Ministero
della
Pubblica
Istruzione

Direzione Generale
Istruzione Classica
Scientifica e
Magistrale

Direzione Generale
Istruzione Elementare

Unione Matematica
Italiana

GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ

**5° Corso MPI-UMI in Didattica
della Matematica per Docenti
Istruzione Elementare**

QUADERNI 36

**Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri"
Lucca**

23/27 novembre 1998 - 22/26 febbraio 1999

DOCUMENTI
DI
LAVORO

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: G. Cosentino
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinatore editoriale: G. Ciri
Revisione Scientifica: F. Arzarello, C. Bernardi, L. Ciarrapico, M. Dibilio
Editing: P. Nardini
Grafica: F. Panepinto, A. Commisso, L. Gerbino

Nota editoriale

In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.
Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale
Direzione Generale Istruzione Elementare

Unione Matematica Italiana

V° CORSO UMI-MPI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
Seminario di formazione per Docenti
Istruzione Elementare

“GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ”

Liceo Scientifico Statale
“A. Vallisneri” - Lucca

23-27 novembre 1998 - 22-26 febbraio 1999

INDICE

PRESENTAZIONE

Ferdinando Arzarello
Presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (*).
Lucia Ciarrapico
Dirigente superiore per i servizi ispettivi.

Questo volume raccoglie materiale elaborato in occasione del Quinto Corso in Didattica della Matematica, organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana.

Alla fine del 1993 il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un Protocollo d'Intesa, per promuovere «programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni». Nel quadro di una collaborazione fra mondo della Scuola e Università volta a realizzare forme di aggiornamento, il Protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale di due settimane, su temi di didattica della matematica. Nel 1994 si è svolto il Primo Corso, dal titolo «L'insegnamento dell'Algebra fra tradizione e rinnovamento» per docenti delle Scuole Superiori; nel 1995-96 si è tenuto il Secondo Corso, dedicato all'«Insegnamento della Geometria» e rivolto sia a docenti delle Scuole Medie sia a docenti delle Superiori; nel 1996-97 si è tenuto il Terzo Corso, diviso in due sezioni, una di "Aritmetica" per insegnanti della Scuola Elementare, una di "Didattica dell'analisi Matematica" per docenti delle Superiori; nel 1997-98 si è tenuto il Quarto Corso "Logica Probabilità Statistica" per docenti delle Superiori e delle Scuole Medie.

Il Quinto Corso in Didattica della Matematica si è svolto a Viareggio in due settimane separate, dal 23 al 27 novembre 1998 e dal 22 al 26 febbraio 1999.

Anche il Quinto Corso è stato articolato in due sezioni una per le Superiori, una per le Elementari, entrambe sul tema "Geometria e multimedialità".

Al solito, si è ritenuto preferibile presentare separatamente i testi relativi alle Superiori e quelli dedicati alle Elementari, per ottenere due volumi tipograficamente più agili e didatticamente mirati.

Al corso sono stati ammessi solo 30 docenti di ruolo per le elementari e 41 per le Superiori a fronte di un numero molto più elevato di domande. La scelta

(*) La Commissione Italiana per l'lnsegnamento della Matematica è una commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana, che si occupa specificamente dei problemi di carattere didattico.

è stata fatta sulla base dei titoli presentati dai docenti e cercando di soddisfare una rappresentanza uniforme di tutte le regioni italiane.

Nella Sezione "Elementari" si sono svolti 4 cicli di lezioni, con esercitazioni, conferenze, lavori di gruppo, esercitazioni al computer. Come appare dai testi, in cui sono sinteticamente riportati i vari momenti di lavoro (lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici), si è cercato di affrontare gli argomenti avvalendosi delle indicazioni fornite dalla ricerca didattica e di spunti suggeriti dalla storia e dalla epistemologia.

Nei lavori di gruppo sono statio fra l'altro discussi problemi legati alla valutazione del'apprendimento oltre che a tematiche specifiche relative all'insegnamento della Geometria.

Questo libro vuole essere uno strumento didattico per attività di studio, di aggiornamento e anche di prima formazione. L'efficacia di un Corso di didattica si misura dalla sua ricaduta: ci auguriamo che anche il libro permetta a molti di coloro che non hanno potuto partecipare al Corso, di usufruirne, sia pure a distanza di tempo, e possa anche costituire una fonte di suggerimenti per Enti e Associazioni che vogliano contribuire con iniziative locali alla formazione dei docenti.

Un sentito ringraziamento va rivolto a quanti hanno reso possibile la realizzazione dell'iniziativa:

- alla Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale, che ha curato l'organizzazione del Corso,
- alla Direzione Generale dell'Istruzione Tecnica, alla Direzione Generale dell'Istruzione Professionale e all'Ispettorato per l'Istruzione Artistica, che hanno contribuito alla realizzazione del Corso,
- al Preside Giuseppe Ciri del Liceo Scientifico "Vallisneri" di Lucca, che ha diretto il Corso, e al personale dello stesso Liceo, che ha offerto un efficace sostegno amministrativo e di segreteria,
- ai relatori, per la loro competenza e disponibilità,
- ai docenti partecipanti, che hanno dato contributi preziosi grazie alla loro preparazione e alla loro esperienza concreta.

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
SEZIONE ISTRUZIONE PRIMO GRADO
V CORSO MPI-UMI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
"GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ"

Programma

Cicli di lezioni:

A **Mario Ferrari -** Università di Pavia
Insegnamento-apprendimento della geometria

B **Nicoletta Lanciano -** Università di Roma "La Sapienza"
Geometria in spazi concreti

C **Paolo Boero -** Università di Genova
Esperienze nella didattica della Geometria

D Parte I **Giampaolo Chiappini -** IMA Genova
La mediazione del calcolatore nell'apprendimento della geometria

Parte II **Stefania Cotoneschi, Franco Spinelli -** Firenze
Progetti multidisciplinari e multimedialità nella scuola di base

Conferenze:

Vinicio Villani - Università di Pisa
Un approccio multimediale per la formazione e l'aggiornamento degli insegnanti di matematica

Maria G. Bartolini Bussi - Università di Modena e Reggio Emilia
Geometria e Multimedialità: reale o virtuale

STAFF DI GESTIONE DEL CORSO

Direttore: Giuseppe Ciri

Relatori:
Paolo Boero
Lucilla Cannizzaro
Giampaolo Chiappini
Stefania Cotoneschi
Nicoletta Lanciano
Mario Ferrari
Enrico Giusti
Aldo Morelli
Benedetto Scimemi
Franco Spinelli
Gian Marco Todesco

Segreteria organizzativa:
Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Stefano Mrakic, Maria Luisa Radini, Giovanni Romani.

