h = g \circ f_i$ per qualche indice i con $1 \leq i \leq m$. □

Osservazione 3.4. In teoria dei gruppi il significato del lemma precedente si esprime così: il gruppo delle simmetrie agisce sull'insieme dei vertici del poliedro. L'insieme delle trasformazioni che lasciano fisso un vertice si dice stabilizzatore del vertice ed è un sottogruppo. L'insieme delle possibili immagini del vertice tramite le trasformazioni del gruppo si dice orbita del vertice. In generale vale la formula che l'ordine del gruppo è uguale al prodotto dell'ordine dello stabilizzatore di un elemento per il numero di elementi nell'orbita di quell'elemento.

Le simmetrie del tetraedro

Sia A un vertice del tetraedro. L'insieme delle simmetrie che lasciano fisso A è formato dalle rotazioni intorno all'asse AO (indicando con O il centro del tetraedro). Si tratta dunque di tre rotazioni, che corrispondono alle tre rotazioni della faccia opposta ad A (che è un triangolo). Per il lemma 3.2 il gruppo delle simmetrie ha dunque ordine $3 \cdot 4 = 12$. Le simmetrie si possono classificare nel modo seguente:

- l'identità;
- 8 rotazioni non banali intorno ad un asse passante per un vertice e per il centro della faccia opposta (2 rotazioni non banali per ciascuno dei 4 vertici);
- 3 rotazioni di π intorno ai 3 assi che congiungono i punti medi di due lati opposti.

Come nel caso dei poligoni, il gruppo può essere interpretato come un sottogruppo del gruppo delle permutazioni dei suoi quattro vertici (o anche delle permutazioni dei suoi sei spigoli e delle sue quattro facce). Si verifica direttamente che esso è costituito dalle permutazioni *pari* di 4 elementi (i vertici), ossia da quelle permutazioni che si possono ottenere solo facendo successivamente un numero pari di scambi.

Prima di affrontare lo studio degli altri poliedri, diamo un significato alle evidenti simmetrie presenti nella tabella all'inizio del paragrafo. Se si prendono i punti centrali delle 6 facce di un cubo e si uniscono fra loro i punti centrali di facce adiacenti si ottiene un solido regolare con lo stesso centro, avente 6 vertici e facce triangolari: l'ottaedro. Se viceversa si prendono i punti centrali delle 8 facce dell'ottaedro e si uniscono quelli relativi a facce adiacenti si ottiene un solido regolare con lo stesso centro, avente 8 vertici e facce quadrate: il cubo. Ogni isometria che manda il cubo in se stesso manderà anche i punti centrali delle facce in se stessi e quindi l'ottaedro in se stesso e viceversa.

Un discorso completamente analogo vale per il dodecaedro e l'icosaedro. Unendo i punti centrali delle facce del primo si ottiene il secondo e viceversa, e le simmetrie dell'uno saranno anche simmetrie dell'altro. Abbiamo dunque provato

Proposizione 3.3. *I gruppi di simmetrie del cubo e dell'ottaedro sono isomorfi. I gruppi di simmetrie del dodecaedro e dell'icosaedro sono isomorfi.*

Nel seguito ci limiteremo dunque a studiare i casi del cubo e del dodecaedro.

Le simmetrie del cubo

Le simmetrie che lasciano fisso un vertice A sono 3, poiché devono ruotare fra di loro i tre vertici adiacenti ad A. Poiché il numero dei vertici del cubo è 8, il lemma 3.2 ci dice che il numero totale delle simmetrie del cubo è uguale a $3 \cdot 8 = 24$. Esse si possono classificare come segue:

- l'identità;
- 8 rotazioni non banali intorno a rette congiungenti due vertici opposti (2 rotazioni per ciascuna delle 4 coppie di vertici opposti);
- 6 rotazioni di π intorno alle rette congiungenti i punti medi di 2 spigoli opposti (una rotazione per ciascuna delle 6 coppie di spigoli opposti);
- 9 rotazioni non banali intorno a rette congiungenti i centri di due facce opposte (3 rotazioni per ciascuna delle 3 coppie di facce opposte).

Il gruppo può essere interpretato naturalmente come un sottogruppo delle permutazioni dei suoi 8 vertici, oppure dei suoi 12 spigoli o delle sue 6 facce. Tuttavia analizzando in dettaglio la struttura del gruppo ci si accorge che esso è isomorfo al gruppo di permutazioni di 4 elementi. In effetti anche questo fatto ha un'interpretazione geometrica. Ad ogni simmetria del cubo può essere associata infatti anche una permutazione delle 4 coppie di vertici opposti e questa associazione dà un isomorfismo fra il gruppo delle simmetrie del cubo e il gruppo delle permutazioni di queste 4 coppie.

Le simmetrie del dodecaedro

Le simmetrie che lasciano fisso un vertice A sono 3, poiché devono scambiare tra loro circolarmente le tre facce del dodecaedro concorrenti in A. Per il lemma 3.2 il numero delle simmetrie del dodecaedro è uguale a $3 \cdot 20 = 60$. Esse si possono classificare come segue:

- l'identità;
- 20 rotazioni non banali intorno a rette che congiungono 2 vertici opposti (2 rotazioni per ciascuna delle 10 coppie di vertici opposti);
- 15 rotazioni di π intorno a rette che congiungono i punti medi di 2 spigoli opposti (una rotazione per ciascuna delle 15 coppie di spigoli opposti);
- 24 rotazioni non banali intorno a rette che congiungono i centri di due facce opposte (4 rotazioni per ciascuna delle 6 coppie di facce opposte).

Il gruppo può essere interpretato come un sottogruppo delle permutazioni dei 20 vertici del poliedro (o anche dei suoi 30 spigoli o delle sue 12 facce). Tuttavia anche in questo caso si può dare un'ulteriore interpretazione. I 30 spigoli del tetraedro si possono raggruppare in 15 coppie di spigoli a due a due opposti e paralleli; inoltre queste 15 coppie si possono raggruppare in 5 terne costituite ciascuna da 3 coppie di spigoli mutualmente ortogonali. Si può dunque associare ad ogni simmetria del tetraedro una permutazione di queste 5 terne, ottenendo così un omomorfismo iniettivo tra il gruppo delle simmetrie del tetraedro e il gruppo delle permutazioni di 5 elementi. Osservando infine che l'immagine di questo omomorfismo sono tutte e sole le permutazioni pari, concludiamo che il gruppo delle simmetrie del tetraedro è isomorfo al gruppo delle permutazioni pari su 5 elementi.

BIBLIOGRAFIA

SCIMEMI B., *Algebretta*, Ed. Decibel, Zanichelli.
CHILDS L., *Algebra, un'introduzione concreta*, ETS Editrice.
DAVENPORT H., *Aritmetica superiore: un'introduzione alla teoria dei numeri*, Zanichelli.
CERASOLI M., EUGENI F., PROTASI M., *Elementi di matematica discreta*, Zanichelli.
GRAHAM R.L., KNUTH D.E., PATASHNIK O., *Matematica discreta (Principi matematici per l'informatica)*, Hoepli.
COXETER H.S.M., *Introduction to geometry*, Ed. Wiley.
WEYL H., *La simmetria*, Feltrinelli.

IL COMPUTER NELLA DIDATTICA DELL'ALGEBRA

Paolo Boieri
Dipartimento di Matematica - Politecnico di Torino

Introduzione. Queste note riproducono parte del contenuto delle lezioni su "Il computer nella didattica dell'algebra" svolte nell'ambito del Corso Residenziale in Didattica della Matematica "L'insegnamento dell'algebra tra tradizione e rinnovamento" tenutosi a Viareggio dal 12 al 23 Settembre 1994.

Lo scopo è quello di presentare il pacchetto software Derive della Soft Warehouse, con particolare attenzione al suo possibile utilizzo nella didattica dell'algebra nella scuola secondaria superiore.

Lo spazio disponibile non permette di riprodurre l'intero materiale presentato durante il corso; viene omessa la prima parte, quella di introduzione "di base" a Derive, con la descrizione dei comandi disponibili nel programma.

Concentriamo invece la nostra attenzione sulla programmazione in Derive, che è molto interessante e stimolante "in sé" (è un esempio di linguaggio funzionale, che può essere presentato a complemento della conoscenza di un linguaggio dichiarativo, quale il Pascal) e può essere utilizzata dal docente in maniera creativa per la presentazione di numerosi argomenti (di algebra, ma anche di geometria, di analisi ...).

Il prerequisito per la lettura di queste note è quindi una conoscenza, anche non approfondita, dei comandi di base di Derive; quelli che sono di interesse per gli sviluppi seguenti sono trattati in dettaglio.

Il lettore è invitato a leggere questo testo "davanti al calcolatore", ripetendo gli esempi svolti e, soprattutto, risolvendo gli esercizi.

Viene utilizzata la versione Derive 2.59: quasi tutte le considerazioni svolte valgono per tutte le versioni 2.xx. Tuttavia vi possono essere delle piccole differenze per quanto riguarda le funzioni tratte dai file .MTH che accompagnano Derive, qualora vengano utilizzate versioni precedenti alla 2.59.

Una avvertenza per la lettura: le righe di comandi da immettere sono evidenziate andando sempre a capo rispetto al testo; quando dobbiamo distinguere tra una riga di comandi immessa dall'utente e la riga di output di Derive, quest'ultima viene indentata.

Per la preparazione di queste note abbiamo lavorato con Derive e salvato il lavoro fatto in un file .MTH, che riproduce sia quanto immesso dall'utente sia le elaborazioni prodotte da Derive. Bisogna tenere presente che queste ultime sono riprodotte (nei file .MTH e quindi anche in queste note) in "modo testo" mentre sullo schermo vengono visualizzati in modo "più attraente". Ad esempio, qui leggiamo "n^2", mentre sullo schermo viene visualizzato n^2.

1. Le variabili. In Derive è possibile utilizzare variabili a cui non è assegnato alcun valore. I nomi di queste variabili possono essere di una sola lettera o di più lettere.

Per utilizzare variabili di una sola lettera si usa il comando Options Input Mode e si sceglie Character; in questo caso non è necessario separare le variabili, per cui, ad esempio, "xy" viene interpretato come il prodotto di x e y. Se invece scegliamo Options Input Mode Word possiamo usare nomi composti da più lettere (oppure numeri e il simbolo _); in questo caso è necessario separare sempre con uno spazio (oppure con una parentesi o con un simbolo di operazione) due variabili.

La scelta Options Input Case Sensitive permette di distinguere tra lettere maiuscole e minuscole nel nome di una variabile (per cui RIS oppure Ris oppure ris sono considerate tre diverse variabili), mentre con Options Input Case Insensitive questo non avviene.

In queste note sono utililizzate le opzioni Word e Case-Insensitive: in virtù della seconda scelta, Derive riscrive i nomi delle variabili sempre in minuscolo e i nomi delle funzioni (sia presenti nel programma che definite dall'utente) in maiuscolo.

A una variabile possiamo associare un valore numerico o simbolico; per fare questo si utilizza il comando Declare Variable: si introduce il nome della variabile e poi il suo valore. Lo stesso effetto è raggiunto battendo direttamente nome e valore. Ad esempio, se vogliamo associare alla variabile chiamata *segno* il valore –1, basta scrivere

segno: =-1

Il valore associato a *segno* resta immutato fino a che non assegniamo un nuovo valore, oppure fino a che non rendiamo *segno* di nuovo una variabile libera. Per fare questo, basta battere

segno:=

Nelle due scritture precedenti osserviamo la presenza dell'operatore di assegnazione ":=", da non confondere con il segno di uguale.

2. Le funzioni. La definizione e l'utilizzo delle funzioni è fondamentale in Derive, in quanto la programmazione in questo linguaggio consiste proprio nel definire delle nuove funzioni.

Derive possiede un certo numero di funzioni predefinite che soddisfano alle usuali esigenze di un utilizzatore. Per averne l'elenco basta consultare il manuale oppure l'help presente nel programma: tra di esse troviamo, oltre alle funzioni trigonometriche dirette e inverse, esponenziali e logaritmiche, iperboliche dirette e inverse anche alcune funzioni per il trattamento dei numeri complessi, funzioni statistiche, legate al calcolo delle probabilità, finanziarie e così via.

Supponiamo di dover utilizzare spesso in una seduta di lavoro una funzione: ad esempio $y = \ln((1+x)/(1+x^2))$; per evitare di digitarla in continuazione possiamo introdurre una nuova funzione a cui assegniamo il valore $\ln((1+x)/(1+x^2))$.

Con il comando Declare Function introduciamo dapprima il nome, (che supponiamo essere F1), poi la definizione (battendo LOG((1+x)/(1+x^2))); DERIVE analizza l'espressione e identifica le variabili presenti nella funzione. Appare quindi la definizione

```
F1(x):=LOG((1+x)/(1+x^2))
```

in cui si nota ancora a presenza dell'operatore di assegnazione ":=" e il fatto, già menzionato, che le funzioni predefinite in Derive sono riscritte in maiuscolo (indipendenetmente da come sono state introdotte)

Un modo equivalente di introdurre la funzione è quello di scegliere Author e di digitare F1(x):=LOG((1+x)/(1+x^2)) (anche qui non è essenziale la maiuscola nella scrittura dei nomi delle funzioni).

La funzione appena definita può essere calcolata; se battiamo

```
F1(3)
```

e utilizziamo Simplify otteniamo

```
-LN(5/2);
```

possiamo anche calcolare, ad esempio, la derivata o una primitiva di F1(x); a tutti gli effetti F1(x) è una nuova funzione di Derive.

Una funzione definita dall'utente può essere utilizzata, come le funzioni di base, per ulteriori definizioni di funzioni: ad esempio, se introduciamo la distanza dall'origine nello spazio

R(x,y,z):=SQRT(x^2+y^2+z^2)

possiamo definire, a partire da essa, il potenziale newtoniano

NEW_POT(x,y,z):=1/R(x,y,z)

Se ora battiamo

NEW_POT(x,y,z)

e scegliamo SIMPLIFY otteniamo

1/SQRT(x^2+y^2+z^2).

Una interessante caratteristica è quella di potere introdurre delle funzioni "senza definizione", analogamente a quanto accade per le variabili. Per fare questo:

1) si sceglie Declare Function Name e si introduce il nome della funzione;
2) al prompt seguente (quello di Declare Function Value) si batte Enter;
3) al prompt Declare Function Variable si introduce la variabile (oppure le variabili).

Una procedura analoga è quella di introdurre direttamente il nome della funzione, le variabili e il simbolo di assegnazione ":=" e poi di battere Enter.

A partire dalle funzioni "senza definizione"

F(x):=

G(x):=

definiamo la funzione

PROD(x):=F(x)*G(x)

Ora possiamo chiedere, ad esempio, il calcolo della derivata prima di PROD(x), ottenendo la regola di derivazione

DIF(PROD(x),x)

G(x)*DIF(F(x),x)+F(x)*DIF(G(x),x)

(si osservi che DIF(F(x),x)) è la funzione che permette di calcolare la derivata rispetto alla variabile x; questa funzione può essere introdotta sia direttamente sia tramite il comando Calculus Differentiate).

3. Vettori e matrici. Le strutture di vettore e di matrice hanno un'importanza fondamentale in Derive, in quanto, oltre a permettere l'esecuzione delle usuali operazioni vettoriali e matriciali, sono strutture fondamentali della programmazione.

Un vettore può essere introdotto mediante il comando Declare Vector: in questo caso viene richiesta la dimensione del vettore e poi, al prompt di Derive, devono essere introdotte le componenti, che possono essere sia numeri che variabili che funzioni.

Un altro modo di introdurre un vettore è quello di assegnarne le componenti, scrivendole tra parentesi QUADRE:

[SIN(x), COS(x), x^2]

È possibile sommare due vettori della stessa dimensione, componente a componente

[1,2,3,4]+[7,6,5,4]

    [8,8,8,8]

moltiplicare un vettore per uno scalare

x*[x,x^2,x^3]

    [x^2,x^3,x^4]

eseguire il prodotto scalare di due vettori della stessa dimensione (il simbolo di prodotto scalare è il punto)

[1,2,3,4] . [1,0,0,0]

    1

[x,y,z] . [x,y,z]

x^2+y^2+z^2

Per vettori con tre componenti si calcola il prodotto vettoriale

CROSS([1,2,3],[1,2,3])

[0,0,0]

Se i vettori hanno due componenti si ottiene uno scalare (è la terza componente del prodotto vettoriale dei vettori, pensati come vettori con tre componenti, la terza delle quali è nulla)

CROSS([a,b],[b,a])

a^2-b^2

Una matrice può essere introdotta con il comando Declare Matrix: si assegnano le dimensioni e poi, al prompt di Derive, gli elementi; in alternativa si assegna la matrice come vettore di vettori: ogni vettore è una RIGA della matrice.

[[a,b,c,d],[e,f,g,h]]

Quando le dimensioni lo consentono, una matrice viene visualizzata sullo schermo in forma di tabella preceduta e seguita da parentesi quadre; in caso contrario viene riscritta nella stessa forma in cui viene introdotta, cioè come vettore di vettori riga.

Bisogna notare la differenza tra queste tre scritture, che coinvolgono gli stessi elementi:

- vettore di componenti a, b, c: [a,b,c];
- matrice 1 x 3 (una riga e tre colonne): [[a,b,c]] (si noti che, quando Derive riscrive questa matrice, i suoi elementi non appaiono separati da virgole, a differenza di quanto accade per le componenti di un vettore);
- matrice 3 x 1 (tre righe e una colonna): [[a],[b],[c]].

Assegnata una matrice, si può ottenere la sua trasposta (il simbolo per la trasposta è l'accento grave, che, se non disponibile su tastiera, può essere ottenuto tenendo premuto Alt e battendo 96 sul tastierino numerico)

[[1,2,3],[4,5,6]]`

[[1,4],[2,5],[3,6]]

Per le matrici quadrate si calcola il determinante

DET([[a,b],[c,d]])

a*d-b*c

e la traccia (somma degli elementi diagonali)

TRACE([[1,2,3],[a,b,c],[10,20,30]])

b+31

È possibile moltiplicare una matrice per se stessa un certo numero *n* di volte; questa operazione viene indicata elevando la matrice alla potenza *n*-esima:

[[1,0,0],[0,2,0],[0,0,5]]^3

[[1,0,0],[0,8,0],[0,0,125]]

[[a,b],[c,d]]^2

[[a^2+b*c,a*b+b*d],[a*c+c*d,b*c+d^2]]

Elevando la matrice alla potenza –1 si ottiene l'inversa (per matrici non singolari)

[[1,2,3],[0,4,1],[1,0,0]]^(-1)

[[0,0,1],[-1/10,3/10,1/10],[2/5,-1/5,-2/5]]

Nel caso di matrici singolari, l'inversa non può essere calcolata e viene riscritta la matrice

[[2,4],[10,20]]^(-1)

[[2,4],[10,20]]^(-1)

Data una matrice M e un vettore INCORPORA Equation si possono calcolare i prodotti $M.v$ e $v.M$. Nel primo caso si moltiplicano scalarmente le righe della matrice per il vettore (da pensare come vettore colonna), nel secondo si moltiplica scalarmente il vettore (da pensare come vettore riga) per le colonne della matrice:

[[a,b],[c,d]] . [2,5]

[2*a+5*b,2*c+5*d]

[2,5] . [[a,b],[c,d]]

[2*a+5*c,2*b+5*d]

Derive calcola il prodotto di due matrici purché il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe della seconda:

[[a,b],[c,d]] . [[1,2,3],[1,2,3]]

[[a+b,2*a+2*b,3*a+3*b],[c+d,2*c+2*d,3*c+3*d]]

[[1,2],[1,2],[1,2]] . [[a,b],[c,d]]

[[a+2*c,b+2*d],[a+2*c,b+2*d],[a+2*c,b+2*d]]

4. Vettori, matrici e grafica. In generale, per tracciare un grafico in Derive bisogna introdurre l'espressione di cui si vuole tracciare il grafico e poi passare allla "finestra grafica" (che può essere a pieno schermo oppure combinata con la finestra di testo): ad esempio, battiamo

SIN(x)

e poi scegliamo Plot, passando così alla finestra grafica; battendo ancora Plot otteniamo il grafico della funzione $y = \sin x$.

Non trattiamo in dettaglio le varie opzioni della finestra grafica (quali Zoom, Axes e così via), rimandando il lettore al manuale che accompagna Derive; vogliamo invece evidenziare come sia possibile ottenere grafici di altro tipo, oltre a quello di una funzione di una variabile, utilizzando le strutture di vettore e di matrice.

Per evidenziare un punto sullo schermo bisogna assegnare il vettore delle coordinate; ad esempio, se introduciamo il vettore

[1,2]

e scegliamo due volte Plot nel menu dei comandi passiamo alla finestra grafica e otteniamo la visualizzazione del punto di coordinate (1,2).

Per evidenziare n punti si devono assegnare le n coppie di coordinate come vettore di coppie ordinate (e quindi matrice con n righe e 2 colonne); ad esempio, scriviamo

[[0,1],[1,0],[1,1],[3,2]]

e battiamo di nuovo due volte Plot.

Abbiamo già visto come si ottiene il grafico di una funzione; se scriviamo un vettore di due o più funzioni possiamo ottenere altri tipi di grafici.

Se introduciamo un vettore di DUE funzioni

[COS(t),SIN(2*t)]

ottieniamo (dopo avere introdotto gli estremi dell'intervallo di variazione del parametro t) la curva di equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin 2t$.

Assegnando una matrice con n righe e 2 colonne si hanno n grafici parametrici sovrapposti:

[[COS(t),SIN(t)],[COS(t),2*SIN(t)],[2*COS(t),SIN(t)]]

In questi due ultimi esempi si è adottata la lettera t come simbolo per la variabile indipendente solamente per coerenza con la simbologia usuale: Derive accetta qualunque nome per la variabile.

Se invece si assegna un vettore di TRE O PIÙ funzioni si ottengono i grafici (cartesiani) delle funzioni sovrapposti e in colori diversi:

[1+3*x,SIN(x),-1-1*COS(x)]

5. Le funzioni Sum e Product. Supponiamo di dover calcolare la somma dei quadrati degli interi da 1 a 10. Per fare questo, ad esempio in Pascal, dobbiamo introdurre una variabile in cui memorizzare le somme parziali e poi utilizzare un ciclo, ripetendo il calcolo del quadrato e l'aggiornamento della somma parziale per un numero predeterminato di volte (si parla di "ciclo enumerativo"). In Derive non è disponibile una struttura generale che permetta la realizzazione di un ciclo enumerativo; tuttavia parecchie costruzioni realizzate in altri linguaggi grazie ai cicli, possono essere implementate in Derive con l'ausilio dei vettori. La funzione Sum è, in certo senso, un "caso particolare" in quanto fornisce un strumento del tipo "scatola nera" per risolvere il problema, molto importante nella pratica matematica, del calcolo di una sommatoria.

Per risolvere il problema del calcolo della somma dei quadrati degli interi da 1 a 10 scriviamo

n^2

e poi scegliamo Calculus Sum; al prompt, assegniamo l'espressione da sommare, la variabile, il valore iniziale e finale di *n*.

Con effetti analoghi si può introdurre la funzione che realizza il calcolo della sommatoria anche direttamente; la sintassi è

SUM(u,n,nmin,nmax),

dove:
- *u* è, in generale, una funzione di *n*;
- *n* è la variabile;
- *nmin* e *nmax* sono gli estremi tra cui varia *n*.

SUM(n^2,n,1,10)

385

SUM(1/n,n,1,1000)

5336291328229478... frazione con numeratore e denominatore di circa 500 cifre

L'espressione *u* può dipendere anche da altre variabili, oltre che *n*:

SUM(1/(x+n),n,1,5)

(5*x^4+60*x^3+255*x^2+450*x+274)/
((x+1)*(x+2)*(x+3)*(x+4)*(x+5))

Gli estremi *nmin* e *nmax* possono essere anche simboli, come in questo esempio, in cui viene calcolata la somma degli interi da 1 a *k*:

SUM(n,n,1,k)

k*(k+1)/2

Infine si può osservare che l'espressione indicata con *u* può anche non dipendere esplicitamente dall'indice di sommatoria: in questo caso vengono sommate delle costanti.

SUM(1,n,3,10)

8

Le stesse considerazioni e la stessa sintassi si applicano al calcolo di prodotti:

PRODUCT(k^2,k,1,n)

n!^2

6. L'uso di Vector. L'uso del comando Vector è fondamentale nella programmazione in Derive per la realizzazione di procedimenti associati a cicli enumerativi. Partiamo anche in questo caso da un esempio: supponiamo di dover calcolare e tabulare i quadrati degli interi da 1 a 10.

Per fare questo utilizziamo la funzione Vector, la cui sintassi è:

VECTOR(u,n,nmin,nmax) oppure VECTOR(u,n,nmin,nmax,passo)

dove:

- *u* è, in generale, una funzione di *n*;
- *n* è la variabile;
- *nmin* e *nmax* sono gli estremi tra cui varia *n*.
- *passo* definisce l'incremento della variabile *n* tra gli estremi *nmin* e *nmax*.

Vediamo degli esempi: per realizzare la tabella dei quadrati degli interi da 1 a 10 scriviamo:

VECTOR(n^2,n,1,10)

da cui, applicando SIMPLIFY, otteniamo

[1,4,9,16,25,36,49,64,81,100]

Il vettore nullo con 20 componenti è definito come

VECTOR(0,n,1,20)

semplificato in

[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

Il valore iniziale *nmin* può essere omesso: in tal caso viene assunto, per default, uguale a 1 e l'indice viene assunto come intero. Se *nmax* non è intero, si arriva al massimo intero minore di *nmax*.

VECTOR(x^n,n,2.5)

[x,x^2]

Le quantità *nmin*, *nmax* e *passo* possono anche non essere intere

VECTOR(a+r*b,r,0.2,3.8,0.4)

[a+b/5,a+3*b/5,a+b,a+7*b/5,a+9*b/5,a+11*b/5,a+13*b/5,a+3*b,a+17
*b/5,a+19*b/5]

In alcuni casi (ma non in tutti) possono essere applicati ai vettori costruiti tramite Vector dei comandi o delle funzioni che agiscono sulle singole componenti dei vettori. Ad esempio, per scomporre i polinomi del tipo $x^n - 1$, con n da 2 a 4, scriviamo

VECTOR(x^n-1,n,2,4)

che semplifichiamo in

[x^2-1,x^3-1,x^4-1]

applicando ora Factor a questa espressione, otteniamo il vettore dei polinomi decomposti

[(x-1)*(x+1),(x-1)*(x^2+x+1),(x-1)*(x+1)*(x^2+1)]

Mediante l'uso iterato di Vector si possono definire delle matrici; questo procedimento è molto utile anche per le applicazioni grafiche. Lo illustriamo con due esempi.

