PRESENTAZIONE

Le leggi son, ma chi pon mano ad esse?
Dante, Purgatorio, XVI, 97

Gli interventi legislativi del 1977 (leggi 348 e 517) e i conseguenti nuovi programmi d'insegnamento (D.M. 9.2.1979) hanno apportato notevoli innovazioni nell'ordinamento della scuola media inferiore, istituita nel 1962. Al fine di adeguare anche *l'esame di licenza media* alle innovazioni così introdotte, il Ministro della P.I. ha nominato nel 1980 un'apposita commissione consultiva di cui hanno fatto parte, per il settore matematico-scientifico, i proff. Francesco Emiliani Zauli, Luciana Pecchioli, Vinicio Villani. La commissione ha formulato delle proposte, successivamente approvate con qualche modifica dal Consiglio Nazionale della P.I.. In data 26.8.1981 il Ministro della P.I., recependo le proposte suddette, le ha trasformate in un suo decreto dal titolo "*Criteri orientativi e modalità per le prove d'esame di licenza media*".

In considerazione dell'importanza dell'argomento, e per evitare il rischio che le nuove disposizioni vengano di fatto ignorate o interpretate in senso riduttivo, l'Unione Matematica Italiana ha deciso, sulla base di una proposta della C.I.I.M., di proseguire la propria azione in questo settore, iniziata con la pubblicazione del *Supplemento al Notiziario n. 10 dell'Ottobre 1979 (Sui Programmi di Matematica della Scuola Media, alcune tracce didattiche)* e ha quindi promosso la raccolta di una serie di *esempi* di prove scritte di matematica, chiedendo ai proponenti di attenersi alle indicazioni della commissione ministeriale e di corredare le loro proposte di schemi di soluzione, nonché di eventuali commenti, allo scopo di meglio inquadrare le prove stesse nel contesto delle attività svolte nelle classi secondo i nuovi programmi.

Ecco, anzitutto, la formulazione delle nuove norme per la *prova scritta di MATEMATICA* all'esame di licenza media, nella stesura definitiva del decreto ministeriale:

"La prova scritta di matematica deve tendere a verificare le capacità e abilità essenziali indicate dai programmi ministeriali, con riferimento ad un certo numero di argomenti, scelti tra quelli maggiormente approfonditi nel triennio. A tal fine si darà una prova che dovrà riferirsi a più aree tematiche (fra quelle previste dai programmi) e a diversi tipi di conoscenze; la prova sarà articolata su tre o quattro quesiti, che non comportino soluzioni dipendenti l'una dall'altra. In tal modo si eviterà che la loro progressione blocchi l'esecuzione della prova stessa. Ad evitare una suddivisione troppo schematica dei contenuti, argomenti tratti da temi diversi potranno opportunamente coesistere nei singoli quesiti.

I quesiti potranno toccare sia aspetti numerici, sia aspetti geometrici, senza peraltro trascurare nozioni elementari nel campo della statistica e della probabilità. Uno dei quesiti riguarderà gli aspetti matematici di una situazione avente attinenza con attività svolte dagli allievi nel corso del triennio nel campo delle scienze sperimentali, dell'educazione tecnica o eventualmente di altri ambiti di esperienza.

Ogni commissione deciderà se e quali strumenti di calcolo potranno essere consentiti dandone preventiva comunicazione ai candidati.

Durata della prova: tre ore".

A questo punto, è opportuno qualche breve commento:

I tre o quattro "quesiti" sostitutivi del tradizionale "problema", intendono consentire prove più articolate, che tocchino argomenti tratti da tutte e tre le principali aree tematiche dei nuovi programmi d'insegnamento, e cioè sia da quella aritmetico-algebrica, sia da quella geometrica, sia infine da quella della matematica del certo e del probabile.

Secondo la nuova normativa, la prova scritta di matematica non prevede per gli allievi la possibilità di opzioni fra due o più alternative[1]; proprio per questo appare particolarmente importante la raccomandazione di formulare i quesiti in modo tale che la mancata soluzione di uno tra essi non impedisca la soluzione dei rimanenti.

Ogni quesito potrà essere a sua volta articolato su più domande, il che consentirà di fornire agli allievi una sia pur sommaria traccia per le risposte; si eviterà peraltro che le domande scadano al livello di "quiz". Naturalmente non si dovrà pretendere che ogni allievo risponda dettagliatamente a tutte le domande di tutti i quesiti; le domande più impegnative potranno d'altra parte consentire ad alcuni allievi di mettere meglio in luce le loro attitudini, il che contribuirà a fornire elementi di giudizio anche in vista della funzione di orientamento che compete alla scuola media.

In qualche quesito si potrà richiedere una breve "esposizione" relativa a qualche argomento del programma, ma in tal caso sarà opportuno formulare le domande in modo ben preciso, onde evitare risposte generiche e dispersive.

Un ulteriore aspetto innovativo della nuova normativa sta nel fatto che uno dei quesiti dovrà riguardare una situazione di carattere interdisciplinare; potrà trattarsi di un'attività svolta nel corso del triennio nell'ambito della stessa cattedra di Scienze oppure in collaborazione con gli insegnanti di altre discipline; va tenuto però presente che, trattandosi di una prova di matematica, l'accento andrà posto sugli aspetti matematici della situazione presa in esame; ad es. sembra opportuno che, quando la soluzione di un quesito presuppone la conoscenza di una legge fisica, questa sia esplicitamente richiamata nel testo.

Infine, viene offerta la possibilità di proporre anche esercizi con dati numerici aderenti alla realtà della situazione considerata nei quesiti stessi e non artificiosamente semplificati, qualora

[1] Le norme per gli esami prevedono invece esplicitamente la possibilità di assegnare *prove diverse* nelle *diverse sezioni* di una stessa scuola.

la commissione decida di consentire l'uso dei calcolatori tascabili durante la prova; ovviamente la decisione su questo punto terrà conto sia del tipo di attività effettivamente svolta in classe nel corso del triennio, sia della disponibilità di calcolatori (personali o forniti dalla scuola) per tutti gli allievi.

A questa iniziativa della C.I.I.M. hanno collaborato i Nuclei di Ricerca Didattica operanti nella scuola media, nonché autori di libri di testo ed altri esperti del settore.

Le proposte pubblicate non sono tutte tra loro omogenee per impostazione e per difficoltà di elaborazione; neppure si può affermare che le proposte siano tutte completamente aderenti alle indicazioni della commissione ministeriale, sopra riportate. Questi fatti, d'altronde inevitabili visto che la C.I.I.M. si è limitata a dare vita all'iniziativa lasciando ai singoli proponenti la responsabilità delle loro proposte, non costituiscono comunque un limite alla validità della presente pubblicazione, ma possono anzi contribuire a suscitare un dibattito sugli obiettivi di fondo dell'insegnamento della matematica nella scuola media e sulle innovazioni contenute nei nuovi programmi d'insegnamento, nonché sulle nuove norme per le prove d'esame.

A tutti coloro che hanno collaborato all'iniziativa, va il più caloroso ringraziamento dell'Unione Matematica Italiana e della C.I.I.M..

Un ringraziamento particolare alle proff. Marino e Nello, del Nucleo di Ricerca Didattica di Pisa, ai proff. Lizzio, Micale, Milazzo, Milici, Vacirca del Nucleo di Ricerca Didattica di Catania, nonché al sig. Magnifico, tecnico del Seminario Matematico dell'Università di Catania, che hanno contribuito con intelligenza e dedizione a risolvere i molteplici e non facili problemi connessi con la redazione finale di questa pubblicazione.

A nome della C.I.I.M.
V. Villani

PROPOSTA DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI BARI

1° quesito. In Fig. 1 è rappresentato su carta millimetrata un riferimento cartesiano, nel quale l'unità di misura delle lunghezze è un centimetro.

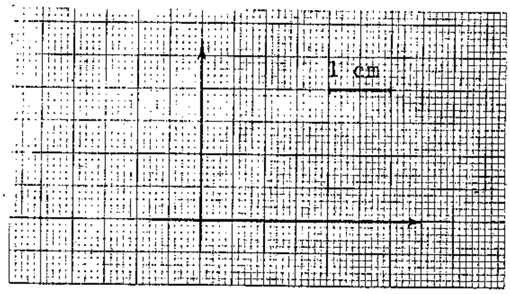


Fig. 1

Disegna il punto A(3,1) e i suoi simmetrici: B rispetto all'asse x , C rispetto alla origine, D rispetto all'asse y.

Determina le coordinate di B , C , D e calcola il perimetro, la lunghezza delle diagonali (a meno di 0,01) e l'area del rettangolo ABCD .

2° quesito. Vogliamo costruire con del cartoncino una piramide regolare a base quadrata con gli spigoli di base di 6 cm e la superficie totale di 84 cm^2.

Trova l'apotema della piramide e la lunghezza degli spigoli laterali.

3° quesito. Una industria produttrice di articoli sportivi ha fatto una indagine statistica in una scuola. Sono stati interrogati 520 ragazzi, a ciascuno dei quali è stato chiesto quale dei seguenti 4 sports preferisce: calcio, tennis, ciclismo, nuoto.

I risultati dell'indagine sono rappresentati dal diagramma della Fig. 2.

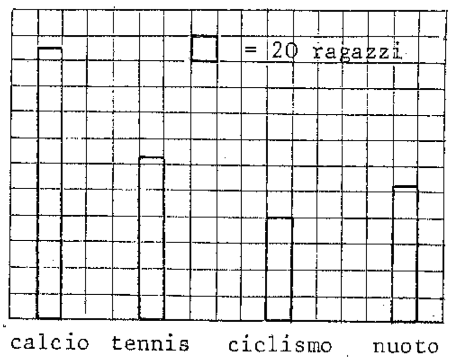


Fig. 2

In seguito, per sorteggio, sarà regalato un pallone ad uno dei ragazzi interrogati.

Che probabilità ha un ragazzo di vincere il pallone?

Ricava dal diagramma il numero dei ragazzi che preferiscono il calcio.

Qual è la probabilità che il pallone sia vinto da un ragazzo che preferisce il calcio?

4° quesito. In Fig. 3 è rappresentata la pianta di un appartamento ed è stato indicato il fattore di scala relativo a tale pianta. Per semplicità si è considerato trascurabile lo spessore dei muri. Il costo di quell'appartamento è di L. 500.000 al metro quadrato.

Qual è il suo costo complessivo?

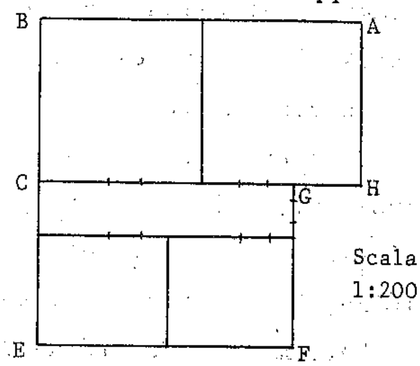


Fig. 3

Quanto verrebbe a costare al metro quadrato con lo sconto del 10% ?

COMMENTO DEI PROPONENTI

1° quesito. Si suppone che i ragazzi abbiano chiara la nozione di simmetria rispetto ad una retta, introdotta e usata, anche mediante piegatura di fogli, sin dalla I^a classe.

L'esercizio tende ad accertare se i ragazzi sanno rappresentare punti di assegnate coordinate, trovare le coordinate di assegnati punti e determinare la distanza di due punti.

2° quesito. Si suppone che i ragazzi non conoscano nessuna "formula inversa" e siano stati abituati a risolvere i problemi con le equazioni.

Si suppone inoltre che siano abituati a trasformare le equazioni in diagrammi.

3° quesito. L'esercizio ha il duplice scopo di controllare se i ragazzi sanno leggere un diagramma e se conoscono la nozione di probabilità.

L'esercizio è stato formulato in modo che le prime due risposte siano indipendenti.

Ovviamente si suppone di aver fatto in classe vari esercizi di trasformazione di tabelle di numeri in diagrammi e viceversa.

4° quesito. Si suppone che siano stati svolti in classe esercizi di questo tipo, eventualmente nell'ambito dell'Educazione Tecnica e in relazione a dei cenni sulla legge sull'equo canone.

La pianta dell'appartamento non è stata disegnata su carta millimetrata per verificare se i ragazzi sanno misurare.

Si è preferito fare la domanda sullo sconto relativamente al costo unitario, piuttosto che al costo complessivo, per rendere questo quesito indipendente da quello precedente dello stesso esercizio.

Per facilitare l'esposizione della soluzione sono stati indicati con delle lettere alcuni punti della pianta, ma si può fare a meno di usare tali notazioni e lasciare che siano i ragazzi stessi a introdurli nello svolgimento dell'esercizio.

Per lo svolgimento di esercizi del tipo proposto serve un decimetro e si può vietare l'uso delle calcolatrici tascabili, data la semplicità dei calcoli richiesti, mentre dovrebbe essere consentito l'uso delle tavole dei quadrati dei numeri naturali per la determinazione di un valore approssimato di $\sqrt{40}$.

Ovviamente, per la presenza dei disegni nel testo, volendo proporre esercizi del tipo suddetto, è indispensabile fornire ad ogni ragazzo una fotocopia del testo stesso.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. $B(3,-1)$, $C(-3,-1)$, $D(-3,1)$.

$\overline{CB} = \overline{AD} = 6$ cm

$\overline{AB} = \overline{CD} = 2$ cm

Perimetro: cm$(6 + 6 + 2 + 2) =$ cm 16

Area: cm$^2(6 \times 2) =$ cm^2 12

Applicando il teorema di Pitagora, ottengo $\overline{AC} = \overline{BD} =$ cm $\sqrt{36 + 4} =$ cm $\sqrt{40}$.

Il valore approssimato per difetto a meno di 0,01 di $\sqrt{40}$ è 6,32.

2° quesito. Indico con x la misura dell'apotema, espressa in centrimetri.

Area della base: cm$^2(6 \times 6) =$ cm^2 36.

Perimetro della base: cm$(6 \times 4) =$ cm 24.

Area della superficie laterale: cm$^2 \frac{24\,x}{2}$.

Area della superficie totale: cm$^2(\frac{24\ x}{2} + 36)$.

Poiché l'area della superficie totale deve essere 84 cm^2, ho: $\frac{24\ x}{2} + 36 = 84$.

Trasformo l'equazione nel diagramma

$$\square \xrightarrow{\times 24} \square \xrightarrow{:\ 2} \square \xrightarrow{+\ 36} \boxed{84}\ .$$

Trasformo il diagramma:

$$\square \xleftarrow{:\ 24} \square \xleftarrow{\times 2} \square \xleftarrow{-\ 36} \boxed{84}\ .$$

Seguendo le istruzioni di quest'ultimo ho:

$$\boxed{4} \xleftarrow{:24} \boxed{96} \xleftarrow{\times 2} \boxed{48} \xleftarrow{-36} \boxed{84}$$ (1)

Risulta $x = 4$. L'apotema della piramide è 4 cm.

Per trovare la lunghezza degli spigoli laterali, osservo che metà spigolo di base e un'apotema sono cateti di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è uno spigolo laterale.

Poiché metà spigolo di base è lungo 3 cm e l'apotema è 4 cm, applicando il teorema di Pitagora ottengo la lunghezza degli spigoli laterali: cm $\sqrt{16+9} =$ $=$ cm $\sqrt{25} =$ cm 5.

3° quesito. La probabilità che un ragazzo ha di vincere il pallone è $\frac{1}{520}$.

Poiché la colonna che rappresenta il numero dei ragazzi che preferiscono il calcio è formata da 10 quadratini e mezzo e ogni quadratino rappresenta 20 ragazzi, i ragazzi che preferiscono il calcio sono $10,5 \times 20 = 210$.

La probabilità che il pallone sia vinto da un ragazzo che preferisce il calcio è $\frac{210}{520} = \frac{21}{52}$.

4° quesito. La pianta è formata da due rettangoli di vertici rispettivamente A , B , C , H e C , E , F , G .

Poiché la scala è 1 : 200 , ad ogni segmento di 1 cm sulla pianta corrisponde un segmento di 200 cm sul pavimento dell'appartamento, cioè un segmento di 2 m .

Compilo la seguente tabella

---

(1) Comunemente i ragazzi completano direttamente con i numeri le caselle vuote del secondo diagramma. Qui si sono distinti i due momenti per maggior chiarezza.

	Distanze sulla pianta espresse in cm	Distanze reali espresse in m
$\overline{AB}$	5	10
$\overline{BC}$	2,5	5
$\overline{CE}$	2,5	5
$\overline{EF}$	4	8

Area del rettangolo di pavimento rappresentato dal rettangolo di vertici A , B , C , H : $m^2 (10 \times 5) = m^2\ 50$.

Area del rettangolo di pavimento rappresentato dal rettangolo di vertici C , E , F , G : $m^2 (8 \times 5) = m^2\ 40$.

Area del pavimento dell'appartamento: $m^2 (50 + 40) = m^2\ 90$.

Costo complessivo: L. $(500.000 \times 90) =$ L. 45.000.000.

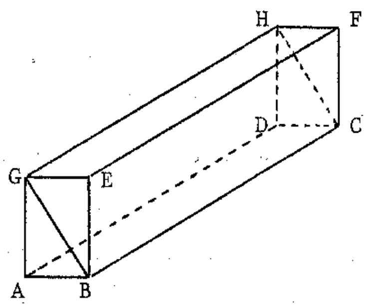
Sconto: L. $(\frac{10}{100} \times 500.000) =$ L. 50.000.

Costo al m^2 con lo sconto del 10%: L. $(500.000 - 50.000) =$ L. 450.000.

PROPOSTA N. 1 DEL NUCLEO DI RICERCA E SPERIMENTAZIONE DI CAGLIARI[1]

Dato il parallelepipedo rettangolo di spigoli: $BE = 3$, $AB = 2$, $BC = 9$ in un sistema di misura prefissato:

1) determina il volume del solido e la sua superficie totale.



2) quanti sono i parallelepipedi rettangoli con i lati espressi da numeri interi e di volume uguale a quello dato?

   Esponi il ragionamento che hai fatto.

   Fra tutti questi solidi, quale pensi che abbia la superficie totale maggiore e quale quella minore?

   Giustifica la risposta.

3) Congiungi G con B e H con C . Ottieni così il rettangolo BCHG ; trovane l'area. Sapresti dire in quale dei parallelepipedi precedenti tale rettangolo avrà l'area massima ed in quale quella minima?

4) I parallelepipedi trovati rappresentano dei capannoni industriali. Se il costo di ognuno di essi è di L. 750.000 per ogni unità di superficie, quali pensi che l'impresa costruttrice abbia convenienza a realizzare? E quale pensi che sia più conveniente ad un eventuale acquirente?

   Giustifica le tue risposte.

   E' consentito l'uso del calcolatore.

---

[1] Il Nucleo di Ricerca e Sperimentazione di Cagliari propone due compiti per le prove di esami di matematica. Ognuno dei due compiti proposti è volto alla verifica dell'acquisizione di concetti tratti da temi diversi, nonché alla verifica della capacità di fare delle osservazioni critiche su quanto preso in esame.

Il primo quesito di ciascun compito va considerato come "propedeutico" agli

RISOLUZIONE DEL COMPITO ESEGUITO DAGLI ALUNNI

1) Suppongo che le misure siano espresse in centimetri.

$V = 3 \cdot 2 \cdot 9 = 54 \ cm^3$

$St = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 9 \cdot 2 + 2 \cdot 9 \cdot 2 = 12 + 54 + 36 = 102 \ cm^2$

2) Per ottenere un parallelepipedo di volume $54 \ cm^3$ procedo nel modo seguente: scompongo in fattori 54 ed ottengo $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$, cioè $3^3 \cdot 2$. I divisori di 54 sono: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, quindi le possibili terne sono:

1,6,9 ; 1,3,18 ; 2,1,27 ; 1,1,54 ; 3,3,6.

Ho già la superficie totale della terna 3, 2, 9, che è 102, ora mi calcolo le altre

$$(3,3,6) \ St = 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 6 = 18 + 72 = 90 \ cm^2$$

$$(1,6,9) \ St = 2 \cdot 1 \cdot 6 + 2(6+1) \cdot 9 = 12 + 2 \cdot 7 \cdot 9 = 138 \ cm^2$$

$$(1,1,54) \ St = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2(1+1) \cdot 54 = 2 + 2 \cdot 2 \cdot 54 = 2 + 216 = 218 \ cm^2$$

Senza calcolare le superfici totali degli altri parallelepipedi, penso che quello più "lungo" abbia superficie totale maggiore; mentre quello che si avvicina di più ad un cubo (3,3,6) abbia la superficie totale minore.

---

altri, alcuni dei quali indipendenti fra loro.

Per ciò che concerne il tema 1, ad esempio, il primo quesito consiste nel determinare il volume e la superficie totale di un solido "semplice", i cui spigoli sono numeri interi "piccoli".

Entrambi i compiti proposti trovano un naturale collegamento con l'educazione tecnica e con l'educazione artistica, nel cui ambito vengono affrontate sia le trasformazioni geometriche che il metodo delle coordinate.

I due compiti sono incentrati rispettivamente su:

1) Operazioni con gli interi. Scomposizione in fattori. Divisori di un numero intero. Area del rettangolo. Applicazioni del teorema di Pitagora. Volume e superficie totale di un solido. Semplici elementi di combinatoria. Problemi di ottimizzazione.
2) Il metodo delle coordinate. Elementi di geometria piana. Perimetro e area di una figura piana. Le trasformazioni geometriche con particolare riferimento alle isometrie.

Allo scopo di presentare una soluzione genuina dei ragazzi, i due compiti sono stati proposti, recentemente, in classi impegnate nella sperimentazione.

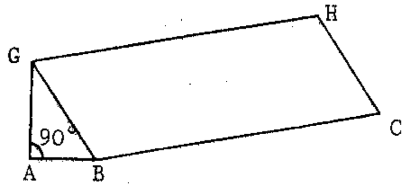
Quelli che riportiamo sono gli svolgimenti dei compiti di due degli alunni, svolgimenti ai quali non abbiamo portato alcuna correzione od aggiunta.

3) AH = 3 cm , AB = 2 cm , BC = 9 cm

quindi:

$$GB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3,6 \text{ cm}$$

$$A_r = 3,6 \cdot 9 = 32,4 \text{ cm}^2$$



Quel rettangolo avrà l'area minima nel (3,3,6) e area massima nel (1,1,54). Questo perché nel parallelepipedo (1,1,54) (quello "lungo") devo moltiplicare 54 per GB che è uguale a $\sqrt{2}$, mentre nel parallelepipedo (3,3,6) (quello quasi cubo) devo moltiplicare GB che è uguale a $\sqrt{18}$ per 6. I prodotti relativi ai rettangoli degli altri parallelepipedi saranno compresi fra i due che ho trovato.

PROPOSTA N. 2 DEL NUCLEO DI RICERCA E SPERIMENTAZIONE DI CAGLIARI

Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, sono assegnati i punti:

$$A(0,0) \quad , \quad B(3,0) \quad , \quad C(3,6) \quad , \quad D(0,2)$$

Congiungendo nell'ordine i punti dati, si ottiene il quadrilatero ABCD :

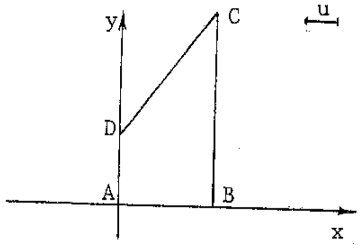
1) Sapresti dire di che tipo di quadrilatero si tratta? Dopo aver giustificato la risposta, determina il perimetro e l'area.
2) Rappresenta il simmetrico del quadrilatero ABCD rispetto all'asse x ed il simmetrico del quadrilatero così ottenuto rispetto all'asse y . Sapresti dire in quale tipo di trasformazione geometrica si corrispondono il quadrilatero ABCD e l'ultimo?
3) Disegna la figura simmetrica di ABCD rispetto alla retta di equazione $x = 6$ e successivamente disegna la simmetrica della figura ottenuta, rispetto alla retta di equazione $x = 14$. Dopo aver stabilito in quale trasformazione geometrica si corrispondono ABCD e l'ultima figura ottenuta, fai le tue osservazioni sulle trasformazioni geometriche prese in considerazione.
4) Rappresenta ora il simmetrico del quadrilatero ABCD rispetto all'asse y . Immagina che il grafico ottenuto rappresenti un circuito automobilistico. Tenendo conto che le vetture di formula 1 viaggiano ad una velocità media di 3 u/h , le vetture di formula 2 viaggiano ad una velocità media di 2u/h, calcola i tempi impiegati a percorrere l'intero circuito. Commenta la legge fisica che hai utilizzato per rispondere al quesito precedente.

RISOLUZIONE DEL COMPITO ESEGUITO DAGLI ALUNNI

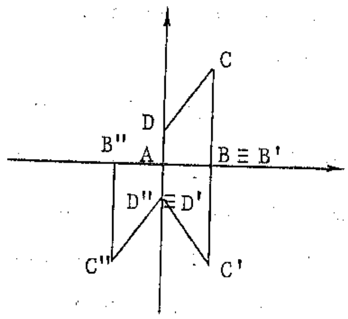
1) Si tratta di un trapezio perché due lati sono opposti e paralleli, in quanto appartengono alle rette $x = 3$ e $x = 0$.

$$2p = 6 + 3 + 2 + \sqrt{(6-2)^2 + 3^2} = 11 + \sqrt{4^2 + 3^2} = 11 + \sqrt{25} = 11 + 5 = 16 \text{ u}$$

$$A = \frac{(6+2)\cdot 3}{2} = \frac{24}{2} = 12\ u^2$$

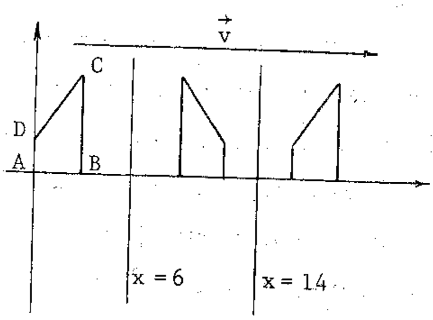


2) I due quadrilateri ABCD e A B"C"D" si corrispondono in una rotazione di 180°.



Infatti componendo due simmetrie ad assi perpendicolari ottengo una simmetria centrale, quindi una rotazione di 180°.

3) ABCD e l'ultima figura ottenuta si corrispondono in una traslazione col vettore di lunghezza 16 u, direzione dell'asse x e verso positivo.



L'elemento che individua la simmetria assiale è l'asse.

La simmetria centrale è determinata quando viene fissato il centro.

La traslazione è determinata quando viene fissato il vettore.

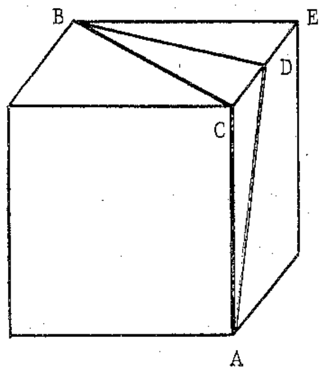
Se compongo due traslazioni ottengo ancora una traslazione. L'operazione è interna. Esiste l'elemento neutro che è la traslazione di vettore nullo.

Esiste l'elemento simmetrico e vale la proprietà associativa.

Cioè l'insieme delle traslazioni gode delle 4 proprietà per cui forma gruppo.

PROPOSTA N. 1 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI CATANIA (*)

1° quesito. Una scatola cubica, avente lo spigolo di 2 dm, ha un foro nel vertice B . Due formiche si trovano dentro la scatola nel vertice A e vogliono uscire attraverso il foro. La prima formica percorre la spezzata ACB , la seconda la spezzata ADB (essendo D il punto medio dello spigolo CE). Quale dei due percorsi è il più breve? Quanti millimetri ha percorso in più la formica che ha scelto il percorso più lungo?



2° quesito. E' stato chiesto a 12 ragazzi, che indichiamo coi numeri da 1 a 12, se possedessero il pallone, la bicicletta o i pattini. Le risposte sono riassunte nella tabella:

ragazzo n.	pallone	bicicletta	pattini
1	si	si	no
2	si	si	no
3	si	no	no
4	no	no	si
5	no	si	no
6	no	si	si
7	no	no	no
8	si	no	no
9	si	no	no
10	no	si	no
11	si	si	si
12	si	no	si

(*) Il Nucleo di ricerca didattica di Catania formula tre esempi di prova scritta di Matematica per gli esami di licenza media in stretta aderenza ai nuovi programmi, tenendo conto specificatamente dei suggerimenti metodologici e degli obiettivi prefissati. Tali proposte fanno riferimento ai risultati ottenuti in una sperimentazione, nella pratica dell'insegnamento, che il Nucleo sta conducendo con la collaborazione di docenti di Scuola Media.

Si chiede

1) quali ragazzi possiedono:
   a) il pallone e la bicicletta;
   b) il pallone o i pattini;
   c) i pattini ma non la bicicletta;
2) la percentuale dei ragazzi che:
   a) possiedono solo il pallone;
   b) non possiedono i pattini;
3) se si sceglie a caso uno dei 12 ragazzi, qual è la probabilità che:
   a) possegga la bicicletta;
   b) non possegga né il pallone né i pattini.

3° quesito. Una ditta di autonoleggio propone ai suoi clienti due tariffe:

1ª tariffa: L. 50 per ogni Km percorso più L. 20.000 di quota fissa giornaliera.

2ª tariffa: L. 150 per ogni Km percorso.

Indicando con x il numero dei Km percorsi in un giorno e con y il corrispondente costo del noleggio di un'autovettura:

a) scrivi la legge che esprime y in funzione di x, in ognuno dei due casi;
b) trova per quale percorso giornaliero x le due tariffe sono equivalenti;
c) trova per quali percorsi giornalieri x è (per il cliente) più conveniente la prima tariffa;
d) rappresenta graficamente nello stesso piano cartesiano le due funzioni ottenute (assumendo sull'asse x e sull'asse y lo stesso segmento per indicare rispettivamente 100 Km e L.10.000);

La caratteristica comune ai quesiti proposti consiste nel presentare situazioni concrete e nel richiedere il modello matematico che risolve la questione; si suppone infatti che nel corso del triennio i vari temi del programma siano stati sempre trattati e motivati con l'esigenza di matematizzare situazioni concrete.

Con tali proposte si è cercato di toccare le parti più salienti del programma, riservando particolare attenzione alle questioni riguardanti la matematica del certo e del probabile.

metti in evidenza come dal grafico ottenuto si possano ritrovare i risultati dèi quesiti b) e c);

e) quale delle due leggi trovate esprime la proporzionalità diretta?

COMMENTO DEI PROPONENTI

Il primo quesito tende ad accertare l'acquisizione della visione spaziale delle figure geometriche e la capacità di esecuzione di semplici calcoli numerici con approssimazione assegnata.

Il secondo quesito, attraverso la lettura di una tabella, tende ad accertare l'acquisizione dell'uso corretto dei connettivi logici, del concetto di percentuale e di quello di probabilità.

Il terzo quesito propone la ricerca di due modelli, uno algebrico (equazioni e disequazioni) e uno grafico (rappresentazione nel piano cartesiano), entrambi utili per risolvere la questione proposta.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. Determino la lunghezza del percorso della prima formica approssimato ai millimetri.

$\overline{AC} = 2$ (dm). Applico il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CEB :

$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2{,}82$ (dm) oppure $\overline{CB} = \overline{CE} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82$ (dm)

quindi: $\overline{AC} + \overline{CB} = 2 + 2{,}82 = 4{,}82$ (dm).

Determino la lunghezza del percorso della seconda formica approssimata ai millimetri.