La curatela del presente volume è stata seguita da Giuseppe Ciri.
La revisione scientifica dei testi è stata curata da Lucia Ciarrapico, Claudio Bernardi e Paolo Nardini.

GEOMETRIA

Mario Ferrari

Università di Pavia

Redattore: **Pierangelo Giovanni Sacchi** - *Università di Pavia*

CAPITOLO 1

La struttura logica della geometria

1. Introduzione

Negli innumerevoli corsi di aggiornamento del P.P.A. quasi sempre mi "scappava" la domanda: *che cosa è una retta?* ottenendo risposte diverse.

- E' una successione infinita di punti. Davanti a un disegno come questo

  che rappresenta una successione infinita di punti tutti si accorgono che la "definizione" data era, per lo meno, incompleta.

- La definizione più gettonata era la seguente: **la retta è una successione di punti aventi tutti la stessa direzione.** Facevo, allora, questo disegno,

  .... ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●● ....

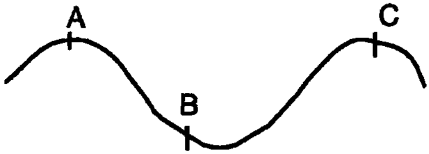
che verifica la definizione, ma non risponde al nostro solito concetto di retta. La domanda, poi, "*che cosa è la direzione di un punto?* " rimaneva senza risposta.

- Alcuni insegnanti mi accusano di barare perché i punti devono essere "vicini". Con una zoomata sui punti facevo questo disegno:

  .... OOOOOOOO.........

  e domandavo: tra due punti "vicini" *ci sono altri punti?*
  Alcuni rispondevano no (sbagliato), altri rispondevano sì, ma allora che cosa vuol dire essere vicini ?

- Altri insegnanti definivano la retta una successione infinita di punti **allineati**. Alla domanda: *quando i punti sono allineati?* La risposta corale era: quando stanno sulla stessa linea.



Per tutti, però, i punti A, B, C, del disegno pur stando sulla stessa linea non sono allineati. Si giungeva subito alla conclusione che **i punti sono "allineati" quando sono sulla stessa retta e tutti si accorgevano del circolo vizioso commesso.**

Sorte non migliore toccava alla definizione di **punto**.

- E' la più piccola figura geometrica (ma la figura geometrica è un insieme di punti). Che cosa significa "*più piccola*"?
- E' un ente geometrico senza dimensioni. Che cosa significa "*avere dimensioni*"?

Le "sicurezze" geometriche incominciavano a vacillare ed assistevo ad un'opera di "flagellazione" verso professori e libri di testo (ci hanno sempre insegnato così) e verso se stessi (abbiamo sbagliato tutto).
Poi saliva, implorante, la domanda: *che cos'è la retta? Che cosa dobbiamo dire a scuola?*
Davo una breve risposta rimandando il resto alle lezioni di geometria.
In questo corso, invece, darò una risposta esauriente.

2. Concetti primitivi e definizioni

In ogni teoria matematica svolta a livello adulto si incontrano definizioni.
In aritmetica, per esempio, diamo la definizione di numero pari, numero primo, multiplo, divisore, ecc...; in algebra si definiscono, per esempio, monomi, polinomi, equazioni, ecc...; in geometria si studiano, per esempio, le definizioni di angolo, poligono, rette parallele, ecc...
Le definizioni servono per caratterizzare concetti nuovi utilizzando concetti già noti.
Per esempio conoscendo che cosa vuol dire dividere un numero **a** per un numero **b** posso definire i numeri pari come i numeri che sono divisibili per 2.

La presenza di un gran numero di definizioni in una teoria matematica può far nascere l'idea, **sbagliata** ma molto comune, che **ogni concetto della**

teoria può essere definito.
Vediamo perché questa idea è sbagliata.
Facciamo un discorso generale che vale per qualsiasi teoria.
Supponiamo di voler introdurre, mediante una definizione, un concetto che chiamiamo **A**. Dobbiamo, allora, utilizzare altri concetti già noti, che chiamiamo **B**. Questi, a loro volta, saranno stati definiti facendo ricorso ad altri concetti che denotiamo con **C**, i quali, a loro volta, devono…

In questi processi di risalita si presentano tre possibilità:

1. dopo un certo numero di passi si ritorna ad **A**, cioè si utilizza il concetto **A** per definire **A** stesso. E' il classico "circolo vizioso" che non definisce niente. L'ultima "definizione" di retta è di questo tipo;

2. si continua a ricorrere ad altri concetti senza arrestarsi mai. E' il cosiddetto "regresso all'infinito" che non permette di definire il concetto di partenza. Questo processo si può instaurare, per esempio, con la definizione più gettonata di retta riportata prima.
   Per darle un senso si deve conoscere la definizione di successione infinita, di punto e di direzione di punto. Per "punto" si può scegliere, per esempio, la seconda definizione data prima.
   Bisogna però già aver definito che cosa significa "dimensione". Di solito si dice che "dimensioni" sono lunghezza, larghezza e altezza. *Ma che cosa significano queste parole?* Si prosegue senza fermarsi mai e quindi non definiamo mai il concetto da cui siamo partiti;

3. ci si ferma ad un certo punto fissando uno o più concetti senza definirli e li si utilizza per definire tutto il resto.

Questa è l'unica strada praticabile se vogliamo dare delle definizioni dotate di senso. Quindi siamo "costretti" a sceglierla se vogliamo fare una teoria razionale.

I concetti che vengono scelti per definirne altri, ma dei quali non si dà una definizione si chiamano **concetti (o termini) primitivi**. Essi costituiscono le fondamenta dell'edificio teorico nel senso che tutti gli altri concetti possono essere definiti utilizzando i concetti primitivi.

Noi siamo obbligati a scegliere dei concetti primitivi perché **non si può definire tutto**, ma siamo **liberi** sia di fissare i **criteri** di scelta, sia nello scegliere un concetto piuttosto che un altro.

I criteri cui **ispirarsi** possono essere quelli **dell'evidenza, della semplicità, della bellezza, della forza,** ecc... Si tratta di criteri soggettivi per cui matematici che si ispirano agli stessi criteri possono scegliere concetti primitivi diversi.