Esempio 1

Vogliamo tracciare il grafico di una successione $u(n)$, evidenziando nel piano cartesiano i punti $(n, u(n))$, con n che varia da 1 a k.

Per fare questo abbiamo visto che bisogna assegnare una matrice a due colonne [[1,u(1)],[2,u(2)], ..., [k,u(k)]].

Se $u(n) = (-1)^n / n$ e $k = 10$ scriviamo

VECTOR([n,(-1)^n*1/n],n,1,10)

semplificato in

[[1,-1],[2,1/2],[3,-1/3],[4,1/4],[5,-1/5],[6,1/6],[7,-1/7],[8,1/8],[9,-1/9],
[10,1/10]]

di cui possiamo poi tracciare il grafico.

Esempio 2

Vogliamo costruire la tavola pitagorica (con 10 elementi).

Si tratta di definire una matrice il cui elemento (i, j) è il prodotto ij. Per fare questo si itera la funzione Vector.

VECTOR(VECTOR(i*j,j,1,10),i,1,10)

che semplificato fornisce

[[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],[2,4,6,8,10,12,14,16,18,20],[3,6,9,12,15,18,21,24,27,30],[4,8,12,16,20,24,28,32,36,40],[5,10,15,20,25,30,35,40,45,50],[6,12,18,24,30,36,42,48,54,60],[7,14,21,28,35,42,49,56,63,70],[8,16,24,32,40,48,56,64,72,80],[9,18,27,36,45,54,63,72,81,90],[10,20,30,40,50,60,70,80,90,100]]

7. Alcune funzioni relative a vettori e matrici. Vi sono alcune funzioni che agiscono su vettori e che sono molto utili nella programmazione. Per introdurle, iniziamo definendo un vettore v e una matrice m

v:=[a,b,c,d,e,f]

m:=[[a,b],[c,d],[e,f]]

La funzione DIMENSION(v) applicata a un vettore fornisce il numero di elementi di v; applicata a una matrice ne fornisce il numero di righe.

DIMENSION(v)

6

DIMENSION(m)

3

La funzione ELEMENT(v,k) fornisce l'elemento k-esimo del vettore v; mentre ELEMENT(m,k) fornisce la riga k-esima della matrice m. Infine ELEMENT(m,i,j) fornisce l'elemento (i, j) della matrice m.

ELEMENT(v,3)

c

ELEMENT(m,2)

[c,d]

ELEMENT(m,2,1)

c

La funzione APPEND(v_1,v_2,... v_n) applicata ai vettori *v_1*, *v_2*, ..., *v_n* fornisce un unico vettore che come componenti le componenti dei vettori *v_1*, *v_2*, ..., *v_n*.

v1:=[1,2,3]

v2:=[3,2,1]

APPEND(v1,v2)

[1,2,3,3,2,1]

Una osservazione finale: la funzione Vector può essere utilizzata in modo molto più generale di quanto visto finora, in quanto ogni componente di un vettore può essere uno scalare, un vettore o una struttura più complicata, Osserviamo il seguente esempio:

v:=[1,2,[a,b,[10,11,12],c],4,5]

ELEMENT(v,3)

[a,b,[10,11,12],c]

ELEMENT(v,3,3)

[10,11,12]

ELEMENT(v,3,3,1)

10

8. L'iterazione funzionale. Una delle caratteristiche di base del linguaggio di programmazione di Derive è quella di consentire l'iterazione del calcolo di una funzione.

Nel linguaggio dell'analisi matematica si tratta del calcolo della composizione di una funzione con se stessa. Partiamo da un esempio collegato con la soluzione di una equazione: si tratta di cercare una approssimazione della soluzione dell'equazione trascendente $x = \cos x$.

Dall'esame del grafico della funzione coseno, sappiamo che tale soluzione è unica ed è compresa tra 0 e $\pi/2$; inoltre questa soluzione può essere calcolata come punto fisso dell'applicazione che a x associa $\cos x$.

Questo significa che partiamo da un valore approssimato per la soluzione stessa (ad esempio $x = 1$) e calcoliamo $\cos 1$; verificato che $\cos 1$ non è uguale a 1 (e che quindi 1 non è la soluzione dell'equazione $x = \cos x$) sostituiamo $\cos 1$ ad 1 e calcoliamo $\cos(\cos 1)$; ripetiamo il controllo (verificando che $\cos(\cos 1)$ non è uguale a $\cos 1$) e proseguiamo in questo modo. Sotto certe ipotesi (che in questo caso sono verificate) la successione così costruita converge a un numero reale che è una soluzione dell'equazione $x = \cos x$.

Per realizzare il calcolo iterato di una funzione Derive possiede la funzione ITERATES, una delle cui possibili sintassi è:

ITERATES(u(x),x,x_in)

dove $u(x)$ è la funzione di cui vogliamo calcolare le iterate e x_in è il valore della stima iniziale.

Quando si utilizza la funzione ITERATES vengono svolti i seguenti passaggi:

- viene posto $x = x\_in$;
- si calcola $u(x)$;
- se $u(x) = x$ oppure $u(x)$ è un valore già presente nella sequenza il processo si arresta altrimenti si pone $x = u(x)$ e si torna al passo precedente.

È importante esaminare con cura il criterio di arresto del procedimento.

Nella modalità Exact il calcolo delle iterazioni può anche non arrestarsi mai (come avviene nell'esempio considerato sopra: i risultati ottenuti man mano, cioè 1, $\cos 1$, $\cos(\cos 1)$, $\cos(\cos(\cos 1))$, ... sono tutti diversi tra loro, in modalità Exact).

In situazioni come questa Derive, dopo un lasso di tempo che dipende dalla velocità di elaborazione e dalla memoria disponibile, si arresta e visualizza il messaggio "Memory Full".

Se invece si è scelto Options Precision Approximate le quantità irrazionali sono approssimate a razionali e sono calcolate a ogni passaggio; per questo il procedimento può arrestarsi.

Esempio 1

In questo esempio il procedimento si arresta dopo due soli passi:

ITERATES(1/x,x,2)

[2,1/2,2]

Esempio 2

In questo esempio realizziamo il calcolo delle potenze successive dell'unità immaginaria (che è indicata in modo testo da #i) a partire da 1:

ITERATES(#i*x,x,1)

[1,#i,-1,-#i,1]

È possibile prefissare il numero totale di iterazioni, utilizzando la seguente sintassi

ITERATES(u(x),x,x_in,max_num_iter),

dove *max_num_iter* è il numero totale di iterazioni.

Il valore iniziale può essere anche simbolico; è così possibile calcolare la composizione di una funzione con sé stessa (si consiglia di tracciare i grafici di queste funzioni e di riflettere sul risultato ottenuto ...):

ITERATES(1/(1+x),x,x,5)

[x,1/(x+1),(x+1)/(x+2),(x+2)/(2*x+3),(2*x+3)/(3*x+5),(3*x+5)/(5*x+8)]

La funzione ITERATE ha la stessa sintassi di ITERATES e differisce da questa solamente per il fatto che fornisce solamente il risultato finale dell'iterazione e non il vettore che contiene anche tutti i passaggi intermedi.

9. Gli statement condizionali. In Derive è possibile definire delle funzioni contenenti degli statement condizionali. La sintassi è

IF(condizione,se_vera,se_falsa,se_indecidibile)

dove:

condizione — è una relazione contenente gli operatori di uguaglianza o di disuguaglianza che in Derive sono: =, /= (diverso), >, >= (maggiore o uguale), <, <= (minore o uguale);

se_vera, se_falsa — sono due espressioni;

se_indecidibile — è un'espressione (facoltativa).

DERIVE controlla la condizione; se è vera la funzione IF ritorna il valore se_vera; se è falsa ritorna il valore se_falsa; se è indecidibile ed è presente se_indecidibile ritorna il valore se_indecidibile, altrimenti ritorna tutta la funzione. Ecco degli esempi, in cui utilizziamo la funzione IF per costruire delle funzioni definite a tratti (di cui consigliamo di tracciare il grafico).

F1(x):=IF(x>0,1,-1)

fornisce la funzione che vale 1 se $x > 0$ e -1 se $x \leq 0$;

F2(x):=IF(x>0,COS(x),1+x)

fornisce la funzione che vale $\cos x$ per $x > 0$ e $1 + x$ per $x \leq 0$.

Le funzioni IF possono essere nidificate, cioè una delle relazioni se_vera o se_falsa può contenere delle IF.

F3(x):=IF(x>0,IF(x<2,1,0),0)

è la funzione che vale 1 nell'intervallo (0,2) e è nulla altrove;

F4(x):=IF(x=0,0,IF(x>0,1,-1))

è la funzione segno (0 per $x = 0$ e $x/|x|$ per $x \neq 0$).

10. Gli operatori logici. Possiamo collegare delle relazioni tramite gli operatori logici, ottenendo delle relazioni più complesse. Gli operatori logici di Derive sono: AND, OR e NOT.

p AND q ritorna il valore "vero" solo quando sia p che q sono vere;
p OR q ritorna il valore "vero" se almeno una delle relazioni p e q è vera;
NOT p ritorna il valore "vero" se p è falsa e viceversa.

Ad esempio,

F1(x):=IF(x>0 AND x<2,1,0)

definisce la funzione (già vista nella sezione precedente) che vale 1 nell'intervallo (0,2) e nulla altrove;

TRIANG(a,b,c):=IF(a=b AND b=c, Equilatero, IF(a=b OR b=c OR a=c, Isoscele, Scaleno))

classifica un triangolo in funzione dei lati INCORPORA Equation .

In caso di sequenze lunghe di operatori logici, bisogna utilizzare le parentesi, per evitare ambiguità e, se possibile, semplificare le espressioni con le leggi di De Morgan.

11. Le funzioni ricorsive. In Derive è possibile definire funzioni in modo ricorsivo, vale a dire utilizzando nella definizione della funzione la funzione stessa. L'esempio più semplice e noto è quello del fattoriale, definito sui naturali come

$$\begin{cases} n! = 1 & \text{se } n = 0 \\ n! = n(n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

La prima parte della definizione è detta "condizione terminale", la seconda "condizione ricorsiva"; per una corretta definizione ricorsiva la condizione terminale deve essere raggiunta dopo un numero finito di applicazioni della condizione ricorsiva.

La definizione di fattoriale può essere implementata nella funzione

FACT(n):=IF(n=0,1,n*FACT(n-1))

FACT(9)

362880

Osserviamo che, chiedendo di semplificare, ad esempio, FACT(3/2) oppure FACT(-1), arriviamo alla saturazione della memoria di DERIVE, in quanto non viene mai raggiunta la condizione terminale.

Numerose definizioni della matematica elementare possono essere introdotte in modo ricorsivo. Vediamo degli esempi.

Esempio 1

Fissato x reale ed n intero positivo, possiamo definire ricorsivamente l'elevamento a potenza x^n:

$$\begin{cases} x^n = 1 & \text{se } n = 0 \\ x^n = x\, x^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Possiamo implementare questa definizione nella funzione

```
RAISE(x,n):=IF(n=0,1,x*RAISE(x,n-1))
```

RAISE(3,5)

243

La definizione precedente può facilmente essere estesa ad esponenti interi relativi. Se l'esponente è positivo, utilizziamo la funzione precedente, mentre se è n negativo, utilizziamo il reciproco della potenza con esponente $-n$:

```
RAISE2(x,n):=IF(n=0,1,IF(n>0,x*RAISE2(x,n-1),1/RAISE2(x,-n)))
```

RAISE2(-3,5)

-243

RAISE2(-3,-5)

-1/243

Nel calcolo di una funzione ricorsiva, il valore di *n* decresce ad ogni utilizzo della condizione ricorsiva. Il decremento di *n* non deve necessariamente essere uguale a uno; deve però essere intero e tale da portare, in un numero finito di passi alla condizione terminale.

La seguente funzione implementa la definizione di semifattoriale (prodotto degli interi minori o uguali a *n* aventi la stessa parità di *n*)

```
SEMIFATT(n):=IF(n<=1,1,n*SEMIFATT(n-2))
```

```
SEMIFATT(7)
```

105

```
SEMIFATT(8)
```

384

Osserviamo che nella definizione della funzione SEMIFATT sono necessarie due condizioni terminali: una per 0 (a cui si arriva quando *n* è pari) e una per $n = 1$ (a cui si arriva per *n* dispari); si tiene conto di entrambe nella condizione se_vera della funzione IF.

L'argomento di una funzione ricorsiva non deve necessariamente essere intero; vediamo un esempio in cui la variabile è reale. Si tratta di un esempio che mette in luce un collegamento tra ricorsività e funzioni periodiche.

Supponiamo di conoscere la funzione seno (funzione di libreria indicata con SIN(x)) solamente tra 0 e 2π; la seguente funzione SENO(x) estende a valori POSITIVI di x la funzione SIN(x) sfruttandone la definizione tra 0 e 2π e la periodicità di periodo 2π:

```
SENO(x):=IF(0<=x<=2*pi,SIN(x),SENO(x-2*pi))
```

Possiamo risolvere il problema della definizione della funzione SENO(x) anche per x negativi:

```
SENO(x):=IF(0<=x<=2*pi,SIN(x),SENO(x+2*pi))
```

Una funzione ricorsiva può dipendere anche da due o più variabili, come mostra la seguente definizione di MCD (massimo comun divisore) di due numeri naturali:

```
MCD(n,m):=IF(m=0,n,MCD(m,MOD(n,m)))

MCD(48,36)

    12

MCD(48,37)

    1
```

12. Problemi di efficienza computazionale. Le funzioni definite ricorsivamente presentano problemi di efficienza computazionale. Se osserviamo i tempi di esecuzione della funzione FACT(n) nel paragrafo precedente, vediamo che essi crescono quasi "linearmente":

n	200	400	600	800
secondi	0.9	1.8	2.7	4.2

(i tempi non sono ovviamente comparabili con quelli di n!, funzione implementata direttamente in DERIVE)

Consideriamo ora la successione di Fibonacci $FB(n)$, definita come

$$\begin{cases} FB(0) = 0 \\ FB(1) = 1 \\ FB(n) = FB(n-1) + FB(n-2) \quad \text{per } n > 1 \end{cases}$$

La defínzione ricorsiva di questa funzione è data dalla funzione

```
FIB_SLOW(n):=IF(n<2,n,FIB_SLOW(n-1)+FIB_SLOW(n-2))
```

I tempi di esecuzione di questa funzione crescono in maniera molto rapida

n	5	10	15	20
secondi	0.1	0.8	9.0	98.1

per cui la funzione non è utilizzabile, se non valori molto bassi di n. Questa lentezza di esecuzione può essere spiegata, ossevando che FIB_SLOW(n-2) viene calcolato due volte (una volta nella valutazione di FIB_SLOW(n) e una in quella di FIB_SLOW(n-1)), mentre FIB_SLOW(n-3) è valutato tre volte (una volta per FIB_SLOW(n-1) e una volta per ognuna delle valutazioni di FIB_SLOW(n-1)) e così via; il fenomeno è comune a tutte le funzioni ricorsive che coinvolgono il calcolo di due (o più) valori precedenti della funzione.

Vi sono due modi per ovviare a queste difficoltà e definire una funzione più efficiente; il primo è quello di ricorrere all'iterazione funzionale, applicata ad un vettore. Sempre considerando l'esempio della successione di Fibonacci, vogliamo costruire una successione di vettori:

[FB(0),FB(1)] = [0,1]
[FB(1),FB(2)] = [FB(1),FB(0)+FB(1)]
[FB(2),FB(3)] = [FB(2),FB(1)+FB(2)]
....
[FB(n),FB(n+1)] = [FB(n),FB(n-1)+FB(n)]

Come si vede il passaggio iterativo è quello che sostituisce il vettore *v* con il vettore [ELEMENT(v,2),ELEMENT(v,1)+ELEMENT(v,2)], mentre la condizione iniziale è [0,1]. Possiamo utilizzare la funzione ITERATES, scrivendo:

ELENCO_FIB(n):=ITERATES([ELEMENT(v,2),ELEMENT(v,1)+ELEMENT(v,2)],v,[0,1],n)

ELENCO_FIB(10)

[[0,1],[1,1],[1,2],[2,3],[3,5],[5,8],[8,13],[13,21],[21,34],[34,55],[55,89]]

Il valore che vogliamo ottenere è la prima componente dell'ultimo vettore; poiché non interessano i passaggi intermedi, possiamo sostituire ITERATE a ITERATES e prendere solo la prima componente. La funzione finale è

FIB(n):=ELEMENT(ITERATE([ELEMENT(v,2),ELEMENT(v,1)+ELEMENT(v,2)],v,[0,1],n),1)

I tempi di esecuzione di FIB sono molto più veloci (0.2 secondi per n=20).

Le stesse idee viste nella costruzione di FIB(n) possono essere utilizzate per una definizione ricorsiva di una nuova funzione che calcola i numeri di Fibonacci in maniera efficiente. Supponiamo, per semplicità, di dovere calcolare $FB(5)$; riportiamo i vettori ottenuti utilizzando ELENCO_FIB(5):

ELENCO_FIB(5)

[[0,1],[1,1],[1,2],[2,3],[3,5],[5,8]]

Senza l'uso di ITERATE, vogliamo arrivare a costruire una funzione che realizzi lo stesso algoritmo, cioè il passaggio dalla coppia ($v1$, $v2$) alla coppia ($v2$, $v1 + v2$).

Il controllo del numero di iterazioni è affidato a un contatore DECRESCENTE, che in corrispondenza ad n associa il valore della coppia iniziale, in corrispondenza a zero associa il valore della coppia finale. Supponendo che il contatore sia la prima variabile, si tratta di calcolare le terne:

[[5,0,1],[4,1,1],[3,1,2],[2,2,3],[1,3,5],[0,5,8]]

Il risultato che vogliamo ottenere (il valore FB(5)) è la seconda componente del vettore che ha zero come prima componente; possiamo quindi ricavarlo nel modo seguente:

```
FIB_AUS(n,v1,v2):=IF(n=0,v1,FIB_AUS(n-1,v2,v1+v2))
```

La definizione può essere ulteriormente ottimizzata, tenendo conto del fatto che $v1$ e $v2$ sono le condizioni iniziali FB(0) e FB(1) e quindi sono fisse

```
FIB_OK(n):=FIB_AUS(n,0,1)
```

La funzione ottenuta ha approssimativamente gli stessi tempi di calcolo di FIB(n).

Esempio

Il problema (solo in apparenza semplice!) è quello di scrivere una funzione che calcoli il grado di un polinomio assegnato.

Per fare questo possiamo utilizzare un procedimento ricorsivo: calcolare la derivata del polinomio (ottenendo quindi un polinomio di grado minore di uno rispetto a quello di partenza) e proseguire in questo modo finché non si ottiene la funzione nulla; incrementiamo di uno il valore da ottenere in uscita ogni volta che viene iterato il procedimento.

Una possibile implementazione di questo metodo è nella funzione GRADO(u,x), dove u è un polinomio nella variabile x (l'indicazione della variabile indipendente è indispensabile, per potere utilizzare la derivata).

```
GRADO(u,x):=IF(u=0,0,GRADO(DIF(u,x),x)+1,GRADO(DIF(u,x),x)+1)
```

Due osservazioni a proposito di questa funzione:

- si noti la presenza nella IF della terza condizione: la condizione se_indecidibile (vedi il paragrafo 9); infatti il controllo che chiediamo è indecibile tranne che nel caso in cui *u* è una costante! Quindi viene scelta la terza alternativa finché il polinomio è di grado maggiore o uguale a uno, la seconda quando il polinomio si riduce a una costante non nulla e la prima quando è una costante nulla.
- La funzione GRADO (u,x) compie una iterazione in più oltre a quelle desiderate (arriva infatti al polinomio di grado zero (una costante non nulla) e calcola la derivata di questo, ottenendo la costante nulla, che è ancora un polinomio di grado zero); per questo non fornisce (eccetto che per il polinomio nullo) il valore corretto, ma il valore corretto aumentato di uno.

Dobbiamo quindi "correggerla", introducendo la funzione GR(u,x), in cui è necessario utilizzare la IF per evitare che venga assegnato il valore –1 al grado del polinomio nullo.

```
GR(u,x):=IF(u=0,0,GRADO(u,x)-1,GRADO(u,x)-1)

GR(0,x)

   0

GR(8,x)

   0

GR(6*x^8-7*x^12,x)

   12

GR((3*x^6-x^5)^8,x)

   48
```

L'idea che abbiamo esposto sopra a proposito della costruzione delle funzioni FIB_AUS e FIB_OK, può essere utilizzata anche in questo caso. Si introduce una funzione dipendente da tre variabili: *u*, *x* e un contatore *n* (che in questo caso viene incrementato a ogni chiamata della funzione)

```
POLY_DEGREE_AUX(u,x,n):= IF(u=0,n,POLY_DEGREE_AUX
(DIF(u,x),x,n+1),
POLY_DEGREE_AUX(DIF(u,x),x,n+1))
```

Il valore di n non deve ovviamente essere introdotto dall'utente; la funzione POLY_DEGREE_AUX deve essere chiamata da un'altra funzione in cui il contatore n viene posto uguale a -1 (per ovviare al problema, analogo a quello visto per la funzione GRADO, della chiamata "in più" che viene fatta dalla funzione).

```
POLY_DEGREE(u,x):=POLY_DEGREE_AUX(u,x,-1)
```

Le funzioni POLY_DEGREE e POLY_DEGREE_AUX sono contenute nel file MISC.MTH: si osservi che la mancanza della IF nella funzione POLY_DEGREE porta a un piccolo errore (il grado del polinomio nullo risulta uguale a -1).

ESERCIZI

Uso di SUM, PRODUCT, VECTOR

Esercizio 1

Definire una tabella $(n, u(n))$, dove $u(n)$ è una successione dipendente esplicitamente da n e visualizzarne il grafico. Si possono, ad esempio, studiare le successioni:

u(n) = SIN(n),
u(n)= (1+1/n)^n,
u(n) = 1/((MOD(n,5)+1)

Esercizio 2

Con il metodo utilizzato nell'esercizio precedente si può studiare il comportamento delle somme parziali di una serie. Fare qualche esempio di serie convergenti, divergenti, oscillanti.

Esercizio 3
Studiare, mediante un'apposita tabulazione e la visualizzazione grafica dei risultati ottenuti, la relazione che esiste tra il logaritmo naturale di n (è la funzione LN(n)) e

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k$$

Per rendere più significativo il risultato, considerare n = 100, 200, 300, ..., 1000, utilizzando Options Precision Approximate (con 6 cifre). Dalle tabulazioni e dai grafici ottenuti che cosa si può congetturare sui limiti di $s(n) - \ln(x)$ e $s(n)/\ln(n)$?

Esercizio 4
Creare una tabella $(n, u(n))$ dove $u(n)$ è il polinomio $x^n - 1$ decomposto in fattori (sui razionali). Attenzione: n NON deve essere visualizzato in forma fattorizzata.

Esercizio 5
Fissato un naturale n, si consideri la relazione di congruenza modulo n nell'insieme **Z** degli interi relativi. Tracciare con Derive la tavola di addizione e di moltiplicazione di $\mathbf{Z}/n$.

Esercizio 6
Studiare, iniziando da alcuni esempi, la possibilità di decomporre sugli INTERI il polinomio $x^4 + m$, con m intero positivo. È quasi immediato congetturare che m deve essere un quadrato perfetto: $m = n^2$. Congetturare la forma che deve avere n e dimostrare la congettura.

Esercizio 7
In teoria dei numeri di definisce la funzione $\pi(n)$, che al numero naturale n associa il numero di primi che sono minori o uguali a n. La stima di $\pi(n)$ per n grande costituisce uno dei problemi più importanti della teoria dei numeri.

Possiamo fare alcune congetture sul comportamento di $\pi(n)$ utilizzando Derive. Abbiamo a disposizione la funzione di libreria NEXT_PRIME(n), che ad n associa il minimo numero primo maggiore di n. Si può definire inoltre la funzione (attenzione: questa funzione non è compresa tra le funzioni di libreria e deve quindi essere introdotta prima di proseguire nella soluzione dell'esercizio. In alternativa si può caricare, utilizzando Transfer Load Derive il file MISC.MTH, che contiene questa e altre utili funzioni):

NTH_PRIME(n):=ITERATE(NEXT_PRIME(k),k,1,n)

La funzione NTH_PRIME(n) associa ad n l'n-esimo numero primo. Mediante questa funzione, tabulare e tracciare il grafico della funzione $\pi(n)$ e confrontarlo con quello della funzione $f_1(x) = x/\ln(x)$.

In particolare, in base ai risultati ottenuti, che cosa di può congetturare sul limite di $\pi(n) - f_1(n)$ e su quello di $\pi(n)/f_1(n)$?

Che cosa si può congetturare, se si sostituisce a $f_1(x)$ la funzione $f_2(x) = x/\ln(x) + x/\ln^2(x)$?

USO DI ITERATES, CONDIZIONALI E OPERATORI LOGICI

Esercizio 8

Costruire con Derive le tavole di verità dei connettivi logici e impostare uno schema per la verifica della verità di un'espressione logica.

Esercizio 9

Fissato un numero intero relativo n, possiamo definire la successione di Collatz che al numero naturale k associa x_k, definito da

$$\begin{cases} x_0 = n \\ x_k = \begin{cases} x_{k-1}/2 & \text{se } x_{k-1} \text{ è pari} \\ 3x_{k-1}+1 & \text{se } x_{k-1} \text{ è dispari} \end{cases} \end{cases}$$

I valori iniziali $n = 1$, $n = -1$, $n = -5$, $n = -17$ danno luogo a successioni cicliche

1 → [1,4,2,1]

−1 → [-1,-2,-1]

−5 –> [-5,-14,-7,-20,-10,-5]

−17 → [-17,-50,-25,-74,-37,-110,-55,-164,-82,-41,-122,-61,

–182,-91,-272,-136,-68,-34,-17]

Limitandoci a considerare interi POSITIVI, possiamo porre il seguente problema: assegnato un numero n, la sequenza di Collatz raggiunge il valore 1 in un numero finito di passaggi oppure entra in un ciclo infinito senza mai arrivare a 1?

E inoltre, quanti passaggi sono necessari per raggiungere 1?

E ancora, qual è il valore massimo raggiunto dalla sequenza?

