Novembre 2006

Period. mensile spedizione in A.P.
art. 2, comma 20/b, legge 662/96
Filiale di Bologna

Anno XXXIII, N. 11/a

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

XXIV CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«MATEMATICA, SCUOLA, SOCIETÀ»

Acireale (CT), 21-23 Ottobre 2004

a cura di Giuseppe Anichini e Margherita D'Aprile

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

INDICE

XXIV Congresso UMI-CIIM

MATEMATICA, SCUOLA, SOCIETA'

Acireale (CT), 21-23 ottobre 2004

Programma

Giovedì 21 ottobre

- Iscrizioni
- Salute delle autorità
- Conferenza plenaria: prof. Alfio Quarteroni (Politecnico di Milano-EPFL Lausanne), prof. Fausto Saleri (Politecnico di Milano), Alessandro Veneziani (Politecnico di Milano), *La modellistica matematica : una sfida per la ricerca, una formidabile opportunità per l'insegnamento nella scuola secondaria*
- Laboratori

Venerdì 22 ottobre

- Conferenza plenaria: prof. Vicenzo Capasso (Università di Milano), *Formazione in Matemaitca per l'Industria : l'esperienza del Consorzio Europeo ECMI*
- Conferenza plenaria: prof. Enrico Arbarello (Università di Roma 'La Sapienza'), *Geometria numerativa*
- Tavola rotonda: Il progetto PISA di valutazione (coordina il prof. Gabriele Anzellotti – Università di Trento)
- Comunicazioni
- Laboratori

Sabato 23 ottobre

- Conferenza plenaria: prof. Alessandro Verri (Università di Genova), *Computer che imparano a vedere guardando*
- Conferenza plenaria: prof. Enrico Giusti (Università di Firenze), *Il Giardino di Archimede e al divulgazione matematica*
- Tavola rotonda : Matematica 2003 (ccordina la prof.ssa Lucia Ciarrapico – Ispettrice MIUR)
- Chiusura Convegno

PREFAZIONE

MATEMATICA, SCUOLA, SOCIETÀ è stato il tema del XXIV Convegno UMI-CIIM, che si è tenuto ad Acireale dal 21 al 23 ottobre 2004.

In questa delicata fase di attenzione all'insegnamento della Matematica, la CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) ha inteso offrire l'opportunità di un dibattito costruttivo su alcune precise proposte di innovazione didattica, intese a sviluppare nuove e, talvolta, insospettate relazioni con il mondo"reale" (attraverso fenomeni e situazioni del quotidiano).

Il Convegno di Acireale, partendo da alcune tematiche connesse all'indagine OCSE-PISA, ha affrontato molte e diversificate metodologie didattiche, essenzialmente con l'uso delle tecnologie, ha sviscerato alcuni legami fra matematica e industria, fra matematica e visualizzazione computerizzata, fra matematica e sport.
Il convegno si è proposto di stimolare gli allievi ad utilizzare le conoscenze e le competenze matematiche acquisite a scuola, per orientarsi con consapevolezza nell'attuale società della conoscenza e gestire le proprie scelte in modo responsabile e attivo.

Come di consueto il Convegno è stato ricco di attività di laboratorio, di comunicazioni da parte dei partecipanti, di tavole rotonde molto apprezzate. In questa prefazione vogliamo evidenziare alcuni punti specifici emersi dalle varie discussioni del convegno: l'uso delle tecnologie didattiche ed il valore aggiunto del "laboratorio".

Le tecnologie didattiche riguardano la definizione e lo sviluppo di modelli teorici e la messa a punto di metodologie e di sistemi tecnologici per risolvere problemi riguardanti l'apprendimento umano in situazioni finalizzate e sotto controllo. Le risposte, se ce ne sono, a tali problemi, assumono la forma di risorse per l'apprendimento, cioè risorse progettate, realizzate o selezionate con lo scopo esplicito di favorire l'apprendimento. Tali risorse coinvolgono tecnologie, materiali didattici, strutture e persone.

Ciò che può caratterizzare le tecnologie didattiche è l'approccio sistematico e interdisciplinare che, mutuando conoscenze da settori assai distinti (psicologia cognitiva, informatica, pedagogia, comunicazioni, ecc.) le integra in un sistema complesso, controllato e finalizzato al raggiungimento di specifici obiettivi formativi. Da un punto di vista strettamente tecnologico, la ricerca nel settore delle tecnologie didattiche si focalizza oggi in modo prevalente su alcune di esse (hardware e software) che appaiono particolarmente promettenti per la didattica come ad esempio multimedia e hypermedia, telematica, telecomunicazioni, intelligenza artificiale. Tuttavia il settore delle tecnologie didattiche non è ristretto esclusivamente alle applicazioni di questi strumenti, ma riguarda anche aspetti metodologici, organizzativi e progettuali relativi alle diverse fasi dei processi didattici e allo studio dell'innovazione didattica attraverso la tecnologia in specifici ambiti disciplinari. Ecco la "necessità" dell'introduzione del *Laboratorio*.

Riportiamo allora la "definizione" di Laboratorio così come è stata presentata, nel volume Matematica 2003, iniziativa quest'ultima facente parte di una serie di attività, inserite in un protocollo ministeriale e significativamente portate avanti dall'UMI-CIIM:

(http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/prima/premessa2.pdf);

Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).
L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.
La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento; l'appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte.

Questi appunti vogliono sintetizzare gli obiettivi del Convegno: organizzando un tale convegno,i membri della CIIM, ed in particolare il prof. Arzarello, hanno cercato di rendere, nello spirito delle finalità dell'Unione Matematica Italiana, un ottimo servizio agli insegnanti ed ai cultori della matematica.

(g. anichini}

CONFERENZE PLENARIE

ALCUNI ASPETTI DEL RAPPORTO TRA MATEMATICA E CULTURA A SCUOLA

Paolo Boero (DIMA, Università Genova)

INTRODUZIONE

Negli ultimi quindici anni si è reso sempre più evidente (in Italia come in molti altri Paesi dell'Occidente) un fenomeno di disaffezione dei giovani verso la matematica, che avrà conseguenze gravi sul futuro della matematica come disciplina insegnata nelle scuole (chi la insegnerà in Italia, quando la folta generazione degli insegnanti di età oggi compresa tra i 50 e i 60 anni sarà andata in pensione?) e anche come oggetto di ricerca e di insegnamento universitario.

A questa situazione i matematici hanno cercato di fare fronte con diverse iniziative culturali e promozionali: in particolare per evidenziare come il progresso scientifico e tecnologico dipenda in larga misura dalle applicazioni della matematica alle altre discipline; o per proporre una immagine della matematica come disciplina aperta, sfida intellettuale, avventura del pensiero, contrastando l'immagine scolastica di disciplina " chiusa ", da accettare e ripetere e applicare in modo rigidamente codificato. Mi sembra tuttavia che manchino, nello sforzo di evidenziare l'importanza e il fascino della matematica, elementi sufficienti per rispondere a domande assai diffuse tra i giovani e tra gli adulti colti: perché infliggere l'insegnamento della matematica alla maggior parte dei giovani, quelli che non dovranno fare i matematici di professione o gli scienziati? Che fare con i giovani (forse la maggioranza!) indifferenti alle sfide intellettuali della matematica? Le campagne promozionali dell'immagine della matematica condotte negli ultimi anni mostrano limiti notevoli, se si vuole assicurare una presenza di rilievo della matematica nella formazione culturale di tutti i cittadini, andando oltre l'obiettivo di garantire il ricambio dei matematici di professione. D'altra parte oggi non si possono più utilizzare argomenti che avevano valore fino agli anni '70 : matematica come palestra di concentrazione mentale e di rigore, matematica come background culturale indispensabile per le più diverse professioni del settore tecnico ed economico. In effetti, la rivoluzione informatica rende accessibili software che richiedono concentrazione mentale e rigore (con un feedback immediato e molto più convincente di quello di un insegnante che dice: " *Hai scritto male la formula* ", " *Hai applicato a sproposito la proprietà distributiva* "), e che sempre di più facilitano il controllo dell'adeguatezza dello strumento risolutivo scelto rispetto all'obiettivo da raggiungere (senza la necessità di conoscere il background teorico della matematica " incorporata " in esso). A fini utilitaristici e professionali potrà essere sufficiente una parte della matematica che oggi si dovrebbe insegnare nella scuola di base, a condizione di sviluppare una adeguata formazione all'uso dei software! Se vogliamo davvero "promuovere" la matematica come componente culturale della formazione del cittadino occorre approfondire il problema del rapporto tra "matematica" e "cultura", in modo da elaborare idee e prospettive difendibili nella realtà culturale e sociale di oggi.

MATEMATICA E CULTURA

Occorre precisare cosa si intende per "matematica" e per "cultura". Si tratta di termini dal significato non scontato: se si chiede a insegnanti di matematica dei licei cos'è la matematica, risposte assai frequenti sono del tipo "un insieme di teorie", o "un insieme di concetti, di definizioni e di teoremi", oppure "una disciplina fatta di concetti, di proprietà dimostrate e di tecniche operative". Assai raramente la matematica è vista anche come attività (produrre congetture, costruire dimostrazioni, risolvere problemi, modellizzare fenomeni, ecc.). Analogamente, la cultura è spesso intesa come insieme di discipline (in senso lato, includendo quindi le arti, la tecnologia, ecc.). L'attività culturale (costruire argomentazioni, produrre oggetti di interesse culturale, collegare ambiti diversi, ecc.) si colloca sul piano del "fare", diverso dal piano del "sapere", del "conoscere le cose" che qualifica la persona "colta". E' chiaro che con queste visioni di matematica e di cultura la matematica può essere inserita nella cultura come una disciplina tra le tante, importante perché fornisce strumenti ad altre discipline (come la fisica e l'economia) ma senza quella permeabilità nei due sensi che si realizza quando ci si colloca sul piano delle attività.

Una concezione della matematica come oggetti matematici e come attività che li riguardano, e una concezione di cultura come insieme di conoscenze e di pratiche condivise da un gruppi sociale, consentono invece di articolare bene l'analisi di cosa la scuola può fornire alla cultura attraverso l'insegnamento della matematica, e di cosa la scuola può ricavare dalla cultura per sviluppare concetti e attività tipiche della matematica. Nei prossimi due paragrafi mostrerò (attraverso esempi riguardanti la fascia centrale della scuola di base, tra i 9 e i 12 anni) come i canali aperti tra attività matematiche e attività culturali possono condurre a un reciproco arricchimento. Ritengo tuttavia che desumere dall'antropologia concezioni aperte e dinamiche di matematica e di cultura non sia ancora sufficiente per inquadrare correttamente la complessità di alcune attività centrali nello sviluppo della matematica, come il congetturare e il dimostrare. Nell'ultima parte della mia relazione cercherò di far vedere come la teoria della razionalità elaborata da Habermas possa costituire un riferimento teorico valido per tale complessità.

IL MODELLO GEOMETRICO ELEMENTARE DELLE OMBRE DEL SOLE

In una ricerca condotta quattro anni fa in classi di scuola elementare e di scuola media, l'introduzione del modelli geometrico elementare del fenomeno delle ombre del sole (MGEOS) ha modificato (in termini statisticamente rilevanti) il modo degli alunni di descrivere verbalmente il fenomeno, e forse anche i modi di pensarlo.

L'esperimento è stato condotto in venti classi di IV elementare (per un totale di 408 alunni) e in sedici classi di I media (per un totale di 352 alunni). In entrambi i casi gli alunni hanno inizialmente svolto attività di osservazione delle ombre del sole all'esterno dell'aula, in varie ore della mattina, registrando lunghezze e osservazioni spontanee su quello che vedevano. E' stato poi chiesto agli alunni *di metà delle classi* (202 bambini di IV elementare, 182 bambini di I media), scelte in modo da assicurare una discreta omogeneità di estrazione socio-culturale con le altre classi, di descrivere liberamente a un amico lontano (o a un compagno assente), potendo usare parole e disegni, quello che avevano osservato.

Le forme linguistiche usate vedono una netta prevalenza di espressioni del tipo:

> "alla mattina presto il sole è basso e le ombre sono lunghe, mentre a mezzogiorno le ombre sono corte e il sole è alto"

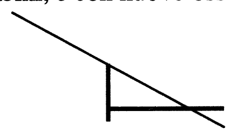
Solo il 33% degli alunni di IV elementare e il 37% degli alunni di I media usa espressioni del tipo:

> "alla mattina le ombre sono lunghe perché il sole è basso" *(espressioni "causali"),*

e/oppure del tipo

> "se il sole è basso le ombre sono corte" *(espressioni "condizionali")*

L'attività è proseguita nei giorni successivi *in tutte le classi* con l'introduzione del MGEOS a partire dai disegni di alcuni bambini, e con nuove osservazioni del fenomeno.



Tale modello non è stato in alcun caso un prodotto spontaneo dei bambini, ed è stata quindi necessaria una forte attività di mediazione degli insegnanti. Le rappresentazioni grafiche prodotte dai bambini non evidenziavano alcuna relazione geometrica precisa tra inclinazione dei raggi del sole e lunghezza dell'ombra proiettata, e quelle che si avvicinavano di più a una rappresentazione geometrica (una minoranza!) collocavano l'ombra dalla parte opposta del sole rispetto all'ostacolo, con un flusso confuso di raggi che andavano dal sole all'ostacolo e oltre, senza però delimitare il confine dell'ombra in relazione al bordo superiore dell'ostacolo. D'altra parte Serres (1993) sostiene che quello che abbiamo chiamato MGEOS è stata la prima manifestazione di una *geometria costruita dall'uomo* e non ridotta a *rappresentazione stilizzata di forme visibili.*

Una volta introdotto e utilizzato in un paio di attività il MGEOS, è stato chiesto ai bambini (206 di IV elementare, 170 di I media) di *quelle classi che non avevano prodotto la prima descrizione* di descrivere il fenomeno, su cui avevano lavorato alcune mattine, a un amico lontano (o a un compagno assente), potendo usare parole e disegni.

Parlando di relazioni tra momento dell'osservazione, posizione del sole e caratteristiche dell'ombra osservata, il 71% degli alunni di IV elementare e il 75% degli alunni di I media usa forme linguistiche di tipo *"causale"* o *"condizionale"*, e tra queste non poche (18 bambini di I media, 17 di IV elementare) sono le espressioni che generalizzano la dipendenza tra altezza del sole e lunghezza dell'ombra,

"Se il sole è basso l'ombra è lunga, se il sole è alto l'ombra è corta".

senza più riferirsi a particolari momenti della giornata (tali espressioni erano state molto rare nelle altre classi, prima dell'introduzione del MGEOS: 3 bambini di I media, 2 di IV elementare). L'unica interpretazione possibile di questi comportamenti sembra essere quella che attribuisce al MGEOS il ruolo di "mediatore" di un modo di pensare il fenomeno delle ombre del sole strettamente intrecciato alla dipendenza tra inclinazione del raggio e lunghezza dell'ombra proiettata, visibile nel MGEOS.

Il "potere" del MGEOS che emerge dai dati raccolti non deve fare dimenticare che dal momento in cui il MGEOS viene introdotto e si impone nella classe rischiano di perdere legittimità altri modi di pensare al fenomeno delle ombre del sole che possono avere notevoli valenze culturali e cognitive.

Consideriamo i seguenti documenti raccolti presso la Scuola Italiana di Asmara (bambini di 12 anni di estrazione culturale locale, insegnante Claudia Costa) in un percorso didattico abbastanza simile a quello accennato sopra:

"Finora abbiamo analizzato il fenomeno delle ombre del sole dalle 9 alle 12 del mattino. Cosa succede durante il pomeriggio?"

> "... succede che il sole a poco a poco perde forza, la luce diminuisce, e così l'ombra riacquista vigore e si allunga sempre di più; durante il pomeriggio il buio riprende a estendersi sulla Terra, finchè resta solo il buio"

E qualche giorno dopo: *"Cosa succederebbe se – lo stesso giorno, alla stessa ora - spostassimo la tavoletta con il chiodo nel cortile della scuola elementare?"*

"Le ombre resterebbero lunghe uguale, perchè l'ora è la stessa, la forza della luce e la forza del buio sono quindi le stesse e si bilanciano allo stesso modo. Possiamo vederlo anche con un disegno geometrico."

Questa concezione delle ombre del sole come equilibrio dinamico, espresso verbalmente, tra buio e luce, che fa parte della cultura d'origine ed è (a quanto pare) collegata a una più generale visione dell'evoluzione dei fenomeni naturali pensata in termini di equilibri dinamici, rischia di andare perduta nel momento in cui il MGEOS si impone (o, peggio, viene imposto) come forma standard unica di rappresentazione del fenomeno. In questo modo il guadagno di precisione, semplicità e incisività consentito dal MGEOS rischia di condurre all'atrofia un modo di pensare che potrebbe essere fecondo per altri tipi di sviluppo della stessa matematica e della modellizzazione matematica dei fenomeni naturali (penso ai modelli analitici di equilibrio dinamico di taluni fenomeni studiati dalle scienze della vita: dinamica delle popolazioni, ecc.). Ci avviciniamo così a un altro esperimento documentato in Boero, Douek, Garuti (2003), in cui l'interesse era rivolto allo sviluppo della concettualizzazione in campo matematico come filiazione di attività di pensiero in ambito non matematico.

INFINITO IN QUINTA ELEMENTARE

Consideriamo il primo approccio al concetto di infinito avvenuto negli scorsi anni in nove classi di quinta elementare, all'inizio dell'anno scolastico, in un contesto educativo (quello del progetto "Bambini, maestri, realtà" sviluppato a partire dall'inizio degli anni '80 dal Gruppo di ricerca che coordino) in cui la distinzione degli oggetti matematici dai contesti non matematici (nei quali vengono introdotti come strumenti di conoscenza e di risoluzione di problemi) avviene con gradualità, senza inutili forzature. Ad un compito individuale riguardante la domanda *"Quanti sono i numeri?"* seguiva la discussione, guidata dall'insegnante, di alcune risposte degli alunni, e un nuovo compito individuale: *"Quanti sono i numeri tra 1 e 2?"* seguito a sua volta da una discussione, guidata dall'insegnante, su alcune risposte degli alunni. Sono stati assai frequenti, nelle classi considerate, momenti di discussione, e interventi, come quelli di seguito esemplificati per quanto riguarda l'infinità dei numeri:

(Clelia): "I numeri sono infiniti, perché noi possiamo immaginare che diventino sempre più grandi, senza limite"

(Stella): "e anche sempre più piccoli, come 0,1; 0,01; 0,001"

(Enrico): "Noi siamo sicuri che un numero esiste solo se possiamo raggiungerlo contando"

(Amelia): "Non posso contare fino a un milione, ma un milione esiste: lo usavamo per le lire"

(Ezio): "Concordo con voi per un milione e anche per un miliardo, ma per numeri che noi non conosciamo... che non usiamo... Esistono?"

(Sabrina): "Se non possiamo toccare o vedere una cosa, non siamo sicuri che esista"

(Clelia): "Ma noi pensiamo che Dio esiste! E Dio è eterno! Come il tempo necessario per contare tutti i numeri"

In un'altra classe...

(Valentina): "Cosa significa dire che esistono infiniti numeri, se noi non possiamo contarli perchè moriamo"?

(Stefano): "Va bene, l'uomo non è eterno, ma la vita è eterna"

> (Valeria): "Il corpo della donna finisce, ma lei crea un'altra donna, e così la vita va avanti all'infinito"
>
> (Emanuele): "I numeri creano altri numeri, fino all'infinito, con la moltiplicazione. Ogni numero è finito, ma viene fuori una lista infinita"

La tentazione di riconoscere in questi discorsi proto-elementi di teoria matematica dei naturali sono forti, anche se occorrono cautele ben evidenziate in Tall&Tirosh (2001), in quanto la costruzione assiomatica è cosa diversa dall'intuizione dell'infinito potenziale.

Frequenti sono anche state in altre classi analogie e metafore direttamente o indirettamente legate a idee sul tempo e sullo spazio (l'illimitatezza dell'Universo) o religiose (l'eternità di Dio e/o dell'anima):

> (Elisa) "I numeri sono infiniti, perché il tempo necessario per contarli è infinito, come la vita della nostra anima. In una vita possiamo contarne solo un tot finito, ma è come la nostra anima: non possiamo giungere alla sua fine, perché moriamo prima, ma questo non significa che l'anima finisce".

NECESSITA' DI INQUADRAMENTO TEORICO

Alcune elaborazioni teoriche prodotte negli ultimi venti anni in ambiti disciplinari diversi (dalla linguistica, alla psicologia, all'epistemologia della matematica) possono aiutarci a inquadrare i fenomeni considerati ed a ripensare ai rapporti tra matematica e cultura in modo non scontato.

G. Lakoff ed E. Nunez propongono, nel loro libro ora disponibile anche in Italiano (Lakoff & Nunez, 2005) una discutibile (e discussa) teoria sulla natura e sulle origini delle principali idee della matematica. Al di là delle estrapolazioni e delle analogie talvolta forzate, o delle carenze di analisi di alcuni contenuti matematici in gioco, è convincente la loro ipotesi sul radicamento di importanti idee di base della matematica nell'esperienza del mondo che noi realizziamo attraverso il corpo, e nei meccanismi di natura metaforica in senso stretto ("metafore fondanti" come mappe che consentono di ragionare nel dominio di arrivo proiettandovi la struttura inferenziale propria del dominio sorgente). Le idee di Lakoff e Nunez sono vicine (sia pure in discipline diverse) ad alcuni filoni di indagine che verso la fine del secolo scorso hanno rimesso in discussione da un lato la natura dei concetti matematici, e dall'altro, i fondamenti delle teorie matematiche. In effetti Vergnaud (1990) sottolinea il ruolo cruciale delle situazioni di riferimento nel costituirsi del senso dei concetti attraverso l'attività del soggetto. Dal canto loro Berthoz (1997) e Bailly e Longo (2006) mostrano come i sistemi assiomatici della geometria recano tracce del nostro rapporto dinamico con lo spazio che non hanno solo funzione euristica, ma costitutiva per quanto riguarda lo sviluppo di diverse teorie matematiche. In questo scenario caratterizzato da una profonda revisione delle correnti di pensiero logiciste e formaliste che hanno dominato la prima parte del secolo ventesimo c'è ampio spazio per ripensare al rapporto tra matematica e cultura considerate come filiazioni del rapporto operativo e conoscitivo con il mondo, con intrecci intensi (in termini di "metafore fondanti" e di dinamiche mentali spazio-temporali) tra esperienza culturale nel campo della matematica ed altre esperienze culturali. Il quadro che ne emerge è quello di una appartenenza della matematica alla cultura (o meglio, alle culture) del nostro tempo e del nostro passato, come uno dei modi di pensare il mondo: non l'unico modo "razionale", e nemmeno l'unico modo universalmente efficace, ma comunque un modo che merita di essere trasmesso alle nuove generazioni.

Pensare in questi termini richiede anche di riconsiderare l'attività matematica come attività "razionale" in un senso diverso, e più ampio, di quello della razionalità che si realizza, in particolare, nella dimostrazione matematica (come prodotto culturale confezionato secondo gli standard dei matematici). A mio avviso l'elaborazione teorica di Habermas (2001) sulla razionalità costituisce oggi un possibile riferimento unitario per inquadrare alcune attività matematiche importanti, come la modellizzazione matematica, la produzione di congetture e la costruzione di dimostrazioni, senza contrapposizione tra momenti "creativi" e momenti di sistemazione formale, anzi, inserendo funzionalmente tali momenti diversi in una prospettiva unitaria (cfr. Boero, Garuti, Lemut, 2006).

Habermas considera in termini operativi il problema della razionalità e definisce il comportamento razionale di una persona alle prese con un problema in base a tre criteri:

- razionalità epistemica: quando il soggetto sa giustificare (in base a premesse e regole d'inferenza condivise nel contesto culturale in cui opera) le affermazioni che fa, in modo consapevole per quanto riguarda il riferimento a tali premesse e regole;
- razionalità teleologica: quando il soggetto sa scegliere gli strumenti (concettuali e metodologici) per risolvere il problema collegando consapevolmente le sue scelte all'obiettivo da raggiungere
- razionalità comunicativa: quando il soggetto è in grado di attuare una comunicazione efficace delle sue scelte e delle sue soluzioni, tramite mezzi e strategie di comunicazione scelte in modo consapevole in relazione all'interlocutore.

Notiamo che questa caratterizzazione del comportamento razionale di una persona ha come aspetto centrale l'attributo della consapevolezza, e si articola in "componenti" intrecciate tra loro. Possiamo anche notare che si tratta di una caratterizzazione molto ampia (che può coprire in modo unitario fasi di attività molto diverse nella risoluzione di uno stesso problema). In matematica, in compiti complessi di modellizzazione o di costruzione di congetture e di dimostrazioni, dà spazio (come momenti del comportamento razionale) all'euristica, all'esplorazione libera della situazione problematica, agli andirivieni tra obiettivo da raggiungere e conoscenze disponibili. Non è quindi limitata alla razionalità delle concatenazioni logiche e dei calcoli. Sottolineare l'attributo della consapevolezza (soprattutto sul versante teleologico) significa dare valore a quei comportamenti in cui il riferimento ad analogie, le attività esplorative, l'esercizio della creatività sono assunti come modi per avvicinarsi alla soluzione, distinguendo quindi il procedere affannoso e casuale del solutore che cerca in qualche modo di trarsi d'impaccio, dal ricorso intenzionale a strategie di pensiero efficaci per individuare il percorso che porta alla soluzione. Sottolineare l'importanza della razionalità epistemica e distinguerla dalla razionalità comunicativa significa contribuire a chiarire, nelle attività matematiche, ciò che è la ricerca della soluzione e la sua consistenza da quelli che sono gli attributi della comunicazione del lavoro fatto (vedi Boero, 2006).

Il quadro teorico di Habermas appare utile anche per un altro obiettivo che riguarda direttamente alcuni contenuti di questa relazione. La ricchezza del lavoro argomentativo dei ragazzi di Asmara, come pure le commistioni che i nostri alunni, alle prese con questioni di esistenza dell'infinito, realizzano tra considerazioni religiose, considerazioni di buon senso derivate dall'esperienza comune e considerazioni matematiche, trovano legittimità nel quadro della razionalità alla Habermas, che consente di rompere gli steccati tra ambiti culturali diversi e modi di ragionare diversi. Il comportamento dei ragazzi di Asmara è razionale, la loro concezione delle ombre è efficace per descrivere ed interpretare il fenomeno delle ombre del sole per gli aspetti di esso che sono più immediatamente esperibili; nei loro testi si manifestano (attraverso l'esplicitazione delle premesse, il collegamento dell'argomentazione alle premesse, la qualità della comunicazione) razionalità espistemica, razionalità teleologica e razionalità comunicativa. In conclusione, la teoria di Habermas esalta le attività matematiche più importanti come modelli di comportamento razionale, e insieme permette di identificare altri comportamenti razionali (in particolare, di natura argomentativa) che possono entrare in dialogo fecondo con la razionalità matematica.

BIBLIOGRAFIA

Bailly, F. & Longo, G.: 2006, *Mathématiques et sciences de la nature*. Hermann, Paris.

Berthoz, A.: 1997, *Le sens du mouvement*, Odile Jacob, Paris.

Boero, P.: 2002, 'Geometric signs and students' verbal reports: the case of the geometric model of sunshadows', *Proceedings of PME-XXVI*, Norwich, vol. 2, pp. 129-136.

Boero, P.; Douek, N.; Garuti, R.: 2003, 'Children's conceptions of infinity of numbers', in *Proceedings of PME-XXVII*, Honolulu, vol. II, pp. 121-128.

Boero, P : 2006, 'Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school', *Proceedings of PME-XXX,* Praga (in stampa).

Boero, P.; Garuti, R.; Lemut, E. :2006, 'Approaching theorems in grade VIII', in P. Boero (Ed.), *Theorems in school,* pp. 261-277, Sense Publishers, Rotterdam.

Habermas, J.: 2001, *Verità e giustificazione*, Laterza, Bari.

Lakoff, G. & Nunez, R. : 2005, *Da dove viene la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.

Serres, M.: 1993, *Les origines de la géométrie,* Flammarion, Paris.

Tall, D. & Tirosh, D. (Eds) : 2001, *Infinity*, Special Issue of *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48.

Vergnaud, G.:1990, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, pp. 133-170.

IL PROGRAMMA DI FORMAZIONE ECMI EUROPEAN CONSORTIUM FOR MATHEMATICS IN INDUSTRY

Vincenzo Capasso
ADAMSS (Advanced Applied Mathematical and Statistical Sciences)
Dipartimento di Matematica, Università di Milano
Via Saldini 50, 20133 Milano
email: vincenzo.capasso@unimi.it

1. INTRODUZIONE

La Matematica, come linguaggio delle Scienze, ha sempre giocato un ruolo importante nello sviluppo scientifico e tecnologico, ed è oggi applicata anche ad una vasta classe di problemi della medicina, dell'economia, e delle scienze ambientali.

L'industria europea dipende sempre più dalle tecnologie avanzate ed è quindi sempre crescente il bisogno di competenze matematiche sia nella ricerca che nello sviluppo di prodotti e servizi competitivi.

Un numero sempre maggiore di imprese riconoscono che le simulazioni al calcolatore di modelli matematici possono sostituire esperimenti reali (spesso estremamente costosi) nella progettazione di nuovi prodotti, al fine di ottenere costi ridotti e maggiore flessibilità.

Questa presa di coscienza si è accentuata a partire dagli anni '80, come documentato dall'ormai noto *"Rapporto David"* [1] del 1984 in cui si recita:

"Too few people recognize that the *high technology* so celebrated today is essentially a *mathematical technology*."

Da una indagine condotta all'interno di diverse realtà aziendali, nell'ambito della Rete di Eccellenza Europea MACSI-net, nata dalla collaborazione di ECMI con ECCOMAS, è emerso che i bisogni di Matematica nell'industria moderna si possono sintetizzare nei seguenti sei livelli:

- Modellizzazione e Simulazione
- Analisi Statistica di dati sperimentali
- Ottimizzazione, Controllo, Decisione
- Analisi e previsione del rischio
- Multidisciplinarietà
- Complessità

1.1 Modellizzazione e simulazione

La simulazione ha inizio con la formulazione matematica, o "modello", di un fenomeno reale.

Il modello è quindi "risolto" facendo ricorso a metodi analitici e numerici che consentono di comprendere meglio il fenomeno e di fornire previsioni sul suo comportamento sotto diverse condizioni iniziali ed al contorno, e diversi set di parametri.

Con l'attuale disponibilità a basso costo di mezzi di calcolo sempre più potenti, molti settori dell'industria usano oggi di routine le simulazioni per sostenere, e spesso per sostituire le sperimentazioni reali.

L'uso delle simulazioni nella progettazione produce grandi benefici, specialmente nei casi in cui lo sviluppo dei prodotti reali è lento e costoso, come nell'industria aerospaziale, e in quella automobilistica.

1.2 Analisi statistica di dati sperimentali

Il miglioramento delle tecnologie di acquisizione di dati sperimentali, unite alle enormi capacità di immagazzinamento, ha prodotto imprevedibili accumuli di dati sperimentali.

La sfida che viene dall'industria riguarda sia la gestione che l'analisi di tali quantità di dati, in tempi significativamente brevi, utili per il loro utilizzo.

1.3 Analisi e previsione del rischio

L'incertezza, in questo contesto, deriva dalla mancanza di informazioni sufficienti a permettere la perfetta comprensione di un sistema o di un processo, anche in principio.

Il Rischio è il potenziale comportamento indesiderato, sia per la salute dell'uomo e dell'ambiente, che per i profitti aziendali e finanziari.

Esso si valuta con metodi probabilistico-statistici; si tratta infatti di valutare le probabilità di realizzazione di diversi scenari, o di qualche evento particolare di rischio.

La previsione in presenza di incertezza e la stima del rischio sono oggetto di attenzione in diversi settori dell'industria, della finanza, della medicina, ecc.

1.4 Multidisciplinarietà

La multidisciplinarietà emerge in diversi problemi industriali, ove la difficoltà di integrazione di diverse componenti disciplinari è confrontabile con le difficoltà intrinseche di ciascuna componente.

Una delle aree di maggiore presenza di elementi multidisciplinari è legata alla ottimizzazione, ed alla progettazione robusta di un prodotto rispetto a diverse condizioni ambientali.

1.5 Complessità

Il problema della complessità emerge ogniqualvolta il sistema allo studio è costituito da un grande numero di componenti, in modo tale che il comportamento del sistema nel suo complesso non è deducibile dalla "somma" dei comportamenti delle diverse componenti.

Un caso tipico deriva dalla presenza contemporanea di diverse scale temporali e/o spaziali.

I metodi matematici necessari ad affrontare tali problemi derivano dalle aree classiche della matematica applicata (Fisica Matematica, Analisi Numerica, Calcolo delle Probabilità, Statistica Matematica, ecc.), ma anche dalla teoria del controllo, dalla teoria dell'ottimizzazione, analisi di segnali ed immagini, crittografia, ecc.

La presentazione dei risultati delle simulazioni in modo significativo per l'utente (*visualizzazione*) richiede anch'essa delle competenze matematiche associate a competenze di tipo ingegneristico-informatiche.