Questa libertà di scelta ci fa capire subito che non esistono concetti primitivi per "diritto naturale", cioè concetti che debbano essere necessariamente scelti come primitivi in aritmetica, in geometria, ecc...

Nonostante questa libertà, fra i **concetti primitivi della geometria** ci sono sempre (o quasi) quelli di **punto**, di **retta**, di **piano**.
Sarà anche la scelta per questo corso.

Una volta scelti i concetti primitivi si incominciano a introdurre i **concetti definiti** utilizzando quelli primitivi.

Scelti, per esempio i concetti primitivi di punto, retta e piano possiamo subito definire

- **figura piana:** un qualunque insieme non vuoto di punti del piano;
- **triangolo:** una terna ABC di punti del piano non allineati;
- **quadrilatero:** una quaterna ABCD di punti del piano tre a tre non allineati.

Utilizzando proprietà di concetti primitivi e di concetti già definiti si introducono altre definizioni.
Anche nel dare le definizioni noi abbiamo una grande **libertà**. Possiamo scegliere quali proprietà inserire nella definizione di un concetto (avremo definizioni più o meno ricche) e possiamo anche scegliere come caratterizzare un concetto.

Esempio: la definizione di triangolo data sopra è la più scarna e richiede di conoscere solo i concetti di punto, di retta e di piano. Avendo a disposizione il concetto di segmento possiamo dare la più familiare definizione: una terna ABC di punti non allineati con i segmento AB, BC e CA.

Insieme alla libertà di scelta ci deve essere anche la **coerenza** nell'accettare le conseguenze della definizione scelta.

Esempio: se si definisce isoscele il triangolo che ha **un solo** asse di simmetria bisogna accettare che un triangolo equilatero non è isoscele.

Osservazione 1

Le definizioni sono necessarie ed utili nella scuola media. *E nella scuola elementare?*

I programmi del 1955 proibivano di dare definizioni in geometria: "*Per la geometria l'alunno verrà condotto in via naturale a riconoscere le principali figure piane e solide cioè attraverso il disegno e le più evidenti proprietà, **mai attraverso la definizione**, spesso non compresa, sempre dannoso sforzo mnemonico*".

I nuovi programmi non sono così categorici, ma non parlano mai di dare definizioni. Basta che gli alunni sappiano riconoscere e denominare le varie figure piane e solide.

Certamente gli insegnanti devono conoscere molto bene le definizioni.

In quarta e in quinta si può cercare, con metodo induttivo, di far formulare dai bambini qualche definizione significativa. Si possono, per esempio, caratterizzare triangoli e quadrilateri in base ai loro elementi di simmetria.

Osservazione 2

Una domanda che spesso mi è stata fatta dagli insegnanti è la seguente: *che cosa dire ai bambini dei concetti primitivi: punto, retta e piano? Come caratterizzarli?*

Di questi concetti, anzitutto, bisogna dare delle "immagini" suggerite dal disegno o da oggetti.

Per il punto si può ricorrere al segno lasciato dalla penna, al "puntino" sulla "i", ad un soggetto molto piccolo ecc...

Per la retta si può ricorrere allo spigolo di un tavolo, alle righe dei quaderni, ecc...

Per il piano si può ricorrere ad un tavolo, al mare calmo, ecc...

La cosa più importante, però, è di caratterizzarli mediante le proprietà che li mettono in relazione tra loro.

Queste proprietà sono gli **assiomi** (o i teoremi) di cui parliamo al paragrafo seguente.

3. Assiomi e teoremi

In ogni teoria matematica ci sono assiomi (o postulati) e teoremi. Si tratta di affermazioni o "verità" matematiche.

In aritmetica noi affermiamo che "esistono infiniti numeri primi" e

dimostriamo questa affermazione come aveva fatto Euclide. Siamo di fronte ad un **teorema**.
In geometria noi tutti ricordiamo l'affermazione "Per due punti passa una sola retta", ma non dimostriamo, in genere, questa affermazione. Siamo di fronte ad un **assioma**.
In una teoria come non tutto può essere definito, così **non ogni affermazione può essere dimostrata**.
Ci troviamo nella stessa situazione esaminata a proposito dei concetti.
Quando vogliamo dimostrare una certa affermazione, per esempio che in un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei due cateti, dobbiamo utilizzare affermazioni già acquisite le quali devono essere dimostrate in base ad altre "verità" già dimostrate, ecc...
Se non vogliamo cadere in un circolo vizioso o in un regresso all'infinito, nel qual caso non dimostreremmo niente, dobbiamo necessariamente scegliere alcune "verità" e accettarle senza dimostrarle.
Queste "verità" sono dette **assiomi** o **postulati** e sono esse che permettono di dimostrare altre affermazioni che si chiamano **teoremi**.
Generalmente gli assiomi riguardano i concetti primitivi e stabiliscono i rapporti che li legano. Servono a caratterizzare i concetti primitivi, a imporre loro delle "regole di comportamento".
Concetti primitivi espressi con gli stessi nomi ma caratterizzati con assiomi diversi possono dare origine a "cose" diverse.
Per esempio, le rette nella geometria euclidea sono "diritte", mentre nella geometria sferica (quella del mappamondo) sono curve.

L'identikit dei concetti primitivi è dato dagli assiomi.

Se da una parte è necessario scegliere degli assiomi per costruire una teoria matematica razionale, dall'altra siamo **liberi** sia nel fissare **i criteri di scelta**, sia nella **scelta** effettiva degli assiomi.
I criteri di scelta, come già detto, possono essere quelli dell'evidenza, della semplicità, della forza, della bellezza. Assiomi forti permettono, per esempio, di arrivare presto a teoremi significativi.
Per i greci, ed ancora per molti autori di libri di testo, l'evidenza era l'unico criterio di scelta: gli assiomi erano verità evidenti e quindi non dimostrabili. Ora i matematici la pensano diversamente come è ben spiegato nel seguente brano.

"Invece di concepire la differenza tra postulati e le altre proposizioni come consistente nel possesso, da parte dei primi, di qualche speciale carattere che li renda per se stessi più accettabili, più evidenti, meno discutibili, i logici matematici vedono nei postulati delle proposizioni come tutte le altre, la cui scelta può essere diversa a seconda degli scopi ai quali la trattazione mira.[...] I postulati hanno dovuto, cioè, rinunciare a quella specie di «diritto divino» di cui sembrava investirli la loro pretesa evidenza e rassegnarsi a diventare invece che «gli arbitri», «i servi servorum», i semplici «impiegati» delle grandi «associazioni» di proposizioni che costituiscono i vari rami della matematica".