Possiamo esplorare questo interessante e in parte irrisolto problema (non sono noti finora altri valori, oltre a quelli indicati, che danno luogo a sequenze cicliche), seguendo questo schema:

- implementare una funzione CL(x) che a un numero INCORPORA Equation associa il termine seguente nella sequenza di Collatz;
- definire una funzione SEQ(x_in) che fornisce la sequenza generata a partire da *x_in*;
- visualizzare in un grafico la relazione che esiste, per un valore *x_in* fissato, tra il numero n del passo della sequenza e il valore assunto dalla sequenza in corrispondenza a questo n;
- visualizzare il grafico della relazione che esiste tra *x_in* e LUNGH_SEQ(x_in) (il numero di termini della sequenza SEQ(x_in) generata a partire da *x_in*);
- visualizzare il grafico della relazione che esiste tra *x_in* e il massimo numero raggiunto nella sequenza SEQ(x_in), che indichiamo con MAX_SEQ(x_in) (si tenga presente la funzione di libreria MAX).

FUNZIONI RICORSIVE

Esercizio 10

Il metodo utilizzato negli esercizi precedenti per il calcolo della somma di una serie è poco efficiente, in quanto richiede il ricalcolo della somma della serie a partire dall'indice iniziale.

In questo esercizio vogliamo definire mediante una funzione ricorsiva la somma di una serie (o la sommatoria di un numero finito di termini): ricordiamo che, data una successione $\{a_n\}$, si definisce $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ il limite della successione delle somme parziali $\{s_n\}$ definite come

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_n = s_{n-1} + a_n \end{cases}$$

Dare una definizione ricorsiva della successione $\{s_n\}$ e riprendere alcuni esempi di serie.

Osservazione: in alcuni casi (ad esempio, serie che convergono lentamente) ha poco interesse calcolare tutti i termini s_n. Modificare la definizione data precedentemente, facendo in modo da calcolare s_n, ad esempio, per n =10, 20, 30, 40, ecc. Generalizzare la legge per la scelta degli n.

Esercizio 11

In questo esercizio vogliamo costruire una matrice quadrata il cui triangolo inferiore sia il triangolo di Tartaglia, mentre gli elementi sopra la diagonale principale sono posti, per convenzione, uguali a zero.

In un primo tempo gli elementi di matrice non nulli possono essere definiti utilizzando i coefficienti binomiali (ottenibili mediante la funzione di libreria di Derive COMB(n,m)).

Il secondo modo per costruire il triangolo di Tartaglia è quello di utilizzare la relazione ricorsiva che ne collega gli elementi (attenzione alle "condizioni al contorno").

Esercizio 12

Per parte intera di un numero reale si intende il massimo intero relativo minore o uguale del numero dato. La parte intera di x si indica di solito con $[x]$.

Definire una funzione P_INT(x) in modo ricorsivo (dapprima per $x \geq 0$, poi per un generico numero reale) osservando che $[x] = 0$ per $0 \leq x < 1$ e seguendo le idee viste alla fine del paragrafo 12.

Esercizio 13

Le seguenti funzioni (parte delle quali sono prese dal file VECTOR.MTH) sono utili per la manipolazione dei vettori; ne diamo prima una breve descrizione e ne scriviamo poi la definizione:

- FIRST(v) $\rightarrow$ prima componente di v;
- REST(v) $\rightarrow$ v privato della prima componente;
- LAST(v) $\rightarrow$ ultima componente di v;

- BUTLAST(v) → *v* privato dell'ultima componente;
- FIRSTN(v,n) → vettore delle prime *n* componenti di *v*.

```
FIRST(v):=ELEMENT(v,1)
REST(v):=VECTOR(ELEMENT(v,k),k,2,DIMENSION(v))
LAST(v):=ELEMENT(v,DIMENSION(v))
BUTLAST(v):=VECTOR(ELEMENT(v,k),k,DIMENSION(v)-1)
FIRSTN(v,n):=VECTOR(ELEMENT(v,k),k,n)
```

- ADJOIN_ELEMENT(e,v): aggiunge l'elemento *e* all'inizio del vettore *v*;
- DELETE_ELEMENT(v,k): toglie la componente *k*-esima dal vettore *v*;
- REVERSE_ELEMENT(v): scrive il vettore *v* in ordine inverso;
- SWAP_ELEMENTS(v,i,j): scambia tra di loro le componenti *i* e *j* del vettore *v*.

```
ADJOIN_ELEMENT(e,v):=APPEND([e],v)

DELETE_ELEMENT(v,k):=VECTOR(IF(m_<k,ELEMENT(v,m_),
ELEMENT(v,m_+1)),m_,DIMENSION(v)-1)

REVERSE_VECTOR(v):=VECTOR(ELEMENT(v,m_),m_,
DIMENSION(v),1,-1)

SWAP_ELEMENTS(v,i,j):=VECTOR(IF(m_=i,ELEMENT(v,j),IF(m_=j,
ELEMENT(v,i),ELEMENT(v,m_))),m_,DIMENSION(v))
```

Utilizzando (in parte) queste funzioni, definire le funzioni:

1. POSIZIONE(num,v) che identifica in quale posizione si trova il numero *num* nel vettore *v*;
2. ORDINA(v) che riscrive le componenti del vettore *v* in ordine decrescente (può essere utile definire la funzione TOGLI_MASS(v), che, a partire da *v* crea un vettore con *n*-1 componenti a cui è stata tolta l'ultima (se multipla) occorrenza del massimo di *v*).

IL DISCHETTO

A queste note è collegato un dischetto MS-DOS che contiene i file .MTH utilizzati durante le lezioni su "Il computer nella didattica dell'algebra" svolte nell'ambito del Corso Residenziale in Didattica della Matematica "L'insegnamento dell'algebra tra tradizione e rinnovamento" tenutosi a Viareggio dal 12 al 23 Settembre 1994.

Il materiale del dischetto si divide in due parti. Nella prima parte vengono presi in esame i comandi utilizzati per l'esecuzione delle operazioni algebriche elementari e le opzioni fondamentali del sistema. Nella seconda parte si descrive la programmazione in Derive.

La presentazione si articola in 15 file:
- quelli relativi all'uso dei comandi di Derive hanno un nome che comincia con D_;
- quelli relativi alla programmazione hanno un nome che comincia con P_.

I file devono essere letti secondo l'ordine della seguente tabella, dove viene brevemente descritto il contenuto di ognuno di essi:

1)	D_PRECIS.MTH	L'aritmetica e le opzioni di precisione
2)	D_SIMPL.MTH	Il comando SIMPLIFY
3)	D_EXPAND.MTH	Il comando EXPAND
4)	D_FACTOR.MTH	Il comando FACTOR
5)	D_FUNRAZ.MTH	Le funzioni razionali
6)	D_DECVAR.MTH	I radicali e il comando DECLARE VARIABLE
7)	D_DECFUN.MTH	Il comando DECLARE FUNCTION
8)	D_VETMAT.MTH	Vettori e matrici
9)	D_EQUAZ1.MTH	Equazioni e disequazioni in modalità EXACT
10)	D_EQUAZ2.MTH	Equazioni e disequazioni in modalità APPROXIMATE
11)	P_ITERA1.MTH	Gli iteratori SUM, PRODUCT e VECTOR
12)	P_ITERA2.MTH	L'iterazione funzionale
13)	P_CONDIZ.MTH	Gli statement condizionali
14)	P_LOGICI.MTH	Gli operatori logici
15)	P_RICORS.MTH	Le funzioni ricorsive

Prima di utilizzare questi file **si raccomanda di leggere i file LEGGIMI.TXT e LEGGIMI2.TXT contenuti nel dischetto**; si tratta di due file di testo, che possono essere visualizzati con un qualunque editor.

I file contenuti nel dischetto sono riproducibili e utilizzabili liberamente per scopi didattici (ad esempio, per corsi, lezioni, ecc.) pur di INDICARNE SEMPRE L'AUTORE E DI CITARE QUESTO ARTICOLO DI CUI ESSI SONO PARTE INTEGRANTE.

MOMENTI NELLA STORIA DELL'ALGEBRA

Paolo Freguglia
Dipartimento di Matematica - Università di Siena

1. La teoria geometrica delle equazioni algebriche. La nascita dell'algebra, avvenuta sostanzialmente nel Cinquecento, è caratterizzata dalla connessione di tecniche algoritmo-aritmetiche con questioni geometriche. La prima geometria con la quale ciò accadde fu proprio quella classica delle superfici e dei volumi. Nelle opere di Cardano, Ferrari, Tartaglia, Bombelli e Stevin queste tematiche furono ampiamente sviluppate, anche se non mancarono riferimenti alla teoria delle proporzioni. Questa teoria, che costituiva la parte più astratta della geometria, fu a sua volta la chiave per la geometrizzazione dell'algebra effettuata da Viète. In seguito, a partire da Descartes e poi grazie alla geometria analitica, la teoria geometrica delle equazioni algebriche assunse ulteriori significati.

Il problema storiografico che ora ci proponiamo è quello di rispondere alla domanda se si riscontra o meno nelle trattazioni relative alle equazioni algebriche di quegli algebristi del Cinquecento, le cui opere sono temporalmente collocate prima di Viète, una consapevole base "speculativa" tale da ritenere che tutto sommato risulterebbe fondato parlare di una vera e propria teoria in merito. Per teoria in questo caso vogliamo intendere l'esistenza di una strategia dell'"ordo" espositivo, cioè di una sorta di paradigma trattatistico fondato su taluni convincimenti filosofici o ideologici che guidano verso teoremi cruciali che permettono, a loro volta, di giustificare risultati ottenuti per un'altra via, intellettualmente meno appagante. Si potrebbe anche dire che, secondo una certa mentalità di quel tempo, che risentiva dell'insegnamento aristotelico, per dare dignità scientifica ad un tema trattato si doveva ridurlo in "sintesi", cioè basarlo su *demonstrationes propter quid*, su deduzioni corrette, su teoremi. Con ciò non vogliamo affatto dire che questo concetto di teoria è analogo alla trattazione euclidea degli *Elementi*, anche se, come vedremo, ai risultati di questa fa essenzialmente ricorso. Si tratta di un qualcosa di più complesso che stabilisce una connessione tra il metodo dell'analisi con quello della sintesi. Come abbiamo messo in luce in *Ars analytica. Matematica e methodus nella seconda metà del Cinquecento* (P. Freguglia [1988]), in Viète questa connessione verrà, con strumenti matematici diversi da quelli degli algebristi di cui quì parliamo, suggestivamente realizzata. D'altra parte anche questi algebristi, sicuramente sull'onda della tradizione araba, nelle loro trattazioni misero di fatto in correlazione i due metodi, per cui si potrà rispondere positivamente all'esistenza nelle opere di questi matematici di una teoria del tipo sopra detto. In quel che segue ci proponiamo dunque di far vedere la consistenza di questa teoria. Inoltre metteremo in luce un risultato (vedi il teorema del paragrafo quattro) in qualche modo significativo vuoi da un punto di vista storiografico, vuoi da un punto di vista teorico, a testimonianza di una certa metodologia di ricerca storiografica in matematica. Cominciamo intanto con esaminare come vennero risolte da questi algebristi, in termini di calcolo numerico (*logistica numerosa*), le equazioni di terzo e quarto grado.

2. La soluzione delle equazioni generali di terzo e quarto grado. La procedura per la soluzione delle equazioni algebriche è sostanzialmente il risultato di un aspetto del metodo dell'analisi. Assai probabilmente(1), infatti, in particolare per le equazioni di terzo grado, fu trovata da Scipione dal Ferro nel 1505 la formula risolutiva dopo una serie di vicende basate su tentativi, errori e verifiche che si riferiscono in modo tutt'altro che secondario la tradizione abacistica italiana. Come avremo modo di constatare, la soluzione generale delle equazioni di terzo grado riveste una funzione determinante anche per la procedura risolutiva di quelle di quarto grado. È quanto vedremo di seguito appoggiandoci sull'*Ars Magna* (1545) di Gerolamo Cardano (G. Cardano [1967]) e sull'*Algebra* di Rafael Bombelli del 1572 (R. Bombelli [1966]). Cardano nel Capitolo XXXIX, alla *Quaestio IV* e *Reg. II*, dell'*Ars Magna*, attribuendo il merito al suo allievo Ludovico Ferrari, propone la soluzione e poi la dimostrazione geometrica delle equazioni di quarto grado. Come è immediato osservare, in questo caso come in altre *Quaestiones*, il ricorso espositivo alle proporzioni continue è sistematico. Ciò peraltro ci fa venire in mente il ruolo che, più tardi con Viète, queste proporzioni ebbero nella costituzione di una teoria (anch'essa geometrica) delle equazioni(2).

Sarà opportuno per quanto diremo di seguito richiamare, prima di passare ad affrontare direttamente il tema della teoria delle costruzioni geometriche delle equazioni algebriche, lo schema risolutivo delle equazioni di terzo grado dato da Tartaglia nel nono libro dei suoi *Quesiti et inventioni* diverse pubblicati nel 1546 (N. Tartaglia [1959]). Per un resoconto sulle note vicende polemiche tra Tartaglia, Cardano e Ferrari si rimanda ad es. a S.Maracchia [1979]. Tramite i famosi versi "Quando che 'l cubo con le cose appresso [...]", Tartaglia dice che la soluzione dell'equazione (alla quale si può ridurre con opportune trasformazioni l'equazione generale e completa di terzo grado)

(1) Per quanto riguarda la storia dell'algebra fino Luca Pacioli (*Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*, 1494) si rimanda a R. Franci, L. Toti Rigatelli [1985].
(2) Per l'opera di Viète si rimanda a P. Freguglia [1989] e [1994] ed a E. Giusti [1992].

$$(2.1) \qquad x^3 + px = q$$

si ottiene cercando dapprima due numeri u e v tali che soddisfino il sistema

$$(2.2) \qquad \begin{cases} u \cdot v = p^3/27 \\ u - v = q \end{cases}$$

e quindi la soluzione sarà data dalla

$$(2.3) \qquad x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

Dalla (2.3) con le opportune sostituzioni si ritrova la formula proposta per la prima volta sotto forma di precetto da Dal Ferro. Cioè avremo:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

Nel sistema (2.2) se poniamo $\sqrt[3]{u} = a$ e $\sqrt[3]{v} = b$ otteniamo il sistema

$$(2.4) \qquad \begin{cases} a^3 \cdot b^3 = p/3 \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

e quindi la (2.3) diventa

$$(2.5) \qquad x = a - b.$$

Passiamo ora alle equazioni generali di quarto grado. In sostanza[(3)], il procedimento di Ferrari ha, esprimendoci in termini a noi più comuni e utilizzando il calcolo letterale[(4)], il seguente svolgimento. Data l'equazione

[(3)] Abbiamo utilizzato, con l'apporto di qualche modifica, la trascrizione fatta in S. Maracchia [1979].

[(4)] Vale la pena ricordare che gli algebristi del Cinquecento non si eprimevano con il calcolo

(2.6)

$$x^4 + ax^2 + b = cx$$

nel caso più generale in cui il primo membro non sia un quadrato perfetto, si procede dapprima a quadrarlo, aggiungendo a primo e secondo membro il binomio $2\sqrt{b}\,x^2 - ax^2$.

Avremo dunque

$$x^4 + a\,x^2 + b + 2\sqrt{b}\,x^2 - a\,x^2 =$$

$$= c\,x + 2\sqrt{b}\,x^2 - a\,x^2$$

$$x^4 + 2\sqrt{b}\,x^2 + b = c\,x + \left(2\sqrt{b} - a\right)x^2$$

e cioè

(2.7)

$$\left(x^2 + \sqrt{b}\right)^2 = c\,x + \left(2\sqrt{b} - a\right)x^2$$

Ponendo nella (2.7): $\sqrt{b} = q$ e $2\sqrt{b} - a = p$ avremo la

(2.8)

$$(x^2 + q)^2 = c\,x + p\,x^2$$

il cui membro a destra non è un quadrato. Si aggiunge allora a destra e a sinistra della (2.8) il trinomio:

$$2\,t\,x^2 + t^2 + 2\,t\,q$$

avremo allora

$$x^4 + 2\,q\,x^2 + q^2 + 2\,t\,x^2 + t^2 + 2\,t\,q = c\,x + p\,x^2 + 2\,t\,x^2 + t^2 + 2\,t\,q$$

che diventa

letterale (*logistica speciosa*) che fu invenzione di Viète, ma, a parte alcune convenzioni simboliche per le incognite e le operazioni, con formule numeriche (*logistica numerosa*).

$$(2.9) \qquad (x^2+q+t)^2 = \left(\sqrt{p+2t}\right)^2 x^2 + c\,x + \left(\sqrt{t^2+2\,t\,q}\right)^2$$

Il membro ultimo a destra della (2.9) è un quadrato se si ha che

$$(2.10) \qquad c = 2\sqrt{p+2t}\cdot\sqrt{t^2+2\,t\,q}$$

cioè se

$$(2.11) \qquad 2\,t^3 + (p+4\,q)\,t^2 + 2\,p\,q\,t - \frac{c^2}{4} = 0$$

che è un'equazione di terzo grado in t,detta risolvente cubica di Ferrari. Una volta risolta la (2.11), utilizzando la formula risolutiva di Scipione dal Ferro – Tartaglia, si sostituisce un valore[5] di t nella

$$(2.12) \qquad x^2+q+t = \sqrt{p+2t}\;x + \sqrt{t^2+2\,t\,q}$$

che si ottiene dalla (2.9) togliendo i quadrati. La (2.12) è in ultima analisi un'equazione di secondo grado, per cui si giunge facilmente alla soluzione dell'equazione data (2.6).

Vediamo ora l'esempio numerico proposto da Cardano a pagina 295 di G. Cardano [1967]. Troviamo l'equazione del tipo (2.6) così scritta

1.qd.quad.p.6.quad.p.36.aequalia 60.pos.

cioè

$$(2.13) \qquad x^4 + 6\,x^2 + 36 = 60\,x$$

Tenendo presente quanto esposto poc'anzi e sostituendo i relativi valori numerici alle lettere si giunge alla soluzione della (2.13). Per la risolvente cubica abbiamo applicato la trasformazione proposta da Bombelli nel *Capitolo di Cubo*

[5] Come è noto per il teorema fondamentale dell'algebra un'equazione algebrica di grado n non identicamente nulla ha n radici reali o complesse eventualmente ripetute, quindi una di terzo grado ne ha tre. Nel caso preso in esame viene presa in considerazione la sola soluzione reale, essendo il discriminante maggiore di zero.

potenze e Tanti eguali a numero (pag. 247 di R. Bombelli [1966]) e quindi, per la soluzione al *Capitolo di Cubo eguale a Tanti e numero* (pag. 222 di R. Bombelli [1966]). Ecco di seguito i calcoli. Cominciamo con i relativi valori numerici da assegnare alle lettere in base alla (2.13).

$a = 6 \qquad b = 36 \qquad c = 60$

$p = 2\sqrt{b} - a = 2\sqrt{36} - 6 = 6 \qquad q = \sqrt{b} = \sqrt{36} = 6$

Risolvente di Ferrari:

$$t^3 + 15\,t^2 + 36\,t = 450$$

posto: $t = y - \dfrac{15}{3}$ si ha:

$$y^3 = 39\,y + 380$$

che è del tipo:

$$y^3 = p_1 y + q_1$$

dove $p_1 = 39$ e $q_1 = 380$

Per Tartaglia si ha che:

$$y = u + v \text{ dove: } \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = \dfrac{p_1^3}{27} \\ u^3 + v^3 = q_1 \end{cases}$$

Il precedente sistema si risolve con l'equazione:

$$z^2 - q_1\,z + \frac{p_1^3}{27} = 0$$

ossia con

$$z^2 - 380\,z + 2197 = 0$$

Avremo:

$$z_{1,2} = 190 \pm \sqrt{33903},\ z_1 = 374.13,\ z_2 = 5,87$$

$$u = \sqrt[3]{z_1} = 7.2 \quad v = \sqrt[3]{z_2} = 5.87 \quad y = 9.00978 \simeq 9$$

$$t = 9 - 5 = 4$$

Sostituendo tutti i valori numerici nella (2.12) si ha:

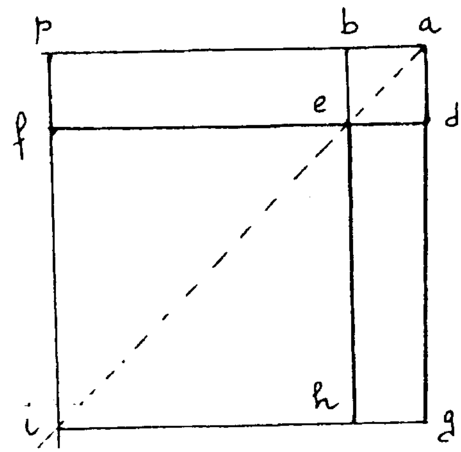
$$x^2 + 6 + 4 = \sqrt{6+8}\ x + \sqrt{16+48}$$

$$x^2 - \sqrt{14}\ x + 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{14-8}}{2} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{6}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{14-8}}{2} = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{2}$$

3. Costruzioni geometriche come "dimostrazioni" delle equazioni algebriche. Passiamo ora a quelle costruzioni geometriche mediante le quali, come vedremo, vengono dimostrate le uguaglianze che stabiliscono le varie equazioni algebriche. Analizzando come queste furono realizzate è possibile individuare una teoria algebrico-geometrica che costituisce una base generale per le equazioni algebriche e giustifica "con fondamenti ben saldi e gagliardi" (cioè con la geometria) – come dice Tartaglia nel penultimo dei suoi versi – il relativo procedimento risolutivo. Cominciamo dalle equazioni di primo grado considerando il caso $ax = b$ che Bombelli tratta nel paragrafo *Dimostratione del Capitolo di Tanti eguali a numero* (pp. 184-187 dell'Algebra [1966]). Seguendo la sottostante figura, relativamente all'equazione, riportata da Bombelli, 3x = 24, si consideri dapprima il rettangolo *pfb*e equivalente all'area 24 che troviamo a secondo membro dell'equazione assegnata. Aggiungiamo al rettangolo *pfbe* il quadratino *beda* e quindi tracciamo la retta *ae* che diventa a sua volta la diagonale del quadrato *piga*. In base alla Prop.I,43 degli Elementi di Euclide vale geometricamente il



seguente

Lemma 3.a: Rettangolo (*pfbe*) = Rettangolo (*ehgd*)

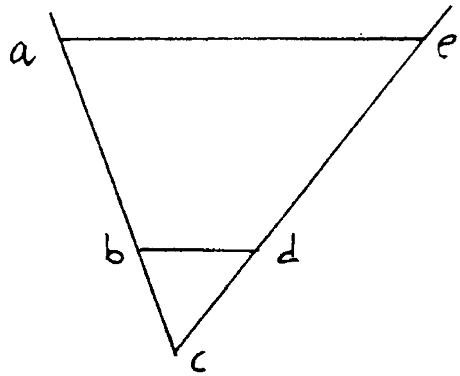
Se, come è possibile, interpretiamo *eh* con *x* e *ed* con 3, allora il lemma 3.a ci garantisce la validità geometrica dell'uguaglianza su cui è basata l'equazione di primo grado 3x = 24.

In termini esclusivamente geometrici al lemma 3.a va associato il

Problema 3.a: Trovare l'altezza di un rettangolo conoscendo:
– l'area
– la base

La soluzione di questo problema è geometricamente autonoma, basti pensare alla trattazione euclidea della cosiddetta "applicazione (delle aree) parabolica". In modo geometricamente diretto ed in questo contesto, all'operazione "area diviso base uguale altezza" occorre dare un significato primitivo, non ulteriormente giustificabile in termini geometrici. Altrettanto vale per "assegnato un quadrato è determinato il lato" e anche "assegnato un cubo è determinato il lato". Per cui i passi per risolvere il problema 3.a sono aritmeticamente interpretabili in quelli che risolvono l'equazione di primo grado considerata.

Per il caso di primo grado Bombelli dà anche (vedi pp. 186, 187 di R. Bombelli [1966]) la dimostrazione "in linea". Essa consiste, considerata la sottostante figura e sfruttando il cosiddetto teorema di Talete, nel considerare la proporzione:



$ab : bc = ed : dc$

Nel caso dell'equazione $2x = 12$ basterà dare le seguenti interpretazioni: $cd = 1$, $ab = 12$, $de = x = 6$ e $bc = 2$ per dimostrare, grazie appunto alla precedente proporzione di natura prettamente geometrica, l'equazione considerata, risultando

$$12 : 2 = x : 1$$

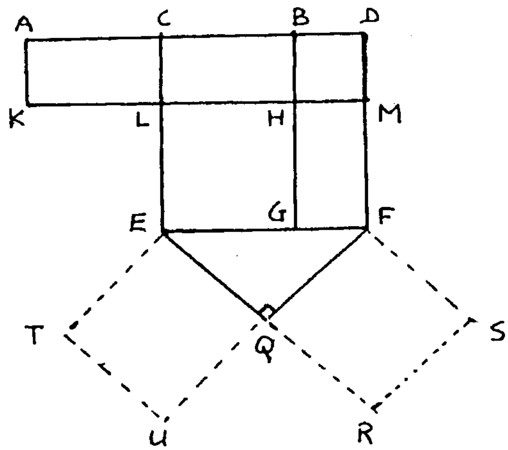
Come è immediato constatare la nozione geometrica di rapporto è in questo caso (caso delle proporzioni) diverso dal caso precedente (caso delle applicazioni delle aree).