2. DOMANDA

Le ragioni di questo sempre maggiore coinvolgimento dell'industria europea si possono sintetizzare nelle seguenti tre:

- L'industria europea è sempre più impegnata in attività ad alta intensità di conoscenza ("knowledge-intensive").Le attività di Ricerca e Sviluppo richiedono una forte dose di sofisticazione (automazione flessibile, ottimizzazione di prodotti e servizi, controllo di qualità, ecc.)Si noti che qui il termine "*industria*" va interpretato in senso ampio, per includere anche , ad esempio, la logistica, la finanza, la medicina, e le comunicazioni.
- Le possibilità di utilizzo di modelli matematici sono oggi superiori e più estese rispetto ad una ventina di anni fa. Ciò è possibile grazie al rapido sviluppo di metodi matematici atti a descrivere ed analizzare sistemi nonlineari ad alta complessità, ed all'enorme sviluppo delle potenzialità di calcolo che si sono via via rese disponibili.[Dal *Rapporto Glimm (1991)*[2]: Il Calcolatore guida una rivoluzione che tocca in maniera vitale la competitività dell'industria... La Matematica è alla base di molti di questi cambiamenti, e fornisce una tecnologia cruciale per realizzare questa rivoluzione]
  La Matematica nell'industria veniva gestita da Ingegneri, Fisici e Chimici, con apporti occasionali da parte di Matematici.Oggi, il bisogno di metodi matematici sempre più sofisticati, non più abitualmente familiari agli altri scienziati, ha introdotto una domanda crescente di Matematici Industriali.Intanto oggi la domanda di matematizzazione viene anche e sempre più da aree scientifiche non tradizionalmente matematizzate, come la Biologia e la Medicina, e quindi estranee alle competenze intermedie di ricercatori di altre discipline, producendo così una ulteriore domanda di matematici applicati.

Va comunque sottolineato che è raro che la Matematica venga utilizzata come disciplina autonoma all'interno di una azienda.

La situazione più tipica è che il matematico sia chiamato a sostenere l'azienda nella soluzione di problemi sorti in altri campi più applicativi. Per questo motivo spesso i matematici sono parte integrante di gruppi di lavoro interdisciplinari.

Conseguenza di ciò è che la formazione di un Matematico Industriale includa tecniche di comunicazione orale e scritta, la conoscenza di altre discipline di contesto e l'esperienza di lavoro di gruppo.

Dall'altra parte in un team interdisciplinare il matematico deve essere in grado di esprimere i concetti matematici cruciali in termini non tecnicamente matematici; deve essere in grado di esprimersi attraverso modelli semantici, e non solo con modelli sintattici.

3. IL BISOGNO DI UNA COOPERAZIONE INTERNAZIONALE

La Matematica è una scienza molto ampia, con molti capitoli di interesse per le applicazioni. D'altro canto nella ricerca matematica si tende a concentrarsi in poche aree di grande specializzazione per poter raggiungere lo stato dell'arte in tempi ragionevoli. Ciò implica che nessuna nazione europea da sola, e tanto meno una singola università, può disporre di tutti gli specialisti necessari ad affrontare la vastità necessaria alla risoluzione di un problema di interesse industriale. Ciò stimola la cooperazione internazionale tra diversi specialisti, cooperazione che ha già prodotto risultati di rilievo. Peraltro la cooperazione internazionale è già pratica comune delle aziende multinazionali, che peraltro sono le maggiori utenti delle competenze matematiche più sofisticate.

Ciò ha stimolato la struttura internazionale del programma di formazione dell'ECMI, basata su una rete di università e imprese a livello europeo.

4. ECMI: THE EUROPEAN CONSORTIUM FOR MATHEMATICS IN INDUSTRY

Nel 1986 una decina di gruppi attivi in Europa nella interazione Università-Industria, fondarono l'ECMI con l'intento di offrire all'Industria Europea lo strumento di competitività indotto dalla aggregazione di tutte le competenze matematiche disponibili in Europa.

Come si è detto, nessuna nazione europea, da sola, dispone delle competenze necessarie ad una competizione a livello mondiale, mentre la rete ECMI, con la sua ampia e qualificata rete di università e centri di ricerca, può sicuramente offrire una copertura significativa delle più diverse aree della matematica e del calcolo scientifico.

L'esperienza di questi gruppi evidenziava che problemi tecnici dello stesso tipo interessavano diverse compagnie in diversi paesi. Peraltro le stesse competenze matematiche possono applicarsi a diversi problemi industriali.

L'Unione Europea ha sempre sostenuto l'ECMI attraverso i suoi programmi di sostegno alle reti di ricerca e di formazione, quali ad esempio COMETT/ LEONARDO, ERASMUS/SOCRATES e HCM/TMR.

Gli obiettivi principali dell'ECMI sono sttai formulati per rispondere alle esigenze della industria europea; si possono sintetizzare nei seguenti tre punti:

- *PROMUOVERE L'USO DI MODELLI MATEMATICI NELL'INDUSTRIA}*
- *FORMARE "MATEMATICI INDUSTRIALI" CHE RISPONDANO ALLA CRESCENTE DOMANDA DI TALI ESPERTI*
- *OPERARE SU SCALA EUROPEA*

4.1 Promuovere l'uso di modelli matematici nell'Industria

Gli ingegneri, i chimici, i fisici e gli stessi matematici che lavorano nell'industria possono trarre un grande beneficio dalla stretta collaborazione con i ricercatori matematici delle università, al fine di proporre modelli innovativi di interesse per le applicazioni dell'industria in senso lato, incluse la medicina, la finanza, le scienze ambientali, ecc.

4.2 Formare "MATEMATICI INDUSTRIALI" che rispondano alla crescente domanda di tali esperti

C'è ancora una certa carenza, all'interno dell'Industria europea, di matematici industriali, che hanno anche l'esigenza di un continuo aggiornamento sui metodi matematici e le tecniche di calcolo scientifico, che sono in continua e veloce evoluzione.

L'ECMI ha stabilito una efficace rete di centri di formazione nella maggior parte delle nazioni europee, che offrono diversi programmi di formazione, in aggiunta ad un programma di Master biennale fortemente coordinato, per la formazione specifica di Matematici per l'Industria.

4.3 Operare su scala Europea

Le risorse accademiche dedicate alla Matematica per l'Industria sono ancora scarse e variamente distribuite nel sistema delle università europee; le richieste di Matematici Industriali sono anch'esse distribuite in vario modo.

È necessario pertanto un efficace sistema di coordinamento,attraverso scambi ed interazioni sistematiche nei programmi di formazione e nell'offerta di competenze, per ottimizzare il trasferimento di competenze tra le università e tra università e Industria.

5. IL PROGRAMMA DI FORMAZIONE DELL'ECMI "*MATHEMATICS FOR INDUSTRY*"

Obiettivo principale del Programma *Mathematics for Industry* è quello di dotare laureati in matematica o in discipline affini, di una ampia base di conoscenze, nonchè degli skill necessari a lavorare con successo come matematico nell'industria.

A completamento del programma, lo studente dovrebbe possedere leseguenti abilità:

a) capacità di formulare situazioni del mondo reale tramite modelli matematici, e di analizzare tali modelli;
b) esperienza di impiego di modelli matematici in contesti industriali;
c) sufficiente conoscenza della matematica necessaria ai punti a) e b), nonché conoscenza di base di qualche area applicativa;
d) conoscenza di metodi numerici di simulazione e visualizzazione, con esperienza di un uso intelligente dei mezzi di calcolo;
e) conoscenza dei fondamenti della Computer Science;
f) esperienza di lavoro di gruppo, con capacità di fornire contributi individuali ai progetti di gruppo;

g) sufficiente conoscenza di almeno una area scientifica applicativa (fisica, chimica, ingegneria, economia, ecc.) con conseguente abilità a comunicare con esperti di tali aree.

5.1 Struttura del programma

Ogni studente può scegliere tra due curriculum del Programma: *Technomathematics* o *Economathematics.*

Per ogni curriculum si distinguono quattro parti:

- Il *Common Core*, costituito da una serie di corsi e relative esercitazioni, obbligatori per tutti gli studenti partecipanti al programma.
- *Modelling Seminar/workshop*, della durata di un anno, in cui lo studente partecipa attivamente ad un piccolo gruppo che lavora su un problema "reale", al fine di acquisire le necessarie abilità di modellizzazione, comunicazione, presentazione.
- I *Corsi Specialistici*, in numero uguale per tutte le sedi, sono scelti da un ampio spettro di opzioni, che tipicamente riflettono le aree di eccellenza di una sede.
- Il *Progetto Finale*, per la durata di almeno 6 mesi, preferibilmente svolto presso una "Industria". A conclusione del Progetto ogni studente produrrà un Rapporto Finale (di solito consistente in una parte di tipo metodologico -- La Tesi --, ed un Rapporto Tecnico destinato all'Azienda committente).

5.2 L'organizzazione internazionale

L' ECMI ha costituito una rete di Università e di Centri di Ricerca che partecipano al programma "Mathematics in Industry", che tende ad estendersi a tutti i paesi della Unione Europea, favorito dal recente schema "di Bologna" che prevede un biennio di studi *magistrali* a valle di un triennio propedeutico.

Il sistema prevede una procedura di accettazione degli *ECMI Educational Centre*s, basata sugli standard di qualità e coerenza adottati dall'ECMI per il proprio sistema di formazione.

Ciascuno di questi centri offre il Programma ECMI in uno o entrambi i curriculum, in cooperazione con gli altri centri della rete.

Il sistema educativo così costituito opera sotto la diretta responsabilità del Council dell'ECMI (che viene eletto da tutti gli aderenti all'ECMI, indipendentemente dal sistema educativo).

Il coordinamento delle attività degli Educational Centres è invece affidato ad un Educational Committee, costituito da tutti i delegati dei centri approvati.

Ogni Educational Centre deve essere in grado di offrire tutte le componenti del programma; per i corsi specialistici si affida alla rete, che arricchisce, a favore degli studenti interessati, le specialità di ciascun centro.

Ogni studente è tenuto a passare un periodo del programma presso un altro centro per la durata di almeno un semestre; per seguire corsi o per svolgervi il Progetto Finale, presso una azienda della rete locale del centro ospitante.

In aggiunta alle attività sopra indicate ogni studente ECMI partecipa ad una edizione della *Modelling Week*, di cui si parlerà meglio di seguito.

Attraverso questo sistema di scambi, si tende ad ottenere una maggiore omogeneità degli standard e dei metodi educativi in Europa; ad aumentare l'offerta formativa della rete nel suo complesso; favorendo la flessibilità del curriculum di ciascuno studente.

Tutte le attività del sistema ECMI sono svolte in lingua Inglese.

La verifica degli standard dell'ECMI per la approvazione di un ECMI Educational Centre è affidato, dal Council, ad un gruppo di Reviewer indipendenti, che hanno il compito anche di verificare la qualità del lavoro svolto dagli studenti del centro candidato.

5.3 Stile del programma

Come si è detto altrove, scopo del Programma ECMI è da un lato quello di fornire ai partecipanti la necessaria cultura matematica, dall'altro quello di sviluppare le abilità altrettanto necessarie per affrontare e risolvere problemi posti dal mondo industriale. L'enfasi del programma è dunque posto sugli aspetti costruttivi della Matematica. La capacità di trattare problemi dell'industria richiede competenze di modellizzazione e di analisi matematica, ma anche la capacità di interagire con ricercatori con diverse competenze tecnico-scientifiche.

Durante lo svolgimento del programma quindi, viene costantemente curato il collegamento tra la Matematica e le altre discipline. Alla maggior parte dei corsi si richiede che siano il più possibile *"problem driver"*, affidando al docente la capacità di descrivere situazioni reali in termini matematici.

Per lo studente una forte motivazione allo studio dei metodi matematici viene dal fatto che essi sono importanti nella analisi di problemi posti dal mondo reale. D'altro canto la soluzione deve essere presentata all'utente finale in forma a lui leggibile. Lo studente deve essere addestrato all'impiego delle più moderne attrezzature hardware e software adatte al calcolo numerico e statistico.

Le abilità di presentazione dei risultati includono tecniche di comunicazione orale e scritta. A tal fine le moderne tecniche di visualizzazione giocano un ruolo estremamente importante.

In ogni caso lo studente deve abituarsi a condurre il problema fino alla soluzione concreta, utile per l'utente finale.

Per la valutazione, i corsi più metodologici potranno prevedere verifiche scritte ed orali, mentre per i corsi più applicativi, vanno preferiti rapporti tecnici individuali e di gruppo durante lo svolgimento.

Va ancora una volta sottolineato che gli studenti che hanno partecipato con successo al programma, dovrebbero essere pronti da subito ad entrare nelle attività della compagnia che li assume.

5.4 I due curriculum

I termini *"Technomathematics"* ed *"Economathematics"* sono alquanto artificiali, per cui conviene chiarire che non si intende tracciare alcuna linea di demarcazione netta tra le due aree, distinguendo due tipi di Matematica o ancora meno due tipi di Matematici.

Il curriculum *"Technomathematics"* privilegia quella parte della Matematica orientata alla modellizzazione ed analisi dei fenomeni naturali, come ad esempio problemi di trasporto di massa e/o di calore, fluidodinamica, scienza dei materiali, dinamica di popolazioni, crescita tumorale, etc.

Il curriculum *"Economathematics"* cura maggiormente problemi della economia, della finanza, della logistica, della crittografia, delle comunicazioni, del controllo di qualità,ecc., curando tipicamente problemi di previsione e di ottimizzazione.

5.5 La struttura temporale

Il programma si sviluppa nell'arco di due anni accademici, al livello della *laurea magistrale* dello schema di Bologna.

5.5.1 La *"PREPARATORY PHASE"*

La fase preparatoria riguarda il complesso di conoscenze che si prevede ogni studente abbia all'ingresso nel programma ECMI.

La responsabilità che ogni studente abbia aderito ai requisiti minimi di ingresso è affidata a ciascun centro della rete.

È comunque possibile che uno studente copra tali requisiti con corsi individuali, durante i due anni di partecipazione al programma.

Viceversa si ammette che alcuni dei corsi del Common Core o dei corsi specialistici siano stati già coperti dallo studente negli anni precedenti del suo curriculum di studi.

5.5.2 Il *"COMMON CORE"*

Ogni centro della rete ECMI è in grado di offrire i corsi del Common Core e le attività di Modelling Seminar.

Attualmente (ma è in corso una revisione) i titoli dei corsi del Common Core per i due curriculum sono:

Per *Technomathematics*:

T1 Analytical methods for ordinary differential equations

T2 Analytical methods for partial differential equations

T3 Numerical methods for ordinary differential equations

T4 Numerical methods for partial differential equations

T5 Nonlinear optimization

T6 Linear systems theory

T7 Regression analysis

T8 Discrete optimization

Per *Economathematics*:

E1 Modelling with differential equations

E2 Advanced stochastic processes and time series analysis

E3 Network optimization

E4 Stochastic simulation

E5 Nonlinear optimization

E6 Linear systems theory

E7 General linear models in statistics

E8 Discrete optimization

5.5.3 Il *"MODELLING SEMINAR"*

Il "Modelling Seminar" può essere organizzato in modo diverso dai vari centri della rete. Il metodo suggerito è quello della *CLINICA MATEMATICA* da svolgersi in un laboratorio integrato, in cui si affrontano, a gruppi, problemi industriali "reali".

Questa attività si svolge durante un periodo da sei mesi ad un anno per ciascuno studente, e prevede attività di modellizzazione matematica, analisi, simulazioni numeriche e visualizzazione dei risultati.

Ogni gruppo è tenuto a produrre alla fine del "progetto" un rapporto tecnico di gruppo ed un insieme di rapporti individuali.

Durante lo svolgimento del progetto si tengono relazioni orali periodiche, seguite da una presentazione finale.

La partecipazione alla Modelling Week [vedi seguito] offre allo studente l'occasione di una analoga esperienza in un contesto internazionale.

In questa attività vengono enfatizzate le abilità di lavoro in gruppo, skill di comunicazione, interdisciplinarietà, accanto agli skill più pratici di calcolo, simulazione, e confronto con dati sperimentali.

5.5.4 I *CORSI SPECIALISTICI*

Ogni centro offre una selezione di corsi specialistici che riflettono le competenze locali. I corsi specialistici sono organizzati in modo da essere seguiti senza eccessive difficoltà da tutti gli studenti che abbiano seguito con successo i corsi del Common Core presso uno qualsiasi dei centri della rete ECMI. È auspicabile che ciascuno studente segua corsi specialistici presso sedi diverse da quella di provenienza, aderendo così al requisito di soggiornare per un periodo di almeno un semestre presso un'altra sede della rete. Tale periodo comunque può riguardare solo la fase di svolgimento del Progetto Finale.

La lista che segue è solo indicativa di quanto è già disponibile nella rete ECMI, e può infatti variare di anno in anno.

Ciascuno studente è libero nella scelta purché proponga un curriculum coerente con gli obiettivi del programma.

Corsi specialistici possono essere organizzati da tutte le strutture aderenti all'ECMI.

- Special functions
- Free boundary problems
- Elasticity and plasticity
- Sparse matrices
- Inverse and ill-posed problems
- Finite element methods
- Boundary element methods
- Particle methods
- Domain decomposition
- Computational fluid dynamics
- Porous media
- Computational elasticity
- Mathematical biology
- Advanced non-linear analysis
- Advanced systems theory
- Stochastic methods in control
- Identification
- Computational geometry
- Signal analysis
- Image processing
- Insurance mathematics
- Mathematics for finance
- Design of experiments
- Reliability and quality control
- Nonlinear models in statistics
- Robust statistics
- Dynamic optimization
- Production planning
- Inventory control
- Location theory
- Decision support systems
- Simulated annealing
- Scheduling and routing
- Game theory
- Pattern recognition
- Information theory
- Coding theory

- Cryptography

5.5.5 Il PROGETTO FINALE

Il Programma si conclude con un progetto, per la durata di almeno sei mesi, riguardante un problema industriale reale.

Preferibilmente il progetto si svolge presso una azienda committente, anche in un centro di una nazione diversa da quella del centro in cui lo studente ha svolto la maggior parte del suo curriculm , al fine di aderire al requisito di internazionalità del Programma.

Si conferma qui che il termine "Industria" va inteso in senso lato, includendo anche società di consulenza.

Il progetto finale tende a dimostrare le abilità conseguite da ciascuno studente nel formulare un problema industriale in termini matematici, di attaccare il problema con adeguati metodi matematici, ad interpretare i risultati ottenuti e quindi presentarli in maniera comprensibile al committente.

Lo studente produrrà una tesi (scritta in lingua inglese), che rifletta tutti gli aspetti sopra indicati del progetto.

Perché sia accettata, la tesi deve aderire a standard sufficientemente elevati rispetto a ciascuno di tali aspetti, mettendo bene in evidenza il contributo di essi nelle diverse fasi di svolgimento del progetto, con la dovuta enfasi alla loro importanza relativa al progetto nel suo insieme.

In particolare, la tesi deve contenere buona, non banale, matematica (non necessariamente originale).

D'altro canto l'azienda committente deve dichiararsi soddisfatta dei risultati ottenuti dal punto di vista industriale.

Al fine di permettere una corretta valutazione di entrambi gli aspetti, contenuto matematico adeguato e validità applicativa dei risultati, è previsto che lo studente produca due strumenti, la *Tesi* per la valutazione accademica, ed un *Rapporto Tecnico* per l'azienda. Quest'ultimo può essere scritto nella lingua abituale dell'azienda, e potrebbe essere, da questa, soggetto a vincoli di riservatezza.

Alla Commissione ECMI di valutazione del curriculum può essere presentata la sola Tesi (scritta in lingua inglese).

Va ricordato che sia l'Università che l'azienda committente devono contribuire in modo attivo alla supervisione oltre che alla valutazione dello studente durante lo svolgimento del progetto finale.

Nel suo ruolo di "Cliente", il supervisore industriale si prende cura della rilevanza industriale del progetto.

Il supervisore universitario garantisce invece che i metodi matematici adottati siano i più adeguati ad affrontare i problemi emersi, e che gli standard di qualità della rete ECMI siano rispettati.

In ogni caso, occorre assicurarsi sin dall'inizio il reale interesse e conseguente coinvolgimento dell'azienda committente nel progetto.

5.5.6 La *"MODELLING WEEK"*

La Modelling Week fa parte integrante del Programma ECMI. Ogni studente è tenuto a partecipare ad una sessione della Modelling Week. Della durata di una settimana, essa viene organizzata annualmente, a rotazione, da uno degli Educational Centre del Consorzio, secondo il seguente schema generale.

Gli studenti provenienti dalle diverse sedi (circa 60 per ogni sessione) sono organizzati in gruppi internazionali, possibilmente interdisciplinari, di 4-5 , per affrontare un problema “reale” proposto da un Istruttore, che simula un rappresentante di un azienda committente. Alla fine della settimana un portavoce (o più di uno) per ogni gruppo illustra i risultati ottenuti, a tutti i partecipanti. Al ritorno in sede, per un periodo non superiore a due mesi, i componenti di ogni gruppo interagiscono, facendo uso degli attuali mezzi di comunicazione a distanza, fino a produrre un rapporto di gruppo, che viene quindi raccolto in un volume collettivo.

Scopi della Modelling week sono:

- simulare un contesto industriale
- lavorare in un gruppo eterogeneo per scuola ed aree di interesse
- enfatizzare gli skill di comunicazione, attraverso presentazioni orali e scritte, e utilizzando i più moderni strumenti di comunicazione a distanza.
- favorire i contatti sociali e la conoscenza dei diversi costumi (inclusi la storia e la “cucina”) delle diverse regioni europee.

La prima MW fu organizzata a Bari nel 1988, dalla Scuola SASIAM, secondo lo schema precedente e, da allora, ha “viaggiato” attraverso la maggior parte dei paesi europei, tornando a Milano (MIRIAM) nel 1998, e continuando ancora fino a Lappearaanta (Finlandia) quest'anno, 2004.

A testimonianza del successo della sua formula, essa è stata adottata in diversi altri paesi fuori Europa, tra cui gli Stati Uniti (in particolare l'IMA di Minneapolis), l'India, il Messico, l'Argentina, ecc.

Una versione più estesa temporalmente (un mese), dedicata dall'UNESCO alle regioni meno favorite del mondo, viene organizzata periodicamente presso l'ICTP di Trieste da alcuni dei centri aderenti all'ECMI.

5.5.7 CERTIFICAZIONE

Gli studenti di un centro approvato, che presentino un curriculum corrispondente agli standard ECMI, come verificato da apposita commissione, anch'essa nominata dal Council, ricevono un *ECMI Certificate*, rilasciato dal Board dell' ECMI a firma del Presidente dell'ECMI.

Ulteriori dettagli sul sistema ECMI si possono trovare al sito

http://www.ecmi-indmath.org/

REFERENCES

[1] Renewing U.S. Mathematics: A Plan for the 1990s (Edward E. David, Jr., ed.), National Academy Press, Washington, DC,1990.

[2] Mathematical Sciences, Technology, and Economic Competitiveness (J. Glimm, ed.), National Academy Press, Washington, DC, 1991.

[3] Educating Mathematical Scientists: Doctoral Study and the Postdoctoral Experience in the United States (R. Douglas, ed.), National Academy Press, Washington, DC, 1992.

[4] Mathematical Research in Materials Science, National Academy Press, Washington, DC, 1993.

[5] Mathematical Challenges from Theoretical/Computational Chemistry, National Academy Press, Washington, DC, 1995.

[6] Reshaping the Graduate Education of Scientists and Engineers, National Academy Press, Washington, DC, 1995.

[7] Computational Science: Ensuring America's Competitiveness (M. R. Benioff and E. D.Lazowska,eds.), National Coordination Office for Information Technology Research and Development, Arlington, Virginia,2005.

LA MODELLISTICA VA A SCUOLA

A. Quarteroni (Dipartimento di Matematica - MOX, Politecnico di Milano, Milano)
F. Saleri (CMCS, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne)
A. Veneziani (CMCS, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne)

La modellistica matematica occupa uno spazio sempre maggiore nella società moderna e rende possibile uno sviluppo tecnologico altrimenti non sostenibile. Le sue applicazioni vanno da quelle più tradizionali in ambito ingegneristico a quelle più recenti in ambito biomedico, economico e sociale. In questi settori la Matematica non fornisce solo un linguaggio per descrivere i processi scientifici o tecnologici, ma è essa stessa parte attiva nel loro sviluppo.

Nonostante questo impressionante sviluppo, l'insegnamento della Matematica nella Scuola Secondaria non ha avuto modo di incorporare, se non sporadicamente, i concetti ed i metodi della modellistica matematica. Questo per diversi motivi, il primo dei quali risiede certamente nei già ristretti tempi a disposizione degli insegnanti per svolgere il normale programma ministeriale. A ciò si aggiunga che non è semplice dare una definizione di modellistica matematica senza rischiare di far coincidere questa materia con buona parte della Scienza in quanto potremmo dire, parafrasando Galileo Galilei, che la Natura ed i processi naturali (biologici, fisici, chimici, ...) si prestano ad essere descritti (modellati) in termini matematici. La modellistica matematica più che una materia è in effetti un processo che, a partire da un fenomeno fisico, si preoccupa di studiarne ed individuarne gli aspetti più rilevanti, tradurli in formule matematiche, studiare le proprietà del modello matematico individuato e fornirne una soluzione, anche approssimata.

Il progetto editoriale che abbiamo intrapreso, e che abbiamo illustrato in questo intervento, vorrebbe indicare una via percorribile per introdurre l'insegnamento della modellistica matematica nella Scuola Secondaria Superiore. Abbiamo voluto presentare il paradigma concettuale alla base della modellistica matematica attraverso esempi di modelli che riguardano problemi di rilevante interesse reale, come la dinamica delle popolazioni o il traffico.

Per la loro descrizione ci siamo avvalsi degli strumenti della matematica già attualmente insegnati nella Scuola Superiore.

In questo modo pensiamo che si possa ottenere un duplice scopo: vivacizzare l'insegnamento stesso della Matematica tradizionale e dare un valore aggiunto "moderno"', ossia arricchire i contenuti attuali in termini di conoscenza a livello metodologico. A titolo di esempio, fra i possibili strumenti che riteniamo possano essere introdotti, anche a livello elementare, citiamo:

- *processi iterativi* per il calcolo delle radici di un'equazione o per la risoluzioni di sistemi lineari, anche di grosse dimensioni;
- *metodi di regressione lineare* per l'identificazione dei parametri, l'estrapolazione o l'ottimizzazione;
- *equazioni differenziali ordinarie*.

L'idea è di articolare questa proposta in modo che ogni argomento si presti ad uno studio preliminare che possa essere effettuato nell'arco di un anno scolastico (il quarto tipicamente), per lasciare poi all'anno successivo l'approfondimento per intero di uno solo degli argomenti.

Per ogni argomento è stata concepita una *struttura a V*, secondo il seguente schema:

1. *"si parte":* viene presentato il problema da studiare senza ricorre ad un formalismo matematico, ma motivandolo dal punto di vista della sua rilevanza pratica e facendo ricorso a numerose immagini, reali o frutto di simulazioni;
2. *"capiamo il problema":* si descrive in modo più approfondito il problema in esame e si spiega il senso delle semplificazioni introdotte rispetto alla realtà eventualmente formulandole per gruppi di ipotesi. In questo modo si giunge ad una gerarchia di modelli matematici di complessità decrescente, ciascuno in grado di cogliere un numero sempre minore di aspetti del problema di partenza;
3. *"il nocciolo del problema":* è il modello matematico che occupa l'ultima posizione nella gerarchia di modelli prodotta al punto precedente. Si tratta di un modello "abbordabile" per gli studenti, cioè formulabile e risolubile (generalmente al calcolatore) con gli strumenti della Matematica (e dell'informatica) insegnata alla Scuola Secondaria Superiore;
4. *"risaliamo la china"*: le ipotesi semplificative introdotte precedentemente vengono rimosse gradualmente, commentando e formalizzando i modelli via via più sofisticati;
5. *"il modello completo"*: si arriva ad un modello che ragionevolmente si ritiene il più ricco ed accurato per l'applicazione esaminata.

Questa struttura ripetitiva ben si presta ad effettuare uno studio preliminare di diversi problemi proposti al quart'anno (punti 1 e 2), per poi puntare ad approfondirne uno solo (punti 3, 4 e 5) al quint'anno.

Nel paragrafo successivo, ripercorriamo il processo che abbiamo indicato nel caso della dinamica delle popolazioni.

Dinamica delle popolazioni

1. *"Si parte":* dobbiamo precisare il problema e gli obiettivi a partire da domande che gli studenti possono essersi posti durante una lezione, leggendo articoli di giornale od ascoltando programmi radio-televisivi. A titolo d'esempio: "Come evolverà nei prossimi dieci anni la popolazione italiana?", "Quale livello di diffusione avrà la prossima epidemia influenzale?", "Quanto una certa specie animale si può considerare a rischio di estinzione a causa di fattori naturali o legati all'uomo?".

Da queste questioni, apparentemente molto diverse fra loro (la prima è di carattere essenzialmente demografico, la seconda epidemiologico, la terza ecologico), è facile far emergere un concetto comune, quello di *popolazione*}. Partiremo quindi dalla definizione di popolazione come un insieme di individui che possono essere raggruppati sulla base di caratteristiche comuni per arrivare alla conclusione che una popolazione si può descrivere con uno dei concetti più elementari della Matematica, quello di *insieme*. A questo punto sarà evidente che ciò che interessa veramente è conoscere la dinamica di una popolazione, vale a dire la sua evoluzione nel tempo.

A questo livello non entreremo nel merito dei meccanismi che regolano questi cambiamenti (li affronteremo nel punto successivo); punteremo invece a stimolare ricerche interdisciplinari sulle problematiche inerenti la dinamica delle popolazioni, anche in competizione fra di loro, toccando temi di grande attualità come ad esempio il problema dello sfruttamento rinnovabile delle risorse.

2. *"Capiamo il problema"*: una volta individuato l'oggetto dello studio, la dinamica di una popolazione, dobbiamo cercare di far comprendere agli studenti come caratterizzarla, per passare poi a descriverne matematicamente l'evoluzione. In questa fase guideremo gli allievi a scoprire che una delle caratteristiche più facilmente quantificabile di una popolazione è la sua numerosità, ossia il numero N di individui che la costituiscono. Essendo interessati alla dinamica, supporremo che N sia una funzione del tempo. Avremo così introdotto uno degli strumenti matematici, il concetto di funzione, fondamentali per la trattazione di questo argomento. Potremo complicare la trattazione supponendo che N sia una funzione anche dello spazio, $N(\mathbf{x},t)$, dando così agli studenti un concetto, quello di funzione di più variabili, spesso confinato ai margini del programma del quint'anno o addirittura non affrontato.

L'analisi del problema procederà osservando che lo studio della dinamica delle popolazioni può essere visto come il calcolo di $N(t,\mathbf{x})$, sulla base dei dati in nostro possesso e della conoscenza dei meccanismi che possono modificare, sia nel tempo che nello spazio, il valore di N. Di conseguenza, porteremo gli studenti ad individuare i principali fattori di aumento (nascita di nuovi individui, immigrazione da altre regioni) o di decrescita (morte, emigrazione dalla regione in esame) di una popolazione. Potremo in tal modo arrivare ad un primo modello matematico (a tempo discreto) della forma:

$$N(t+1) = N(t) + [\text{Nati}(t) - \text{Morti}(t)] + [\text{Immigrati}(t) - \text{Emigrati}(t)]$$

essendo t un intero che denota l'anno. A partire da questo semplice bilancio introdurremo modelli sempre più complessi, fino ad arrivare a (non necessariamente a dedurre) modelli a tempo continuo. Durante questo lavoro metteremo nel dovuto risalto le ipotesi che vengono aggiunte o abbandonate per semplificare o complicare il modello matematico e, conseguentemente, renderlo capace di descrivere quella parte del fenomeno che ci interessa.

3. *"Il nocciolo del problema"*: la modellistica operata al punto precedente ha generato una gerarchia di modelli, nel più semplice dei quali $N_{k+1} = N(t_{k+1})$ sarà determinabile a partire dalla sola $N_k = N(t_k)$ attraverso una relazione del tipo

$$N_{k+1} = \varphi(N_k),$$

dove k è un numero intero (rappresentativo dell'unità di tempo) e φ è una legge che, in considerazione delle dinamiche riproduttive e del tasso di mortalità, stabilisce come varia la popolazione di anno in anno. La relazione introdotta ci permetterà di introdurre gli studenti al concetto di processo iterativo che gioca un ruolo assai rilevante nella matematica numerica. Inoltre, a seconda della forma di φ potremo descrivere l'evoluzione di popolazioni diverse, ad esempio studiare popolazioni di tipo Malthusiano, di tipo logistico o con dinamiche ancor più complesse che coinvolgano fenomeni di socialità fra individui. Questa attività si dovrebbe ben prestare a ricerche interdisciplinari (ad esempio, sulle conseguenze di pratiche di tipo Malthusiano nel controllo delle nascite).