4. Conclusione

La struttura logica della geometria, quando essa viene organizzata in modo razionale, è costituita dai seguenti elementi:

- un insieme di concetti primitivi;
- un insieme di concetti definiti;
- un insieme di assiomi;
- un insieme di teoremi;
- un insieme di regole logiche in base alle quali dare definizioni e fare dimostrazioni.

I primi quattro insiemi vengono sempre esplicitati; l'ultimo si suppone noto ed è costituito dalle regole logiche accettate nei nostri soliti ragionamenti.

Un sistema così organizzato è detto **sistema assiomatico**.

CAPITOLO 2

Alcuni aspetti teorici

1. Figure geometriche

Vediamo solo qualche aspetto critico.

1.1 Trapezio

Di solito viene definito come un quadrilatero con una coppia di lati paralleli.

Con questa definizione la "*clessidra* " è un trapezio:

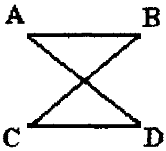


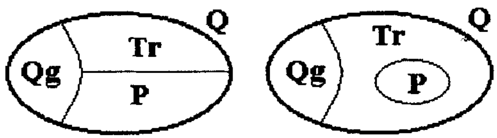
fig. 1

Poco male, ma se non ci piace averla tra i piedi basta aggiungere l'aggettivo "*convesso* " al sostantivo "*quadrilatero* ".

L'espressione "*una coppia di lati paralleli* " è passibile di due interpretazioni ugualmente legittime:

- una **sola** coppia. Ovviamente gli altri due lati non sono paralleli quindi i parallelogrammi non sono trapezi;
- **almeno** una coppia. E' l'interpretazione preferibile. Dell'altra coppia di lati non si dice niente: potrebbero essere paralleli oppure no. Con questa interpretazione i parallelogrammi sono trapezi.

  Ad ognuna delle due interpretazioni è associata una diversa rappresentazione dell'insieme dei quadrilateri con i diagrammi di Eulero-Venn



Dove **Q** sono i quadrilateri, **Qg** sono i quadrilateri generici, **Tr** i trapezi e **P** i parallelogrammi.

1.2 Trapezio isoscele

E' uno dei cavalli di battaglia della scuola elementare negli esercizi sul calcolo di perimetri e di aree.
Sotto l'influsso del "*triangolo isoscele* " spesso si definisce

- isoscele un trapezio che ha due lati uguali (o congruenti). La definizione è errata perché il trapezio di figura 2 ha due lati uguali, ma non è isoscele.

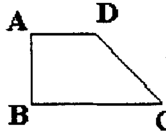


fig. 2 **(AB=AD)**

Chi sceglie la prima interpretazione può definire

- isoscele un trapezio che ha uguali i due lati non paralleli

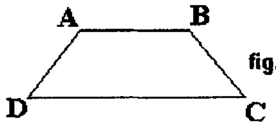


fig. 3 **(AD=BC)**

Questa definizione non può essere data da chi sceglie la seconda interpretazione perché non può parlare di "*lati non paralleli* ".
Basta, però, far intervenire gli angoli "*adiacenti a ciascuna base* " e affermare che è

- isoscele un trapezio che ha uguali gli angoli adiacenti alla stessa base.

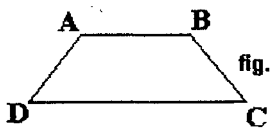


fig. 4 **($\hat{A}=\hat{B}$;$\hat{C}=\hat{D}$)**

Con questa definizione i parallelogrammi **non** sono trapezi isosceli.

1.3 Altezza

La parola "**altezza**" fa parte del linguaggio comune.
Parliamo, per esempio, della altezza di una camera, intendendola costante. Essa è la distanza tra pavimento e soffitto, pensati paralleli, e la misuriamo lungo una retta perpendicolare ad

entrambi.
Parliamo di altezza di una persona. Per misurarla la persona deve stare ben diritta. L'altezza è la distanza tra il piano di appoggio dei piedi e la sommità della testa segnata con un libro o qualcosa di analogo. Anche in questo caso piano di appoggio e libro sono pensati paralleli.
Parliamo di altezza di una montagna. Il piano di appoggio è il livello del mare. L'altezza è la distanza, misurata con un altimetro, tra il livello del mare e la sommità della "cima" della montagna, punto per il quale si può pensare che passi un piano parallelo al livello del mare.

1.3.1 L'altezza di una striscia

Negli esempi precedenti sono costanti tre concetti geometrici:

- piani paralleli ;
- perpendicolarità;
- distanza.

Volendo fare un discorso di geometria piana, ai piani paralleli sostituiamo le **rette parallele**, mentre rimangono invariati gli altri due concetti.

Due rette parallele **a** e **b**, non coincidenti, dividono il piano in tre regioni:

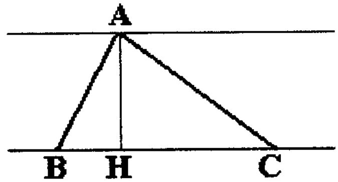
- il semipiano di origine **a** che **non** contiene **b** ;
- il semipiano di origine **b** che **non** contiene **a** ;
- la regione ottenuta intersecando il semipiano di origine **a** che contiene **b** con il semipiano di origine **b** che contiene **a**.

Quest'ultima regione si chiama **striscia di lati a, b.**

All'idea di striscia sono collegate diverse figure geometriche.

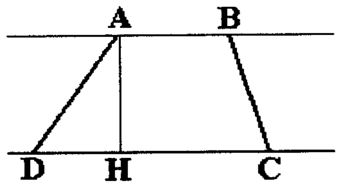
a. Triangolo

Data la striscia **(r,s)** per avere un triangolo basta prendere un vertice su **r** (o su **s**) e due su **s** (o su **r**).
A seconda di come vengono presi i vertici si hanno i vari tipi di triangolo.
La distanza **AH** fra le due rette parallele è l'altezza del triangolo relativa alla "base" **BC**.