Passiamo ora alle equazioni di secondo grado tenendo presente quanto Bombelli dice nei paragrafi *Dimostrazione del Capitolo di Potenze e Tanti eguale a numero* e *Dimostrazione dell'agguagliare censo et cose a numero*[6]. L'equazione presa in considerazione è

$$1^{\underset{\smile}{2}}\ \text{p.}\ 6^{\underset{\smile}{1}}\ \text{eguali a 16 cioè}\ x^2 + 6x = 16 \tag{3.1}$$

La figura sottostante dà la costruzione geometrica richiesta non appena interpretiamo innanzi tutto il primo membro della (3.1) con il rettangolo AKMD, ponendo i rettangoli AKLC e CLHB rispettivamente ambedue uguali a $3x$ (essendo $KL = LH = 3$ e $KA = LC = HB = MD = x$) ed il quadrato BHMD uguale a x^2. Se ora applichiamo la Prop.II, 6 degli *Elementi* euclidei, la quale afferma che

[6] Vedi pp. 193-197 e pp. 497, 498 di R. Bombelli [1966].



il rettangolo AKMD più il quadrato LEGH è uguale al quadrato CEFD, otteniamo che il primo membro della (3.1), che ora viene interpretato dallo gnomone DCLHGF, più 9, che è il quadrato di 3, dà il quadrato CEFD. Si costruisce quindi sul lato EF un triangolo rettangolo tale che il quadrato del cateto EQ dia uguale al quadrato LEGH. Avremo allora per il teorema di Pitagora che il quadrato del cateto FQ più quello del cateto EQ risulta uguale al quadrato CEFD e quindi in conclusione che

Lemma 3.b: Gnomone (DCLHGF) = Quadrato (FQRS)

Ma il quadrato FQRS rappresenta nell'interpretazione proprio il secondo membro della (3.1), per cui il lemma 3.b dimostra la validità geometrica dell'uguaglianza espressa dall'equazione (3.1) ed allo stesso tempo, tenendo presenti le quadrature geometricamente eseguite, la validità del ben noto procedimento risolutivo algebrico già riportato "come se fusse la dimostrazione"[7] da Bombelli nel *Capitolo di Potenze e Tanti eguali a numero*[8]. Da notare che il cateto FQ e quindi il suo quadrato sono univocamente determinati nel triangolo rettangolo EQF non appena si conosca EF e EQ.

[7] Vedi p. 190 di R. Bombelli [1966].

[8] Bombelli dà quindi anche una dimostrazione del tutto algebrico sincopata che giustifica in modo aritmetico la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Tuttavia la dimostrazione geometrica, che è interdipendente da quella algebrico sincopata, ha, come si è detto, per obiettivo la dimostrazione della validità dell'uguaglianza che stabilisce l'equazione medesima.

Corrispondentemente al lemma 3.b, in analogia a quanto abbiamo fatto per il primo grado, si ha il seguente:

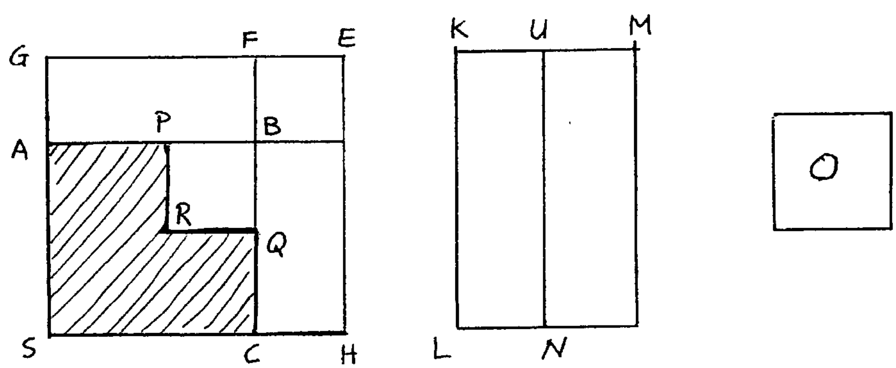
Problema 3.b: Trovare il lato del Quadrato(BHMD) conoscendo:
- la base del Rettangolo(LB)
- lo Gnomone(DCLHGF)

I passi geometrici con i quali "usualmente" si risolve il problema 3.b, tradotti in termini aritmetici, sono quelli con i quali si risolve l'equazione (3.1).

Per le equazioni di secondo grado bisogna tener presente l'altro caso in cui il discriminante è sempre maggiore di zero e cioè:

(3.2) $\qquad x^2 - px = q \qquad$ cioè ad es.: $x^2 - 8x = 9$

con p e q positivi, affrontato da Bombelli nel paragrafo *Dimostrazione del sopraddetto Capitolo di potenze eguali a Tanti e numero* (pp. 198-199 di R. Bombelli [1966]) e che fra poco riporteremo. Questo caso è esaminato con altra costruzione anche da Stevin a p. 66 di S. Stevin [1634]. Con riferimento alla sottostante figura si divida il rettangoolo LKM in due rettangoli uguali e siano LKU e NUM. Si riporti il rettangolo LKM sul quadrato SGE in modo tale che il rettangolo CFE sia congruente appunto al rettangolo LKU. La stessa cosa si faccia riportando il rettangolo NUM a coincidere, nel quadrato SGE, con il rettangolo AGE.



Si costruisca quindi, nel quadrato SGE, il quadrato RPB uguale al quadrato BFE. Vale allora il seguente (posto Gnomone (SAPRQC) = Superficie(O)):

Lemma 3.c: (3.c1) Superficie(APRQCHEG) = Rettangolo(LKM); (3.c2) Quadrato(SGE) – Superficie(APRQCHEG) = Gnomone(SAPRQC); (3.c3) Quadrato(RPB) + Gnomone(SAPRQC) = Quadrato(SAB)

Se ora interpretiamo: SG = LK = x; KU = UM = FE = 4; Superficie(O) = 9, è facile osservare la (3.c2) ci dà il modello geometrico dell'uguaglianza che riguarda la (3.2). A sua volta la (3.c3) permette l'interpretazione geometrica della formula risolutiva della (3.2).

Il problema geometrico che il lemma 3.c permette di risolvere, in termini prettamente geometrici, è il seguente:

Problema 3.c: Trovare il lato del Quadrato(SGE) conoscendo:
- il lato del Quadrato(BFG)
- lo Gnomone(SAPRQC)

Come si potrà osservare i passi geometrici che di consueto conducono alla soluzione di questo problema tradotti in termini aritmetico-algebrici sono quelli che conducono alla soluzione dell'equazione (3.2).

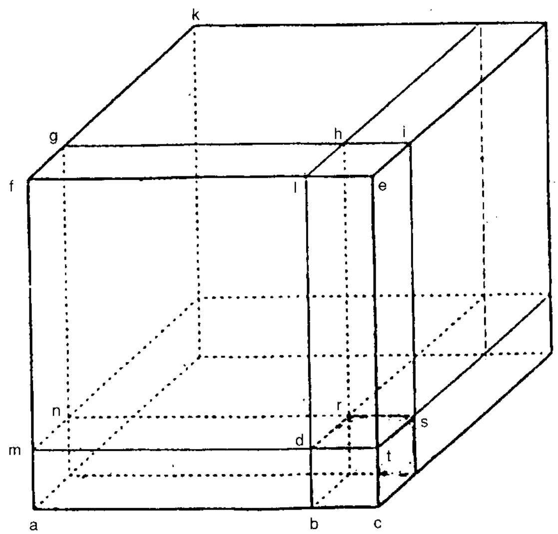
Anche per le equazioni di secondo grado Bombelli fornisce la dimostrazione "in linea" (vedi, con particolare riferimento al caso (3.2), pp.199-200 di R. Bombelli [1966]).

Per le equazioni di terzo grado ci rifacciamo al Cap.XI, dal titolo *De cubo & rebus aequalibus Numero*, dell'*Ars Magna* di Cardano, dove fra l'altro l'autore si riferisce a Scipione Dal Ferro e a Nicolò Tartaglia[9]. L'equazione presa in considerazione è la

$$x^3 + 6x = 20 \tag{3.3}$$

che è del tipo (2.1). Per l'interpretazione geometrica del primo membro della (3.3) si assume, nella sottostante figura, che x sia uguale ad *ab*, per cui x^3 risulta essere interpretato dal cubo *nrghkuwz* e $6x = 3 \cdot 2\ ab$ indica tre volte il parallelepipedo *mtsnfgei* la cui base è uguale ad *ac bc* = 2. Quest'ultimo passaggio è possibile dopo aver interpretato adeguatamente la seconda delle equazioni del sistema (2.4), utilizzato da Tartaglia come strumento basilare per giungere

[9] Vedi pp. 258 e segg. di G. Cardano [1967].



alla soluzione delle equazioni di terzo grado. Dunque il primo membro della (3.3) alla fine risulta essere uguale allo "gnomonide", cioè al solido composto dal cubo *nrghkuwz* più l'aggiunta ad incastro dei tre parallelepipedi del tipo *mtsnfgei*. È facile dimostrare geometricamente il

Lemma 3.d: Il solido composto dal Cubo(*nrghkuwz*) più i tre parallelepipedi ad incastro del tipo (*mtsnfgei*) è uguale al solido che risulta dalla differenza da tutto il cubo più grande (di estremi *c* e *k*) del cubo più piccolo (*rdtsbc*).

Ma la differenza tra tutto il cubo grande di estremi *c* e *k* e il cubo più piccolo (*rdtsbc*) è proprio uguale, nell'interpretazione, al primo membro della prima delle equazioni del sistema (2.4), che a sua volta è uguale a 20 (cioè in generale a *q*). D'altro canto 20 (o *q*) è proprio il secondo membro della (3.3) (o in generale della (2.1)); dunque il lemma 3.d garantisce geometricamente la validità dell'uguaglianza espressa dalla (3.3) o (2.1). Anche per le equazioni di terzo grado, tenendo presente il lemma 3.d, cioè la precedente costruzione solida, viene interpretata geometricamente la procedura che conduce alla formula risolutiva. Infatti utilizzando l'abbreviazione:

$$\Im\,(\alpha)$$

per denotare l'interpretazione geometrica di una generica espressione algebrica α, si ha, partendo proprio dal lemma 3.d:

Cubo (r, k) + 3 Parallelepipedo (m, i) =

= Cubo (c, k) – Cubo (b, s)

$$\overline{ab}^3 + 3\, ac \cdot bc \cdot ab = \overline{ac}^3 - \overline{bc}^3$$

$$\Im(x^3) + 3\,\Im(u) \cdot \Im(v) \cdot \Im(x) = \Im(u^3) - \Im(v^3)$$

$$\Im(x^3) + 3\,\Im(\tfrac{p}{3}\, x) = \Im(q) = \Im(u^3) - \Im(v^3) = \text{Gnomonide}$$

$$x^3 + 3\,\tfrac{p}{3}\, x = q = u^3 - v^3$$

essendo:

$$\Im(u) \cdot \Im(v) = \Im(\tfrac{p}{3})$$

$$u \cdot v = \tfrac{p}{3}$$

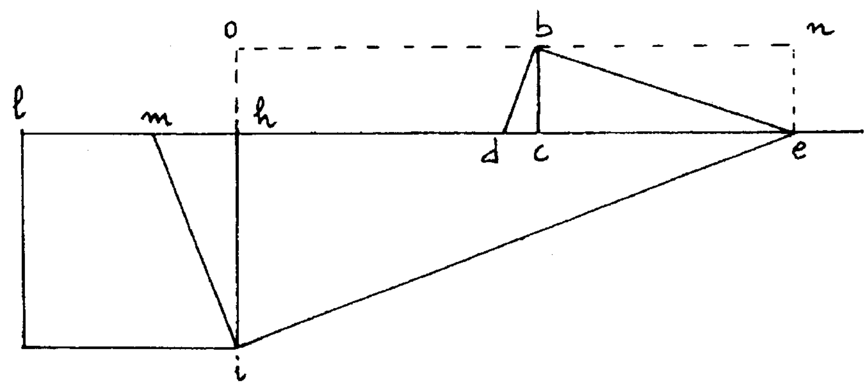
e dunque: $\begin{cases} u \cdot v = \frac{p}{3} \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}$

da cui: $ab = ac - bc \rightarrow \Im(x) = \Im(u) - \Im(v) \rightarrow x = u - v$

Analogamente a quanto visto per le precedenti equazioni di primo e di secondo grado si assocerà, stabilendo analoghe conseguenti considerazioni, al lemma 3.d il

Problema 3.d: Trovare il lato del Cubo(r,k) conoscendo:
- il Rettangolo(m,s)
- lo Gnomonide, cioè il solido differenza tra il Cubo(c,k) ed il Cubo(b,s)

Per le equazioni di terzo grado Bombelli, oltre a dare una dimostrazione tridimensionale (ad es. pp. 217-219 di R. Bombelli [1966]) dà anche quella "in superficie piana" (pp. 219-220 di R. Bombelli [1966]). Questa consiste nel considerare la sottostante figura (concretamente si possono utilizzare due squadre) e si prende il caso $x^3 + 6x = 20$. Nella figura si ha che $hm = bc = ne$, e che gli angoli



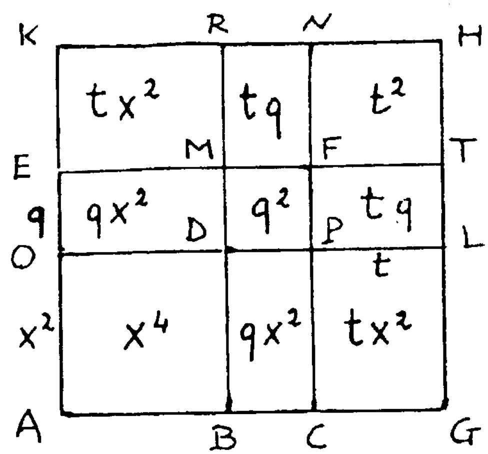
in b ed in i sono retti. Applicando il cosiddetto secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo *mie* si ha che $hi^2 = mh \cdot he$. Il rettangolo $mh \cdot he$ è uguale esattamente al rettangolo *heno* dal momento che per costruzione $hm = bc$. D'altronde il rettangolo *heno* risulta uguale alla somma dei due rettangoli *cben* e *hcbo*. Se ora interpretiamo $ce = x^2$, $bc = x$, $cd = 1$, $hc = 6$ ed il quadrato $lhi = 20$, dalla $hi^2 = mh \cdot he$ otteniamo la dimostrazione desiderata, che ha anche un risvolto in termini di proporzioni.

In modo analogo Bombelli procede per il caso $x^3 - px = q$, dimostrando con riferimento sia a costruzioni solide, sia a costruzioni in "superficie piana" (vedi pp. 226-229 di R. Bombelli [1966])

Passiamo infine alle equazioni di quarto grado, seguendo quanto riporta Cardano a p. 294, 295 dell'*Ars Magna* [1663]. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, il momento cruciale risolutivo dell'equazione di quarto grado è costituito dalla quadratura dei due membri dell'eguaglianza espressa dalla (2.8), ovvero dall'artificio calcolativo che ci permette di giungere alla (2.9). Ciò avviene appunto aggiungendo a destra e a sinistra della (2.8) il trinomio

$$2\,tx^2 + t^2 + 2tq \tag{3.4}$$

A questo punto sembra che Cardano e Ferrari ragionino più o meno nel modo che di seguito riportiamo. Teniamo presente la figura sottostante (da loro proposta), nella quale abbiamo inserito le rispettive interpretazioni. La loro preoccupazione è allora quella di avere la garanzia geometrica che il primo membro della (2.9) risulti, interpretato, dopo l'aggiunta del trinomio (3.4) che permette a sua volta di avere secondo membro un quadrato, ancora un quadrato. Tenendo presente la Prop. I,44 degli Elementi di Euclide, il teorema geometrico che consente di superare la preoccupazione poc'anzi detta è il



Lemma 3.e: Quadrato (*KHGA*) = Quadrato (*EFCA*) + Gnomone (*EKHGCFE*)

Infatti l'interpretazione è tale che:
al Quadrato (*EFCA*) corrispode il trinomio $x^4 + 2\,qx^2 + q^2$
e allo Gnomone (*EKHGCFE*) corrisponde il trinomio $2\,tx^2 + t^2 + 2\,tq$.

Come si può immediatamente osservare esistono considerevoli difformità tra il caso del quarto grado ed i casi precedenti. Su ciò baseremo le nostre conclusioni.

Per il quarto grado Bombelli proporrà (vedi R. Bombelli [1966] pp. 522-524) una "dimostrazione" apparentemente completa, nel senso che il modo in cui si giunge alle equazioni che compaiono nella la relativa procedura risolutiva risulta geometricamente interpretabile. A sua volta però si dovrà rimandare ad altra sede l'interpretazione geometrica dell'equazione di terzo grado (risolvente di Ferrari) ed alla conclusiva equazione di secondo grado. In realtà in questa dimostrazione (vedi P. Freguglia [1994]) non possiede le caratteristiche di quelle esaminate dal primo al terzo grado compresi. Superfluo infine sottolineare che tutte queste costruzioni sono riferite all'ambito reale positivo.

4. Il principio di omogeneità limitata. Se ci soffermiamo sulle interpretazioni delle equazioni di primo, di secondo e di terzo grado, le quali si basano rispettivamente sui lemmi 3.a, 3.b, 3.c, e 3.d, si osserva che esse avvengono in conformità con un principio che associa ad ogni monomio dell'equazione una superficie, nel caso del primo e del secondo grado, un volume, nel caso del terzo grado. Per cui, come tradizionalmente si dice, questa interpretazione soddisfa al principio di omogeneità (dimensionale). Più precisamente, chiameremo *corrispondenza d'omogeneità limitata* (il significato di quest'ultimo attributo sarà evidente successivamente) l'interpretazione che associa a x un lato, a x^2 un quadrato, a x^3 un cubo, e ad un numero o una linea (segmento), o una figura piana, o una figura solida a seconda dei casi di omogeneità di cui si è detto nelle prime righe di questo paragrafo. I problemi 3.a, 3.b, 3.c, e 3.d a loro volta si possono risolvere con procedure geometriche che interpretano passo passo quelle algebriche mediante le quali si giunge alle soluzioni dei precedenti tipi di equazioni. Si potrà obiettare che in generale un problema (geometrico) non si risolve in un solo modo, con una sola procedura. Ma a noi interessa che tra le procedure prettamente geometriche di risoluzione ve ne sia una che ricalchi geometricamente, in modo puntuale, il ragionamento aritmetico-algebrico. E ciò accade per i problemi in questione. Chiameremo allora *isomorfismo* (*di procedura* o *di ragionamento*) *aritmetico-geometrico* la situazione in cui una procedura algebrica, un algoritmo risolutivo, viene interpretato passo dopo passo geometricamente. Cioè quando ad ogni passaggio aritmetico-algebrico corrisponde un passaggio geometrico e viceversa. Discende allora, tenendo presente quanto sviluppato nel precedente paragrafo 3, il seguente:

Teorema: Nel contesto in cui vale la corrispondenza d'omogeneità limitata solo le equazioni di primo, secondo e terzo grado sono soggette ad isomorfismo aritmetico-geometrico.

Infatti, come si può facilmente osservare (vedi anche lemma 3.e), per il quarto grado o meglio, dal quarto grado in poi, nell'ambito tradizionalmente euclideo non è possibile stabilire corrispondenze d'omogeneità limitata. Se invece ampliassimo, come peraltro sostanzialmente ed in un altro contesto teorico fa Viète (vedi F. Viète [1646] pp. 2 e segg.), mediante la nozione di corrispondenza d'omogeneità generalizzata e ci basassimo su geometrie sintetiche euclidee (vedi ad es. quanto sviluppato da G. Veronese in *Fondamenti di Geometria*, 1891) relative alla quarta o meglio dalla quarta dimensione in poi, potremmmo sviluppare di conseguenza.

5. Conclusioni. Vorremmo ora trarre qualche conclusione sia di carattere storiografico, sia di carattere teorico. L'isomorfismo aritmetico-geometrico mette in luce il fatto che è del tutto equivalente, per le equazioni fino al terzo grado compreso, ragionare o in termini geometrici (di segmenti, superfici e volumi) o in termini aritmetici (abacistici). Ciò spiegherebbe storicamente il modo di procedere, di fare algebra dei matematici prima di Viète. Per il quarto grado non era più realizzabile questa dualità procedurale in modo soddisfacente. In realtà il lemma 3.e non rientra nello schema epistemologico dei precedenti lemmi 3.a, 3.b, 3.c e 3.d connessi rispettivamente alle equazioni di grado 1°, 2° e 3°, in quanto, come si può osservare, non viene neppure dimostrata geometricamente l'uguaglianza che stabilisce l'equazione medesima. D'altro canto ciò conferma inderettamente l'ipotesi storiografica che alla soluzione delle equazioni di quarto grado si sia giunti, in modo decisamente più accentuato che in quelle di terzo grado, con manipolazioni prettamente algebrico-aritmetiche. I motivi di questa difformità vanno ricercati, stando ai testi, nel fatto che fino al terzo grado quella che abbiamo chiamato "corrispondenza di omogeneità limitata" è geometricamente adeguata alla geometria degli *Elementi* euclidei. Ma sia che si parta da predetta corrispondenza, sia che si considerino le interpretazioni "in linea" (ad es. per le equazioni di primo grado) o quelle "in superficie piana" (ad es. per le equazioni di terzo grado) in cui in particolare si associa a x^2 un segmento e a x^3 un parallelogrammo, si utilizzano sempre e proficuamente teoremi di geometria euclidea per stabilire in questo contesto le uguaglianze che sono alla base delle equazioni algebriche dal primo al terzo grado compresi. Connettendo quanto sopra con il teorema di Ruffini-Abel, si ottiene una panoramica teorica più completa e cioè:

– per le equazioni di 1°, 2° e 3° grado (e non per il 4° grado) si può costruire il modello geometrico (euclideo) dell'uguaglianza che è alla loro base e si può stabilire l'isomorfismo aritmetico-geometrico;

– solo le equazioni generali di 1°, 2°, 3° e 4° grado possono essere risolte mediante radicali algebrici.

Non c'è dubbio che tutto ciò riveste oltre che un particolare significato storico che fa comprendere la profondità dei legami che sussistono tra algebra e geometria, anche una qualche rilevanza teorica. Abbiamo dunque cercato di illustrare in che cosa consista la teoria delle equazioni algebriche che si sviluppò nel Cinquecento prima di Viète. Con Viète assisteremo ad un'altra fase del processo di geometrizzazione dell'algebra[(10)].

[(10)] Si rimanda a P. Freguglia [1989]. La posizione di Stevin (*Arithmétique*) è sostanzialmente simile, salvo alcune differnze che abbiamo evidenziato in P. Freguglia [1992], a quella di Cardano, Tartaglia e Bombelli.

BIBLIOGRAFIA

BOMBELLI R., *L'Algebra* (prima edizione integrale, intr. di U. Forti e prefaz. di E. Bortolotti), Feltrinelli, Milano, 1966.

CARDANO G., *Opera omnia* (the 1662 Lugduni edition, intr.by A. Buck), Johnson repr. corp., New York and London, 1967, vol. IV.

FRANCI R.,TOTI RIGATELLI L., "Towards a history of algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli", in Janus, LXXVII, 1-3, 1985.

FREGUGLIA P., *Ars Analytica. Matematica e methodus nella seconda metà del Cinquecento*, Bramante Ed., Busto Arsizio, 1988.

— "Algebra e geometria in Viète", in *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, v. IX, (1989) fasc. 1.

— "Bombelli, Viète e Descartes: tre momenti dello sviluppo dell'algebra tra Cinquecento e Seicento", in *Lezioni Galileiane*, I, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, 1991.

— "L'Arithmétique di Simon Stevin e gli sviluppi dell'algebra nella seconda metà del Cinquecento", Dip. di Mat. Univ. Siena, Siena, 1992.

— "Sur la théorie des équations algèbriques entre le XVI et le XVII siècle", in *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, (1994)

GIUSTI E., "Algebra and Geometry in Bombelli and Viète", in *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, XII (1992).

MARACCHIA S., *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'algebra*, Feltrinelli, Milano, 1979.

ROSE P.L., *The Italian Renaissance of Mathematics*, Librairie Droz, Genève, 1975.

VIÈTE F., *Opera mathematica* [...], Elzevir, Lugduni Batavorum, 1646.

ALGEBRA DELLE SIMMETRIE E SIMMETRIE IN ALGEBRA

Giovanni Prodi
Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Premessa. Mi propongo di indicare alcuni ponti tra l'algebra (che è il tema principale di questo corso) e la geometria. Questi ponti sono tanto antichi e solidi che può sembrare ingenuo parlarne; ma s'intende che lo scopo di questa esposizione è didattico, e pertanto l'obiettivo non è di scoprire cose nuove – anche se può succedere talvolta – ma di saper vedere le cose vecchie con occhi nuovi. O, in altre parole: essere capaci di provare meraviglia, anche di fronte a paesaggi consueti, ed essere capaci di trasmetterla.

Devo precisare che, in questo contesto didattico, intendo l'algebra in senso abbastanza esteso e, nello stesso tempo, elementare, cioè come studio dei processi formali. Per inciso: l'algebra, più di ogni altro ramo della matematica, ha cambiato natura attraverso i secoli: è stata considerata un tempo come teoria delle equazioni; più recentemente è stata definita come studio delle operazioni di composizione interna, ma ora questa denominazione sembra starle un po' stretta. Forse converrebbe vedere l'algebra come la tendenza a mettere in luce gli aspetti formali della matematica, nel quadro e nei limiti di ogni epoca storica.

Questo spirito formale dell'algebra è anche recepito dai nuovi programmi della scuola secondaria (sia dai programmi del P.N.I. che da quelli della "Commissione Brocca"). Secondo lo spirito dei nuovi programmi del biennio, il campo dei processi formali comprende l'algebra in senso stretto, la logica, l'informatica. Un punto importante che viene sottolineato nelle nuove proposte è la distinzione tra *formale* ed *astratto*: l'uso del calcolatore rende *concreti* certi principi che fino a poco tempo fa parevano del tutto *astratti*, come le distinzioni fra i livelli sintattici. Per fare il primo esempio che mi viene in mente: chiunque fa un programma deve distinguere fra il comando < print X>, che provoca la stampa del *valore* della variabile X e < print "X">, che provoca la stampa della *lettera* X.

L'esposizione riguarderà i due punti che sono contenuti nel titolo, cioè:

A) Qualche osservazione sulla formalizzazione delle isometrie del piano euclideo

B) Il modo con cui le idee e le intuizioni che hanno per base e radice la simmetria (intesa in senso ampio) giocano nell'algebra (ed eventualmente nella logica).

Il primo punto è da pensarsi come un'azione dell'algebra sulla geometria, il secondo va in senso opposto, cioè parte dal quesito se vi possano essere analogie geometriche che possono indirizzare i procedimenti (pur così formali, come si è detto) che sono tipici dell'algebra.

1 – La formalizzazione delle isometrie. La *Geometria analitica* (sarebbe meglio indicarla con la denominazione di: *metodo delle coordinate*) può essere vista come un dispositivo di traduzione fra due linguaggi: quello geometrico e quello dell'algebra, come è ordinariamente intesa. Ciò è ovvio e risaputo. Il metodo delle coordinate ha, in un certo senso, uno spirito meccanico (nell' atteggiamento mentale di Cartesio – che si concentra nel termine *metodo* – vi è l'aspirazione ad ottenere la risoluzione *automatica* di ogni problema); inoltre esso ha un vantaggio didattico che di solito non viene pienamente sfruttato: di affrontare un problema sul lato geometrico o sul lato algebrico-analitico, secondo la convenienza. Non si può dire che il salto operato da Cartesio sia piccolo: ad esempio, l'associare ad una retta un'equazione lineare è cosa che sulle prime può creare difficoltà di comprensione. Tuttavia, nella traduzione di Cartesio, gli oggetti geometrici corrispondono abbastanza bene ad oggetti algebrici; in altre parole, la traduzione non crea troppi problemi.