Come noto, i modelli considerati, seppur semplici, presentano una grandissima varietà di comportamento che arriva fino ad includere comportamenti di tipo caotico. Per convincere di questo gli studenti riteniamo sia importante far uso di uno strumento di calcolo che permetta di effettuare rapidamente delle simulazioni sulla dinamica di popolazioni al variare della funzione φ o della popolazione iniziale. Nella nostra proposta abbiamo individuato in Octave, un software completamente free-source, lo strumento adeguato. Si tratta di un ambiente di lavoro con un proprio linguaggio di programmazione, molto affine a linguaggi come C e Pascal, e compatibile con Matlab, un programma che gli studenti che continueranno i loro studi probabilmente utilizzeranno nelle Facoltà Scientifiche. Programmare in Octave ha l'innegabile vantaggio di avvalersi di numerose funzioni già disponibili e facili da richiamare (ad esempio, risolvere un sistema lineare di matrice $\mathbf{A}$ e termine noto $\mathbf{b}$, si fa con la sola istruzione $\mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$). Ciò non toglie che gli studenti possano predisporre i semplici programmi necessari direttamente in C o in Pascal o in altri linguaggi di programmazione insegnati.

4. *Risaliamo la china*: una volta che gli studenti si sono convinti delle potenzialità del modello più semplice, possiamo metterne in evidenza i limiti principali ed iniziare nell'opera di ricostruzione dei modelli più complessi. Anche in questo percorso riteniamo importante fissare degli obiettivi intermedi (ad esempio considerare una funzione di iterazione che dipende anche dalla posizione) connessi a casi realistici (nel caso precedente, proponiamo la dinamica della popolazione delle acciughe nel Golfo del Tigullo[1].

5. *Il modello completo*: a coronamento di tutto il percorso agli studenti viene proposto un modello complesso, come potrebbe ad esempio essere un modello con popolazioni che dipendano in modo continuo dal tempo e dallo spazio. Non deve spaventare il fatto che i modelli riportati in questa sezione saranno generalmente (come in questo caso) modelli differenziali alle derivate parziali e potrebbero dunque richiedere conoscenze di calcolo integrale al limite di quello che tipicamente si spiega in un istituto superiore. Riteniamo infatti che certi concetti, come quello di derivata parziale, possano essere introdotti anche nella Scuola Superiore e recepiti in modo naturale dagli studenti dal momento in cui li vedono in azione nella formalizzazione di un problema reale.

[1] Progetto svolto con gli studenti del Liceo Respighi di Piacenza,vincitore del Premio FAST 2003

Conclusioni

Questo intervento vuole essere una proposta operativa per introdurre l'insegnamento della modellistica matematica nella Scuola Secondaria Superiore. Ovviamente affinché questo sia possibile, si rende necessaria una indagine presso i docenti della Scuola Superiore al fine di individuare un numero di ore che possano essere ragionevolmente dedicate a questo scopo.

TAVOLA ROTONDA: "MATEMATICA 2003"

Relatori (nell'ordine d'intervento): Proff. Marilina Ajello (L.S. "S. Cannizzaro" di Palermo-G.R.I.M. Università di Palermo), Maria Gabriella Ottaviani (Università "La Sapienza" di Roma, Ornella Robutti (Università di Torino), Domingo Paola (L.S." Issel" di Finale Ligure- S.S.I.S. Università di Genova).
Coordina Lucia Ciarrapico (MIUR).

Introduzione (Lucia Ciarrapico)

La tavola rotonda che conclude i lavori del XXIV Congresso UMI-CIIM presenta una recente proposta dell'UMI in merito ad un possibile curricolo di matematica per le prime quattro classi del ciclo secondario. La proposta s'inquadra in un contesto più ampio che include da un lato il curricolo per la scuola primaria e secondaria di I grado e dall'altra, a completamento, quello per il V anno del secondo ciclo.
Nel luglio 2000 il Presidente dell'UMI, facendo seguito ad una delibera della Commissione Scientifica dell'Unione, ha insediato una Commissione di esperti per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria, adeguato ai mutati bisogni della società. La Commissione, composta da docenti di scuola e da esperti universitari, ha lavorato con grande impegno nell'intento di individuare le conoscenze matematiche fondamentali per tutti. E' emersa l'idea della *"matematica per il cittadino"*, cioè di un corpus di conoscenze e abilità necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici.
Nel 2001 è stato portato a termine il progetto relativamente al primo ciclo scolastico, distinto in scuola primaria e scuola secondaria di primo grado; nel 2003 quello dei primi quattro anni del secondo ciclo; successivamente, nel 2004, sono state elaborate le proposte per il V anno del medesimo ciclo.
La Commissione istituita dall'UMI ha anche promosso iniziative volte ad illustrare il significato delle scelte curricolari operate. A questo scopo, al termine delle varie fasi di lavoro, gruppi di esperti, impegnati nell'innovazione dell'insegnamento, ha approntato 200 esempi di attività didattiche, ricche di indicazioni metodologiche e di suggerimenti per prove di verifica.
Gli esempi sono disponibili in tre volumi di una collana del MIUR denominata *I quaderni*: Matematica 2001, Matematica 2003, Matematica 2004 (in corso di stampa). I materiali sono disponibili anche in forma elettronica sia in CD sia in internet ai siti:
http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2001/matematica2001.html
http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html.
L'intero progetto è stato realizzato nell'ambito di un'intesa esistente tra il MIUR e le Società UMI e SIS (Società Italiana di statistica); per una parte del lavoro ha collaborato anche la Società Mathesis.

Il curricolo proposto, preceduto da una Premessa che illustra il punto di vista della Commissione sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica nelle diverse età scolari, è articolato in sette nuclei essenziali su cui la Commissione ha ritenuto che debbano essere costruite le *abilità* e *conoscenze* matematiche, ritenute fondamentali. I primi quattro nuclei, definiti *tematici*, descrivono conoscenze ed abilità proprie dei contenuti dell'educazione matematica; i successivi tre nuclei, detti di *processo*, non hanno contenuti propri, ma utilizzano trasversalmente i contenuti dei primi quattro nuclei. Essi descrivono abilità legate ad importanti processi mentali, come il risolvere problemi, il misurare, l'argomentare e il congetturare. Al termine di ogni nucleo sono presenti riferimenti ad aspetti storici.

I nuclei per la scuola primaria e secondaria di primo grado sono:

<u>Nuclei tematici</u>
- *Il numero*
- *Lo spazio e le figure*
- *Le relazioni*
- *I dati e le previsioni*

<u>Nuclei di processo</u>
- *Argomentare e congetturare*
- *Misurare*
- *Risolvere e porsi problemi*

Nel secondo ciclo, in piena continuità, compaiono gli stessi nuclei, con piccole differenze nei nomi che riflettono le diversità di apprendimento e comprensione proprie di tale fascia di età. La Commissione che ha elaborato il curricolo lo ha inteso, in un'ottica di verticalità, come un percorso continuo e progressivo che si adatta alle differenti abilità, bisogni, interessi degli studenti, mirando ad una sempre più alta formazione nei diversi livelli di scuola.
I nuclei in questo ciclo sono:

<u>Nuclei tematici</u>
- *Numeri e Algoritmi*
- *Spazio e Figure*
- *Relazioni e Funzioni*
- *Dati e previsioni*

<u>Nuclei di processo</u>
- *Misurare*
- *Risolvere e porsi problemi*

<u>Nucleo misto</u>
- Argomentare, Congetturare, Dimostrare

Il nucleo *Argomentare e congetturare*, arricchito dell'attività del *Dimostrare*, cuore del pensiero matematico stesso è presentato come nucleo misto in quanto in esso sono presenti alcuni contenuti propri della logica.
Il curricolo del secondo ciclo è completato da un capitolo dal titolo *Laboratorio di Matematica*, che presenta una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici, ma finalizzate principalmente alla costruzione di significati matematici.
Per la quinta classe del secondo ciclo, a differenza delle classi precedenti, sono previsti due differenti tipi di curricolo. Il primo, detto di *Approfondimento*, è rivolto agli studenti che intendono proseguire in studi superiori nei quali la matematica riveste un ruolo fondamentale: esso è articolato in abilità e conoscenze come nelle prime quattro classi. Il secondo, detto di *Consolidamento*, è rivolto agli altri studenti ed intende offrire loro l'opportunità di meglio comprendere il significato della matematica, che gli sarà necessaria, come cittadini del domani, nell'inserimento del mondo del lavoro. In esso non sono introdotte ulteriori abilità e conoscenze in quanto ritenute sufficienti quelle acquisite

nelle precedenti classi, ma sono proposti alcuni percorsi che, impegnando gli studenti in un dialogo costruttivo sul significato della matematica e sulle relative applicazioni, li conducano ad un miglioramento del quotidiano uso delle abilità matematiche.

I nuclei tematici Numeri e Algoritmi, Spazio e Figure, Relazioni e Funzioni (Marilina Ajello)

Il contesto in cui si è lavorato è quello della matematica per il cittadino: un cittadino che sappia leggere e interpretare la realtà che lo circonda, in grado di operare scelte consapevoli.
Le conoscenze e le abilità declinate in ogni nucleo tematico sono state individuate, seguendo anche un altro dei criteri guida già ricordati,: l'essenzialità e la continuità tra i diversi ordini di scuola.
La proposta è di un insegnamento non settoriale, che non separi gli argomenti ma che si sviluppi in una visione "fusionista". E necessario, quindi, che le situazioni di insegnamento-apprendimento siano sempre sviluppate in modo coordinato cogliendo ogni occasione per fare collegamenti interni alla matematica, ma anche con altre discipline.
Sono quattro i nuclei tematici del curricolo, ma in questo intervento ci si riferisce ai primi tre:

Numeri e Algoritmi, Spazio e Figure, Relazioni e Funzioni.

Non è facile riassumere le proposte dei singoli nuclei perché non è possibile fare un elenco di argomenti da trattare nei due bienni: la proposta è infatti molto articolata e contiene diverse indicazioni di natura metodologica. Si possono però mettere in evidenza, sinteticamente, alcuni aspetti significativi, che sono alla base del modo in cui sono state scelte e formulate *conoscenze e abilità.*

Numeri e Algoritmi
Un'abilità di base è sicuramente riconoscere quelle situazioni problematiche che sono caratterizzate da considerazioni quantitative. I numeri, le loro proprietà e operazioni, sono così l'oggetto dell'indagine sia perché componente essenziale della vita contemporanea sia in quanto occasione per intraprendere il processo di generalizzazione e astrazione (ricerca di regolarità, individuazione di insiemi che soddisfano condizioni date,...). Si tratteranno i numeri razionali e irrazionali fino ad una introduzione, a livello intuitivo, dei numeri reali, e l'impianto teorico degli insiemi numerici per passare ad altri insiemi (polinomi, classi resto, vettori). Si consiglia l'uso dei nuovi strumenti di calcolo che sono anche strumenti che, favorendo la discussione, facilitano la costruzione di significati.

Relazioni e Funzioni
Le relazioni, pur essendo alla base del nucleo, è preferibile che non siano trattate come argomento a sé, ma come concetti che nascono generalizzando proprietà note. Si consiglia di insistere maggiormente sullo studio qualitativo dei fenomeni per facilitare l'acquisizione di un "pensiero funzionale", utilizzando possibilmente vari registri interpretativi di una stessa situazione. Si tratteranno funzioni elementari, o riconducibili a queste, equazioni e disequazioni. La connessione fra aspetti grafici di una funzione, la sua espressione algebrica e gli aspetti numerici, renderà più agevole l'analisi di momenti

particolari dell'andamento di una funzione (zeri e segno, crescenza e decrescenza,massimi e minimi,...), anche senza gli strumenti dell'analisi matematica. L'introduzione di simboli e formalismi sarà graduale e seguirà l'acquisizione dei concetti trattati.

Spazio e Figure
Si propone il potenziamento dell'intuizione spaziale anche per stimolare e motivare lo studio razionale e sistematico della geometria piana. L'itinerario proposto passa dall'esplorazione di configurazioni geometriche per la scoperta di proprietà, anche note, alla produzione di congetture con la relativa validazione, fino alle limitate catene di deduzione e, solo dopo, alle dimostrazioni matematiche. La consapevolezza argomentativa è uno delle abilità che si ripresenta, ovviamente, anche nei nuclei di processo. Non saranno trascurate le applicazioni della geometria nel disegno, nell'arte e nell'architettura e si consiglia l'uso di tutti gli strumenti operativi di cui si può disporre: riga e compasso, piegatura della carta, software di geometria,...Gli spunti storici proposti sono di particolare interesse per una riflessione epistemologica e filosofica che può coinvolgere anche insegnanti di altre discipline.

Alcune indicazioni metodologiche sulla didattica e il livello di complessità a cui attenersi per le proposte di lavoro e le verifiche per gli studenti, trovano un'ampia gamma di esemplificazioni nelle *attività* proposte. Sarà possibile sviluppare intorno ad esse percorsi didattici differenti, adattandoli di volta in volta alle diverse situazioni di classe. Comunque le *attività* rappresentano un momento significativo nel processo di insegnamento-apprendimento cui si riferisce il curricolo proposto,: sottolineano l'importanza che ha il "fare", e mettono in evidenza il ruolo fondamentale che ha la scelta di un "buon problema", significativo e motivante per lo studente, ricco di agganci, volti ad innestare una rete di collegamenti ad altri problemi e ad altre situazioni, per l'insegnante. Gli elaborati prodotti dagli studenti durante le attività potranno essere utili per una valutazione delle competenze disciplinari e trasversali.

Attualità del curricolo "La Matematica per il cittadino": Dati e Previsioni (Maria Gabriella Ottaviani)

Il curricolo proposto dal progetto "La matematica per il cittadino" ha tra le sue linee guida il concetto di competenza. E' questo un concetto complesso, tipico della società dell'Informazione, secondo il quale la competenza si può articolare in tre componenti: le "conoscenze", ossia i saperi specifici; i "saper fare", ossia l'utilizzazione del bagaglio di conoscenze acquisito; le "metaconoscenze, ovvero la gestione delle conoscenze, che dipende anche dalle caratteristiche e dalle abilità personali.
L'insegnamento al momento attuale è orientato verso le "conoscenze" e i "saper fare".
Il progetto "La matematica per il cittadino" propone l'idea di una "educazione matematica che contribuisce, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica". Con ciò si fanno entrare le "metaconoscenze". Sono queste che danno spazio allo studente, ossia al cittadino utente che deve essere aiutato nel processo di

costruzione della propria consapevolezza e capacità critica. Ciò avviene nel rispetto e con la collaborazione anche di altre discipline, fra cui la statistica.
La statistica, che fornisce la metodologia per lo studio quantitativo della realtà in cui viviamo, si avvale della matematica come strumento per lo studio dei fenomeni economici, sociali, demografici, biologici, sanitari, fisici, epidemiologici, ambientali, ecc. E' perciò in grado di offrire contesti reali in cui il linguaggio formale della matematica trova applicazione, nonché spunti didattici accattivanti e motivanti. Di ciò si è tenuto conto nel progetto.
Le proposte curricolari per i primi quattro anni della scuola liceale offrono una organizzazione adatta all'età degli studenti. *Dati e previsioni*, introdotti per essere affrontati in modo prevalentemente intuitivo nella scuola del primo ciclo, assumono nel secondo ciclo connotati più strutturatati. Sono messi in evidenza sia la possibilità di sintetizzare la distribuzione statistica semplice con una pluralità di valori medi tra i quali scegliere in modo opportuno, sia l'opportunità di misurare la variabilità di un carattere nel collettivo studiato. Lo studio della variabilità non è però fine a se stesso, ma ha uno scopo interpretativo. La sua giustificazione, perciò, richiede l'esame contemporaneo almeno di un secondo carattere, con un ruolo esplicativo. Ciò pone due problemi concettuali differenti: lo studio della interdipendenza fra due caratteri e lo studio, ma solo se entrambi i caratteri sono quantitativi, del loro variare simultaneo. Sono così introdotti il concetto di *connessione* e di *correlazione* (concordanza e discordanza) e la ricerca di una semplice espressione funzionale che descriva la legge di dipendenza fra le variabili osservate (*regressione lineare*).
Non a caso le conoscenze che riguardano la probabilità seguono in questo curricolo quelle di statistica. Ciò suggerisce come sia opportuno iniziare la trattazione di tale tema, avendo già a disposizione motivazioni ed esempi accattivanti che permettano di introdurre la probabilità, le sue proprietà di base e le prime regole di calcolo. Anche il passaggio dagli eventi alle variabili aleatorie è favorito da questo approccio che vede "semplici distribuzioni di probabilità" introdotte su una base ormai solida, offerta dallo studio delle distribuzioni semplici. Il concetto di probabilità condizionata e il Teorema di Bayes, a loro volta, hanno il proprio presupposto empirico nello studio delle distribuzioni doppie.
Dal punto di vista delle proposte didattiche conseguenti alla logica seguita nello strutturare il curricolo, le attività preparate per il nucleo "Dati e previsioni" – penso a "Arrivare a scuola", Di media non ce n'è una sola", "I grafici parlano", "Anche le rette raccontano" - hanno voluto mostrare come sia possibile integrare questo con gli altri nuclei, siano essi tematici o trasversali.
Statistica e probabilità si legano nel processo di insegnamento-apprendimento con i contenuti di *Numero e Algoritmi* (i dati sono numeri, che richiedono di venire elaborati per comprendere i fenomeni a cui si riferiscono), con *Spazio e Figure* (rappresentazioni grafiche), con *Relazioni e Funzioni* (studio di andamenti e legami fra variabili).
Dati e previsioni offrono inoltre proposte motivanti per *Misurare*, intendendo il termine anche in senso ampio, ossia come possibilità di trasformare "una qualità percepita in modo soggettivo"in una quantità oggettiva ("un numero"), per *Risolvere e porsi problemi* così come nascono nella vita quotidiana, per *Argomentare, Congetturare, Dimostrare* usando i numeri in modo consapevole ed avvertito.
Per quanto riguarda il "Laboratorio di matematica", *Dati e previsioni* offrono situazioni e contesti reali in cui inserire a ragion veduta l'uso di fogli elettronici e giustificano proposte di simulazione di modelli probabilistici col Computer.

Dunque la statistica può aiutare a sviluppare processi di insegnamento-apprendimento che, in modo semplice ed accattivante, inducono gli studenti a comprendere l'utilità della matematica stessa in molti aspetti del quotidiano.
Il nucleo *Dati e previsioni* e le corrispondenti attività mostrano anche come un insegnamento collaborativo della matematica e della statistica può contribuire a motivare gli studenti allo studio delle due discipline nel rispetto dei diversi tipi d'intelligenza di cui gli individui possono essere dotati: da quella logico-formale a quella intuitiva, da quella ordinato-descrittiva a quella emotiva, cosicché gli studenti abbiano modo di apprezzare sia il rigore della matematica sia la potenza del metodo statistico per lo studio quantitativo della realtà fenomenica.
Gli statistici sono disponibili a collaborare con quei docenti che nella scuola, vorranno fare proposte di insegnamento apprendimento che coinvolgano *Dati e previsioni.*

I nuclei trasversali (Ornella Robutti)

Oltre ai nuclei tematici, vi sono anche tre nuclei trasversali, centrati sui processi mentali degli allievi, che continuano anch'essi il percorso iniziato fin dalla scuola primaria, con l'aggiunta della parola "dimostrazione", attività chiave della matematica matura:

1. *Argomentare, Congetturare, Dimostrare;*
2. *Misurare;*
3. *Risolvere e porsi problemi.*

I nuclei di processo costituiscono una novità nei programmi della scuola italiana, in quanto, seppur presenti in parte di fatto in precedenti programmi, nella proposta dell'UMI trovano una esplicitazione effettiva del loro ruolo nella formazione matematica. Sono costituiti di competenze elencate con gradualità, che vanno a collegarsi con i contenuti dei vari nuclei tematici. Anche le attività proposte si pongono come obiettivo quello di presentare agli studenti situazioni problematiche in contesti, legate agli argomenti dei nuclei tematici.

Il primo, *Argomentare, Congetturare, Dimostrare* che in realtà è un nucleo misto, contiene anche alcuni argomenti di tipo logico e caratterizza le attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive a forme di pensiero più rigoroso e sistematico, in particolare alla dimostrazione, cuore del pensiero matematico stesso, come già è stato detto. Obiettivo di lungo termine del nucleo è quello di supportare gli studenti nella delicata evoluzione che li porta dall'argomentare al dimostrare, cioè dal discorso più o meno informale e intuitivo alla esplicitazione della relazione di conseguenza logica che lega le varie proposizioni di una dimostrazione. Si intende comunque evitare un'impostazione puramente formalistica delle attività dimostrative: il significato dei "connettivi logici" (se…allora, non, e, o, tutti, esiste, ecc.) va acquisito all'interno di attività in contesti esperienziali e non come addestramento alla manipolazione di segni dal significato più o meno misterioso.

Il secondo, *Misurare*, consente un approccio esperienziale e teorico alle grandezze, in collegamento con le scienze, per ricavare relazioni tra le grandezze esperite e costruire modelli di fenomeni studiati. La misura fa parte della vita quotidiana di adulti e ragazzi:

usando strumenti di misura, si possono raccogliere dati, da utilizzarsi con una varietà di tecniche, allo scopo di descrivere quantitativamente il mondo che ci circonda. Per questo occorre che gli studenti misurino diversi tipi di grandezze, progettando anche esperimenti di misura, per passare poi a descrivere quantitativamente i loro risultati, in un processo che dovrà portare, nella parte finale dei loro studi, a comprendere le differenze tra la misura come procedimento pratico, tipico delle scienze sperimentali, e la misura come teoria, tipica della matematica, collegata con i grandi nodi concettuali che l'hanno contraddistinta storicamente e che riguardano i numeri reali, l'analisi, la probabilità.

Il terzo, *Risolvere e porsi problemi*, offre agli allievi occasioni importanti per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi, per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza e per giungere all'uso di modelli matematici in contesti vari. La vita quotidiana e le proposte dei mezzi di comunicazione offrono sempre più l'opportunità di motivare gli studenti ad affrontare problemi, attività che non è, generalmente semplice. Non ci sono di solito procedure atte a dare una immediata risposta perché altrimenti saremmo di fronte ad un esercizio. Deve esserci però un terreno preparato per affrontare i problemi con profitto: le conoscenze disciplinari necessarie e, soprattutto, lo spirito giusto di chi vuol affrontare lo scontro (culturale) in campo aperto e senza una ricetta precostituita.

Il laboratorio di matematica (Domingo Paola)

Il mio intervento è finalizzato a presentare uno degli aspetti che ritengo maggiormente innovativi e significativi nelle indicazioni per la costruzione dei curricoli che la commissione UMI ha proposto.

Uno degli obiettivi del lavoro della commissione UMI è stato quello di cercare di ridurre i contenuti dei programmi, senza abbassare il livello culturale della proposta. Naturalmente il problema non si può risolvere solo decidendo se eliminare e o mantenere una determinata voce: si può invece risolvere creando le condizioni perché possano realizzarsi pratiche di insegnamento – apprendimento che consentano di evidenziare il carattere della matematica come scienza di forte unitarietà concettuale e culturale. La didattica del laboratorio di matematica ha una lunga tradizione e nono solo in Italia; la commissione ha scelto di indicare esplicitamente il ruolo di collante fra i vari argomenti che il laboratorio può svolgere; in altri termini, si tratta di un insieme di indicazioni su come si possano trattare i diversi argomenti previsti dai programmi in modo unitario e sensato (l'aggettivo sensato è da intendersi nella duplice accezione galileiana, oltre che in quella di ragionevole).

Mi limito qui a riassumere i principali ingredienti che deve avere un laboratorio di matematica

1. l'uso di strumenti come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenze; ovviamente quando si parla di strumenti non si hanno preclusioni preconcette tra strumenti poveri o ricchi, antichi o moderni: l'importante è che l'insegnante li utilizzi consapevolmente come mediatori nei processi di insegnamento – apprendimento.
2. La didattica lunga, meno preoccupata dell'acquisizione di certe tecniche, meno attenta a certi aspetti sintattici e decisamente finalizzata a garantire a tutti gli

studenti esperienze che consentano la costruzione di significati degli oggetti di studio. Tra l'altro tutto ciò può oggi essere facilitato con un uso sensato delle nuove tecnologie.

3. L'attenzione alle dinamiche di interazione sociale in classe, perché difficilmente si costruisce conoscenza senza comunicare con gli altri.

Il laboratorio non è quindi un luogo fisico, ma un ambiente di insegnamento – apprendimento che, metaforicamente, può essere paragonato alla bottega rinascimentale, dove si apprendeva facendo e vedendo fare, comunicando con i compagni oltre che per imitazione dell'esperto.

Concludo accennando a tre problemi che nascono nel laboratorio e dei quali si deve essere consapevoli:

a) gli spazi delle nostre scuole spesso poco adatti a una didattica laboratoriale;
b) la necessità di coinvolgere le famiglie in un progetto educativo che può essere fortemente innovativo, soprattutto per la priorità data a un approccio percettivo – motorio all'apprendimento rispetto a quello ricostruttivo – simbolico tipico della scuola italiana e non solo italiana;
c) la consapevolezza che, come insegnanti, dobbiamo innanzitutto rivolgerci al futuro cittadino, più che al futuro matematico. Questa consapevolezza implica la convinzione che prima di risolvere i problemi per le eccellenze dobbiamo risolvere quelli per tutti.

Quanto detto, in particolare l'ultimo punto, suggerisce l'opportunità di un'analisi puntuale, approfondita e coraggiosa dei grandi problemi con i quali dobbiamo oggi confrontarci. Senza quest'analisi che consenta innanzitutto di individuare i problemi veramente importanti, non ha molto senso progettare e realizzare un percorso educativo formativo in tutti i suoi aspetti, in particolare in quelli di individuazione, formazione e valutazione delle conoscenze e competenze essenziali .

COMUNICAZIONI

CONTINUITÀ TRA SCUOLA DELL'INFANZIA E SCUOLA ELEMENTARE A.S. 2003/04

Stefania Cotoneschi
(Lavoro con gli insegnanti di prima e seconda della scuola primaria e di scuola dell'infanzia dei Circoli 1 e 2 del Comune di Bagno a Ripoli-Firenze)

Curricolo di Matematica

Dopo l'entrata in vigore della L.53 per la riforma della scuola, ci preoccupa che la "personalizzazione" venga malamente interpretata e si perda la salvaguardia e la cura della ricchezza del bambino che cresce ed apprende, anche e soprattutto, attraverso le esperienze formative tra pari.
Di sicuro la scuola che vuole essere attenta alla personalizzazione deve predisporre una serie di esperienze che tengano conto delle diversità dei bambini in base alla loro provenienza, maturazione, motivazione, allo scopo di creare un ambiente di apprendimento funzionale ad una crescita armonica e in sintonia con la società nella quale si opera.

Abbiamo pertanto la necessità di individuare, come scuola autonoma, i nodi sui quali lavorare per favorire il formarsi di saperi informali e formali all'interno delle diverse aree disciplinari.

Per quanto riguarda l'area matematica, in relazione al lavoro Matematica 2001, elaborato dalla Commissione UMI, che riguardava la scuola elementare e la scuola media, prendiamo in considerazione i nuclei individuati in quel lavoro e cerchiamo di capire cosa può essere "trasferito" con la cautela e l'adattamento necessari, alla fascia di età 4-6 anni.

Ci sembra di poter individuare nel **Numero, nello Spazio, nella Misura, nelle Relazioni, e nei Problemi** i nuclei sui quali anche in questa fase precoce, si possa lavorare per preparare una serie di esperienze che ovviamente partano da situazioni reali complesse, dove l'insegnante possa individuare la valenza preparatoria alla disciplina, ma dove per il bambino si rimanga in una zona ancora non settorializzata. Siamo in quella fase del predisciplinare della quale tanto è stato scritto negli anni '80.
Nel curricolo di Matematica 2001, si distinguono nuclei tematici e nuclei trasversali; ci sembra che in questa fascia di età siano da considerare tutti nuclei trasversali in quanto non portano a competenze matematiche ben delineate, ma tutti favoriscono lo sviluppo di competenze trasversali che solo in un secondo tempo si specializzeranno diventando disciplinari.
In realtà ci sembra che il nucleo **problemi** assuma anche in questa fase una dimensione particolare, perché è quello che ci fornisce un modo di procedere, un approccio alla costruzione delle conoscenze che anche a questo livello di età, si potrebbe riassumere nel "fare per capire".
Riteniamo fondamentale valorizzare le esperienze scolastiche precedenti agli anni della scuola elementare e tutto quel settore di vissuto che i bambini portano a scuola attraverso la verbalizzazione e che spesso contiene importanti pre-concetti (idee che precedono la

formazione dei concetti) che costituiscono la base dalla quale partire per costruire nuovo apprendimento.
Per questo, è importante che si realizzino attività allo scopo di fare una ricognizione di tutto l'esistente nel patrimonio esperenziale del gruppo di bambini.
Come anche più avanti, ma in questa fascia di età è ancora più evidente, ogni alunno è un individuo assai diverso dagli altri dal punto di vista cognitivo, le capacità di espressione sono ancora in formazione ed è spesso difficile capire quale sia il nucleo di esperienze condivisibili e che abbiano un senso per quello che andiamo a fare insieme a scuola. La fase della ricognizione è pertanto molto delicata e dovrà essere svolta attraverso giochi e attività mirate; molto funzionali le interviste con i bambini che consentono agli insegnanti di ascoltare ognuno e adattare il linguaggio dell'adulto alle possibilità del bambino.

Ripetendo una esperienza che era stata fatta a Modena dal Nucleo di Ricerca Didattica dell'Università a cura della Prof.ssa M.G. Bartolini,[1] nel gruppo di Insegnanti di Scuola elementare e materna del Circolo 1 e 2 di Bagno a Ripoli abbiamo fatto una indagine per capire quali aspetti del numero siano presenti nei bambini da 4 a 6 anni. Abbiamo posto le seguenti domande:

Che cosa sono i numeri?
Chi li usa, a cosa servono?
Quanti sono?
Chi li ha inventati?

Quasi da tutti per poter realizzare le interviste sono state proposte anche attività di disegno e collage sempre sul tema dei numeri.

La maggior parte dei bambini ha mostrato di conoscerne l'esistenza e anche di saperli distinguere dalle lettere; solo alcuni dei più piccoli alla richiesta di ricercarli in pagine stampate li hanno confusi con lettere.

Fra le opinioni che abbiamo raccolto :

Cosa sono (la domanda è apparsa difficile…)
4-5 anni: Come delle lettere, cose che si scrivono, quelli per contare, quando si paga, quelli per scrivere,
6 anni: scritte tutte in fila, per riconoscere quante sono le cose, segni che servono per fare i conti, non so…se si va fuori e si vedono cose tutte uguali… servono per contarle, tipo le lettere ma invece che per scrivere sono per contare

Chi li usa
4-5 anni: il babbo, la mamma, i bambini, le persone, la gente, non li usa nessuno, i grandi, noi, chi forma i libri, le persone che cuciono, i bambini grandi
6 anni: quelli che contano, anche io per contare

A cosa servono
4 anni: per tagliare, per prenderli in mano, per dire ABC, per contare, per pagare, per chiamare i babbi, per leggere, per contare le candeline, per capire i giorni…

5 anni : per contare, per studiare, per giocare a nascondino, per contare quanti anni, per guardare le pagine, per una ricetta di cucina, per misurarsi, per contare i giorni e sapere che giorno è, per ricordare l'ora, per fare presto alla Coop…., per le fragole (Esselunga)…
6 anni: per capire se una cosa è 10, per il collare del cane, per accendere la TV, per sapere quanto tempo, quanti anni, per sapere la lunghezza di un numero, per contare, per ascoltare, per abbellire le cose, per fare i conti…

Quanti sono
4 anni: tanti, tutti, 1, 2, 50…, 10, conta fino a 14 e dice 10, troppi
5 anni: Infiniti, tanti, 98, non lo so, saranno 9, fino a così (mostrando le dita delle mani), mille, boh, tanti o pochi – non li so tutti, 100, 1000, tantissimi…
6 anni: 3 miliardi, tantissimi, all'infinito, ho scoperto che non finiscono, infiniti, tanti…poi ricominciano i milioni…

Chi li ha inventati
4-5-6 anni un uomo che ha insegnato a scriverli, io, noi, Dio, Gesù, il direttore, la mamma, la maestra, il babbo, i grandi, quelli che c'erano prima di noi, quelli della Coop, gli egiziani, quello che ha fatto il telefono, i computer…

Abbiamo fatto il confronto con quanto era stato ottenuto a Modena circa 20 anni fa e abbiamo notato che sostanzialmente gli aspetti presenti nell'esperienza dei bambini sono più o meno gli stessi ed anche le loro convinzioni; si può osservare che le esperienze legate al contesto degli acquisti e dei prezzi sono assai più presenti come pure l'uso del numero per il telefono.

Le esperienze più comuni sono legate a:

l'uso del calendario
misura del tempo – anni
soldi – prezzi
telefono
punteggi di giochi o sport
numero etichetta – autobus, numero di casa, numero telefonico associato a persona di famiglia.

Sono scarse le esperienze di conteggio vero e proprio e c'è da costruire il concetto di quantità.
L'aspetto ordinale e cardinale sono assolutamente indistinti.
Mancano esperienze di misura di grandezze diverse dal tempo.

Sulla base di queste indicazioni abbiamo fatto una ricognizione nel lavoro delle insegnanti, per individuare quali attività sono potenzialmente ricche allo scopo del predisporre un ambiente adatto all'acquisizione di conoscenze preparatorie alla matematica.