Applico il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACD :

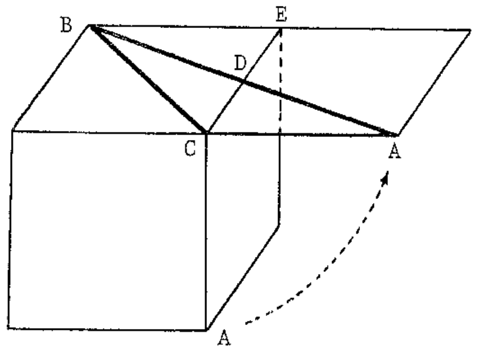
$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 2{,}23$ (dm).

Essendo $\overline{DB} = \overline{AD}$ si ha: $\overline{AD} + \overline{DB} = 2{,}23 + 2{,}23 = 4{,}46$ (dm).

Confrontando i risultati ottenuti si ha:

1) il percorso più breve è quello della seconda formica, cioè ADB ;
2) la prima formica ha percorso $4{,}82 - 4{,}46 = 0{,}36$ (dm), cioè 36 mm in più della seconda.

Osservazione. Se ribalto la faccia ACE attorno a CE fino a giacere sul piano della faccia BCE senza sovrapposti su di essa, si ottiene un rettangolo (vedi figura) di cui ADB è la diagonale, quindi si ha ADB < ACB .



2° quesito. 1) a) I ragazzi che possiedono il pallone e la bicicletta sono: 1, 2, 11.

b) Quelli che possiedono il pallone o i pattini sono: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12.

c) Quelli che possiedono i pattini ma non la bicicletta sono: 4, 12.

2) a) Il numero dei ragazzi che possiedono solo il pallone è 3 (su 12). Trasformo la frazione $\frac{3}{12}$ in una con denominatore 100 , e ottento $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{4}\times 100}{100}=$ $=\frac{25}{100}$; poiché la percentuale è il numeratore di tale frazione, essa è del 25%.

b) in modo analogo si ha:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=\frac{\frac{200}{3}}{100}$$

e quindi la percentuale è $\frac{200}{3}$ % cioè $66,\bar{6}$% .

3) a) La probabilità richiesta è $\frac{6}{12}=0,5$.

b) il numero dei ragazzi che non possiedono né il pallone né i pattini è 3 (su 12); la probabilità richiesta è quindi $\frac{3}{12}=0,25$.

3° quesito.

a) La legge che esprime la prima tariffa è $y=50\,x+20.000$; la legge che epsrime la seconda tariffa è $y=150\,x$.

b) Le due tariffe sono equivalenti quando si ha: $50\,x+20.000=150\,x$. Risolvendo questa equazione si ha: $50\,x-150\,x=-20.000$; $-100\,x=-20.000$; $x=200$ (Km) ; si trova che le due tariffe sono equivalenti per un percorso giornaliero di 200 Km.

c) La prima tariffa è più conveniente della seconda quando si ha $50\,x+20.000<150\,x$. Risolvendo questa disequazione si ha: $-100\,x<-20.000$; $x>200$ (Km) ; si trova che la prima tariffa è più conveniente della seconda per un percorso giornaliero superiore ai 200 Km.

d) Il grafico di ciascuna funzione è un insieme di punti che stanno su una retta;

quindi per disegnarlo occorrono due punti:

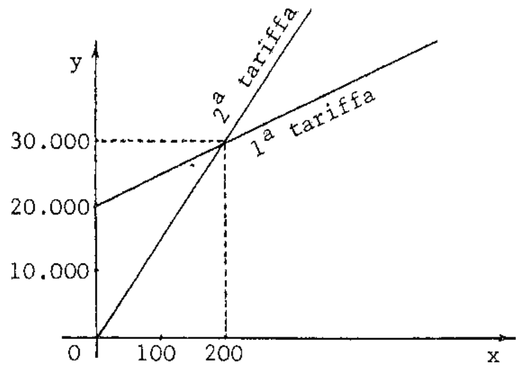
1^a tariffa $y = 50\,x + 20.000$

x	y
0	20.000
200	30.000

2^a tariffa $y = 150\,x$

x	y
0	0
200	30.000

ottengo quindi il seguente grafico

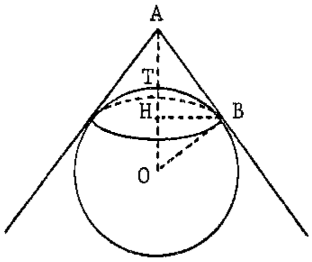


Dall'analisi del grafico si ritrovano i risultati precedenti. Infatti, per un percorso di 200 Km (al giorno) le rette si incontrano (si ha cioè la stessa spesa di L. 30.000); per percorsi più brevi è conveniente la seconda tariffa perché il suo grafico è più in basso di quello della prima tariffa, mentre per percorsi superiori ai 200 Km avviene il contrario.

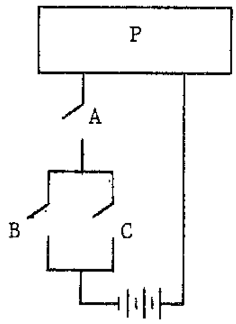
e) La legge che esprime la proporzionalità diretta è la $y = 150\,x$.

PROPOSTA N. 2 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI CATANIA

1° quesito. Quale frazione della superficie terrestre si riesce a fotografare da un'astronave A che si trova a 4000 Km di distanza da essa? (supponi la terra sferica e il suo raggio di 6000 Km). La formula dell'area della superficie di una calotta è $A = 2\pi rh = 2\pi \overline{OB} \cdot \overline{HT}$.



2° quesito. La porta P della camera blindata di una banca si apre mediante il circuito elettrico della figura quando in esso circola corrente. Le chiavi che chiudono gli interruttori A , B , C sono in possesso rispettivamente del direttore, del vice-direttore e del cassiere-capo.



a) Di quali chiavi bisogna disporre per aprire la porta?

b) Disegna un circuito che apre la porta P soltanto se si dispone di tutte e tre le chiavi.

3° quesito. La tabella riporta alcune percentuali degli alunni di una scuola media promossi agli esami di licenza negli anni 1977,1978, 1979, 1980.

	numero dei promossi in %			
	3^a A	3^a B	3^a C	Media delle percentuali delle tre classi
1977	90,5	92	93,5	92
1978	93	91,5	94,5	...
1979	92	94	...	92
1980	92,5	...	...	95
Media delle percentuali	92	93	94	

a) Completa la tabella calcolando le percentuali mancanti.

b) Tenendo conto dei dati della tabella, qual è la probabilità che un alunno della scuola, scelto a caso, sia promosso agli esami di licenza media del 1981?

COMMENTO DEI PROPONENTI

Col primo quesito, attraverso la schematizzazione di una situazione concreta, si tende ad accertare l'abilità di calcolo basato sull'applicazione di un teorema di geometria (1° Teorema di Euclide oppure Teorema di Pitagora), sull'acquisizione del concetto di rapporto e sulla capacità di costruzione di una formula $(R = \frac{h}{2r})$. La formula dell'area della superficie della calotta è suggerita sul testo perché riteniamo non indispensabile che venga trattata nel corso dello svolgimento del programma.

Il secondo quesito tende a verificare l'acquisizione dell'uso corretto dei connettivi logici attraverso l'applicazione ai circuiti elettrici.

La soluzione del 3° quesito richiede la conoscenza dei concetti di percentuale, media aritmetica e probabilità sperimentale, oltre che l'uso di semplici equazioni.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. I dati del problema sono: $\overline{AT} = 4000$ (Km), $\overline{OB} = 6000$ (Km). Calcolare quale frazione della superficie terrestre si riesce a fotografare significa trovare il rapporto R tra l'area della calotta (che si riesce a fotografare) e l'area di tutta la superficie terrestre; l'area della calotta è $2\pi rh$, dove r è il raggio della terra e $h = TH$ è l'altezza della calotta. Il rapporto R allora è:

$$R = \frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r}$$

e per trovarlo occorre calcolare solo $h = TH$.

Il triangolo ABO è rettangolo in B e $\overline{OA} = \overline{OT} + \overline{TA} = 6000 + 4000 = 10000$ (Km); col 1° Teorema di Euclide calcolo $\overline{OH}$:

$$\overline{OH} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OA} \qquad \overline{OH} : 6000 = 6000 : 10000 \qquad \overline{OH} = 3600 \text{ (Km)}$$

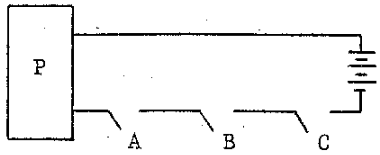
allora si ha: $h = \overline{HT} = \overline{OT} - \overline{OH} = 6000 - 3600 = 2400$ (Km) e quindi

$$R = \frac{h}{2r} = \frac{2400}{12000} = \frac{1}{5} .$$

2° quesito.

a) La porta si apre disponendo della "chiave del direttore" e di "quella del vice-direttore o del cassiere-capo".

b) I tre interruttori A , B , C devono essere disposti in serie e quindi il circuito è:



3° quesito.

a) La media delle percentuali relative all'anno 1978 è:

$$\frac{93+91,5+94,5}{3}=93$$

La percentuale x dei promossi della classe 3^a C nell'anno 1979 si trova risolvendo l'equazione

$$\frac{92+94+x}{3}=92 ,$$

da cui $92+94+x=276$, $x=276-92-94=90$.

La percentuale y dei promossi della classe 3^a B nell'anno 1980 si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{92+91,5+94+y}{4}=93 ,$$

da cui $y=372-92-91,5-94=94,5$.

La percentuale z dei promossi della classe 3^a C nell'anno 1980 si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{92,5+94,5+z}{3}=95 ,$$

da cui $z=285-92,5-94,5=98$.

b) La media delle percentuali dei promossi negli anni 1977-1978-1979-1980 si ottiene nel modo più semplice:

$$\frac{92+93+94}{3}=93 ,$$

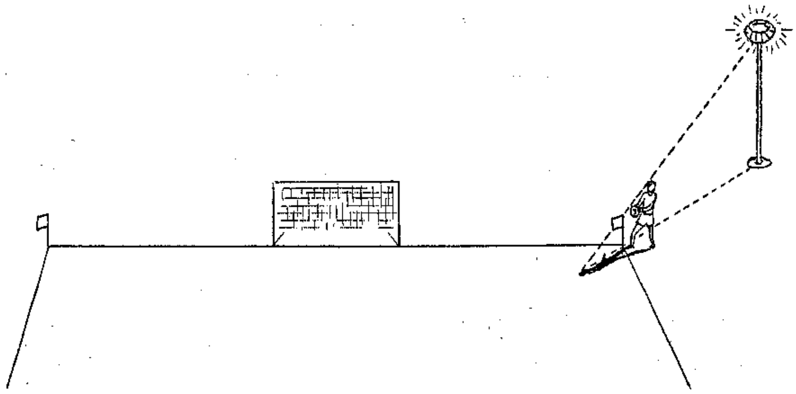
oppure

$$\frac{92+93+92+95}{4}=93$$

e quindi la probabilità richiesta è 0,93.

PROPOSTA N. 3 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI CATANIA

1° quesito. Un campo di calcio è illuminato con riflettori posti su pali alti 17 m. Durante una partita in notturna, mentre l'ala destra della squadra ospite sta per battere un calcio d'angolo, per un guasto, si spengono tutti i riflettori, tranne uno, il cui palo dista dalla bandierina del calcio d'angolo 12 m. In quell'istante si nota che l'estremità dell'ombra dell'asta della bandierina coincide con quella dell'ombra dell'ala destra. Sapendo che l'asta della bandierina è alta 1 m e che il giocatore si trova a 60 cm da essa, quant'è alta l'ala destra della squadra ospite?



2° quesito. Una squadra di astronauti arriva sulla luna con 8 astronavi, ognuna delle quali ha 4 motori. Nell'impatto con la superficie lunare alcuni motori vanno in avaria; poiché ogni astronave può ripartire anche con 3 motori, gli astronauti, sostituendo opportunamente alcuni motori in avaria, riescono a rientrare sulla terra con solo 6 astronavi. Quale può essere il numero dei motori in avaria?

3° quesito. A una gita scolastica partecipano gli alunni delle classi 1ª, 2ª, 3ª della sezione M di una scuola media. Ogni classe ha 24 alunni, però alla gita non partecipano 12 alunni, alcuni della 2ª e altri della 3ª. Durante la gita il Preside estrae a sorte un libro.

Si chiede:

1) qual è la probabilità che esso venga vinto da un alunno della 1^a M?
2) qual è la probabilità che esso venga vinto da un alunno della 2^a o della 3^a M?
3) se la probabilità che il libro venga vinto da un alunno della 3^a M è $\frac{1}{4}$, quanti sono gli alunni della 2^a M assenti alla gita?

COMMENTO DEI PROPONENTI

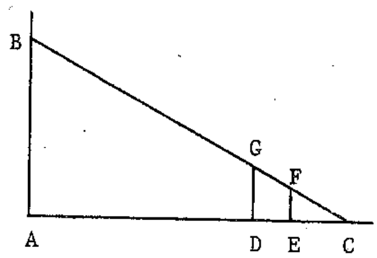
Il 1° quesito richiede la schematizzazione di una situazione reale e un calcolo basati sul concetto di omotetia e sulle relative proprietà.

Il 2° quesito tende ad accertare la capacità di risolvere un problema a più soluzioni che richiede l'uso di disequazioni.

Col 3° quesito si vuole accertare la capacità di affrontare una situazione di incertezza. La soluzione del quesito richiede l'acquisizione del concetto di probabilità, l'uso del connettivo "o" e l'applicazione di un modello algebrico (equazione).

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. Schematizzo la situazione come in figura, rappresentando con AB il palo, con DG il giocatore, con EF l'asta della bandierina e con C l'estremità delle due ombre. Osservo che si ha una omotetia di centro C e che quindi i triangoli della figura sono a due a due simili.



I dati del problema sono: $\overline{AB} = 17$ (m), $\overline{DE} = 60$ (cm) $= 0{,}6$ (m), $\overline{EF} = 1$ (m) e $\overline{AE} = 12$ (m).

Poiché i triangoli ABC ed EFC sono simili, si ha: $\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{AC} : \overline{EC}$; applico la proprietà dello scomporre $(\overline{AB} - \overline{EF}) : \overline{EF} = (\overline{AC} - \overline{EC}) : \overline{EC}$, $(\overline{AB} - \overline{EF}) : \overline{EF} = \overline{AE} : \overline{EC}$, $(17 - 1) : 1 = 12 : \overline{EC}$, $\overline{EC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ (m).

Si ha inoltre: $\overline{DC} = \overline{DE} + \overline{EC} = 0{,}6 + 0{,}75 = 1{,}35$ (m) e $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = 12 + 0{,}75 = 12{,}75$ (m).

Dai triangoli simili ABC e DGC si ha infine: $\overline{AB}:\overline{DG}=\overline{AC}:\overline{DC}$, $17:\overline{DG}=$ $=12,75:1,35$, $\overline{DG}=\frac{17\times 1,35}{12,75}=1,8$ (m) .

Quindi l'ala destra della squadra ospite è alta m 1,80.

2° quesito. Indicando con x il numero dei motori in avaria, quello dei motori funzionanti è $32-x$. Poiché gli astronauti rientrano con solo 6 astronavi, il numero $32-x$ deve essere minore di 21 e maggiore o uguale a 18. Ne deriva che

$$32-x<21$$
$$32-x\geq 18$$

e quindi

$$x>11$$
$$x\leq 14$$

Il numero dei motori in avaria può essere quindi 12 , 13 o 14.

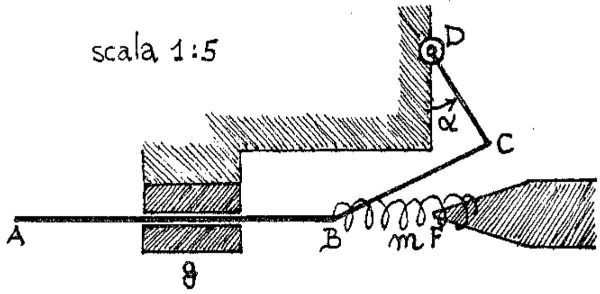
3° quesito. 1) Poiché gli alunni della 1^a M sono 24 e gli alunni partecipanti alla gita sono $3\times 24-12=60$, la probabilità che un alunno della 1^a M vinca il libro è $p=\frac{24}{60}=\frac{4}{10}=0,4$.

2) Gli alunni della 2^a e 3^a M partecipanti alla gita sono $2\times 24-12=36$ e quindi la probabilità che il libro sia assegnato ad un alunno della 2^a o della 3^a classe è $p=\frac{36}{60}=\frac{6}{10}=0,6$.

3) Indico con x il numero degli alunni della 3^a M presenti alla gita. Poiché $p=\frac{x}{60}=\frac{1}{4}$ si ha $x=15$. Allora non partecipano alla gita $24-15=9$ alunni della 3^a M e quindi $12-9=3$ alunni della 2^a M .

PROPOSTA N. 1 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI GENOVA (*)

1° quesito. L'asta AB , scorrendo nella guaina g , comprime la molla m . L'asta DC può ruotare attorno a D ed è collegata a B tramite l'asta BC .



Determinare le due posizioni estreme di C (quando $\alpha = 0°$ e quando B coincide con F) con due disegni; calcolare qual è la distanza massima di B da F , *nella realtà*.

2° quesito. In una serie di venti misure di lunghezza si ottengono i seguenti valori (in cm): 4.24; 4.23; 4.25; 4.23; 4.22; 4.24; 4.28; 4.23; 4.22; 4.23; 4.21; 4.25; 4.26; 4.27; 4.23; 4.25; 4.24; 4.22; 4.24; 4.26.

Rappresentare graficamente i dati in modo da mettere in eviden-

---

(*) Il Nucleo di Ricerca Didattica di Genova propone due gruppi di tre requisiti, il primo mediamente più impegnativo del secondo. I quesiti dovrebbero servire a "misurare" il grado di maturità, di autonomia e di sicurezza tecnica raggiunto dagli allievi nei tre anni della Media secondo le indicazioni dei nuovi programmi ministeriali.

I quesiti non riguardano tutti i contenuti dei sette "temi" di matematica in cui si articolano i programmi, né d'altra parte ciò sarebbe possibile (a meno di non dilatare eccessivamente i contenuti della prova scritta, con il rischio di un accertamento solo superficiale e nozionistico della preparazione); si noti tuttavia che alcuni quesiti richiedono, per essere svolti, dei prerequisiti che "coprono" contenuti diversi da quelli su cui vertono esplicitamente le domande (ad esempio, il calcolo con i numeri in forma decimale è un prerequisito per la maggior parte dei quesiti proposti).

Quesiti del genere di quelli di seguito elencati vengono ordinariamente proposti (a partire dalla metà del secondo anno) agli allievi delle classi che sperimentano il progetto di insegnamento integrato della matematica e delle altre scienze messo a punto a Genova dal gruppo coordinato dal Prof. Paolo Boero. Nella stesura dei quesiti si è cercato tuttavia di rendere queste "proposte di prove d'esame" indipendenti dai contenuti del progetto in questione.

za la loro distribuzione; calcolare il valor medio delle venti misure effettuate; valutare l'errore relativo che si commetterebbe sostituendo il valor medio al valore più frequente.

3° quesito. In molte città il prezzo C di una corsa con il taxi indicato dal tassametro è calcolato aggiungendo ad un importo iniziale fisso F : la durata d della corsa (in minuti) moltiplicata per il costo T di ogni minuto; e la lunghezza u del percorso (in Km) moltiplicata per il costo P di ogni Km.

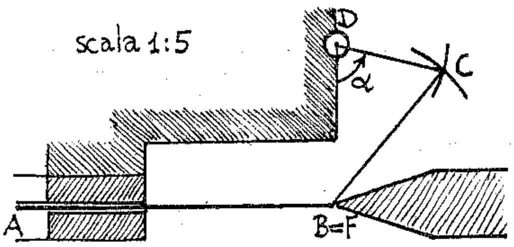
Scrivi la formula che esprime C in funzione di d e di u .

L'importo fisso iniziale F incide percentualmente di più su una corsa breve o su una corsa lunga?

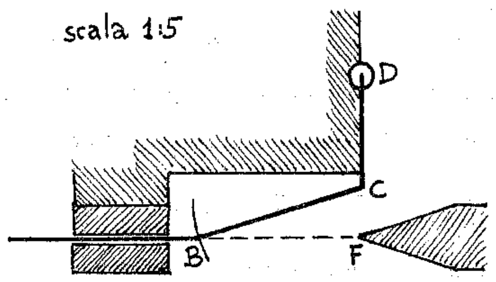
Posto $F = 800$ lire, $T = 200$ lire, $P = 200$ lire, quanto è durata una corsa di 8 Km costata al cliente 5600 lire?

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. Risoluzione accettabile. Quando B coincide con F il punto C si trova dove si incontrano la circonferenza di centro D e raggio DC e la circonferenza di centro F e raggio BC .



Quando l'asta DC è nella posizione disegnata a fianco, il punto B si trova dove si incontrano la circonferenza di centro C e raggio BC e la retta che passa per la guaina e per F (tratteggiata). Essendo $\overline{BF} = 2{,}5$ cm nel disegno, $\overline{BF} = 2{,}5 \cdot 5$ cm $= 12{,}5$ cm nella realtà.

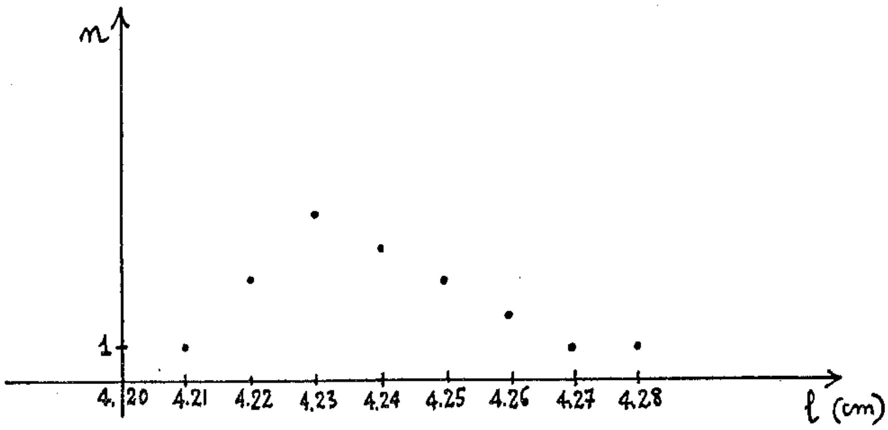


Commenti alla risoluzione. Essendo irrealizzabili le configurazioni associate alle altre intersezioni cerchio-cerchio, cerchio-retta è sufficiente che gli allievi considerino le sole configurazioni realizzabili (eventuali discussioni dei casi irrealizzabili saranno comunque apprezzate!).

Prerequisiti. Una prova come questa potrebbe essere svolta senza eccessive difficoltà da allievi gradualmente addestrati (fin dalla prima media) a:

- leggere disegni tecnici (in Scienze ed in Educazione Tecnica) in scala
- lavorare con "riga, squadra e compasso"[1]
- studiare situazioni geometriche nelle quali le "trasformazioni geometriche" (rotazioni, traslazioni, ecc.) sono state introdotte per l'analisi dei "movimenti rigidi".

2° quesito. Risoluzione accettabile



Il valor medio è:

$$\bar{\ell} = \frac{4.21 + 4.23 \cdot 3 + 4.23 \cdot 5 + 4.24 \cdot 4 + 4.25 \cdot 3 + 4.26 \cdot 2 + 4.27 + 4.28 \cdot}{20} \text{ cm} = \frac{84.80}{20} \text{ cm} = 4.24 \text{ cm}$$

Il valore più frequente è invece 4.23 cm. L'errore relativo che si commette sostituendo il valore medio al valore più frequente è: $\frac{4,24 - 4,23}{4,23} = 0.002$ (trascurabile).

Prerequisiti. Il quesito non dovrebbe presentare difficoltà per allievi abituati a costruire "istogrammi", calcolare "valore medi", valutare errori assoluti e relativi e sufficientemente addestrati a scegliere unità di misura convenienti per rappresentare relazioni quantitative nel piano cartesiano.

3° quesito. Risoluzione accettabile: $C = F + d \cdot T + u \cdot P$ è la formula che esprime C in funzione di d e di u ; dalla formula si vede subito che l'incidenza per-

[1] Qui e altrove le virgolette fanno riferimento ai nuovi programmi ministeriali per la matematica.

centuale di F su C è tanto maggiore quanto più piccola è la somma $d \cdot T + u \cdot P$, cioè quanto più breve è la corsa.

Per trovare quanto è durata la corsa costata 5600 lire basta risolvere l'equazione: $5600 = 800 + d \cdot 200 + 8 \cdot 200$ nell'incognita d ; si ha: $5600 - 800 - 1600 = d \cdot 200$ e quindi: $3200 = d \cdot 200$ da cui: $d = \frac{3200}{200} = 16$ (minuti).

Prerequisiti. Una prova come questa non è eccessivamente difficile per allievi abituati a:

- usare le lettere per impostare la risoluzione di problemi attraverso la "costruzione di espressioni"
- effettuare confronti percentuali
- risolvere "semplici equazioni numeriche di I° grado".

PROPOSTA N. 2 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI GENOVA

1° quesito. Considera la tabella di dati a fianco riportata; costruisci un grafico per evidenziare l'andamento della dipendenza di u da t ; quale delle seguenti relazioni è in migliore accordo con i dati? Tracciane il grafico! Perché le altre relazioni non sono in accordo con i dati?

A) $u = -0.05\ t + 0.40$

B) $u = 0.04\ t$

C) $u = 0.05\ t + 0.40$

D) $u = 0.50\ t + 0.40$

t	u
10	1.0
20	1.5
30	1.5
40	2.5
50	2.5
60	3.5
70	4.0

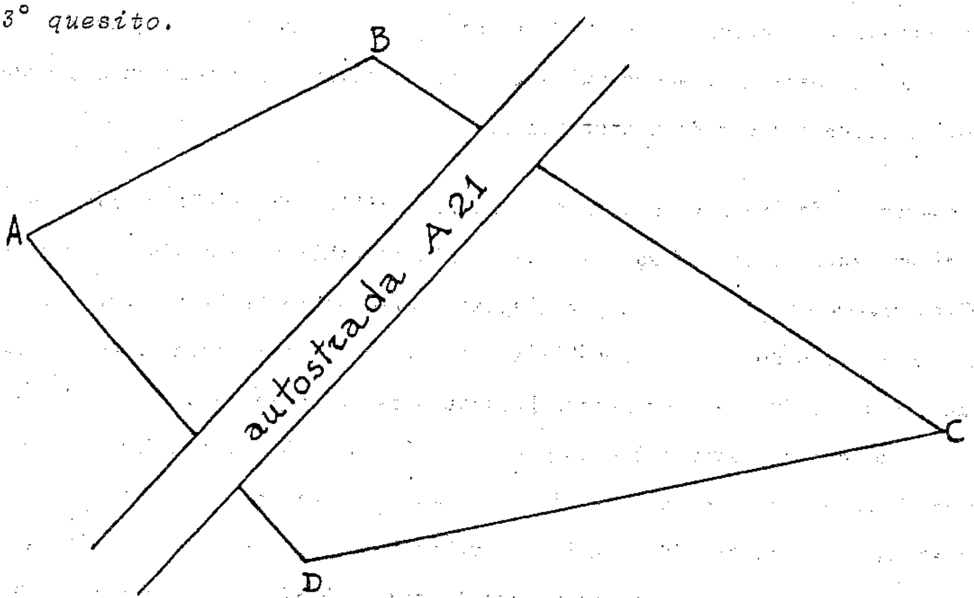
2° quesito. Il professore di Scienze M.C.F.N. ha incaricato Pierino di contare le macchine con ultima cifra della targa *pari* e quelle con ultima cifra della targa *dispari* che passano ogni mezz'ora, dalle 15 alle 17 di un giorno di scuola, davanti al portone della scuola.

Il giorno dopo Pierino consegna al professore la seguente tabella (in cui P indica il numero delle auto con targhe che terminano con una cifra pari e D indica il numero delle auto con targhe che terminano con una cifra dispari)

tempo di osservazione	P	D
ore 15 - 15.30	98	93
ore 15.30 - 16	102	108
ore 16 - 16.30	68	72
ore 16.30 - 17	8	79

Quasi sicuramente un dato della tabella è sbagliato; sapresti indicare quale e spiegare perché? Quale dei seguenti numeri potrebbe sostituirlo con maggiore probabilità di essere quello giusto: 58, 82, 108?

3° quesito.



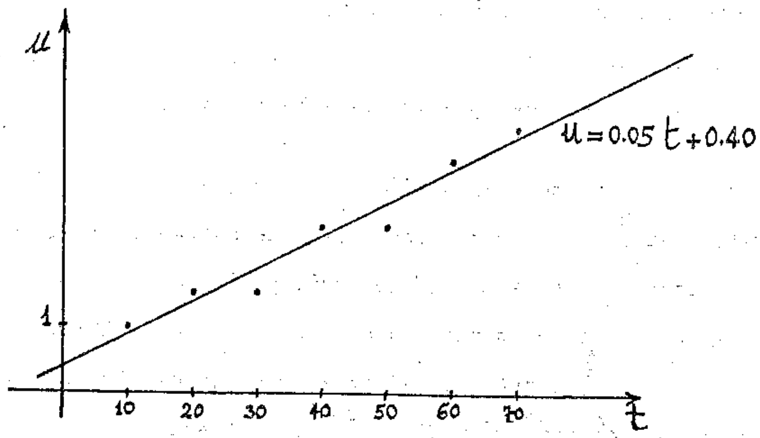
scala 1:2000

L'appezzamento di terreno ABCD è coltivato a grano (tranne, ovviamente, la parte attraversata dall'autostrada).

Detta r la resa di un ettaro (cioè il numero di quintali di grano prodotti da un ettaro), esprimere in funzione di r la quantità Q di grano prodotta dall'appezzamento disegnato in figura. Quanto deve valere r affinché Q = 50 quintali?

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. Risoluzione accettabile



A) non va bene perché u diminuisce al crescere di t ; B) non va bene perché la retta passa per l'origine; D) non va bene perché la pendenza è troppo ripida.

Prerequisiti. Il quesito dovrebbe essere facile per ragazzi abituati a lavorare con i numeri decimali, a costruire grafici di funzioni, a confrontare andamenti teorici (modelli) con dati sperimentali.

2° quesito. Risoluzione accettabile. La probabilità che l'ultima cifra della targa di una automobile sia pari è uguale alla probabilità che sia dispari; si vede subito che mentre le frequenze registrate nelle prime tre mezze ore di osservazione sono in accordo con la probabilità 'teorica', *solo 8* macchine con targa che termina con una cifra pari dovrebbero essere passate dalle 16.30 alle 17 *contro 79* con ultima cifra dispari: è *molto improbabile* che ciò sia accaduto (è come registrare 8 'teste' contro 79 'croci' in 87 lanci di una moneta non truccata!). Per lo stesso motivo, tra 58,82 e 108 il valore che può essere sostituito ad 8 con la maggiore probabilità di essere quello giusto è 82 (il più vicino a 79). Abbiamo ammesso che il numero di 79 macchine con targa che termina con una cifra dispari sia 'giusto': se non disponiamo di altre informazioni, è plausibile che il numero di macchine che transitano in una via tra le 16 e le 16.30 non sia molto diverso da quello delle auto che circolano tra le 16.30 e le 17. In ogni caso, tra le quattro coppie di dati quella che presenta le maggiori anomalie è la coppia $P=8$, $D=79$ registrata tra le 16.30 e le 17.