Una variante interessante, nel caso specifico del piano euclideo consiste nel prendere come "*struttura di arrivo*" il piano complesso. I numeri complessi hanno un potere che non finisce mai di stupire; basta introdurre un nuovo ente i che risolva l' equazione $x^2+1=0$ e di colpo ogni equazione algebrica diventa risolubile! È da notare che, in realtà, si introduce la coppia di elementi fra loro indistinguibili i,-i. Per rappresentare con i numeri complessi le isometrie, il punto-chiave è il teorema che afferma: il modulo di un prodotto è uguale al prodotto dei moduli. Si tratta dell'identità[1], facilmente verificabile:

$$(xu-yv)^2 +(xv+yu)^2 = (x^2 +y^2)(u^2+v^2)$$

Allora si trova facilmente che:
ogni rotazione (cioè isometria che ha solo un punto fisso, o è l'identità) può essere rappresentata (prendendo il punto fisso come origine O del riferimento) nella forma:

$$z \rightarrow z' = wz$$

dove w è un numero complesso unitario (cioè $|w|=1$*)*
Ogni isometria concorde (cioè che conserva il senso delle rotazioni) può essere rappresentata nella forma

[1] Questa identità è utile anche in aritmetica, per affrontare un classico problema: la rappresentazione di un numero come somma di quadrati. Essa ci dice che se un numero è prodotto di due numeri ciascuno dei quali è somma di due quadrati, anch'esso lo è.

$$z \to z' = wz + s$$

dove w è unitario ed s è un numero complesso.

Come si vede, con i numeri complessi si rappresentano facilmente le isometrie concordi. La distinzione fra isometrie concordi e discordi si può fare facilmente a livello intuitivo, considerando le isometrie che si ottengono dall'identità con passaggio continuo e quelle che non si possono ottenere così, ma è difficile a livello elementare porre tutte le premesse per poter fare una dimostrazione rigorosa. Come vedremo, le simmetrie ci consentono di procedere per un'altra strada, anch'essa espressiva, ma in modo diverso: dimostrare che ogni isometria è prodotto di simmetrie e distinguere le isometrie secondo la parità del numero delle simmetrie componenti.

Intanto, vediamo come procedere alla rappresentazione con i numeri complessi delle isometrie discordi, che sono le simmetrie assiali e le "glissosimmetrie". Come è noto, una glissosimmetria è il prodotto di una simmetria assiale per una traslazione nella stessa direzione dell'asse di simmetria. Se vogliamo usare un'immagine concreta, è la trasformazione che esprime il passaggio da un'impronta alla successiva, lasciata dalle scarpe di chi cammina sulla neve... Sia a un'isometria discorde e sia h una qualunque simmetria assiale; allora ah=r è una isometria concorde. Dunque, moltiplicando a destra per h e tenendo presente che è $h^2=1$ (1 è l'identità), si ha a=rh; la simmetria assiale h può essere fissata una volta per tutte; possiamo allora, valendoci della rappresentazione nel campo complesso, porre h: $z \to z^*$ (coniugato di z). Possiamo così concludere:

ogni isometria discorde a *si rappresenta, nel piano complesso, così:*

$$\text{a: } z \to z' = wz^* + s$$

dove w è unitario ed s è un numero complesso.

2 – Una formalizzazione più spinta. A questo punto, lasciando da parte i numeri complessi, vogliamo spingerci più oltre nella formalizzazione delle isometrie del piano: dalle proprietà "concrete" delle isometrie ricaveremo le proprietà di un *calcolo formale* che potrà procedere in modo autonomo. Ci baseremo sulla struttura di gruppo in cui l'operazione è la composizione.

Sappiamo che ogni isometria piana si può generare con (non più di tre, come si sa, ma lo vedremo) simmetrie assiali; allora partiremo con

l'*identità* **1**

un insieme **S** di *generatori involutori*, che indicheremo con le lettere minuscole: a, b, c,.. (le simmetrie assiali).

Nel nostro discorso le rette saranno identificate con le rispettive simmetrie assiali. Dunque il gruppo **G** delle isometrie del piano sarà rappresentato dalle *parole* come *adcvm*, oppure dalla parola **1** (per l'identità); il nostro calcolo ha, intanto, una regola di semplificazione: quella che consiste nel sostituire la parola *aa* con **1** e, pertanto nell'abolirla quando essa è una sottoparola propria. Gli enunciati geometrici saranno tradotti con un'uguaglianza fra due parole. In questo breve cenno, ci interesseremo solo degli aspetti *espressivi* del nostro linguaggio, tralasciando quelli *deduttivi*. Ad esempio: come esprimere i punti? Un punto O viene espresso come simmetria centrale con centro O; questa, a sua volta, viene espressa come prodotto *ab* di due simmetrie assiali con assi ortogonali (che si incontrano in O). La relazione di commutazione $ab = ba$ (che è come dire che *ab* è involutoria, tenendo conto che *a* e*b* lo sono), con la condizione $a \neq b$, traduce il fatto che le rette *a, b* sono fra loro ortogonali. Naturalmente, il punto O potrà essere individuato da un'altra coppia a', b' tale che $ab = a'b'$.

Un'altra proprietà interessante (che possiamo verificare con i procedimenti geometrici consueti) è la seguente: la parola *abc* è involutoria se e solo se le rette *a,b,c* passano per uno stesso punto o sono perpendicolari alla stessa retta.

Dunque, in ogni caso possiamo porre la seguente proprietà:

Se *abc* è involutoria, allora esiste *x* tale che $abc = x$. (Esercizio: verificare che, come ci si aspetta, se *abc* è involutoria, anche *bac* e *acb* lo sono).

Qui viene un'osservazione importante: quella che abbiamo ora enunciato è una regola di semplificazione delle parole; l'altra regola di semplificazione è quella che discende dalla proprietà involutoria delle singole simmetrie assiali: $a\,a = \mathbf{1}$. In entrambi i casi, la lunghezza di una delle nostre parole (prescindendo dalla parola o sottoparola **1**) può essere modificata solo di 2; poiché non vi sono altre regole di semplificazione, possiamo concludere che nel nostro calcolo viene rispettata la *parità* della parola che rappresenta un'isometria. Come avevamo preannunciato, vi è dunque modo di separare le isometrie *pari* (o *concordi*) da quelle *dispari* (o *discordi*).

La regola di semplificazione che abbiamo enunciato ha questa conseguenza particolarmente interessante: se *a, b, c* sono simmetrie con assi che passano per uno stesso punto O, allora esiste *x* tale che $abc = x$, cioè $ab = xc$. È ben noto che le rotazioni con centro O sono prodotto di due simmetrie assiali con assi che passano per O; allora, la relazione scritta ci dice che per rappresentare una rotazione, una delle due simmetrie con asse passante per O può essere presa ad arbitrio. È facile anche dimostrare che il (sotto)gruppo delle rotazioni con centro O è commutativo; infatti siano *ab* ed *rs* due rotazioni con centro O; si ha $abrs = rsab$.

Finora ci siamo occupati solo dell'espressività del nostro linguaggio e delle regole di calcolo che lo governano; vediamo ora brevemente come esso possa essere strutturato come sistema formale capace di esprimere una porzione abbastanza significativa della geometria (sempre nell'ambito della geometria assoluta, cioè a prescindere dall'assioma della parallela). Premettiamo una convenzione: scriveremo $a \mid b$ per dire che a commuta con b: $ab = ba$; analogamente, se P=ab scriveremo P | c per dire $abc = cab$. Ed ecco gli assiomi del nostro sistema formale:

1 – Dati due punti P,Q, esiste una retta a tale che P,Q | a; questo enunciato intuitivamente è prevedibile: esiste una retta a che passa per P e passa per Q.
2 – Da P,Q | a, b segue che P=Q, ovvero $a = b$.
3 – Da a, b, c | P segue che esiste un d tale che $abc = d$
4 – Da $a, b, c \mid g$ segue che esiste un d tale che $abc = d$ (Significato intuitivo: se tre rette sono ortogonali ad una quarta, la loro composizione dà luogo ad una simmetria assiale).

Questa tendenza a costruire tutta la geometria sulla base di un solo ente (le simmetrie assiali) è stata portata alle estreme conseguenze con teutonica completezza dal Bachmann (*Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* – Springer; prima edizione del 1958, seconda edizione del 1973). Da questa opera è stato tratto il sistema di assiomi ora esposto. È il caso tuttavia di ricordare che la prima esposizione assiomatica della geometria in forma metrica (senza usare esplicitamente la distanza!) è di Peano (*Sui fondamenti della geometria*, Rivista di matematica, IV, 1894).

Se ho citato questo punto di vista, non è stato certamente perché io lo ritenga didatticamente proponibile nella Scuola Secondaria: la costruzione della geometria (o, almeno, di una porzione abbastanza ampia della geometria elementare) attraverso le sole simmetrie si scosta dall'intuizione, rendendo difficile la congettura di nuovi teoremi. Ma è interessante vedere come la geometria piana possa esprimersi in un linguaggio così povero: vi è un solo tipo di variabili (che rappresentano le simmetrie assiali), le variabili sono semplicemente giustapposte (cioè scritte in fila) e le formule non sono altro che uguaglianze di parole. Effettivamente le proprietà geometriche sono irriconoscibili, ma non è detto che questa presentazione non sia adatta alle manipolazioni del calcolo automatico.

3 – Simmetrie in algebra. Invertiamo ora la direzione di marcia e proponiamoci di vedere se le idee e le intuizioni geometriche relative alle simmetrie possono avere un loro ruolo nei processi formali. Se la risposta sarà positiva, il discorso sarà interessante e utile, perché le simmetrie ci consentiranno di sopperire alla povertà di stimoli intuitivi che si verifica nel campo dei processi formali.

Anzitutto, una formula è un allineamento[2] di simboli, presi nell'ambito di un certo alfabeto. Uno degli schemi più semplici è quello che illustra la proprietà commutativa di un'operazione binaria:

$$a * b \text{ e } b * a$$

Il segno di operazione $*$ interposto fra i due operandi rende simmetrica la formula e ci predispone alla proprietà commutativa, a differenza, ad esempio, dalla notazione polacca che premette il simbolo di operazione:$*ab$.

Nel caso – che abbiamo studiato nel punto **2** – di un gruppo generato da elementi involutori a, b, c, d, l'inverso di $abcd$ è la parola simmetrica $dcba$. Una parola che sia uguale alla sua simmetrica si dice *palindroma*; nel linguaggio formale delle simmetria che abbiamo presentato nel punto **2** una parola palindroma rappresenta sempre un elemento involutorio, che si riduce all'identità nel caso di una lunghezza pari e ad una simmetria assiale nel caso di una lunghezza dispari.

Ma lasciamo l'indagine, forse non troppo redditizia, della simmetria geometrica della formula e veniamo a un tipo di simmetria più essenziale riguardante, in primo luogo, una sostituzione (uno scambio) fra le variabili.

Dal punto di vista didattico occorre che l'insegnante sia consapevole che certi principi ovvi (e che, come tali, non sono quasi mai enunciati) sono tuttavia fondamentali.

Un principio, che si potrebbe chiamare *principio di indifferenza* (o di *simmetria)* è quello della arbitrarietà dei nomi delle variabili. Propongo che questo principio inconscio venga utilizzato come test per vedere se l'allievo possiede l'idea di variabile, nel seguente modo:

si assegna all'allievo una *brutta* espressione algebrica in due variabili E (x, y), che, con calcoli abbastanza laboriosi, si semplifichi notevolmente (fortunatamente, i libri di testo adottati nelle nostre scuole sono pieni di espressioni di questo tipo). Appena ha finito, gli si propone il calcolo dell'espressione E (u,v), eventualmente scrivendola abbastanza vicina ad E (x, y). Si tratta di vedere quali allievi hanno l'idea di sostituire x con u ed y con v nel risultato finale. Saranno certamente pochi; ma si può cercare di mettere in evidenza qualche livello intermedio. (Ad es.: allievi che se ne accorgono alla fine, allievi che si accorgono, dopo un po' di tempo, che stanno facendo calcoli identici....).

[2] Non rientano in questo discorso le formule diagrammatiche, piane o anche tridimensionali, che pure hanno una forte potenza esplicativa. Ma in generale i sistemi formali fanno uso di *parole* cioè di aggregati lineari di simboli; questo è spesso indispensabile perché c'è l' esigenza della sequenzialità .

Variante (più o meno difficile? si tratta di fare qualche prova...): Fare calcolare G (x, y) (scelta col criterio di prima) e poi fare calcolare G (y, x). Altra variante: prendere una espressione H (x, y) che, pur presentandosi in forma non simmetrica, dia luogo ad uno sviluppo semplificato simmetrico; successivamente, far calcolare H (y, x).

In certi casi la simmetria di una formula (nel senso che la formula si trasforma in sé con una sostituzione fra le variabili) è prevedibile a partire dalla simmetria di un enunciato geometrico. Come esempio si potrebbe prendere la formula di Erone per l'area del triangolo. Sarà cura dell'insegnante porre i presupposti di questo discorso partendo dal linguaggio comune. Ad esempio, restando sempre nella formula di Erone, è chiaro che i tre lati entrano come di un insieme di dati, senza che sia precisato un ordine: pertanto, l'area deve essere una funzione simmetrica delle lunghezze dei lati.

Il *principio di indifferenza* rispetto ai nomi delle variabili si può estendere a livello logico. Qui ci imbattiamo in una delle più profonde e semplici scoperte nella storia della scienza: la *legge della dualità* nella geometria proiettiva. All'inizio dell''800, col progredire della sistemazione della geometria proiettiva, si cominciò ad osservare che, nella geometria proiettiva piana, gli enunciati rimanevano validi se le parole "punto" e "retta" si scambiavano fra loro. Lo stesso accadeva nella geometria proiettiva tridimensionale se la parola "punto" veniva scambiata con "piano" e la parola "retta" veniva lasciata invariata. Si accese allora una polemica fra Poncelet (1788-1867) (a cui spetta il merito di avere fondato, o rifondato, la geometria proiettiva) e Gergonne (1771-1859) sul modo con cui si poteva giustificare il principio di dualità. Poncelet sosteneva che il fondamento del principio era nell'esistenza delle polarità, cioè di corrispondenze biunivoche che associano ad una retta un punto e ad un punto una retta, conservando l'appartenenza. Come è noto, una conica non degenere definisce una polarità.

Ad esempio, una polarità può essere quella così definita in coordinate cartesiane nel piano:

al punto (u, v) $\neq$ (0, 0) si fa corrispondere la retta $ux + vy = 1$, dove, ovviamente, x ed y sono le *coordinate correnti* sulla retta.

La corrispondenza si completa associando al punto (0, 0) la retta impropria; in modo analogo, ad ogni retta del primo piano si fa corrispondere un punto del secondo.

In questo modo i punti vengono trasformati in rette, le rette in punti e se un punto ed una retta si appartengono, la retta e il punto corrispondente si appartengono. Così la polarità, vista come trasformazione che porta in sé l'insieme delle rette e dei punti (scambiando fra loro questi due sottoinsiemi) è involutoria. Dal punto di vista analitico tutto si semplifica adottando le coordinate omogenee per i punti e per le rette (Plücker) e considerando (u, v, w) come coordinate omogenee della retta $ux+vy = wz$.

L'idea di Poncelet si può allora materializzare così: pensiamo di avere a disposizione una polarità, considerata come una macchina che trasforma i disegni da una lavagna ad un'altra: allora, mentre il geometra proiettivo fa le sue costruzioni grafiche sulla prima lavagna, la polarità gli trasforma il disegno, man mano, in un disegno duale sulla seconda lavagna.

L'idea di Gergonne, più generale e destinata ad avere assai più ampie ripercussioni anche sulla rinascita della logica era quella di vedere fra due teorie duali una pura simmetria di linguaggio, cioè lo scambio tra e parole *punto* e *retta*

Dal momento che questo scambio di parole muta ogni assioma della teoria in un altro assioma, le dimostrazioni rimangono valide operando questo scambio, e, a conclusione, anche gli enunciati dei teoremi possono essere sottoposti a questo scambio, rimanendo validi. Vediamo la cosa in modo preciso entro la logica del primo ordine. Adottiamo il consueto linguaggio con un unico tipo di variabili (anche se si potrebbero adottare due tipi di variabili, come si fa ordinariamente nei testi di geometria in cui per i punti si adottano le lettere maiuscole, per le rette le lettere minuscole). Allora, il predicato con cui si esprimono le così dette proprietà *grafiche* è $A(x,y)$ con il significato

"x è un punto, y è una retta e x appartiene ad y";

possiamo allora introdurre la trasformazione puramente formale e involutoria: $A \to A^*$, $A^* \to A$, dove si pone: $A^*(x,y) \Leftrightarrow A(y,x)$. Riconosciamo che gli assiomi si trasformano in sé con questa trasformazione; ad esempio, gli assiomi

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists y\, A(x_1, y) \wedge A(x_2,y)$$

(per due punti passa una retta) e:

$$\forall y_1 \forall y_2 \exists x\, A(x, y_1) \wedge A(x,y_2)$$

(due rette hanno un punto in comune) sono trasformati l'uno nell'altro dalla trasformazione formale che abbiamo definito; poiché le regole di inferenza (modus ponens e generalizzazione) si conservano se si opera questa trasformazione, si conclude che anche la tesi finale ammette questa trasformazione (la quale appunto, essendo involutoria può essere vista come una *simmetria formale).*

Facciamo un altro esempio: l'algebra di Boole delle proposizioni. Essa può essere espressa attraverso due connettivi binari: $\wedge$ ("e") ed $\vee$ ("o") e il connettivo unario $\neg$ ("non"). Si costruisce un calcolo con le seguenti regole (certamente sovrabbondanti, ma non importa):

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C \qquad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$
$$A \wedge B = B \wedge A \qquad A \vee B = B \vee A$$
$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \wedge C)$$
$$A \wedge (A \vee B) = A \qquad A \vee (A \wedge B) = A$$
$$A \wedge A = A \qquad B \vee B = B$$
$$\neg\neg A = A$$
$$\neg (A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) \qquad \neg (A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Si vede subito cha anche in questo caso abbiamo una dualità che consiste nello scambio dei connettivi $\wedge$ ("e") ed $\vee$ ("o"): dalle relazioni logiche (o tesi logiche) scritte a sinistra si ottengono quelle corrispondenti di destra mediante lo scambio suddetto. Dunque, anche nelle relazioni che si deducono da queste lo scambio può essere fatto. Possiamo dire che tutto torna bene secondo il punto di vista di Gergonne; ma anche il punto di vista di Poncelet sussiste. Infatti, abbiamo una operazione interna (analoga alla polarità di cui dicevamo prima) che trasforma ogni formula nella sua duale; essa consiste in questi due passi:

i) sostituire le variabili con la loro negazione

ii) negare la formula così ottenuta.

Con questa regola, applicata membro a membro alle prime quattro formule della colonna di sinistra, facendo uso della legge della doppia negazione e delle relazioni di De Morgan si ottengono le prime quattro corrispondenti della colonna di destra. Applicando questa regola di trasformazione ad una qualsiasi tesi logica si ottiene quella duale.

È opportuno, a questo punto, fare alcune osservazioni di carattere didattico. Anzitutto, l'algebra di Boole delle espressioni proposizionali è un argomento di grande efficacia didattica, adatto anche al primo biennio. Alla importanza intrinseca del soggetto (primo livello logico, costruzione delle funzioni Booleane, con applicazione ai calcolatori, ecc) io aggiungerei il valore del confronto (per analogia o per contrapposizione) con le strutture dell'algebra ordinaria dei polinomi Così come i polinomi si possono introdurre come uno schema di calcolo eseguito – ad esempio – sui numeri razionali, le espressioni proposizionali si possono vedere come schemi di calcolo sull'insieme $\{\mathbf{0,1}\}$ (che si intende come "falso, vero") con le regole di calcolo che sono fornite dalle "tavole di verità" le proprietà che si mettono in evidenza (e che sono di verifica immediata sulle "tavole di verità") sono appunto quelle che abbiamo elencato.

Viene allora spontaneo il confronto con le proprietà dell'algebra dei polinomi, basata sui connettivi binari +, ., – (quest'ultimo con significato di opposto) e l'algebra di Boole della logica proposizione basata sui connettivi $\vee, \wedge, \neg$. Come fare l'abbinamento? La simmetria fra i connettivi $\vee, \wedge$ ci dice che l'abbinamento con i connettivi binari +,., può essere fatto ad arbitrio, tuttavia, poiché la tavola di verità del connettivo $\wedge$ si comporta come quella del prodotto ordinario dei numeri **0,1**, è ragionevole far corrispondere al prodotto ordinario il connettivo $\wedge$ (che, di fatto, viene spesso chiamato *prodotto logico)*. Ma, a parte la peculiarità di certe proprietà, come quelle di idempotenza e la legge di assorbimento, si scopre che l'algebra di Boole ha due proprietà distributive, in ottemperanza con la simmetria fra i due connettivi, mentre nel calcolo algebrico ordinario la proprietà distributiva è una sola.

Ciò ha conseguenze importanti, anche se tacite (almeno nella prassi scolastica comune). Mi riferisco alle *regole di precedenza*, che servono a risparmiare parentesi. Le parentesi servono ad indicare le precedenze tra le operazioni: in altre parole, le parentesi servono per poter ricostruire senza ambiguità il *grafo di calcolo* a partire da una parola – che è ovviamente lineare. Per abolire una parte almeno delle parentesi si danno delle regole di precedenza; secondo queste regole le operazioni unarie hanno la precedenza; si fissa poi una precedenza far le operazioni binarie. È chiaro che, là dove vi è perfetta simmetria – come nel caso dei connettivi $\vee$, $\wedge$ – la precedenza è materia di pura convenzione (come è la scelta del verso di circolazione stradale: precedenza destra o precedenza a sinistra sono due scelte indifferenti, purché fatte con coerenza). Ma nel caso dell'algebra ordinaria questa indifferenza non c'è e allora la precedenza, che viene data alla moltiplicazione, non è risultato di pura convenzione, ma è fatta in modo che, attraverso un impiego della proprietà distributiva, si possa in ogni caso trasformare una qualsiasi formula in una somma di prodotti, per rappresentare la quale le parentesi non occorrono più.

STRUTTURALISMO O POST-STRUTTURALISMO?
Splendori e angustie del bourbakismo

Francesco Speranza
Dipartimento di Matematica - Università di Parma

1. Analogie strutturali. Dai programmi della scuola media:

«*Tema 7: Corrispondenze e analogie strutturali.*

Richiami, confronti e sintesi dei concetti di relazione, corrispondenza, funzione, legge di composizione incontrati in ambiti diversi.

Ricerca e scoperta di analogie di struttura».

Dalle osservazioni sui contenuti:

«Il tema "Corrispondenze e analogie strutturali" non darà luogo ad una trattazione a se stante. Nel corso dei tre anni, tutte le volte che se ne presenti l'occasione, si faranno riconoscere analogie e differenze tra situazioni diverse come approccio alle idee di relazione e di struttura».

Indicazioni in questo senso sono contenute nella stessa enunciazione del tema 7, e in altri punti delle osservazioni: per esempio, «per illustrare una proprietà, si daranno esempi di situazioni in cui essa non vale ...».

Il "pensiero per analogia" è assai diffuso. Il proverbio "Gatto scottato dall'acqua calda ha paura dell'acqua fredda" ne mette in rilievo sia l'utilità che i pericoli: basarsi su una esperienza precedente è importante, anzi necessario; ma certe generalizzazioni possono essere ingiustificate.

In un contesto matematico, occorre essere sicuri di generalizzare quelle analogie che sono effettivamente generalizzabili. Qui si parla anzi di "analogie di struttura": nel linguaggio corrente, "struttura" si può interpretare come "organizzazione", cioè qualcosa che va oltre la pura e semplice elencazione degli elementi messi in gioco.

Vi chiederete perché abbiamo cominciato il discorso parlando di programmi della scuola media. Il fatto è che questo argomento è spesso ignorato nella nostra scuola, e che quindi occorre riprenderlo nelle scuole superiori.

2. Un caso semplice. Vediamo un esempio. Scriviamo le tabelle dei connettivi *aut, vel* (V = vero, F = falso):

p	q	p *aut* q	p *vel* q
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F.

Scriviamo ora la tabella che dà la parità della somma e del prodotto di due numeri (P = pari, I = dispari): "pari più pari è pari", eccetera.

somma

+	P	I
P	P	I
I	I	P

prodotto

×	P	I
P	P	P
I	P	I

Le due situazioni riguardano contesti affatto diversi. Qualcuno potrebbe dire che c'è una forte analogia fra la tabella di *aut* e quella di *vel* (che dopotutto si riferiscono al medesimo contenuto, e che inoltre si differenziano solo per il primo valore).

Invece, quanto a forma, a struttura, c'è una perfetta analogia fra la tabella di *aut* e quella della somma. Intanto, il fatto che la prima sia scritta 'in verticale' e la seconda sia 'quadrata' è puramente accidentale; ciascuna potrebbe scriversi con l'"altra" disposizione. L'idea fondamentale sottostante è anzitutto quella di «operazione binaria»: a una coppia ordinata di oggetti si fa corrispondere un oggetto (il parlare corrente ci avrebbe suggerito "corrispondere un terzo oggetto": perché abbiamo evitato questa espressione?). Ma questa idea c'è anche nelle altre due tabelle. Il fatto importante, pur se non evidente, è invece questo: con la 'traduzione'

$$V \to I \quad F \to P,$$

la tabella di *aut* si trasforma in quella dell'addizione (per esempio, nella prima V *aut* V dà F, nella seconda I + I dà P). Possiamo dire che c'è un *isomorfismo* fra le due situazioni, che le due **strutture** sono *isomorfe*. Tutte le proprietà *formali* di una valgono anche per l'altra: per esempio, è facile constatare che sono entrambe commutative. Ma ci sono buone ragioni per ritenere che la seconda sia associativa (essa proviene dell'addizione fra numeri naturali, ne è una specie di 'riassunto'): anche la tabella dell'*aut* è dunque associativa.