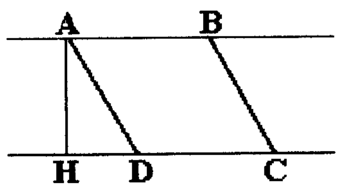
b. Trapezio

Basta prendere due punti **A** e **B** su un lato della striscia e altri due **C** e **D** sull'altro.
Il quadrilatero **ABCD** è un trapezio
Un trapezio, quindi, è un quadrilatero che ha **almeno** due lati paralleli. Con questa scelta un parallelogramma è un trapezio.
La distanza **AH** fra le due rette parallele è l'altezza del trapezio rispetto alla base **DC**.



c. Parallelogramma

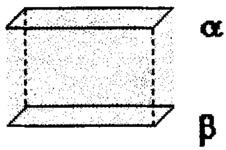
Se prendiamo **A** e **B** su **r** e **C** e **D** su **s** in modo che **d(A,B)=d(C,D)** allora il quadrilatero **ABCD** è un parallelogramma.
La distanza **AH** fra le due rette parallele è l'altezza del parallelogramma relativa alla "base" **DC**.



Il segmento **AH** delle tre figure precedenti, cioè la **distanza** fra i lati della striscia, è **l'altezza** della striscia

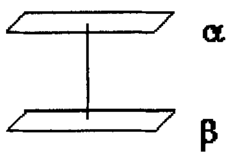
Considerazioni analoghe possono essere fatte nello spazio.
Due piani paralleli α e β dividono lo spazio in tre regioni:

- il semispazio di origine α che non contiene β;
- il semispazio di origine β che non contiene α;
- la regione ottenuta intersecando il semispazio di origine α che contiene β con il semispazio di origine β che contiene α.



Quest'ultima regione si chiama **strato** di facce α e β.

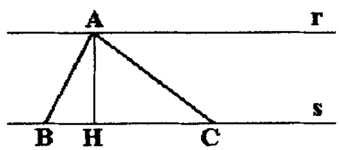
La **distanza** fra **i due piani paralleli** è **l'altezza dello strato**.



Al concetto di strato sono collegati **i prismi, le piramidi, i cilindri e i coni**.

1.3.2 L'altezza dei triangoli

Abbiamo già visto che data una striscia **(r,s)** è immediato costruire un triangolo **ABC** prendendo un vertice **(A)** su un lato della striscia e gli altri due vertici **(B,C)** sull'altro lato.
L'altezza della striscia **(AH)** è l'altezza del triangolo **ABC** relativa al lato **BC**.

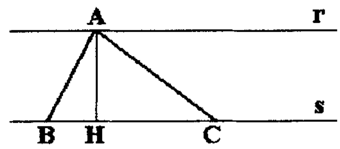


E' possibile fare anche il cammino inverso.

Dato il triangolo **ABC** possiamo scegliere il lato **BC** come "base" (di appoggio) e pensare alla retta che lo contiene.

Dal vertice **A** mandiamo la parallela alla **retta BC**. Otteniamo così la striscia **(r,s)** che contiene completamente il triangolo **ABC** i cui **vertici stanno tutti sui lati della striscia**.

L'altezza **AH** della striscia è l'altezza del triangolo relativa alla base **BC**.

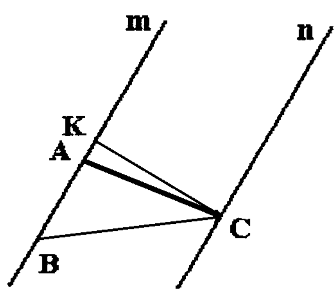


Come base possiamo scegliere un **qualunque lato** del triangolo **ABC**.

Se, per esempio, prendiamo come base il lato **AB**, dal vertice **C** possiamo mandare la parallela alla retta **AB**.

Otteniamo così la striscia **(m,n)** che contiene completamente il triangolo **ABC** i cui **vertici stanno tutti** sulla striscia **(m,n)**.

L'altezza **CK** della striscia è l'altezza del triangolo **ABC** relativa alla base **AB**.



Senza ripetere il disegno, scegliendo **AC** come base, si ottiene una nuova striscia la cui altezza è l'altezza del triangolo relativa alla base **AC**.

In conclusione: **Ogni triangolo ha tre altezze, una per ogni lato scelto come base**.

L'altezza è sempre il **segmento** di perpendicolare che va **da un vertice alla retta del lato opposto** (base).

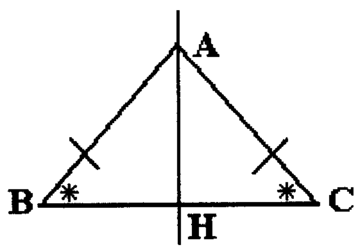
L'altezza relativa ad un lato può essere **interna** al triangolo, **coincidente** con un **lato**, esterna al triangolo. Precisiamo:

- in un **triangolo acutangolo** le **tre altezze** sono **interne al triangolo;**
- in un **triangolo rettangolo due altezze** coincidono con i **due cateti** e la **terza** (quella relativa all'ipotenusa) è **interna al triangolo;**
- in un **triangolo ottusangolo due altezze** sono **esterne** (quelle relative ai lati che individuano l'angolo ottuso) e **una è interna al triangolo**.

In ogni caso **le rette delle tre altezze** si incontrano in un punto chiamato **ortocentro** che:

- è **interno** nel **triangolo acutangolo;**
- è **esterno** nel **triangolo ottusangolo;**
- è **coincidente** con il **vertice dell'angolo retto** nel **triangolo rettangolo**.

Una considerazione a parte merita il **triangolo isoscele**. E' tradizione chiamare **base** il lato comune ai due angoli congruenti (angoli alla base). In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla **base** (**BC**) sta sulla **retta** che passa per il vertice opposto (**A**) ed è contemporaneamente:



- **asse del segmento BC** (asse della simmetria che scambia fra loro i punti **B** e **C**);
- **bisettrice dell'angolo A** (asse della simmetria che scambia fra loro i lati dell'angolo **A**);
- **mediana del lato BC** (retta per **A** che passa per il punto medio di **BC**).

In ogni triangolo:

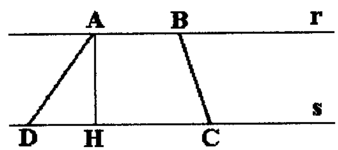
- gli **assi** dei lati passano per uno stesso punto equidistante dai vertici detto **circocentro;**

- le **bisettrici** degli angoli interni passano per uno stesso punto equidistante dai lati chiamato **incentro;**
- le **mediane** passano per uno stesso punto chiamato **baricentro.**

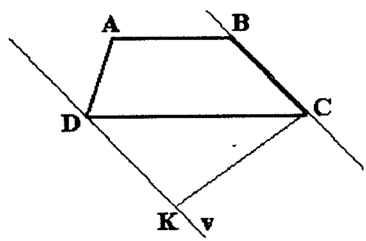
Ortocentro, circocentro, incentro e baricentro sono i **punti notevoli** di un triangolo.
Se un triangolo è **equilatero** i quattro punti **coincidono**.