NUMERO

Attività	Verso le competenze
– Osservare gruppi di oggetti, distinguendo pochi, tanti, uno solo, nessuno. – Contare gruppi di oggetti toccandoli – Distribuire materiali in routine quotidiane: un pennello per uno, due fogli, un piattino, dare un barattolo ad ogni gruppo, sistemare 4 tovagliette su ogni tavolo… – Usare i dadi per giocare (oca, camminare avanti su una scala numerata) – Usare carte da gioco (ordinare, riconoscere quantità, operare uno in più) – Contare come filastrocca di numeri – Imparare filastrocche sui numeri (rappresentarle col disegno, con la drammatizzazione…) – Fare giochi cantati in gruppo (la coda del serpente, un elefante si dondolava…) – Costruire il calendario con presenze, e registrazione di eventi che riguardano il gruppo (per questa attività si raccomanda di non farla diventare noiosa, gestirla con buon senso in modo che sia vissuta da tutti con gioia e non come un peso)	Contare Contare e confrontare raggruppamenti di oggetti Leggere e scrivere i numeri Usare consapevolmente i numeri

SPAZIO

Ci sembra che altro nucleo di concetti assai importanti, per i quali è necessario predisporre esperienze apposite, siano quelli relativi allo spazio.
Nella ricognizione, fatta insieme agli insegnanti, di attività che vengono comunemente svolte con i bambini nella fascia di età che ci interessa, abbiamo rilevato che molti giochi motori, molte attività sociali hanno alla base schemi ed utilizzano strumenti che sono da ritenere utili allo sviluppo di una educazione spaziale.

Attività	Verso le competenze
– **Esperienze nel macrospazio: ambienti della scuola, del giardino** Percorsi agiti sulla base di una storia raccontata Percorsi agiti per imitazione con ostacoli o punti di riferimento costituiti da oggetti Percorsi rappresentati attraverso il disegno Percorsi effettuati attraverso istruzioni verbali Percorsi effettuati attraverso facili mappe Collocare oggetti sul tavolo, su scaffali, dentro armadietti, dentro scatoloni Posizionarsi per un gioco in una certa posizione Rappresentare posizioni di oggetti o persone Descrivere posizioni in relazione a punti di riferimento Descrivere oggetti in base alla forma e alla posizione Confrontare la rappresentazione col percorso e le diverse rappresentazioni fra loro, osservare e discutere problemi emersi. – **Esperienze nel microspazio** Percorsi di piccoli oggetti su "labirinti o modelli di paesi e case in miniatura" Posizione in relazione a punti di riferimento – **Esperienze su foglio** Uso di tabelle a doppia entrata (es. per la settimana, per le attività dei gruppi…) – **Esperienze con oggetti in movimento** Fare giochi in gruppo (girotondi, cerchi, trenini,…) Rotolamento Scivolamento Caduta …con macchinine, piccoli animali, palline… Rappresentare lo spostamento effettuato (la traccia di una chiocciola, i sassolini di Pollicino…)	Esprimere correttamente relazioni spaziali Orientarsi in ambiente conosciuto Rappresentare situazioni spaziali Scegliere e usare simboli per la rappresentazione Rappresentare una traccia di movimento Organizzare lo spazio del foglio

MISURA

Già nelle interviste sul numero sono emersi alcuni aspetti legati alla misura, che certamente fa parte del vissuto extrascolastico dei bambini infatti attività di misura sono assai comuni nella vita di tutti i giorni sia degli adulti che dei più piccoli.
Il campo di esperienza delle ricette è un settore assai stimolante per sviluppare capacità matematiche anche in età scolare della prima infanzia. Si riconosce bene in queste esperienze la necessità di comunicare e quindi rappresentare quantità e procedure. In queste attività inoltre si iniziano facilmente anche considerazioni sulle relazioni fra grandezze (è di più, è di meno, è tanto quanto…).
Le indagini all'interno del gruppo al fine di conoscersi meglio hanno anche una importante funzione relativa all'educazione alla diversità.
Interessanti sono anche quelle attività, tipo votazioni o indagini che si svolgono per fini di socializzazione e per cominciare a condividere regole e organizzazione.

Attività	Verso le competenze
Realizzare una ricetta per un dolce, per la pizza, per una macedonia… Illustrare la procedura Rappresentare le quantità scegliendo opportune unità di misura arbitrarie (tazze, cucchiai, panetti…) Utilizzare passi, gradini della spalliera in giochi di movimento, per misurare distanza, altezza Realizzare piccole indagini sul gruppo relativamente a preferenze o gusto (merende, animale preferito, gioco preferito, fiaba che piace di più…) Rappresentare con blocchi le "torri" relative ai dati raccolti e stabilire "dove di più" Votare per scegliere un gioco, un titolo, una canzone…	Compiere confronti diretti Effettuare misure per conteggio di grandezze unitarie.

RELAZIONI

Vale la pena di identificare anche qualche attività propria di questo nucleo, in quanto lavorando sul numero, sullo spazio, e sulla misura sicuramente emergono alcuni aspetti che meglio sono descritti con la terminologia propria di questo nucleo.

Attività	Verso le competenze
Classificare gruppi di oggetti in base ad una qualità, ordinare secondo una grandezza Formare gruppi di bambini secondo un criterio per formare squadre o gruppi	Cominciare a riconoscere le relazioni di ordine e di equivalenza

PROBLEMI

Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, questo è un nucleo molto importante nella fascia di età della scuola dell'infanzia. Si tratta di una serie di atteggiamenti e di comportamenti che vanno sviluppati e che necessitano di grande attenzione da parte degli insegnanti. Si tratta di situazioni didattiche ancora non formalizzate che si sviluppano soprattutto nella vita del gruppo, legate alla relazionalità o all'organizzazione. Si tratta di abituare i bambini a riflettere sulle domande che emergono, a capire bene cosa ci mette in uno stato di disagio cognitivo o difficoltà di capire bene il significato di un certo evento o situazione. È fondamentale cercare di riconoscere il problema, di esprimerlo a parole, di organizzarsi per mettere in atto strategie che portino a qualche soluzione. È molto importante esprimere le proprie idee in proposito, rimanendo aderenti alla situazione problematica, le ipotesi che rispondano o cerchino di rispondere alla domanda "come si potrebbe fare per..." Questo nucleo, a questo livello di età, è fortemente legato con l'educazione affettiva, con la costruzione della propria autostima, con la presa di coscienza dei propri limiti, con l'abituarsi ad accettare punti di vista diversi. È quindi fondamentale lavorare in questa area per costruire le basi per la formazione futura.

Attività	Verso le competenze
Con la discussione: Riconoscere situazioni problematiche, descriverle, individuare bene le informazioni e cosa serve per la soluzione Riconoscere la stretta connessione tra problema e soluzione Discutere sulle possibili strategie di soluzione e confrontarle in base alla rapidità, alla convenienza Riconoscere che alcuni problemi non si possono risolvere per accettare i propri limiti Affrontare problemi relativi alla vita di relazione: organizzazione del gruppo mensa, turni, rotazioni in attività particolarmente gradite Individuazione di criteri e strumenti che favoriscano lo star bene insieme senza litigi o gelosie. Riconoscere attraverso la conversazione quali sono i problemi che ognuno affronta in famiglia e che soluzioni si trovano di volta in volta *(Il babbo ha perso le chiavi della macchina…)* Riconoscere in storie appositamente scelte: l'ambiente, il personaggio principale, il problema, le diverse fasi, la soluzione Problemi legati alle quantità: distribuzione di cioccolata, dolci, bevande, materiali per giochi Problemi legati all'organizzazione dello spazio: organizzare un ambiente per una attività Problemi legati al tempo: turni, rotazioni Registrazione delle soluzioni per averne memoria nel tempo e per comunicarle	Porre problemi attraverso la verbalizzazione Individuare dati e informazioni Fare ipotesi e verificarle Confrontare situazione diverse Trovare modalità di comunicazione, registrazione e rappresentazione

Bibliografia:

1. M.Bartolini Bussi (a cura di), Esperienze di matematica nella scuola dell'Infanzia verso il concetto di numero – CDE Comune di Modena Rapporto tecnico n.9, 1985

2. Matematica 2001, la matematica per il cittadino. MIUR, Dir. Gen. Ordinamenti Scolastici, UMI, SIS, Liceo Vallisneri Lucca.

3. Orientamenti per la Scuola dell'Infanzia, D.M. 3 giugno 1991 *(G.U. 15-6-1991, n. 139)*

3. Indicazioni Nazionali per i Piani Personalizzati delle Attività Educative nelle Scuole dell'Infanzia, nov. 2002

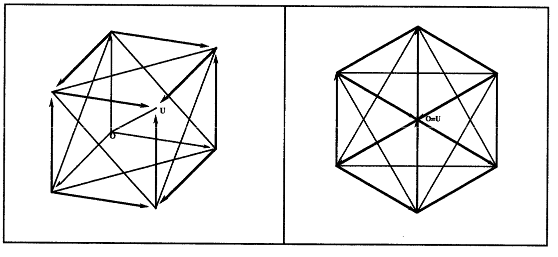
OMBRE DI CUBI IN DIMENSIONI QUALSIASI E UN NUOVO SOLIDO CHE TASSELLA LO SPAZIO

Mario Barra

Posso presentare soltanto pochi esercizi che ritengo utili a sviluppare la capacità di saper individuare nei casi particolari ciò che è vero in generale.

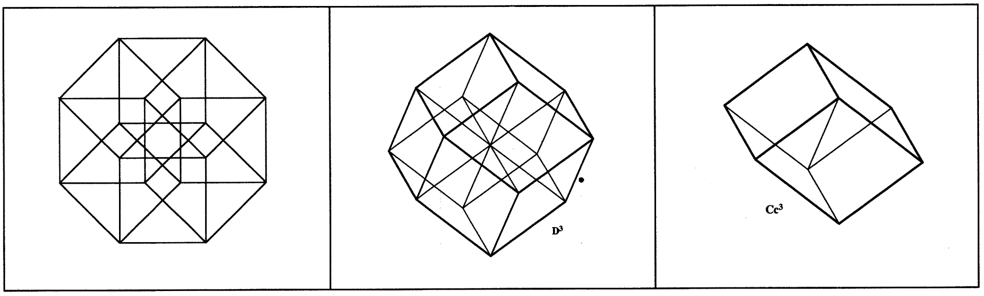
Dati tre versori unitari dello spazio delle coordinate cartesiane ortogonali, $\vec{x}_i$, i=1,2,3, il cubo di spigolo unitario, $C^3_1=\{(x_1,x_2,x_3):0\le x_i\le 1,\ i=1,2,3\}$, può essere individuato dalle 3! permutazioni dei 3 versori, che indicano i percorsi sugli spigoli di C^3_1, che vanno dall'origine degli assi al punto U=(1,1,1).

La proiezione ortogonale, $\underline{C}^3_1$, di C^3_1, secondo la direzione $x_1=x_2=x_3$, sul piano $x_1+x_2+x_3=0$, individua le proiezioni $\underline{\vec{x}}_i$ dei versori $\vec{x}_i$ e mantiene le lunghezze, pari a $\sqrt{2}$, delle 3 + 3 diagonali delle facce del cubo C^3_1, che sono lati dei triangoli equilateri delle intersezioni di C^3_1 con i piani $x_1+x_2+x_3=1$ e $x_1+x_2+x_3=2$, che sono paralleli al piano di proiezione. Per questo motivo e per simmetria, le 3 proiezioni $\underline{\vec{x}}_i$, i=1,2,3, debbono formare, a coppie, angoli uguali, cioè di 120° = arcos($-\frac{1}{2}$). $\underline{\vec{x}}_i$, i=1,2,3, possono essere determinati come i "raggi" di un triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$, $T^2_{\sqrt{2}}$, di lunghezza $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, cioè come i 3 vettori che uniscono il centro di $T^2_{\sqrt{2}}$, con i suoi 3 vertici.

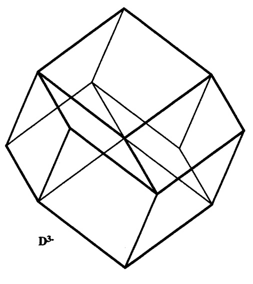


$\underline{C}^3_1$ può essere individuato dalle proiezioni delle 3! successioni di versori considerate inizialmente, cioè dalle 3! permutazioni dei 3 raggi di $T^2_{\sqrt{2}}$. Queste successioni indicano che $\underline{C}^3_1$ è un esagono regolare, D^2, di area $\sqrt{3}$, cui si aggiungono i 6 raggi dei due citati $T^2_{\sqrt{2}}$ che contiene. Le proiezioni dei 6 quadrati di C^3_1 corrispondono, in $\underline{C}^3_1$, ai sei rombi, $Cc^2_{\sqrt{2}/\sqrt{3}}$, individuati dalle 3+3 coppie di successioni di raggi che hanno uno stesso raggio (che ne indica la diagonale minore) in prima o in terza posizione. Dunque i rombi hanno la diagonale minore e i lati lunghi come ciascun raggio. Tre rombi si sovrappongono agli altri 3, individuando dei triangoli equilateri. I triangoli, i rombi e l'esagono tassellano il piano, ad esempio perché ciascuna delle 6 tassellazioni con i rombi, corrisponde alla proiezione, già indicata, della tassellazione piana dei quadrati situati sui piani $x_i=0$, e $x_i=1$, i=1,2,3, appartenenti alla tassellazione dello spazio R^3 che ha per modulo C^3_1.

Quanto detto si può ripetere in dimensione qualsiasi, considerando le (d+1)! permutazioni dei raggi di un ipertetraedro a d dimensioni, che formano a coppie angoli pari a arcos$(-\frac{1}{d})$. In particolare, l'ombra, ottenuta in modo analogo a quanto indicato, di un ipercubo quadrimensionale, C^4_1, è costituita dal famoso dodecaedro rombico D^3, di volume $\sqrt{4}=2$, cui si aggiungono gli assi dei due tetraedri che contiene. D^3 è individuato dalle 4! permutazioni dei 4 raggi, lunghi $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$, di un tetraedro regolare $T^3_{\sqrt{2}}$ formanti a coppie angoli pari a arcos $(-\frac{1}{3}) \cong 120°28'$ (è l'angolo di Maraldi presente nei rombi sul fondo delle celle delle api, e negli stupendi cristalli dei granati). Il dodecaedro rombico $D^3_{\sqrt{3}/\sqrt{4}}$ di spigoli $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$, viene usualmente costruito attraverso le piramidi che uniscono il centro di un cubo C^3_1 con le sue 6 facce, facendo aderire i 6 quadrati delle piramidi alle facce di un altro C^3_1.



Ora, si scoprono nuove proprietà. D^3 può essere costruito in infiniti modi, ad es.: con due tetraedri e un ottaedro, regolari e con facce uguali, facendo aderire sulle facce dell'ottaedro, i triangoli equilateri dei tetraedri isosceli che uniscono i centri dei tetraedri regolari con le loro facce. Le ombre degli 8 cubi contenuti in C^4_1 si individuano, ciascuna, in D^3, attraverso le 6 permutazioni dei raggi che iniziano o terminano con uno stesso raggio (e fra queste 6, le facce ..., come già detto in D^2), individuando dei solidi , **Cc**$^3_{\sqrt{3}/\sqrt{4}}$ ("**C**ubi **c**ompressi"), con la diagonale minore uguale allo spigolo e volume 1\2, che, direttamente o con le loro intersezioni, tassellano lo spazio, ... In questo modo si trova un nuovo solido, $D^{3-}_{\sqrt{3}/\sqrt{4}} = D^3_{\sqrt{3}/\sqrt{4}} - 2Cc^3_{\sqrt{3}/\sqrt{4}}$: che tassella lo spazio, è concavo, ha simmetria centrale, ha 12 facce uguali e <u>non</u> regolari, le stesse di D^3, ed ha volume unitario.



Analogamente, troviamo negli ipersolidi moltissime indicazioni utili per il nostro spazio tridimensionale, relative ad argomenti impensabili, come la probabilità, il calcolo combinatorio, la teoria dei numeri, l'analisi numerica e l'equiscomponibilità dei poliedri.

FUNZIONI E DISEQUAZIONI: PROVIAMO CON LE CALCOLATRICI GRAFICHE

Cristiano Dané
(Liceo scientifico A. Volta – Torino)

L'utilizzo delle calcolatrici grafiche nell'attività di insegnamento-apprendimento della matematica induce a ripensare ai contenuti e alle metodologie delle proposte didattiche. In particolare è importante chiedersi se l'uso delle calcolatrici grafiche determina un cambiamento nella matematica che insegniamo, nel momento in cui la insegniamo, nelle competenze che si sviluppano e nell'atteggiamento degli studenti verso la matematica.
Lascio queste domande come sfondo, limitandomi a esporre una parte della mia esperienza in classe.
Nell'a.s. 2002/2003 ho avuto modo di fornire a ogni studente di una terza liceo scientifico tradizionale una calcolatrice grafica TI-83; i ragazzi erano liberi di usarla sia a scuola che a casa durante l'intero anno scolastico. La presenza di questo struemento ha reso naturale privilegiare il ruolo delle funzioni all'interno del percorso didattico. In particolare la possibilità di esplorare contemporaneamente grafici, tabelle e simboli (Figura 1) ha consentito di affrontare le disequazioni basandosi su continue esplorazioni dei tre ambienti senza privilegiarne uno in particolare.

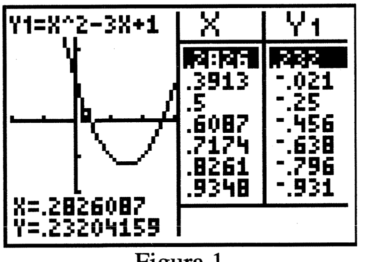


Figura 1

Dopo il ripasso delle disequazioni di secondo grado abbiamo studiato quelle di grado superiore al secondo e le disequazioni irrazionali. Gli studenti dovevano riportare sul quaderno i grafici significativi effettuati con la TI-83 e risolvere le disequazione stimando i risultati numerici. Son stati proposti numerosi casi in cui è richiesta un'analisi critica del grafico standard tracciato dalla calcolatrice. Ad esempio, in Figura 2 si osserva il grafico di $y=-x^3+x^2+x+0.1$, i ragazzi devono essere in grado di prevedere l'esistenza di uno zero "nascosto" e operare opportuni zoom per visualizzarlo (Figura 3).

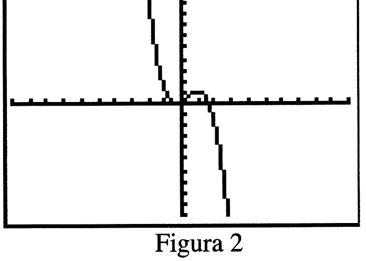


Figura 2

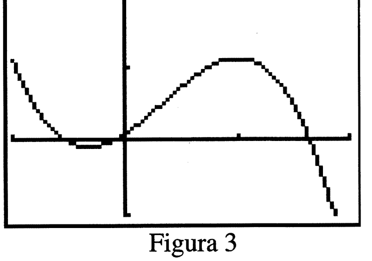


Figura 3

Il percorso è proseguito sfruttando la composizione tra le funzioni radice e le funzioni polinomiali per ampliare notevolmente la gamma di grafici che gli studenti erano in grado di interpretare e di tracciare qualitativamente con carta e penna..

Ma il "tormentone" che ha caratterizzato questa esperienza è stata la ricerca dell'espressione analitica di funzioni il cui grafico è assegnato.
La prima attività di questo tipo è stata la ricerca di una funzione il cui grafico riproducesse la famosa M, logo della nota catena di fast food.
Dopo aver proposto l'attività agli studenti, si è dato loro tutto il tempo per provare con le TI-83, quindi si è aperta una discussione durante la quale son state proiettate attraverso il view-screen le varie proposte.
Dopo poco si è deciso che una buona approssimazione è data dalla funzione
y=2*(-x^2+4*abs(x)).
Ma a questo punto occorre porre delle limitazioni al dominio; come fare? L'idea risolutiva è stata quella di aggiungere e togliere una funzione radice.
Dopo alcuni tentativi abbiamo deciso che il risultato migliore (Figura 4) si ottiene con la funzione y=2*(-x^2+4*abs(x))+sqrt(18-x^2)-sqrt(18-x^2).

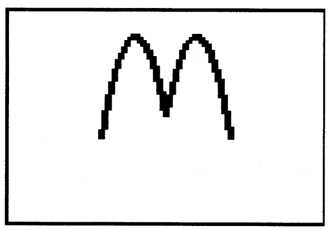


Figura 4

Altri esempi studiati in classe sono riprodotti nelle figure seguenti. Questa volta si chiedeva di riconoscere le funzioni che costituivano le varie parti del grafico e di trovarne l'espressione analitica.

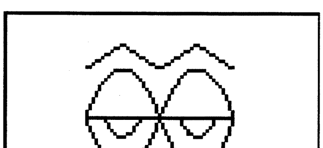


Figura 5

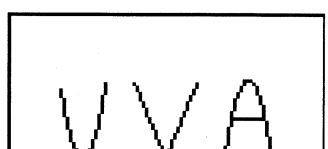


Figura 6

Non scendo nei dettagli del percorso complessivo e dei risultati ottenuti, mi limito solamente a evidenziare l'atmosfera vissuta in classe che è stata profondamente diversa da quella usuale: studenti e insegnante hanno collaborato nella ricerca delle soluzioni, proponendo ipotesi, vagliandole e arrivando a un risultato condiviso; i ragazzi e le loro azioni sono stati protagonisti e l'insegnante è stato il regista o lo sceneggiatore.
Ma tutti ci siamo divertiti!

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE E COMPUTER GRAPHICS

Carmelo Di Stefano(Liceo Scientifico “E. Vittorini” di Gela)

L’insegnamento della Matematica, in Italia, appare quasi sempre del tutto distaccato dalla realtà.
Anche studenti bravi e in possesso delle corrette conoscenze, trovano difficoltà a matematizzare semplici problemi reali.
Tale problema è stato avvertito in modo particolare in anni recenti, come testimoniato dall’ultima proposta dell’UMI, in cui si parla, finalmente, di una “matematica per il cittadino”.
In questo ordine di idee vogliamo mostrare alcune applicazioni delle trasformazioni geometriche alla computer graphics.
In tal modo si puù comprendere meglio cosa significa rappresentare una funzione o una figura geometrica utilizzando apposito software, che spesso invece viene utilizzato senza le opportune chiavi di lettura.
In un monitor ogni immagine si ottiene colorando opportunamente i pixel. Ci sono diverse modalità.Le più usate sono: RGB (Red Green Blue): ogni colore è composizione di tre diversi apporti.HSL (Hue Saturation Luminance): si basa sulla percezione dei colori da parte dell’occhio umano in base a tonalità, saturazione e luminanza.Tonalità è il colore riflesso da un oggetto; saturazione la sua intensità; luminanza la quantità di luce percepita presente nel colore. In entrambi i casi dobbiamo scegliere tre numeri fra 0 e 255. Quindi possiamo avere un totale di (2^8)^3 = 2^24, circa 16,7 diversi milioni di colori. Quindi la funzione che associa a un punto del piano un colore è una funzione definita e a valori su

$$[0, 639] \times [0, 479] \times [0, 255] \times [0, 255] \times [0, 255].$$

Se vogliamo interpretare un effetto grafico su un oggetto come una trasformazione geometrica, dobbiamo concentrarci solo sui primi due parametri. Effettuare il semplice effetto grafico noto come “immagine negativa”, equivale ad applicare la funzione:

$$f(x, y, r, g, b) = (x, y, 255 - r, 255 \text{ ö } g, 255 - b)$$

Dal punto di vista geometrico la funzione è l’identità: $i(x, y) = (x, y)$. Da quello “estetico” è una trasformazione involutoria. Anche se non ha senso applicare concetti geometrici a fattori che di geometrico non hanno nulla, come il colore, la legge di applicazione:

$$s(r, g, b) = (255 - r, 255 - g, 255 - b)$$

è una simmetria centrale in un sottoinsieme di N^3 di centro (255/2, 255/2, 255/2). Un altro esempio interessante è lo screen saver detto Testo scorrevole, consistente nella visualizzazione di un testo a nostro piacere che si sposta orizzontalmente per lo schermo.Come viene realizzato questo scorrimento? Applicando più volte una traslazione. Ancora un’applicazione interessante si ha nella tecnica che simula l’avvicinamento di un oggetto, che, nella sua applicazione più semplice consiste nel mostrare in breve successione immagini ingrandite o rimpicciolite dell’oggetto stesso.Da un punto di vista matematico stiamo effettuando quella che si chiama una similitudine. La questione è perciò quella di determinare le leggi di una generica similitudine. Cosa che può farsi per esempio sfruttando un opportuno software di computer algebra. Ancora una diffusa applicazione grafica si ha nello zoom, ossia nell’ingrandire la stessa figura, rappresentandola sempre in un ambiente di uguali dimensioni. Supponiamo di volere effettuare uno zoom X 2. Dal punto di vista delle trasformazioni geometriche, effettua uno zoom X 2, l’omotetia di leggi:

$$d(x, y) = (2x, 2y).$$

Il nostro piano di riferimento è in realtà formato da un solo quadrante, quindi le leggi dell'omotetia saranno altre. Se Mx sono il numero di pixel sull'orizzontale e My quelli sulla verticale, il centro sarà in posizione (Mx/2, My/2).Un effetto apparentemente uguale allo zoom, ma in effetti molto diverso è il cosiddetto ridimensionamento di un'immagine. Le leggi stabilite prima sono corrispondenze biunivoche, quindi a n x n punti ne associamo altrettanti, in questo caso invece a n x n punti dobbiamo associarne (h x n) x (h x n).Per approfondimenti si può consultare [D]

Bibliografia.

[D] C. Di Stefano, *Trasformazioni e computer graphics*, Archimede, Anno LVI, Aprile ö-Giugno 2004.

SUPPORTI DIDATTICI DA ANTIQUARIATO? LA "MACCHINA DI GALTON" PER L'APPRENDIMENTO DI CONCETTI STATISTICI

Judit Jassó[1] (judit.jasso@stat.unipg.it),
Maria A. Pannone[2] (pannone@stat.unipg.it)

Nell'800, in un'epoca senza calcolatori elettronici, grazie all'ingegno di un grande studioso e abile divulgatore come sir Francis Galton, veniva escogitato un dispositivo che simulava l'estrazione di campioni da una distribuzione bernoulliana, in grado di colpire anche un pubblico di non "addetti ai lavori" e di avvicinarli al significato e alle implicazioni del teorema di De Moivre - Laplace che stabilisce il legame tra la distribuzione binomiale e la normale.

Nell'epoca attuale, in cui i software statistici - e anche i fogli di calcolo - hanno tra le loro funzionalità quella della simulazione del campionamento da varie distribuzioni di probabilità, si potrebbe pensare di non avere più bisogno di "supporti didattici da antiquariato". Ma nella pratica didattica oggi, come ai tempi di Galton, la potenza di un'attività concreta che colpisca visivamente in modo più diretto che un tabulato di valori numerici è di indiscutibile valore.

L'ipertesto "La Macchina di Galton", sviluppato da J. Jassó, E. Lombardo e M. A. Pannone (2003), è un sussidio didattico sulla distribuzione normale incentrato sulla figura di Galton e sul dispositivo da lui inventato. L'ipertesto è pubblicato nel sito del CIRDIS (http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/index.html).

"La Macchina di Galton" è un ambiente di apprendimento interattivo in cui lo studente è, tra l'altro, incoraggiato a "giocare" con una versione virtuale del "quinconce" ed a riflettere sulle sue caratteristiche. Dai dati che egli potrà raccogliere ed analizzare e dalla lettura delle pagine dell'ipertesto egli potrà così "scoprire" notizie e fatti sulle distribuzioni binomiale e normale.

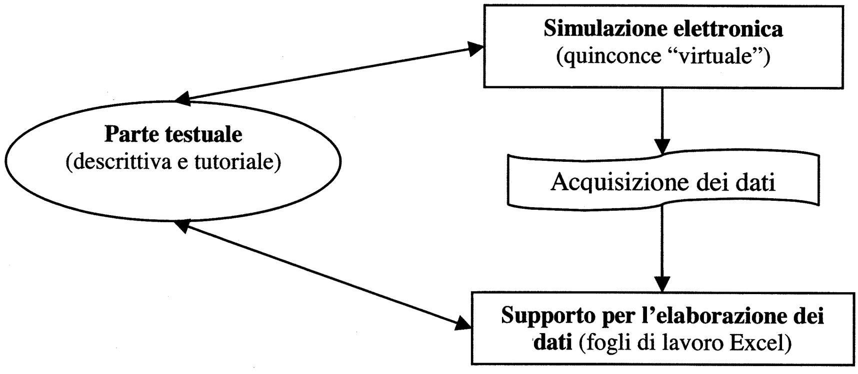
Nella progettazione dell'ipertesto si è voluto tener conto dell'importanza di dare agli studenti una visione storica della statistica. Per questo, oltre all'inserimento di diverse note storiche e di una biografia dettagliata di Galton, l'ipertesto torna agli scritti originali di Galton e li rivisita, arricchendone le potenzialità divulgative con i mezzi consentiti oggi dalle nuove tecnologie. La lettura di documenti scientifici originali dà, infatti, una visione della scienza nel suo "status nascendi" e contribuisce a migliorare la comprensione dei concetti e a mantenere vivo l'interesse degli studenti.

Così, è Galton stesso a guidare lo studente nella sua esplorazione: le parole che egli usò per descrivere il suo macchinario nelle opere *Typical Laws of Heredity* (1877) e *Natural Inheritance* (1889) fanno da sottofondo nelle pagine principali dell'ipertesto.

Il prodotto, progettato per consentire una navigazione ipertestuale, è in realtà un sistema più complesso in cui interagiscono diverse componenti, come è mostrato nella figura seguente.

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli studi di Perugia.
[2] Dipartimento di Economia, Finanza e Statistica, Università degli studi di Perugia.

Struttura dell'ipertesto "La macchina di Galton



Rispetto ai contenuti, l'ipertesto è composto da tre sezioni principali: *Il Quinconce*, *La curva normale* e *I protagonisti.*

Inizialmente si cerca di stimolare la curiosità degli studenti ponendo delle domande per focalizzare l'attenzione sulle caratteristiche ed il funzionamento del quinconce, la cui descrizione è lasciata a Galton. Successivamente, essi sono invitati a fare delle prove con il quinconce virtuale ed a "ragionarci sopra" per costruire, passo dopo passo, la distribuzione binomiale come modello matematico che descrive la disposizione finale delle palline. Alla conclusione della prima sezione è presentato il passaggio dal modello discreto a quello continuo: "*The outline of the columns would become more nearly identical with the Normal Curve of Frequency, if the rows of pins were much more numerous, the shot smaller, and the compartments narrower; also if a larger quantity of shot was used*" (Galton, *Natural Inheritance,* 1889).

"*La curva normale*" è il titolo della sezione dedicata a questa importante funzione ed alla distribuzione di probabilità a cui dà luogo. Oltre alle sue proprietà matematiche formali, lo studente vi troverà le principali notizie storiche che la riguardano, delle notazioni sull'uso del termine "normale" in statistica e delle pagine dedicate alla "regressione verso la media". Per apprezzare l'importanza della distribuzione normale sono presentati anche alcuni esempi di applicazioni della distribuzione normale in fisica, biologia, medicina.

Lo scopo della sezione "*I Protagonisti*" è di suscitare curiosità sulla vita delle persone che sono direttamente collegabili alla "storia della macchina di Galton": Pascal, Bernoulli, De Moivre, Laplace, Gauss, Quetelet, Galton, Pearson. I loro nomi sono presentati in un diagramma temporale, a partire dal quale si possono consultare le loro biografie.

Riteniamo che l'ipertesto possa essere utile in molte attività didattiche che usualmente si svolgono nell'ambito dei programmi delle scuole superiori: esso permette di collocare storicamente la genesi e lo sviluppo della distribuzione normale, di collegare concetti di analisi, combinatoria, probabilità e statistica, di utilizzare simulazioni e fogli di calcolo elettronici in maniera interattiva. In tal modo può contribuire ad avvicinare gli studenti alle problematiche delle applicazioni della matematica al mondo reale e a suscitare interesse e curiosità nei confronti del metodo induttivo.

CONFRONTO, CONDIVISIONE, OSSERVAZIONE, SPERIMENTANDO UN ITINERARIO DI GEOMETRIA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Margherita Motteran[1]

Confrontarsi, riflettere, costruire insieme: queste azioni potrebbero fornire una chiave per compiere scelte didattiche più adeguate alle attitudini degli alunni, per adottare metodologie d'insegnamento più efficaci, per rendere più omogenea la preparazione degli allievi?

Con questi obiettivi, un gruppo di docenti della scuola secondaria di primo grado, riuniti in un gruppo di ricerca dell'IRRE Veneto[2], ha iniziato ad incontrarsi per costruire e sperimentare nelle proprie classi un itinerario didattico di geometria. Al suo esordio, nell'anno scolastico 2003/2004, la sperimentazione ha coinvolto trenta prime classi (quasi seicento alunni) di province diverse del Veneto, nelle quali è stata somministrata la prova d'ingresso. Verso la metà del primo quadrimestre, alcuni docenti hanno ritirato la loro partecipazione all'iniziativa principalmente perché hanno ritenuto opportuno mantenere la consuetudine di dedicare l'attività didattica del primo anno della scuola secondaria esclusivamente, o quasi, allo svolgimento di argomenti di aritmetica. Pertanto, nel secondo quadrimestre, questa sperimentazione ha coinvolto quattordici classi (circa trecento alunni).

La valutazione è il cardine di questa sperimentazione.