Un'altra situazione isomorfa a queste è l'addizione modulo 2:

$0+0 = 0$, $0+1 = 1$, $1+0 = 1$, $1+1 = 0$,

ma il confronto con la "somma delle parità" è in questo caso 'prevedibile'.

L'analogia di struttura può essere evidenziata da opportuni assiomi, soddisfatti da entrambe:

a) a ogni coppia ordinata di elementi è associato un elemento, il loro composto,

b) esiste un elemento neutro, cioè un elemento che composto con un qualsiasi altro lo riproduce invariato,

c) ogni elemento ha simmetrico, cioè un elemento che composto con esso dà l'elemento neutro,

d) esistono esattamente due elementi.

La moltiplicazione modulo 2 è invece isomorfa alla "moltiplicazione delle parità".

Osserviamo ora la tabella del *vel*; essa non è certamente isomorfa alla tabella dell'*aut*; ciò si può constatare direttamente tentando le possibili traduzioni (biiezioni fra {V,F} e {I, P}); o più rapidamente notando che in essa c'è un elemento neutro, F, ma V non ha 'simmetrico' (dovrebbe essere qualcosa che composta con V dà F, ma questo non accade). Invece, questa struttura è isomorfa a quella della moltiplicazione delle parità; basta applicare la biiezione

$$V \to P,\ F \to I.$$

Quali potrebbero essere gli assiomi di queste strutture?

3. Una situazione un po' meno semplice. Scriviamo la tabella dell'addizione e della moltiplicazione modulo 3:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Che analogia c'è con la tabella dell'addizione modulo 2 (e quindi anche con *aut* e la somma delle parità)? Certamente non possono essere isomorfe, perché operano su insiemi, $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$, con un numero diverso di elementi. L'analogia sta piuttosto in alcune proprietà formali, come le a), b), c) del paragrafo precedente; a queste possiamo anche aggiungere le proprietà commutativa e associativa dell'operazione. Si può dire che le strutture $(\mathbf{Z}_2, +)$ e $(\mathbf{Z}_3, +)$ rientrano entrambe nella **specie di strutture** "gruppo commutativo".

La moltiplicazione modulo 2 e quella modulo 3 non rientrano invece nella specie 'gruppo' (ricordate l'avvertenza: mettere in rilievo anche dei controesempi, dei casi nei quali l'idea non funziona). Tutti queste operazioni rientrano nella specie "monoide commutativo": essa è caratterizzata dagli assiomi a), b), dalla proprietà associativa e dalla proprietà commutativa. La specie "monoide commutativo" comprende in sé quella di "gruppo commutativo".

4. Verso altre specie di strutture. Le strutture esaminate finora sono del tipo "un insieme dotato di una operazione". A volte si ha a che fare con un insieme dotato di due operazioni, per esempio ($\mathbf{N}$, +, $\times$), ($\mathcal{P}$(I), $\cap$, $\cup$). Altre volte può entrare in gioco anche un insieme ausiliario. Tutte queste strutture rientrano fra le **strutture algebriche**.

Altre strutture importanti sono le **strutture topologiche**, definite su un insieme da un sistema di aperti (o di intorni). In un **spazio topologico** si possono definire i concetti connessi con le idee di contiguità e di continuità: per esempi, quelle di *chiusura* e di *frontiera* di un insieme, quella di *funzione (applicazione) continua*.

Una **struttura d'ordine** è definita in un insieme da una relazione d'ordine: essa permette di considerare gli *insiemi densi*, gli *insiemi continui* e le *funzioni (applicazioni) crescenti*, eccetera. La meraviglia che suscitò a suo tempo (e che ancor oggi suscita in molti principianti) la 'scoperta' di Cantor sull'equipotenza di $\mathbf{N}$ e di $\mathbf{Q}$ è dovuta a una confusione fra gli insiemi in sé e gli stessi insiemi ordinati, ($\mathbf{N}$, <) e ($\mathbf{Q}$, <). L'idea di Cantor riguarda l'equivalenza (equipotenza) degli insiemi, non l'equivalenza (isomorfismo) degli insiemi strutturati.

Le strutture algebriche, topologiche e d'ordine sono quelle che più spesso si presentano nella matematica classica (Bourbaki le chiama "strutture madri"). Per esempio, in $\mathbf{R}$, abbiamo una struttura algebrica di campo ($\mathbf{R}$, +, $\times$), una struttura di spazio topologico, e una struttura d'ordine. Per isomorfismo, queste strutture si portano (o sono già presenti) su una retta, per la quale siano stati fissati opportuni assiomi. Esse si "combinano" variamente (per esempio, i gruppi topologici, o i gruppi ordinati): vi saranno allora assiomi che parlano contemporaneamente di operazioni e di aperti, o di operazioni e di ordinamento: per esempio

$$\textit{se } a < b \textit{ e } a' < b', \textit{ allora } a+b < a'+b'.$$

Un'idea fondamentale è quella di *isomorfismo* fra strutture. Dati due insiemi A, B dotati di strutture della stessa specie, esso è una biiezione fra A e B che conserva 'in entrambi i sensi' le strutture. Per esempio, nel caso di due strutture algebriche $(A,*)$, $(B,\circ)$, esso deve trasformare una terna $(x, y, x*y)$ in una terna $(x', y', x'\circ y')$; se poniamo $x' = f(x)$, deve allora essere

$$f(x) \circ f(y) = f(x*y)$$

(abbiamo la definizione classica di isomorfismo di strutture algebriche).

Se si vuole abbandonare la biunivocità, si definiscono i *morfismi*: nel caso delle strutture algebriche ci si basa sempre sull'ultima uguaglianza.

5. Lo strutturalismo e i gruppi. Nell'Ottocento e all'inizio del Novecento si è sviluppata l'idea che nella matematica contino, più che i contenuti concreti, la "forme" nelle quali essi sono organizzati. Un momento decisivo è il riconoscimento che contenuti presi da ambiti diversi sono organizzati secondo gli stessi criteri. In questo senso, il concetto di gruppo ha svolto un ruolo importante.

Il problema della risolubilità per radicali delle equazioni algebriche aveva condotto allo studio dei "gruppi di sostituzioni": in questo modo, erano state messe in evidenza varie proprietà formali, cioè indipendenti dalla natura degli elementi del gruppo (prima ancora di avere formalizzato il concetto). Per contrasto, si può considerare importante l'"invenzione" dei quaternioni da parte di Hamilton (1843), che ebbe il coraggio di costruire un "oggetto matematico" che violava una delle proprietà formali considerate caratteristiche degli insiemi numerici (la proprietà commutativa della moltiplicazione).

Parallelamente (anche se a partire da qualche decennio più tardi) venivano studiati i gruppi di trasformazioni. Jordan (1867) determinò i gruppi di isometrie dello spazio. A partire dal 1871 Felix Klein e Sophus Lie studiarono intensamente i gruppi di trasformazioni: la prima espressione usata è stata "sistema chiuso di trasformazioni": essi notano però che "l'espressione "sistema chiuso di trasformazioni" corrisponde a ciò che nella teoria delle sostituzioni è denotato dal termine "gruppo di sostituzioni". Oggi l'osservazione può sembrare banale, poiché la terminologia insiemistica ci ha abituato a considerare sia le sostituzioni che le trasformazioni geometriche come casi particolari di biiezioni; ma bisogna mettersi nello spirito del tempo, quando i vari capitoli della matematica avevano terminologie, anzi organizzazioni concettuali, diverse fra loro[(1)].

[(1)] L'organizzazione attuale (in particolare, l'uso sistematico della teoria degli insiemi) semplifica molto la trattazione; tuttavia un'aderenza troppo stretta a questo principio rischia di far perdere il 'sapore' della stessa conquista intellettuale che ha portato a questa organizzazione semplificatrice.

Una tappa fondamentale dello sviluppo dello strutturalismo è il "programma di Erlangen" (1872), con il quale Felix Klein spiega l'esistenza di molte geometrie osservando che ciascuna di esse si caratterizza, oltre che per lo spazio nel quale opera, per *il gruppo delle trasformazioni che realizzano l'«uguaglianza» entro quella geometria* (l'avere a che fare con un gruppo è connesso al fatto che l'«uguaglianza» è una relazione di equivalenza). Klein dichiara che "*fintanto che poniamo alla base della trattazione geometrica uno stesso gruppo di trasformazioni, il contenuto della Geometria rimane inalterato*": ('lo stesso gruppo' va inteso come 'gruppi isomorfi'). Per esempio, Klein trova che, nel campo complesso, la geometria delle similitudini nel piano e la geometria proiettiva su una quadrica sulla quale sia fissato un punto sono 'la stessa cosa'.

Un classico esempio di analogia strutturale è il *principio di dualità* in geometria piana: la geometria del piano rigato (l'insieme delle rette) è equivalente a quella del piano punteggiato (formato dai punti); i fasci di rette (identificabili con i punti) sono gli analoghi delle rette. Ancora, sono isomorfe la geometria dello spazio proiettivo a 5 dimensioni, e quella del sistema delle coniche del piano (anzi, Klein considera il secondo come definizione del primo, in quanto vuole che anche per gli enti "astratti" vi sia una definizione interpretabile intuitivamente).

Nel frattempo, venivano studiati i gruppi 'in modo astratto', come insiemi (inizialmente finiti) dotati di una operazione: definizioni precise furono date nel 1882 (von Dyck e Weber).

L'importanza dei gruppi nella matematica strutturalista sta nel fatto che *gli automorfismi d'una struttura formano un gruppo* prendendo come operazione la composizione. I morfismi di una specie di strutture formano invece una *categoria.*

6. Gli Eléments de mathématique di Bourbaki. Negli anni Trenta alcuni giovani matematici francesi si riunirono in un gruppo al quale diedero il nome di Nicolas Bourbaki (cognome d'un generale noto, più che per la sua brillante carriera precedente, per essersi consegnato agli svizzeri con la sua armata, alla fine della guerra franco-prussiana del 1870-71, quando ormai la sconfitta era irrimediabile). Impresa principale del gruppo fu la redazione del testo *Eléments de Mathématique* destinato a rifondare l'insegnamento universitario della Matematica, anzitutto dell'Analisi (tant'è che il sottotitolo dei primi volumi è *Les structures fondamentales de l'Analyse*). Vediamo le sue caratteristiche, senza pretendere che l'ordine nel quale le presentiamo sia significativo. Alcune di esse sono indicate nell'*Introduction* all'opera, altre in un articolo pubblicato nel 1948.

Anzitutto viene messo l'accento sulla *unitarietà della matematica*: essa è evidenziata anche dalla dizione 'Mathématique' al singolare, mentre nell'uso corrente francese s'è sempre usato, e ancor oggi normalmente si usa, il plurale. Viene abbandonata la tradizionale suddivisione della matematica, in aritmetica, algebra, geometria, analisi, ...

Inoltre si punta alla *autosufficienza della matematica*, cioè a trovare le motivazioni per nuove teorie entro la matematica (contro una lunga tradizione che prendeva le mosse "da idee *a priori* sulle relazioni della matematica con il mondo esterno e con il mondo del pensiero" [Bourbaki 1948], e, per lo meno dal Seicento, cercava le motivazioni nella matematizzazione di ambiti come la fisica; più avanti ribadisce di non voler affrontare la questione dei rapporti tra fenomeni sperimentali e strutture matematiche): scelta suggestiva, ma che tende a isolare la matematica dal contesto culturale. Questo ha condotto a distinguere, entro la matematica, ambiti 'più interni', meno interessati al mondo esterno, ai quali rifarsi in modo più sistematico.

Altra caratteristica è l'*esigenza del rigore*, peraltro tendenza comune di tutta la matematica dalla seconda metà dell'Ottocento:

"Fin dai greci, chi dice matematica dice dimostrazione; alcuni dubitano anzi che si trovino, fuori della matematica, dimostrazioni nel senso preciso e rigoroso che questa parola ha ricevuto dai greci e che intendiamo dargli qui." (dall'*Introduzione*)

Il rigore viene perseguito mediante il *metodo assiomatico*, inteso 'modernamente', cioè da un punto di vista formalista. Anzi, si dice che "il suo impiego sistematico come strumento di scoperta è uno dei tratti originali della matematica contemporanea": in effetti, sembra piuttosto dubbio che esso funzioni da 'metodo di scoperta' delle proprietà; i greci facevano precedere 'il metodo dell'analisi', che comunque è piuttosto finalizzato alla ricerca delle dimostrazioni.

Il primo capitolo del primo libro si intitola *Description de la mathématique formelle*, e presenta in modo originale una organizzazione della teoria degli insiemi come *puro sistema di simboli*. Di fatto, per la lettura del trattato questa parte può essere omessa: anche se in tal modo il trattato, dopo il primo libro, sembra piuttosto ispirato a un *realismo platonizzante*: già nell'introduzione si parla di "teoremi veri" e "teoremi falsi". Ma più avanti si dice che, se si trovasse una contraddizione (nella teoria degli insiemi) si potrebbero cambiare gli assiomi in modo "da non compromettere quelle parti della matematica alle quali teniamo maggiormente" (si può trovare un aggancio a tesi neo-empiriste).

L'opera è realizzata secondo la tradizione euclidea, sulla base di un sistema di principi universalmente validi. Il titolo stesso si richiama esplicitamente al testo euclideo, anche se poi alcuni bourbakisti (soprattutto Dieudonné) accesero violente polemiche contro la trattazione euclidea della geometria. Le implicazioni metodologiche della parola "Elementi" (da non confondere con "trattazione elementare") furono messe in evidenza da Proclo (410?-484), nel suo *Commentario al primo libro degli "Elementi" di Euclide*:

"Chiamiamo "elementi" quei teoremi la cui comprensione conduce alla conoscenza del rimanente [...]. Proposizioni "elementari" sono quelle semplici ed eleganti [...] ma che non arrivano al rango di elementi perché la loro conoscenza non è pertinente all'intera scienza [...].

Se noi cominciamo con gli elementi, noi riusciremo a capire le altre parti di questa scienza; senza gli elementi non possiamo afferrare la sua complessità, e l'apprendimento del resto sarà sempre oltre le nostre capacità [...]. Un tale trattato deve essere libero da tutto ciò che è superfluo, perché sarebbe un intoppo all'apprendimento: la scelta [degli elementi primi] deve essere coerente e finalizzata allo scopo, per essere della massima utilità per la conoscenza; occorre porre grande attenzione sia alla chiarezza che alla concisione [...]."

Il primo passo del trattato di Bourbaki è la costruzione di un linguaggio unico per la matematica, anzitutto "per redigere in questo linguaggio la teoria degli insiemi": nella definizione di ogni concetto matematico si inizia sempre con qualcosa del genere: "Sia X un insieme ...". Anzi *questo principio diventa addirittura "ontologico"*: "oggi si sa che è possibile, logicamente parlando, far derivare quasi tutta la matematica da una sorgente unica, la Teoria degli Insiemi". Su questo punto ritorneremo.

Il trattato fa una scelta comune alla maggior parte dei testi di matematica, a cominciare almeno da Euclide: privilegiare, nella presentazione della matematica, l'aspetto degli *oggetti* rispetto a quello delle *costruzioni* (dei processi). Negli ultimi tempi, anzi, questa scelta si è fatta ancor più marcata (è significativo che si parli spesso di 'oggetti matematici').

Infine, il principio più caratteristico del trattato: **la matematica è lo studio delle strutture**: "[...] le strutture matematiche diventano, propriamente parlando, i soli oggetti della matematica" [Bourbaki 1948]. Si ha così una definizione di matematica che non è del tutto soddisfacente, ma che è oggi migliore di tanti tentativi di definizione tradizionali.

"Inoltre, ed è questo che più ci interessa in questo Trattato, il metodo assiomatico permette, quando si ha a che fare con enti matematici complessi, di dissociarne le proprietà e di raggrupparle intorno a poche nozioni, cioè [...] di classificarle secondo *strutture* [...]."

Queste a loro volta si possono ricondurre, come abbiamo visto, a strutture di tipo 'semplice', algebriche, topologiche e d'ordine, e si ha così una riedizione in chiave moderna del classico principio della 'riduzione a idee semplici' (Descartes, Leibniz). Le specie algebriche, topologiche e d'ordine sono 'giustificate' storicamente dallo sviluppo della matematica, ed esistono fra esse alcune "analogie strutturali" generali (per esempio, la presenza di insiemi 'privilegiati' – come le terne del tipo (x, y, $x_* y$) in una struttura algebrica, o gli aperti d'uno spazio topologico – e l'idea di isomorfismo). I procedimenti con i quali si costruisce una struttura di queste specie vengono generalizzati da Bourbaki in una nozione 'più astratta' di (specie di) *struttura su un insieme* (o su più insiemi). L'idea è quella di dare un procedimento, una specie di 'programma', che in un ordine determinato costruisca l'insieme delle parti o il prodotto cartesiano di insiemi dati o già costruiti. Di fatto, per la lettura del resto del trattato, il concetto di 'struttura in generale' si può omettere.

Il trattato prosegue con lo studio delle specie madri di strutture, cioè con l'algebra astratta e la topologia, che così si presentano come discipline fondanti (almeno potenzialmente) per tutta la matematica.

7. La teoria psicologica di Jean Piaget. Jean Piaget (1896-1981) era un biologo che cominciò a occuparsi di psicologia cognitiva, con un forte orientamento epistemologico. Egli contribuì a riprendere una epistemologia interessata agli aspetti 'genetici' (cioè alla formazione delle strutture mentali), in definitiva all'interazione fra psicologia ed epistemologia (una delle sue opere più significative è appunto *L'épistémologie génétique*).

Piaget riconobbe nella matematica, soprattutto nel momento in cui la si costruisce, un aspetto fondamentale della costruzione del pensiero. In particolare, egli ipotizzò una corrispondenza fra le 'strutture madri' di Bourbaki e le strutture della mente umana, fin dall'infanzia. In questo senso organizzò un'attività sperimentale i cui risultati egli considerò corroboranti le sue tesi[(2)]. Piaget dichiarava di non volersi occupare di problemi didattici; ma le sue teorie ebbero un forte impatto sulla didattica, soprattutto in area francofona, anche per quanto concerne il livello primario.

A Piaget si può rimproverare di aver preso troppo alla lettera, con troppo entusiasmo, la sistemazione bourbakista: possibile che la spiegazione di un'attività così complessa come la costruzione del pensiero logico fosse diventata comprensibile, e fin nei particolari, solo con l'avvento della matematica bourbakista? Era anzi prevedibile che sarebbero sorte nuove sistemazioni globali della matematica: e queste non avrebbero avuto nulla da suggerire? D'altra parte i matematici spesso non apprezzarono, a torto, le idee di Piaget, che davano un'impor-

[(2)] Corroborare' è un termine della filosofia della scienza di Karl Popper: una teoria può essere *falsificata* da un risultato sperimentale contrario alle previsioni della teoria: invece un risultato conforme alle previsioni può solo *corroborare* la teoria, non può *verificarla*, nel senso che non può dare la certezza che essa sia vera.

tanza fondamentale alla loro disciplina, a causa di alcune ingenuità in certi particolari 'tecnici', che non erano necessari per gli aspetti essenziali della teoria. I didattici seguaci di Piaget, a loro volta, esagerarono nel prendere alla lettera le sue idee. Tipico fu il nuovo modo di arrivare ai numeri naturali, utilizzando l'idea di relazione, di biiezione e l'equipotenza di insiemi.

8. Il bourbakismo nell'insegnamento. In Francia e in altri paesi, l'insegnamento universitario della matematica, fin dal dopoguerra, si è organizzato sulla base degli *Eléments de mathématique*; in Italia la trasformazione si è avuta un po' più tardi; la riforma della laurea in matematica del 1961 l'ha in parte ufficializzata e in parte promossa. Significativa è stata l'introduzione del corso di Algebra al 1° anno; ma in qualche modo si è trattato di un compromesso, perché non è stata ufficializzata la presenza della topologia (tuttavia essa viene svolta nei corsi di Geometria e di Analisi, a volte però nel 2° anno, a volte in entrambi); in effetti, sarebbe addirittura impossibile una trattazione rigorosamente bourbakista, a causa della contemporaneità del corso di Algebra con quello di Geometria I, del quale dovrebbe essere invece propedeutico.

Infatti, mentre i primi volumi degli *Eléments de mathématique* non trattavano di geometria, un influente matematico del gruppo, Jean Dieudonné, pubblicava nel 1964, a proprio nome, un testo, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, destinato soprattutto alla formazione degli insegnanti. Partendo dalla constatazione "del divorzio che si va ampliando fra i metodi e lo spirito dell'insegnamento della matematica, da un lato nei licei, dall'altro nell'Università" propose di riformare radicalmente quello secondario (la motivazione appare impropria: perché la riforma dovrebbe riguardare anche quelli che non seguiranno corsi matematici all'Università?)(3).

Qui tocchiamo anche un nodo importante di carattere disciplinare. Abbiamo letto in Bourbaki che *quasi tutta* la matematica si può ridurre alla teoria degli insiemi. Ma quali sono le parti per le quali ciò non è possibile, o per lo meno non lo è in modo tale da rispettarne le caratteristiche essenziali? Certamente la geometria non si riesce a ridurre in modo ovvio alla teoria degli insiemi (Hilbert, il padre storico del formalismo, ammoniva a non ridurre la matematica all'aritmetica e

(3) Più avanti, l'autore dichiara che "l'insegnamento secondario *non ha per fine di formare dei matematici*"!! L'occasione è una polemica contro le costruzioni geometriche, alle quali non basterebbero, per essere accolte dal 'nuovo corso', le occasioni di riflessione sui fondamenti della matematica. A mio avviso si assolve meglio ai compiti formativi dell'insegnamento della matematica *per tutti* facendo riflettere gli studenti su qualche grande problema, piuttosto che imponendo loro una teoria 'in blocco'.

all'analisi, e chiedeva di lasciare aperti i canali verso l'esperienza, quali la geometria e la fisica matematica.) Per adattare la geometria allo schema bourbakista, si definisce lo spazio come 'spazio vettoriale sui reali'. La geometria dovrebbe essere quindi preceduta dall'algebra astratta, anzi da quasi tutta l'algebra astratta.

Negli anni Settanta un gruppo di matematici di primo piano ha preparato i nuovi programmi delle scuole secondarie francesi basati sui principi bourbakisti. Ma i nuovi contenuti hanno provocato una reazione di rigetto: verso la fine degli anni Ottanta, una revisione in senso opposto ha cancellato quasi tutte le innovazioni. Si parla oggi di un "*mauvais souvenir*" di quella riforma; ma si riconosce che molti argomenti, nella riforma successiva, sono stati "vittime di una banalizzazione".

Vorrei qui notare un punto che mi sembra non sia stato preso nella giusta considerazione. I fondatori del bourbakismo avevano ricevuto una formazione 'classica'; mentre costruivano la nuova trattazione, avevano bene in mente la matematica 'classica'. Vi sono anzi alcuni episodi illuminanti che provano come essi avessero una 'logica della scoperta', che faceva ancora uso dei metodi precedenti, 'più intuitivi'. Tagliando i ponti con l'intuizione, soprattutto con quella spaziale, essi mettevano i loro allievi in una situazione più povera di quella in cui essi si erano formati. E mediamente le menti di questi allievi erano meno brillanti delle loro!

Implicitamente, questa osservazione 'corrobora' una tesi importante, a proposito della presentazione d'una teoria. Molti ritengono che questa vada valutata solamente in base ai contenuti, ed eventualmente anche alla connessione 'logica' delle parti. Alcuni vogliono estendere questi criteri anche alle *trattazioni* della teoria; e molti compiono inconsapevolmente questo passo, fino ad applicare quei criteri anche ai testi didattici (lo si può capire leggendo le prefazioni di alcuni fra questi). A mio avviso, una teoria deve essere invece valutata anche in connessione a un contesto generale, comprendente teorie più semplici che stanno alla sua base, ed eventualmente teorie più avanzate alle quali dà accesso, e altre con le quali può interagire. A maggior ragione, di questo occorre tenere conto quando si presenta didatticamente la teoria. Anzi, è essenziale tenere conto di come la stessa può presentarsi nelle menti degli allievi.

9. Lo strutturalismo fuori della matematica. Immaginiamo di interrogare un campione di italiani colti, chiedendo a quali discipline si riferisca lo "strutturalismo": sono sicuro che una larga maggioranza non citerà la matematica, ma piuttosto la linguistica (Chomsky), l'antropologia culturale (Lévi-Strauss), la psicologia (i "gestaltisti", Piaget), le scienze sociali (Althusser, Godelier),...: ma temo che parecchi laureati in matematica non saprebbero rispondere. Soprattutto, credo che quasi nessuno citerà sia lo strutturalismo matematico che quelli "umanistici". Ma, anzitutto, che cosa significano gli "altri" strutturalismi?

L'idea centrale è la preminenza, come oggetto di studio di ciascuna disciplina, delle "strutture", cioè delle caratteristiche generali riscontrabili in ogni situazione, nello spazio e nel tempo: mentre tendono a essere poste in ombra le particolarità (in una interpretazione estrema, si tende ad abolire l'approccio storico, tradizionalmente tipico delle discipline umanistiche).

Piaget ha curato un volume collettivo [Piaget 1967], nel quale l'idea di struttura è l'idea portante di molti contributi; e in un volumetto [Piaget 1968] ha cercato un confronto, e una caratterizzazione comune, dei vari tipi di strutturalismo. I tratti comuni sarebbero: la 'totalità' (la tendenza a considerare un campo di studio come un sistema); la possibilità di 'trasformazioni' interne al sistema; la possibilità di 'autoregolarsi'.

Il maggiore successo (nel senso di una effettiva incidenza sullo sviluppo della disciplina, non di quello sostenuto dai *mass media*) è stato ottenuto, a mio avviso, nella matematica, nella psicologia e nella linguistica. In quest'ultima lo strutturalismo si può far risalire a Ferdinand de Saussure, al quale si deve l'idea che quello che conta per capire una lingua sono i rapporti fra gli elementi, e che una 'nuova' grammatica avrebbe dovuto essere qualcosa di analogo all'algebra. Fra quelli che misero in atto questo programma, il più noto è Noam Chomsky: la sua idea è trovare un sistema di regole che permetta di costruire una frase. La prima motivazione è stata la costruzione di programmi che permettessero la traduzione automatica da una lingua a un'altra; l'idea è stata utilizzata anche per lo studio di linguaggi formali.