1.3.3 L'altezza nei quadrilateri

Incominciamo con i **trapezi**.
Abbiamo visto che, data una striscia **(r,s)**, è immediato costruire un trapezio **ABCD**.
L'altezza della striscia, **AH**, è l'altezza del trapezio relativa alla base **DC**.
E' immediato anche il **cammino inverso**.
Un trapezio **ABCD**, per la sua stessa definizione (quadrilatero con due lati paralleli), individua una striscia **(r,s)** che contiene il trapezio i cui vertici si distribuiscono sui due lati della striscia.



L'altezza **AH** della striscia è l'altezza del trapezio relativa ad uno dei due lati paralleli scelto come base. Quindi il trapezio ha **almeno una altezza**.
Ne avrà un'altra?
Scegliamo come base **BC**. La striscia **(u,v)** contiene tutto il trapezio, ma il vertice **A** non sta su un lato della striscia.
La sua altezza **CK non** è altezza del trapezio.

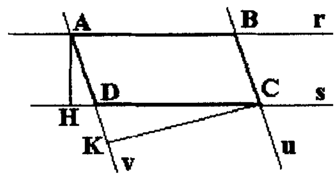


Parallelogrammi

Comunque lo si definisca un parallelogramma è un quadrilatero con **due coppie di lati paralleli**.

Ciascuna coppia dà origine ad una striscia che contiene tutto il parallelogramma i cui vertici si distribuiscono sui due lati della striscia

Le altezze delle strisce, **AH** e **CK** nel disegno, sono le altezze del parallelogramma. Una, **AH**, relativa alla base **DC** e l'altra, **CK**, relativa alla base **AD**.



Nel parallelogramma generico, o romboide, le due altezze sono diverse come nel rettangolo; sono invece congruenti nel rombo e nel quadrato.

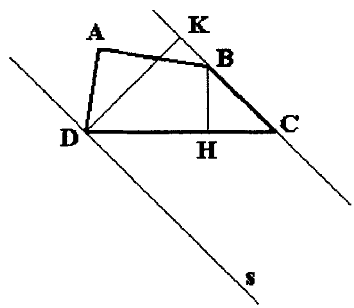
Quadrilatero generico

Con il termine "**generico**" indichiamo un quadrilatero convesso che non possiede nessuna coppia di lati paralleli, come quello in figura.

Di strisce che contengono tutto il quadrilatero ce ne sono quattro (una è disegnata in figura), ma in nessuna di esse i 4 vertici del quadrilatero stanno **tutti** sui lati della striscia.

Quindi un **quadrilatero generico non ha altezze**.

Tuttavia si può sempre parlare di **distanza** di un vertice dal lato opposto.

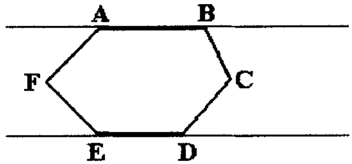


In figura abbiamo disegnato la distanza **BH** del vertice **B** dal lato **DC**. Il segmento **DK** è la distanza del vertice **D** dal lato **CB** e coincide con l'altezza della striscia **(r,s)**, ma **non** è un'altezza del quadrilatero.

1.3.4 Altri poligoni

Sono quelli con un numero di lati **maggiori di quattro**: pentagoni, esagoni, ettagoni, ecc..

Nessuno di essi ha un'altezza perché nessuna striscia che contiene tutto il poligono è tale che tutti i vertici dei poligoni si distribuiscono sui lati della striscia.



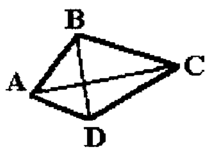
1.4 Diagonali – Diagonali perpendicolari

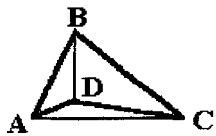
Con i quadrilateri incomincia a diventare significativa la nozione di diagonale.

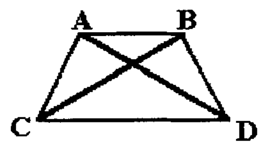
Definizione: Dato un qualunque quadrilatero **ABCD** si chiama diagonale il segmento che unisce **A** e **C**, **B** e **D**, cioè i vertici non consecutivi.

Il quadrilatero **ABCD** è qualunque: può essere convesso o concavo, semplice o intrecciato.

Le diagonali esistono sempre e sono due.







Nei quadrilateri convessi le diagonali si tagliano sempre in un punto interno ad entrambe; in quelli concavi esse non si tagliano mai in un punto interno: una può tagliare il prolungamento dell'altra, oppure si tagliano i due prolungamenti, oppure neppure essi si tagliano.

Particolarmente interessante, per la formula dell'area, è il caso in cui le **diagonali** sono **perpendicolari**.

- Diagonali congruenti che si tagliano nel punto medio: **quadrato**.
- Diagonali non congruenti che si tagliano nel punto medio: **rombo**.

Questi sono i due più noti, ma ci sono altre situazioni come:

- Diagonali congruenti che non si tagliano nel punto medio, **fig. 4**.
- Diagonali congruenti che si tagliano in parti rispettivamente congruenti (**trapezio isoscele**), **fig. 5**.
- Diagonali **non** congruenti che non si tagliano nel punto medio, **fig. 6**.
- Diagonali **non** congruenti con una che taglia l'altra nel punto medio, **fig. 7**.

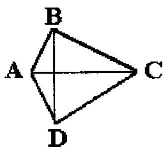


fig. 4

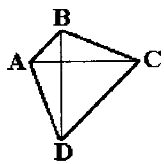


fig. 5

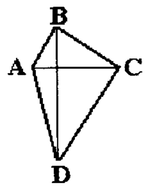


fig. 6

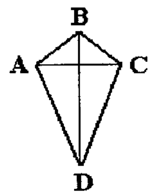


fig. 7

Lasciamo al lettore di esaminare altre situazioni.

Ci sono anche i quadrilateri concavi:

- Diagonali congruenti e il prolungamento di una taglia l'altra nel punto medio, **fig. 8**.
- Diagonali congruenti e il prolungamento di una taglia l'altra non nel punto medio, **fig. 9**.