Con essa, s'intende tenere in stretto collegamento l'azione del docente e quella dell'allievo. Infatti, le prove di verifica e le griglie di valutazione sono state costruite tenendo conto degli obiettivi esplicitati nel curriculum e le informazioni sull'apprendimento degli alunni ottenute con esse hanno influito sulla definizione dei contenuti e dei tempi da assegnare allo svolgimento dei singoli argomenti, che sono stati precisati progressivamente, tenendo conto delle Indicazioni ministeriali e di "Matematica 2001", il volume della commissione UMI-CIIM.

Dopo un confronto serrato, è prevalsa la convinzione che durante il primo anno della scuola secondaria sia opportuno focalizzare l'attenzione su pochi argomenti per favorire l'uso corretto del linguaggio, la comprensione del significato e l'acquisizione di un metodo di studio più efficace; tuttavia, per non limitare la libertà d'insegnamento, è stato deciso di lasciare ai singoli docenti la facoltà di svolgere un programma più ampio. Non è stato possibile, infatti, uniformare il tempo da assegnare allo sviluppo di argomenti di geometria, che nella consuetudine didattica dei docenti del gruppo era, presumibilmente, compreso fra 15 e 60 ore variamente distribuite nell'arco del primo anno della scuola

---

[1] IRRE Veneto

[2] Componenti del gruppo:
Raffaella Bottazzo, S.M.S. "Marco Polo", Carmignano di Brenta (PD); Giuseppe Candido, S.M.S. "Tartini", Padova; Chiara Laveder, S.M. "Don Bosco", Padova; Marilena Lancellotti, S.M.S. "Nicolò da Conti", Sottomarina (VE); Marina Nicolodi, S.M.S. "Marin", Adria (RO); Patrizia Pelli, S.M.S. "Rocca", Feltre (BL); Loretta Rappo, I.C. "Torri", Torri di Quartesolo (VI); Teresa Pinto, I.C. "Bizio", Longare (VI); Stefania Ricci, S.M.S. " Rocca", Feltre (BL); Lucia Rocco, I.C. di Trichiana, sede Limana, Trichiana (BL); Teresa Zaia, Scuola Secondaria di primo grado, Orsago (TV).

secondaria. L'accordo raggiunto prevede che, durante il primo anno, si trattino le rette e gli angoli, limitando lo studio dei poligoni al problema della loro costruibilità.
La prova d'ingresso ha riservato una sorpresa: un numero rilevante di alunni ha risposto alla richiesta di visualizzare i dati di alcuni problemi in modo errato (36%) o con l'astensione (25%). Nei quesiti in cui l'uso di un disegno era stato solo suggerito, le rappresentazioni grafiche si riscontrano soltanto nel 16% delle prove. Sono state notate, inoltre, sia un'elevata correlazione lineare tra le risposte corrette alla richiesta di visualizzare i dati e il punteggio complessivo di ogni allievo (circa 0,8) sia, dopo la suddivisione degli alunni in quartili secondo il risultato conseguito da ciascuno nella prova, una percentuale rilevante di risposte mancate nelle prove degli allievi inseriti nel quartile più basso. Si è deciso, quindi, di sollecitare gli alunni ad utilizzare il disegno nell'attività matematica. Le due prove successive hanno mostrato un miglioramento dei risultati in questa abilità (figura 1), soprattutto negli alunni con maggiori difficoltà in questa disciplina (figure 2 e 3).

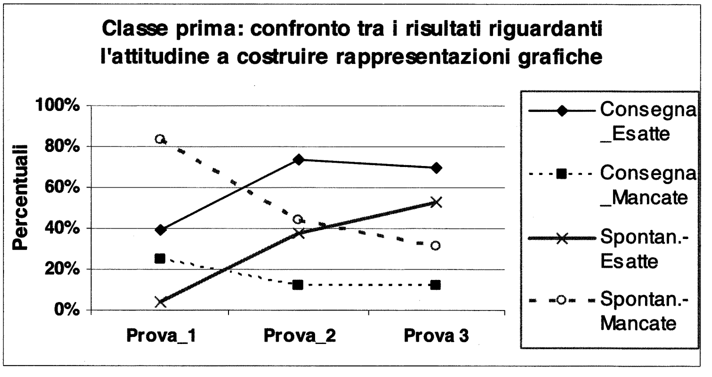


Figura 1

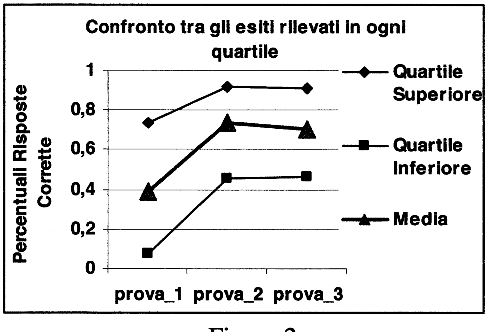


Figura 2

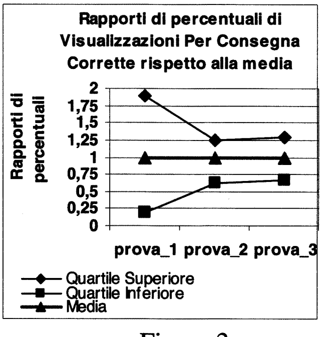


Figura 3

Esiti analoghi a quelli appena descritti sono stati rilevati nei due anni scolastici successivi, durante i quali questa sperimentazione ha coinvolto altre classi – perciò sono disponibili dati riguardanti circa 1300 alunni - e altri docenti. Appare quindi ragionevole ritenere che, all'inizio della scuola secondaria di secondo grado, gli allievi abbiano poca consuetudine con l'uso di disegni in matematica e scarsa convinzione circa l'utilità di rappresentare graficamente dati e oggetti. D'altra parte, le correlazioni con i livelli di apprendimento

rilevate mostrano che questa abilità contribuisce a migliorare il profitto ed è quindi opportuno sollecitarne l'acquisizione.
I docenti coinvolti nella sperimentazione hanno anche osservato che parecchi alunni, di fronte a frasi del tipo "Se lo ritieni opportuno rappresenta i dati del problema con un disegno", hanno chiesto se c'era l'obbligo di disegnare. Per questo e per altri motivi, secondo gli insegnanti, appare ragionevole pensare che questi alunni sono stati abituati ad eseguire molto più che a decidere e che le richieste esplicite a valutare l'utilità di fare o no un disegno possano favorire l'autonomia di giudizio. Per questi motivi sono state costruite schede di lavoro atte a sollecitare nei ragazzi un uso ragionato del disegno[1].
Nel corso della sperimentazione si è rilevato che molti allievi incontrano difficoltà anche nella comunicazione attiva, ma in questo settore sono stati registrati miglioramenti meno sensibili (Figura 4).

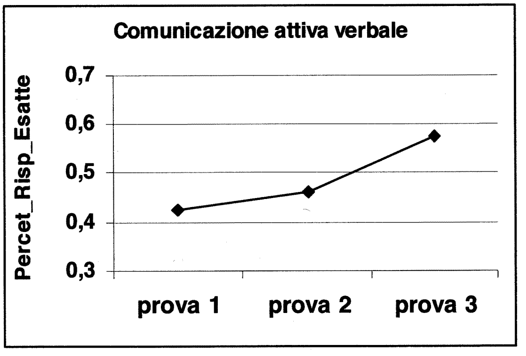


Figura 4

Questa attività ha evidenziato che è molto difficile modificare le consuetudini didattiche dei singoli docenti, perché le radici di esse sono tanto profonde da frenare anche il desiderio d'innovazione. In particolare, risulta molto difficile spostare l'indice d'attribuzione di rilevanza dai contenuti alle abilità e far acquisire gli strumenti essenziali per un efficace uso della valutazione nella didattica. Inoltre, parecchi insegnanti sembrano incontrare difficoltà anche nella costruzione di piani didattici che tengano conto del tempo realmente disponibile nell'arco di un intero anno scolastico, evitando di trascurare lo svolgimento di argomenti che hanno come difetto principale quello di essere affrontati verso la fine delle lezioni. I fatti osservati e i quesiti posti dai docenti nel corso di questa sperimentazione sembrano indicare chiaramente che l'insegnamento della matematica non può essere rinnovato, né migliorato, se non si promuovono iniziative di formazione in servizio mirate, qualificate, continuative, visibilmente collegate con l'attività professionale, e atte a promuovere il confronto fra i docenti e a valorizzarne l'impegno e la competenza professionale.

[1] I materiali didattici prodotti per questa sperimentazione sono in corso di pubblicazione.

IL LINGUAGGIO SIMBOLICO DELL'ALGEBRA COME STRUMENTO DI PENSIERO

Antonella Montone, Michele Pertichino
(Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Bari)

Introduzione

Sono ben noti tutti i problemi e le difficoltà legate all'insegnamento e all'apprendimento dell'algebra ed in particolare al calcolo letterale. Una vasta letteratura italiana e internazionale ha, negli ultimi vent'anni, analizzato sia le difficoltà derivanti dal formalismo algebrico che i comportamenti degli allievi (dalla Scuola Superiore di I grado all'Università) nell'approccio al formalismo algebrico. Vogliamo qui riprendere solo alcuni dei richiami provenienti dalla suddetta letteratura che hanno ispirato il nostro lavoro; un lavoro che ha cercato di affrontare i problemi dell'insegnamento-apprendimento del calcolo letterale in continuità tra Scuola Secondaria di I grado e Scuola Secondaria di II grado non trascurando casi particolari di difficoltà di apprendimento quale quello di un ragazzo diversamente abile nella Scuola Secondaria di II grado. In particolare abbiamo cercato di affrontare alcune questioni legate alla comunicazione attraverso il linguaggio dell'algebra.

In uno dei libri di divulgazione matematica, oggi (finalmente) piuttosto diffusi, ci ha particolarmente colpiti la storia di Pauline. Anne Siety (2003)racconta come molti alunni nel corso dei loro studi , pur affrontando difficoltà di grado elevato, e proseguendo in qualche modo il cammino scolastico, non superano mai lo "shock" prodotto dal calcolo letterale. "Pauline infatti, all'ultimo anno della Scuola Superiore di II grado (ramo scientifico) scrive in un esercizio sulle potenze la seguente uguaglianza: $ab^2= a^2 b^2$. questa uguaglianza è sbagliata. Quando le domando di esporre nel dettaglio ciascuna di queste espressioni, Pauline è in grado di correggere il suo errore.". L'autrice sottolinea come Pauline riesce ad esplicitare l'operazione di moltiplicazione presente in ambo i membri dell'espressione e aggiunge che effettivamente l'uguaglianza sarebbe corretta se a primo membro il prodotto ab fosse racchiuso da parentesi e giustifica il suo errore con la distrazione , che però, dice, la prende sempre in presenza di questo tipo di situazione. È evidente che il problema di Pauline non sia l'uso delle proprietà delle potenze , ma un apprendimento anteriore: il calcolo letterale. Non è il quadrato ad attirare la sua attenzione ma ciò che più conta è fare il prodotto axb come se fossero "veri" numeri e facendo intervenire la potenza solo successivamente. Un'altra suggestione ci è stata fornita da un lavoro di Bazzini (2001): si racconta la storia di Stefania che nel risolvere, seppur correttamente, una disequazione non coglie il significato della soluzione proprio perché intravede nell'espressione algebrica solo il suo aspetto sintattico.

Il quadro teorico

Indichiamo qui di seguito alcune interpretazioni del comportamento degli allievi di fronte al formalismo algebrico(Boero, 1992): la funzione stenografica si esercita sul testo e non sul processo di pensiero; la perdita dei significati espressi già nella semantica interna alle operazioni; la tendenza a "semplificare" sempre le espressioni senza avere coscienza della trasformazione utile in quel caso; la mancanza di consapevolezza ad anticipare mentalmente gli effetti delle azioni sull'espressione, cosa che il formalismo algebrico richiede. Tali comportamenti inoltre sono dovuti ad alcune difficoltà note e delle quali abbiamo tenuto conto nell'impostare il nostro lavoro, quali quelle cognitive e didattiche, legate al processo di traduzione di oggetti in formule; così come la difficoltà a trasformare in simboli alcune relazioni significative utilizzando equazioni algebriche (J. Clement,1982). È inoltre noto come l'inizio dell'algebra sia spesso il momento di rottura definitiva con la matematica in quanto "si tratta di mancanza di comprensione di ciò che si studia, di disorientamento e di sensazione di muoversi in un terreno minato e confuso, il tutto associato ad emozioni negative"(Pellerey,1995). Nell'affrontare questo tema ci è sembrato importante considerare una motivazione culturale più ampia, quale quella che afferma che "... dentro a competenze strumentali come esprimere calcoli, risolvere equazioni, misurare grandezze,... è infatti sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo"(UMI); e quella che afferma che "la funzione stenografica del formalismo algebrico, consente alla matematica di essere non solo un linguaggio adatto per descrivere la realtà, ma anche un potente strumento di previsione attraverso la messa in formule di conoscenze sui fenomeni e la derivazione (mediante trasformazioni consentite dal formalismo algebrico) di nuove conoscenze dei fenomeni stessi" (Boero,1992).

La ricerca

Nello sviluppo della nostra ricerca abbiamo tentato di affrontare insieme sia l'ostacolo di natura cognitiva, che impedisce di servirsi nell'algebra di modelli intuitivi dell'aritmetica, sia l'ostacolo di natura didattica che in un tradizionale insegnamento dell'algebra non fa emergere l'originalità dell'uso delle lettere (Chevallard,1989), sia infine l'ostacolo fondamentale che riguarda il processo di traduzione di oggetti in formule (Bazzini, Iaderosa,2000). Poiché è noto come tali ostacoli siano presenti sia nella Scuola Secondaria di I grado che di II grado, abbiamo affrontato, seppur con modalità diverse, il problema in entrambi gli ordini di scuola e con un insegnante di sostegno in un caso particolare di difficoltà di apprendimento. Nella Scuola Secondaria di I grado abbiamo proposto il problema di generalizzare i tornei scolastici attraverso schemi e uso delle lettere che permettano la riutilizzazione qualunque sia lo sport praticato. Nella Scuola di II grado (biennio dello Scientifico)il problema è consistito nel proporre ad un primo gruppo di studenti un word problem da tradurre in espressione algebrica che un secondo gruppo di allievi aveva il compito di rimettere in espressione letteraria. Nel caso dell'allievo disabile si è trattato di lavorare su una tabella numerica, riconoscerne le regolarità ed esprimerle con espressioni letterarie. Nella Scuola di II grado la scelta di seguire lo sviluppo filogenetico del formalismo algebrico (cioè della sua evoluzione storica) e quindi la scelta di partire dal momento "retorico" per passare a quello "simbolico" e ritornare al "retorico" ci è stata suggerita sia dal momento didattico che da quello ontogenetico degli studenti (siamo già in una fase della vita scolastica in cui già un lungo itinerario è stato compiuto su questo argomento).

Conclusioni

Il quadro di riferimento culturale ci ha suggerito di porre l'allievo nella condizione di "riscoprire" interamente i grandi passi compiuti dai matematici in tutta la storia (Polya). L'insegnante dovrebbe "condurre degli esperimenti" sulle grandi linee indicate dallo "sviluppo razziale" dell'esperienza matematica (Branford). Occorre incoraggiare gli allievi a "reinventare" le idee matematiche (Freudenthal in Bazzini, Iaderosa). Lo sviluppo ontogenetico delle idee matematiche (cioè lo sviluppo delle idee durante il periodo di vita dell'individuo matematico) può uguagliare la sua evoluzione filogenetica (cioè la sua evoluzione in tutto il periodo storico) (Poincarè).

Bibliografia

- Bazzini L., Iaderosa R., "Approccio all'algebra, riflessioni didattiche", Franco Angeli Editore, 2000
- Bazzini L., "aspetti cognitivi del pensiero algebrico e implicazioni didattiche, La Matematica e la sua Didattica, n. 4, 2001.
- Boero P. "sulla specificità delle ricerche in Didattica della Matematica: il caso del formalismo algebrico"L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 15, n.10, S.E., 1992.
- Chevallard J. Arithmetic, Algebre, Modelisation, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 1989.
- Clement J., Algebra word problem solutions: thought processes underlyng a common misconception, Journal for Research in Matematics Education, Vol. 13, No. 1, 16-30, 1982.
- Pellerey- Orio, bollettino UMI, convegno CIIM 1995.
- Sfard, Linchevsky L., The gains and pitfalls of reification the case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26, S.E. , pp. 191-228, 1994.
- Siety Anne, "matematica mio terrore", Salani Editore, 2003.

RIPRESE VIDEO E GRAFICI SUL PC IN SIMULTANEA CON UN EVENTO SPORTIVO

Ada Sargenti, Luisa Viglietta, Giovanni Perona, Stefano Turso, Marco Zambotto[1]

Alcuni recenti sviluppi tecnologici applicati alla didattica ci consentono di porre in secondo piano le difficoltà relative all'acquisizione da parte degli studenti di tecniche di calcolo anche complesse - quali limiti, derivate, integrali - per dirigere invece la loro attenzione sui concetti. Accanto a strumenti di software didattico per lo studio teorico, esistono oggi alcuni strumenti innovativi che ci permettono di stabilire un collegamento diretto e immediato tra situazioni reali e la loro rappresentazione con il linguaggio della matematica. In questo modo si possono affrontare con migliori probabilità di successo gli ostacoli cognitivi inerenti argomenti quali lo studio di funzione e l'analisi dei grafici.

Esemplare in questo campo è il progetto Lab of Tomorrow (LoT) che partecipa all'azione "School of Tomorrow" del Programma Europeo IST (Information Society and Technology). LoT ha sviluppato un'apparecchiatura didattica innovativa basata sull'uso di minuscoli sensori (di temperatura, di pulsazione cardiaca, accelerometri, sonar, ecc.) che gli studenti possono "indossare" durante l'attività sportiva.

I sensori inviano i dati tramite una interfaccia *wireless* a una *base station* collegata al computer. Il flusso di dati viene quindi assimilato e successivamente reso accessibile tramite una apposita interfaccia utente. Sullo schermo del PC è così presentato sia l'andamento "in real time" delle grandezze misurate (sotto forma di tabelle e di grafici), sia, in simultanea, le riprese effettuate tramite una Web Cam. In fase di revisione, è possibile selezionare un evento già registrato, visualizzarlo, estrarre dei segmenti di particolare interesse ed esportarlo nei formati più comuni. È inoltre possibile l'interconnessione a risorse remote (aree FTP ed un sito dedicato) per la condivisione degli eventi registrati tra le classi. Un sito permette agli utenti di caricare su un server comune tutti i dati sperimentali ottenuti tramite il sistema. Gli esperimenti caricati possono essere successivamente scaricati da altri utenti e analizzati tramite l'apposito software come se fossero stati eseguiti localmente.

Gli aspetti didattici innovativi del progetto sono evidenziati da esperimenti significativi, come alcune situazioni in cui uno studente pratica attività sportiva (ping-pong, bicicletta, calcio, ...) indossando la cosiddetta *sensvest* munita di sensori. L'andamento dei grafici delle grandezze in studio viene collegato alle azioni dello studente. Movimenti che si ripetono (vedi sensore collegato al piede o braccio che oscilla) potranno essere occasione per il riferimento alla funzione sinusoidale; la messa in relazione di grandezze cinematiche diverse (accelerazione, velocità, posizione) farà riferimento al concetto di derivata come tasso di variazione e di integrale come area sotto la curva.

Grafici e loro caratteristiche vengono così collegati a movimenti del corpo favorendo quella percezione *embodied* dei concetti matematici che la ricerca didattica più recente ha messo in luce.

---

[1] Ada Sargenti, docente di Matematica all'ITIS Pininfarina di Moncalieri; supervisore di tirocinio SIS Piemonte
Luisa Viglietta, già docente di Matematica e Fisica, attualmente collaboratrice del COREP di Torino
Giovanni Perona, Stefano Turso, Marco Zambotto, del Dipartimento di Elettronica del Politecnico di Torino

Il flusso di dati proveniente dai sensori è acquisito dal computer in modo discreto e dà origine a una rappresentazione grafica affetta da rumore di fondo, si ottiene cioè un grafico"sporco" che sarà più difficile interpretare, rispetto a grafici ricavati direttamente da un'equazione. Nasce allora l'esigenza di individuare i segmenti più significativi ed estrarli dalla gran mole di dati disponibili. Non abbiamo più i "soliti" grafici "belli" e "puliti": cambia l'approccio all'analisi matematica che tradizionalmente si limitava allo studio di funzioni continue o con discontinuità in numero finito, definite, in genere, da un'unica equazione. In un mondo in cui tutto è digitalizzato, cioè discreto, questo fatto ha due risvolti positivi: da un lato, sfata una concezione errata di matematica, dove tutto è "perfetto", i calcoli sono sempre esatti, i grafici senza problemi; dall'altro, può aiutare gli studenti ad acquisire maggior dimestichezza con alcuni concetti che proprio la "perfezione" tipica dei classici esercizi di analisi finisce per nascondere.

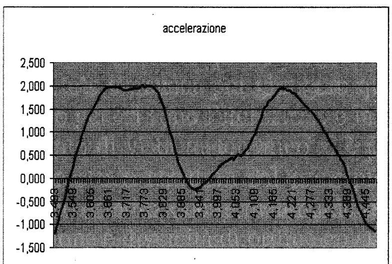
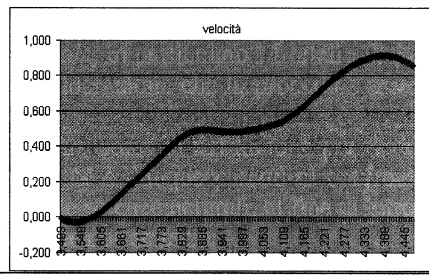
	

Grafico dell'accelerazione ottenuto con i dati acquisiti da un esperimento e trattati con un foglio elettronico. Il segno dell'accelerazione dà informazioni sull'andamento del grafico della velocità (a fianco).	Grafico della velocità ottenuta con una integrazione numerica (formula dei trapezi) sullo stesso foglio elettronico, a partire dai dati dell'accelerazione. I massimi e minimi della velocità corrispondono agli zeri dell'accelerazione.

Riferimenti

Lakoff, G.-Núñez, R.E. (2005), *Da dove viene la matematica,* Bollati-Boringhieri, Torino

Robutti, O. (2001). *È possibile avviare gli studenti al senso del grafico con calcolatrice e sensore?,* Ipotesi, 4, n.3, 10-14.

Ferrara, F. & Robutti, O. (2002). *A graphical approach to functions through Body Motion,* L Bazzini & C. Whybrow Inchley (ed.) Proceedings of CIEAEM 53, Verbania, Italy, 321-326.

Turso, S., Perona, G., Viglietta, L., Zambotto M. (2004). *Developing a Tool for Real-Time Data Assimilation, Visualization and Storing in the Framework of "Lab of Tomorrow",* Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics, Volume 2 – Number 1.

Sito di David Tall dell'Università di Warwick
http://www.davidtall.com/mathematical-growth

LABORATORI
(Scuola elementare e media)

STUDI ESPLORATIVI BASATI SU ATTIVITÀ DI PROBLEM SOLVING E MODELLIZZAZIONE MATEMATICA DI TIPO REALISTICO

C. Bonotto, R.Baccarin, M.Basso, M.Feltresi

INTRODUZIONE

Nella usuale prassi scolastica il processo di legare la matematica scolastica con la realtà è ancora sostanzialmente delegato ai classici problemi a parole. Oltre a rappresentare l'interfaccia tra matematica scolastica e realtà extra-scolastica essi spesso costituiscono l'unico esempio di modellizzazione matematica e di problem solving, obiettivo che il più delle volte non riescono a raggiungere, come evidenziato in molti studi internazionali (si veda Verschaffel, Greer & De Corte, 2000, per una panoramica su questi studi).

Se, in accordo con molti ricercatori e con gli estensori di molti curricula, tra cui quello italiano, si vogliono: a) problemi che nascano da esperienze reali dei discenti al fine di mettere in relazione metodi e conoscenze apprese fuori dall'ambito scolastico con quelli appresi dentro la scuola, e viceversa, b) situazioni di modellizzazione matematica ed una vera attività di problem solving, noi riteniamo si debba i) cambiare il tipo di attività a cui si delega il processo di creare un interfaccia tra realtà e matematica, ii) applicare una varietà di metodologie didattiche tra di loro complementari, integrate ed interattive, ed infine iii) stabilire una nuova cultura matematica in classe (Bonotto, 2004). In questo laboratorio faremo vedere come questi cambiamenti si possono concretamente realizzare.

Il processo di 'portare la realtà nella matematica' risulta necessario ma non sufficiente a favorire "*un atteggiamento positivo verso la matematica, intesa sia come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà, sia come affascinante attività del pensiero umano*", come già auspicato dai programmi ministeriali del 1985. Questo obiettivo può essere raggiunto solo se si riesce anche a 'portare la matematica nella realtà'; in altre parole "*oltre a matematizzare il quotidiano si deve quotidianizzare la matematica*" [Bonotto, 1999] valorizzando, come sottolineato anche nelle Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati nella Scuola Primaria (Legge 53/2003), l'esperienza dell'alunno: "*I fanciulli che entrano nella Scuola Primaria hanno già maturato concettualizzazioni intuitive, parziali e generali, che impiegano per spiegare tutti fenomeni che incontrano; anche quelli più complessi........ La Scuola Primaria si propone, anzitutto, di apprezzare questo patrimonio conoscitivo, valoriale e comportamentale ereditato dal fanciullo, e di dedicare particolare attenzione alla sua considerazione, esplorazione e discussione comune*".

Questo processo richiede un cambiamento anche nell'atteggiamento degli insegnanti nei confronti della matematica stessa; da qui la necessità di intervenire anche sulla formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti dei vari ordini scolastici.

SUGLI ARTEFATTI CULTURALI

Noi riteniamo che il legame tra esperienze extra-scolastiche e scolastiche si possa concretizzare utilizzando in classe opportuni artefatti culturali; essi sono materiali significativi per gli allievi poiché appartengono al loro ambiente socio-culturale e possono così fungere da mediatori tra queste due realtà. La ricerca, l'analisi e la riflessione su "fatti matematici" incorporati in tali artefatti possono servire da significativo trampolino di lancio per l'apprendimento di nuove conoscenze, almeno ad un primo stadio; in questo modo gli artefatti diventano strumenti di matematizzazione, particolarmente significativi e motivanti, in quanto agganciati alle situazioni della vita di ogni giorno (Bonotto, 2004). Si può sfruttare la familiarità di questi strumenti per dare modo ai bambini di esprimere delle intuizioni secondo quel processo di apprendimento definito da Freudenthal, 1991, apprendimento *"anticipatorio"* o per *"organizzazione anticipata"*; e queste anticipazioni spesso precedono un apprendimento sistematico. Attraverso un opportuno utilizzo di tali artefatti si possono anche creare situazioni didattiche di modellizzazione matematica cosiddetta realistica (Reusser & Stebler, 1997). Gli studi sperimentali di tipo esplorativo che noi abbiamo condotto in classe durante questi ultimi anni ne sono testimonianza (si vedano ad esempio Bonotto 1999, 2001 e 2004; Bonotto, Baccarin, Basso & Feltresi, 2002).

SULLE ATTIVITÀ PRESENTATE

In questo laboratorio presenteremo alcune attività svoltesi in classi di scuola elementare basate sull'utilizzo di alcuni artefatti culturali; faremo vedere, anche attraverso l'analisi di protocolli individuali scritti e di discussioni collettive, come queste attività siano in grado di creare situazioni coinvolgenti per i bambini dal punto di vista emotivo, attentivo e intellettivo, in quanto legate alle conoscenze, curiosità ed interessi extrascolastici dei bambini. In questo modo il docente abitua i ragazzi ad interpretare la realtà in cui sono immersi, a capirne codici, messaggi e regole, e a vederne la matematica incorporata. Si realizza così quanto auspicato in Matematica 2001: "… *l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, non unicamente come bagaglio di nozioni*" (XXII Convegno UMI-CIIM, 2001). Queste attività hanno stimolato inoltre nei bambini l'attivazione e l'utilizzo di risorse spesso inusuali per la scuola elementare italiana, quali quelle di confrontare i dati numerici tra di loro, di arrotondare i numeri per dominare meglio i calcoli, di dare significato alle operazioni aritmetiche coinvolte, di possedere il senso del numero. In questo modo si passa da una matematica 'strumentale' ad una matematica come oggetto di studio, e quindi 'culturale'.

BIBLIOGRAFIA

- Bonotto, C.: 1999 "Sull'uso di artefatti culturali nell'insegnamento-apprendimento della matematica", *L'Educazione Matematica,* Anno XX, Serie VI, 1(2), 62-95.
- Bonotto, C.: 2001a "How to connect school mathematics with students out-of-school knowledge", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33, n.3, 75-84.
- Bonotto, C.: 2004 "How to replace the word problem solving activities with activities of realistic mathematical modelling", In H. W. Henn & W. Blum (eds) Proceedings of ICMI Study 14 su *Applications and Modelling in Mathematics Education*, Dortmund, 41-46.
- Bonotto C., Baccarin R., Basso M. & Feltresi M.: 2002 "Studi esplorativi sulla comprensione del concetto di numero decimale attraverso l'uso del righello", in N. Malara et al. (eds) *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora, Bologna, 43-58.

- Freudenthal, H.: 1991 *Revisiting Mathematics Education. China Lectures,* Kluwer, Dordrecht, [trad.it. *Ripensando l'Educazione Matematica,* (a cura di C.F. Manara), La Scuola, Brescia, 1994].
- Reusser, K. and Stebler, R.: 1997 "Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics", *Learning and Instruction*, 7, 309-328.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. : 2000 *Making sense of word problems*, Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

SVILUPPO DEL PENSIERO PROPORZIONALE NELL'ARCO DEL TRIENNIO DELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Roberta Fantini, Loredana Gherpelli, Nicolina A. Malara
(GREM – Università di Modena & Reggio Emilia)

La rilevanza che il pensiero proporzionale ha, entrando in gioco direttamente o indirettamente in diversi contesti didattici, e la particolare importanza educativa e psicologica che esso riveste, per una coerente crescita formativa e culturale dei ragazzi, sono state alcune delle considerazioni che ci hanno guidato nella strutturazione di un progetto triennale teso all'effettivo miglioramento del processo di insegnamento-apprendimento della proporzionalità. L'ipotesi di fondo è che una effettiva conquista del pensiero proporzionale debba avvenire attraverso attività calibrate ed articolare nell'intero corso del ciclo scolastico. Un processo graduale, quindi, supportato da un insegnamento per problemi non episodico e di tipo metacognitivo, che consenta l'esplorazione di situazioni di proporzionalità, anche complesse, in vari contesti ed il confronto con situazioni di non proporzionalità. Lo scopo principale del nostro lavoro è stato così quello di favorire, consolidare e potenziare, la conquista del pensiero proporzionale da parte di ragazzi dagli 11 ai 13 anni e di analizzarne consequenzialmente le modalità di sviluppo e di utilizzo privilegiando così un'analisi di tipo qualitativo. La tematica è stata inquadrata in un'ottica relazionale finalizzata cioè ad evidenziare la variabilità dei dati in gioco. Questa impostazione, focalizzata sui concetti di variabile e di funzione, non solo ha promosso lo sviluppo del pensiero proporzionale e consentito agli allievi significativi collegamenti disciplinari ed interdisciplinari, ma ha anche contribuito positivamente all'introduzione del linguaggio algebrico per la modellizzazione del reale (Freudenthal 1978).

Metodologia

Presentiamo qui le linee guida di tale progetto con l'intento di stimolare una riflessione degli insegnanti stessi sulle finalità e difficoltà di alcune situazioni problematiche proposte nonché delle loro connaturali ripercussioni pedagogiche e didattiche sugli allievi. Il percorso didattico è stato attuato nell'alveo dell'usuale programmazione di classe e questo ha necessariamente richiesto un'attenta pianificazione dei tempi per la realizzazione delle imprescindibili attività socio-costruttive. La metodologia didattica ha visto l'alternanza di fasi di esplorazioni di situazioni problematiche individuali o a piccoli gruppi, e di discussioni collettive, di confronto e riflessione, sulle strategie attivate e sugli errori emersi. Si è promosso così un clima di classe che ha permesso agli allievi di assumere un atteggiamento responsabile e di ricerca facilitando nella discussione la partecipazione di tutte le voci. Questa per grandi linee le attività affrontate nei tre anni: in classe prima, dopo un riesame dei problemi di divisione, si è operato ponendo i ragazzi di fronte a situazioni del tipo "*per ogni insieme di ... tanti di...*" in contesti problematici differenti e con dati numerici via via più difficili da gestire. In classe seconda, si è passati a situazioni problematiche coinvolgenti il confronto tra rapporti, una volta costruito il concetto di classe di equivalenza di frazioni che ha facilitato il riconoscimento della permanenza dei rapporti nelle eventuali proporzioni in gioco e una migliore gestione del confronto. In quest'ottica, le proporzioni vengono viste come una particolarizzazione dell'equivalenza di frazioni ad una sola coppia. Molte sono anche le attività in ambito geometrico che, grazie all'attività pregressa, vengono gestite dai ragazzi ricorrendo al confronto dei rapporti più che alla lettura delle tabelle. In classe terza il discorso si approfondisce e sviluppa attorno all'aspetto grafico-algebrico, sfociando sulla funzione di proporzionalità, da individuare in situazioni di proporzionalità anche non standard. La tabella viene ad assumere un ruolo importante per evidenziare la relazione tra coppie di valori corrispondenti delle variabili, per facilitare la rappresentazione grafica della funzione in gioco ed avviare alla sua rappresentazione algebrica. Nel tempo poi, ciclicamente, sono state proposte situazioni analoghe a quelle già affrontate per monitorare il processo di maturazione degli allievi e per sottolineare loro come una maggiore conoscenza disciplinare comporti una semplificazione nei modi di vedere e di operare. Le situazioni problematiche sono state elaborate tenendo in considerazione diversi parametri quali: il contesto, i dati numerici, gli aspetti linguistici e l'articolazione delle domande (solitamente organizzate in più punti). Nella formulazione di tali situazioni si è cercato di tenere conto degli interessi degli allievi, si è a volte utilizzato il loro gergo, il gioco o situazioni legate al loro vissuto e, per quanto possibile, si è fatto ricorso ad una veste grafica accattivante. Nel tempo i testi sono divenuti lunghi e articolati, alcuni sono stati concepiti con distrattori, volendo anche verificare negli allievi l'abilità di cogliere le informazioni essenziali.