Introduciamo alcune "variabili metalinguistiche", F, SN, SV, N, V, Art, ... (stanno per 'frase', 'sintagma nominale', 'sintagma verbale', 'nome', 'verbo', 'articolo', ...): una frase (p. es. 'il treno è partito dalla stazione') si può scomporre in un sintagma nominale ('il treno') e in un sintagma verbale ('è partito dalla stazione'); abbiamo così la prima regola formale

$$F \to SN + SV.$$

Entro un sintagma verbale, come si deve nell'esempio precedente, *può* essere contenuto un sintagma nominale; abbiamo quindi un'altra regola:

$$SV \to V + SN,$$

e così via. Le regole da applicare per ultime (nel senso che poi il meccanismo si ferma) sono quelle che a certe variabili metalinguistiche sostituiscono una parola della lingua naturale.

La 'analisi logica' tradizionale, più che 'logica', è funzionale alla traduzione in latino: queste nuove analisi mettono invece in evidenza certe strutture che sono vicine a quelle della logica. A mio avviso i matematici potevano considerarle con maggior attenzione: per lo meno avrebbero evitato certe stranezze, come questa, che (con piccole varianti) si trova in alcuni libri:

"Si dice *relazione* fra A e B una terna $\mathbf{R}$=(A,B,R), dove R è un sottoinsieme di A×B. Per indicare che $(x, y) \in$ R, si scrive x $\mathbf{R}$ y" [o anche x R y, o x r y].

In questa presentazione si fa confusione fra il predicato che collega i due 'soggetti', x, y, e la relazione: il primo appartiene al 'piano linguistico', quello del linguaggio, mentre la seconda (sia essa la 'terna' $\mathbf{R}$ o il sottoinsieme R) appartiene al 'piano estensionale'. Questa distinzione fra 'significante' (l'espressione linguistica), 'significato' (quello che c'è nella nostra mente) e 'referente' (le cose, se ci sono) è il fondamento della semiotica (la scienza dei segni), che ovviamente ha a che fare anche con la matematica. I 'didattici' italiani della matematica e della lingua sono attenti a questi problemi, e se ne trova traccia nei progetti e nei recenti programmi.

Sul piano culturale, invece, in altri Paesi si sono verificate interazioni fra 'strutturalismi diversi'. In [Piaget 1968] sono segnalati alcuni casi nei quali lo strutturalismo matematico ha dato decisivi contributi a ricerche strutturalistiche in altre discipline: intanto lo "strutturalismo psicologico" dello stesso Piaget, poi quelli fisico-biologico, linguistico, delle scienze sociali.

Piaget segnala (p. 71) come Chomsky abbia fatto interagire l'osservazione delle lingue naturali con la logica, l'algebra astratta e la teoria dei linguaggi formali (con una strategia che ricorda quella dei fisici-matematici da Galileo e Newton ad Einstein); che Lévi-Strauss si è rivolto a Weil per chiarire come alcune specie di strutture algebriche possano interpretare le strutture dell'antropologia (p. 92); che Godelier ha analizzato le strutture sociali in termini di categorie. Invece in Italia non mi risulta che si parli di tali interazioni; ben sappiamo che, più in generale, è particolarmente grave lo scollamento fra le "due culture" (con le eccezioni cui abbiamo accennato).

Piaget distingue, nelle varie branche disciplinari, diversi tipi di strutturalismo: particolarmente importante, per quanto concerne "le strutture e la genesi dell'intelligenza", la contrapposizione fra l'ipotesi d'una preformazione delle strutture (una nuova versione del classico "innatismo") e d'una loro costruzione da parte dell'individuo: egli opta per la seconda ipotesi, anche se arriva a concludere che "per la loro stessa costruzione [le strutture] arrivano alle necessità che l'apriorismo ha ritenuto di situare al punto di partenza"(4).

(4) Si può inquadrare questa spiegazione di Piaget in una classificazione proposta da Lakatos

10. E allora? In Italia, circostanze ben note (collegate fra l'altro al problema della formazione degli insegnanti, a quello della corrispondenza fra titoli di studio e cattedre per l'insegnamento secondario, e alla difficoltà di arrivare a una riforma delle scuole superiori) hanno fatto sì che una questione come quella francese degli anni Ottanta non si ponesse neppure. Nella scuola media, l'argomento "Analogie strutturali" viene generalmente considerato un 'lusso'. Però, abbiamo per lo meno evitato il clima di 'restaurazione'. Ma questo non ci esime dalla necessità di prendere in considerazione il problema, *tanto più che l'impostazione dei nostri programmi è ben lontana dagli eccessi metodologici dei precedenti programmi francesi*, e quindi essi sono una buona base (ripetiamo, anche nelle scuole superiori) per avviare un discorso significativo.

Sarebbe sbagliato ritenere che l'esigenza di una buona fondazione matematica, se era pressante vent'anni fa, sia oggi superata per l'avvento di alcune novità, come l'informatica. Sperare nel potere magico delle 'novità' (purtroppo questo è accaduto anche con la 'matematica moderna') è molto pericoloso, e può portare a delusioni e movimenti di reazione.

Un altro punto importante riguarda la scuola elementare. Un tempo le si chiedeva di svolgere una funzione minimale, per dare quelle abilità base indispensa-

[1970] a proposito della teoria della conoscenza. Vi sono, dice Lakatos, i "passivisti", per i quali la nostra mente non ha un ruolo attivo nella formazione delle teorie. Vi sono gli "attivisti", che sostengono il contrario, ma fra questi i "conservatori" ritengono che gli schemi mentali sono comunque preordinati (egli cita Kant, ma in questa categoria potremmo iscrivere Piaget, almeno quando sostiene le tesi cui abbiamo accennato); infine vi sono gli "attivisti rivoluzionari" per i quali noi possiamo sostituire i nostri schemi mentali 'con altri, *migliori*'". Uno di questi sarebbe il suo maestro Popper (il quale, peraltro, con la sua tesi del "terzo mondo", nel quale si oggettivano i "prodotti' dell'intelligenza umana, finisce per legare almeno parzialmente la nostra libertà di costruzione).

In quanto a Piaget, egli si avvicina a una concezione più aperta, quando sostiene che l'intelligenza e il sapere si costruiscono per interazioni fra strutture mentali ed esperienza; tesi già intuita, almeno per la geometria, da Enriques:"[...] due vedute direttrici opposte [...] si contendono il campo: il *nativismo* e l'*empirismo*. Dalla tesi kantiana che "i rapporti spaziali sieno rapporti che la mente scorge fra sensazioni possibili" deriva il nativismo [...]. Dalla tesi che "i rapporti spaziali faccian parte del dato dei sensi (vista, tatto ecc.)" la filosofia empirica trae che la intuizione, o visione immaginativa delle relazioni spaziali, sia la semplice ripetizione di sensazioni anteriori [...].

Ora le premesse del nativismo e dell'empirismo appariscono entrambe, fino a un certo punto, vere, ma le conseguenze che se ne traggono unilaterali e incompiute [...].

I due indirizzi tendono a conciliarsi nella ricerca di *spiegare l'intuizione spaziale come uno sviluppo psicologico da sensazioni, in cui si tenga conto della struttura del soggetto"* [Enriques 1906, p. 174].

bili in una società proto-industriale: "leggere, scrivere e far di conto". Questa richiesta veniva, almeno a livello implicito, rafforzata dalla convinzione che quell'età non avesse grande importanza per la formazione dell'individuo. Ora, caduti entrambi i presupposti, si deve dare alla scuola elementare la dovuta importanza: i nuovi programmi italiani sono un buon punto di partenza (purché, anche in questo caso, si affronti il problema della formazione, pre- e in servizio, degli insegnanti).

Per quanto concerne il significato culturale ed epistemologico dello strutturalismo, e il suo valore didattico, è necessaria una riflessione attenta, necessariamente di carattere epistemologico. Ad esempio, sempre nel suo [1968], Piaget distingue fra uno strutturalismo "globale" e uno "metodologico". Il primo sarebbe quello che pretende di descrivere una situazione inerente alla natura delle cose; il secondo (ch'egli chiama 'il vero strutturalismo") è piuttosto un metodo per organizzare la nostra concezione del mondo. A questo proposito possiamo osservare che Granger rimprovera a Lévi-Strauss di associare allo strutturalismo "tesi relative alla natura della realtà".

A mio avviso, il modo corretto di affrontare la questione della matematica strutturalista è quello dello strutturalismo "metodologico": e su questa traccia costruire un percorso che riprenda, in modo semplificato e 'razionalizzato', quello storico[(5)]. Orbene, questo ci mostra come le 'strutture' siano state il punto d'arrivo di un percorso iniziato entro la matematica classica, con una sua 'lettura' che mette appunto in rilievo le analogie strutturali (nei primi paragrafi abbiamo visto alcuni esempi, ma l'operazione deve applicarsi a molti ambiti matematici e possibilmente anche 'non matematici'). Si tratta quindi di una operazione che dovrà svilupparsi partendo da un ampio dibattito, e sarà quindi 'a lungo termine', ma che darà frutti importanti: non ultimo, mettere in rilievo che sotto argomenti esteriormente diversi ci sono profonde analogie; e questo può aiutare gli studenti a meglio comprendere la matematica nella sua totalità e nei suoi particolari, affidandosi alla *comprensione* della sua "struttura" piuttosto che alla memoria di questo o quel particolare.

[(5)] Le "ricostruzioni razionali della storia" sono state teorizzate da Imre Lakatos come strumento di lavoro per la filosofia della scienza: si tratta di esporre la storia della scienza 'come avrebbe dovuto comportarsi' (confrontandola però con la storia reale).

BARTOCCI U., *Tendenze "monofisite" nella Matematica*, in "Incontri con la Matematica", a cura di B. D'Amore, **3**, Armando, Roma 1976, pp. 13-30.
BOURBAKI N., *Eléments de Mathématique*, Hermann, Paris, 1939 e segg.
BOURBAKI N., *L'architecture des mathématiques*, in *Les grandes courants de la pensée mathématique*, a cura di F. Le Lionnais, Cahiers du Sud, 1948.
BOURBAKI N., *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris 1960 (tr. it. *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano).
CHOMSKY N., *Syntactic Structures*, 1968 (tr. it. *Le strutture della sintassi*, Laterza, Bari).
DIEUDONNÉ J., *Algèbre linéare et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1967 (trad. it. *Algebra lineare e geometria elementare*, Feltrinelli, Milano).
ENRIQUES F., *Problemi della Scienza*, Zanichelli, Bologna 1906 (rist. 1983).
GRANGER G.G., *Strutturalismo e pensiero formale*, Guida, Napoli 1967.
KLEIN F., *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, in *Ges. Math. Abhand.*, Springer, Berlin 1921-23, I, 460-497 (tr. it.*Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Ann. di Mat., (2), 17, pp. 307-343 (1889-90)).
PIAGET J. (ed.), *Logique et connaissance scientifique*, Enciclopédie de la Pléiade, Gallimard, Paris 1967.
PIAGET J., *Le structuralisme*, P.U.F., Paris 1968.
SPERANZA F., *Riflessioni sui criteri per valutare le trattazioni di una teoria matematica*, Riv. di Mat. Univ. Parma, (4), 15*, pp. 117-128 (1989).
STEINER G.H., *Two Kinds of "Elements" and the Dialectic between Synthetic-deductive and Analytic-genetic Approaches in Mathematics*, For the Learning of Math., 8, 3, pp. 7-15 (1988).

L'ESAME DI MATURITÀ SCIENTIFICA: LA VALUTAZIONE IN MATEMATICA

Lucia Ciarrapico
Dirigente superiore per i servizi ispettivi

1. Premessa. La legge istitutiva degli esami di maturità attualmente in vigore risale al 5 aprile 1969. Nata come legge ponte in attesa di una riforma, ha raggiunto i venticinque anni di vita e, nonostante le innumerevoli proposte di cambiamento, non si sa quanto vivrà ancora.

La legge del '69 prevedeva cambiamenti di notevole rilievo, tra cui appare importante ricordare in questo momento:

– l'abolizione degli esami di riparazione;

– la riduzione delle prove scritte a due sole;

– la sostituzione dell'esame orale su tutte le discipline con un colloquio su due materie, scelte, una dal candidato e l'altra dalla commissione d'esame, tra quattro proposte dal Ministro della Pubblica Istruzione che deve pronunciarsi entro il 10 maggio.

Un'altra modifica essenziale fu quella stabilita da una legge emanata subito dopo (11.12.1969) riguardante la liberalizzazione dell'accesso all'università: la possibilità, in altri termini, per i diplomati di scuola secondaria superiore di durata quinquennale di iscriversi a qualunque corso di laurea.

La legge dell'aprile '69 afferma che l'esame di maturità ha come fine la "valutazione globale della personalità del candidato, considerata con riguardo anche ai suoi orientamenti culturali e professionali".

La prima prova scritta consiste nella trattazione in italiano di un tema scelto dal candidato fra quattro che gli vengono proposti, mentre la seconda verte su materie indicate in una tabella allegata alla legge stessa. La tabella si riferisce a quegli ordini e indirizzi di scuola che al momento erano attivati; via via che sono stati istituiti altri indirizzi – ciò è avvenuto nell'ordine tecnico e professionale – la tabella è stata aggiornata. In essa la matematica – come seconda prova scritta – compare tra le materie proposte per la maturità scientifica e magistrale e per quella di alcuni indirizzi tecnici.

Il colloquio – stabilisce la legge – verte su concetti essenziali dei programmi svolti nell'ultimo anno nelle due materie scelte, comprende la discussione sugli elaborati e, in aggiunta a richiesta del candidato, una terza materia.

Non esiste una norma che condizioni il Ministro nella scelta delle quattro materie proposte per il colloquio, ma di fatto dal '69 in poi l'italiano, oltre che prova scritta, è stata inserita sempre e per tutti gli indirizzi tra i quattro orali. Al contrario ciò non è mai avvenuto per la materia della seconda prova scritta, che viene sempre esclusa dall' orale.

Nel liceo scientifico, dal 1970 in poi, la matematica è sempre stata oggetto di prova scritta. In altri indirizzi, nei quali la matematica è prevista dall'apposita tabella degli scritti, è comparsa di tanto in tanto alternandosi con altre materie, in altri ancora è stata talvolta oggetto di colloquio.

La scelta dello scritto di matematica nella maturità del liceo scientifico appare didatticamente corretta. Essa ha comportato, tuttavia, come conseguenza la sua esclusione dall'esame orale e sono molti i docenti che lamentano tale assenza. Dubitano che una prova scritta di matematica, da sola, sia sufficiente per valutare le competenze dello studente in tale disciplina, la padronanza dei concetti, la capacità di elaborazione logica, di analisi e di sintesi.

È indubbio che nell'esame conclusivo di tale scuola, l'unica ad indirizzo scientifico nel nostro ordinamento, la matematica dovrebbe essere prova scritta ed orale. Ma, nella situazione attuale, la sostituzione della matematica scritta con la matematica materia di colloquio avrebbe come conseguenza pratica il possibile conseguimento della maturità scientifica senza alcuna valutazione in tale disciplina per quei candidati che non la scelgono e a cui la commissione non l'assegni. Ritengo, inoltre, che vi siano aspetti della matematica dei quali attraverso la prova orale, per vari motivi tra cui quello del contenimento nel tempo, non sempre si riesce a dimostrare la padronanza.

Appare perciò opportuno, o quanto meno il minor male, che le cose per ora restino come sono, ribadendo l'auspicio che la riforma preveda nella maturità dell'indirizzo scientifico la matematica scritta ed orale.

Nell'attuale esame l'assenza delle prova orale di matematica può in parte essere recuperata con la discussione degli elaborati, prevista per norma, se questa non si limita, come spesso avviene, ad una mera informazione al candidato sull'esito della prova, ma diviene occasione di chiarimento sulle scelte fatte nello svolgimento, sui concetti e sulle procedure utilizzati, sui ragionamenti compiuti e sugli errori commessi. Discussione, questa, che può essere utile per un'ulteriore verifica delle competenze dell'allievo.

Un'ultima questione, prima di entrare nel cuore della relazione, riguarda l'esiguità di spazio data, in generale nell'esame di maturità, alle discipline dell'area scientifica rispetto a quelle dell'area umanistica.

È questo un vecchio e annoso discorso, eredità della filosofia idealista, secondo il quale le materie formative sono quelle umanistiche, mentre le altre, quelle scientifiche e tecniche, hanno una valenza solo informativa e di addestramento. Ed è molto difficile rimuovere certi stereotipi mentali: è cultura solo quella umanistica, l'altra è sottocultura.

2. La prova scritta di matematica. È difficile dare risposta alla domanda sulla idoneità della prova scritta a verificare nello studente le competenze di matematica da possedere al termine degli studi secondari di un indirizzo scientifico. Può essere affermativa se la prova, per usare una terminologia cara ai docimologi, ha caratteri di *validità* e di *attendibilità*. Ciò vuol dire, innanzi tutto, che la prova proposta deve essere tale da sollecitare prestazioni che rivelino il possesso delle competenze da verificare. In matematica ciò significa che, per dare una risposta ai quesiti posti, non basta una semplice conoscenza di regole e capacità di applicarle, ma necessita capacità di analisi delle questioni poste e delle informazioni fornite, di scelta del modello matematico più idoneo a rappresentare la questione, padronanza dei concetti matematici che intervengono (ad esempio non solo saper calcolare la derivata di una funzione, ma averne compreso il significato), capacità di deduzione logica e poi, certo, anche conoscenza di regole ed intelligente applicazione di esse. La prova deve avere, inoltre, requisiti di chiarezza e di precisione nella formulazione, di chiarezza nelle richieste poste e, soprattutto, di idonea struttura. La struttura della prova è particolarmente importante ai fini di una oggettiva valutazione e su ciò tornerò più avanti.

Non è facile stabilire la "validità" delle prove proposte, cioè la loro idoneità a riscontrare il possesso delle capacità dianzi indicate. Negli ultimi 7-8 anni i quesiti proposti hanno subito un notevole cambiamento, spesso, ma non sempre, in meglio. Hanno assunto, tuttavia, a parere di alcuni docenti e soprattutto di molti candidati, un livello di eccessiva difficoltà.

I giornali titolano spesso gli articoli nei quali sono presentati e risolti i compiti di matematica del liceo scientifico con frasi del genere:

"Matematica difficile"
"Matematica a rischio"
"Anche i docenti in difficoltà"
"Spiazzati anche i docenti"

Ancora più difficili sono considerate le prove richieste negli indirizzi sperimentali.

Non credo che i compiti richiedano competenze superiori a quelle che un liceo scientifico può e deve dare ad un alunno medio.

Le difficoltà incontrate dagli studenti, fatte le dovute eccezioni, sono da addebitare piuttosto ad altre cause. Ne cito qualcuna senza pretesa alcuna di esaustività:

– il numero reale di giorni di scuola si è andato riducendo, per vari motivi, in questi ultimi anni e la formazione matematica non si recupera con un studio, anche intenso, al termine dell'anno scolastico. La matematica chiede tempi di assimilazione lunghi, seppure diverso per ciascun studente; chiede che si torni più volte sugli stessi concetti, a livelli sempre più approfonditi, per comprenderli appieno e in tutte le sfumature;

– non sempre gli studenti sanno compiere un'analisi attenta delle questioni proposte e cogliere tutte le informazioni fornite dagli estensori delle prove. In altri termini non tutti sanno leggere ed interpretare un testo;

– spesso conoscono, anche bene, i meccanismi necessari, ma non hanno una comprensione chiara dei concetti che sono alla base di essi, meccanismi che si rivelano inadeguati di fronte a situazioni non consuete;

– la loro intuizione geometrica non è sufficientemente sviluppata; tendono ad eludere la visione geometrica e a rifugiarsi nella regola algebrica che offre più sicurezza; tale scelta è, comunque, espressione di "pigrizia mentale";

– anche quando guardano la figura, non sempre sanno tradurre in maniera felice la situazione geometrica in modello algebrico;

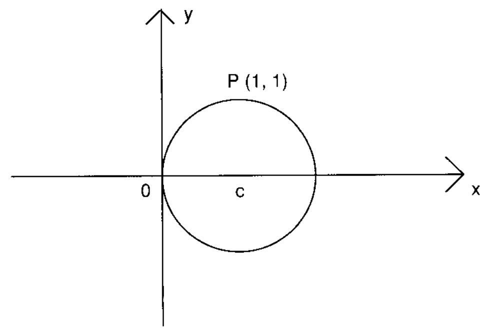
– in genere eseguono correttamente i calcoli algebrici, ma non in modo intelligente ed elegante, finendo con l'impelagarsi in calcoli lunghissimi che comportano anche maggiore probabilità di errore.

Sono d'accordo con quanti sostengono che il calcolo algebrico non è un obiettivo della matematica e non bisogna indulgere in esso più del necessario. Ritengo, tuttavia, che esso rappresenti uno strumento che l'allievo deve saper usare con disinvoltura affinché lo stesso calcolo non sia d'impaccio al raggiungimento dei veri obiettivi dell'apprendimento della matematica.

3. Esempi. Desidero dare qualche esempio a sostegno delle motivazioni sopra indicate.

1) in un problema proposto agli studenti è scritto:

"... si scriva la circonferenza tangente nell'origine all'asse y e passante per il punto $P(1, 1)$ ..."



Dall'esame dei compiti degli alunni di una classe risulta che molti hanno eseguito la figura ma nessuno l'ha *guardata*, preferendo applicare delle regole. Scritta, infatti, l'equazione della generica circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

hanno imposto:

- il passaggio per l'origine degli assi;
- la tangenza della circonferenza all'asse y (sistema delle equazioni della circonferenza generica e dell'asse y, calcolo del Δ dell'equazione risolvente, eccetera);
- il passaggio per il punto P(1, 1); eccetera eccetera;

aumentando e complicando i calcoli inutilmente.

Basta, invece, osservare che c = 0 in quanto la circonferenza richiesta passa per l'origine e che il centro, appartenendo alla perpendicolare alla retta tangente per il punto di contatto, cioè all'asse x, ha la seconda coordinata nulla, per cui b = 0. Si perviene così all'equazione:

$$x^2 + y^2 + ax = 0$$

che diviene:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

quando si impone l'appartenenza del punto P(1, 1) alla circonferenza richiesta.

2) Dalla prova proposta nelle maturità sperimentale del 1994:
"Si studi la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$$

Si tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il grafico della curva C di equazione $y = f(x)$ e si scrivano le equazioni delle rette tangenti alla curva nei punti $(x, f(x))$, per i quali $f(x)$ assume valore estremo relativo, e nel suo punto di flesso".

Prima riflessione che i candidati, alla lettura del testo, avrebbero dovuto fare:

"Vi sono almeno due estremi relativi"
"Vi è uno e un sol punto di flesso"

Molti candidati dopo avere scritto la funzione nella forma seguente:

$$f(x) = x^{2/3}\,(x + 3)^{1/3}$$

hanno calcolato, per la determinazione degli estremi relativi, la derivata prima scrivendola alcuni nella forma seguente:

1) $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^2}}$ altri nella forma 2) $f'(x) = \dfrac{x+2}{x^{1/3} \cdot (x+3)^{2/3}}$

Seguendo la regola che gli estremanti di una funzione si trovano cercando gli zeri della derivata prima e studiando il segno della medesima, hanno dedotto, senza alcuna considerazione per il denominatore di $f'(X)$:

– nel primo caso che gli estremanti di $f(x)$ sono $x = -2$ e $x = 0$, con tangente nell'estremo relativo $(-2, \sqrt[3]{4})$ la retta di equazione $y = \sqrt[3]{4}$ e nell'estremo relativo $(0, 0)$ la retta di equazione $y = 0$;

– nel secondo caso che l'unico valore estremante è $x = -2$, con tangente nell'estremo relativo $(-2, \sqrt[3]{4})$ la retta di equazione $y = \sqrt[3]{4}$.

In un qualunque buon libro di analisi per licei si trova scritto che gli eventuali punti estremanti di una funzione $f(x)$ vanno ricercati:

– tra i valori in cui sono definite $f(x)$ ed $f'(x)$ per i quali $f'(x) = 0$,
– tra i valori in cui $f(x)$ è definita ma non è definita $f'(x)$,
– negli estremi dell'insieme di definizione di $f(x)$.

Avrebbero così trovato che il valore $x = -2$, laddove sono definiti $f(x)$ ed $f'(x)$ ed è $f'(x) = 0$, dà luogo al massimo relativo $(-2, \sqrt[3]{4})$ con tangente la retta di equazione $y = \sqrt[3]{4}$, mentre i valori $x = 0$ e $x = -3$ nei quali $f(x)$ è definita ma $f'(x)$ perde di significato, danno luogo, con qualche altra considerazione, rispettivamente al minimo relativo (0, 0) (cuspide) con tangente la retta verticale di equazione $x = 0$ e al flesso verticale crescente (–3,0) con tangente la retta di equazione $x = -3$.

Gli studenti, dunque, conoscono dei meccanismi ma non i concetti che sono alla base di essi.

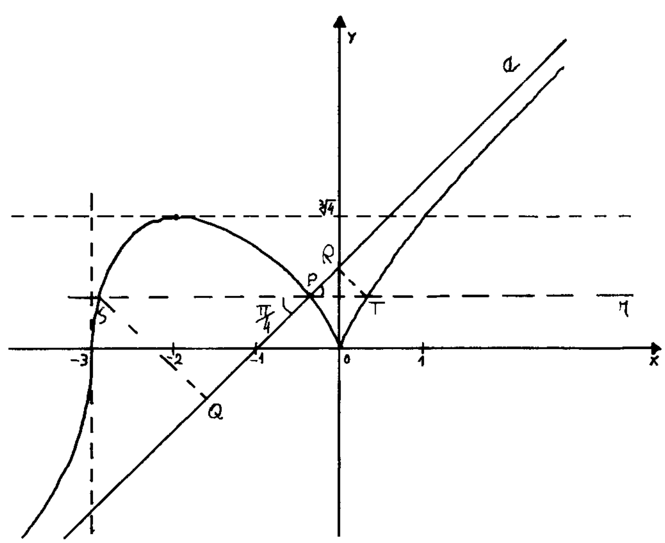
3) Dallo stesso problema:

"Detta r la parallela all'asse delle ascisse passante per il punto P d'intersezione della curva C con il proprio asintoto a, si determini il rapporto dei segmenti QR ed OP, essendo Q ed R le proiezioni su a degli ulteriori punti d'intersezione di r con C".

Per la determinazione della misura del segmento QR i candidati hanno determinato l'equazione dell'asintoto a ($y = x + 1$), le coordinate del punto P (–1/3, 2/3) e, dal sistema delle equazioni della retta r e della curva C, tenendo presente che una delle soluzioni dell'equazione risolvente in x è $x = -1/3$, sono pervenuti all'equazione:

$$9x^2 + 24x - 8 = 0 \qquad (1)$$

A questo punto molti candidati hanno determinato le coordinate dei punti T



ed S, scritto le equazioni delle perpendicolari all'asintoto per T ed S, determinato le coordinate dei punti Q ed R, eccetera eccetera, impelagandosi in calcoli lunghi e laboriosi.