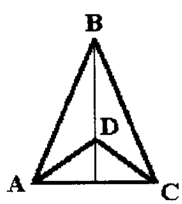


fig. 8

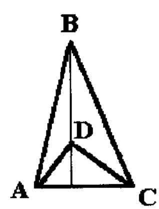


fig. 9

Lasciamo al lettore il completamento della ricerca.

La cosa interessante è che **tutti** questi quadrilateri con le

diagonali perpendicolari hanno la **stessa formula per il calcolo della misura dell'area:**

$$\boxed{A = \frac{d_1 \times d_2}{2}}$$

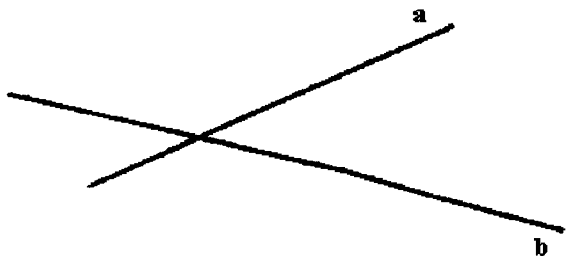
dove **A** indica la misura dell'area e $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ la misura delle lunghezze delle diagonali.

2. Relazioni geometriche

Parleremo solo di relazioni fra rette.

2.1 Relazione di incidenza

La definizione è ben nota: una retta **a** è incidente ad una retta **b** se e solo se la taglia in un **solo** punto.



Si tratta di una relazione binaria **antiriflessiva**, perché nessuna retta è incidente a se stessa, è **simmetrica** perché se **a** è incidente a **b** allora **b** è incidente ad **a**.

2.2 Relazione di perpendicolarità.

E' un caso particolare di relazione di incidenza.

Si possono dare diverse definizioni di perpendicolarità a seconda dei concetti che si vogliono utilizzare e che, quindi, si presuppongono noti.

Si possono distinguere **due tipi** di definizioni:

- quelle che fanno intervenire il **concetto di angolo**;
- e quelle che fanno ricorso al concetto di **simmetria assiale** con le sue proprietà.

A) Definizioni che fanno intervenire il concetto di angolo.

Presupposti noti i concetti di **angoli congruenti** e **angoli adiacenti** si può dare questa definizione:

Definizione 1: Una retta **r** è perpendicolare ad una retta **s** se le due rette, incontrandosi, formano due angoli adiacenti congruenti.

Se si presuppone noto il concetto di **angolo retto** si può dare quest'altra definizione:

Definizione 2: Una retta **r** è perpendicolare ad una retta **s** se le due rette, incontrandosi, formano un angolo retto.

Questa definizione sembra più semplice della precedente, ma non lo è.

Infatti un angolo è **retto** quando è uguale (congruente) ad un suo adiacente.

Se si presuppongono noti i **concetti** di **ampiezza angolare** e di **misura delle ampiezze** si può dare la seguente:

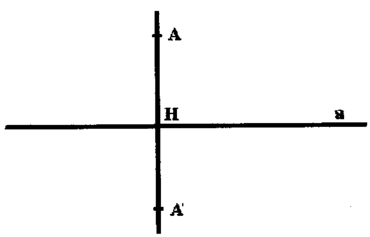
Definizione 3: Una retta **r** è perpendicolare ad una retta **s** se le due rette, incontrandosi, formano un angolo la cui ampiezza, in gradi sessagesimali, misura 90.

E' la definizione più difficile.

B) Definizioni che fanno ricorso al concetto di **simmetria assiale** con le sue proprietà.

Inizialmente, in classe, si può parlare semplicemente di piegatura di un foglio lungo una retta (l'asse di simmetria). Per gli adulti (insegnanti) possiamo procedere così.

Consideriamo una retta **a** e un punto **A** non appartenente ad **a**.



Sia **A'** il simmetrico di **A** rispetto alla retta **a**: $A' = S_a(A)$.
La retta **AA'** taglia la retta **a** in un punto **H** perché **A** e **A'** stanno in semipiani opposti, è distinta da **a** e nella simmetria rispetto ad **a** è **unita** perché

$$S_a(A) = A' \text{ e } S_a(A') = A$$

essendo S_a **involutoria**.

Queste tre proprietà della retta **AA'** sono quelle che caratterizzano **la relazione di perpendicolarità** e che mettiamo in risalto nella seguente definizione:

Definizione 4: Una retta **a** si dice perpendicolare ad una retta **b** se e **solo** se:

1) **a** è **diversa** da **b**;
2) **a** è **incidente a b**;
3) nella simmetria di asse **b** la retta **a** è unità, cioè $S_b(a) = a$.

Essendo un caso particolare della relazione di incidenza, anche la perpendicolarità è una relazione antiriflessiva e simmetrica.
La definizione 4 è, forse, da preferire alla scuola elementare sia perché è indipendente dal difficile concetto di angolo, sia perché ha un carattere operativo. Basta, infatti, fare una piegatura per accertare se una retta è perpendicolare ad un'altra.

Una volta introdotta possiamo usare la perpendicolarità per dare alcune definizioni.

Ecco qualche esempio.

- Si dice **retto** l'angolo formato da due semirette aventi la stessa origine e appartenenti a rette perpendicolari.
- Si dice **triangolo rettangolo** il triangolo che ha due lati perpendicolari.
- Si dice **rettangolo** un quadrilatero nel quale due qualunque lati consecutivi sono perpendicolari.

- Si dice **trapezio rettangolo** quello che ha una coppia di lati perpendicolari.
- Si dice **asse di un segmento** la perpendicolare al segmento nel suo punto medio.
- Si dà la definizione di **altezza** di una figura partendo dal concetto di striscia.

Per concludere ricordiamo che, dati una retta **r** ed un punto **P**, esiste ed è unica la retta per **P** perpendicolare ad **r**.

2.3 Relazione di parallelismo

La definizione XXIII del primo libro degli Elementi di Euclide riguarda le rette parallele:
"Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti".
Per Euclide le rette sono "**rette terminate**" cioè segmenti, ma indefinitamente prolungabili (per il suo postulato **II**). Per questo parla di prolungamento dalle due parti.