Prerequisiti:

- abitudine a confrontare (preferibilmente in situazioni 'sperimentali': lanci di dadi e monete, ecc.) la probabilità (o 'valore atteso') di un evento e la frequenza registrata in una serie di prove.
- abitudine a matematizzare situazioni reali in termini probabilistici.
- abitudine a leggere ed interpretare tabelle di dati.

3° quesito. Risoluzione accettabile. $Q = A \cdot r$, dove A è l'area della superficie coltivata; detta T l'area coperta dall'autostrada, $T+A$ si può calcolare dividendo il quadrilatero ABCD in due triangoli, ad esempio:

per il triangolo ABC : lunghezza 'base' $AC = 14{,}3 \cdot 20\ m = 286\ m$

lunghezza 'altezza' uscente da $B = 3{,}7 \cdot 20\ m = 74\ m$

e quindi: area $ABC = \frac{286 \cdot 74}{2}\ m^2 = 10582\ m^2 \sim 1{,}06$ ettari

per il triangolo ADC : lunghezza 'base' $AC = 286\ m$

lunghezza 'altezza' uscente da $D = 3{,}9 \cdot 20\ m = 78\ m$

e quindi: area $ADC = \frac{286 \cdot 78}{2}\ m^2 = 11154\ m^2 \sim 1,12$ ettari

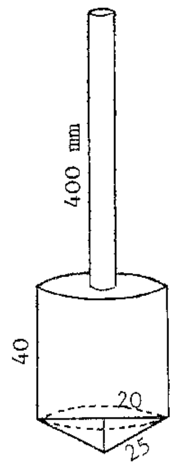
Area striscia autostrada $= 6,6 \cdot 20 \cdot 1,0 \cdot 20\ m^2 = 2640\ m^2 \sim 0,26$ ettari

In conclusione: $A \sim 1,94$ ettari; $Q = 1,94 \cdot r$; se $1,94 \cdot r = 50$ quintali, r deve essere di circa 26 quintali per ettaro.

Prerequisiti. L'esercizio dovrebbe essere facile per allievi abituati a "esercizi di calcolo approssimato", a lavorare con figure geometriche anche ridotte in scala, a matematizzare (con lettere) semplici situazioni reali, a risolvere semplici equazioni; l'esercizio richiede inoltre la piena padronanza del concetto di area di una figura piana.

PROPOSTA N. 1 DEL GRUPPO DI TIROCINIO GUIDATO DEL CONSIGLIO CORSO DI LAUREA DI SCIENZE NATURALI DI PARMA E GRUPPO COLLEGATO DEL DISTRETTO SCOLASTICO DI FAENZA (*)

1° quesito. Un densimetro è formato da un cilindro equilatero, alla cui faccia inferiore ed esternamente è posto un cono retto con la base coincidente con quella del cilindro; sulla faccia superiore vi è un cannello cilindrico, coassiale coi solidi precedenti e con la base molto più piccola di quella su cui poggia. La S_L del cono misura mm^2 1570 e la sua apotema mm 25. Il volume del cannello è $\frac{5}{32}$ di quello del cilindro equilatero e la sua altezza è di 40 cm. Calcolate la misura della S_t e del V_t del densimetro in mm^2 e cm^2, in mm^3 e cm^3 rispettivamente.



Il vetro di cui è fatto il densimetro (di spessore trascurabile) pesa g 0,1 al cm^2; il 75% del volume del cono inferiore è occupato da graniglia di piombo avente p.s. 10. Calcolate il peso totale del densimetro.

1) Se posto in acqua, galleggia? In virtù di quale principio? Enuncia tale principio.

2) Se spostato dalla sua posizione di equilibrio, vi ritorna? Perché?

3) Determina a quale altezza si dispone il densimetro se viene messo in acqua oppure in quattro liquidi aventi densità (p.s.) 0,9; 1,1; 1,2; 1,3 rispettivamente.

(*) Gli appartenenti ai gruppi di Parma e Faenza, coordinati dal prof. Francesco Emiliani-Zauli, hanno proposto una serie di quesiti singoli tra i quali la CIIM ha operato una scelta, formando le due terne qui di seguito riportate.

4) Rappresenta in un grafico i punti aventi come coordinate p.s. e altezza di affondamento.

$$\text{mm}\ \frac{1570 \cdot 2}{25} = \text{mm}\ 125{,}6 \text{ circonferenza cono}$$

mm 125,6 : 6,28 = mm 20 raggio cono [1]

2° quesito. Un agricoltore, prima di coltivare a pesche un ettaro di terreno, fa una previsione per quanto riguarda le spese e il ricavo. In un ettaro di terreno si possono mettere a dimora circa 500 piante, le spese per l'impianto sono di L.8.000.000, le spese per mantenere la coltivazione (potatura, anticrittogamici, deperimento macchine agricole, ecc.) sono di L.2.950.000 annuali. Supponendo che il pescheto raggiunga la produzione media annuale di 250 q dopo 5 anni, che mantenga la piena produzione per 15 anni e che il ricavo sia di L.400 al Kg calcola:

1) il guadagno totale;
2) il guadagno medio annuale;
3) il guadagno annuale relativo a una pianta.

Nella previsione fatta quali elementi favorevoli o sfavorevoli all'agricoltore sono stati trascurati?

3° quesito. Pescando a caso da un mazzo di carte romagnole (o napoletane o piacentine, ...) qual è la probabilità che

a) la prima carta pescata sia il "settebello" (7 di danari)?
b) la prima carta sia di "bastoni"?
c) la prima carta sia un "asso"?
d) la prima carta sia una "figura"?
e) dopo aver pescato dodici carte esca finalmente il "settebello"?
f) la prima carta pescata abbia valore inferiore a cinque?
g) le prime carte pescate siano tre figure?
h) dopo avere pescato altre venti carte, fra cui tre di "coppe", la ventunesima sia di "coppe"?

---

(1) E' consentito l'uso del calcolatore tascabile.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito.

mm $\sqrt{25^2 - 20^2}$ = mm 15 altezza cono

mm^2 $\frac{125,6 \cdot 20}{2}$ = mm^2 1256 Sb cono e cilindro

mm^3(1256 · 15 : 3) = mm^3 6280 Volume cono

mm^3(1256 · 40) = mm^3 50.240 Volume cilindro equilatero

mm^3 50.240 · $\frac{5}{32}$ = mm^3 7.850 Volume cannello cilindro

mm^3 64.370 = cm^3 64,370 V_{totale}

mm^2(7850 : 400) = mm^2 19,6250 Sb cannello

mm $\sqrt{19,6250 : 3,14}$ = mm 2,5 raggio cannello

mm^2(5 · 3,14 · 400) = mm^2 6280 Sl cannello

mm^2(1570 + 5024 + 1256 + 6280) = mm^2 14130 = cm^2 141,30 St solido

°) cm^3 6,280 × 0,75 = cm^3 4,710 Volume graniglia piombo

g 4,710 × 10 = g 47,10

g (141,30 × 0,10) = g 14,13

g 61,23 peso totale densimetro

Il densimetro posto in acqua deve spostarne cm^3 61,230 = mm^3 61230

mm^3 $(61230 - \underset{\text{v.cil.equil.}}{50240} - \underset{\text{v.cono}}{6280})$ = mm^3 4710 parte di cannello che si immerge

mm (4710 : 19,625) = mm 240

h_1 = (15 + 40 + 240) = mm 295 : ugualmente per gli altri casi.

2° quesito.

L(2.950.000 · 20) = L.59.000.000 (spesa per mantenere il pescheto)

L(59.000.000 + 8.000.000) = L.67.000.000 (spesa totale)

q(250 · 15) = q 3.750 (produzione totale)

L(40.000 · 3.750) = L.150.000.000 (ricavo totale)

L(150.000.000 − 67.000.000) = L.83.000.000 (guadagno totale)

L(83.000.000 : 20) = L.4.150.000 (guadagno medio annuale)

L(4.150.000 : 500) = L.8.300 (guadagno annuale relativo a una pianta)

Elementi favorevoli: maggiore produzione, maggior ricavo, eventuale produzione successiva al 15° anno, ...

Elementi sfavorevoli: grandine, siccità, altre influenze negative del clima, infestazione e malattie dei peschi, minor ricavo (per sovraproduzione), ...

3° quesito. In un mazzo di carte romagnole vi sono 40 carte

a) $\frac{1}{40}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$ e) $\frac{1}{28}$ f) $\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$

g) $\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{10}{38}=\frac{11}{494}$ h) $\frac{7}{20}$

PROPOSTA N. 2 DEL GRUPPO DI TIROCINIO GUIDATO DEL CONSIGLIO CORSO DI LAUREA DI SCIENZE NATURALI DI PARMA E GRUPPO COLLEGATO DEL DISTRETTO SCOLASTICO DI FAENZA

1° quesito. Giocando a tombola che probabilità c'è:

a) che il primo numero estratto sia il 90?
b) che il primo numero estratto sia dispari?
c) che il primo numero estratto sia divisibile per 13 ?
d) che il primo numero estratto sia divisibile per 5 e per 3 ?
e) che il primo numero estratto sia divisibile per 5 oppure per 9 ?
f) che il primo numero estratto sia un numero primo?
g) che, se ancora non estratto, il numero 1 esca alla terza estrazione?
h) che, se ancora non estratto, il numero 32 esca alla 10^a estrazione?
i) che, se non ancora estratto, il numero 5 esca come ottantottesimo?
l) sempre nel gioco della tombola, Gianni ha scelto una cartella con i primi 10 numeri naturali, Marcella con i primi dieci numeri divisibili per sette. Chi dei due ha maggiori probabilità di vincere?

2° quesito. In un campo di forma approssimativamente rettangolare con lati di m 30 e m 100 vengono seminati pomodori su file che distano fra loro cm 120; le piantine vengono poi sfoltite in modo che sulle file la distanza fra due piante successive risulti in media di cm 50.

La produzione media per ettaro viene valutata in 700 q circa.

a) Quale produzione si può prevedere per il campo considerato?
b) Quale produzione media risulta per ogni pianta in Kg ?
c) Quante "bacche" si può prevedere che produca ogni pianta, considerando che una statistica su 100 bacche abbia dato i seguenti da-

ti: meno di 60 g n. 25, da 60 a 70 n. 50, più di 70 n. 25.

3° quesito. Rappresenta in un riferimento cartesiano ortogonale i punti A(1;0), B(5;3), C(2;7) e D(-2,4) e stabilisci le proprietà del quadrilatero ABCD. Tale quadrilatero è la base di una piramide regolare il cui volume, supposto uguale a 1 cm l'unità di misura sugli assi coordinati, è di 50 cm^3. Calcola l'area della superficie totale di detta piramide.

La piramide viene sezionata con il piano passante per il suo vertice e per una mediana di base. Descrivi la figura ottenuta e determinane l'area ed il perimetro. Disegna quindi nel piano in cui è rappresentata la base ABCD, lo sviluppo della superficie laterale della piramide disponendo ciascuna faccia laterale in corrispondenza del lato che ha in comune con la base. Descrivi il poligono ottenuto e rileva dal disegno i valori approssimati delle coordinate dei vertici esterni al quadrilatero.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. a) $\frac{1}{90}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$ d) $\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$ e) $\frac{26}{90}=\frac{13}{45}$ f) $\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$ g) $\frac{1}{88}$ h) $\frac{1}{81}$ i) $\frac{1}{3}$ l) entrambi hanno la stessa probabilità.

2° quesito.

a) $m^2 (30 \times 100) = m^2\ 3000 = ha\ 0,3$ area del campo

$q(700 \times 0,3) = q\ 210 = kg\ 21.000$ produzione campo (previsione)

b) In questa risposta si trascura un più attento esame della distribuzione delle piante ai bordi del campo

$\frac{m^2\ 3000}{m^2 (1,20 \times 0,5)} = 5.000$ numero piante nel campo

$kg\ \frac{21.000}{5.000} = kg\ 4,2$ produzione media per ogni pianta

c) Si può considerare che, in media, il peso di ogni bacca sia g 65

$$\frac{gr\ 4.200}{gr\ 65} \cong 64$$

comunque fra $\frac{4.200}{70} = 60$ e $\frac{4.200}{60} = 70$.

3° quesito. 1) Vedi figura su carta millimetrata. Il quadrilatero di vertici: A(1;0), B(5;3), C(2;7), D(-2;4) ha i lati congruenti. Infatti:

$$AB = \sqrt{(5-1)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = 5 \qquad \text{(rispetto ad u)}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \text{(rispetto ad u)}$$

$$CD = \sqrt{(2+2)^2+(7-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \qquad \text{(rispetto ad u)}$$

$$AD = \sqrt{(1+2)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \text{(rispetto ad u)}$$

ha le diagonali congruenti. Infatti:

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \qquad \text{(rispetto ad u)}$$

$$BD = \sqrt{(5+2)^2+(4-3)^2} = \sqrt{7^2+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \qquad \text{(rispetto ad u)}$$

Il quadrilatero ABCD , avendo i lati congruenti e le diagonali congruenti, è un quadrato.

2) $u = 1$ cm , $u^2 = 1$ cm^2 , $u^3 = 1$ cm^3

A_b piramide $= A(ABCD) = 5^2$

V piramide $= 50$ cm^3

A_t piramide = ?

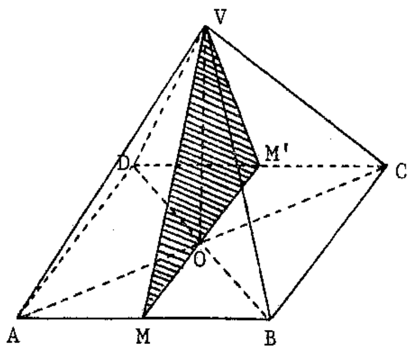
$$h_{\text{piramide}} = \frac{3V}{A_b} = \frac{50 \cdot 3}{5^2} = 6 \text{ (in cm)}$$

$$a_{\text{piramide}} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6{,}5 \text{ (in cm)}$$

$$A_t \text{ piramide} = A_l + A_b = p \cdot a + l^2 = 5 \cdot 2 \cdot 6{,}5 + 5^2 = 90 \text{ (in cm}^2)$$

Risposta: l'area della superficie totale della piramide è 90 cm^2.

3) La sezione ottenuta è il triangolo MM'V avente i lati VM e VM' congruenti in quanto apotema della piramide regolare di base ABCD e per altezza l'altezza di detta piramide.



Pertanto il triangolo MM'V è isoscele sulla base MM' = AB

$$A(MM'V) = \frac{MM' \cdot VO}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ (in cm}^2)$$

$$2p(MM'V) = MM' + 2VM = 5 + 6{,}5 \cdot 2 = 18 \text{ (in cm)}$$

Risposta: l'area ed il perimetro di MM'V sono rispettivamente 15 cm^2 e 18 cm.

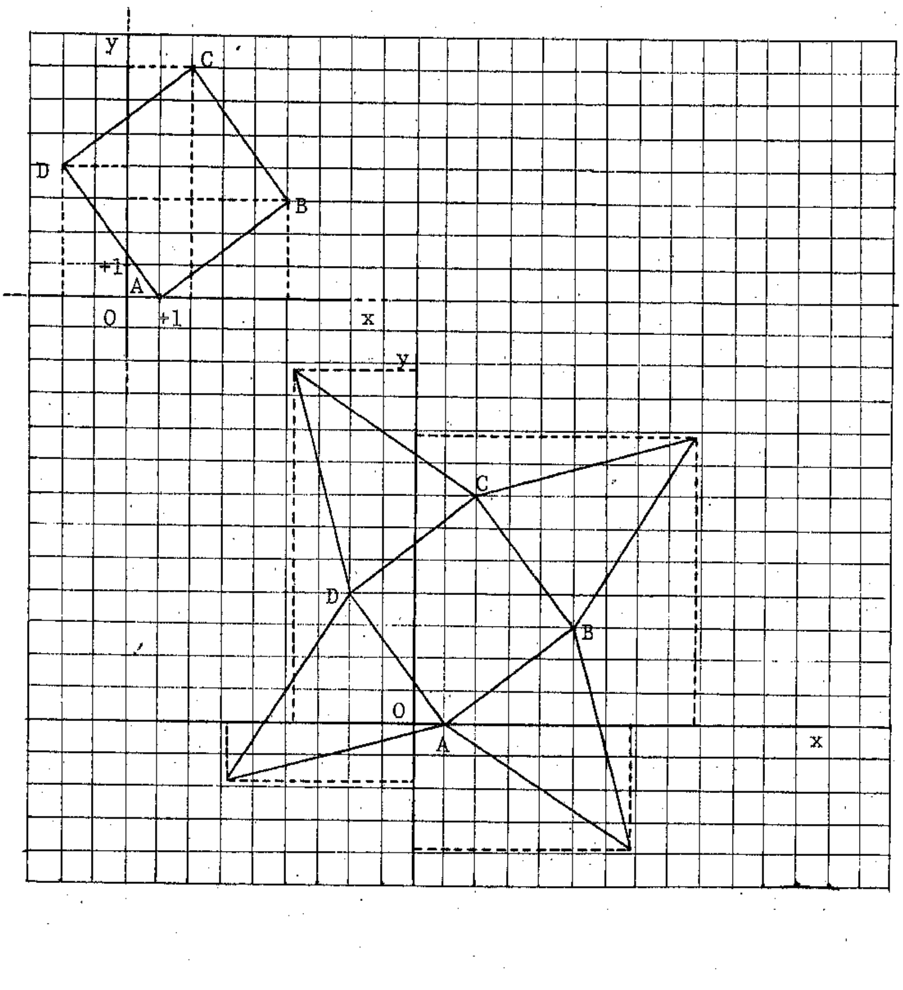
4) Vedi figura su carta millimetrata.

Il poligono che si ottiene dallo sviluppo della superficie laterale della piramide nel piano, in cui è rappresentata la base ABCD, è un ottagono concavo, avente i lati congruenti.

Si può ritenere composto dal quadrato ABCD e da quattro triangoli isosceli congruenti, aventi ciascuno per base un lato del quadrato.

Se si esegue il disegno su carta millimetrata, i valori delle coordinate dei vertici esterni al quadrilatero ABCD approssimati al millimetro sono:

$$V'(6,8;-3,8) \quad , \quad V''(8,8;8,8) \quad , \quad V'''(-3,7;10,9) \quad ; \quad V^{iv}(-5,8;-1,8) \quad .$$



PROPOSTA N. 1 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI PAVIA

1° quesito. Dati i punti $A \equiv (-5,0)$ e $B \equiv (0,5)$ estremi del segmento AB, costruisci il simmetrico di AB rispetto all'asse y, rispetto all'asse x e rispetto alla retta $y = x$.

Giustifica che la figura ottenuta è un quadrato.

2° quesito. Una persona con gruppo sanguigno A ha probabilità 0,8 di essere eterozigote (cioè di tipo az); una persona con gruppo sanguigno B ha probabilità 0,9 di essere eterozigote (cioè di tipo bz). Qual è la probabilità che due genitori, uno di gruppo A e l'altro di gruppo B abbiano un figlio di gruppo 0 ?

3° quesito. A mezzogiorno la motonave Nettuno si trova sullo stesso parallelo della Orione, spostata però di cento miglia verso ovest.

La Nettuno si muove alla velocità costante di dieci miglia all'ora verso nord, la Orione alla velocità costante di quindici miglia orarie verso nord-ovest.

a) Usa una squadra graduata e disegna sulla carta la posizione delle due navi ogni ora, contrassegnando con una crocetta quella della Nettuno e con un tondino quella della Orione.

b) Supponendo che la visibilità sia quel giorno di quattro miglia, sai dire se i passeggeri di una nave riusciranno ad avvistare l'altra?

c) Una terza nave, la Acquario, si trova a mezzogiorno a 141,42 miglia a nord-est della Nettuno, e naviga verso ovest alla velocità costante di dieci miglia orarie.

Controlla che la Nettuno e la Acquario si incontrano. Quando avviene l'incontro? Da quale punto cardinale, secondo te, il capitano della Acquario vede approssimarsi la Nettuno? (1)

---

(1) Per la soluzione di questo quesito la porzione di superficie terrestre che si considera è assimilabile a un piano.

COMMENTO DEI PROPONENTI

Il primo quesito richiede la conoscenza delle coordinate cartesiane nel piano, della simmetria assiale e della sua rappresentazione analitica nei casi più semplici. L'ultima parte può essere affrontata in diversi modi a seconda delle preferenze dell'alunno e della trattazione svolta in classe.

Il secondo quesito intende verificare le capacità di risolvere un problema reale aiutandosi con dei grafi e facendo uso di nozioni elementari di calcolo delle probabilità. Il carattere genetico della situazione proposta permette di valutare anche le conoscenze del ragazzo in questo campo, con particolare riguardo ai gruppi sanguigni.

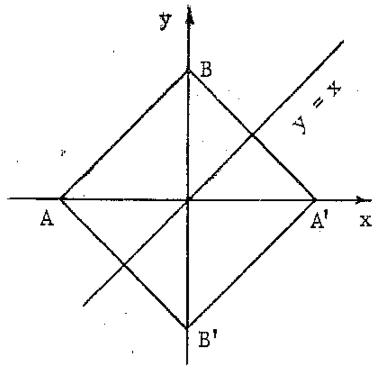
L'ultimo problema richiede la conoscenza da parte dell'alunno dei moti relativi, argomento che può venire affrontato con semplici esempi nel programma di fisica. Richiede inoltre che l'alunno sappia analizzare il testo per tradurre graficamente un problema di carattere geografico.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

La simmetria rispetto all'asse y ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

perciò $A \equiv (-5,0)$ viene trasformato in $A' \equiv (5,0)$ mentre B rimane fisso. Il simmetrico di AB rispetto all'asse y è $A'B$.



La simmetria rispetto all'asse x ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

perciò $B \equiv (0,5)$ viene trasformato in $B' \equiv (0,-5)$ mentre A rimane fisso.

Il simmetrico di AB rispetto all'asse x è AB' . La simmetria rispetto alla retta $y = x$ ha equazioni

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

perciò $A \equiv (-5,0)$ viene trasformato nel punto di coordinate $(0,-5)$ cioè in

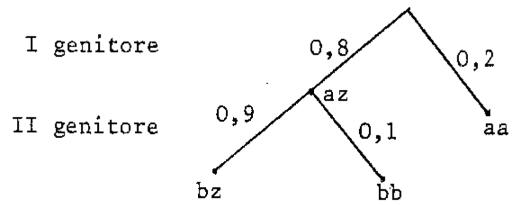
B' e $B \equiv (0,5)$ viene trasformato nel punto di coordinate $(5,0)$ cioè in A' . Il simmetrico di AB rispetto alla retta $y = x$ è A'B' . Il quadrilatero ottenuto ABA'B' ha tutti i lati uguali perché ciascun lato è il trasformato del segmento AB in una simmetria assiale e la simmetria assiale è una isometria. Inoltre ha le diagonali uguali, quindi è un quadrato.

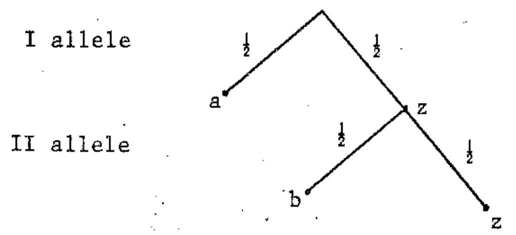
Osservazione. In altro modo si può completare la dimostrazione che ABA'B' è un quadrato caratterizzandolo attraverso i suoi assi di simmetria oppure verificando analiticamente che i lati sono perpendicolari.

2° quesito. Poiché un genitore ha il sangue di tipo A e l'altro di tipo B, essi avranno un figlio con sangue di tipo 0 solo se sono entrambi eterozigoti; questo avviene con probabilità $p_1 = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$.

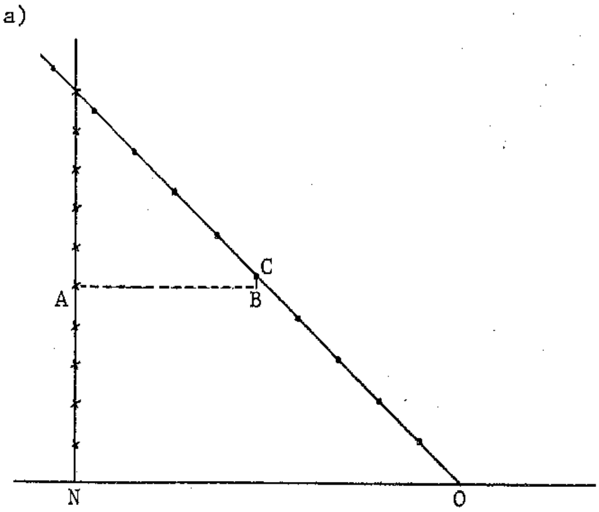
Se i genitori sono eterozigoti essi avranno un figlio con sangue di tipo 0 con probabilità: $p_2 = \frac{1}{4}$.

La probabilità che due genitori, uno con sangue di gruppo A e l'altro con sangue di gruppo B abbiano un figlio con sangue di gruppo 0 è quindi: $p = 0,72 \cdot \frac{1}{4} = 0,18$.



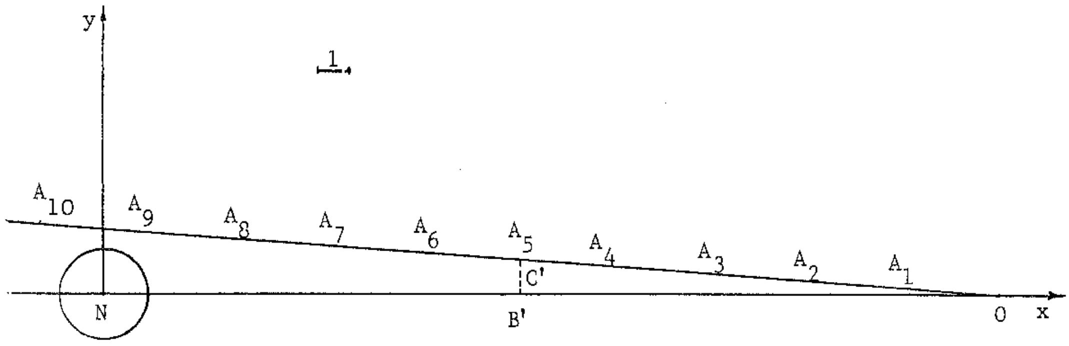


3° quesito. a)



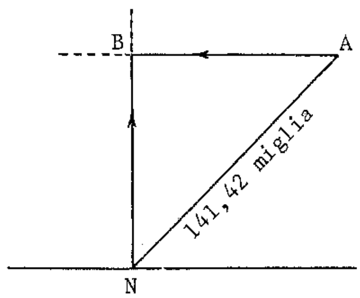
b) *Osservazione.* La risposta alla domanda b) può essere data esaminando la figura del punto a) e notando che sia dopo 9 ore, che dopo 10 ore le due navi distano tra loro più di 4 miglia. Per essere più precisi occorre però raffinare il calcolo delle posizioni con intervalli di tempo più brevi. La soluzione può essere anche calcolata usando la teoria dei moti relativi. Si può infine risolvere il quesito per via puramente grafica: soluzione che illustriamo.

Immagino di essere sulla nave Nettuno ed indico con $A_1, A_2, \ldots$ la posizione della motonave Orione dopo 1 ora, 2 ore, ... rispetto ad essa. Per esempio il punto A_5 lo calcolo osservando, dal grafico a), che dopo 5 ore Orione dista da Nettuno del tratto AB in senso orizzontale e del tratto BC in senso verticale. Tenendo conto della diversa unità di misura, disegno nel grafico b) il tratto NB in senso orizzontale ed il tratto B'C' in senso verticale, ottengo così il punto A_5. Disegnati tutti i punti osservo che essi si trovano sulla retta r che non interseca il cerchio di visibilità della motonave Nettuno.



$\overline{NO} = 100$ miglia
1 cm = 4 miglia

c) Come risulta dal disegno, le rotte delle due navi Acquario e Nettuno si incontrano in un punto B. Il triangolo NAB è rettangolo isoscele dunque le due navi, che percorrsono i suoi cateti da N verso B e da A verso B rispettivamente, alla stessa velocità, partendo nello stesso istante giungono in B contemporaneamente.



L'incontro avverrà in B dopo 10 ore perché:

$$\overline{BA} = \overline{NB} = \frac{141,42}{\sqrt{2}} = \frac{141,42}{1,4142} = 100 \text{ miglia}$$

e la velocità delle due navi è di 10 miglia all'ora.

Il capitano della Acquario vede avvicinarsi la Nettuno da sud-ovest.

PROPOSTA N. 2 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI PAVIA

1° quesito. In un'urna si trova una pallina bianca insieme a due palline nere; non è possibile distinguere fra loro le biglie toccandole. Ne estraggo una a caso ad occhi chiusi; se la pallina estratta è bianca vinco un premio.

Qual è la probabilità di vincere un premio?

Tenendo fissata la pallina bianca, pensa di far variare il numero delle palline nere. Come varia, in corrispondenza, la probabilità di vincere il premio? Fa qualche esempio per alcuni valori del numero di palline nere.

Disegna un grafico, mettendo in ascisse il numero di palline nere e in ordinate la probabilità di vincere il premio.

Se il regolamento del gioco dice che il numero totale di palline nell'urna deve essere primo, e che la pallina bianca deve essere una sola, quante palline nere preferiresti mettere nell'urna, se dipendesse da te ?

2° quesito. In un sistema di assi cartesiani ortogonali, traccia la retta passante per i punti $A(0,6)$, $B(8,0)$ e considera il triangolo avente per vertici i punti A , B e il punto $O(0,0)$. Di che triangolo si tratta? Determinane l'area e il perimetro.

Prova a far ruotare il triangolo prima intorno all'asse x e poi intorno all'asse y . Che solidi ottieni? Senza eseguire i calcoli stabilisci se i due solidi hanno superfici laterali equivalenti.

Giustifica poi la formula che ti permette di determinare il volume dei solidi che hai ottenuto e stabilisci il loro rapporto.

3° quesito. Un oggetto è posto a 20 cm da una lente convergente che ha la distanza focale di 4 cm. L'immagine dell'oggetto si forma ad una distanza q dalla lente, secondo la seguente legge:

$$qf + pf = pq$$

dove: p è la distanza a cui è posto l'oggetto dalla lente, f è la distanza focale.

A quale distanza dalla lente si formerà l'immagine dell'oggetto?

Dopo aver disegnato lo schema ottico calcola quanto risulterà alta l'immagine sapendo che l'oggetto è alto 2 cm.

COMMENTO DEI PROPONENTI

Il primo quesito è abbastanza facile in quanto la sua risoluzione richiede la conoscenza di concetti elementari di probabilità, e rappresentazioni grafiche di funzioni.

Col secondo quesito, riguardante concetti di geometria piana e solida, si è inteso fare una verifica sul possesso dei più semplici concetti di geometria analitica (determinazione dei punti del piano mediante coordinate cartesiane e lunghezze di segmenti), sulla conoscenza del teorema di Pitagora, sul grado di apprendimento delle formule per il calcolo di aree e volumi di figure solide, sulle capacità di analisi degli elementi variabili e di orientamento in situazioni di confronto.

Il quesito tre vuole verificare, a partire da problemi fisici (ottica), la capacità dell'alunno d'impostare e risolvere equazioni e proporzioni. Il quesito richiede la conoscenza della similitudine dei triangoli.