Basta, invece, osservare che l'asintoto α forma con la retta r un angolo $\alpha = \pi/4$ (il coefficiente angolare è 1), per cui *guardando* la figura si ha:

$$\overline{OR} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{ST} = \frac{\sqrt{2}}{2}|x_t - x_s| = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{864}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(l'uso dell'espressione $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$, che esprime la differenza, in valore assoluto, delle soluzioni di un'equazione di II grado, nel caso in esame dell'equazione (1), semplifica notevolmente il calcolo).

Gli studenti hanno, a mio avviso, dimostrato di avere scarsa capacità sia di visione geometrica sia di uso intelligente del calcolo algebrico.

4. Misura della prova. Un altro aspetto importante riguarda la *misura* del compito di maturità di matematica, così come viene effettuata da molte commissioni d'esame e come invece dovrebbe essere.

Occorre premettere che esiste una differenza tra misurazione e valutazione nel senso che si *misura* il possesso di una competenza, mentre si *valuta* un allievo.

La terminologia usata per questi due aspetti è molto varia, ma l'importante è capire che vi sono due momenti: quello in cui si *verificano* presenza o assenza di conoscenze, presenza o assenze di capacità e gradi di possesso e quello in cui si *valuta* l'allievo, momento che investe molti altri aspetti del processo educativo dello studente. Ciò prescindendo dalla modalità che si adopera per esprimere *misure* e *valutazioni*: numeri (in decimi, in sessantesimi), lettere, lettere su indicatori prefissati, giudizi analitici.

Quando si giudica un compito, sia pure quello dell'esame di maturità che è prova sommativa finale ed il cui risultato va espresso con una frase, si sta effettuando una *misura* delle competenze dell'allievo in matematica. La *misura* è neutra e non può coinvolgere la storia dell'allievo. Essa deve avere carattere di oggettività nel senso che deve attestare il livello reale delle competenze possedute dall'allievo.

Con ciò si vuole dire che occorre superare quegli aspetti di *intuitività*, *estemporaneità*, *casualità* negli apprezzamenti delle prestazioni fornite dagli studenti.

L'*oggettività* della *misura* può essere facilitata dalla chiarezza nella formulazione della prova, dalla precisione di ciò che viene richiesto al candidato per conseguire il massimo voto (o il migliore giudizio) e dalla *struttura* stessa della prova.

Hanno le prove scritte di matematica assegnate nelle passate maturità queste caratteristiche? Alle volte si, alle volte no. Senza entrare nel merito della questione mi limiterò a dare uno spaccato della formulazione e struttura delle prove assegnate negli ultimi 25 anni.

In questi anni la prova è consistita in 3 o 4 problemi di una certa complessità nei quali compaiono, in maniera non sempre esplicita, più domande. Alle volte è presente una domanda teorica, con riferimento, ma non sempre, ad un caso particolare. Il candidato è invitato a risolvere *alcuni* dei quesiti proposti, ma il numero non sempre è precisato.

Scorrendo gli anni, a partire dal 1970, risulta che sono stati proposti:

– nel 1970:	un solo problema con più domande;
– negli anni 1971-72:	4 quesiti entro cui sceglierne almeno 2;
– negli anni 1973-75:	4 quesiti entro cui il candidato deve scegliere quelli che *ritiene più adeguati alla propria preparazione*;
– nel 1975:	3 quesiti entro cui sceglierne almeno 2;
– negli anni 1976-89:	4 quesiti entro cui sceglierne almeno 2;
– negli anni 1990-94:	3 quesiti entro cui sceglierne 2.

Il commento alla scarsa precisione nelle richieste è tutto nell'aneddoto riportato in un articolo di alcuni anni fa di Mario Marchi e Alvise Merini:

"Professore (dettando agli studenti): «Delle seguenti questioni risolvete quelle più adeguate alla vostra preparazione:.....»

Pierino: «Professore, dopo aver letto attentamente le questioni che ci ha dettato non ne ho trovato alcuna adeguata alla mia preparazione: consegno il foglio in bianco».

Professore (correggendo l'elaborato): «Pierino, poiché hai svolto perfettamente il tema, senza alcun errore, ti attribuisco il massimo dei voti».

Da «*Cronache di Kalilandia*» di anonimo kalilandese del XX secolo.

Oltre le prove delle maturità di ordinamento vi sono quelle proposte negli indirizzi sperimentali, che sono state strutturate in maniera diversa.

Le sperimentazioni che conducono a maturità scientifica sono di due tipologie:
– quelle autonome su progetto della scuola;
– quelle proposte dal Ministero della Pubblica Istruzione.

Ai candidati delle sperimentazioni autonome è proposta una prova contenente quesiti di varie discipline scientifiche: il candidato deve sceglierne *alcuni*.
La tipologia dei quesiti inclusi nei compiti sperimentali, estremamente variegata fino a qualche anno fa, si è recentemente semplificata. Al momento i tipi proposti sono essenzialmente 3 e precisamente compiti contenenti quesiti di:

– matematica, fisica e scienze;
– matematica, fisica e informatica;
– matematica e scienze (per gli indirizzi biologici).

In tutti è obbligatorio svolgere almeno un quesito di matematica. C'è da aggiungere che, trattandosi di maturità sperimentale, quasi sempre la matematica è anche materia orale.
I progetti ad indirizzo scientifico proposti dal Ministero sono due:

– il Progetto Piano Nazionale per l'Informatica, le cui classi sono giunte a maturità per la prima volta nel '93. Ad esse è stata proposta una prova con tre quesiti di matematica, diversi da quelli del tema di ordinamento e coerenti con i programmi del progetto. Il candidato – la richiesta è precisa – deve svolgerne *solo* due;

– il Progetto Brocca, di cui ricordo gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico, le cui classi affronteranno la maturità per la prima volta nel 1996.

5. Prove strutturate. Un buon esempio di prova con una struttura idonea ad una misura accettabilmente *oggettiva*, può essere offerto dalla formulazione di un compito in un esame A-level in Inghilterra, che si riporta qui di seguito:

"Il candidato deve rispondere a 7 quesiti scelti tra quelli proposti, raggruppati in 3 sezioni:

– Matematica pura	(sono proposti 5 quesiti)
– Probabilità e Statistica	(sono proposti 5 quesiti)
– Fisica	(sono proposti 5 quesiti)

di cui non più di 4 quesiti di una sezione. Tempo a disposizione: 3 ore".

Ai quesiti, strutturati su 3 o 4 domande, sono assegnati 14 punti suddivisi tra le varie domande in modo non omogeneo. La ripartizione del punteggio tra le domande viene precisata dagli estensori delle prove.

Uno dei quesiti è il seguente:

"*a) Dimostrate che la tangente alla curva di equazione:*

$$y = \ln x$$

nel punto $(e, 1)$ passa per l'origine degli assi e deducete che la retta $y = mx$ taglia la curva assegnata in due punti se $0 < m < 1/e$.

Punti 6

b) Per ciascuna radice dell'equazione $\ln x = x/3$ determinate un intero n tale che l'intervallo $n < x < (n + 1)$ contenga la radice. Usando una interpolazione lineare, con $x = n$; $x = n + 1$, trovate una prima approssimazione della soluzione più piccola, fermandovi al primo decimale.

Punti 5

c) Avvalendovi della prima approssimazione, calcolate con il metodo di Newton-Raphson, una seconda approssimazione della soluzione più piccola, fermandovi alla seconda cifra decimale.

Punti 3

Una prova siffatta si può definire semistrutturata.

In altri paesi, ad esempio negli Stati Uniti, la prova è costituita da un test con domande a scelta multipla.

Il test, prova strutturata per eccellenza, è certamente uno strumento oggettivo di *misurazione*. Esso, però, richiede tempi rapidi di esecuzione e non sempre consente una riflessione adeguata alla complessità del quesito. Vi sono alunni in possesso di buone competenze, ma che hanno tempi di riflessione più lunghi di quelli consentiti da una tale prova, nella quale talvolta più che risolvere l'esercizio proposto, occorre confrontare le risposte offerte e scartare quelle ritenute non valide. Tali alunni danno, spesso, in un test prestazioni inferiori alle effettive competenze possedute.

Inoltre, ci sono capacità che un test raramente coglie, quali ad esempio quelle legate alla creatività, all'inventiva, al pensiero divergente o a forme alte d'intuizione, che per la loro natura risultano di difficile misurazione con tale strumento.

Pur essendo il test un'ottima prova da utilizzare in corso d'anno, non appare pienamente idonea alla prova conclusiva degli studi.

6. Conclusioni. Le prove proposte nelle maturità degli ultimi anni appaiono, quanto meno alcune, sufficientemente idonee a riscontrare il possesso delle competenze che devono essere patrimonio di uno studente alla maturità scientifica, ma non sempre hanno una *struttura* conveniente.

Una prova *semistrutturata* appare la più adatta; una prova che, pur conservando la corposità delle attuali, sia strutturata in domande scandite e numerate:

– di difficoltà crescente
– possibilmente indipendenti tra loro.

Per la normativa in vigore non è possibile che il Ministero assegni un punteggio alla singola domanda – la valutazione nell'esame di maturità è competenza tutta della Commissione d'esame – ma una migliore *struttura* può rendere più chiara la prova al discente e più oggettiva la *misura* della Commissione.

Vorrei, ora, concludere con un'affermazione che non vuole essere una smentita di quanto detto, ma intende solo togliere alle affermazioni fatte quel carattere di assolutezza che sembrerebbero avere.

Qualunque sia la prova utilizzata vi sono obiettivi propri della matematica che, per la loro interazione con l'intima sfera dell'*apprendimento*, rimarranno sempre in penombra.

Diceva un matematico – non ne ricordo più il nome – che ogni dimostrazione o soluzione di problema è una successione di "lampi di genio" e di "atti di pedanteria". Forse siamo in grado di verificare se gli alunni sono capaci di "atti di pedanteria" (ma certamente possiamo verificare molto di più), non possiamo – né con le prove usate né con altre che potremmo inventare – sapere se nelle menti dei nostri ragazzi brilla il "genio".

USO DELLE LETTERE IN ALGEBRA E IN LOGICA(*)

Intervento di Claudio Bernardi
Dipartimento di Matematica – Università di Roma "La Sapienza"

1. Lettere che indicano numeri. L'introduzione dell'algebra è normalmente collegata alla comparsa di lettere "che indicano numeri". Non intendo qui presentare accorgimenti didattici per rendere più facile l'acquisizione del linguaggio letterale, né discuterne i tempi; mi propongo, invece, di esaminare e classificare i diversi ruoli che può assumere una lettera in algebra. Per chiarire i punti più delicati, farò ricorso a concetti di logica matematica, mentre non mi occuperò dell'uso delle lettere in informatica e in statistica.

Per iniziare, riporto alcune scritture, molto familiari, in cui compaiono lettere:

$$A=\pi r^2,\ (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,\ 3x^2-5x+2 = 0,\ y=f(x),\ P = (x;y).$$

Si noti che i contesti, implicitamente suggeriti da tali scritture, sono diversi nei vari casi, e che, d'altra parte, si usano diversi nomi per indicare le lettere (variabile, costante, parametro, indeterminata, incognita, ...); ma l'uso di queste o altre parole non corrisponde in modo chiaro alle varie situazioni che si presentano.

Anzi, alcune locuzioni comuni suonano come esempi di *ossimoro*, figura retorica in cui si accostano parole che esprimono concetti opposti (come nel caso di "silenzio eloquente"). Si parla infatti di *costante arbitraria*, di *dati variabili* o comunque *non conosciuti* (essenziali nei problemi con discussione), di *un qualunque numero fissato*, di ε *prefissato ad arbitrio*. Il discorso va approfondito (quanto meno perché parlare di numeri fissati può far nascere il sospetto che i numeri, come si dividono in positivi e non positivi, si dividano anche in fissati e non fissati), ma non tutte le espressioni precedenti sono necessariamente da evitare. Così come sono sostanzialmente corrette le due frasi seguenti, che pure appaiono piuttosto curiose: "un'equazione si dice letterale quando contiene un parametro"; "il valore che $f(x)$ assume per un particolare valore di x, ad esempio $x=a$, si indica con $f(a)$".

Aggiungo che l'uso delle lettere obbedisce talvolta a regole non scritte: ad esempio, è del tutto comune parlare del "limite di $f(x)$ per x tendente ad x_0",

(*) Questo intervento contiene i primi risultati di una ricerca che l'Autore sta conducendo con Lucilla Cannizzaro.

mentre qualcuno avrebbe da obiettare di fronte al "limite di $f(x_0)$ per x_0 tendente ad x".

Esaminando vari esempi, si possono riconoscere (almeno) quattro significati che assumono le lettere in algebra (spesso anche la scelta della lettera aiuta a chiarirne il senso):

(1) un numero *da trovare*;

(2) un numero *generico, qualunque*;

(3) un *segna-posto* a cui va assegnato un valore dall'esterno (si pensi, ad esempio, ai dati di un problema, o alle lettere nelle formule per lunghezze, aree e volumi in geometria);

(4) *oggetti su cui si opera direttamente*, rinunciando all'idea di sostituire un numero (rientrano in questo caso le serie formali o, a livello scolastico, i calcoli per determinare il valore di un'espressione letterale quando siano fini a se stessi).

Nel caso (2) è essenzialmente sottinteso un *quantificatore universale:* la scrittura $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ vale per ogni x e per ogni y. Spesso, tuttavia, non si precisa con chiarezza l'insieme degli elementi che è lecito sostituire ad x e ad y: l'uguaglianza precedente vale se al posto di x ed y scriviamo non solo due numeri, ma anche due espressioni letterali. Il fatto che sia lecito sostituire una variabile con un'altra lettera (come capita nella dimostrazione del teorema di Ruffini) o con espressioni letterali, che eventualmente comprendano la variabile di partenza, è fonte di una indubbia difficoltà: si pensi agli errori che nascono quando, nota $f(x)$, occorre calcolare $f(x+h)$ oppure $f(f(x))$.

Tutti, credo, siamo d'accordo nell'usare, nel caso (1), la parola *incognita,* così come, nel caso (4), il termine più appropriato sembra *indeterminata*. Negli altri casi si alternano le parole *variabile, costante, parametro,* forse con una preferenza per costante nel caso (3).

Da un punto di vista didattico, non penso che l'idea di variabile ponga grossi problemi; qui mi limito a notare che l'idea di costante viene spesso introdotta per contrapposizione, e che il concetto di variabile è strettamente legato a quello di funzione.

Molto più delicato è il discorso sui *parametri*. Prima di affrontarlo, vediamo un elenco delle situazioni in cui più di frequente si usa la parola parametro: equazioni e sistemi letterali (nei quali, appunto, si distingue fra incognite e parametri), equazioni di fasci di rette, luoghi geometrici, equazioni parametriche di una curva; si parla di parametro anche nell'equazione di certe curve (ad esempio di una parabola).

2. La semantica delle lettere. In logica matematica si distingue fra *sintassi,* costruzione e manipolazione di espressioni simboliche (ci interesseranno in particolare le formule), e *semantica,* interpretazione delle espressioni a cui viene attribuito un significato. In questo quadro cerchiamo di chiarire, in primo luogo, la distinzione fra variabili e costanti.

Per interpretare formule in una struttura, è necessario, fra l'altro, far corrispondere ad ogni costante un determinato elemento della struttura. Consideriamo, ad esempio, l'insieme Z degli interi relativi e la formula "$a>0$", dove a è una costante: questa formula è vera se il numero associato ad a è positivo, falsa in caso contrario.

Se invece a è una variabile, la formula "$a>0$" nella stessa struttura Z non ha un senso compiuto (non è né vera né falsa). Acquista un senso se si sostituisce una costante al posto di a (che svolge così un ruolo di segna-posto), oppure se si premette un quantificatore universale o esistenziale alla variabile a, che da libera diventa vincolata. Nel secondo caso si ottengono le formule $\forall a\ (a>0)$ ed $\exists a\ (a>0)$, dette formule chiuse; interpretandole in Z troviamo due proposizioni, la prima falsa e la seconda vera.

L'uso delle variabili è così legato ai quantificatori: in sostanza, quantificando una variabile si passa da una formula che non ha un senso compiuto a una formula che ha un senso.

Ci sono altri contesti e altre notazioni in cui una variabile subisce una "specie di quantificazione" in un senso del tutto analogo. Partendo ancora dalla formula "$a>0$" e introducendo il simbolo $\{\ /\ \}$, otteniamo $\{a/a>0\}$ che rappresenta un insieme (l'insieme dei numeri interi positivi, se l'ambiente è Z). Come nel caso precedente, siamo partiti da una espressione sintattica che, interpretata in una struttura, non ha un senso chiaro, proprio per la presenza di una variabile; ma accostando a tale espressione il simbolo $\{\ /\ \}$, questo ha lo stesso effetto di un quantificatore, perché dà luogo ad una scrittura con un significato preciso.

Analogamente, la formula "$3x+2$" non ammette, considerata da sola, una interpretazione convincente nella struttura R dei numeri reali. La formula acquista un senso compiuto in ciascuna delle seguenti scritture:

$$y=3x+2 \quad \lim_{x\to 1}(3x+2) \quad \int (3x+2)dx \quad \int_0^1 (3x+2)dx$$

scritture che denotano oggetti ben determinati, rispettivamente una funzione, un numero, un insieme di funzioni, un numero.

In generale, le variabili permettono di costruire formule che di per sé non hanno un significato, ma lo acquistano quando venga loro affiancato un opportuno "quantificatore".

Da un punto di vista teorico, si noti che il nome della variabile quantificata non influisce sul risultato [$\forall a\ (a>0)$ è equivalente a $\forall b\ (b>0)$]; mentre, nel caso di formule con due variabili, è essenziale l'ordine dei quantificatori [$\forall a\ \exists x\ (a<x)$ non è equivalente a $\exists x\ \forall a\ (a<x)$, così come il limite di integrale non è in generale uguale all'integrale del limite].

Su un piano didattico, è importante da un lato che lo studente comprenda il ruolo delle diverse variabili, dall'altro che sia in grado di modificare tale ruolo, senza stupirsi se in una certa fase della risoluzione di un problema si deve considerare a come incognita, mentre in una fase successiva l'incognita è x.

L'inquadramento logico descritto permette di chiarire il concetto di *parametro*. Vediamo un esempio. Nel piano cartesiano, la scrittura $y = mx$ indica il fascio di rette di centro l'origine. Non si tratta di un singolo insieme di punti, ma di un insieme di rette, ciascuna delle quali è un insieme di punti. Più precisamente, la scrittura $y = mx$ rappresenta l'insieme $\{ \{(x,y) \ / \ y = mx\} \ / \ m \in \mathbb{R}\}$: vengono "quantificate" prima le variabili x ed y (e si ottiene l'insieme $\{(x,y) \ / \ y = mx\}$) e, in un secondo tempo, il parametro m. Il discorso è logicamente analogo per l'uguaglianza

$$\forall x_0\ [\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)]$$

nella quale compaiono due variabili, che vengono quantificate in due momenti successivi. In generale, *si parla di parametro per intendere la variabile che viene quantificata per ultima*, cioè la variabile su cui agisce il quantificatore più esterno.

La stessa situazione si ripropone nel caso di un'equazione o di un problema con parametro: nella domanda «per ogni valore di m trovare i valori di x tali che ...», x è l'incognita ed m il parametro.

Conclusioni. Con l'introduzione del calcolo letterale si opera direttamente sulle lettere anziché sui numeri, al punto che, durante la manipolazione, conviene spesso sganciarsi dal significato originario delle lettere. L'utilità del calcolo algebrico risiede proprio nella sua generalità, cioè nel fatto che è indifferente fare prima i calcoli e poi sostituire numeri alle lettere, ovvero prima sostituire e poi fare i calcoli; la situazione si può esprimere schematicamente con il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd}
\text{espressioni algebriche} \arrow[r, dashed, "\textit{calcolo}"] \arrow[d, "\textit{sostituzione}"'] & \text{espressioni algebriche} \arrow[d, "\textit{sostituzione}"] \\
\text{numeri} \arrow[r, dashed, "\textit{calcolo}"] & \text{numeri}
\end{tikzcd}$$

La manipolazione di lettere e numeri (frecce orizzontali) costituisce la sintassi del linguaggio algebrico, mentre la sua semantica è data dalla sostituzione (frecce verticali).

Va sottolineato che *le regole sintattiche sono corrette proprio perché rispettano la semantica*. La cosa ha una notevole importanza a livello didattico, perché offre meccanismi di *controllo* per i calcoli che via via si eseguono. Per inciso, io credo che per l'apprendimento dell'algebra sia essenziale una padronanza, più o meno consapevole, del rapporto fra sintassi e semantica. Da un punto di vista teorico, è interessante studiare quali fra i concetti aritmetici si possano estendere alle espressioni letterali e quali proprietà si conservino: due dei tre esercizi seguenti riguardano proprio questo tema.

Esercizi

1. Sia S un sistema di equazioni nelle incognite x, y, z, e sia S' il sistema che si ottiene sostituendo in tutte le equazioni di S un numero al posto di z. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?

a) Se S era impossibile, anche S' è impossibile.

b) Se S era possibile, anche S' è possibile.

c) Se S era indeterminato, anche S' è indeterminato.

E se si considera, invece di S', un sistema S'' che si ottiene sostituendo un numero al posto di z in alcune delle equazioni di S ?

2. a) Sia $H(x,y)$ è un polinomio irriducibile; sostituendo ad x e y interi positivi, si ottiene necessariamente un numero primo?

b) Viceversa, se in un polinomio riducibile sostituiamo interi positivi alle variabili, otteniamo sempre un numero non primo?

c) Se in x^2+y^2 sostituiamo ad x e y espressioni letterali (senza lettere in comune), otteniamo sempre un polinomio irriducibile?

(*Suggerimento:* a) 1^2+3^2 non è primo anche se ...; b) x^2-y^2 non è primo, ma ...; c) si ponga $x=z^3$ e $y=t^3$.)

3. Siano $H(x)$ e $K(x)$ due polinomi a coefficienti interi. Poniamo $MCD(H(x),K(x)) = P(x)$; detto m un numero intero, poniamo poi $H(m)=a$ e $K(m)=b$. Che relazione c'è fra $P(m)$ e $MCD(a,b)$?

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Docenti

Maurizio Berni	Ist. Tec. Geom. "Brunelleschi", Empoli (FI)
Giovanni Canu	Ist. Tecn. Naut. "M. Paglietti", Sassari
Laura Capelli	Lic. Artist. "P. Klee", Genova
Antonio Carile	Ist. Prof. Ind. A. Moliterno, Potenza
Antonio Colecchia	Ist. Tecn. Geom., Termoli (CB)
Francesco Conte	Lic. Ginnasio "Rosmini", Palma C. (NA)
Paolo Delise	Ist. Tec. Comm. "Carli", Trieste
Carmelo Di Stefano	Ist. Tecn. Geom., Gela (CL)
Gian Luigi Furini	Ist. Tec. Ind. "E. Fermi", Mantova
Laura Gai	I.T. Comm. Geom. "Einaudi", Alba (CN)
Giancarlo Giardina	Ist. Tec. Ind. "L. di Savoia", Chieti
Concetta Giordano	I.P.S.C. "G. Magno", Valguarnera (EN)
Lidia Godino	Ist. Magistrale "De Nobili", Catanzaro
Antonio Iarlori	Lic. Scientifico "Galilei", Lanciano (CH)
Francesco Laudano	Istituto Magis. "A. Romita", Boiano (CB)
Prudenza Maffei	Liceo Classico "Q.O. Flacco", Bari
Maria Rosa Magenes	Liceo Classico "Foscolo", Pavia
Barbara Magnani	Lic. Scientifico "A. Volta", Riccione (RN)
Pasqualina Margiotta	I.P.S.I.A. "G. Martinez", Galatina (LE)
Mario Mariotti	Ist. Tec. Comm. "D. Serrani", Falconara M. (AN)
Margherita Motteran	Lic. Classico "Tito Livio", Padova
Paolo Nardini	Lic. Scientifico "A. Vallisneri", Lucca
Aurelia Orlandoni	Ist. Tec. Comm. "G. Salvemini", Casalecchio R. (BO)
Domingo Paola	Lic. Scientifico "G. Bruno", Albenga (SV)
Massimo Plateroti	Ist. Tec. Comm. "S. Pertini", Roma
Silvia Polenghi	Lic. Artistico, Bergamo
Alessandro Rabuzzi	Lic. Scientifico "A. di Savoia", Pistoia
Lorella Reversi	Lic. Scientifico, Fabriano (AN)
Roberto Ricci	Lic. Scientif. "Righi", Bologna
Ornella Robutti	Lic. Scientifico "G. Ferraris", Torino
Maria Grazia Rocca	I.P.S.S. "Pertini", Cagliari
Palmira Ronchi	Ist. Tec. Comm. "C. Vivante", Bari
Silvano Rossetto	I.T. Turistico "Mazzotti", Treviso
Paola Savelli	I.T.F. "Monna Agnese", Siena

Daniela Scialla	Lic. Scientifico "Peano", Roma
Benedetto Scimmi	I.P.S.I.A. "Cavour", Marsciano (PG)
Ornella Sebellin	Ist. d'Arte "Russoli", Pisa
Giuliano Spirito	I.P.C. "Vespucci", Roma
Luigi Taddeo	Ist. Magistrale "Pizzi", Capua (CE)
Rocco Trigiante	Lic. Scientifico "D. Alighieri", Matera

Neo laureati

Carla Alberti	Flero (BS)
Ilaria Bencivenni	Portomaggiore (FE)
Paola Curletti	Torino
Giuseppe Girotti	Bologna
Simonetta Greco	Genova
Silvano Gregori	Cremona
Silvia Patrizia Ruggeri	Botrugno (LE)
Cristina Tano	Lanciano (CH)
Maria Angela Varone	Cinquefrondi (RC)
Caterina Vicentini	Monfalcone (GO)

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

1 – Gestione e innovazione (*)

2 – Lo sviluppo sostenibile

3 – La valenza didattica del teatro classico

4 – Il postsecondario per la professionalità (*)

5 – Dalla memoria al progetto

6 – La sperimentazione della sperimentazione (*)

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei presidi; gli altri sono destinati alla formazione dei docenti.