Produttività del percorso

Dall'analisi degli elaborati dei ragazzi, prodotti durante il percorso didattico triennale emerge chiaramente che l'atteggiamento di ricerca di fronte a situazioni problematiche di proporzionalità dipende da molte variabili e può presentare diverse fasi di sviluppo e di avvicinamento. L'approccio al pensiero proporzionale attraverso situazioni problematiche potenzia nel lungo termine il rigore del linguaggio dimostrandosi un supporto importante soprattutto per gli allievi più deboli. Si è rilevato infatti come lo studio di problemi centrati sul costrutto linguistico "*per ogni insieme di … tanti di…*", faciliti l'attivazione spontanea della riduzione all'unità, mentre in altri casi siano necessari indicazioni-suggerimenti dell'insegnante. Inoltre il costrutto linguistico contribuisce a porre l'accento sulla corrispondenza tra classi di grandezze e quindi all'attivazione di strategie risolutive corrette. La varietà delle strategie risolutive registrate testimonia come le attività svolte nel corso del triennio abbiano profondamente influenzato, a volte anche a livello inconscio, le modalità e le capacità di analisi dei ragazzi. In particolare emerge come lo sviluppo del pensiero proporzionale sia possibile e lineare per quei ragazzi che, anche se inconsapevolmente, hanno maturato padronanza sinergica dei diversi stili di apprendimento (grafico-iconico, numerico, visuo-spaziale…). La discussione collettiva risulta un'efficace strategia didattica per l'appropriazione del pensiero proporzionale da parte di ragazzi deboli, grazie al supporto di pensieri e riflessioni espressi dai loro compagni. Tuttavia tale attività richiede da parte dell'insegnante un'attenzione particolare nell'osservazione delle dinamiche relazionali e il vigile controllo dello sviluppo argomentativo per evitare contrapposizioni o momenti di stallo. L'attività di gruppo poi è particolarmente produttiva per gli allievi più bravi: il dover comunicare con gli altri li costringe a portare alla luce ed esplicitare intuizioni, immagini e processi che in un lavoro individuale rimarrebbero sommersi. Al termine del percorso didattico quindi la maggior parte dei ragazzi ha sviluppato, potenziandolo, un metodo di approccio e analisi delle situazioni problematiche consapevole, soprattutto per quanto riguarda i collegamenti relazionali tra le variabili in gioco, e ricorre autonomamente, attraverso la formulazione *"per ogni insieme di ..... tanti di..."* all'unità per confrontare situazioni diverse riconoscendo l'efficacia di questo passaggio. Visti così gli obiettivi cognitivi e formativi raggiunti attraverso la realizzazione del progetto, e la positiva risposta dei ragazzi già dalla classe prima, riteniamo possibile l'anticipazione dello sviluppo del pensiero proporzionale già dalla scuola primaria. Questo potrebbe permettere, oltre ad un ulteriore approfondimento tematico, una gestione progressivamente più consapevole del pensiero proporzionale che verrebbe ad acquisire così una valenza formativa sistematica.

Bibliografia

- Grugnetti, L.: 1997, Pensiero Proporzionale e costruttivismo: superamento di ostacoli?, in Grugnetti L. & Gregori, S. (a cura di), *Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria*, Università degli studi di Parma, 77-82
- Harper, E. (ed): 1987-88, *NMP Mathematics for Secondary School,* Longman Essex, UK.
- Malara, N.A, Ponzi, S., 2003, ragionamenti intuitive di allievi posti di fronte a problemi di proporzionalità, *l'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol 28A n. 3, 245-269
- Mariotti M. A., Sainati Nello M., Sciolis Marino M., 1988, Il ragionamento proporzionale negli alunni di 13-14 anni, Parte I, Parte II, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 11, n. 2, 105-136, Vol. 11, n. 4, 313-339.
- Pesci, A., 2002, *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe*, Pitagora, (Bo).

DAL PROBLEMA AL LINGUAGGIO FORMALE: PERCORSI DI MODELLIZZAZIONE E ASTRAZIONE

D. Formica – G.B. Italia – A. Mirabella – R. Riggio[1]

L'attività principale dell'insegnamento della Matematica a qualunque livello scolastico è quella di porsi e risolvere problemi; questo implica da parte dell'alunno la capacità di produrre congetture e di applicare strategie risolutive, ma ciò può avvenire soltanto se alla base esiste un adeguato bagaglio di conoscenze specifiche, una buona capacità grafica e figurativa e soprattutto la capacità di selezionare le informazioni utili e decodificarle in linguaggio specifico.

Nell'attività didattica viene troppo spesso sottovalutato il momento della *formulazione e comprensione del testo*, mentre si attribuisce massima importanza al momento risolutivo, senza considerare che quest'ultimo non può prescindere da una corretta disamina della situazione problematica.
Per tale motivo negli ultimi anni, abbiamo ritenuto essenziale nell'insegnamento-apprendimento della risoluzione del problema, l'analisi linguistica del testo, la capacità di individuare i dati essenziali e la loro traduzione in corretto linguaggio matematico.

In occasione di questo XXIV Convegno UMI-CIIM, abbiamo pensato di organizzare un laboratorio che coinvolgesse i docenti partecipanti in un momento di riflessione sulle difficoltà che possono incontrare gli alunni di scuola media nel selezionare le informazioni fornite dal testo di un problema e nel corretto utilizzo del linguaggio matematico.

In particolare, si è posta l'attenzione sui seguenti aspetti:

- saper selezionare i dati in vista delle domande poste dal testo del problema;
- saper riconoscere come dato essenziale anche un dato non numerico;
- saper riconoscere i dati superflui;
- rendersi conto della mancanza di dati essenziali e saper eventualmente integrare opportunamente le informazioni per rendere possibile la risoluzione del problema;
- saper tradurre relazioni matematiche in linguaggio corrente e viceversa;
- saper tradurre una situazione problematica, sia aritmetica che geometrica, nel suo corrispondente modello matematico;
- cosa intendere per soluzione di un problema e saper riconoscere in quali casi la risposta ad un quesito è accettabile (soluzione multipla, soluzione incoerente);
- la modellizzazione di situazioni problematiche come attività propedeutica allo studio dell'algebra.

L'approfondimento di tali problematiche deriva dai risultati ottenuti nel corso di un'attività di ricerca condotta dai relatori.

Dalle indagini effettuate precedentemente erano emersi i seguenti risultati:

- scarsa attenzione nel momento della lettura e decodifica del testo, mancanza di

---

[1] Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Catania

analisi dei dati;

- la radicata convinzione, da parte degli alunni, che la soluzione di un problema debba essere unica e che risolvere un problema significhi combinare opportunamente i dati mediante operazioni matematiche possibili, trovando un risultato, senza verificarne la "coerenza" nel contesto proposto;
- difficoltà di comprensione del testo di un problema causata principalmente dalla inadeguata conoscenza del linguaggio specifico e dalle interferenze generate da alcuni vocaboli di uso comune all'interno di un contesto matematico.

Durante i lavori di gruppo si sono realizzate attività finalizzate a coinvolgere personalmente gli intervenuti per focalizzare tali problematiche.
Dopo una breve relazione introduttiva è stata sottoposta ai partecipanti una scheda, contenente alcuni questionari tratti dalla ricerca condotta dai relatori su alunni di scuola media, per verificare l'esistenza di una corrispondenza tra i risultati raccolti dall'indagine e le aspettative da parte dei docenti sulle difficoltà che può incontrare un alunno.
L'animato dibattito svoltosi durante la presentazione e dopo la realizzazione dei lavori, ha dimostrato il particolare interesse degli insegnanti per l'argomento trattato e il loro apprezzamento per una relazione non esclusivamente teorica, ma ricca di spunti didattici concreti. Inoltre, dal confronto tra i risultati ottenuti dai ricercatori con le esperienze dei docenti presenti, si sono ipotizzate altre attività, da svolgere in classe, propedeutiche alla decodifica di un testo.
Si è cercato, inoltre, di costruire problemi che prevedessero più soluzioni o che non avessero soluzioni coerenti con il contesto, considerando anche il fatto che pochi libri di testo vengono, in tal senso, in aiuto al docente.
Durante il laboratorio è stato, infine, approfondito un altro aspetto importante, collegato al precedente, che è quello della modellizzazione dei problemi, come avvio all'algebra.

BIBLIOGRAFIA

- Catastini L. (2001): *Neuroscienze, apprendimento e didattica della Matematica* - Progetto Alice vol.II, n°6
- D'Amore B. (1995): *Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica,* La matematica e la sua didattica, n.3
- D'Amore B., Martini B. (1997): *Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard,* La matematica e la sua didattica, n.2
- E. Fischbein – R. Zan (1989):*I bambini di fronte ad un problema aritmetico in cui mancano i dati numerici: come si orientano nella scelta dei dati e nelle strategie risolutive"* – L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 12 n°9
- Formica D. – Italia G. – Lo Cicero A. – Milone C. – Mirabella A. – Riggio R. (2000): *Il problema dei problemi: analisi di alcune difficoltà di comprensione del testo,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 23A n° 4
- Mammana C. (1989): *Il ruolo dei problemi nell'educazione matematica,* L'educazione matematica, n.2
- Manara C. (1997): *Le difficoltà in matematica,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.20A, n.3
- Maraschini W. (2003): *Cavoli a merenda: interferenza fra lingua e linguaggi*

nell'insegnamento delle materie scientifiche – Progetto Alice vol.IV, n°12

PREVISIONE E VISUALIZZAZIONE SPAZIALE: DUE MOMENTI NELL'ESPLORAZIONE DI REGOLARITA' FRA OMBRE E COLORI

Angela Lo Cicero – Carmela Milone
(Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica
Dipartimento di Matematica, Università di Catania)

Nonostante la Geometria sia una delle colonne portanti della Matematica, tuttavia nella pratica didattica assume spesso un ruolo di secondo piano rispetto alle altre branche della disciplina. Le motivazioni possono essere di diverso tipo e sono da ricercarsi su fronti diversi. Da una parte, la non corrispondenza fra corso di studi seguiti e insegnamento della disciplina che porta molto spesso a privilegiare altre branche della matematica ritenute più "tecniche" e quindi più facilmente gestibili nell'approccio con i ragazzi, quali l'aritmetica e l'algebra. Dall'altra, anche se si comincia con l'osservazione della realtà (seguendo l'impostazione delle prime pagine dei libri di testo), si continua a proporre la geometria a partire da enti geometrici astratti, troppo lontani dal tipo di apprendimento relativo alla fascia di età che è più legato al concreto, al reale. I ragazzi, pertanto, acquisiscono una visione piuttosto riduttiva di questa disciplina, fatta solo di definizioni imparate a memoria e di formule da applicare in contesti stereotipati. Questo comporta maggiori difficoltà nei confronti di un insegnamento che li costringe a forzature relative a modalità di apprendimento non adeguate alla loro età e giustifica il motivo per cui preferiscono "il numero" che ha per loro un riferimento più concreto e dà maggiore sicurezza. Le conoscenze geometriche, spesso, non si trasformano in competenze, in quanto rimangono legate a singoli ambiti disciplinari; gli alunni, infatti, ricevono messaggi con discontinuità di ordine temporale e metodologico, se non addirittura concettuale, da parte di diverse discipline: Geometria, Educazione Tecnica ed Educazione Artistica.

All'interno di uno dei Laboratori previsti durante il Convegno, abbiamo presentato alcuni aspetti significativi di una sperimentazione inerente al problema della visualizzazione spaziale e condotta all'interno del Nucleo di Ricerca Didattica di Catania.

Il problema era stato già affrontato in una prima sperimentazione riguardante l'interpretazione della visualizzazione spaziale [4]. Tale sperimentazione era stata condotta attraverso una serie di attività che avevano lo scopo di: indagare sulle difficoltà incontrate da ragazzi di età compresa fra gli 11 e i 13 anni nella rappresentazione grafica di oggetti tridimensionali; mettere a fuoco le dinamiche seguite dagli alunni nel momento in cui cercano di ricostruire mentalmente la forma di un oggetto tridimensionale in presenza solo di alcuni stimoli sensoriali prodotti dall'oggetto stesso; controllare se la presenza dell'oggetto fisico facilita o meno la produzione di argomentazioni da parte degli allievi; controllare se e in quale misura le varie fasi dell'attività contribuiscono alla formazione delle immagini mentali.

Dall'analisi dei risultati è emerso, fra l'altro, che: a) esistono determinate difficoltà nella rappresentazione bidimensionale di oggetti tridimensionali che non possono essere considerate caratteristiche di ragazzi con insufficienti abilità matematiche; b) non c'è univocità fra l'oggetto e le sue sezioni e fra l'oggetto e le sezioni d'ombra sul muro e viceversa.

Muovendo da tali conclusioni, ed avendo sempre come finalità l'acquisizione di una corretta visualizzazione spaziale, ci siamo allora proposti di indagare ulteriormente sui processi mentali messi in atto dai ragazzi nella previsione delle sezioni d'ombra e delle sezioni con continuità di un modello dinamico, nonché nella scoperta di eventuali relazioni fra famiglie di figure piane. I risultati della prima parte di questa seconda sperimentazione sono già stati pubblicati [3], i risultati della seconda parte sono in via di pubblicazione.

Nella progettazione dell'indagine ci siamo posti i seguenti **obiettivi**:

1. stabilire se e in che misura le difficoltà incontrate nel passaggio dal tridimensionale al bidimensionale sono da mettere in relazione con le conoscenze matematiche possedute dai ragazzi;
2. indagare sulle capacità di:
   a) fare previsioni di sezioni e sezioni d'ombra sia su modelli statici che dinamici;
   b) pervenire con gradualità all'astrazione e alla costruzione delle immagini mentali;
   c) giustificare le intuizioni con argomentazioni;
   d) descrivere per iscritto le esperienze fatte formulando le relative osservazioni e le eventuali relazioni colte.

La sperimentazione è consistita nello sviluppo delle seguenti **attività**:

A.1 - *Previsione di sezioni d'ombra di un tetraedro regolare e di un cubo in rotazione*

A.2 - *Previsione delle sezioni di un tetraedro regolare e di un cubo al variare del livello di acqua contenuta.*

Durante e a conclusione di ogni attività i ragazzi, ai quali sono state fornite delle schede appositamente strutturate, sono stati stimolati a riflettere sui vari momenti per:

- confrontare i risultati di esperienze condotte con modalità diverse;
- cogliere, attraverso eventuali sequenze, analogie e relazioni.

All'interno del Laboratorio i docenti sono stati coinvolti in una della attività proposte durante la sperimentazione (**A.2**), quella che ha motivato maggiormente i ragazzi. Sono state utilizzate le schede fornite agli alunni, in modo che i partecipanti potessero ripercorrere l'esperienza fatta dai ragazzi, prevedendo le difficoltà incontrate dagli alunni nelle varie fasi e confrontandosi sugli stereotipi evidenziati.

Durante la discussione si è cercato di fare emergere le esperienze personali degli insegnanti, facendoli riflettere, anche attraverso i risultati emersi dalla sperimentazione, sulle difficoltà previste e non. Infine i docenti si sono confrontati (con un atteggiamento critico sì, ma propositivo) sulle difficoltà "non previste" e su come queste possano essere utili per affrontare il problema della visualizzazione spaziale.

Bibliografia:

[1] M. Dedò, *Modelli di poliedri*, Atti del XVII Convegno sull'Insegnamento della matematica: *L'insegnamento della geometria* a cura di B. Micale e S. Pluchino (Latina, 27, 28, 29 ottobre 1994) Notiziario UMI, supplemento al n.8-9, 1995

[2] N. Gorgoriò, *Spatial processing abilities: its implications for teaching geometry,* ICMI Study – Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century – pre-proceedings for Catania Conference 28 settembre/2 ottobre 1995 – Editor: C. Mammana, Department of Mathematics – University of Catania

[3] A. Lo Cicero, B. Micale, C. Milone, *Visualizzazione in geometria: previsioni di regolarità fra ombre e colori* Parte I, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.28A, n.2, 2005

[4] B. Micale, C. Milone, *L'interpretazione della visualizzazione spaziale: lo spazio fa paura?*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.25A, n.3, 2002

[5] V. Villani, *Geometria dello spazio,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 10, n. 5, 1987

VERSO LE FUNZIONI

Nicolina A. Malara e Sandra Marchi
GREM – Università di Modena & Reggio Emilia

Molti sono i problemi di insegnamento-apprendimento del concetto di funzione, legati alla complessità nella sua storia, che si riflettono nelle visioni del concetto, parziali o distorte, che gli studenti assumono e negli ostacoli e difficoltà che incontrano, come è testimoniato da svariati studi (si vedano ad esempio Eisemberg 1991; Breidenbach *et al.* 1992; Monk 1992, Vinner 1992; De Marois & Tall 1999).
Ricordiamo che sun dal 1979 i programmi per la scuola media privilegiano lo studio di relazioni e l'uso del linguaggio algebrico per la loro codifica e focalizzano l'attenzione sulle funzioni come strumento di modellizzazione di semplici fenomeni fisici. In questo quadro viene a prevalere una visione della funzione come corrispondenza funzionale tra grandezze, sensibile di una rappresentazione algebrica, visione più vicina alla concezione tradizionale di legge che non a quella più moderna, rinviata alla scuola secondaria superiore, di corrispondenza funzionale arbitraria. Va ricordato però che, per la mancanza di una consolidata tradizione di insegnamento su questo tema, in genere gli insegnanti presentano incertezze e difficoltà nell'insegnamento (Even 1993).

A livello di scuola media ci sembra importante affrontare didatticamente il problema in modo da favorire negli allievi una visione flessibile del concetto, con la presa in esame dei suoi molteplici aspetti, aprendo la strada alla sua successiva estensione. In particolare, ciò che storicamente ha dato origine al concetto di funzione, vale a dire il suo grafico, di fatto può costituire, se non gestito sapientemente, un ostacolo epistemologico per la costruzione del concetto stesso nella sua più moderna accezione. Concordiamo con Duval (2000) che, ai fini della costruzione di una vera conoscenza, è necessario che il soggetto distingua tra concetti matematici e loro rappresentazioni; ciò, da un punto di vista didattico, pone il problema di condurre lo studente ad operare questa distinzione non a posteriori, ma nel corso del processo di apprendimento. Di fronte alla molteplicità di registri rappresentativi di una funzione, quello grafico ha sicuramente un ruolo fondamentale (Mavarech & Kramarsky 1997; Vinner, cit), tuttavia è solo dalla coordinazione dei diversi registri (verbale, tabulare, grafico algebrico) che si può arrivare ad una reale concettualizzazione (Duval, cit).

Lo studio presentato riguarda un percorso didattico di tipo costruttivo da noi concepito per l'avvio alle funzioni nella scuola dell'obbligo con particolare riferimento alla scuola media nel quadro del progetto ArAl (www.aralweb.it). La messa a punto del percorso e la sua sperimentazione ha coinvolto oltre gli scriventi, tre docenti della rete ArAl, negli anni scolastici 2002/03 e 2003/04. Obiettivo del percorso è inquadrare le funzioni nel più ampio quadro delle relazioni binarie facendole nascere dall'osservazione di situazioni reali e di avviarne lo studio coordinando simultaneamente i vari registri rappresentativi: verbale, tabulare, algebrico e grafico. Un altro importante obiettivo riguarda le funzioni biunivoche e punta ad una visione paritetica della coppia funzione-funzione inversa, superando anche problemi relativi al loro rappresentazione grafica simultanea.

Durante il laboratorio sono state presentate alcune schede portanti del percorso, e discusse con gli insegnanti obiettivi, posibili difficoltà dei ragazzi, loro collocazione nella usuale programmazione di classe, metodologia didattica da adottare. Sono stati analizzati stralci di discussioni di classe che hanno evidenziato produttive concettualizzazioni degli allievi sul versante della codifica simbolica e sul coordinamento tra registri rappresentativi diversi. E' stato anche messo in luce come l'abitudine consolidata di riferirsi al sistema cartesiano O(x,y) crei ostacoli alla rappresentazione cartesiana simultanea della coppia funzione - funzione inversa e che per questo sia più produttivo l'utilizzo di lettere diverse che conservino la semantica delle variabili in gioco. A questo riguardo si è riferito di un nostro interessante confronto svoltosi in relazione ad una discussione di classe particolarmente complessa (si veda Malara 2005)

Bibliografia

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, G., Nichols D.: 1992, Development of the Process Conception of Function, *Educational Studies in Mathematics,* **23**, 247-285

De Marois, P., Tall, D.: 1999, Function: Organizing principle or Cognitive root? *Proc. PME 23*, vol. 2, 257-264

Duval R., 2000, Basic Issues for Research in Mathematics Education, *proc. PME 24*, vol.1, 55-69

Eisemberg, T.: 1991, Functions and Associated Learning Difficulties, in Tall D., *Advanced Mathematical Thinking,* Kluver, Dordrecht, 140-152

Even, R.: 1993, Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept, *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 24, 94-116

Malara N.A, Iaderosa R: 2001, Un aspetto di un percorso didattico per l'aproccio al concetto di funzione, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 24A, n.4, 376-387

Malara N.A.: 2005, Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra, conferenza su invito, *proc. Conv. Int. "Mathematics Education: Paths and Crossroads"*, Lisbona, 285-304

Mavarech Z., Kramarsky B., 1997, From Verbal Descriptions to Graphic Representations: Stability and Change in Students'Alternative Conceptions, *Educational Studies in Mathematics*, **32**, 229-263

Slavit D, 1997, An Alternate Route to the Reification of Function, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 259-281

Vinner, S.: 1992, The Function Concept as a Prototype for Problems in mathematics Learning, in Harel, G., Dubinsky, E. (eds): 1992, *The Concept of Function – Aspects of epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, vol. 25, 195- 214

LABORATORI
(Scuola superiore)

L'ESPLORAZIONE DI FORMULE ALGEBRICHE CON L'AIUTO DELLA GEOMETRIA E DEL COMPUTER

A. Anzalone, D. Margarone

I tanti ostacoli che molti studenti incontrano nell'apprendimento dell'algebra impongono di intervenire sul suo insegnamento individuando strategie didattiche alternative. Alcune delle difficoltà riscontrate sono da collegare ad un'immagine della matematica poco significativa per gli alunni o ad un uso eccessivo e non sufficientemente giustificato del formalismo matematico. Non bisogna infatti sottovalutare l'effettiva complessità che l'algebra simbolica e il suo formalismo comportano e avere invece piena consapevolezza del fatto che un linguaggio formale non è affatto spontaneo.

Il calcolo letterale e le formule relative vengono generalmente introdotti con i procedimenti essenzialmente meccanici dell'algebra simbolica e con scarsi riferimenti a possibili significati. Tali formule acquistano invece una concretezza ben diversa se accompagnate da opportune interpretazioni geometriche. Puntare allora ad un insegnamento "sensato" dell'algebra serve a ridare significato ad alcune procedure dell'algebra e a valorizzare l'algebra come linguaggio. Se quanto appreso viene percepito come utile e spendibile, non solo si consolida la motivazione ad apprendere, ma la conoscenza che ne deriva è più stabile, viene cioè più difficilmente dimenticata.
Anche nei libri di testo sempre più spesso è possibile trovare le rappresentazioni geometriche delle figure che corrispondono ai vari prodotti notevoli. Peraltro queste interpretazioni geometriche delle formule algebriche non costituiscono affatto una novità, perché sono già presenti nel *Libro II* degli *Elementi* di Euclide, noto come il libro dell'algebra geometrica. La caratteristica predominante della maggior parte delle proposizioni che esso contiene è costituita proprio dall'immediatezza intuitiva di tali proprietà geometriche, le cui dimostrazioni, spesso, si ricavano direttamente dalla semplice costruzione delle figure.

Partendo da questi presupposti è stato elaborato un percorso didattico che opera in maniera globale fra algebra, geometria e informatica, e che si propone di facilitare l'approccio all'algebra utilizzando per la loro interpretazione geometrica il software *Cabri-géomètre II.* Trattare formule algebriche con l'aiuto del *Cabri,* fornisce un'occasione significativa da un lato per mettere la tecnologia al servizio delle scelte formative, da un altro per comprendere la profondità dei legami che intercorrono tra algebra e geometria, superando inutili settorializzazioni dei diversi ambiti della matematica. Tale software offre inoltre agli allievi la possibilità di eseguire personalmente le costruzioni che trasformano le astratte formule algebriche in concrete figure geometriche e di manipolare le figure costruite, favorendo così quel coinvolgimento diretto degli alunni che rende l'apprendimento più stimolante della semplice osservazione delle figure statiche disegnate alla lavagna o sul libro.
Il laboratorio proposto, rivolto principalmente a docenti del biennio della secondaria superiore, utilizza una parte dei risultati di una ricerca condotta nell'ambito del Nucleo di Ricerca Didattica di Catania e descritta da A. Anzalone, D. Margarone e B. Micale nel volume *Euclide al computer: proprietà geometriche e formule algebriche*, per la Casa Editrice La Tecnica della Scuola (Catania, 2003).

Con l'intento di fornire ai docenti interessati spunti per affrontare in maniera non convenzionale argomenti tradizionali di algebra, nel laboratorio è stata illustrata la metodologia di lavoro e sono state poi utilizzate alcune schede operative relative alla proprietà distributiva, al quadrato del binomio, alla legge del coseno, all'equazione di secondo grado e alla sezione aurea.

Abbiamo articolato il percorso attraverso tappe che integrano il linguaggio della parola con quello delle immagini, considerato che il contemporaneo uso di testi, simboli, immagini e animazioni corrisponde esattamente alla pluralità dei linguaggi della comunicazione e dell'elaborazione intellettuale. La vasta gamma di linguaggi differenti utilizzati aumenta le probabilità di riuscire a migliorare i processi comunicativi e ad adeguarsi ai molteplici e mutevoli stili cognitivi degli allievi. La nostra idea è di proporre agli allievi di partire dal linguaggio verbale dell'algebra geometrica, fornire una rappresentazione dinamica attraverso il linguaggio grafico, e approdare alla fine al linguaggio formalizzato dell'algebra simbolica.

Nelle sperimentazioni condotte abbiamo avuto modo di verificare che i ragazzi non trovano alcuna difficoltà ad impadronirsi delle corrispondenze fra enti geometrici ed enti aritmetici che sono alla base di questa metodologia di lavoro:

segmenti ↔ numeri

somma e differenza di segmenti ↔ somma e differenza di numeri

area di un rettangolo ↔ prodotto di due numeri

volume di un parallelepipedo ↔ prodotto di tre numeri

Attraverso schede operative relative alle costruzioni di *Cabri*, una per ogni singola proposizione, vengono spiegate dettagliatamente e commentate le procedure da seguire per realizzare le costruzioni finalizzate a visualizzare le figure geometriche correlate alle singole formule algebriche.

Alla pubblicazione è allegato un CD in cui sono state realizzate, oltre alle costruzioni descritte nelle schede, anche animazioni con cui le varie figure si ricompongono automaticamente rendendo ancora più immediata la visualizzazione delle proprietà.

La costruzione diretta delle figure da parte degli allievi, sulla base delle indicazioni contenute nelle schede, rappresenta un'opportunità didattica a forte valenza formativa, che prevede una loro partecipazione attiva e non può certamente essere paragonata all'osservazione passiva di un prodotto preconfezionato. La animazioni contenute nel CD permettono però di integrare la trattazione con una presentazione grafica ancora più convincente per l'immediatezza della percezione che deriva dalle immagini in movimento. In particolare le animazioni che riguardano le schede relative allo spazio (sviluppo del cubo del binomio somma e del binomio differenza e somma e differenza di due cubi) hanno permesso di superare l'ostacolo rappresentato della maggiore complessità delle rispettive costruzioni.

Questo modo di affrontare l'algebra permette anche di fare importanti riferimenti all'evoluzione della disciplina. Ripercorrere i cambiamenti di alcuni concetti nel tempo mostra la matematica come una disciplina in continua evoluzione, in contrasto con una visione rigidamente statica di un insieme di regole e procedure formali precostituite.

Inoltre, riteniamo che mettere in crisi la concezione dell'algebra come insieme astratto di regole che non trovano alcuna applicazione pratica possa contribuire al superamento delle difficoltà del linguaggio algebrico e a riconciliare gli allievi con l'algebra.
Sottoporre le schede operative alla discussione critica con i colleghi, ha permesso quel confronto fra esperienze diversificate da cui sono emersi interessanti suggerimenti per migliorare l'intervento didattico volto ad offrire ai nostri allievi un'educazione matematica sempre più stabile e al passo coi tempi.

LA VALUTAZIONE DEGLI APPRENDIMENTI: IL LIVELLO NAZIONALE E QUELLO INTERNAZIONALE

Caterina Bocchino, Claudia Testa

Da anni ormai, a livello internazionale è manifesto l'interesse per la qualità del prodotto scolastico e in particolare per la valutazione degli apprendimenti.

Su questo tema dalla fine degli anni 70, sono state realizzate molte ricerche con la finalità di costruire un insieme di indicatori che permettesse di poter confrontare i dati scolastici di paesi con ordinamenti e strutture scolastiche diversi. **Obiettivo finale: il miglioramento della scuola e il raggiungimento, da parte di tutti, di standard minimi definiti.**

Ricordiamo soltanto le ricerche attuate dall'IEA (International Association for the Evalution Achievement), a cui l'Italia ha partecipato, tramite l'allora CEDE, ora INValSI, ed ora il progetto OCSE-PISA

In Italia, la valutazione è, da sempre, stata considerata un momento normale e quasi obbligato nella vita della scuola e per questo accettato senza problemi da tutti i soggetti interessati: docenti, studenti, famiglie e la comunità sociale, nella crescente consapevolezza però, che la valutazione non può essere un problema affrontato dal singolo docente(in realtà ciascuno di noi iniziando ad insegnare lo ha affrontato come tale e senza alcuno strumento), ma le scelte del docente devono essere coerenti con l'ambiente in cui opera e l'utenza a cui si rivolge.

Inoltre, se pensiamo al sistema istruzione, per decenni, l'unico momento di confronto a livello nazionale è sempre stato: l'Esame di Maturità , attuale Esame di Stato. Non entriamo, in questa sede, nel merito delle trasformazioni subite sino all'attuale Esame, o ai condizionamenti di cui invece in passato può avere risentito la programmazione dei docenti di matematica del liceo scientifico a causa della «Prova scritta di Matematica»

In Italia il dibattito sulla valutazione degli apprendimenti negli ultimi 20 anni, ha portato alla fine degli anni '90 alla istituzione dell'INValSI che ha predisposto, con i progetti pilota 1,2,3 degli strumenti che aiutassero e facilitassero le scuole di ogni ordine e grado nelle pratiche valutative e autovalutative.

Troviamo infatti nel regolamento dell'autonomia, nella Legge Delega 53 e nei decreti e direttive successivi la definizione di norme generali per la valutazione degli apprendimenti e l'individuazione, nell'INValSI, dell'ente a tali compiti delegato.

La Legge 53 prevede due ambiti di intervento: l'ambito <u>interno</u> all'istituzione scolastica, e cioè la valutazione periodica e la certificazione delle competenze ed un ambito <u>esterno</u>, demandato all'INValSI

I progetti Pilota 1,2,3.
Caratteristiche:

- PP1 (a.s.01/02): indagine a partecipazione volontaria
- PP2 e PP3: indagine campionaria nazionale + indagine a partecipazione volontaria;
- Nelle classi **II e IV elem.**, **I media, I e III superiore**
- 3 discipline indagate: **Italiano, Matematica, Scienze**

Obiettivi:
- La ***valutazione di sistema*** da parte dell'***organo centrale*** dell'*efficacia* del sistema scolastico e dell'*efficacia* dell'insegnamento a livello nazionale;
- Dare ad ogni singola scuola, strumenti per effettuare, nella propria autonomia, una valutazione circa il proprio ***insegnamento***.

Strumenti:
- ***Questionario di sistema***
-***Prove oggettive*** con quesiti a scelta multipla costruiti da un gruppo di esperti esterni all'INValSI e al GdL su un numero limitato di obiettivi (contenuti ed abilità all'interno del programma ministeriale dell'anno precedente o delle Indicazioni Nazionali). I quesiti, pur essendo a risposta chiusa, sono stati strutturati in modo da sollecitare una riflessione piuttosto che risposte meccaniche e si è applicata l'idea della ricorsività: gli stessi temi sono stati proposti nei diversi livelli di scuola, con un approfondimento sempre maggiore.