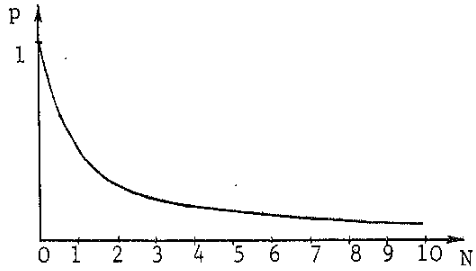
SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. La probabilità di vincere il premio è $\frac{1}{3}$ essendoci 1 pallina bianca su 3 considerate. Faccio variare il numero delle palline nere da 0 a 10 e calcolo le relative probabilità di vincite:

B	N	p(B)
1	0	1
1	1	1/2
1	2	1/3
1	3	1/4
1	4	1/5
1	5	1/6
1	6	1/7
1	7	1/8
1	8	1/9
1	9	1/10
1	10	1/11

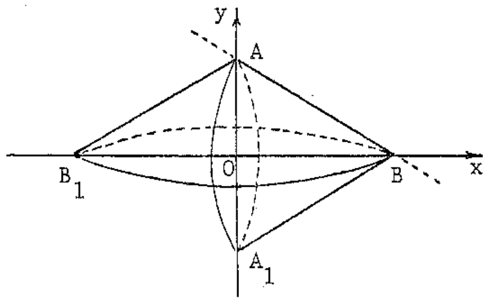
p(B) probabilità di vincere.

Dalla tabella vedo che all'aumentare del numero di palline nere diminuisce la possibilità di vincere il premio.



Secondo me metterei nell'urna 2 palline: 1 bianca e 1 nera, così la probabilità di vincere sarebbe $\frac{1}{2}$.

2° quesito. Il triangolo ABO è rettangolo. Calcolo l'area A del triangolo date le misure della base $\overline{OB}$ e dell'altezza $\overline{OA}$: $A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$. Calcolo il lato $\overline{AB}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo:



$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Ora posso trovare il perimetro P del triangolo: $P = 8 + 6 + 10 = 24$.

Dalla rotazione del triangolo attorno all'asse x e all'asse y trovo due coni: il cono AA_1B ha raggio $\overline{OA}$ e apotema $\overline{AB}$; il cono BB_1A ha raggio $\overline{OB}$ e apotema $\overline{AB}$.

Le due superficie laterali non sono equivalenti perché i due coni hanno la stessa apotema ma raggi diversi.

La formula che mi permette di calcolare il volume dei due coni è:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

perché il cono è la terza parte del cilindro che ha la stessa base e la stessa altezza.

Il volume del cono BB_1A è: $V = \frac{\pi \cdot 64 \cdot 6}{3} = \pi \cdot 128$.

Il volume del cono AA_1B è: $V = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = \pi \cdot 96$.

Il rapporto fra i due volumi è: $R = \frac{\pi \cdot 96}{\pi \cdot 128} = 0{,}75$.

3° quesito. $p = 20$, $f = 4$, $q = x$. Ottengo:

$$4x + 20 \cdot 4 = 20\,x$$

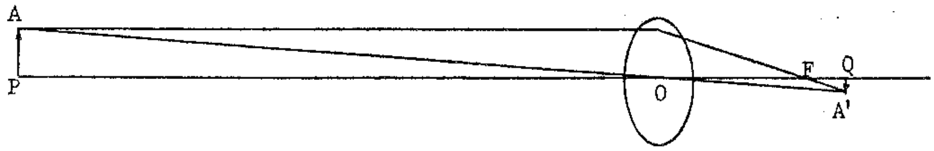
$$4x - 20\,x = -80$$

$$-16\,x = -80$$

$$16\,x = 80$$

$$x = 5$$

L'immagine si forma a 5 cm dalla lente. Lo schema ottico è il seguente:



I due triangoli rettangoli APO e A'QO sono simili perché hanno due angoli acuti opposti al vertice. Vale quindi la proporzione:

$$AP : A'Q = PO : OQ$$

$$2 : x = 20 : 5$$

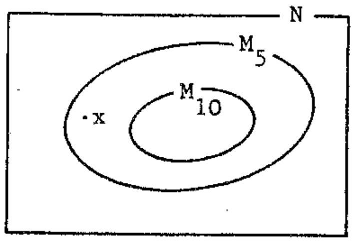
$$x = \frac{2 \times 5}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

L'immagine dell'oggetto risulta alta 0,5 cm.

PROPOSTA N. 1 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI PISA (*)

1° quesito. Si deve individuare un numero misterioso x, su cui si sono ottenute successivamente alcune informazioni.

a) Il seguente diagramma di Venn fornisce la prima informazione su x



N = {insieme dei naturali}

M_5 = {insieme dei multipli di 5}

M_{10} = {insieme dei multipli di 10}

Caratterizza con una proprietà l'insieme dei numeri fra i quali si trova x.

b) Ulteriori informazioni dicono che x è soggetto a queste due condizioni: $x - 12 > 0$, $2x + 18 < 130$. Ora sei in grado di elencare tutti i numeri fra cui è compreso x.

c) Si viene a sapere ancora che x è un divisore di $2 \cdot 5^2 \cdot 11$. Fra quali numeri si può ormai scegliere x?

d) Giunge infine l'ultima segnalazione: x è la soluzione di una delle seguenti equazioni: $4 - \frac{1}{5}x = 1$, $(x + 11)^2 : 54 = 24$. Risolvi le equazioni con un diagramma lineare.

x è finalmente individuato!

2° quesito. In un sistema planetario simile al nostro, alcuni pia-

---

(*) La formulazione di queste proposte è stata fatta sulla base di un iter didattico che preveda lo svolgimento di tutti i contenuti essenziali dei nuovi programmi.

E' naturale però che, per non rendere la verifica finale superficiale e nozionistica, le singole prove tengono presenti solo alcune aree tematiche, anche se in ciascuna di esse si vogliono perseguire obiettivi precisi che consistono essenzialmente nell'accertare:

a) la capacità di capire correttamente un testo dal punto di vista logico;
b) l'abilità a procedere nel calcolo in modo organizzato;
c) la capacità di tradurre in uno schema matematico una situazione desunta dalla realtà;
d) l'uso appropriato del metodo grafico;
e) l'acquisizione di un linguaggio corretto e preciso.

Si osserva infine che i quesiti proposti consentono risposte articolate secondo le attitudini e le capacità dei singoli alunni: ciò pare necessario per sottolineare il carattere orientativo della scuola media.

neti descrivono orbite che, con buona approssimazione, possono essere considerate cerchi complanari e concentrici; nel centro comune a tali orbite si trova la stella S .

Dal pianeta T si studia il moto del pianeta interno V e si osserva che le posizioni assunte in cielo da V sono tali che la distanza angolare di V da S (ovvero l'ampiezza dell'angolo $V\hat{T}S$), da entrambe le parti di S , non supera un certo valore. Come puoi giustificare questo fatto?

Sapendo che l'ampiezza massima di $V\hat{T}S$ è di 30° e che la distanza di T da S è di $1{,}2\cdot 10^6$ km, calcola:

a) il raggio dell'orbita di V ,

b) la distanza di V da T quando è visto da T alla massima distanza angolare da S ,

c) le distanze massima e minima di V da T .

Il quesito 2 potrebbe essere integrato da un altro quesito che, fornendo dati reali, porta ad una situazione geometrica risolubile, nell'ambito della scuola media, soltanto con metodi grafici. Una tale proposta consentirebbe anche una verifica in merito alla capacità di descrivere una costruzione grafica.

Quesito 2'. Nel nostro sistema solare, il Sole, la Terra e Venere si trovano in una situazione analoga a quella di S , T , V rispettivamente; in questo caso però l'ampiezza massima di $V\hat{T}S$ è di 48° e la distanza fra T ed S è di circa $1{,}5\cdot 10^8$ km.

Rappresenta graficamente in scala la situazione di S , T e V quando V è visto da T alla massima distanza (angolare) da S .

Descrivi la costruzione eseguita e dal disegno ricava il raggio dell'orbita di V .

Sapendo che il valore di tale distanza, calcolato dagli astronomi, è di $1{,}08\cdot 10^{11}$ m , quale errore percentuale hai commesso?

3° quesito. Un sacchetto S contiene 5 biglie: 2 rosse, 1 verde, 1 nera e 1 bianca. Un sacchetto T contiene 4 biglie: 1 rossa, 2 verdi e 1 bianca. Se si estrae una biglia dal sacchetto S e una biglia dal sacchetto T , qual è la probabilità che:

a) entrambe siano rosse
b) almeno una sia rossa
c) nessuna delle due sia rossa.

COMMENTO DEI PROPONENTI

Il primo quesito tende ad accertare:

1) la capacità di leggere un diagramma di Venn al fine di esprimere le proprietà degli insiemi indicati con linguaggio logicamente corretto
2) la capacità di risolvere semplici disequazioni numeriche
3) la conoscenza della struttura moltiplicativa dei naturali e del concetto di divisibilità
4) l'abilità a risolvere semplici equazioni numeriche di 1° e di 2° grado in una incognita mediante diagrammi lineari.

Il secondo quesito propone una schematizzazione geometrica di una situazione astronomica ideale e consente una verifica in merito a:

1) possesso delle nozioni fondamentali minime sul sistema solare
2) capacità di tradurre in uno schema matematico la descrizione di una situazione i cui elementi essenziali devono essere però già noti
3) capacità di risolvere un semplice problema di geometria
4) capacità di calcolo, in particolare uso delle potenze di 10
5) uso degli strumenti da disegno.

Il terzo quesito offre la possibilità di accertare:

1) la capacità di analizzare una situazione dal punto di vista logico
2) il possesso dei concetti fondamentali della probabilità
3) l'uso appropriato dei grafi ad albero.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. a) L'esame del diagramma di Venn proposto suggerisce che x è un numero naturale, multiplo di 5 ma non di 10, quindi un multiplo dispari di 5. x quindi è un elemento dell'insieme $\{5,15,25,\dots\}$.

b) Cerco ora le limitazioni che derivano a x dalle condizioni poste:

$x-12>0 \Longrightarrow x>12$; $2x+18<130 \Longrightarrow 2x<112 \Longrightarrow x<56$. Quindi deve essere $12<x<56$.

Tenendo conto di quanto detto in a), posso concludere che x è un elemento dell'insieme $\{15,25,35,45,55\}$.

c) Per rispondere devo trovare quali dei numeri indicati in b) sono divisori di $2\cdot5^2\cdot11$, perciò li scompongo in fattori primi: $15=3\cdot5$; $25=5^2$; $35=5\cdot7$; $45=3^2\cdot5$; $55=5\cdot11$. Tra questi soltanto 25 e 55 sono divisori di $2\cdot5^2\cdot11$; x quindi è 25 o 55.

d) Risolvo con un diagramma lineare le due equazioni proposte:

$$4-\frac{1}{5}x=1$$

$$x \rightarrow \boxed{:\left(-\frac{1}{5}\right)} \xrightarrow{-\frac{1}{5}x} \boxed{+4} \rightarrow -\frac{1}{5}x+4$$

$$15 \leftarrow \boxed{:\left(-\frac{1}{5}\right)} \xleftarrow{-3} \boxed{-4} \leftarrow 1$$

Quindi la soluzione della prima equazione è $x=15$.

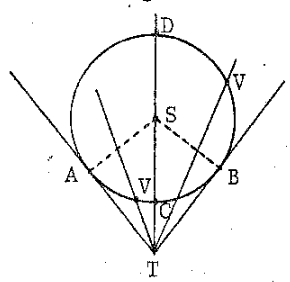
$$(x+11)^2 : 54 = 24$$

$$x \rightarrow \boxed{+11} \xrightarrow{x+11} \boxed{\uparrow 2} \xrightarrow{(x+11)^2} \boxed{:54} \rightarrow (x+11)^2 : 54$$

$$25 \leftarrow \boxed{-11} \xleftarrow{+36} \boxed{\sqrt[2]{\ }} \xleftarrow{1296} \boxed{\cdot 54} \leftarrow 24$$

La soluzione di questa equazione è $x=25$ che è accettabile. Quindi x è 25 [1].

2° quesito. Le semirette TV sono sempre interne all'angolo $A\hat{T}B$ dove TA e TB sono le semirette tangenti all'orbita di V condotte da T . La semiretta TS è la bisettrice dell'angolo $A\hat{T}B$, perciò le ampiezze degli angoli $V\hat{T}S$ non superano l'ampiezza di $A\hat{T}S$, ovvero di $S\hat{T}B$.



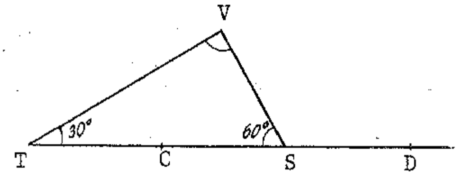
Quando V è in una delle sue posizioni estreme l'angolo $S\hat{V}T$ è retto poiché TV è tangente al cerchio di centro S.

Se $S\hat{T}V$ è di 30°:

a) $\overline{VS}=\frac{1}{2}\,\overline{TS}$

$\overline{VS}=\frac{1}{2}\cdot1,2\cdot10^6$ km $=0,6\cdot10^6$ km

b) $\overline{VT}=6\cdot\sqrt{3}\cdot10^5$ Km



c) distanza minima di V da T $(V\equiv C)$: $\overline{VT}_{min}=\overline{ST}-\overline{SC}=1,2\cdot10^6-0,6\cdot10^6=0,6\cdot10^6$ (km)

distanza massima di V da T $(V\equiv D)$: $\overline{VT}_{max}=\overline{ST}+\overline{SD}=1,2\cdot10^6+0,6\cdot10^6=1,8\cdot10^6$ (km).

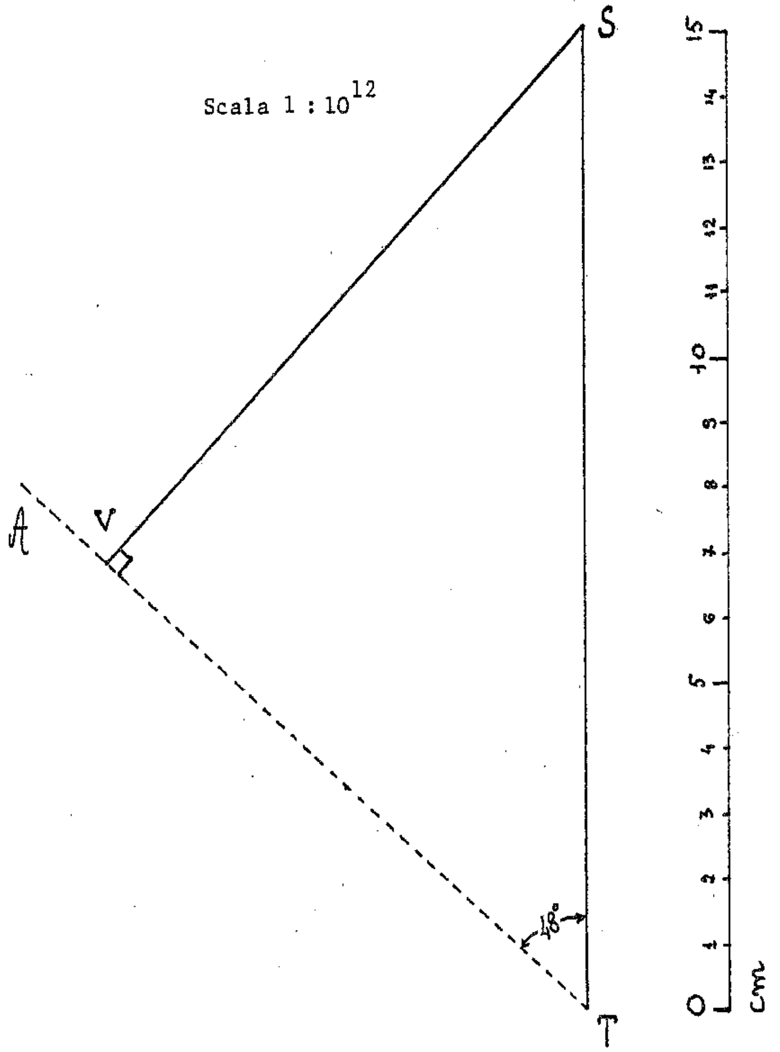
[1] Qualora si fosse considerata la soluzione dell'equazione nell'ambito dei numeri relativi si sarebbe avuto anche la soluzione -47; soluzione da scartare.

Quesito 2'.

Nella realtà:

$\overline{TS} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km $= 1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm $= 15 \cdot 10^{12}$ cm

Scala 1 : 10^{12}



Nella figura:

$\overline{TS} = 15$ cm

$\overline{SV} \simeq 11{,}1$ cm

11,1 cm della figura in scala corrispondono a:

$11{,}1 \cdot 10^{12}$ cm $= 1{,}11 \cdot 10^8$ km

valore di $\overline{SV}$ ricavato dalla figura: $1{,}11 \cdot 10^8$ km ($\overline{SV}_1$)

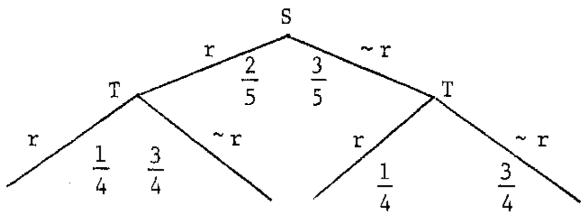
valore di $\overline{SV}$ determinato dagli astronomi: $1{,}08 \cdot 10^{11}$ m $= 1{,}08 \cdot 10^8$ km ($\overline{SV}_2$)

$\overline{SV}_1 - \overline{SV}_2 = 1{,}11 \cdot 10^8 - 1{,}08 \cdot 10^8 = 0{,}03 \cdot 10^8$ (km)

$$\text{errore percentuale commesso} = \frac{\overline{SV}_1 - \overline{SV}_2}{\overline{SV}_2} = \frac{0{,}03 \cdot 10^8}{1{,}08 \cdot 10^8} = \frac{3}{108} \simeq 2{,}8\%$$

Descrizione. Tracciato il segmento TS di 15 cm, si traccia la semiretta $\mathcal{A}$ con origine in T , che forma con TS l'angolo di 48°. Da S si traccia la perpendicolare alla semiretta $\mathcal{A}$ fino ad incontrarla nel punto V . SV rappresenta il raggio dell'orbita di Venere.

3° quesito. Per calcolare le probabilità richieste conviene costruire il grafo ad albero semplificato in quanto gli eventi che interessano sono soltanto l'estrazione di una biglia rossa o l'estrazione di una biglia non rossa.



Dunque si ricava che:

$p \text{ (entrambe rosse)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$p \text{ (almeno una rossa)} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}$

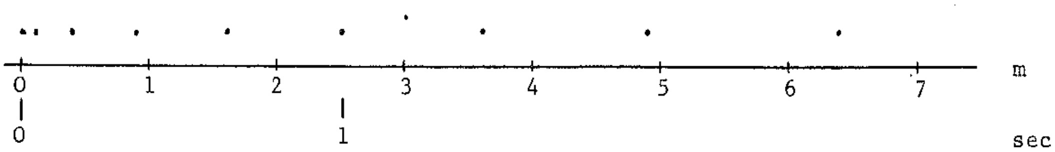
$p \text{ (nessuna rossa)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

L'ultima probabilità poteva essere determinata anche come probabilità dell'evento contrario all'evento "almeno una rossa"; cioè:

$$p \text{ (nessuna rossa)} = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

PROPOSTA N. 2 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI PISA

1° quesito. Queste sono le immagini di una pallina in movimento, riprese con una macchina fotografica a intervalli di 0,2 sec:



Che cosa puoi dire a prima vista della velocità della pallina? Dal fotogramma ricava i dati per costruire una tabella in cui a ciascun valore di t in sec fai corrispondere la misura s dello spazio percorso in m.

Con le coppie (t,s) che hai ricavato costruisci il grafico del moto, riportando in ascissa i valori di t e in ordinata i corrispondenti valori di s.

Dal grafico ricava quanto spazio ha percorso la pallina dopo 1,1 sec.

Calcola la velocità v_m relativa all'intero intervallo di tempo da $t=0$ sec a $t=1,6$ sec e traccia il grafico del moto della pallina se si fosse mossa con velocità costante v_m.

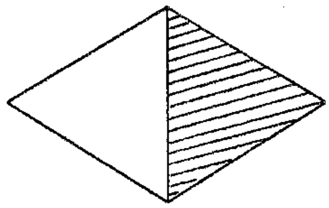
Calcola ancora le velocità medie relative ai singoli intervalli di tempo. Che cosa osservi? Sei ora in grado di precisare di qual tipo di moto si tratta? Quale delle seguenti relazioni:

$$s_1(t)=\frac{1}{2}t \qquad s_2(t)=\frac{1}{2}t^2 \qquad s_3(t)=\frac{5}{2}t^2$$

è l'equazione $s(t)$ del moto considerato? Questa equazione del moto poteva essere trovata direttamente in base ai calcoli sulle velocità medie fatti prima?

2° quesito. Considera i triangoli equilateri della figura seguente.

Vi sono sei isometrie che portano direttamente il triangolo bianco su quello tratteggiato. Ricerca e descrivi quattro tra esse.



3° quesito. Una persona vuole regalare un mazzo di fiori composto da tulipani o iris, nove in tutto.

Supponendo che quella persona scelga x tulipani e y iris, indica in un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) i punti che rappresentano le possibili composizioni del mazzo ed esprimi la relazione che lega x a y .

Quella persona, però, vuole spendere al massimo 6000 L.. Poiché il prezzo unitario dei tulipani e degli iris è rispettivamente 500 L. e 700 L., il numero delle possibili composizioni del mazzo diminuisce. Segna con un cerchietto i punti del grafico precedente che indicano soluzioni accettabili.

Se inoltre quella persona, sempre rispettando le condizioni precedenti, decide di comprare un numero di tulipani minore di quello degli iris, in quanti e quali modi diversi può scegliere il suo mazzo?

COMMENTO DEI PROPONENTI

Il primo quesito consente di verificare:

1) la capacità di leggere un diagramma sperimentale e di tradurre i dati relativi in un grafico che permetta di ricavare nuove informazioni sul fenomeno fisico in esame e di intuire la legge matematica che lo regola
2) la conoscenza delle leggi matematiche relative al moto uniforme e al moto uniformemente accelerato
3) l'abilità nel fare operazioni con i numeri decimali e soprattutto la capacità di procedere nei calcoli secondo uno schema di ragionamento.

Il secondo quesito tende ad accertare se gli alunni:

1) sanno intuire quali isometrie trasformano una figura sull'altra e sanno descriverle con linguaggio corretto e preciso

2) sono capaci di organizzare la ricerca di tali isometrie in modo sistematico, ricorrendo a metodi combinatori, per sopperire ad eventuali carenze di intuizione o verificare la validità di quanto intuito.

Il terzo quesito vuole verificare se gli alunni:

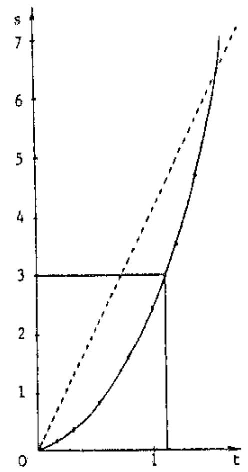
1) sanno interpretare il testo correttamente dal punto di vista logico (in particolare il significato del connettivo "vel")
2) hanno la capacità di tradurre i dati di un problema in equazioni e disequazioni e di risolvere le medesime con metodi grafici o analitici.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. Poiché la pallina in tempi uguali percorre spazi diversi, la velocità non è costante e quindi il moto non è uniforme. Dal fotogramma, tenendo conto delle unità di misura indicate, ricavo la seguente tabella:

t	s
0	0
0,2	0,1
0,4	0,4
0,6	0,9
0,8	1,6
1	2,5
1,2	3,6
1,4	4,9
1,6	6,4

Costruisco ora il grafico:



Dopo 1,1 sec la pallina ha percorso circa 3 m. Calcolo la velocità media v_m sapendo che

per $t = 0$ sec $\quad s(0) = 0$ m

per $t = 1,6$ sec $\quad s(1,6) = 6,4$ m

$$v_{m_{(0-1,6)}} = \frac{s(1,6) - s(0)}{1,6 - 0} = \frac{6,4}{1,6} \text{ m/sec} = 4 \text{ m/sec}$$

La linea tratteggiata rappresenta il grafico del moto della pallina se si fosse mossa sempre con velocità uguale a 4 m/sec.

Le velocità medie nei singoli intervalli di tempo considerati risultano:

$$v_{m_{(0,-0,2)}} = \frac{0,1}{0,2} \text{ m/sec} = 0,5 \text{ m/sec}$$

$$v_{m_{(0,2-0,4)}} = \frac{0,4-0,1}{0,2} \text{ m/sec} = \frac{0,3}{0,2} \text{ m/sec} = 1,5 \text{ m/sec}$$

$$v_{m_{(0,4-0,6)}} = \frac{0,9-0,4}{0,2} \text{ m/sec} = \frac{0,5}{0,2} \text{ m/sec} = 2,5 \text{ m/sec}$$

$$v_{m_{(0,6-0,8)}} = \frac{1,6-0,9}{0,2} \text{ m/sec} = \frac{0,7}{0,2} \text{ m/sec} = 3,5 \text{ m/sec}$$

$$v_{m_{(0,8-1)}} = \frac{2,5-1,6}{0,2} \text{ m/sec} = \frac{0,9}{0,2} \text{ m/sec} = 4,5 \text{ m/sec}$$

$$v_{m_{(1-1,2)}} = \frac{3,6-2,5}{0,2} \text{ m/sec} = \frac{1,1}{0,2} \text{ m/sec} = 5,5 \text{ m/sec}$$

$$v_{m_{(1,2-1,4)}} = \frac{4,9-3,6}{0,2} \text{ m/sec} = \frac{1,3}{0,2} \text{ m/sec} = 6,5 \text{ m/sec}$$

$$v_{m_{(1,4-1,6)}} = \frac{6,4-4,9}{0,2} \text{ m/sec} = \frac{1,5}{0,2} \text{ m/sec} = 7,5 \text{ m/sec}$$

Osservo che la velocità media aumenta costantemente di 1 m/sec ogni 0,2 sec. Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.

La prima delle tre equazioni proposte esprime una velocità costante e quindi non rappresenta un moto uniformemente accelerato.

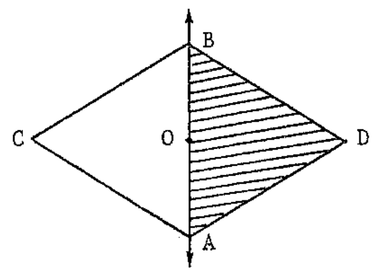
Per decidere quale delle rimanenti equazioni è l'equazione del moto considerato, costruisco la seguente tabella:

t	s_2	s_3
0	0	0
0,2	0,02	0,1
0,4		0,4
0,6		0,9
0,8		1,6
1		2,5
1,2		3,6
1,4		4,9
1,6		6,4

L'equazione del moto è dunque $s(t) = \frac{5}{2} t^2$.

Poiché so che l'equazione di un moto uniformemente accelerato è del tipo $s(t) = \frac{1}{2} at^2$, avrei potuto calcolare il valore di a dalle velocità medie prima determinate. Infatti se v_m aumenta di 1 m/sec ogni 0,2 sec, cioè di 5 m/sec ogni 1 sec, risulta $a = 5$ m/sec^2 e quindi $s(t) = \frac{5}{2} t^2$.

2° quesito. Il triangolo bianco va direttamente sul triangolo tratteggiato con:



1) una rotazione di 180° intorno ad O :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & D \end{pmatrix}$$

2) una simmetria assiale di asse AB :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & D \end{pmatrix}$$

3) una rotazione di 60° in verso orario intorno al punto A :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & D & B \end{pmatrix}$$

4) una rotazione di 60° in vero antiorario intorno al punto B :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & B & A \end{pmatrix}$$

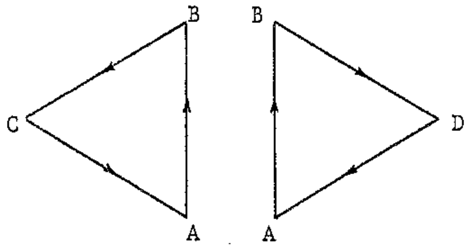
Osservo che le trasformazioni trovate mandano i vertici A , B , C del primo triangolo sui vertici A , B , D del secondo triangolo nei modi seguenti:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & D \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & D \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & D & B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & B & A \end{pmatrix}$$

Penso allora che le altre due isometrie dovranno mandare i vertici A , B , C del primo triangolo sui vertici A , B , D del secondo nei modi seguenti:

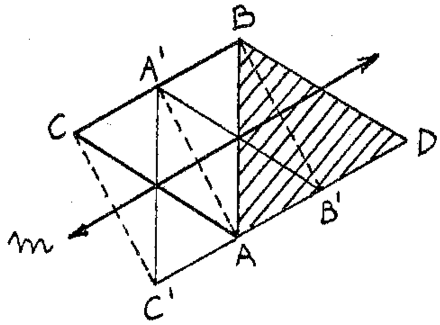
$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & A \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & A & B \end{pmatrix}$$

In entrambi i casi si tratta di isometrie opposte perché viene invertito l'orientamento.



Nota: Se gli alunni avessero lavorato in modo organico e completo su tutte le isometrie piane, avendo individuato che le due isometrie mancanti sono isometrie opposte e non riflessioni perché non ci sono punti uniti, dovrebbero concludere che si tratta di riflessioni con scorrimento. Precisamente:

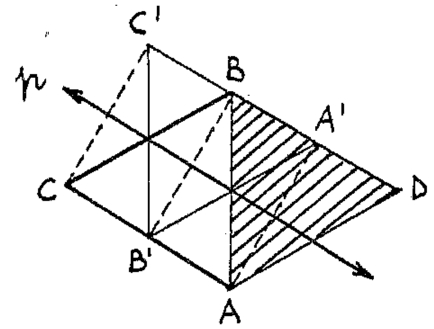
1) riflessione con scorrimento ottenuta dalla composizione della simmetria di asse m seguita dalla traslazione di vettore $\overrightarrow{C'A}$



$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & A \end{pmatrix}$$

2) riflessione con scorrimento ottenuta dalla composizione della simmetria di asse p seguita dalla traslazione di vettore $\overrightarrow{C'B}$

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & A & B \end{pmatrix}$$

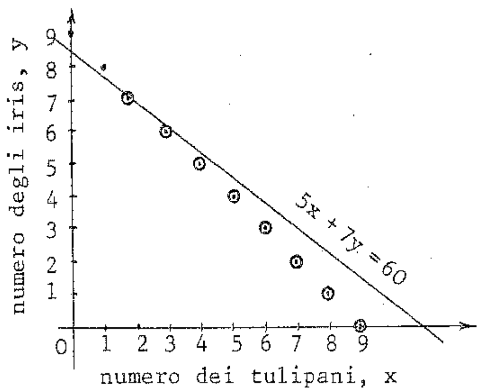


3° quesito. Se quella persona vuole che il suo mazzo di fiori sia composto da tulipani o iris, vuol dire che il mazzo potrà essere composto soltanto da tulipani, soltanto da iris oppure da tulipani e iris. Poiché i fiori in tutto devono essere 9 , le possibili composizioni del mazzo sono quelle indicate nella seguente tabella

x	y	
0	9	mazzo di soli iris
1	8	
2	7	
3	6	
4	5	mazzi di tulipani
5	4	e iris
6	3	
7	2	
8	1	
9	0	mazzo di soli tulipani

x : numero di tulipani; y : numero di iris. La relazione che lega x a y è: $x + y = 9$ con x e y numeri naturali compresi fra 0 e 9 .

Scelgo un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) e indico i punti del piano che corrispondono alle possibili composizioni del mazzo. Se quella persona vuole spendere al massimo 6000 L. e se il costo unitario dei tulipani e degli iris è rispettivamente di 500 L. e 700 L., dovrà essere rispettata la seguente disuguaglianza: $500\,x + 700\,y \leq 6000$ o anche semplificando $5x + 7y \leq 60$.

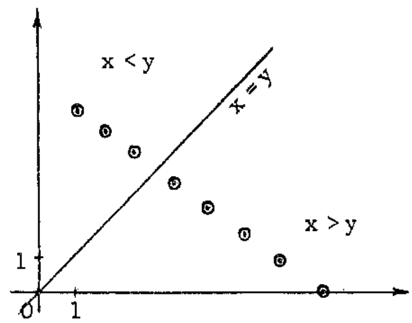


I modi di soddisfare questa ulteriore condizione possono essere determinati per tentativi con la seguente tabella da cui risulta che non sono accettabili mazzi con meno di 2 tulipani.

x	y	5x + 7y
0	9	63
1	8	61
2	7	59
3	6	57
4	5	55
5	4	53
6	3	51
7	2	49
8	1	47
9	0	45

Sul grafico precedente segno con un cerchietto i punti che rappresentano composizioni possibili.

Del resto se tracciassi la retta di equazione $5x + 7y = 60$ dovrei scartare come soluzioni i punti "al di sopra" della retta stessa e quindi troverei ancora che fra le coppie (x,y) prima individuate, quelle $(0;9)$ e $(1;8)$ non soddisfano la disuguaglianza $5x + 7y \leq 60$.



Per rispondere all'ultima domanda prendo ancora in esame la tabella precedente e ricavo che le composizioni possibili sono: 2 tulipani e 7 iris; 3 tulipani e 6 iris; 4 tulipani e 5 iris. Potevo ricavare lo stesso risultato dal grafico tracciando la retta di equazione $x = y$ e scegliendo, tra i punti già individuati, quelli che si trovano "al di sopra" di tale retta, cioè quelli per cui $x < y$.

PROPOSTA N. 3 DEL NUCLEO DI RICERCA DIDATTICA DI PISA

1° quesito. Nel gioco con 2 dadi si decide che l'esito di ciascun lancio sia il prodotto dei punti.

Conviene puntare sull'esito "pari" o sull'esito "dispari"?

Per rispondere puoi costruire lo spazio degli eventi e procedere ai relativi conteggi oppure riflettere sulla struttura della legge moltiplicativa dei pari e dei dispari.

Due ragazzi giocano puntando uno sul "pari" e l'altro sul "dispari" e vogliono che il "piatto" sia di 1200 L.: quanto deve puntare ciascun ragazzo perché il gioco sia equo?

Si vogliono ora distinguere i vari esiti in base al verificarsi o meno dei fatti seguenti considerati simultaneamente:

$\mathcal{A}$: "l'esito è dispari"

$\mathcal{B}$: "l'esito è multiplo di 3"

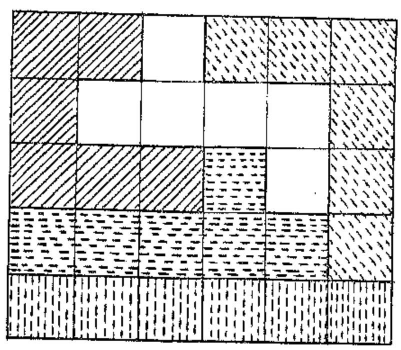
Quali sono le diverse situazioni che si possono presentare? Fai ricorso ad un grafo ad albero.

Qual è la probabilità di avere un esito "dispari e multiplo di 3"?

Qual è la probabilità di avere un esito "dispari o multiplo di 3"?

Qual è la probabilità di avere un esito per cui non sia vero che è "pari e multiplo di 3"?

2° quesito. Osserva la figura:



a) Quale percentuale dell'intero rettangolo è la parte bianca? Tale parte bianca quale percentuale è del resto della figura?

b) Calcola l'area della parte bianca, esprimendola in cm^2 e in m^2, nel caso che base e altezza del rettangolo siano rispettivamente di 3 cm e di 2,5 cm.

c) Immagina di ritagliare su cartoncino ciascuna delle cinque parti in cui è suddiviso il rettangolo.

Da una di queste parti, con opportune piegature lungo i lati dei quadratini che la compongono, è possibile ottenere una scatola cubica. Da quale?

Descrivi a parole ed eventualmente con uno schizzo illustrativo le varie fasi della costruzione del cubo, considerando uno solo dei possibili modi di piegatura.

3° quesito. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di origine O e di assi x e y, segna i punti P(0;6), Q(15;12).

Scegli sull'asse delle x il punto A(8;0). Quanto misura il cammino PA + AQ ? Al variare del punto A sull'asse delle x varia la somma PA + AQ ?

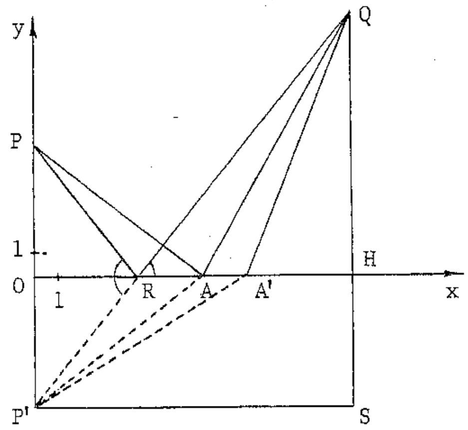
Sempre sull'asse delle x scegli il punto A'(10;0) : quanto misura PA' + A'Q ? Ci sarà un punto dell'asse delle x per cui è minima la somma delle lunghezze dei due segmenti? Per rispondere a tale domanda considera il punto P' simmetrico di P rispetto all'asse delle x e considera i cammini P'A + AQ , P'A' + A'Q , ecc.: come sono rispetto ai corrispondenti PA + AQ , PA' + A'Q , ecc.? Qual è il cammino più breve tra P' e Q ? Trova le coordinate del punto R in cui tale cammino taglia l'asse delle x . Puoi leggere le coordinate direttamente sul grafico o considerare la coppia di triangoli P'QS e RQH con H(15;0) e S(15;-6) .

Se P'R + RQ è il minimo cammino tra P' e Q , anche PR + RQ sarà ... .

Come sono gli angoli $P\hat{R}O$ e $P'\hat{R}O$? E gli angoli $P'\hat{R}O$ e $Q\hat{R}A$? Perché? Come sono allora gli angoli $P\hat{R}O$ e $Q\hat{R}A$?

Se P fosse una sorgente di raggi luminosi e x la traccia di uno specchio (con la superficie speculare rivolta verso le y positive), quale dei cammini segnati in figura sarebbe il cammino di un raggio luminoso uscente da P e passante per Q dopo essersi riflesso sullo specchio x ?

Si potrebbe dunque dire che un raggio che esce da P e, dopo essersi riflesso sullo specchio, passa per Q , segue la legge del minimo cammino? E che affermare questo significa anche dire che l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione? (che cosa si intende per angolo di incidenza e per angolo di riflessione?).



COMMENTO DEI PROPONENTI

Il primo quesito mira a verificare:

1) il possesso dei concetti di base della probabilità
2) la capacità di riconoscere analogie strutturali in casi molto semplici
3) l'abilità di usare diagrammi ad albero in un contesto di logica combinatoria
4) l'uso corretto dei connettivi logici.

Il secondo quesito offre la possibilità di una rapida verifica in merito alla conoscenza del concetto di frazione, di percentuale, di unità di misura, ma è volto a valutare soprattutto:

1) l'acquisizione dell'intuizione spaziale anche in senso dinamico
2) la capacità di rappresentare graficamente una figura solida
3) la capacità di scrivere su argomenti di matematica.

Il terzo quesito consente di:

1) verificare l'acquisizione di alcuni concetti e di alcune abilità di base relativi ai nuovi programmi (metodo delle coordinate, isometrie, similitudine,...)
2) mostrare come il metodo delle coordinate permetta di affrontare la soluzione di un problema sia dal punto di vista analitico che dal punto di vista grafico

3) collegare alcuni argomenti e concetti matematici (le simmetrie) con concetti ed esperimenti della fisica (riflessione della luce); far gustare la potenza di un metodo di indagine geometrica che si avvale della simmetrizzazione di alcune figure

4) portare gli alunni a saper riconoscere qualche proprietà formale (proprietà transitiva dell'uguaglianza) e a saper fare qualche tratto di ragionamento logico-deduttivo).

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. Comincio col costruire lo spazio degli eventi.

Contrassegno con una crocetta gli esiti dispari: sono 9 su 36 esiti possibili. Quindi conviene puntare sull'esito "pari", poiché la probabilità di un esito "dispari" è $\frac{9}{36}$, mentre quella di un esito "pari" è $\frac{27}{36}$, triplo della precedente.

6	6	12	18	24	30	36
5	~~5~~	10	~~15~~	20	~~25~~	30
4	4	8	12	16	20	24
3	~~3~~	6	~~9~~	12	~~15~~	18
2	2	4	6	8	10	12
1	~~1~~	2	~~3~~	4	~~5~~	6
	1	2	3	4	5	6

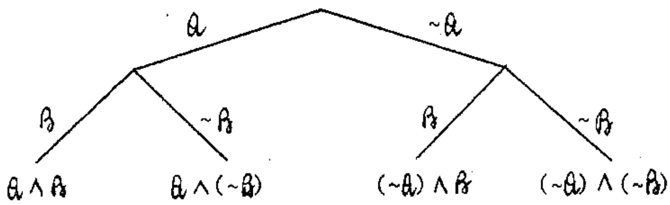
Potevo accorgermi subito che è conveniente puntare sul "pari",pensando alla tabella del prodotto dei pari e dei dispari:

x	P	D
P	P	P
D	P	D

I due dadi propongono la stessa situazione perché su ciascuno di essi i punti pari sono nello stesso numero di quelli dispari.

Per giocare equamente i due ragazzi devono tener conto delle probabilità ora calcolate e concordare che chi punta sul "pari" deve mettere per il piatto una somma tripla rispetto a quella del ragazzo che punta sul "dispari". Nel nostro caso, in cui il "piatto" è di 1200 L., il ragazzo che punta sul "pari" deve mettere 900 L. e quello che punta sul "dispari" 300 L..

Le diverse situazioni che si possono presentare in base al verificarsi o meno di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$ sono quelle che risultano da questo grafo ad albero:



$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$: "l'esito è dispari e multiplo di 3"

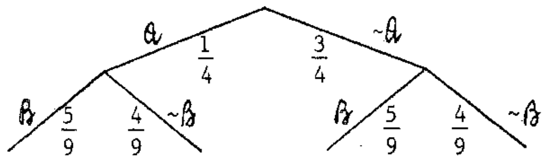
$\mathcal{A}\wedge(\sim\mathcal{B})$: "l'esito è dispari e non è multiplo di 3"

$(\sim\mathcal{A})\wedge\mathcal{B}$: "l'esito è pari e multiplo di 3"

$(\sim\mathcal{A})\wedge(\sim\mathcal{B})$: "l'esito è pari e non è multiplo di 3".

Ora rifaccio il grafo attribuendo ad ogni ramo la sua probabilità. Ricordo che $p(\mathcal{A}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ e quindi $p(\sim\mathcal{A}) = \frac{3}{4}$. Dallo spazio degli eventi ricavo che

$$p(\mathcal{B}) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \quad \text{e quindi} \quad p(\sim\mathcal{B}) = \frac{4}{9}$$



$$p(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{36}$$

Per calcolare $p(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$, tengo conto del fatto che questa probabilità deve essere data da

$$p(\mathcal{A}\wedge(\sim\mathcal{B})) + p((\sim\mathcal{A})\wedge\mathcal{B}) + p(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{9} = \frac{4}{36} + \frac{15}{36} + \frac{5}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Tale probabilità poteva essere calcolata anche così:

$$p(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B}) - p(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) = \frac{1}{4} + \frac{5}{9} - \frac{5}{36} = \frac{9+20-5}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

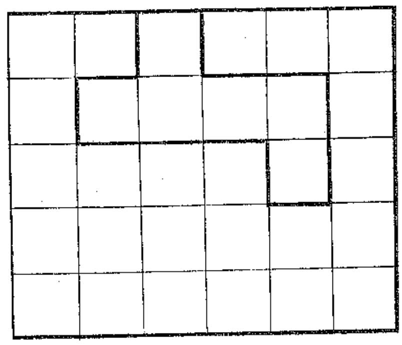
La probabilità di un esito "pari e multiplo di 3" è letta sul terzo ramo del grafo ad albero:

$$p((\sim\mathcal{A})\wedge\mathcal{B}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9} = \frac{15}{36}$$

Quindi la probabilità dell'evento contrario, che è quella richiesta, è

$$1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

2° quesito. a) Possiamo pensare il rettangolo dato costituito da 30 quadratini unità.

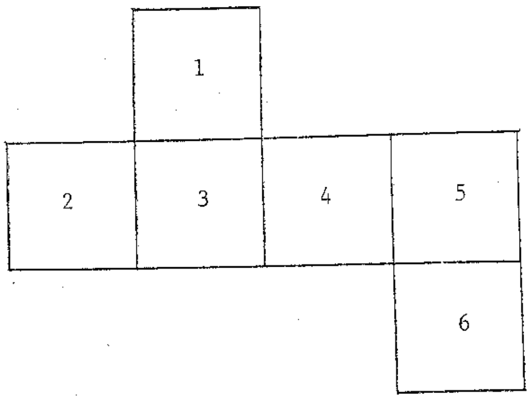


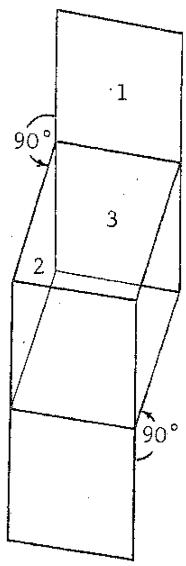
La parte bianca è composta da 6 di questi quadretti, perciò la parte bianca è $\frac{1}{5}$ dell'intero rettangolo, ovvero, poiché $\frac{1}{5}=\frac{20}{100}$, essa è il 20% dell'intero.

La parte non bianca della figura è costituita da 24 quadrettini; $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$, perciò la parte bianca rappresenta il 25% della parte rimanente del rettangolo.

b) Ciascuno dei "quadratini unità" prima considerati ha, nel caso indicato, il lato di 0,5 cm e la sua area è perciò, in cm^2, 0,25. L'area della parte bianca è, *in* cm^2, : $6 \times 0{,}25 = 1{,}50$ e *in* m^2, : $1{,}50 : 10^4 = 1{,}50 \times 10^{-4} = 0{,}000150$.

c) Solo dalla parte bianca è possibile, con opportune piegature lungo i lati dei quadretti, ottenere una scatola cubica. Ritagliata la figura su un cartoncino si può arrivare al cubo attraverso i passaggi seguenti:

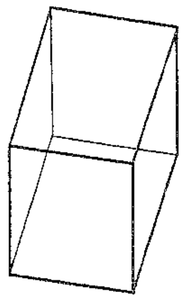




Con opportune piegature dispongo i quadrati 2,3,4,5 in modo che formino la superficie laterale della scatola cubica.

Il disegno illustra che, nel modo di costruzione scelto, le facce dei quadrati su cui è stata scritta la cifra rimangono all'interno della scatola.

Successivamente ripiego il quadrato 1 e il quadrato 6 in modo da chiudere la scatola cubica. Dall'esterno non si vede alcuna cifra.



3° quesito. Assumo una stessa unità di misura lineare sull'asse delle x e su quello delle y e questa sarà l'unità di misura per tutte le lunghezze che seguono

$$\overline{PA} + \overline{AQ} = \sqrt{6^2 + 8^2} + \sqrt{7^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 64} + \sqrt{49 + 144} = \sqrt{100} + \sqrt{193} \simeq 10 + 13{,}9 = 23{,}9$$

$$\overline{PA'} + \overline{A'Q'} = \sqrt{6^2 + 10^2} + \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 100} + \sqrt{25 + 144} = \sqrt{136} + \sqrt{169} \simeq 11{,}7 + 13 = 24{,}7$$

$\overline{PA} = \overline{P'A}$ quindi $\overline{PA} + \overline{AQ} = \overline{P'A} + \overline{AQ}$, $\overline{PA'} = \overline{P'A'}$ quindi $\overline{PA'} + \overline{A'Q} = \overline{P'A'} + \overline{A'Q}$.

Il cammino più breve tra P' e Q è il segmento $P'Q$: esso taglia l'asse delle x in un punto che chiamo R .

Per trovare le coordinate di R considero i due triangoli rettangoli $P'QS$ e RQH : essi sono simili avendo gli angoli rispettivamente uguali. Infatti: $P'\hat{S}Q = R\hat{H}Q$ perché retti, $P'\hat{Q}S = R\hat{Q}H$ perché coincidenti, $Q\hat{P}'S = Q\hat{R}H$ perché differenza di angoli uguali. Posso perciò scrivere che i lati corrispondenti dei due triangoli sono in proporzione

$$\frac{\overline{QH}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{RH}}{\overline{P'S}}$$

ovvero

$$\frac{12}{12 + 6} = \frac{x}{15}$$

Ricavo la x :

$$x = \frac{12 \cdot 15}{18} = \frac{30}{3} = 10$$

Se $\overline{RH} = 10$, $\overline{OR} = \overline{OH} - \overline{RH} = 15 - 10 = 5$. Sul grafico posso controllare la corrispondenza con il valore trovato.

Poiché ad ogni cammino che da P' va a Q toccando l'asse delle x corrisponde un uguale cammino che da P va a Q passando per il medesimo punto dell'asse delle x , posso dire che il cammino più breve tra P e Q è $PR + RQ$.

Gli angoli $P\hat{R}O$ e $P'\hat{R}O$ sono uguali perché corrispondenti nella simmetria di asse x .

Gli angoli $P'\hat{R}O$ e $Q\hat{R}A$ sono uguali perché opposti al vertice. Sono quindi uguali anche gli angoli $P\hat{R}O$ e $Q\hat{R}A$ per la proprietà transitiva dell'uguaglianza.

Il raggio luminoso seguirebbe il cammino P R Q obbedendo alla legge del minimo percorso.

Per angolo di incidenza si intende l'angolo che il raggio incidente forma con la perpendicolare allo specchio passante per il punto di incidenza; per angolo di riflessione si intende l'angolo che il raggio riflesso forma con la stessa perpendicolare allo specchio.

Poiché $P\hat{R}O = Q\hat{R}A$, posso affermare che gli angoli di incidenza e di riflessione sono uguali: essi infatti sono rispettivamente i complementari dei precedenti.

PROPOSTA DI WALTER AVOSSA (PADOVA)

1° quesito. E' dato un cubo di spigolo a : descrivilo come poliedro.

Scrivi in funzione dello spigolo a le formule dell'area di una faccia, dell'area della superficie totale, del volume e della diagonale.

Quali piani di simmetria ammette il cubo e qual è la forma delle rispettive sezioni?

Qual è il rapporto fra il quadrato della diagonale del cubo e l'area della superficie totale? e della superficie laterale?

Considera ora un altro cubo che abbia lo spigolo pari ai 2/3 dello spigolo del cubo dato: dì qual è il rapporto fra le diagonali, tra le facce, fra le superfici totali, fra i volumi dei due solidi.

Il cubo è uno dei 5 possibili poliedri regolari: vedi di ricordare gli altri quattro, i poligoni piani da cui traggono origine e la relazione che lega tra loro il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli.

2° quesito. Considera una "camera oscura". Rispondi alle seguenti domande:

1) Un oggetto, simboleggiato da una freccia AB posta verticalmente e lunga 8 cm, dista dal diaframma D di una camera oscura di 120 cm; a quale distanza da D si forma la sua immagine, se essa è lunga 12 cm ?
2) Quand'è che l'oggetto e la sua immagine hanno uguali dimensioni?
3) Se l'oggetto è un quadrato con l'estensione di 25 cm^2 e la sua immagine è un altro quadrato di 100 cm^2, a quale distanza si trova l'oggetto dal diaframma D se la distanza fra oggetto e immagine è di 48 cm ?

3° quesito. In un sistema cartesiano ortogonale Oxy considera il triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(18/5,24/5)$, $B(10,0)$:

1) determinane l'area.
2) determina il perimetro.
3) trova le coordinate dei punti A_1 e A_2 simmetrici di A rispetto all'asse x e all'asse y.
4) è vero che il triangolo OAB è rettangolo? Giustifica la risposta.

4° quesito. Con esempi opportuni chiarisci la differenza esistente tra evento certo e evento casuale. Rispondi ora alle seguenti domande:

1) Il numero dei casi favorevoli di un evento com'è rispetto al numero dei casi possibili?
2) Gettando un dado numerato da 1 a 6, quale punteggio è più probabile rispetto agli altri?
3) Se i dadi sono invece due, quali valori può assumere la somma dei singoli punteggi? Esprimi i risultati mediante una tabella a doppia entrata.
4) Tra le somme di cui al punto 3) qual è secondo te la più probabile?
5) Se ad ogni punteggio-somma si abbinano delle scommesse in denaro, le puntate devono essere tutte uguali o no, perché il gioco non favorisca l'uno o l'altro dei giocatori?

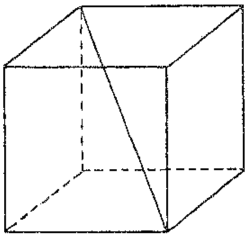
SCHEMA DI SOLUZIONE DEL PROPONENTE (1)

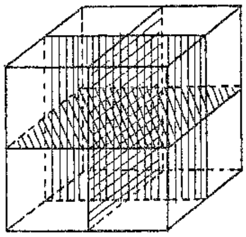
1° quesito. Il cubo è un poliedro avente tutte le sei facce congruenti fra loro; queste facce sono quadrati; gli spigoli sono 12 e i vertici 8. Esso fa parte dei 5 poliedri regolari e anche dell'insieme dei parallelepipedi.

Formule: area di una faccia $\rightarrow a^2$; area superficie totale $\rightarrow 6a^2$; volume $\rightarrow a^3$; diagonale $\rightarrow a\sqrt{3}$. Piani di simmetria: sono 9 e precisamente: 3 passano per i punti medi dei lati fra loro paralleli: ognuno taglia 4 spigoli, quin-

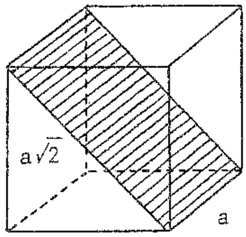
(1) Ho svolto le relazioni non come docente, bensì come discente, in accordo con quanto scritto alla lettera b) della circolare dell'U.M.I. Per quanto riguarda la lettera a), è evidente che gli argomenti delle relazioni sono stati convenientemente e abbondantemente trattati durante l'anno scolastico e sufficientemente recepiti dalla scolaresca.

di $12 : 4 = 3$; 6 passano per due spigoli opposti: $12 : 2 = 6$





3 piani



1 dei 6 piani

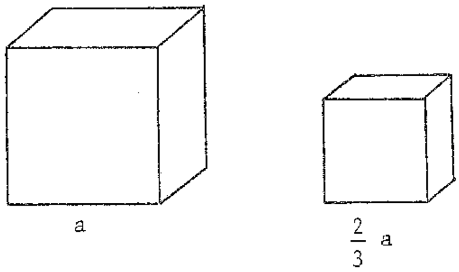
Le sezioni dei primi 3 sono quadrati di lato a , quelle degli altri 6 sono rettangoli, le cui dimensioni sono lo spigolo a e la diagonale di una faccia $a\sqrt{2}$

$$d = a\sqrt{3} \quad , \quad d^2 = a^2 \cdot 3 \quad , \quad A_t = 6a^2$$

$$\frac{d^2}{A_t} = \frac{a^2 \cdot 3}{6a^2} = \frac{1}{2}$$ rapporto fra quadrato della diagonale e area totale

$$d^2 = a^2 \cdot 3 \quad , \quad A_l = 4a^2$$

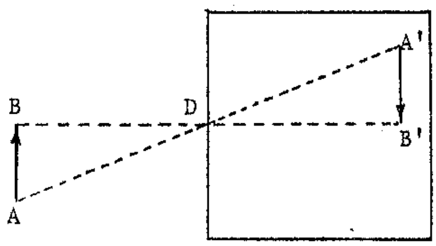
$$\frac{d^2}{A_l} = \frac{a^2 \cdot 3}{4a^2} = \frac{3}{4}$$ rapporto fra quadrato della diagonale e area laterale.



I due cubi sono simili, come tutti i poliedri regolari, e il rapporto di similitudine fra il minore e il maggiore è $\frac{2}{3}$. So che questo rapporto rimane costante per tutti i segmenti corrispondenti, mentre per le superfici è uguale a $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ e per i volumi è uguale a $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$.
Altri poliedri regolari sono quelli che hanno per facce triangoli equilateri (3) e pentagoni (1). La relazione richiesta è quella di Eulero:

$$\underset{\text{facce}}{\underset{\downarrow}{F}} + \underset{\text{vertici}}{\underset{\downarrow}{V}} = \underset{\text{spigoli}}{\underset{\downarrow}{S}} + 2$$

2° quesito. Nella camera oscura si realizza una similitudine tra l'oggetto e la sua immagine, il cui rapporto è quello tra le rispettive distanze dal diaframma. Deve risultare perciò



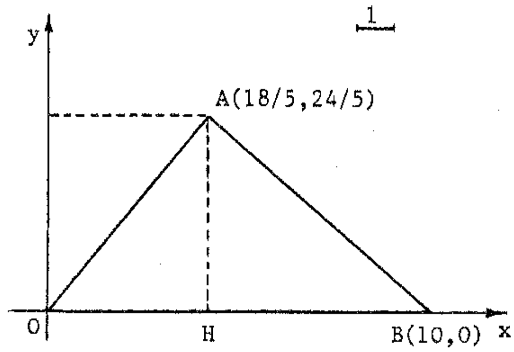
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BD|}{|B'D|} \quad \text{da cui} \quad |B'D| = \frac{|BD| \cdot |A'B'|}{|AB|} = \frac{120 \cdot 12}{8}$$

La distanza richiesta è dunque 180 cm.

2) L'oggetto e la sua immagine hanno eguali dimensioni quando è eguale la loro distanza dal diaframma.

3) Il rapporto tra le estensioni dell'oggetto e della sua immagine è il quadrato del rapporto (di similitudine) tra le rispettive distanze dal diaframma. Deve risultare perciò $\frac{|BD|}{|B'D|} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{1}{2}$. Ma sappiamo che $48 = |BD| + |B'D| = 3|BD|$ e quindi la distanza richiesta è 16 cm.

3° quesito. Per le misure lineari si è scelta come unità di misura il cm, per le aree il cm^2.



1) La base del triangolo OAB misura $|OB| = 10$. L'altezza misura $|AH| = 24/5$ e separa la base in due segmenti di lunghezza

$$|OH| = \frac{18}{5} \qquad |HB| = 10 - \frac{18}{5} = \frac{32}{5}$$

L'area del triangolo è semplicemente $\frac{1}{2}\,|OB| \cdot |AH| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{24}{5} = 24$.

2) Con il teorema di Pitagora calcolo invece il perimetro:

$$p = |OB| + |BA| + |AO| = 10 + \sqrt{(\tfrac{32}{5})^2 + (\tfrac{24}{5})^2} + \sqrt{(\tfrac{18}{5})^2 + (\tfrac{24}{5})^2} =$$
$$= 10 + \sqrt{\frac{1600}{25}} + \sqrt{\frac{900}{25}} = 24$$

3) Il punto A' simmetrico di A rispetto all'asse x ha l'ascissa di A e l'ordinata opposta di quella di A , e cioè A'(18/5 , -24/5) . Analogamente, il punto A" simmetrico di A rispetto all'asse y è A"(-18/5 , 24/5) .

4) Sì, l'angolo in A è retto perché risulta

$$|OA|^2 + |AB|^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = |OB|^2$$

e sappiamo che il teorema di Pitagora vale soltanto per i triangoli rettangoli.

4° *quesito*. Un evento *certo* è quello che avviene sicuramente. Per esempio, un sasso lanciato in aria cade sempre giù; dopo la notte viene il giorno; raddoppiando lo spazio si raddoppia anche il tempo, se la velocità è costante; ecc.

Un evento *casuale* è quello che può avvenire ma non è detto che avvenga. Per esempio, estraendo una carta da un mazzo di carte da gioco può uscire un *tre*, ma può anche non uscire. Se è molto nuvoloso, può piovere ma anche no.

1ª domanda: il numero dei casi favorevoli è sempre minore, al massimo uguale a quello dei casi possibili (per esempio, estrarre una caramella di menta da un sacchetto pieno di caramelle di vari gusti).

2ª domanda: nessuno, perchè hanno tutti probabilità uguale a $\frac{1}{6}$.

3ª domanda: i valori assunti dalla somma dei punteggi di due dati vanno da un minimo di 2 a un massimo di 12.

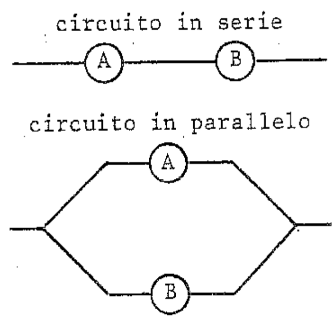
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

4ª domanda: guardando la tabella, si vede che il 7 è il più frequente: infatti si presenta 6 volte.

5ª domanda: logicamente le puntate devono essere diverse; ad esempio chi punta sul 7 (6 casi) deve pagare di più di chi punta sul 3 (due casi), perché ha maggior probabilità di vincere.

PROPOSTA DI SIMONA BONUCCELLI-BARGELLINI (VIAREGGIO)

1° quesito. Il buon funzionamento dei circuiti elettrici è molto importante, pensate che il successo di una spedizione spaziale dipende anche da questi!



Gli utilizzatori di un circuito elettrico possono essere collegati in serie od in parallelo. Potrebbe accadere che uno dei due utilizzatori, od entrambi, non funzioni, ed in conseguenza il circuito potrebbe lasciar passare corrente o no a seconda dei casi che si possono presentare:

a) Completate la tabella facendo una crocetta nella giusta colonna:

Funzionamento.	Utilizzatori in serie		Utilizzatori in parallelo	
	La corrente passa	La corrente non passa	La corrente passa	La corrente non passa
A si e B si	...	...	...	...
A si e B no	...	...	...	...
A no e B si	...	...	...	...
A no e B no	...	...	...	...

b) Supponendo che la probabilità che l'utilizzatore A funzioni per tutta la durata di un viaggio spaziale sia di $\frac{8}{10}$ e che quella che funzioni B sia di $\frac{9}{10}$, completate i dati mancanti

P (A funzioni) = 0,8   P (B funzioni) = 0,9

P (A fallisca) = ...   P (B fallisca) = ...

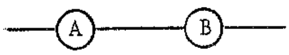
Proponendo i seguenti quesiti come esempio per la prova scritta di Matematica, devo premettere che ho abituato i miei allievi a lavorare su ciclostilati, in modo da evitare dispersioni di tempo, di parole e di calcoli inutili.

c) In base ai dati precedenti calcolate la probabilità che si verifichi ciascuno dei seguenti eventi:

Funzionamento	Probabilità
A si e B si	0,8 × 0,9 = 0,72
A si e B no	...
A no e B si	...
A no e B no	...

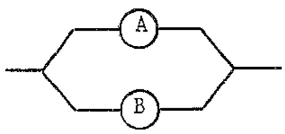
d) Calcolate in base ai dati del n. b) la probabilità di funzionamento per ciascuno dei seguenti circuiti

circuito in serie



P = ...

circuito in parallelo



P = ...

e) Quale dei due tipi di collegamento ha maggior probabilità di funzionare per tutta la durata del viaggio spaziale?