Che cosa si valuta in matematica:
- La conoscenza della ***disciplina*** matematica e dei suoi ***strumenti*** intesa come:
  – conoscenza concettuale frutto di riflessione critica e non di addestramento, indipendente dagli stereotipi suggeriti:
    - o dalla evidenza intuitiva
    - o dalle immagini mentali memorizzate in modo a-critico
    - o dagli automatismi dell'addestramento algoritmico

In contesti di razionalizzazione della realtà.

- L'***abilità*** nell'uso di alcuni ***strumenti*** (es. algoritmi) matematici elementari ma cruciali nel ruolo di descrizione e controllo (modellizzazione) della realtà.

In Piemonte si è riflettuto sugli strumenti e sui risultati dei Progetti Pilota 2 e 3 in molto ambiti: nelle fasi di formazione dei docenti a livello provinciale, nel Laboratorio di Valutazione in Matematica e Fisica della SIS – Piemonte, nei gruppi di lavoro dei progetti Valutascienza e Valutamath.

Anche se gli obiettivi sono sembrati adeguati, in generale, al livello scolare proposti, purtuttavia occorre rilevare che i differenti utenti dei vari di istituti superiore, posseggono strumenti linguistici e disciplinari(ad esempio utilizzo di formalizzazioni e simboli) molto differenti e tali da, o aumentare impropriamente la difficoltà degli item, o demotivare lo studente all'applicarsi nell'affrontare le prove.

La valutazione in altri paesi

Tutti i paesi dell'UE attuano valutazioni di sistema, nel complesso abbastanza simili fra di loro; i criteri di riferimento applicati da ciascun paese variano sulla base dei livelli o degli oggetti che vengono valutati. La valutazione può avere per oggetto aspetti diversi di un sistema educativo, dal progetto scolastico della scuola alla qualità del servizio, agli esiti degli esami esterni, alla definizione delle competenze di base o degli obiettivi finali.

I principali ambiti, che, in sede internazionale, sono oggetto di valutazione, sono:

- il sistema nel suo complesso

- le singole scuole
- il personale scolastico
- gli apprendimenti degli allievi.

Negli ultimi tempi, la maggior parte dei paesi ha adottato iniziative che prevedono l'istituzione di organismi specifici che si occupano di monitorare e controllare la qualità generale dei sistemi scolastici. In realtà solo in alcuni paesi i monitoraggi sono obbligatori e continui; in altri, i livelli decisionali si sono limitati ad intraprendere iniziative ancora in fase di elaborazione.

Come avviene in Italia (Direttiva n. 56 del 12/07/04), in genere agli organismi è affidata la valutazione

- di sistema, con particolare riferimento al funzionamento delle istituzioni scolastiche e al piano dell'offerta formativa;
- degli apprendimenti degli studenti.

Alle singole scuole è affidata l'autovalutazione.

In quasi tutti i paesi la valutazione degli **apprendimenti degli studenti** avviene attraverso prove nazionali standardizzate (test), il cui obiettivo è quello di rilevare, informando la nazione della situazione, il livello di qualità raggiunto dalla scuola in modo che possa essere continuamente migliorato. Nel quadro di tale obiettivo, molti paesi hanno deciso di organizzare degli esami esterni in corrispondenza di alcune tappe del percorso scolastico;

Due paesi, **Francia e Belgio**, si differenziano perchè usano le prove anche con scopo diagnostico e, per questa ragione, le propongono all'inizio dell'anno scolastico (per l'anno scolastico 2004/2005 in Francia il termine ultimo della somministrazione era il 24/09/2004): la diagnosi viene effettuata a livelli predefiniti e i risultati sono confrontati con il livello di competenze che gli alunni dovrebbero aver acquisito.

In seguito vengono elaborate e distribuite agli insegnanti le linee guida relative ai risultati emersi.

In Francia la Direction de l'evaluation et de la prospective propone tutti gli anni prove di francese e di matematica, con regole di somministrazione molto rigide e dettagliate; sono utilizzati come SW CASIMIR e J'ADE, a scelta, non essendo fra loro compatibili. Sono forniti un quaderno del docente e un quaderno dell'allievo (con il testo di tutti gli item); nel quaderno del docente, ricco di suggerimenti metodologici, si trovano gli indicatori che devono essere utilizzati per la correzione.

I docenti stessi infatti correggono le prove, inviano solo i risultati, elaborano i dati ottenuti con il SW a disposizione e trattengono i quaderni degli allievi, per meglio rilevare i progressi durante l'anno Per la correzione di ogni item esistono indicatori diversi: un indicatore per la mancanza di risposta, più indicatori sia per la risposta corretta, sia per quella errata.

Come esempio vengono presentati alcuni esercizi proposti negli anni passati: sia la parte che si trova nel quaderno del docente, sia la parte che si trova nel quaderno dell'allievo.

ESEMPI (sono proposti due esempi francesi reperibili sul sito indicato nella sitografia, mentre le prove INValSI sono reperibili sul sito e le riflessioni sugli esiti, in matematica, sul sito di Valutamath)

Esercizio per il secondo ciclo scolastico

Dal quaderno per il docente

Attività: trovare tre numeri inferiori o uguali a 6, con somma uguale a 11.

Consegna per la somministrazione: leggere il testo ad alta voce; ricordare agli allievi i numeri che compaiono su un dado (da1 a 6).

Commenti: l'esercizio può essere risolto almeno in due modi:

- sia utilizzando rappresentazioni(con punti) ed enumerando gli elementi;
- sia usando scritture additive, con tecniche di calcolo.

Permette di vedere se i bambini utilizzano le scritture numeriche o le rappresentazioni. Può essere presentato sia prima del "passaggio alla decina", sia dopo, tenendo però presente che le procedure di soluzione varieranno secondo il momento scelto.

Se si constatano difficoltà, si può:

- fornire materiale (dadi, gettoni,...);
- limitare i numeri possibili sui dadi (per es. da 1 a 3);
- diminuire il valore della somma;
- permettere l'uso di una scala numerica.

L'importanza di questo esercizio consiste nel fatto che le soluzioni sono possibili a diversi livelli (il valore della somma è una variabile didattica non trascurabile) e che può essere affrontato come un gioco.

I bambini, abituati a sommare due numeri sono sovente sconcertati dall'addizione di tre numeri.

Consegna per la codifica: se un allievo propone le tre soluzioni seguenti: 6+4+1; 1+4+6; 4+1+6, otterrà il codice **1**; lo stesso se nelle soluzioni compaiono numeri diversi, considerando ininfluente la posizione dei dadi. Il docente potrà cercare di capire come hanno ragionato gli allievi che hanno proposto questa ultima soluzione e ricordare la proprietà commutativa e associativa dell'addizione.

Codice 1: tre soluzioni possibili

Codice 4:due soluzioni possibili

Codice 9: una soluzione

Codice 0: assenza di risposta

Dal quaderno dell'allievo

Pietro, lanciando tre dadi, ha fatto 11.
Quali numeri indicano i dadi?
Trova tre soluzioni possibili.

Prima soluzione: $\square + \square + \square = 11$

Seconda soluzione: $\square + \square + \square = 11$

Terza soluzione: $\square + \square + \square = 11$

Esercizio per il terzo ciclo scolastico

Dal quaderno del docente:
Competenze:leggere e rielaborare i dati di una tabella.
Tipo di attività: viene presentata una tabella contenente dati sull'altezza, la velocità di volo e l'apertura alare di alcuni uccelli. L'allievo deve rispondere a domande e completare la tabella con le informazioni che vengono fornite.
Condizioni per la somministrazione:
tempo concesso: 10 minuti
materiale necessario: biro
Capacità valutate:
leggere informazioni in una tabella (item 1 e 3)
ricavare informazioni (item 2)
completare una tabella con informazioni (item 4)
Prerequisiti (competenze e/o conoscenze non valutate, ma necessarie): comprensione di un testo scritto.
Consegna per la somministrazione: dite agli allievi: "Ecco una tabella, che indica, per alcuni uccelli, l'altitudine del volo, la velocità e l'apertura alare. Osservate attentamente la tabella e rispondete alle tre domande. Poi completate la tabella con le informazioni che vengono fornite."
Parlate delle caratteristiche del volo degli uccelli e illustrate il significato di "apertura alare".
Commenti:
l'item 1 permette di verificare se l'allievo è capace
- di leggere una tabella a doppia entrata
- di ricavare dati per rispondere a domande
- di associare dati per fornire una risposta

l'item 2 permette di verificare se l'allievo è capace di rielaborare, scegliere, organizzare.
La difficoltà consiste solo nella comprensione della domanda.
Risposte e relative codifiche:

item 1 a:	avvoltoio	codice 1
	altra risposta	codice 9
	nessuna risposta	codice 0
item 1 b:	avvoltoio, oca, cigno, gru	codice 1
	risposta parziale (avvoltoio e gru)	codice 3
	ordine dal più lento al più veloce	codice 5
	altra risposta	codice 9
	nessuna risposta	codice 0
item 1 c:	230 cm o 230	codice 1
	300 cm o 300	codice 6
	170 cm o 170 o oca	codice 7
	altra risposta	codice 9
	nessuna risposta	codice 0
item 2:	sono stati inseriti solo 3 km e 200 cm	codice 1
	è stato inserito solo uno dei due dati	codice 3
	oltre a 3 km e 200 cm compare 4 kg	codice 4

altra risposta codice 9
nessuna risposta codice 0

Suggerimenti pedagogici: lo stesso esercizio può essere presentato con altri dati o con ulteriori completamenti; per comprendere se l'allievo sa attribuire un significato ai dati di una tabella, si può far tradurre i dati sotto forma di un testo.
Le competenze relative all'uso, alla lettura di tabelle sono necessarie in diversi campi; può essere utile sviluppare tali competenze in ogni occasione, per sintetizzare informazioni.

Dal quaderno dell'allievo
Osserva la tabella e rispondi alle domande:

	Altezza del volo	Velocità di volo	Apertura alare
Oca	9 km	142 km/h	170 cm
Gru	4 km	50 km/h	230 cm
Avvoltoio	11 km	150 km/h	300 cm
Cigno	8 km	88 km/h	250 cm
Cicogna			
Aquila			

1 a) quale uccello vola più alto?
1 b) ordina i nomi degli uccelli dal più veloce al più lento:
1 c) qual è l'apertura alare dell'uccello più lento?

2) inserisci le seguenti informazioni nella tabella, se è possibile.
- La cicogna vola ad una altitudine di 3 kilometri
- L'aquila pesa 4 kg. ed ha un'apertura alare di 200 cm.

Bibliografia e sitografia

- **Ricerca Educativa** Collana INValSI **Sezione strumenti:** R. Melchiorri - ADAS "Il laboratorio della valutazione, 1 Aspetti concettuali
www.piemonte.istruzione.it progetto Valumath
www.invalsi.it
http://cisad.adc.education.fr/eval/
- Rapporto Elias del 12/10/04 (www.invalsi.it)

QUESTIONI SULL'USO STRUMENTALE E CONCETTUALE DEL LINGUAGGIO GEOMETRICO

Concetta De Petro – Domenica Margarone – Alfio Petrone
(Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica
Dipartimento di Matematica e Informatica – Università di Catania)

È risaputo che la geometria è l'ambiente più adatto per passare da osservazioni intuitive dello spazio sensoriale a gradi sempre più elevati di concettualizzazione e di astrazione. Nel processo di formazione del pensiero geometrico è determinante il sostegno della rappresentazione per immagini, che crea un prezioso collegamento fra il mondo visibile e il mondo delle idee. L'intuizione e l'esperienza vanno poi opportunamente integrate con un approccio didattico che sposti gradualmente l'attenzione dal concreto all'astratto. È il continuo e stimolante esercizio all'osservazione, all'intuizione, alla congettura, all'argomentazione ed alla dimostrazione che rende l'esperienza concettuale e strumentale della geometria fondamentale per lo sviluppo delle facoltà logiche e cognitive.

Una riflessione sulla geometria e sul ruolo del suo insegnamento fa però emergere molte incertezze su come insegnarla e pone tanti interrogativi su diverse questioni aperte: quale educazione geometrica proporre per la formazione delle giovani generazioni? Quali esperienze attivare in classe? Quali strategie metodologiche scegliere? Come conciliare il percorso geometrico euclideo tradizionale e quello delle trasformazioni? Come scegliere gli eventuali teoremi da dimostrare e i problemi da proporre?

L'attività che abbiamo proposto in uno del laboratori del Convegno, rivolta principalmente a docenti del biennio della scuola superiore, aveva lo scopo di ricercare e confrontare metodologie atte a valorizzare la valenza formativa del sapere geometrico, mettendo a fuoco il ruolo centrale che gioca il rapporto tra linguaggio, pensiero e significatività degli apprendimenti nell'interazione insegnamento-apprendimento.

A tal fine ci si è soffermati a riflettere sulla funzione educativa svolta dalle definizioni, dalle classificazioni e dalle dimostrazioni a partire da alcune situazioni emblematiche da noi individuate e da cui abbiamo preso spunto per animare una discussione.

L'abitudine all'uso di un linguaggio essenziale, preciso e non ambiguo è una delle competenze che la geometria contribuisce a formare. Proprio per questo motivo si è voluto porre l'accento sia sulla incongruenza, ed in qualche caso anche sull'inesattezza linguistica e semantica, di talune definizioni sia sulla discutibile organizzazione di alcuni sistemi di classificazione.

Abbiamo considerato definizioni la cui formulazione per ridondanza (rombo, rettangolo, ...) o per superficialità espressiva (angoli consecutivi, angoli opposti al vertice, ...) rischia di generare ambiguità e misconcetti e analogamente abbiamo preso in esame classificazioni non rispondenti ai criteri matematici richiesti, come quelle dei triangoli e dei quadrilateri.

L'attenzione all'aspetto metodologico, indiscutibilmente di interesse centrale per chi si occupa di costruire interazioni significative fra gli alunni e il sapere, ci ha indotti a programmare nel laboratorio uno spazio particolare da dedicare alla compilazione ed alla rielaborazione di schede di lavoro relative agli argomenti sviluppati. Un confronto dialettico sugli aspetti didattici sollevati e sulle strategie opportune proposte ha completato l'attività.

La riflessione sul cosa e sul come insegnare, intimamente connesse tra loro, non potevano non aprire il confronto sulla dimostrazione.

Nella didattica della scuola secondaria la tradizione culturale italiana ha sempre considerato la geometria come il terreno privilegiato per fare dimostrazioni. Ma non è facile riuscire a far avvertire agli studenti la necessità della dimostrazione o suscitare l'abitudine a valutare e a confutare le informazioni. Abbiamo puntato soprattutto sulla ricerca di nuovi espedienti per rendere gli studenti consapevoli della necessità di dimostrare anche proprietà che all'apparenza sembrano scontate ricorrendo, ad esempio, alle illusioni ottiche. E ancora, non basta che un triangolo "sembri" rettangolo perchè lo sia, ma bisogna verificare che soddisfi la relazione del teorema di Pitagora, senza peraltro confondere il teorema con il suo inverso. Far cogliere le diverse funzioni della dimostrazione, avviare al dimostrare ed al confrontare percorsi dimostrativi differenti, con la consapevolezza delle possibilità e dei limiti di ciascun metodo, è uno degli obiettivi ambiziosi ma non irraggiungibili della didattica della matematica.

Un valido aiuto in tal senso viene sicuramente offerto dai software geometrici di tipo dinamico. Essi consentono di verificare le proprietà delle figure attraverso la manipolazione e permettono di consolidare le conoscenze mediante la costruzione dinamica degli oggetti geometrici che possono essere esplorati in modo diretto e interattivo.

Non è però sufficiente al docente conoscere le diverse funzioni dei software disponibili, ma è importante anche sapere organizzare idonee situazioni di apprendimento creando gli stimoli necessari affinché ciascun allievo si appropri della conduzione e del controllo del proprio processo cognitivo.

In tal senso, sono state presentate schede di lavoro e questionari, per far vedere come il loro impiego può costituire un ottimo espediente didattico se esse sono opportunamente elaborate. Le prime accompagnano gli alunni nella costruzione delle figure e li aiutano a scoprirne le proprietà, i secondi li guidano, attraverso domande stimolo, a formalizzare i risultati ottenuti. Indurli a rivedere e organizzare i concetti studiati e le informazioni raccolte diventa l'occasione per verificare le competenze acquisite in riferimento sia all'uso corretto del linguaggio specifico sia ai contenuti geometrici relativi all'argomento esplorato.

Il dibattito che si è innescato all'interno del gruppo di lavoro ha portato ad un commento ragionato e alla proposta di modifiche che hanno reso il materiale proposto ancora più proficuo per il loro uso nell'attività didattica.

Riferimenti bibliografici.

Arzarello F. (1995). Proprietà logiche delle teorie geometriche. In Micale B., Pluchino S. (a cura di). *L'insegnamento della geometria.* Atti del XVII Convegno nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica, 27-29 ottobre 1994, Latina. *Notiziario della Unione Matematica Italiana.* Suppl. al n.8-9, 75-91.

Bernardi C. (1997). Come e che cosa dimostrare nell'insegnamento della matematica, *L'Inse-gnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 20A-B, n. 5.

De Petro C., Margarone D., Micale B., Petrone A. (2003). Un modello di formazione e l'insegnamento della geometria, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 4.

Furinghetti F. (1991). *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto,* Atti del secondo Internucleo Scuola Secondaria Superiore, Quaderno n. 13.

Robutti O., Mosca M. (a cura di) (2003). *La formazione degli insegnanti: approccio didattico con le nuove tecnologie.* Atti del 1° Convegno nazionale delle scuole di specializzazione, Indirizzo Fisico-Matematico-Informatico, 8 maggio 2003, Torino. Milano: Ghisetti e Corvi.

Villani V. (1995). Il ruolo delle trasformazioni nell'insegnamento della geometria. In Micale B. e Pluchino S. (a cura di). *L'insegnamento della geometria.* Atti del XVII Convegno nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica, 27-29 ottobre 1994, Latina. *Notiziario della Unione Matematica Italiana.* Suppl. al n.8-9, 29-44.

ALGORITMI RICORSIVI: DALLA VISUALIZZAZIONE GEOMETRICA AL CALCOLO INFINITESIMALE E LORO IMPLEMENTAZIONE A LIVELLO INFORMATICO.

Dorotea Jacona (ITI G.Marconi - Supervisore SISSIS Catania)
Pasquale Levi (ITI G. Marconi –Università di Catania- Ingegneria DIIT)

Una scuola moderna deve sviluppare nell'alunno conoscenze, abilità, competenze coniugando il sapere, il fare e l'agire. La cultura di base non può limitarsi ai saperi critici e alle capacità d'apprendimento: infatti essa diventa patrimonio veramente spendibile e apprezzabile se autonomamente l'individuo riesce a rendere operative le conoscenze acquisite.

Nella società multiculturale e globalizzata è sempre più difficile identificare un nucleo di *valori comuni* e trovare l'equilibrio ottimale tra saperi fondamentali e capacità operative; è necessario quindi il superamento di un modello enciclopedico del sapere a vantaggio di un modello in cui l'apprendimento, la conoscenza e la competenza si acquisiscono mediante un ridimensionamento del potere formale (*sapere*) a vantaggio del *fare* e dell'*agire*.

Questo modello di *fare scuola* e di progettare l'istruzione da qualche decennio viene messo in atto negli istituti tecnici industriali ad indirizzo informatico. Il passaggio da una scuola dell'*auditorium* ad una scuola del *laboratorium,* in questi istituti, è una realtà consolidata da tempo, infatti la metodologia laboratoriale, dell'imparare facendo, è parte integrante del curricolo anche in discipline fortemente formalizzate come la matematica (30-50% del monte ore), oltre alle discipline d'indirizzo quali informatica, sistemi ed elettronica.

Il laboratorio, se ben organizzato, diventa un'esperienza ottimale d'apprendimento in quanto:

- è interattivo, consentendo il feedback dell'informazione,
- ha obiettivi specifici e procedure stabilite,
- è totalizzante fornendo la sensazione di un coinvolgimento diretto, tramite la sperimentazione, nell'elaborazione del compito,
- fornisce strumenti appropriati, adatti a chi li usa e al compito, così da aiutare senza distogliere.

Inoltre gli alunni nella pratica laboratoriale, anche monodisciplinare, utilizzano competenze trasversali alle diverse discipline, che concorrono all'elevamento della persona, della sua formazione e della sua cultura.

Quest'ultimo aspetto sarà maggiormente amplificato se il laboratorio diventa di carattere pluridisciplinare, centrato, cioè, su un nucleo tematico comune a più discipline, in quanto offre la possibilità di organizzare processi d'apprendimento attorno a punti di vista conoscitivi differenti, che aiutano i giovani ad acquisire una visione organica della realtà.

Permette, anche, di trasmettere agli allievi l'interrelazione fra le discipline, le analogie e le differenze dei loro codici linguistici ed epistemologici ed aprire e consolidare un confronto interdisciplinare fra docenti, al fine di promuovere nei discenti un discorso più unitario della cultura che possa suscitare interesse, partecipazione e entusiasmo nell'apprendere. Dal dinamismo dell'associazione di idee e di fatti ed eventi analoghi o contrastanti scaturisce una comprensione colorata di senso e di significati profondi.

Inoltre costituisce un occasione unica e insostituibile nella negoziazione dei linguaggi e dei metodi fra le discipline.
Nella prassi didattica la formazione matematica raramente viene inserita in un progetto più ampio di formazione scientifica unitario anzi, fra le stesse branche della materia, spesso non viene realizzata un'accurata interrelazione.
Per quanto fin qui esposto, la proposta di laboratorio realizzata al convegno ha come nucleo tematico centrale i *procedimenti iterativi*, comuni alla matematica e all'informatica, così da rendere possibile la realizzazione di processi d'apprendimento che tengono conto di forme di sapere differenti e di loro coniugazioni.
Si è scelto di intraprendere il discorso partendo dal mondo fisico reale, consapevoli che un simile approccio risulta più motivante in quanto stimola la curiosità, la meraviglia, la creatività degli studenti ed inoltre richiama quel processo (*induttivo*), tipico della cultura scientifica, che avendo origine da una situazione concreta va via via teorizzando per coglierne l'essenziale.
Il riferimento è stato quello dei *frattali e mondo reale*, in particolare i frattali relativi alla natura, arte e musica per giungere quindi alla considerazione che le procedure essenziali alla loro genesi sono l'iterazione e la ricorsione.
Dal punto di vista matematico si è potuto riscontrare come la definizione per ricorrenza abbia la stessa struttura del principio d'induzione. Si è dunque passati al confronto del principio d'induzione in matematica con quello delle scienze naturali, al fine di introdurre distinzione e diversità di ordine epistemologico fra le due scienze.
La visualizzazione di procedimenti iterativi applicati a figure geometriche, triangolo e quadrato, realizzati con il software Cabri, hanno dato luogo alla curva di von Koch e alla *chiocciola*; il problema di calcolo dell'area e del perimetro di tali figure ha permesso l'introduzione di successioni e serie, che in questo caso possono beneficiare della visualizzazione geometrica offerta dai mezzi informatici per la loro decodifica teorica nell'attribuzione di significato a simboli, formule e operazioni.
I frattali si prestano quindi molto bene, sia per i loro aspetti matematici formali che per gli effetti grafici o acustici generabili in base ai valori numerici delle funzioni frattali, alla sperimentazione tramite semplici programmi in un qualsiasi linguaggio di programmazione o anche con sofisticati ambienti di sviluppo.
Lo studio dei frattali al computer stimola anche l'osservazione delle caratteristiche di complessità dei vari algoritmi utilizzabili e dell'impegno di risorse di elaborazione richieste. In particolare poi, lo sviluppo di algoritmi per i frattali porta ad approfondire i temi della programmazione con metodi iterativi o ricorsivi. Questi ultimi sono oggetto della nostra ricerca in quanto è possibile sviluppare algoritmi compatti e formalmente eleganti basati sul principio di induzione. La ricerca ha comunque evidenziato la complessità concettuale nell'impostare il passo di induzione e il notevole impegno di risorse macchina per l'esecuzione di questo tipo di programmi. A livello didattico si è ritenuto utile introdurre l'argomento presentando un algoritmo classico come N! codificato in C++ con il metodo iterativo prima e con quello ricorsivo poi, in modo da evidenziare le differenze concettuali e l'impegno di alcune risorse macchina come ad esempio lo stack. Un altro aspetto particolare della ricorsione viene poi evidenziato tramite l'algoritmo per il calcolo della serie di Fibonacci dove si nota come esista una ridondanza dei passi di calcolo.
Dopo queste considerazioni generali sugli algoritmi ricorsivi, si è proceduto alla implementazione di un programma in C ++ che rappresenta graficamente la curva di von

Koch con un algoritmo ricorsivo. Da un punto di vista strettamente tecnico, si sono presentati gli aspetti di base dell'ambiente di sviluppo Visual C++ e le soluzioni disponibili per integrare in esso le funzioni grafiche BGI Borland.
La ricerca si è conclusa con la presentazione dell'ambiente di sviluppo ULTRA FRACTAL 3, di cui si è attenzionato il meccanismo delle formule per impostare gli algoritmi frattali e quelli di colorazione e di trasformazione. Come esperienza di laboratorio, si è creato l'algoritmo per il calcolo del set di Mandelbrot con un'opportuna scelta del rendering grafico.

Conclusioni.

Lo studio dei frattali si è dimostrato particolarmente adatto per promuovere una didattica interdisciplinare dove i docenti di matematica e di informatica possono collaborare sugli aspetti scientifici e tecnici. La possibilità di coinvolgere gli allievi con gli aspetti grafici e sonori che l'informatica rende possibile realizzare sulla base dei risultati del calcolo frattale è certamente un fattore di stimolo e di facilitazione alla comprensione degli aspetti matematici di questo tipo di geometria.
Pertanto si ritiene molto positiva questa esperienza in quanto si presta molto bene a promuovere una metodologia didattica innovativa basata sulla multidisciplinarietà e l'apprendimento attivo di conoscenze scientifiche tramite l'esperienza al calcolatore

Bibliografia.

Donald A. Norman , *"Le cose che ci fanno intelligenti"* - ed. Feltrinelli.
"I materiali della commissione dei saggi" - ed. Le Monnier.
Courant Robbins , *"Che cos'è la matematica"* – ed. Boringhieri.
Pasquale Levi, *"La scuola italiana e le sfide tecnologiche del terzo millennio"* – Riforme e didattica - marzo 1999
Pasquale Levi, *"Docenti e computer"*- ScuolaInsieme - nov. 1997
Pasquale Levi, *"Reti di calcolatori"* – ed. HOEPLI - aprile 2005
Pasquale Levi, *"Sistemi operativi"* – ed. HOEPLI - aprile 2005
Pasquale Levi, *"Programmazione assembly"* – ed. HOEPLI - aprile 2005

IL FLIPPER, IL CASO E LA PROBABILITÀ LA MACCHINA DI GALTON PER CONOSCERE E COMPRENDERE LA DISTRIBUZIONE NORMALE

Judit Jassó[1] (judit.jasso@stat.unipg.it),
Maria A. Pannone[2] (pannone@stat.unipg.it)

Il laboratorio si basa sull'ipertesto "La macchina di Galton" sviluppato da Judit Jassó, Enzo Lombardo, Maria A. Pannone (CIRDIS, 2003). L'ipertesto è disponibile sul sito internet del CIRDIS (http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/index.html).

Introduzione - Perché parlarne?

L'importanza della distribuzione "gaussiana", o "normale", deriva principalmente dal fatto che è un modello per descrivere la variabilità con cui si presentano i dati in molti processi naturali.

La distribuzione gaussiana ha numerose applicazioni in vari ambiti scientifici, dalla fisica alla biologia, alla medicina, alle scienze sociali ed economiche.

L'ipertesto "La macchina di Galton" consente di collocare storicamente la genesi e lo sviluppo della distribuzione normale, di collegare concetti di analisi, combinatoria, probabilità e statistica, di utilizzare simulazioni e fogli di calcolo elettronici in maniera interattiva. Ci si propone in tal modo di avvicinare gli studenti alle problematiche delle applicazioni della matematica al mondo reale e suscitare interesse e curiosità nei confronti del metodo induttivo.

L'ipertesto si presta ad essere collegato a varie attività didattiche che normalmente si svolgono nelle scuole superiori: nell'ambito dei programmi di matematica (studio delle funzioni, combinatoria, probabilità e statistica), di fisica (teoria degli errori di misura), di scienze (biologia).

Destinatari

Il laboratorio è principalmente rivolto agli insegnanti delle scuole superiori, in quanto l'ipertesto è indirizzato agli studenti di questo livello scolare ed è inseribile nell'insegnamento della matematica o di un'altra materia scientifica, ad esempio fisica o scienze.

Sviluppo dell'attività

Dopo una breve introduzione storica sulla figura di sir Francis Galton, l'inventore del dispositivo in questione, gli insegnanti sono invitati ad assumere il ruolo di studenti e, come tali, consultano l'ipertesto e la versione virtuale della macchina di Galton di cui è corredato. Con l'ausilio di apposite schede di lavoro distribuite fra i partecipanti si effettua la rilevazione dei dati ottenuti dagli esperimenti fatti con questo dispositivo virtuale e, successivamente, la loro elaborazione.

---

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli studi di Perugia.
[2] Dipartimento di Economia, Finanza e Statistica, Università degli studi di Perugia.

In tal modo si stimolerà una discussione sulle proprietà delle distribuzioni empiriche ottenute e, quindi, sulla possibilità di adottare la distribuzione binomiale come modello teorico per descrivere la disposizione finale delle palline.

Si esaminerà, poi, come l'ipertesto propone il passaggio dal discreto al continuo, allo scopo di introdurre la distribuzione normale e di parlare delle sue proprietà e delle sue applicazioni.

La discussione finale è focalizzata sulla valutazione dell'ipertesto nei suoi vari aspetti: qualità tecnica (funzionalità, accessibilità, chiarezza d'uso), qualità comunicativa (comprensibilità dei contenuti, attrattività, qualità grafica), qualità cognitiva (multidimensionalità degli aspetti cognitivi coinvolti, originalità), qualità critico-culturale (accuratezza dei contenuti, problematizzazione, interdisciplinarità) e qualità didattica (integrabilità rispetto al curricolo, adeguatezza dei contenuti).

Modalità di realizzazione

L'attività proposta richiede la disponibilità di postazioni computer complete di:

- applicazione Excel 95 o superiore;
- un browser aggiornato (IE 5.0 o superiore, o Netscape 4.6 o superiore) con plugin di Flash7.

UNA PROPOSTA DI UTILIZZAZIONE DI TI - INTERACTIVE! PER L'INTRODUZIONE DEL "CALCULUS" NEL BIENNIO DELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

Domingo Paola
(Liceo scientifico A. Issel – Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova)

Premessa

In questo lavoro mi propongo di presentare alcune possibili modalità di utilizzazione del software TI-InterActive! per l'introduzione del *Calculus* nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Ho utilizzato volutamente il termine *Calculus* in luogo di "elementi di analisi matematica", per suggerire fin da subito che l'approccio che intendo proporre allo studio delle grandezze che variano (e alle relative tecniche) è fortemente operativo, teso soprattutto a favorire la costruzione di significato dei concetti fondamentali su radici cognitive rese accessibili proprio grazie all'uso degli strumenti informatici.

Il software TI-InterActive!

TI InterActive! è un software matematico che mette a disposizione dell'utente, in un unico ambiente, diverse funzionalità: la manipolazione numerica, grafica e simbolica; la possibilità di costruire ed eseguire fogli di lavoro interattivi, grazie a un elaboratore di testi, a un foglio elettronico e alla funzionalità di gestione delle animazioni; infine un browser particolarmente efficiente per navigare in rete. Ti – InterActive! è inoltre un ambiente aperto, che può permettere di importare dati da vari altri dispositivi, come le calcolatrici grafico – simboliche o sensori che rilevano grandezze fisiche. Le modalità di utilizzazione di TI InterActive! sono molteplici: può essere usato come "lavagna" per rendere più efficaci e dinamiche le spiegazioni dell'insegnante, oppure per progettare e costruire esercitazioni per piccoli gruppi di lavoro. Forse la modalità di utilizzazione più innovativa e significativa è quella relativa alla costruzione di schede di lavoro che propongano attività di esplorazione e richiedano, infine, la sistemazione delle conoscenze e delle tecniche apprese durante il lavoro (sistemazione che dovrà essere condotta dagli studenti, con l'aiuto dell'insegnante). In tal modo, le schede progettate dal docente, potrebbero fungere da capitoli di una teoria che, gradualmente, organizzi e sistemi conoscenze e tecniche oggetto di studio.
In rete, all'indirizzo http://www.matematica.it/paola/TIINTERACTIVE/Videoscrittura.tii è possibile, possedendo TI-InterActive! o una sua versione demo, effettuare alcune esercitazioni che dovrebbero consentire di acquisire in breve tempo una conoscenza di base delle risorse che il software mette a disposizione dell'utente.
Desidero ora presentare alcune attività che sono solito proporre a studenti di primo biennio di liceo scientifico per un approccio ai seguenti concetti fondamentali del *Calculus*: la linearità locale; la continuità puntuale; le relazioni tra integrazione e derivazione. Ciascuno di questi concetti viene introdotto utilizzando il software per consentire agli studenti di costruirsi significati fondandosi su alcune possibili radici cognitive (nel senso di Tall, 2000) di tali concetti. In particolare la rettificazione locale come radice cognitiva per il concetto di linearità locale; il grafico di una funzione che

diventa piatto, se stirato lungo l'orizzontale, per il concetto di continuità puntuale; l'area sottesa a una curva e il grafico che diventa piatto, per le relazioni tra derivabilità e continuità (Tall, 2000).
In tutte queste attività, TI-InterActive! funziona come un *generic orgnizer* (nel senso di Tall, 1989), ossia da ambiente di insegnamento – apprendimento che mette in condizione chi apprende di fare esperienza di oggetti matematici, di imparare per tentativi ed errori, di esplorare situazioni significative, che propongono diversi esempi e controesempi.
In ogni paragrafo verranno prima presentate le attività con TI-InterActive! a cui farà poi seguito un beve commento teso a giustificarle precisando gli obiettivi didattici e cognitivi che ci si prefigge con il loro svolgimento.
Chi desideri approfondire le tematiche qui discusse, può far riferimento a (Paola, 2005).