2° quesito. Completate la seguente tabella:

Poligono regolare	n° assi di simmetria	n° dei triangoli nei quali è possibile scomporlo conducendo tutte le possibili diagonali da un vertice	somma di tutti gli angoli interni	misura di ciascuno degli angoli interni	misura di un suo lato (cm)	misura del suo apotema (cm)	misura del raggio del cerchio iscritto (cm)	misura del raggio del cerchio circoscritto (cm)
triangolo	...	...	...	...	6	...	...	...
quadrato	...	...	...	...	...	4	...	...
esagono	...	...	...	...	6	...	...	...

3° quesito. a) Se piegate a metà un foglio di carta e lo tagliate lungo la linea di piegatura, quanti fogli di carta otterrete? ...

b) Se ripiegate nuovamente a metà ciascun foglio così ottenuto e lo ritagliate lungo la linea di piegatura, in totale quanti fogli otterrete? ...

c) Se ripetete nuovamente l'operazione di piegatura e di taglio su ciascun foglio così ottenuto, quanti fogli otterrete? ...

d) Come cresce il numero dei fogli ottenuti col procedimento descritto, dopo ogni operazione di taglio? ...

e) Completate la seguente tabella

numero dei tagli	numero dei fogli
1	2
2	...
3	...
4	...
5	...
6	...

f) Rappresentate graficamente i dati così ottenuti.

g) Quanti fogli avrete ottenuto dopo 20 operazioni di taglio?...

h) Supponete che dopo 20 tagli il foglio ottenuto abbia una superficie di 1 cm^2, quanto misurava la superficie del foglio di partenza? ...

COMMENTO DELLA PROPONENTE

Il quesito n. 1 si riallaccia ad alcune attività sui circuiti elettrici svolte dagli allievi sia nel campo delle scienze sperimentali che dell'educazione tecnica e si riferisce alla matematica del certo e del probabile, richiede semplici conoscenze di base, intuizione e capacità di sintesi e permette di cogliere alcune interazioni tra conoscenze matematiche e tecnologia.

Il quesito n. 2 permette di verificare alcune conoscenze di geometria e di valutare le capacità di riflessione e di organizzazione degli allievi.

Il quesito n. 3 è un esercizio che permette di verificare, oltre alle conoscenze sulle rappresentazioni grafiche, le capacità di riflessione e astrazione degli allievi.

E' consentito l'uso del calcolatore.

SCHEMA DI SOLUZIONE DELLA PROPONENTE

1° quesito. a)

A si e B si	×	...	×	...
A si e B no	...	×	×	...
A no e B si	...	×	×	...
A no e B no	...	×	...	×

b) P (A funzioni) = 0,8 ; P (A fallisca) = 0,2 ; P (B funzioni) = 0,9 ; P (B fallisca) = 0,1 .

c)

Funzionamento	Probabilità
A si e B si	0,8 × 0,9 = 0,72
A si e B no	0,8 × 0,1 = 0,8
A no e B si	0,2 × 0,9 = 0,18
A no e B no	0,2 × 0,1 = 0,2

d) Circuito in serie: P = 0,8 × 0,9 = 0,72 , funziona solo se funziona A e B ; P = 0,72 + 0,8 + 0,18 = 0,98 . Il circuito in parallelo funziona sia che funzionino A e B , o uno dei due.

e) il collegamento in parallelo.

2° quesito.

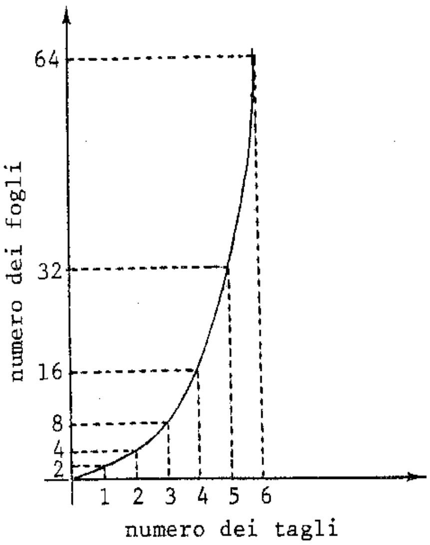
Poligono regolare	n° assi simm.				l	a	r	R
triangolo	3	1	180°	60°	6	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
quadrato	4	2	2·180°	90°	8	4	4	$4\sqrt{2}$
esagono	6	4	4·180°	120°	6	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	6

3° quesito. a) 2 , b) 4 , c) 8 , d) raddoppia.

e)

numero dei tagli	numero dei fogli
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

f)



g) 1.048.576.

h) 1.048.576 cm^2.

PROPOSTA DI MARIA GIUDITTA CAMPEDELLI (FIRENZE) (*)

1° quesito. Sono dati tre rettangoli, R_1, R_2 ed R_3, tali che:

	base [in cm]	altezza [in cm]
R_1	4	3
R_2	2	1,5
R_3	6	4,5

1) Tracciare, su un foglio di carta quadrettata, un riferimento cartesiano ortogonale in cui, sugli assi, il lato di un quadretto rappresenta 1 cm. Sapendo che le coordinate degli estremi della base inferiore di R_1 sono rispettivamente (1,0) e (5,0), quelle degli estremi della base superiore di R_2 sono (6,5) e (8,5), e quelle degli estremi della base superiore di R_3 sono (10,10) e (16,10), disegnare R_1, R_2, R_3 ed indicare le coordinate di tutti i loro vertici.

Disegnare i rettangoli, $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ ed $\bar{R}_3$, simmetrici rispettivamente di R_1, R_2 ed R_3 rispetto all'asse delle ascisse, e scrivere le coordinate dei vertici di questi nuovi rettangoli.

2) E' vero o falso che i perimetri e le aree delle superficie di $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$ sono ancora, rispettivamente, quelli di R_1, R_2, R_3 ? Perché?

3) Osservando i dati di R_1, R_2, R_3 si rileva che il rapporto fra le altezze e le relative basi è sempre il medesimo $(e = \frac{3}{4})$; si può esprimere questa circostanza con la scrittura: $y = \frac{3}{4}x$, dove x

(*) Si propone una prova per alunni di una terza classe di una scuola media tipo, di cui circa il 60% intende proseguire gli studi, gli altri verranno immessi nel mondo del lavoro. Tra i futuri studenti delle superiori, circa un quarto frequenterà un liceo, i rimanenti istituti tecnici o professionali. L'insegnante ha cercato di guidare i propri allievi a "saper vedere", a ricorrere alla intuizione e al buon senso; ha inoltre voluto abituarli a giustificare per scritto i procedimenti seguiti e ad usare lo strumento grafico.

indica la base di un rettangolo qualunque dei nostri, e y la sua altezza. E' vero che ci sono infiniti rettangoli che presentano la stessa situazione? Qual è l'espressione grafica della legge: $y = \frac{3}{4}x$?

Ricorrendo al grafico ora realizzato (e senza fare calcoli) riconoscere quanto misura l'altezza del rettangolo la cui base è 8 cm; giustificare il procedimento.

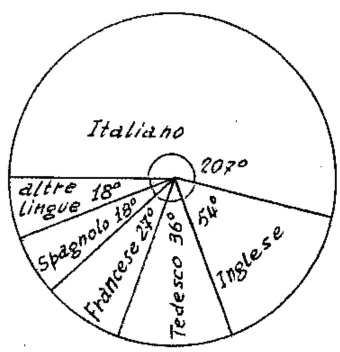
4) Il rettangolo R_1 è la base di una piramide, W, la cui altezza, di 6 cm, cade nel punto d'incontro delle diagonali di R_1; disegnare in scala (1 cm: lato di un quadretto) lo sviluppo piano di W.

2° quesito. Ho incontrato un tale che mi ha offerto di acquistare, a un prezzo molto conveniente, tre lingotti d'oro; ho il dubbio che non siano d'oro, ma solo dorati, e quindi mi sono riservato di dare una risposta dopo aver avuto a disposizione, per breve tempo, i tre pezzi, ciascuno dei quali ha la forma di un parallelepipedo retto rettangolo. Ho preso un calibro, con cui ho misurato le dimensioni, e una bilancia da farmacista. Ne ho ricavato i seguenti dati:

	larghezza [in cm]	profondità [in cm]	altezza [in cm]	peso [in gr]
lingotto L_1	2	2	0,5	38,6
lingotto L_2	4	1	0,25	19,3
lingotto L_3	3,5	2	0,5	36,75

Sapendo che il peso specifico dell'oro è p_{Au} 19,3 gr/cm^3, ho trovato il modo di risolvere i miei dubbi. Qual è la situazione?

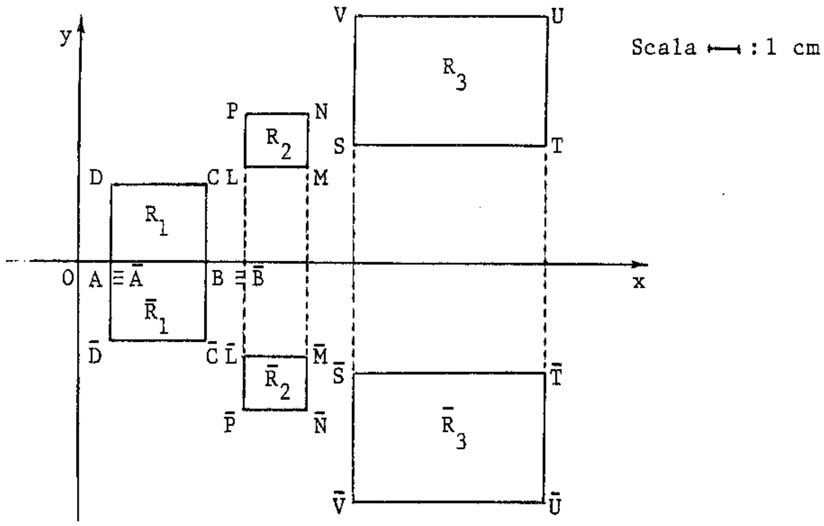
3° quesito. L'areogramma qui riportato si riferisce alla percentuale di libri venduti in un anno in Italia, in relazione alle lingue in cui sono scritti (cioè dire quanti libri, su 100 venduti, sono in una certa lingua).



Rappresentare la medesima situazione con un istogramma.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. 1)



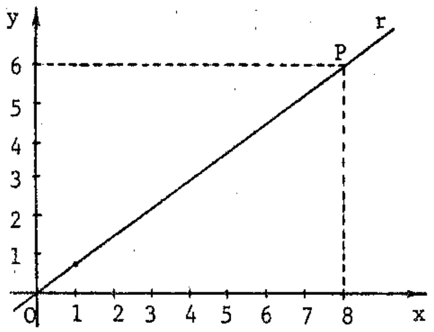
I rettangoli hanno i vertici in:

R_1)	A(1;0)	B(5;0)	C(5;3)	D(1;3)
R_2)	L(6;3,5)	M(8;3,5)	N(8;5)	P(6;5)
R_3)	S(10;5,5)	T(16;5,5)	U(16;10)	V(10;10)
$\bar{R}_1$)	$\bar{A}$(1;0)	$\bar{B}$(5;0)	$\bar{C}$(5;-3)	$\bar{D}$(1;-3)
$\bar{R}_2$)	$\bar{L}$(6;-3,5)	$\bar{M}$(8;-3,5)	$\bar{N}$(8;-5)	$\bar{P}$(6;-5)
$\bar{R}_3$)	$\bar{S}$(10;-5,5)	$\bar{T}$(16;-5,5)	$\bar{U}$(16;-10)	$\bar{V}$(10;-10)

2) Poiché le figure che si corrispondono in una simmetria assiale sono fra loro uguali, i perimetri e le aree dei rettangoli simmetrici (cioè R_1 ed $\bar{R}_1$, R_2 ed $\bar{R}_2$, R_3 ed $\bar{R}_3$) sono uguali.

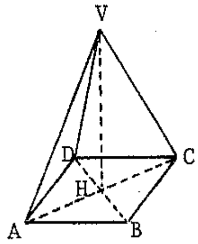
3) Tutti i rettangoli di base x e altezza $y = \frac{3}{4}x$ appartengono ad un medesimo insieme, I ; gli elementi di I sono infiniti, poiché x - e quindi y - può assumere infiniti valori. L'espressione grafica della legge (di *proporzionalità diretta*) $y = \frac{3}{4}x$ è una retta, r , passante per l'origine. Per disegnarla, basta trovare un altro punto, per esempio: $A(1\,;\frac{3}{4})$.

Poiché le lunghezze delle basi vengono riportate sull'asse delle ascisse (scala 1 cm: lato di un quadretto), basta trovare su di esso il punto di ascissa 8 ; da questo si traccia il segmento di perpendicolare fino ad incontrare in P la retta r . Il segmento di perpendicolare da P all'asse delle ordinate lo in-

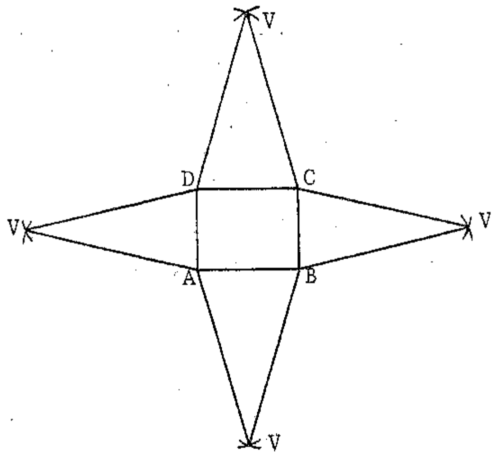


contra nel punto di ordinata 6: dunque l'altezza cercata è 6 cm.

4) Per disegnare lo sviluppo piano di W basta trovare la lunghezza dello spigolo delle facce; si potrebbero anche determinare le altezze delle facce (a due a due uguali fra loro). Seguiamo la prima via. Lo spigolo delle facce è l'ipotenusa del triangolo rettangolo VHA , i cui cateti sono lunghi come l'altezza di W e come metà diagonale di R_1 .



Poiché i cateti del triangolo rettangolo ABC sono rispettivamente 3 cm e 4 cm, la sua ipotenusa è 5 cm (si riconosce la terna pitagorica 3 , 4 , 5). Quindi: $AH = \frac{1}{2} AC = 2{,}5$ (in cm). Risulta allora: $AV = \sqrt{VH^2 + HA^2} = \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = 6{,}5$ (in cm).



Tenendo conto della scala assegnata, con un' apertura di compasso di 6 quadretti e mezzo si possono disegnare i triangoli isosceli che costituiscono le facce della piramide W , e realizzare così il suo sviluppo piano.

2° quesito. Se i lingotti sono d'oro, moltiplicando il volume, V , di ciascuno di essi per il peso specifico, p_{Au}, dell'oro, si deve ottenere il peso, P , indicato nella tabella. Risulta:

L_1) $V = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 2$ (in cm^3),

$P = 2 \cdot 19{,}3 = 38{,}6$ (in gr);

L_2) $V = 4 \cdot 1 \cdot 0{,}25 = 1$ (in cm^3),

$P = 1 \cdot 19{,}3 = 19{,}3$ (in gr);

L_3) $V = 3{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$ (in cm^3),

$P = 3{,}5 \cdot 19{,}3 = 67{,}55$ (in gr).

Se ne deduce che i lingotti L_1 e L_2 sono d'oro, mentre L_3 è soltanto dorato.

3° quesito. Le percentuali di libri delle diverse lingue, venduti in Italia in un anno, si ricavano dall'areogramma, tenendo presente che gli angoli al centro sono proporzionali a dette percentuali, e che l'angolo giro si riferisce alla vendita di 100 libri. Si ha dunque, indicando con x la percentuale cercata:

italiano) $100 : 360 = x : 207$, $x = \frac{5}{18}\, 207 = 57{,}5$;

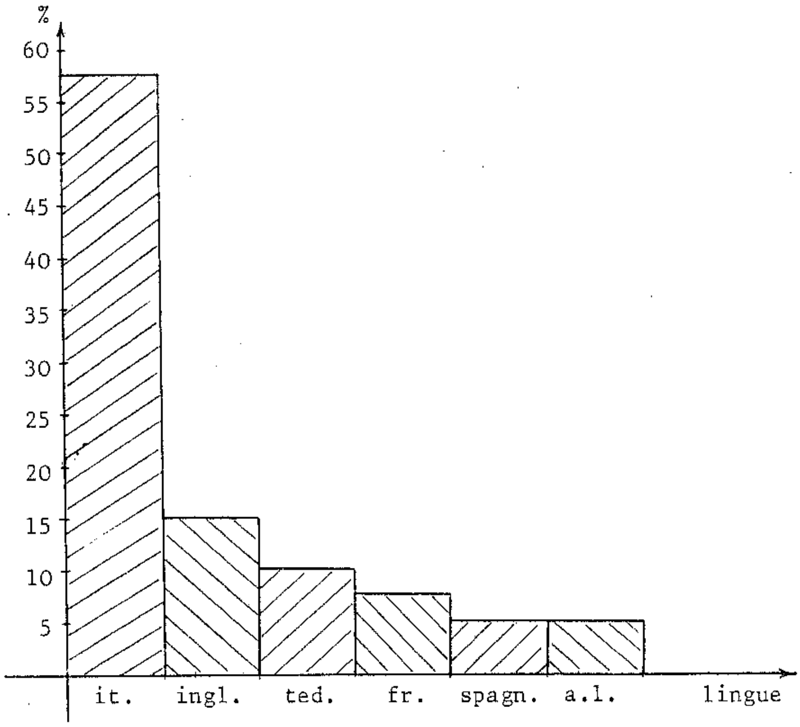
inglese) $x = \frac{5}{18} \cdot 54 = 15$;

tedesco) $x = \frac{5}{18} \cdot 36 = 10$;

francese) $x = \frac{5}{18} \cdot 27 = 7{,}5$;

spagnolo) $x = \frac{5}{18} \cdot 18 = 5$;

altre lingue) $x = 5$.



PROPOSTA DI DORA NELLI (NAPOLI)

1° quesito. Un prisma retto a base quadrata ha lo spigolo di base di 8 cm e l'altezza di 20 cm. Calcola il suo volume e studia come esso varierebbe

a) rimanendo costante lo spigolo di base e variando l'altezza,

b) rimanendo costante l'altezza e variando lo spigolo di base.

Compila due tabelle e fai i rispettivi grafici.

Cita poi altre grandezze legate dalle stesse leggi, anche al di fuori della matematica.

2° quesito. In un triangolo ABC l'angolo $\hat{B}$ è il doppio di $\hat{A}$ e $\hat{C}$ è il triplo di $\hat{B}$.

Determina l'ampiezza di ciascun angolo.

Disegna poi due degli infiniti triangoli che hanno gli angoli come da suddette informazioni. Spiega perché sono infiniti e individua la trasformazione che porta il primo dei triangoli disegnati sul secondo.

3° quesito. Un icosaedro regolare di cartone omogeneo ha le facce numerate con i numeri naturali da 1 in poi. In seguito a un lancio qual è la probabilità che la faccia a terra contenga un multiplo di 5 o un quadrato perfetto?

4° quesito. Disegna una retta e, dopo aver fissato un punto per lo zero (origine) e un segmento unità lungo 10 cm, riporta sulla retta stessa il numero $\sqrt{2}$ e i numeri che lo approssimano per difetto e per eccesso, a meno di un'unità e a meno di un decimo.

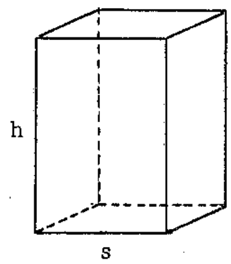
Poi, se credi, fai qualche osservazione.

SCHEMA DI SOLUZIONE DELLA PROPONENTE

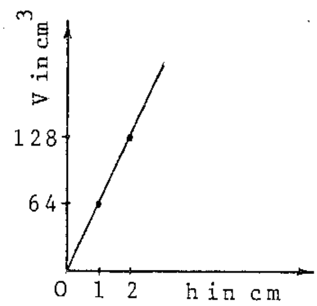
1° quesito. $s = 8$ cm , $h = 20$ cm , $V = s^2 h = 64 \cdot 20 = 1280$ cm^3 .

Per s costante

h	V
40	$64 \cdot 40 = 2560$
10	$64 \cdot 10 = 640$
0	$64 \cdot 0 = 0$
1	$64 \cdot 1 = 64$
2	$64 \cdot 2 = 128$
⋮	⋮



Si osserva che, se h raddoppia, si dimezza, diventa 1/10 , ecc. anche V raddoppia, si dimezza, diventa 1/10 , ecc. Quindi si tratta di grandezze direttamente proporzionali. Ciò si poteva capire anche dalla formula, perché $V = s^2 h$, per s costante, è del tipo $y = kx$ che è la relazione caratteristica della proporzionalità diretta.



Si può fare il grafico così. Sull'asse delle ordinate è convenuto prendere un'unità piccola per non occupare troppa parte del foglio. Sull'arbitrarietà dell'unità di misura sugli assi giuocano talvolta coloro che fanno pubblicità per impressionare a loro favore chi non si intende di matematica. Qui, oltretutto, si tratta di grandezze non omogenee.

Va notato che il grafico, se h varia con continuità, è una semiretta che nasce nell'origine e si estende nel primo quadrante. E' una semiretta e non una retta perché h e V non possono assumere valori negativi.

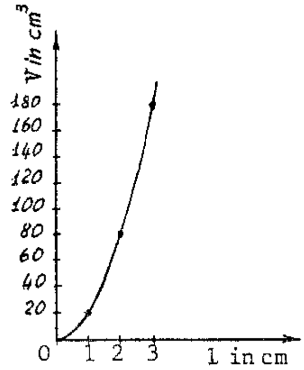
Se già si sa che il grafico caratteristico della proporzionalità è una retta, per tracciarlo basta disegnare due suoi punti.

Per h costante

s	V
16	$256 \cdot 20 = 5120$
4	$16 \cdot 20 = 320$
2	$4 \cdot 20 = 80$
0	$0 \cdot 20 = 0$
1	$1 \cdot 20 = 20$
3	$9 \cdot 20 = 180$
⋮	⋮

Si osserva che, se s raddoppia, si dimezza, ecc. V diventa quadruplo, la quarta parte, ecc. Dunque si tratta di proporzionalità quadratica. Ciò si poteva capire anche dalla formula, perché $V = s^2 h$, per h costante, è del tipo $y = kx^2$

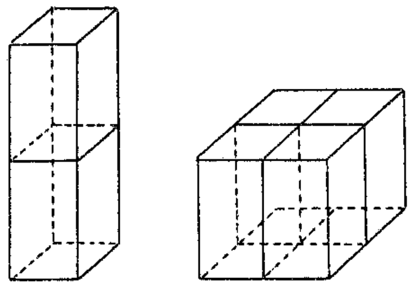
che è la relazione caratteristica della proporzionalità quadratica. Ecco il grafico:



E' una parte di parabola e non tutta per analoga osservazione al caso precedente riguardo agli impossibili valori negativi di l e V .

Un'unità di misura diversa sull'asse delle ordinate rispetto a quella sull'asse delle ascisse produrrebbe un restringimento o un allargamento della curva.

La proporzionalità diretta prima riscontrata e la proporzionalità quadratica rilevata ora si potevano subito intuire sapendo "vedere". Infatti



Altre grandezze direttamente proporzionali sono: spazio e velocità, spazio e tempo, perimetro e lato di un quadrato, pressione e forza premente, intensità di corrente e forza elettromotrice, ecc. Altre grandezze legate da proporzionalità quadratica sono: area e lato di un quadrato, area e raggio di una sfera, calore e intensità di corrente, ecc.

$2°$ *quesito*. Per questo quesito occorrono riga e goniometro. Raccomando sempre ai miei alunni di portare, oltre a questi strumenti, anche squadra e compasso.

$$\hat{A} = x \qquad \hat{B} = 2x \qquad \hat{C} = 6x$$

$$x + 2x + 6x = 180°$$

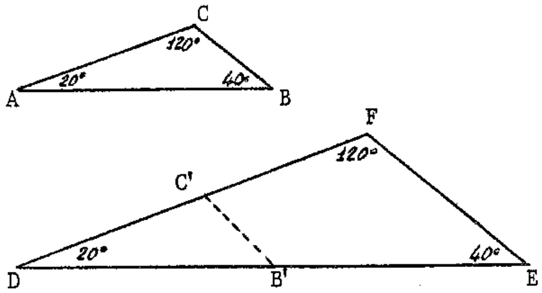
$$9x = 180°$$

$$x = 20°$$

$$\hat{A} = 20° \qquad \hat{B} = 40° \qquad \hat{C} = 120°$$

La conoscenza dei tre angoli non determina un triangolo, ma solo la sua forma. Pertanto, disegnato uno di essi, tutti i triangoli simili a questo hanno gli stessi angoli.

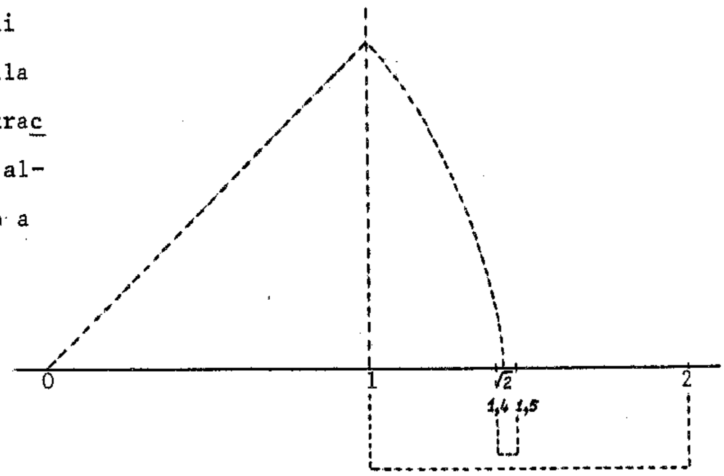
La trasformazione che porta il triangolo ABC sul triangolo DEF è una similitudine, che si può ottenere componendo la traslazione di vettore $\overline{AD}$ con l'omotetia di centro D e rapporto 2 .



3° quesito. Questo quesito si potrebbe ampliare chiedendo prima di scrivere osservazioni sui poliedri regolari e giocando poi su più lanci, magari in concomitanza con un altro poliedro regolare.

Un icosaedro regolare ha 20 facce. I numeri multipli di 5 minori o uguali a 20 sono 5 , 10 , 15 , 20 . I quadrati perfetti non maggiori di 20 sono 1 , 4 , 9 , 16 . Dunque i casi possibili sono 20 mentre i casi favorevoli sono 8. Allora la probabilità dell'evento richiesto è $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

4° quesito. Poiché un triangolo rettangolo isoscele di cateto 1 ha l'ipotenusa che misura $\sqrt{2}$ rispetto al cateto scelto come unità di misura, è necessario costruire un triangolo rettangolo isoscele con un cateto lungo 10 cm (perché tale è l'unità di misura assegnata) disposto sulla retta a partire da 0 e poi tracciare un arco con raggio pari all'ipotenusa del triangolo fino a tagliare la retta.



$\sqrt{2} \simeq 1,41$

$1 < \sqrt{2} < 2$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

....

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. Dove è andato a cadere lui non c'era nessun numero razionale[1].

[1] Per ovvie questioni di spazio la figura è ridotta rispetto a quella che effettivamente dovrebbero disegnare gli allievi.

PROPOSTA DI PAOLO ORIOLO (TARANTO)

1° quesito. Durante un lavoro di Educazione Tecnica, vi accorgete che per ogni x centimetri di assicella di legno effettivamente impiegati nella costruzione, ne occorre in realtà il 10% in più, che va perduto durante la lavorazione.

Scrivete una formula che dia la lunghezza y di assicella necessaria per una costruzione che ne impiega effettivamente x centimetri.

Quanto deve essere lunga l'assicella necessaria per costruire l'intelaiatura (cioè il complesso di tutti gli spigoli) di un parallelepipedo rettangolo avente le dimensioni di 12 cm, 15 cm, 16 cm? Di quanto deve aumentare tale lunghezza se si vogliono inserire nel modello così costruito tutte le diagonali del parallelepipedo?

2° quesito. Sulla superficie della Terra una località A ha latitudine 60° Nord e longitudine 75° Ovest, mentre una località B ha latitudine 60° Nord e longitudine 15° Ovest. Sapendo che il raggio della Terra ha una lunghezza media di 6370 Km, calcolate la lunghezza del raggio del parallelo di 60° Nord e la lunghezza dell'arco minore di parallelo avente per estremi A e B.

3° quesito. Un tetraedro regolare ha sulle facce i numeri 1, 2, 3, 4. Se viene lanciato due volte e si sommano i due numeri delle facce che posano a terra, qual è la somma che si ottiene con maggiore probabilità? E qual è il valore di tale probabilità? Che cosa potete dire sulla probabilità delle altre somme?

4° quesito. Costruite un circuito elettrico che interpreti la proposizione composta $p \wedge (q \vee r)$, rappresentando ciascuna delle proposizioni p, q, r con un interruttore.

Secondo voi, i tre interruttori hanno lo stesso potere nei riguardi della chiusura del circuito?

Se p , q , r rappresentano degli elettori che votano su una proposta, quale di essi esplica la funzione di VETO?

COMMENTO DEL PROPONENTE

Sarebbe forse opportuno, nel proporre i vari quesiti, invitare gli alunni a risolvere quelli che ritengono più adatti alla loro preparazione, senza per altro precisarne il numero.

I quesiti sono volutamente circostanziati, al fine di offrire all'alunno una guida semplice e chiara per l'iter del lavoro.

Il giudizio sul grado di difficoltà dei quesiti è chiaramente relativo. Esso non può prescindere dal modo con cui ciascun docente ha impostato e svolto l'attività didattica nel corso del triennio.

La risoluzione allegata non ha la pretesa di essere più o meno attendibile; in realtà gli alunni potranno fare meglio o peggio. Essa vuole piuttosto dare una seppure vaga idea sul modo del tutto personale con il quale imposterei il mio lavoro e sul grado di approfondimento dei concetti che appaiono nei vari quesiti.

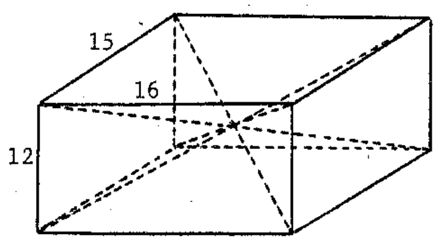
Un'ultima considerazione: non insisterei più di tanto sui collegamenti della matematica con le scienze sperimentali e con l'Educazione Tecnica. Ciò mi sembra piuttosto riduttivo e può generare il rischio di cercare collegamenti "a tutti i costi" e perciò artificiosi e poco significativi. A livello di Scuola Media (e non solo!), l'autentico aspetto interdisciplinare della matematica deve essere colto nell'enorme capacità della disciplina di interpretare, descrivere e risolvere problemi e questioni tratte dalla vita di ogni giorno e dalla realtà che ci circonda.

I quesiti sono tra loro indipendenti e propongono argomenti che si collegano con alcuni temi fondamentali del programma: costruzione ed uso di formule, coordinate geografiche, nozioni di geometria, elementi di calcolo delle probabilità, semplici nozioni di logica e loro applicazione ai circuiti elettrici.

La semplicità dei calcoli presenti nei quesiti esclude, da parte degli alunni, l'uso del calcolatore tascabile.

SCHEMA DI SOLUZIONE DEL PROPONENTE

1° quesito. Se per ogni x centimetri di assicella effettivamente impiegati nella costruzione, ne occorre il 10% in più che va perduto durante la lavorazione, significa che la lunghezza necessaria è $y = x + 10\%$ di x ; ossia



$$y = x + \frac{10}{100}x = x + \frac{1}{10}x$$

La formula richiesta è perciò:

$$y = \frac{11}{10}x$$

Un parallelepipedo rettangolo ha 12 spigoli a quattro a quattro uguali; perciò la somma degli spigoli è $(4 \times 15 + 4 \times 16 + 4 \times 12)$ cm $= 172$ cm . Applicando la formula precedente, si ha: $y = \frac{11}{10}x = \frac{11}{10} \cdot 172 = 189{,}2$. Per costruire l'intelaiatura occorrono perciò 189,2 cm di assicella.

Note le tre dimensioni a , b , c del parallelepipedo rettangolo, la lunghezza della diagonale è data da:

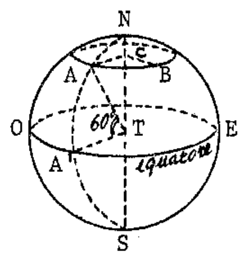
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 15^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25$$

Le diagonali sono quattro e impiegano effettivamente 4×25 cm $= 100$ cm di assicella. Ancora dalla formula precedente si ha:

$$y = \frac{11}{10}x = \frac{11}{10} \cdot 100 = 110$$

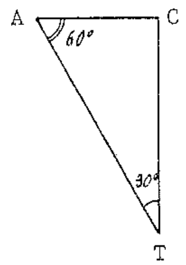
L'inserimento delle diagonali comporta un'aggiunta di 110 cm di assicella.

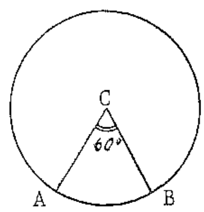
2° quesito. Se A e B hanno la stessa latitudine di 60° Nord, vuol dire che, detto T il centro della Terra e A' il punto in cui il meridiano passante per A incontra l'equatore, l'angolo $A\hat{T}A'$ è di 60°. Perciò l'angolo $A\hat{T}C$ (C è il centro del parallelo passante per A e B) è di 30° gradi. Allora il triangolo rettangolo ATC ha un angolo di 30° e l'altro di 60°; ne segue che il catego minore AC è metà dell'ipotenusa AT , che nel nostro caso è il raggio della Terra:



$$\overline{AC} = \frac{\overline{AT}}{2} = \frac{6370}{2} = 3185$$

(misura del raggio del parallelo 60° Nord in Km).





Poiché la differenza di longitudine tra A e B è $75° - 15° = 60°$, l'angolo $A\hat{C}B$ è di 60°, che è $\frac{1}{6}$ di 360°. Ne deriva che la lunghezza del minore dei due archi individuati da A e B è $\frac{1}{6}$ della lunghezza del parallelo: $\widehat{AB} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \overline{AC} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 3185$; approssimando i calcoli con due cifre decimali, tale lunghezza risulta essere 3333,63 Km.

3° quesito. Lanciando due volte il tetraedro, gli esiti possibili si ottengono accoppiando ciascuno dei numeri 1 , 2 , 3 , 4 con tutti i numeri dell'insieme $S = \{1,2,3,4\}$. Perciò l'insieme degli esiti possibili è dato dal prodotto cartesiano $S \times S$:

(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)

Osservando la tabella precedente, si vede subito che esistono:

1 coppia che porta alla somma 2 : (1;1)

1 coppia che porta alla somma 8 : (4;4)

2 coppie che portano alla somma 3 : (2;1) , (1;2)

2 coppie che portano alla somma 7 : (4;3) , (3;4)

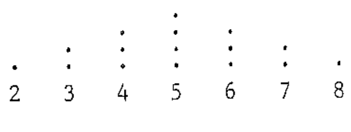
3 coppie che portano alla somma 4 : (3;1) , (2;2) , (1;3)

3 coppie che portano alla somma 6 : (4;2) , (3;3) , (2;4)

4 coppie che portano alla somma 5 : (4;1) , (3;2) , (2;3) , (1;4)

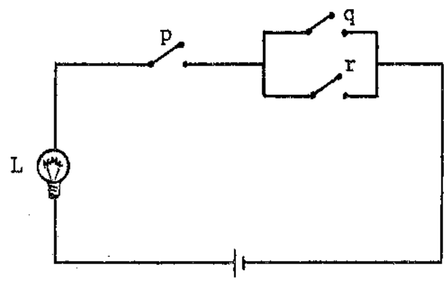
La somma più probabile è perciò 5 , che compare 4 volte sui 16 esiti possibili. La probabilità che i due lanci portino ad una somma uguale a 5 è perciò $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Se disponiamo le somme possibili in ordine crescente e indichiamo con dei puntini le corrispondenti probabilità, otteniamo lo schema seguente:



Dallo schema appare che 5 è il valore centrale ed è l'evento più probabile; allontanandoci simmetricamente (verso destra o verso sinistra) dal valore centrale, va diminuendo la probabilità degli eventi. Ad esempio, la probabilità che la somma sia 2 oppure 8 è appena $\frac{1}{16}$.

4° quesito. Per costruire il circuito che rappresenta la proposizione $p \wedge (q \vee r)$, basta ricordare che se tra due proposizioni c'è il connettivo $\wedge$ (congiunzione) occorre inserire nel circuito due interruttori in serie, se c'è il connettivo $\vee$ (alternativa) occorre inserire due interruttori in parallelo. Allora, nel nostro circuito bisogna inserire l'interruttore p in serie con il complesso degli interruttori q ed r, che a loro volta devono essere disposti in parallelo per realizzare la proposizione $(q \vee r)$. Si osserva che il circuito che rappresenta $p \wedge (q \vee r)$ è chiuso [lampada L accesa, proposizione $p \wedge (q \vee r)$ vera] nei seguenti casi:



1) p chiuso, q chiuso, r chiuso
2) p chiuso, q chiuso, r aperto
3) p chiuso, q aperto, r chiuso.

Il circuito mostra che se gli elettori q ed r dicono SI alla proposta (q ed r chiusi), la lampada rimane spenta se p dice NO (proposta respinta, p aperto). Appare anche che il SI dell'elettore p non è sufficiente per accettare la proposta: occorre il consenso di almeno uno degli altri due elettori.

L'interruttore-elettore p esercita cioè un diritto negativo, ossia il diritto di VETO: il suo NO è sufficiente per respingere la proposta, mentre il suo SI non basta per farla accettare.

PROPOSTA DI MARIELLA RATTI TORACCA (LA SPEZIA)

1° quesito. Le previsioni metereologiche per il prossimo week end danno una probabilità del 60% che sabato il tempo sia bello. Se sabato sarà bel tempo, la probabilità che anche domenica lo sia sale all'80%. Se invece sabato sarà brutto tempo, la probabilità che anche domenica sia brutto è del 50%.

Rispondi, aiutandoti con un grafo ad albero:

- Qual è la probabilità che faccia bel tempo sia sabato che domenica?
- Qual è la probabilità che faccia brutto tempo sia sabato che domenica?

2° quesito. Per il prossimo week end la famiglia di Gigi decide, in caso di bel tempo, di andare a far visita ad alcuni amici nella loro casa di campagna, che dista 88 Km dall'abitazione di Gigi.

Gigi è incaricato di stabilire (e tu per lui):

1) a che ora occorre partire per essere alle 10 di mattina a destinazione, supponendo una velocità media oraria dell'auto di 45 Km e una sosta di 15 minuti per la colazione (approssima per eccesso ai 5 minuti);
2) quanto si spende per il trasporto (andata e ritorno) sapendo che l'auto consuma 1 litro di benzina ogni 9 Km (fa' le approssimazioni che ritieni necessarie, precisandole);
3) se è più conveniente (dal punto di vista economico) andare in pullman, sapendo che il biglietto andata-ritorno a persona è di L. 2800 e che in più occorre spendere L. 3000 di taxi (se ritieni che manchino dei dati, mettili a tuo piacere, precisando quali dati mancano).

3° quesito. Nell'universo dei quadrilateri, gli enunciati aperti

● ha simmetria assiale

● ha simmetria centrale

individuano rispettivamente l'insieme A e l'insieme B .

a) Scrivi l'enunciato aperto che individua l'insieme $A \cap B$ e completa la seguente tabella scrivendo SI o NO al posto giusto:

	ha simmetria assiale	ha simmetria centrale	ha simmetria assiale e simmetria centrale
un deltoide	SI	NO	NO
un trapezio rettangolo	----	----	----
un trapezio isoscele	----	----	----
un parallelogramma generico	NO	SI	----
un rombo	----	----	----
un rettangolo	----	----	----
un quadrato	----	----	----

b) Scrivi l'enunciato aperto che individua l'insieme complementare di B , cioè $\complement(B)$. Scrivi l'enunciato aperto che individua l'insieme $A \cap \complement(B)$. Completa la seguente tabella, scrivendo SI o NO al posto giusto

	ha simmetria assiale	non ha simmetria centrale	ha simmetria assiale e non ha simmetria centrale
un deltoide	SI	SI	SI
un trapezio rettangolo	----	----	----
un trapezio isoscele	----	----	----
un parallelogramma generico	NO	NO	----
un rombo	----	----	----
un rettangolo	----	----	----
un quadrato	----	----	----

c) Scrivi una breve relazione che raccolga tutte le considerazioni che ti vengono suggerite dal lavoro svolto in a) e b).

COMMENTO DELLA PROPONENTE

Il quesito 1° presuppone un lavoro di classe articolato sui seguenti punti:

- uso corretto dei connettivi logici e loro interpretazione come operazioni su insiemi
- prodotto cartesiano e sue rappresentazioni grafiche
- concetto di probabilità e di probabilità contraria
- probabilità condizionata e regola del prodotto (a questo proposito s'intende si sia lavorato solo su semplici esempi stimolanti per i ragazzi, senza essersi dilungati o addentrati nei particolari della teoria).

Il quesito 2° rientra nelle attività di matematizzazione della realtà nei suoi vari aspetti, tese al possesso di conoscenze da considerare irrinunciabili, sia per chi proseguirà gli studi come per chi non li proseguirà.

Il quesito presuppone: attività (anche sperimentali) di stima e valutazione, di approssimazioni, di calcolo rapido, fatte su problemi tratti dalla vita di tutti i giorni.

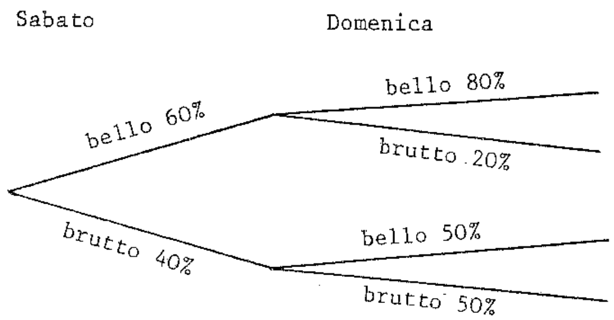
Presuppone inoltre attività di individuazione dei dati utili alla risoluzione di un problema e di riconoscimento dei dati mancanti.

Il quesito 3° presuppone un lavoro di classe articolato sui seguenti punti:

- connettivi logici e loro interpretazione come operazioni su insiemi
- studio dei quadrilateri
- lavoro sulle trasformazioni geometriche: in particolare, lavoro sulle simmetrie delle figure.

SCHEMA DI SOLUZIONE DELLA PROPONENTE

1° quesito. Schematizzo con un grafo ad albero:



Casi possibili	Probabilità
Bello - Bello	48%
Bello - Brutto	12%
Brutto-Bello	20%
Brutto - Brutto	20%

Se la probabilità che sabato il tempo sia bello è del 60%, la probabilità che sabato il tempo sia brutto è del 40%.

Se la probabilità che domenica il tempo sia bello è dell'80% (supposto sabato di bel tempo), la probabilità che domenica sia brutto tempo è del 20%.

Se la probabilità che domenica il tempo sia brutto è del 50% (supposto sabato di brutto tempo), la probabilità che domenica sia bel tempo è ugualmente del 50%.

Quindi la probabilità che sia sabato che domenica sia bel tempo è data da:

$$\frac{60}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{48}{100} \quad (48\%)$$

La probabilità che sia sabato che domenica sia brutto tempo è data da:

$$\frac{40}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{20}{100} \quad (20\%)$$

2° quesito. 1) Il tempo impiegato dall'auto per percorrere 88 Km ad una velocità media di 45 Km orari è di 1 ora e 57 minuti circa, che, approssimato per eccesso ai 5 minuti, diventa 2 ore. Quindi per essere alle 10 di mattina a destinazione, considerando anche i 15 minuti di sosta per la colazione, occorre partire almeno alle 8 meno un quarto, ancor meglio alle 7 e mezza.

2) Per percorrere 176 Km (cioè andata e ritorno) occorrono $(176 : 9) \doteq 19{,}5$ litri circa di benzina che approssimo per eccesso a 20 litri. Poiché attualmente la benzina costa L. 900 al litro, per il traporto si spenderanno 18.000 lire. In questo conto però non considero il consumo-macchina, cioè il consumo delle gomme, dell'olio, ecc.

3) Per stabilire se è più conveniente (dal punto di vista economico) andare in pullman o in macchina privata, occorre sapere da quante persone è composta la famiglia di Gigi e se tutte partono. Se supponiamo che la famiglia di Gigi sia composta da 4 persone e che tutt'e quattro partano, la spesa in pullman è:

$$(2800 \times 4 + 3000) = (11200 + 3000) = 14200 \text{ lire}$$

E' dunque più conveniente andare in pullman.

3° quesito. a) Nell'universo dei quadrilateri l'enunciato aperto che individua l'insieme $A \cap B$ è:

● ha simmetria assiale e simmetria centrale

	ha simmetria assiale	ha simmetria centrale	ha simmetria assiale e simmetria centrale
un deltoide	SI	NO	NO
un trapezio rettangolo	NO	NO	NO
un trapezio isoscele	SI	NO	NO
un parallelogramma generico	NO	SI	NO
un rombo	SI	SI	SI
un rettangolo	SI	SI	SI
un quadrato	SI	SI	SI

b) Nell'universo dei quadrilateri l'enunciato aperto che individua l'insieme complementare di B , cioè $\mathcal{C}(B)$ è:

● non ha simmetria centrale

L'enunciato aperto che individua l'insieme $A \cap \mathcal{C}(B)$ è:

● ha simmetria assiale e non ha simmetria centrale

	ha simmetria assiale	non ha simmetria centrale	ha simmetria assiale e non ha simm. centrale
un deltoide	SI	SI	SI
un trapezio rettangolo	NO	SI	NO
un trapezio isoscele	SI	SI	SI
un parallelogramma generico	NO	NO	NO
un rombo	SI	NO	NO
un rettangolo	SI	NO	NO
un quadrato	SI	NO	NO

c) Considerazioni sul lavoro svolto in a) e b).

La prima considerazione è una riflessione sul connettivo "e". Se congiungo infatti due enunciati aperti (che individuano rispettivamente l'insieme A e l'insieme B) col connettivo "e", ottengo un altro enunciato aperto che individua un terzo insieme che è l'intersezione di A e B .

A questo insieme intersezione appartengono solo gli elementi comuni ad A e B ; cioè, nel nostro caso, i rombi, i rettangoli e i quadrati che infatti godono di entrambe le proprietà: avere simmetria assiale e avere simmetria centrale.

Una seconda considerazione è sulla negazione "non".

Se applico la negazione "non" ad un enunciato aperto (cui è associato un insieme), determino il passaggio da quell'insieme al suo complementare, come si può vedere anche dalla tabella: infatti il NO viene cambiato in SI e viceversa.

L'ultima considerazione è di carattere geometrico: tutti i parallelogrammi hanno centro di simmetria (che corrisponde al punto d'incontro delle diagonali); nel rombo le due diagonali sono anche assi di simmetria, invece nel rettangolo sono assi di simmetria le due mediane (e non le diagonali). Nel quadrato, ovviamente, essendo contemporaneamente rombo e rettangolo, gli assi di simmetria sono 4 (le due diagonali e le due mediane).

PROPOSTA DI ROSA RINALDI CARINI E ELIO MARIANI (URBINO)

1° quesito. La Ditta Bianco, che produce detersivi, mette in commercio sapone da bucato in pezzi a forma di parallelepipedo retto con le dimensioni di cm 10, cm 6, cm 4. Ogni pezzo è rivestito da una fascetta che lascia scoperte solo due facce opposte.

a) Disegna in scala 1 : 2 le tre facce di un pezzo di sapone, singolarmente e/o applicando il metodo delle proiezioni ortogonali.

b) Stabilisci la forma e le dimensioni delle possibili fascette. Quale sceglieresti? Perché?

2° quesito. La Ditta Bianco prepara una certa quantità di pasta per sapone da bucato e per reclamizzare il prodotto mette nella pasta un certo numero di gettoni d'argento facendo in modo che in un pezzo di sapone non finisca più di un gettone.

Ogni pezzo di sapone è un parallelepipedo retto con le dimensioni di cm 10, cm 6, cm 4. Ogni gettone è un dischetto con il raggio di cm 1,5 e lo spessore di mm 5.

Tenendo presente che il peso specifico del sapone da bucato prodotto dalla Ditta Bianco è 1,3 e quello dell'argento usato per i gettoni è 10, trova col calcolo (si richiede l'approssimazione ai decimi) la differenza di peso fra un pezzo di sapone con gettone e un pezzo normale.

3° quesito. Supponi che la Ditta Bianco metta in commercio 10.000 pezzi di sapone da bucato e che 10 di questi pezzi contengano gettone di argento.

a) Determina, nei modi a te noti, la probabilità che il pezzo di sapone che tu acquisti contenga gettone.

b) Se tu comperi un pezzo di sapone dopo che sono stati venduti 1000 pezzi fra i quali se ne sono trovati 2 con gettone di argento, la probabilità che il pezzo che acquisti contenga gettone è maggiore o minore della precedente? Perché?

c) Se la Ditta Bianco, smerciati i primi 10.000 pezzi, ritiene conveniente raddoppiare, per la prossima partita, la probabilità di fare trovare un pezzo di sapone con gettone di argento, come deve fare?

4° quesito. Il sapone da bucato prodotto dalla Ditta Bianco viene confezionato in scatole da 100 pezzi e offerto agli esercenti a una delle seguenti condizioni a scelta:

- trattenere L. 1000 sul prezzo di vendita di ogni scatola;
- trattenere L. 500 sul prezzo di vendita di ogni scatola e ricevere L. 4000 giornaliere dalla Ditta;
- non trattenere nulla sul prezzo di vendita delle scatole e ricevere L. 6000 giornaliere dalla Ditta.

E' evidente che ogni esercente sceglierà la condizione a lui più favorevole. Ma come fare per stabilirlo? Procedi così:

a) indica con x il numero variabile delle scatole di sapone vendute, con y il relativo compenso giornaliero e compila una tabella per ognuna delle tre condizioni di vendita;

b) determina per ogni tabella la relazione che lega la y alla x ; descrivi le caratteristiche delle relazioni trovate e rappresentale in un unico riferimento cartesiano (usa carta millimetrata) prendendo sugli assi la stessa unità grafica (ad es. un cm) per rappresentare sia una scatola di sapone, che L. 1000 di compenso;

c) interpreta il grafico complessivo ottenuto in relazione al quesito sopra posto.

COMMENTO DEI PROPONENTI

Il tema presentato ha per oggetto situazioni di tipo pratico e rappresenta la rielaborazione, alla luce dei criteri orientativi (ancora ufficiosi) per gli esami di licenza media, di quesiti effettivamente svolti in una terza classe di scuola media di un paese di campagna avente all'intorno piccole industrie.

Il tema è suddiviso in quattro parti legate fra loro in modo formale; ogni parte infatti propone un quesito a se stante.

Le parti hanno le seguenti caratteristiche:

1. di tipo geometrico, prospetta collegamenti con l'educazione tecnica e con il linguaggio in situazioni problematiche di tipo logico; richiede:

   a) la conoscenza della struttura del parallelepipedo retto e la capacità di rappresentarne le facce in scala sul piano utilizzando, eventualmente, il metodo delle proiezioni ortogonali;

   b) la capacità di riconoscere tutti i casi possibili per una certa situazione e di indicare, motivandone la scelta, quello ritenuto più funzionale.

2. di tipo numerico-calcolativo, prospetta collegamenti con le scienze; richiede:

   a) la conoscenza di regole e di nozioni (le regole per il calcolo del volume di certi solidi, la nozione di peso specifico) e la capacità di applicarle;

   b) la capacità di organizzare la soluzione di un quesito, relativo alle regole e nozioni sopra indicate, sviluppandone il procedimento con i calcoli (per cui è richiesta particolare approssimazione).

3. di tipo probabilistico; richiede l'uso del linguaggio e:

   a) la capacità di esprimere la probabilità matematica (mediante rapporto, percentuale, numero decimale) di alcune situazioni di probabilità semplice;

   b) la capacità di individuare entrambe le soluzioni possibili di una nuova situazione problematica.

4. di tipo algebrico, prospetta l'uso del linguaggio e sollecita l'analisi di una situazione di programmazione lineare; richiede:

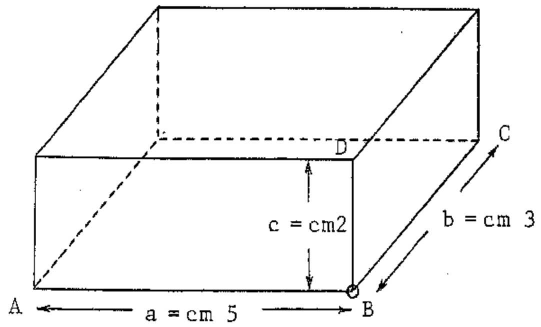
   a) capacità di individuare i legami matematici fra due variabili in tre differenti situazioni, di rappresentarle nello stesso riferimento cartesiano dopo averne descritto le caratteristiche;

   b) capacità di interpretazione del grafico per dedurne i valori per i quali la variabile indipendente dà luogo a situazioni ottimali per la variabile dipendente.

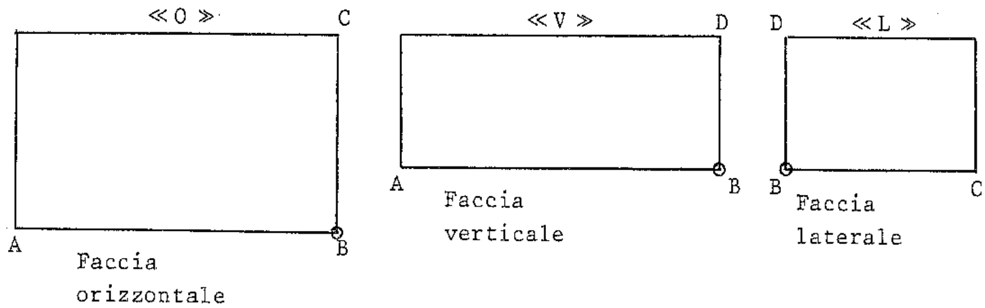
SCHEMA DI SOLUZIONE DEI PROPONENTI

1° quesito. a) Disegno in scala 1 : 2 un pezzo di sapone prodotto dalla Ditta Bianco

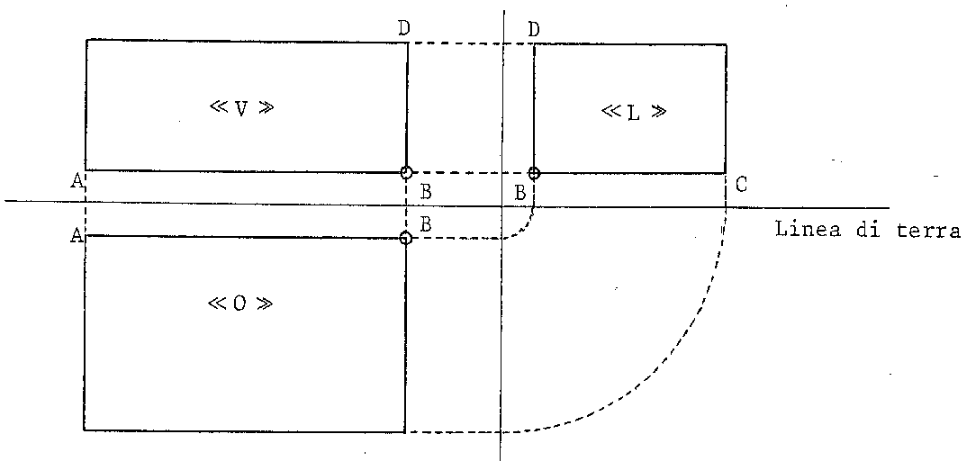
$$AB = \text{cm } 10 \xrightarrow{1:2} \text{cm } 5 \quad (a)$$
$$BC = \text{cm } 6 \rightarrow \text{cm } 3 \quad (b)$$
$$BD = \text{cm } 4 \rightarrow \text{cm } 2 \quad (c)$$



Disegno singolarmente le tre facce del parallelepipedo in scala 1 : 2



e ora col metodo delle proiezioni ortogonali



b) Le fascette, prima di avvolgere il sapone, hanno forma rettangolare. E' possibile avvolgere il sapone con fascette di tre tipi diversi.

Fascetta tipo a - E' un rettangolo formato dalle facce «O» e «V» prese alternativamente, una di seguito all'altra, due volte

base = cm 5 , altezza = cm(3+2) ; $A_a = [5 \cdot (3+2)] \cdot 2 = 50$ (in cm^2) $\overset{4:1}{\rightarrow}$ 200 (cm^2)

Fascetta tipo b - E' un rettangolo formato dalle facce «O» e «L» prese come indicato per la fascetta tipo a

base $= cm\ 3$, altezza $= cm(5+2)$; $A_b = [3\cdot(5+2)]\cdot 2 = 42$ (in cm^2) $\overset{4:1}{\rightarrow}$ 168 (cm^2)

Fascetta tipo c - E' un rettangolo formato dalle facce «V» e «L» prese come indicato per le altre fascette

base $= cm\ 2$, altezza $= cm(5+3)$; $A_c = [2\cdot(5+3)]\cdot 2 = 32$ (in cm^2) $\overset{4:1}{\rightarrow}$ 128 (cm^2)

In pratica, ogni fascetta dovrà essere presa con una lunghezza un po' superiore a quelle ora considerate per avere la possibilità, avvolto il sapone, di sovrapporre e incollare uno sull'altro i due lati estremi.

La fascetta di tipo c è la più economica perché formata da minore quantità di carta, come è verificato anche dal calcolo delle aree, ma è la meno adatta perché non avvolge bene il sapone e presenta scarso spazio per le scritte.

La fascetta di tipo a è la meno economica ma è la più adatta perché assicura un avvolgimento buono e pratico e offre anche maggiore spazio per le scritte.

2° quesito. Molti ragazzi seguiranno uno schema di soluzione di questo tipo:

$$\text{Volume pezzo di sapone} = a\cdot b\cdot c = 10\cdot 6\cdot 4 = 240 \text{ (in } cm^3)$$

$$\text{Volume dischetto di } A_g = \pi\cdot r^2\cdot \text{spess.} = \pi\cdot(1,5)^2\cdot 0,5 = 3,14\cdot 2,25\cdot 0,5 = \\ = 3,53250 \sim 3,5 \text{ (in } cm^3)$$

PS sapone : 1,3

A = Peso pezzo sapone =

$= 240\cdot 1,3 = 312$ (in grammi)

PS Ag : 10

B = Peso dischetto Ag =

$= 3,5\cdot 10 = 35$ (in grammi)

C = Peso dischetto di sapone con lo stesso volume del dischetto di Ag $= 3,5\cdot 1,3 =$

$= 4,55 = 4,6$ (in grammi)

D = Peso pezzo di sapone con gettone $= (A+B)-C = (312+35) - 4,6 = 342,4$ [~ 342] (in grammi).

Differenza peso tra pezzo sapone con gettone e pezzo normale:

$$D - A = 342,4 - 312 = 30,4 \quad \text{(in grammi)}$$

Osservazione. In realtà, si può notare che alcuni dati sono superflui e che il risultato si poteva trovare immediatamente, moltiplicando il volume del dischetto per la differenza dei pesi specifici dell'argento e del sapone.

3° quesito. a) n° pezzi di sapone messi in commercio dalla Ditta Bianco $=10000$, n° pezzi con gettone d'argento $=10$

$$P_1=\frac{10}{10000}=\frac{1}{1000}=0,1\%=0,001$$

b) n° pezzi rimasti dopo la vendita di 1000 pezzi $=9000$, n° pezzi di sapone con gettone di Ag $=8$

$$P_2=\frac{8}{9000}=\frac{1}{1125}$$

$P_1>P_2$ perché $\frac{1}{1000}>\frac{1}{1125}$ (infatti la prima frazione ha numeratore uguale a quello della seconda ma denominatore minore)

$$P_1-P_2=\frac{1}{1000}-\frac{1}{1125}=\frac{9-8}{9000}=\frac{1}{9000}$$

P_1 supera P_2 di $\frac{1}{9000}$ (risultato che si poteva trovare anche senza fare calcoli).

c) Se la Ditta Bianco vuole raddoppiare la probabilità di fare trovare un pezzo di sapone con gettone di Ag, può procedere così:

1. Lasciare invariata la quantità di pasta preparata per fabbricare 10.000 pezzi di sapone e raddoppiare il numero dei gettoni.
2. Lasciare invariato il numero dei gettoni e dimezzare la quantità di pasta a cui sono destinati, ma fare due volte di seguito la stessa operazione.

E' più pratico il primo procedimento.

4° quesito. a) $x=$ n° scatole di sapone vendute giornalmente, $y=$ compenso giornaliero per l'esercente secondo la condizione accettata

x	y
0	0
1	1000
2	2000
3	3000
⋮	⋮
n	n·1000

$y=1000\,x$

x	y
0	4000
1	$500\cdot1+4000=4500$
2	$500\cdot2+4000=5000$
3	$500\cdot3+4000=5500$
4	6000
5	6500
⋮	⋮
n	$500\cdot n+4000$

$y=500\,x+4000$

x	y
0	6000
1	6000
2	6000
⋮	⋮
n	6000

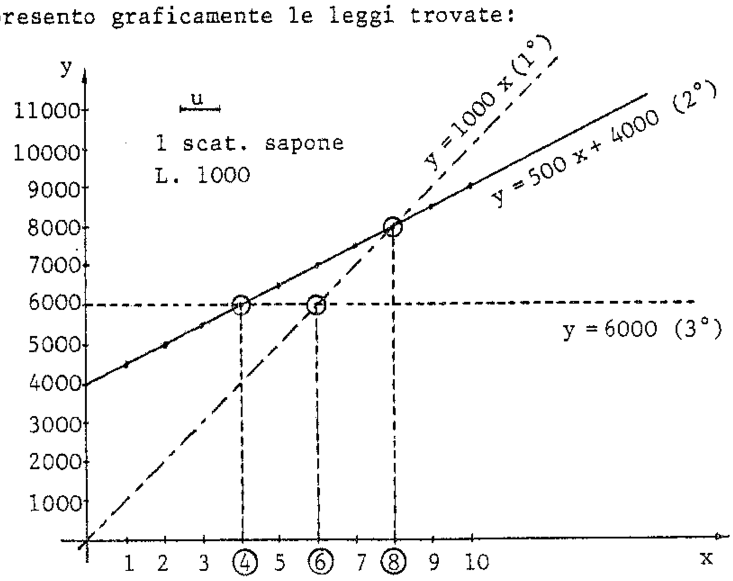
$y=6000$

b) $y=1000\,x$. E' una legge di proporzionalità diretta; indica che il compenso cresce proporzionalmente al numero delle scatole di sapone vendute. Rappresenta l'equazione di una retta che passa per l'origine degli assi.

$y = 500x + 4000$. Non è una legge di proporzionalità diretta; indica che il compenso cresce con il numero delle scatole vendute ma non proporzionalmente; in particolare, si ottiene un compenso anche se non si vende alcuna scatola. Rappresenta l'equazione di una retta che non passa per l'origine degli assi ma per il punto di coordinate (0,4000).