Esempi di attività con TI-InterActive! per l'avvio al *Calculus*: la rettificazione locale
Attività 1.

a) Accedere all'ambiente grafico di TI-InterActive!
b) Accertarsi che le impostazioni degli Zoom prevedano lo stesso fattore per la scala orizzontale e per quella verticale;
c) rappresentare $y = e^x$ nell'intervallo $[-10; 10] \times [-9;11]$ che è centrato in $(0;1)$ e fare ingrandimenti successivi (intorno a questo punto). Osservare la rettificazione del grafico, ossia la tendenza del grafico ad assomigliare sempre più a una retta, man mano che si procede con gli ingrandimenti;
d) continuare l'esplorazione ciccando sul bottone "tangent" e agire con successivi Zoom In e Zoom Out e vedere come e quanto la retta tangente in (0; 1) approssima il grafico della funzione. Non appena il grafico della funzione sembra una retta coincidente con la tangente, si può far vedere che, facendo scorrere il punto di tangenza, c'è ancora per varie finestre grafiche un'apprezzabile variazione numerica della pendenza, il che suggerisce che si tratta, in realtà, non di una retta, ma di una parte di curva. In questo caso, quindi, l'ambiente numerico consente visioni molto più raffinate e significative di quello grafico.
e) In seguito si può ritornare alla schermata iniziale e percorrere la curva con le tangenti. L'attenzione transita dagli aspetti locali a quelli globali e quindi un'attività di questo tipo aiuta a innescare quella dialettica locale / globale così importante nell'insegnamento – apprendimento del Calculus, ma non sempre ben chiara in un approccio tradizionale con carta e matita. Per esempio, si può far notare che prima ci si accorgeva della presenza di una concavità innanzitutto per differenza tra la retta tangente nel punto rispetto al quale si sono effettuati gli Zoom e la curva; solo in seguito si apprezza la concavità come caratteristica globale e intrinseca della curva.
f) Si può poi proporre un'analoga attività confrontando, in un ben determinato punto, una curva che ammette tangente con una che non ammette tangente (perché, per esempio, presenta un punto angoloso). Le differenze che le due situazioni presentano possono risultare anche sorprendenti per qualche studente.

Lo scopo di attività di questo tipo, che devono essere proposte e realizzate per più volte, sia in classe che a casa, è quello di far diventare innanzitutto la "rettificazione locale" una radice cognitiva per poter in seguito fondare su di essa il concetto di linearità locale intesa come possibilità di determinare la migliore approssimazione lineare di una funzione in un punto, concetto che può anche avere un grosso ruolo nello sviluppo della teoria del *Calculus*.

Le due nozioni di linearità locale e di "rettificazione locale" almeno da un punto di vista cognitivo sono profondamente diverse. La "rettificazione locale", ossia il fenomeno per il quale il grafico di certe funzioni appare come una retta se si fa un numero opportuno di ingrandimenti intorno ad alcuni punti, è un concetto che si fonda su esperienze fortemente percettive, relative a ciò che si vede quando si effettuano successivi Zoom sul grafico di una funzione. La linearità locale, ossia la proprietà per certe funzioni di poter essere approssimate, in alcuni loro punti, da una funzione lineare, è un concetto formale, che necessita, per essere introdotto, di un adeguato simbolismo che consenta di rappresentare la "migliore approssimazione lineare", quando esiste, di una funzione in un suo punto.

La rettificazione locale porta con sé, inevitabilmente, anche l'idea di funzione non derivabile in certi punti: si tratta, per esempio, di quelle funzioni il cui grafico, in quei punti, presenta cuspidi o punti angolosi. La linearità locale riguarda solo le funzioni derivabili: quelle per cui è possibile determinare la "migliore approssimazione lineare" in un punto (Piez, Smith, & Tall, in preparazione). Inoltre la linearità locale è essenzialmente un concetto locale, mentre la rettificazione locale esplorata con un software che consente di percorrere la curva, consente l'estensione a una visione globale della pendenza della funzione, considerata essa stessa come funzione.

L'approccio didattico che qui si suggerisce è di lavorare, utilizzando TI - InterActive!, sulla rettificazione locale per avviare alla comprensione del concetto linearità locale in un suo punto, espresso formalmente dall'espressione $f(x_0+h)-f(x_0)=\lambda(x_0)h+h\varepsilon(h)$, dove $\lambda(x_0)$ dipende solo da f e da x_0 e $\varepsilon(h)$ è un infinitesimo con h (tra l'altro ciò porta a un interessante strumento per il calcolo approssimato di $f(x_0+h)$ a partire dal calcolo di $f(x_0)$ e di $\lambda(x_0)$).

Esempi di attività con TI-InterActive! per l'avvio al *Calculus*: la piattezza locale

Attività 2.

Si considerino diverse funzioni, alcune continue e altre discontinue in qualche punto. Per ciascuna di esse:

a) si tracci il grafico;
b) si impostino le opzioni di Zoom uguali a 2 sull'asse orizzontale e uguali a 1 su quello verticale (in modo tale che la scala verticale rimanga fissata, ossia la funzione non venga stirata verticalmente, ma solo orizzontalmente);
c) si scelga un punto sul quale effettuare Zoom successivi

Si potrà osservare che le funzioni che sono continue nel punto diventano piatte, ossia si riducono a segmenti orizzontali (ovviamente comprese quelle che hanno punti angolosi, come $|x|$), mentre quelle discontinue nel punto rispetto al quale si sono fatti i successivi Zoom si riducono a due segmenti orizzontali di differente quota o tendono a sfuggire dallo schermo, a seconda di quello che accade nel punto di discontinuità.

Per definire una funzione discontinua in TI-Interactive si può seguire le istruzioni seguenti:

a) Si apre la finestra di manipolazione simbolica (Math Box)
b) Si accede al menu "Math" e, successivamente ai sotto menu "Variable" e "Define"
c) Si scrive Define g(x)= when(x < 0,x – 1,x + 1)
d) Si apre la finestra grafica (Graph) e si chiede di disegnare y1(x) = g(x)

Oppure si può seguire questo altro metodo:

a) Si apre la finestra di manipolazione simbolica (Math Box)
b) Si accede al menu "Math" e, successivamente ai sotto menu "Algebra" e "Piecewise"
c) Si definisce la funzione continua a tratti $g(x)$ utilizzando la sintassi facilitata del sotto menu "Piecewise"
d) Si apre la finestra grafica (Graph) e si chiede di disegnare y1(x) = g(x).

In questa attività TI - InterActive! viene utilizzato per costruire, a partire da osservazioni ed esplorazioni dinamiche, il concetto di continuità puntuale. In essa, infatti, abbiamo stirato orizzontalmente grafici di funzioni; in tal modo essi appaiono completamente piatti (ossia si riducono a un segmento orizzontale) se:
a) esiste un intervallo del tipo (x_0 – □, x_0 + □) sul quale i valori della funzione giacciono nell'intervallo ($f(x_0)$ – □, $f(x_0)$ + □);
b) il valore $f(x_0)$ si trova nel mezzo di un pixel di altezza 2□.
Tutto ciò porta in modo naturale alla definizione formale di continuità:. □ > 0. □ > 0 tale che $|x - x_0|$ < □ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)|$ < □ (Piez, Smith, & Tall, in preparazione).
Lo scopo di attività di questo tipo, che devono essere proposte e realizzate più volte, sia in classe che a casa, è quello di far diventare innanzitutto la "piattezza locale" una radice cognitiva per poter in seguito fondare su di essa il concetto di continuità puntuale, consentendo agli studenti di associare significati alla sua definizione formale.

Esempi di attività con TI-InterActive! per l'avvio al *Calculus*: relazioni tra integrabilità e derivabilità

Attività 3.
L'obiettivo è quello di valutare la relazione che esiste fra l'area $A(x)$ sottesa al grafico di una funzione f a valori positivi in un dato intervallo, diciamo da x a $x + h$ e $f(x)$, ossia il valore della funzione f in x.
Per motivi tecnici legati alla gestione dello Zoom, può essere opportuno, anche se non necessario, che il docente prepari il foglio di lavoro nel seguente modo:

a) Inserire la formula della funzione, per esempio sin x .
b) Inserire l'intervallo nel quale si vuole calcolare l'area[1], per esempio [1; 1,001] .
c) Far disegnare il grafico di sin x in [1; 1,001].
d) Fissare il fattore di stiramento verticale a 1 agendo sulle opzioni di Zoom.

---

[1] Sarebbe opportuno aver già aver fatto effettuare agli studenti attività di calcolo di aree sottese a grafici con quadrettature e plurirettangoli.

e) Tornare indietro, con Zoom out fino a vedere un grafico della funzione (in questo caso sin x) ben riconoscibile.

A questo punto si può consegnare il foglio di lavoro agli studenti e si può far partire l'esplorazione (il compito, ossia il calcolo dell'area sottesa al grafico di sin x nell'intervallo [1; 1,001] e la sua visualizzazione grafica, deve essere ben chiaro agli studenti). Innanzitutto si può far eseguire il calcolo alla macchina, che restituirà un numero[1] . Poi si può suggerire agli studenti di utilizzare la funzione Zoom per vedere sempre meglio quello che accade nell'intervallo [1; 1,001]. Poiché il fattore di stiramento verticale è fissato su 1, gli studenti vedranno, via via, il grafico appiattirsi e la superficie, di cui si vuole calcolare l'area, assomigliare sempre più a quella di un rettangolo di dimensioni sin(1) e 0.001. Si può far notare che, in generale, ciò vuol dire che, per le funzioni il cui grafico può essere reso piatto, l'area visualizzata è data da $f(x) \cdot h$.

Tutto ciò può preparare, in modo naturale e graduale, a dare significato al teorema fondamentale del calcolo. Infatti, se $A(x) = f(x) * h$, si ha anche: $\dfrac{A(x)}{h} = \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ e, passando al limite per h che tende a 0, $F'(x) = f(x)$.

In sostanza, quel che si può far passare è che la variazione dell'area è $f(x)$ volte la variazione della variabile indipendente x. Ossia la rapidità della variazione dell'area da x a $x + h$ (la pendenza della secante alla funzione area) tende ad avvicinarsi sempre più al valore della funzione in x, man mano che h diminuisce. Questo è proprio quanto afferma il teorema fondamentale del calcolo, solo che è detto nel linguaggio naturale, dopo aver fatto varie esperienze utilizzando il registro grafico – visivo. L'esplicitazione delle condizioni sotto le quali il teorema vale è spesso una delle principali cause della perdita di significato: il significato intuitivo (che è poi quello di mettere in relazione tassi di crescita con l'ammontare della crescita) si perde a scapito di una concentrazione sugli aspetti sintattici di manipolazione algebrica e di trasformazione di una formula in un'altra.

Conclusioni

Concludo con un'informazione relativa ad alcuni materiali (progetto "matematica in rete") che si trovano in rete all'indirizzo http://www.matematica.it/paola/Corso%20di%20matematica.htm e che ho progettato e poi costruito con l'aiuto di alcuni colleghi (Aurelia Orlandoni, Ercole Castagnola, Cristiano Dané, Michele Impedovo, Stefania Mignani, Roberto Ricci e Luigi Tomasi) e che propongono un percorso completo per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado, con particolare attenzione allo studio delle grandezze che variano. I materiali sono stati pensati per avere le seguenti caratteristiche:

a) organici e sistematici (composti da tutte quelle caratteristiche che ha un libro di testo, ma con in più l'interattività consentita dal software);

[1] Gli studenti dovrebbero essere a conoscenza del fatto che la macchina esegue il calcolo con un metodo simile a quello dei plurirettangoli; in alcuni casi gli studenti potrebbero anche aver scritto veri e propri programmi in un linguaggio di programmazione come, per esempio, quello delle calcolatrici tascabili o aver costruito appositi fogli di lavoro con un foglio elettronico.

b) disponibili in rete per poter essere messi non solo a disposizione per l'utilizzazione, ma per l'analisi critica, il completamento;
c) pensati per lo studente, ossia non come aiuto all'insegnante per spiegare, ma come motivazione per lo studente a fare e, di conseguenza, come strumento di valutazione dei processi di pensiero degli studenti.

Rimane ovviamente molto da fare, in particolare:

a) un'analisi didattica critica dei materiali messi in rete;
b) la rimozione degli errori e delle inopportunità didattiche;
c) il completamento almeno al primo anno del triennio;
d) la sperimentazione e lo studio dei comportamenti degli studenti;
e) una seria valutazione della trasferibilità del progetto.

Confido che questo lavoro incuriosisca diversi insegnanti fino a motivarli a contribuire, nelle modalità e nei tempi che riterranno opportuni, all'avanzamento del progetto "matematica in rete".

Bibliografia

Paola, D.: 2005, L'insegnamento apprendimento del *Calculus* e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano, *Progetto Alice*, vol. VI, n. 16 43 - 87.

Piez C., Smith D., Tall D., (in preparazione for *Research in Technology in Teaching and Learning Mathematics*), Technology and Calculus, disponibile all'indirizzo web http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002z-tech-calc-smith-piez.pdf.

Tall D., 1989, "*Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change, For the Learning of Mathematics*", 9,3 37-42, disponibile all'indirizzo web http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf.

Tall D., 2000, "*Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (howthe computer can support mathematical thinking and learning)*", in Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand, pp. 3–20, ATCM Inc, Blackwood VA. ISBN 974-657-362-4, disponibile all'indirizzo web http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf.

RIFLESSIONI E PROPOSTE SULLA GEOMETRIA DELLO SPAZIO E IL SOFTWARE DI GEOMETRIA, CON RIFERIMENTO AL CURRICOLO DI MATEMATICA, ELABORATO DA UNA COMMISSIONE NOMINATA DALL'UMI-CIIM, PER LA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

Luigi Tomasi
(Liceo Scientifico "G. Galilei", Adria (Ro) - SSIS, Ferrara)

1. Introduzione

Nel laboratorio è stata inizialmente proposta, tramite un questionario, una discussione su quali sono le ragioni per cui la geometria dello spazio è così trascurata nel curricolo di matematica della scuola secondaria di secondo grado. Gli insegnanti di solito citano il poco tempo a disposizione per svolgere tutti i temi dei programmi, la difficoltà dell'argomento, la presunta scarsa integrazione della geometria dello spazio con altri temi del curricolo di matematica,... Anche quando la geometria dello spazio viene svolta, è presentata in una forma troppo astratta e senza dare rilievo alla visualizzazione. Nell'insegnamento inoltre, prevale la separazione tra geometria piana e geometria dello spazio e tra geometria sintetica e analitica. Tra le difficoltà intrinseche vi è certamente quella di saper rappresentare nel piano, in modo corretto, delle figure che stanno nello spazio. Per la geometria dello spazio, in particolare, non vi è un adeguato utilizzo delle tecnologie e del software di geometria. Non ci può dunque stupire se, all'esame di Stato o nelle prove di ammissione alle facoltà scientifiche, gli allievi in genere trascurano i quesiti riguardanti la geometria dello spazio.

2. Le proposte della Commissione UMI su "Spazio e figure"

Una Commissione nominata dall'UMI - Unione Matematica Italiana ha elaborato negli anni 2001-2004 una proposta di nuovo curricolo di matematica, per la scuola primaria e secondaria, all'interno del quale il tema della geometria è presente in modo significativo, integrato con gli altri nuclei tematici e trasversali. Uno dei nuclei tematici è stato chiamato "Spazio e figure" e fin dal titolo lascia intuire un ruolo significativo assegnato alla geometria dello spazio, da ottenere mediante una rinnovata impostazione didattica. Sinteticamente la proposta di curricolo dell'UMI, per quanto riguarda la geometria, propone:

- Continuità con il curricolo di matematica del primo ciclo scolastico.
- Svolgimento integrato, quando possibile, tra la geometria dello spazio e la geometria del piano, tra la geometria sintetica e quella analitica.
- Riferimenti e collegamenti con tutti gli altri nuclei tematici e trasversali.
- Rafforzamento e rivalutazione della geometria dello spazio.
- Preferire l'introduzione di "limitate catene di deduzioni" più che la trattazione sistematica della geometria.
- Porre l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà geometriche, da realizzare mediante l'uso delle nuove tecnologie (software di geometria) senza trascurare quelle più tradizionali;
- Attenzione ai collegamenti tra geometria e mondo reale (applicazioni nelle scienze, arte, tecnica);
- Importanza attribuita alle trasformazioni geometriche, in contesti motivanti e contemporaneamente al metodo analitico

- Presenza di spunti storici, come occasione di riflessione epistemologica e filosofica.

3. L'insegnamento della geometria dello spazio e il software di geometria

Il software di geometria dinamica può essere usato a diversi livelli di scuola e in vari modi. Si è sperimentato che una delle utilizzazioni più significative è possibile in tutta la scuola secondaria, in particolare nel biennio iniziale della scuola secondaria superiore. In questi livelli scolari il software può essere efficace per affrontare in modo diverso:

- problemi di costruzione (sono molto legati al disegno e alle classiche costruzioni "con riga e compasso");
- problemi di "esplorazione" di proprietà e formulazione di congetture;
- problemi presentati in forma "aperta", come avvio alla dimostrazione (dalla congetture alla dimostrazioni).

Con l'uso di questi software gli insegnanti possono proporre, in alternativa alle tradizionali lezioni "frontali", anche lezioni in laboratorio, di *problem solving*, di lavoro di gruppo, attività di scoperta guidata, in cui è lo stesso allievo ad esercitare un ruolo attivo nell'apprendimento. Molte attività di questo tipo, anche per la geometria dello spazio, si possono ritrovare nei volumi *Matematica 2001* e *Matematica 2003* contenenti il curricolo di matematica proposto dall'UMI.

Tuttavia, quanto esposto lo si può riferire quasi completamente all'insegnamento della geometria del piano. Ci si può chiedere se questi software, progettati per la geometria piana -come ad esempio *Cabri Géomètre*- possono essere utilizzati anche per l'insegnamento e apprendimento della geometria dello spazio. La risposta a questa domanda è senz'altro positiva. Tuttavia, per disegnare delle figure di geometria solida che possano conservare una certa dinamicità occorre conoscere inizialmente una delle tecniche per rappresentare un oggetto tridimensionale in un piano. Ne segue che nella costruzione di figure dello spazio –anche semplici- lo studente non può avere la stessa spontaneità - nell'uso del software- che si può ritrovare per le figure del piano. Dal punto di vista didattico si osserva quindi che tramite i software di geometria piana non è possibile l'esplorazione libera dell'allievo di proprietà dello spazio.

Se si vuole disegnare un oggetto tridimensionale nel piano si può scegliere di fare un disegno in prospettiva (proiezione centrale) oppure in assonometria (proiezione parallela). L'assonometria –se si usa il disegno tradizionale o un software di geometria- richiede minori prerequisiti matematici ed è quindi più semplice e intuitiva da utilizzare in classe. Tuttavia con l'assonometria si suppone di osservare una figura tridimensionale "dall'infinito" e questo non corrisponde alla nostra visione naturale, che è invece prospettica. Si conclude pertanto che la rappresentazione assonometria di una figura tridimensionale è di solito insoddisfacente, perché tende a "deformare" l'immagine in modo non naturale.

4. Presentazione di *Cabri 3D*, un software progettato per la geometria dello spazio

In questa parte del laboratorio sono state sinteticamente analizzate le caratteristiche del software di geometria dinamica *Cabri 3D* (uscito nel settembre 2004), progettato per la geometria dello spazio. Il software permette di ottenere figure di geometria dello spazio dinamiche e interattive, particolarmente efficaci per esplorare situazioni e fatti geometrici, in quanto favoriscono l'intuizione e il ragionamento nello spazio.

Nel corso del laboratorio sono stati discussi, tramite esempi, i vantaggi della visualizzazione dinamica e dell'interattività, permesse in modo del tutto innovativo

dal software *Cabri 3D*, per l'insegnamento della geometria solida. In particolare, sono state confrontate dal punto di vista didattico le caratteristiche di figure ottenute con *Cabri Géomètre* e con *Cabri 3D* per illustrare proprietà e problemi di geometria dello spazio (rette e piani nello spazio; poliedri; poliedri regolari; sfera cono e cilindro; isometrie nello spazio).
Uno dei problemi dell'insegnamento e dell'apprendimento della geometria dello spazio è legato alla difficoltà di esecuzione che hanno le figure nello spazio e quindi al ruolo giocato tradizionalmente dalla rappresentazione. La nostra concreta esperienza delle figure geometriche avviene nello spazio, ma la rappresentazione deve essere fatta nel piano, anche se si lavora sullo schermo di un computer. Fino a non molto tempo fa era quindi necessario, per poter intuire e visualizzare le proprietà geometriche, saper rappresentare una figura solida usando un particolare metodo di proiezione (proiezioni ortogonali, assonometria, prospettiva). È quindi particolarmente interessante avere a disposizione un software che permette di superare questi problemi iniziali e di costruire una figura senza il problema di conoscere –come requisito iniziale- i metodi di rappresentazione di una figura solida nel piano. In questo modo lo studente può operare sulla figura con più spontaneità e concentrarsi sulle proprietà geometriche più che sul metodo di rappresentazione della figura.
Un software come *Cabri 3D* colma una lacuna per quanto riguarda gli strumenti a disposizione per l'insegnamento interattivo della geometria dello spazio. Nella sua ideazione, nella struttura e nel funzionamento *Cabri 3D* è modellato sulle relazioni esistenti tra gli oggetti geometrici dello spazio tridimensionale. Queste caratteristiche differenziano *Cabri 3D* da altri software che pure permettono di costruire figure 3D, ma che sono orientati al disegno tecnico o alla grafica computerizzata.

5. Conclusioni

Nel laboratorio è stata proposta una riflessione sull'uso del software per l'insegnamento della geometria dello spazio, facendo riferimento al curricolo di Matematica elaborato dall'UMI. Si è visto come l'insegnamento della geometria solida possa essere rinnovato con l'uso delle nuove tecnologie, così come l'insegnamento e apprendimento della geometria piana hanno tratto vantaggio dal diffondersi dei software di geometria dinamica.
Si riassume qui di seguito quanto si è illustrato nel corso del laboratorio, ricordando tuttavia che occorre un lavoro di ricerca in classe per ulteriori verifiche sul campo.
Un software di geometria piana -come ad esempio *Cabri Géomètre*- può essere usato anche per la geometria dello spazio. Le costruzioni che si possono fare, però, sono molto laboriose e richiedono allo studente di conoscere un metodo di rappresentazione (assonometria o prospettiva) per poter rappresentare una figura tridimensionale. Per superare queste limitazioni, è particolarmente interessante, dal punto di vista didattico, sperimentare il software *Cabri 3D*, per le seguenti ragioni:

- è stato progettato appositamente per l'insegnamento della geometria dello spazio;
- permette di esplorare e costruire una figura tridimensionale con la stessa spontaneità con cui è possibile lavorare sulle figure piane con un software di geometria piana;
- permette di "vedere nello spazio", senza la difficoltà iniziale di dovere conoscere un metodo di rappresentazione;
- consente di visualizzare facilmente idee e fatti geometrici nello spazio;

- permette di progettare attività in laboratorio che portino a formulare congetture in situazioni geometriche dello spazio;
- può consentire di integrare maggiormente lo studio della a geometria dello spazio con quello della geometria piana, vedendo quest'ultima in un contesto più vasto.

In definitiva, con l'uso di *Cabri 3D* e più in generale del software di geometria dinamica è possibile intraprendere qualche strada nuova per l'insegnamento della geometria dello spazio e introdurre nella scuola secondaria questo tema in modo più vivace e motivante, così come viene proposto dal curricolo dell'UMI proposto in *Matematica 2003*.

Riferimenti bibliografici

AA.VV. (2004), *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario*, Liceo Vallisneri, Lucca.

D'Aprile M. et al. (2000). Un'indagine sulle conoscenze di geometria dello spazio degli studenti negli anni iniziali delle scuole superiori. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 23B, 5, pp. 423-454.

D'Aprile M. et al. (2001). Un'esperienza di laboratorio di geometria dello spazio. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 24B, 4. pp. 343-356.

Tomasi L. (2003), Geometria dello spazio e visualizzazione: considerazioni su insegnamento e uso del software, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 26A-B, 6, pp. 781-798.

Villani V. (1985), *La geometria: dallo spazio al piano*, Quaderno n. 2 del CNR, Università di Pisa.

FORME DELLO SPAZIO. DAI PROBLEMI DELLA CARTOGRAFIA ALLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE, ATTRAVERSO L'USO DI MODELLI CONCRETI.

S.Zoccante (sergiozoccante@tin.it), M.A.Chimetto (chimetto@liceoquadri.it)
(Liceo Scientifico G. B. Quadri di Vicenza, SSIS Veneto)

Perché non esiste una carta geografica perfetta? Quali sono le principali differenze tra la geometria di un piano e quella di una superficie sferica? E quali altri tipi di geometria esistono?

Per rispondere a queste domande abbiamo proposto un percorso che, a partire dalla storia della cartografia e della geodesia, introduce in modo semplice ed *operativo* i concetti fondamentali di *geodetica, superficie sviluppabile, proprietà di cerchi e triangoli* su superfici differenti, *curvatura*, geometria *ellittica* e *iperbolica.*

Per l'introduzione e l'analisi di ognuno dei concetti elencati, abbiamo utilizzato modelli concreti e manipolabili, facilmente realizzabili con materiali poveri: poliedri e loro sviluppi, coni, cilindri di cartoncino, solidi di legno, sfere di varie dimensioni ed elastici colorati o nastro adesivo per individuare cerchi massimi e triangoli su sfere o su altre superfici, *superfici iperboliche* realizzate *all'uncinetto*, un *pallone da calcio "iperbolico"*, un manichino.

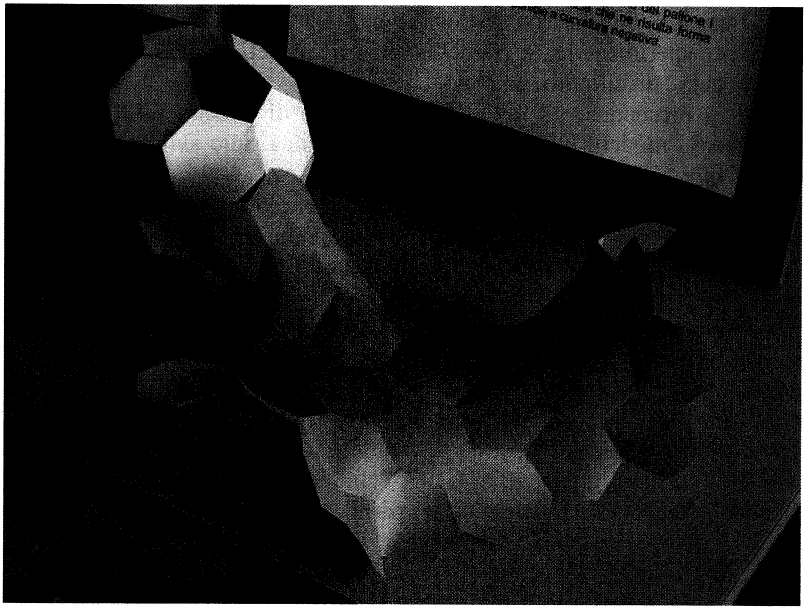
I materiali presentati in questo laboratorio sono stati effettivamente prodotti e utilizzati durante il ciclo di conferenze con mostra "*La terra e le sue rappresentazioni: un percorso tra geografia, matematica e tecnologia*" che si è svolto nella primavera 2004 al Liceo Scientifico "G. B. Quadri" di Vicenza e che era aperto al pubblico.
L'iniziativa era articolata in temi, ad ognuno dei quali corrispondeva una sezione della mostra:
MONDI DI CARTA*: da Anassimandro a Mercatore* (breve storia della cartografia, illustrata da riproduzioni di mappe storiche)
FORME DELLO SPAZIO*: geodetiche, curvature e altro* (la geometria delle superfici, con modelli concreti, tra cui quelli utilizzati n questo laboratorio)
MAPPE DEL MONDO*: rappresentazioni della superficie terrestre* (tipologie di mappe e loro proprietà)
UN MONDO 'VIRTUALE'*: rappresentazioni e simulazioni del terreno* (rappresentazioni tradizionali e digitali del terreno)
VISTI DALL'ALTO*: nuove tecniche di orientamento* (principi di funzionamento del GPS – Global Positioning System)
Si è trattato di un progetto che ha coinvolto varie discipline (geografia, matematica, topografia).
L'iniziativa è stata una sfida, tesa a mostrare che è possibile creare nella scuola percorsi interdisciplinari nei quali la Matematica gioca un ruolo fondamentale nel fornire strumenti per descrivere e interpretare la realtà, e che concetti difficili e profondi possono essere affrontati in modo non formale, ma *significativo* e *corretto*, attraverso l'uso di modelli concreti e di materiali che ben figurano in un *Laboratorio di Matematica.*

I temi *Forme dello spazio* e *Mappe del mondo* sono stati gestiti dagli insegnanti di matematica del nostro liceo. I materiali presentati in questo laboratorio sono relativi alla sezione *Forme dello spazio.*
Elenchiamo brevemente gli argomenti affrontati con i materiali usati allo scopo:

geodetiche: si utilizzano elastici, nastrini da regalo, nastri adesivi opachi sottili e vari modelli di superfici per sperimentare le proprietà di una geodetica su una superficie generica (un globo, un cubo, un cilindro, un cono).
sviluppi di superfici: si presentano gli sviluppi di superfici di poliedri, di cilindri, di coni. Si mostra attraverso i modelli l'immagine di una geodetica sullo sviluppo piano di una superficie sviluppabile.
cerchi sulla sfera: si analizza il concetto di cerchio su una sfera, con l'aiuto di modelli di policarbonato e plexiglas e se ne deduce la relazione tra circonferenza e raggio. Questo è già sufficiente per capire come anche una piccola porzione di superficie sferica non sia sviluppabile su un piano.
triangoli sulla sfera: sempre con l'uso di sfere di materiale povero si costruiscono modelli di triangoli sferici e si mostra come la somma degli angoli interni sia sempre maggiore di un angolo piatto e dipenda dall'area.
modelli iperbolici: si presentano modelli di superfici a curvatura negativa, quali il modello di carta ad anelli di William Thurston, il "pallone da calcio iperbolico" di Keith Henderson, il piano iperbolico all'uncinetto di Daina Taimina. Anche in questi modelli si può parlare di geodetiche, cerchi, triangoli. In particolare è facile vedere che la circonferenza di un cerchio è maggiore di quella di uguale raggio nel piano, che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto e che c'è un legame tra difetto angolare e area di un triangolo.

Bibliografia:

- Hilbert - Cohn-Vossen, *Geometria intuitiva,* Bollati Boringhieri, 1991
- G.Prodi, *I solidi rotondi, parte prima: cilindro e cono*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 20A-B, n.5, 1997
- G.Prodi, *I solidi rotondi, parte seconda: la sfera*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 21B, n.4, 1998
- D.Henderson e D. Taimina, *Crocheting the Hyperbolic Plane*, Mathematical Intelligencer, Vol. 23, No. 2, Spring 2001
- D.Henderson, *Experiencing Geometry in Euclidean, Spherical and Hyperbolic Spaces,* Prentice Hall 2004
- T.G.Feeman, *Conformality, the Exponential Function,and World Map Projections* The College Mathematics Journal vol. 32, n. 5, November 2001
- R.Osserman, *Poesia dell'universo, l'esplorazione matematica del cosmo*, Longanesi & C. 1996
- Jean-Pierre Petit, *Le avventure di Anselmo. Il Geometricon* Ed. Dedalo 1986
- Jean-Pierre Petit, *Le avventure di Anselmo. I Buchi Neri* Ed. Dedalo 1986 (Volumi scaricabili liberamente da: http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/free_downloads.htm#italien)
- J. P. Snyder, *Flattening the earth,* The University of Chicago Press 1993
- E. Maor, *Trigonometrical Delights,* Princeton University Press 2002
- C. Lardicci, *Aspetti geometrici della cartografia*, Archimede 34 (1982), pp. 23-42
- M.A. Chimetto eS. Zoccante, *Geometria e geografia. I problemi della cartografia: progetto per la produzione di materiali*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol 26A-B n.6, novembre-dicembre 2003.


del pallone i
che ne risulta forma
a curvatura negativa.