$y = 6000$. Indica che il compenso è costante qualunque sia il numero delle scatole vendute e anche se non se ne vende alcuna. Rappresenta l'equazione di una retta parallela all'asse x e che taglia l'asse y nel punto di ordinata 6000.

c) Rappresento graficamente le leggi trovate:



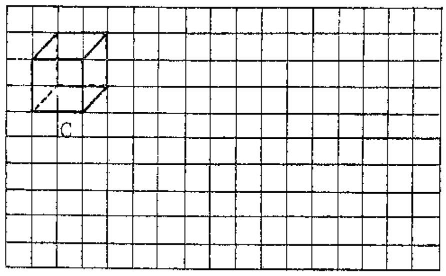
Dal grafico si deduce:

1. La 1ª condizione è favorevole all'esercente che sia sicuro di vendere almeno 8 scatole di sapone al giorno, cioè nel caso $x \geq 8$.
2. La 2ª condizione è favorevole all'esercente che sia sicuro di vendere non meno di 4 scatole di sapone al giorno e non più di 8, cioè nel caso $4 \leq x \leq 8$.
3. La 3ª condizione è favorevole all'esercente che sia sicuro di vendere non più di 4 scatole di sapone al giorno, cioè nel caso $0 \leq x \leq 4$.

PROPOSTA DI LUIGIA ROSAIA-CORDATI (LA SPEZIA)

1° quesito. a) Con otto cubi di legno tutti uguali tra loro, quanti parallelepipedi rettangoli puoi formare, disponendo gli otto cubi in modo diverso?

Usando questa carta quadrettata ed assumendo C come modello di uno dei cubi a tua disposizione, disegna questi diversi parallelepipedi.



b) I parallelepipedi che hai individuato in a) sono equivalenti tra loro? Le loro superfici hanno uguale misura? Rispondi giustificando.

Se hai risposto no alla seconda delle precedenti domande, stabilisci quale parallelepipedo ha la superficie minore e quale parallelepipedo ha la superficie maggiore.

c) Un parallelepipedo P ha dimensioni a,b,c . Un parallelepipedo P' ha due dimensioni uguali a $\frac{1}{2}a$ e $\frac{1}{2}b$.
- Quale dovrà essere la terza dimensione di P' se si vuole che P e P' siano equivalenti?
- Quale dovrà essere la terza dimensione di P' , se si vuole che il volume di P' sia la metà di quello di P ?
- Quale dovrà essere la terza dimensione di P' se si vuole che P' sia il quadruplo di P ?

2° quesito. a) Quanti diversi casi possono presentarsi se lanciamo contemporaneamente in aria una moneta e un dado? Rispondi giustificando e schematizza la situazione in due modi diversi:
- con una tabella a doppia entrata
- con un grafo ad albero.

b) Qual è la probabilità che, lanciando in aria una moneta e un dado esca "testa e il numero 6"? Rispondi giustificando la tua risposta.

c) Qual è la probabilità che esca "croce e un numero pari"? Rispondi giustificando.

3 *quesito*. In questa tabella sono segnate le temperature rilevate in una cittadina durante una giornata di settembre nelle varie ore della giornata.

Ore	Temperatura
2	15°
4	15°
6	16°
8	18°
10	21°
12	22°
14	24°
16	25°
18	25°
20	22°
22	18°
24	16°

a) Ti pare si possa dire che la temperatura di un luogo è funzione dell'ora? Rispondi giustificando la risposta.

b) Costruisce il grafico per punti utilizzando i dati della tabella. Congiungi i punti segnati con tratti rettilinei.
Il grafico ti permette di stabilire qual era presumibilmente la temperatura alle 9 di mattina: trova il valore di questa temperatura e spiega perché si tratta di un valore non certo.

c) Qual è la temperatura massima rilevata? I dati che possiedi ti permettono di affermare che in questa giornata il termometro non è mai salito oltre questo valore? Sicuramente c'è stato qualche momento incui il termometro segnava 23 gradi. Puoi stabilire approssimativamente quando è stato? Rispondi a queste domande giustificando ogni volta le tue risposte.

COMMENTO DELLA PROPONENTE

Il quesito n. 1 presuppone un'attività manipolatoria svolta in classe con materiale operativo (ad es. cubi, parallelepipedi, ecc. delle costruzioni per bambini). I ragazzi vengono invitati a costruire diversi solidi composti utilizzando lo stesso numero di pezzi precisati all'inizio del lavoro e sono invitati a studiare che cosa resta costante (il volume) e che cosa invece varia (la superficie).

Si presuppone anche un lavoro di utile collegamento con la geometria piana (un insieme di rettangoli equivalenti: hanno lo stesso perimetro?) che, per analogia, può permettere una più rapida soluzione da parte dei ragazzi.

Il quesito si arricchisce con la ricerca dei "massimi" e dei "minimi", che nel lavoro di classe, sarà stato fatto in riferimento a solidi diversi (confronto tra cubi e sfere equivalenti, ecc.).

L'ultimo punto del quesito potrà essere risolto a diversi livelli: a un livello più intuitivo (se una dimensione è la metà e anche l'altra è la metà allora perché i parallelepipedi siano equivalenti la terza dimensione dovrà essere il doppio del doppio, cioè il quadruplo e così via), oppure, a un livello più formale, con equazioni di primo grado ad una incognita.

Il quesito n. 2 si presenta come un'applicazione del concetto di probabilità classica in una situazione abbastanza semplice di lancio di un dado e di una moneta. Presuppone un'intensa attività sperimentale in classe, da iniziarsi fin dal I° anno di scuola media, in cui lanci di monete e di dadi effettivamente eseguiti permettano di far acquisire ai ragazzi la capacità di distinguere situazioni "più probabili" da altre "meno probabili" o situazioni "equiprobabili".

Il quesito è un problema di probabilità composta di eventi indipendenti; ma non si ritiene utile, a livello di scuola media, precisare formalmente che cosa si intenda per "eventi indipendenti". Presupponendo sempre un'attività sperimentale in classe, sarà a quel modello concreto che l'insegnante farà riferimento. Il quesito presuppone che i ragazzi abbiano chiara conoscenza del prodotto cartesiano; la richiesta di schematizzare la situazione anche con un grafo ad albero tende a far mettere bene in evidenza i cammini attraverso cui si costruiscono tutte le possibili coppie del prodotto cartesiano e a rafforzare il concetto di coppia come espressione di uno degli eventi elementari equiprobabili.

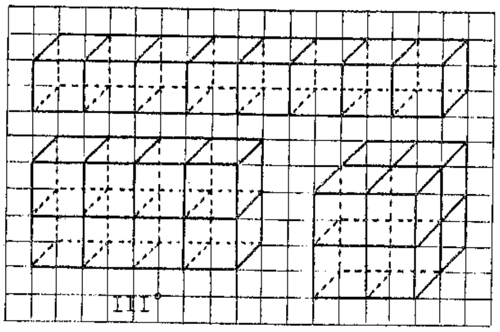
Si presuppone comunque un lavoro di classe teso in generale a proporre rappresentazioni diverse di uno stesso fatto, fenomeno, ecc. anche per abituare l'alunno a scegliere tra le diverse rappresentazioni, quella che più gli sembra efficace e più consona al suo modo di esprimersi.

Il quesito n. 3 fa riferimento al concetto di funzione e allo studio di funzioni empiriche e di funzioni matematiche.

Presuppone un'attività didattica di raccolta e lettura di dati, costruzione di grafici e interpretazione degli stessi, con semplici riferimenti all'interpolazione (collegamento con la statistica).

SCHEMA DI SOLUZIONE DELLA PROPONENTE

1° quesito. a) Con 8 cubi di legno tutti uguali tra loro, posso formare, disponendoli in modo diverso, 3 parallelepipedi rettangoli. Assumendo come unità di misura u lo spigolo del cubo, i tre parallelepipedi rettangoli sono individuati dalle seguenti terne:



I° (1 u ; 1 u ; 8 u)

II° (2 u ; 2 u ; 2 u) è il cubo

III° (1 u ; 2 u ; 4 u)

b) Tutti i parallelepipedi individuati in a) sono equivalenti tra loro. Infatti assumendo come unità di volume il cubo C , hanno tutti uguale volume 8 C .

Invece i parallelepipedi individuati in a) non hanno superfici di uguale misura: laddove i cubi sono più "raggruppati" la superficie del parallelepipedo risultante è minore; laddove invece i cubi sono meno "raggruppati" (ad es. quando sono tutti in fila e ognuno non ha più di due facce in comune con gli altri), la superficie del parallelepipedo risultante è maggiore. Infatti ha superficie minore ($24\ u^2$) il cubo (spigolo 2 u); ha superficie maggiore ($34\ u^2$) il parallelepipedo individuato dalla terna (1 u ; 1 u ; 8 u) .

c) $P : (a,b,c)$ $\quad P' : (\frac{1}{2} a , \frac{1}{2} b , ?)$

- Calcolo quale dovrà essere la terza dimensione di P' affinché P e P' siano equivalenti. Indico con x la terza dimensione; ottengo l'equazione

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b \cdot x = a \cdot b \cdot c$$

semplifico (II° principio di equivalenza) e ottengo: $\frac{1}{4} x = c$, $x = 4c$. La terza dimensione dovrà essere quadrupla di c .

- Calcolo quale dovrà essere la terza dimensione di P' se si vuole che il volume di P' sia la metà di quello di P . Indico con y la terza dimensione; ottengo l'equazione:

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b \cdot y = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}$$

semplifico (II° principio di equivalenza) e ottengo: $\frac{1}{2} y = c$, $y = 2c$. La terza dimensione dovrà essere doppia di c .

- Calcolo quale dovrà essere la terza dimensione di P' se si vuole che il volume di P' sia quadruplo di quello di P. Indico con z la terza dimensione; ottengo l'equazione:

$$\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b \cdot z = 4abc$$

semplifico (II° principio di equivalenza) e ottengo: $\frac{1}{4}z = 4c$, $z = 16c$. La terza dimensione dovrà essere 16 volte c .

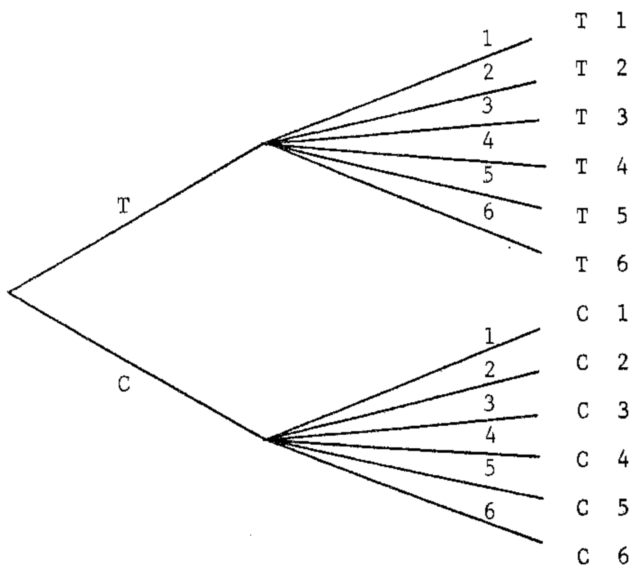
2° quesito. a) Lanciando in aria una moneta e un dado possono presentarsi 12 casi diversi, tutti ugualmente probabili.

Infatti per la moneta si hanno 2 possibilità (T , C) e ognuna di queste 2 possibilità si può combinare con le 6 possibilità del dado (1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6) .

Ecco schematizzata la situazione con una tabella a doppia entrata:

Dado / Moneta	1	2	3	4	5	6
T	(T,1)	(T,2)	(T,3)	(T,4)	(T,5)	(T,6)
C	(C,1)	(C,2)	(C,3)	(C,4)	(C,5)	(C,6)

e con un grafo ad albero:



L'insieme dei casi possibili, tutti ugualmente probabili, è:

$\{(T,1);(T,2);(T,3);(T,4);(T,5);(T,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\}$

costituito da 12 elementi.

b) La probabilità che lanciando in aria una moneta e un dado esca "testa e il numero 6" è $\frac{1}{12}$.

Infatti l'insieme dei casi favorevoli è: $\{(T,6)\}$, costituito da un solo elemento. Quindi:

$$\text{Pr.} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}} = \frac{1}{12}$$

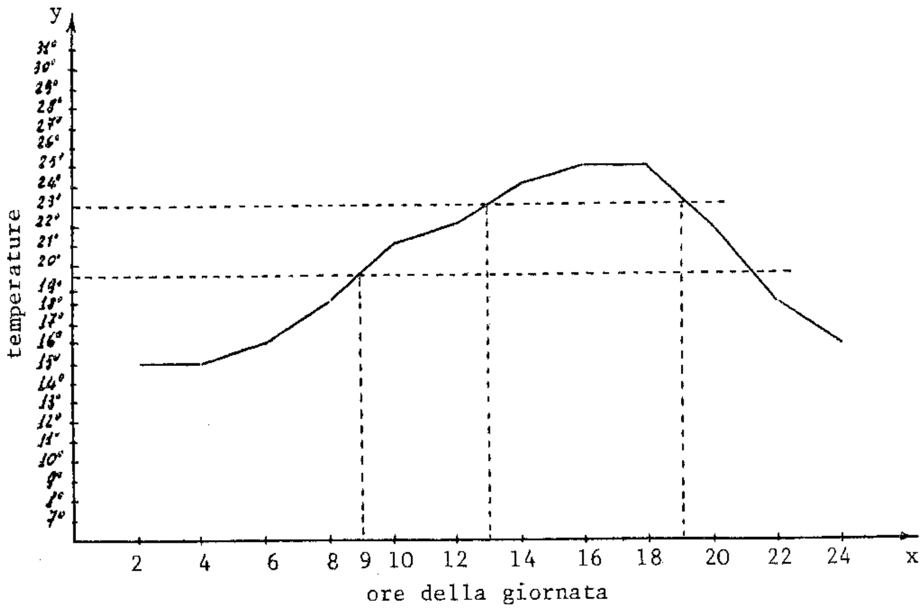
c) La probabilità che lanciando in aria una moneta e un dado esca "croce e un numero pari" è $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Infatti l'insieme dei casi favorevoli è: $\{(C,2);(C,4);(C,6)\}$, costituito da 3 elementi. Quindi:

$$\text{Pr.} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

3° quesito. a) Possiamo affermare che la temperatura di un luogo è funzione dell'ora: infatti ad ogni ora corrisponde una ed una sola temperatura.

b) Costruisco il grafico segnando sul semiasse delle x le ore della giornata (variabile indipendente) e sul semiasse delle y le temperature (variabile dipendente).



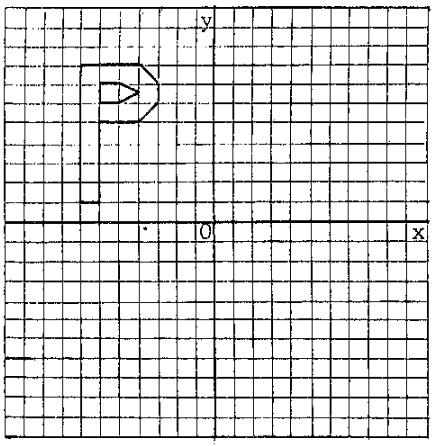
Dal grafico posso stabilire che alle 9 di mattina la temperatura era presumibilmente di 19 gradi e mezzo: infatti se innalzo dal punto dell'asse delle ascisse che corrisponde alle 9 la parallela all'asse delle ordinate fino ad incontrare la spezzata e dal punto d'incontro mando la parallela all'asse delle ascisse fino ad incontrare l'asse delle ordinate, il valore della temperatura in quel punto corrisponde a 19 gradi e mezzo. Questo valore però non è certo in quanto alle 9 di mattina non è stata rilevata nessuna temperatura; si presume però che l'aumento della temperatura fra le 8 e le 10 abbia avuto un andamento costante: ciò ci autorizza a prendere come valore approssimato 19 gradi e mezzo.

c) La massima temperatura rilevata è 25° (alle 16 e alle 18). I dati che possiedo non mi permettono però di affermare che il termometro non sia mai salito oltre questo valore; infatti è possibile che tra le 16 e le 18 il termometro abbia segnato più di 25°.

Il grafico mi permette di stabilire approssimativamente in quale o in quali momenti il termometro segnava 23°. Infatti con un procedimento analogo a quello già descritto nel punto b) si può stabilire che presumibilmente il termometro segnava 23° alle 13 e alle 19.20. Perché questi valori siano da considerarsi approssimati è già stato precisato al punto b).

PROPOSTA DI FRANCESCO SPERANZA (PARMA)(*)

1° quesito. Disegna la figura simmetrica P_1 della lettera P rispetto alla retta y .



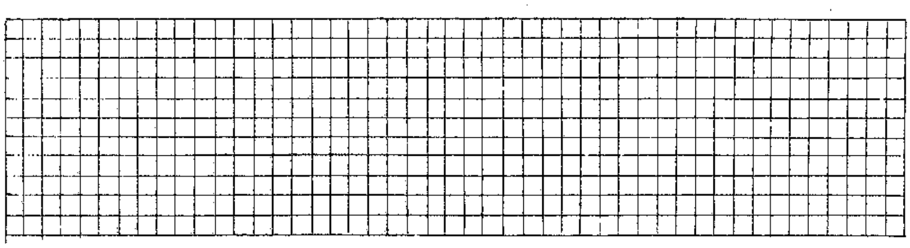
Disegna la figura simmetrica P_2 della figura P_1 rispetto alla retta x .

Disegna la figura simmetrica P_3 della lettera P rispetto alla retta x .

Spiega come si passa direttamente dalla figura P alla figura P_2 e dalla figura P_2 alla figura P_3. Che cosa osservi?

Il lato di ogni quadretto è 5 mm. Determina in cm^2 e in mm^2 l'area della figura P . Come è l'area delle altre figure disegnate rispetto a quella di P ? Perché?

2° quesito. Disegna con il righello dieci segmenti lunghi 3,2 cm secondo direzioni diverse, evitando però di disporli lungo il reticolato.



(*) Alla stesura e alla verifica dei quesiti ha collaborato Paola Fava.

Quanti segmenti tagliano 1 solo quadretto?

Quanti segmenti tagliano 2 soli quadretti?

... (continua) ...

Riporta questi valori in una tabella e costruisci il corrispondente istogramma. Qual è il più piccolo numero di quadretti che può attraversare un qualunque segmento di 3,2 cm? Perché ?

3° quesito. Considera la funzione $\frac{1}{2}x^2 - 1$. Costruisci una tabella in cui siano riportate alcune coppie di valori (x,y) che soddisfino alla equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Su un foglio di carta quadrettata fissa un riferimento cartesiano ortogonale e scegli come unità di misura per entrambi gli assi un segmento lungo 5 volte il lato di un quadretto del foglio. In tale riferimento determina i punti corrispondenti alle coppie di valori trovati e congiungendo tali punti individua l'andamento del grafico della funzione.

4° quesito. Osserva questa sequenza di operazioni:

Prendi x
moltiplica per 50
aggiungi 200
dividi per 4
trovi 125 .

Traduci la sequenza sotto forma di un'equazione in x e risolvila.

Inventa un problema che si risolva con queste operazioni.

COMMENTO DEL PROPONENTE

Questi problemi chiedono una quantità ridotta di nozioni, piuttosto cercano di sollecitare certe abilità generali. Ciascuno contiene una parte abbastanza semplice, in modo che un alunno che abbia delle difficoltà possa affrontarlo, ma contiene anche sviluppi nei quali un alunno che se la sente possa dare una buona "prova" di sé. Alcuni di questi sviluppi sono tipici "esercizi inversi".

Per esempio, nel problema 1 si deve riconoscere che P e P_2 sono simmetrici rispetto all' "origine", ed eventualmente che la simmetria rispetto all'origine è il prodotto delle simmetrie rispetto agli assi. Si deve poi valutare un'area contando opportunamente dei quadretti, e riconoscere che una simmetria non cambia le aree.

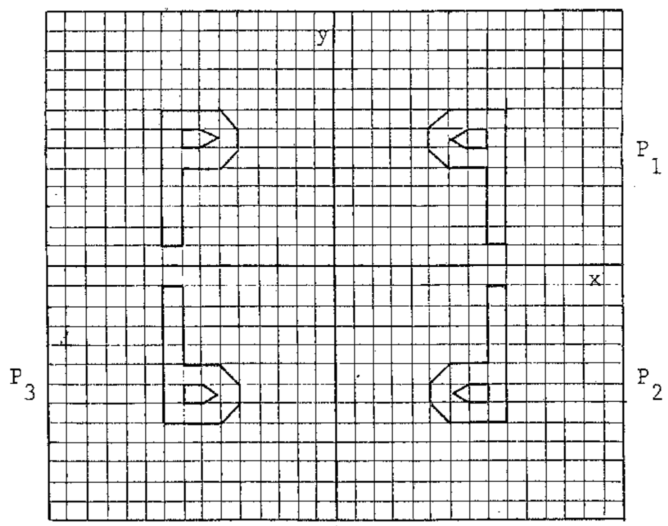
Nel secondo problema, ogni alunno deve costruirsi da solo la sua situazione. Un segmento incontra il minimo numero di quadretti quando è disposto in diagonale; la diagonale di ogni quadretto è $\sqrt{2} \cdot 5$ mm $= 7$ mm circa, perciò ci sono segmenti di 3,2 cm che attraversano solo 5 quadretti.

Nel problema 3 si assume come unità di misura "5 quadretti" perché si possa disegnare con una certa accuratezza il grafico vicino all'origine, cioè per valori "piccoli" di x.

Il quarto esercizio utilizza l'idea di diagrammi di flusso, ma può essere fatto anche se l'argomento non è mai stato esplicitamente trattato a scuola. Termina con la richiesta di inventare un problema: i ragazzi cui abbiamo proposto l'esercizio hanno dato delle soluzioni abbastanza "originali".

SCHEMA DI SOLUZIONE

1° quesito.



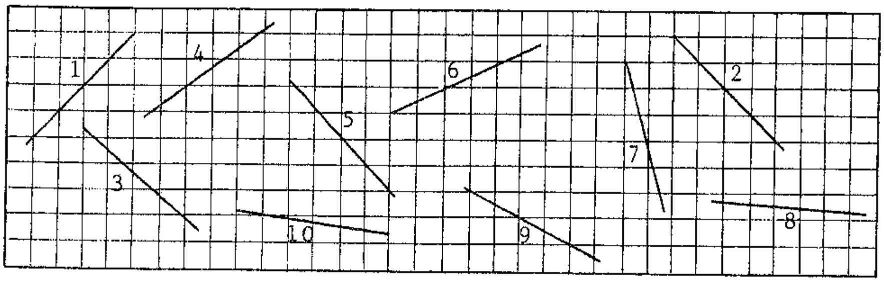
Dopo aver disegnato le figure P_1, P_2, P_3, noto che la figura P_2 si può ottenere direttamente dalla P mediante una simmetria centrale di centro O. Allo stesso modo la figura P si ottiene dalla P_2 con una simmetria centrale sempre di centro O .

La figura P è formata da 13 quadrati più mezzo quadrato, l'area di un quadrato è di 25 mm^2, allora l'area di P è

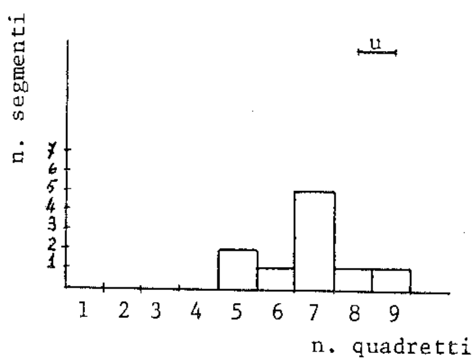
$$13{,}5 \cdot 25 = 337{,}5\ mm^2$$
$$337{,}5\ mm^2 = 3{,}375\ cm^2$$

Poiché P_1 , P_2 , P_3 si ottengono da P mediante isometrie, sono tutte figure congruenti e quindi hanno la stessa area.

2° quesito. Nessun segmento taglia un solo quadretto, nessun segmento taglia due soli quadretti; il minimo numero di quadretti che un segmento può attraversare è 5. Infatti i segmenti n. 1 e n. 2 attraversano solo 5 quadretti perché sono messi in diagonale, a 45° .

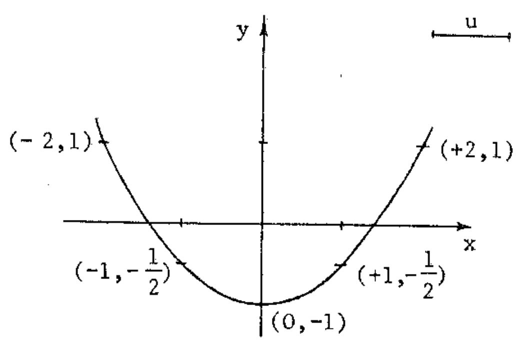


n. segmenti	n. quadretti
0	1
0	2
0	3
0	4
(il n. 1-2) 2	5
(il n. 10) 1	6
(il n.5-6-7-8-9) 5	7
(il n. 3) 1	8
(il n. 4) 1	9



3° quesito. $y = \frac{1}{2} x^2 - 1$

x	y
0	-1
1	$-\frac{1}{2}$
-1	$-\frac{1}{2}$
2	$+1$
-2	$+1$



Noto che il grafico ottenuto è simmetrico rispetto all'asse y (perché c'è x^2) e si tratta di una parabola.

4° quesito. Problema. Una scuderia acquista una certa quantità di cavalli che arrivano in momenti diversi a 50 alla volta. Questi nuovi cavalli vengono uniti ai 200 che già erano nella scuderia. Lo stalliere divide poi i cavalli in parti uguali per 4 squadre. Ogni squadra ha così a disposizione 125 cavalli. In quanti momenti diversi sono stati spediti i cavalli?

Equazione in x

$$(x \cdot 50 + 200) : 4 = 125$$

$$(x \cdot 50 + 200) = 125 \cdot 4$$

$$x \cdot 50 = 500 - 200$$

$$x \cdot 50 = 300$$

$$x = \frac{300}{50} = 6$$

Indirizzo degli Autori

Nucleo di ricerca didattica di Bari
(coordinatore Prof. C. Di Comite)
Istituto di Geometria, Palazzo Ateneo
70121 Bari

Nucleo di ricerca e sperimentazione di Cagliari
(coordinatore Prof. O. Montaldo)
Viale Merello, 94
09100 Cagliari

Nucleo di ricerca didattica di Catania
(coordinatore Prof. C. Mammana)
Seminario Matematico, Viale A. Doria 6
95125 Catania

Nucleo di ricerca didattica di Genova
(coordinatore Prof. P. Boero)
Istituto di Matematica, Via L.B. Alberti 4
16132 Genova

Gruppo del tirocinio guidato del Consiglio Corso
di Laurea di Scienze naturali di Parma
(coordinatore Prof. F. Emiliani Zauli)
Istituto di Mineralogia, Via A. Gramsci 9
43100 Parma

Nucleo di ricerca didattica di Pavia
(coordinatore Prof. M. Ferrari)
Istituto di Matematica, Strada nuova 65
27100 Pavia

Nucleo di ricerca didattica di Pisa
(coordinatore Prof. G. Prodi)
Istituto Matematico, Piazza dei Cavalieri 2
56100 Pisa

Prof. Walter Avossa
Via Canestrini 83, 35100 Padova

Prof. Simona Bonuccelli Bargellini
Via B. Buozzi 2, 55049 Viareggio

Prof. Maria Giuditta Campedelli
Istituto Matematico, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze

Prof. Dora Nelli
Viale Michelangelo 85, 80129 Napoli

Prof. Paolo Oriolo
Via Medaglie d'oro 80, 74100 Taranto

Prof. Mariella Ratti Toracca
Piazza Caduti per la Libertà 7, 19100 La Spezia

Prof. Rosa Rinaldi Carini
Via Crocicchia 85, 61029 Urbino

Prof. Luigia Rosaia Cordati
Via XXIV Maggio, 106, 19100 La Spezia

Prof. Francesco Speranza
Istituto Matematico, Via Università 12, 43100 Parma

INDICE

COLLANA DI QUADERNI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

1. A. ANDREOTTI, G. TOMASSINI: *Spazi vettoriali topologici*, 1978, 8° in brossura, pp. VIII - 84. . . . . L. 2.000
2. G. TALENTI: *Calcolo delle variazioni* (appunti redatti da C. Maderna e S. Saba), 1977, 8° in brossura, pp. VIII - 84. . . . . (esaurito) L. 2.000
3. M. BOZZINI, M. MACCONI, A. PASQUALI: *Risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie* (un insieme di sottoprogrammi orientati ai minicalcoltori), 8° in brossura, pp. IV - 178 . . . . L. 3.500
4. C. BAIOCCHI, A. CAPELO: *Disequazioni variazionali e quasi variazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera. (Volume 1: Problemi variazionali)*, 1978, 8° cartonato, pp. VIII - 358. . . . . (esaurito) L. 7.000
5. A. HALANAY: *Stabilità* (appunti redatti da G. Anichini e A. Venni), 1978, 8° in brossura, pp. VI - 112. . . . . L. 3.000
6. E. GIUSTI: *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, 1978, 8° in brossura, pp. VI - 214. . . . . L. 4.000
7. C. BAIOCCHI, A. CAPELO: *Disequazioni variazionali e quasi variazionali. (applicazioni a problemi di frontiera libera. (Volume 2: Problemi quasi variazionali)*, 1978, 8° cartonato, pp. VII - 282. . . . . L. 6.000
8. A. ORSATTI: *Introduzione ai gruppi abeliani astratti e topologici*, 1978, 8° in brossura, pp. VIII - 260. . . . . L. 6.000
9. C. CORRADI: *Problemi di stima in econometria e loro risoluzione numerica*, 1979, 8° in brossura, pp. VI - 66. . . . . L. 2.000
10. AA. VV.: *La didattica della matematica oggi.* (Problemi, ricerche, orientamenti) a cura di C. Sitia, 1979, 8° in brossura, pp. VIII - 410. . . . . L. 4.500
11. M. G., GASPARO, M. MACCONI, A. PASQUALI: *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali*, 1979, 8° in brossura, pp. VI - 216. . . . . . . L. 4.000
12. Z. KRIGOWSKA: *Cenni di didattica della matematica, 1.* 8° in brossura, pp. VIII - 244. . . . . L. 4.000
13. F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, F. LAZZERI: *Topologia delle superficie algebriche in P_3 (C)*, 1979, 8° in brossura, pp. II - 171. . . . . . . L. 4.000
14. T. MANACORDA: *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, 1979, 8° in brossura, pp. IV - 112. . . . . L. 3.500
15. C. CATTANEO: *Teoria macroscopica dei continui relativistici*, 1980, 8° in brossura, pp. V + 105. . . . . L. 3.500
16. A. TOGNOLI, A. ZEPPILLI: *Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali*, 1980, 8° in brossura, pp. 121. . . . . L. 3.500
17. AA. VV.: *Ottimizzazione non lineare e applicazioni, a cura di S. Incerti e Treccani (Atti del Convegno Italsiel-UMI, l'Aquila 18-20 giugno 1979)*, 1980, 8° in brossura pp. XI + 372. . . . . L. 10.000
18. L. SALCE: *Struttura dei p-gruppi abeliani*, 1980, 8° in brossura, pp. IV 300 . . . . L. 8.000
19. S. COEN: *Una introduzione ai dominii di Riemann non ramificati n-dimensionali*, 1980, 8° in brossura, pp. VI - 222. . . . . L. 5.000
20. C. CATTANEO: *Elementi di teoria della propagazione ondosa*, 1981, 8° in brossura, pp. IV - 216 . . . . L. 6.000

Distribuzione: Libreria Pitagora Editrice - Via Zamboni, 57 - 40127 Bologna
Ai soci UMI sconto del 20% sui prezzi di copertina.