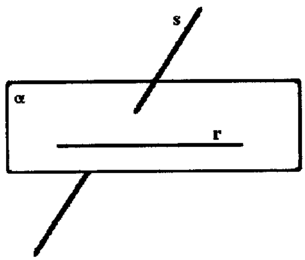
Spesso ho sentito dire che "due rette sono parallele quando si incontrano all'infinito."
Poiché nel piano che noi stiamo costruendo non esistono punti all'infinito, questa definizione non ha senso.

Quella di **Euclide è la definizione di parallelismo in senso stretto**.
Ora si preferisce dare **la definizione di parallelismo in senso largo**.

E' la seguente.
Definizione 1: Due rette complanari **r** ed **s** sono parallele, e si scrive **r//s**, se e soltanto se coincidono **(r=s)** oppure non hanno alcun punto in comune (cioè $r \cap s = \emptyset$, la loro intersezione è vuota).

Le condizioni per il parallelismo, dunque, sono:

1. **la complanarità**, cioè le rette devono stare nello stesso piano.
   Nello spazio ci sono rette che non hanno punti in comune, ma non sono parallele.
   Sono le rette **sghembe** (nel disegno le rette **r** ed **s** non appartengono allo stesso piano e non hanno punti in comune: sono rette sghembe).



2. **la coincidenza**, cioè le due rette sono la stessa retta, oppure

2'. **il non avere punti in comune**.

Il connettivo "oppure" è il **connettivo logico "o" in senso esclusivo**. Ciò significa che le condizioni **2** e **2'** non possono verificarsi entrambe.

Ricordando la definizione di **rette incidenti**, potremmo più semplicemente dare la seguente

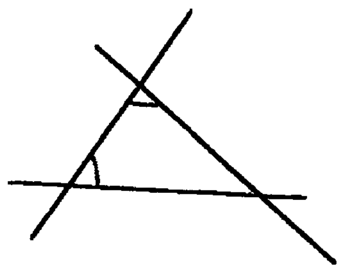
Definizione 2: Due rette complanari **r** ed **s** sono parallele quando non sono incidenti.
Infatti **negare che *r* ed *s* sono incidenti**, significa affermare che esse hanno in comune **almeno** due punti (e allora coincidono) oppure **nessuno**.
La definizione 1 è più generale di quella di Euclide e noi l'abbiamo adottata perché ci interessa che la relazione di parallelismo fra rette sia una **relazione d'equivalenza**.
Ne parleremo tra poco.

E' ben nota la proprietà fondamentale della geometria euclidea riguardante il parallelismo. Molto spesso viene espressa sotto forma di assioma e suona così:

data una retta **r** ed un punto **P**, esiste ed è unica la retta **s** passante per **P** e parallela ad **r**.

Osservazione.
Euclide nei suoi "Elementi" ha dimostrato l'esistenza ma ha postulato l'unicità della parallela. Il suo postulato, il quinto, è il più famoso della storia della matematica perché fino alla prima metà del secolo scorso furono innumerevoli i tentativi di dimostrarlo in base ai primi quattro postulati di Euclide. Tentativi tutti falliti perché esso non è dimostrabile, ma tentativi fecondi perché fecero scoprire tante altre "**verità matematiche**" (ad es. le geometrie **non euclidee**).

Il quinto postulato di Euclide è enunciato in forma angolare:
"**Se una retta, venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette, prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti**"



Quella di parallelismo è una relazione binaria con le seguenti proprietà:

- **Riflessiva.** Significa che, **ogni retta è parallela a se stessa.** In simboli:

  $$\boxed{\forall r,\ r /\!/ r}$$

  Questa proprietà è contenuta nella stessa definizione.
  Siccome **r = r** allora **r//r**.

- **Simmetrica.** Significa che, se **r** è parallela ad **s** allora anche **s** è parallela ad **r.**
  In simboli:

$$\boxed{\forall r, \forall s \quad r // s \Rightarrow s // r}$$

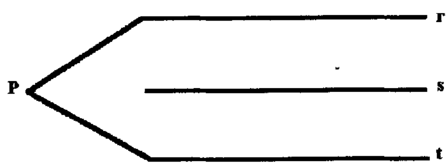
  Anche questa proprietà deriva immediatamente dalla definizione.
  Infatti: se **r = s** allora **r//s** e anche **s//r**;
  se **r** non ha punti in comune con **s**, cioè **r//s**, anche
  s non ha punti in comune con **r**, cioè **s//r**.

E' proprio questa proprietà che ci permette, già nella definizione, di parlare di "**rette parallele**" e non, più rigorosamente, di retta **r** parallela alla retta **s**.

- **Transitiva.** Significa che, date tre rette qualunque **r, s, t,** se **r** è parallela ad **s** e **s** è parallela a **t**, allora **r** è parallela a **t.**
  In simboli:

$$\boxed{\forall r, \forall s, \forall t \quad (r // s \text{ e } s // t) \Rightarrow r // t}$$

Dimostriamo che vale questa proprietà:
Se tra queste tre rette ci sono delle coincidenze, cioè se due sono uguali, la dimostrazione è immediata.
Consideriamo il caso di **r, s, t, distinte**.
Per ipotesi **r//s**
e **s//t**
Dobbiamo dimostrare che **r//t**



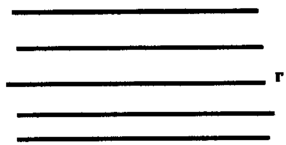
Ragioniamo **per assurdo**.
Neghiamo la tesi. Supponiamo che la retta **r** e la retta **t** abbiano un punto **P** in comune.

Allora per **P** passerebbero due rette, la **r** e la **t**, entrambe parallele, per ipotesi alla s.
Questo è assurdo perché è contro il postulato che abbiamo enunciato.

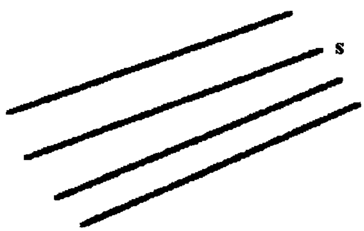
Una relazione, come quella di parallelismo, che gode delle **tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva,** si dice **relazione d'equivalenza**.

Concetto di "direzione di una retta"

Consideriamo ore **tutte le rette del piano**.
Fissiamone una, r, e mettiamo in una scatola la **r** e le **sue infinite parallele:**



Fissiamo un'altra retta s, diversa dalle precedenti, e mettiamola con **tutte le sue infinite parallele** in un'altra scatola.



Continuiamo fino ad esaurire tutte le rette del piano. Alla fine avremo "infinite scatole" tutte diverse in ciascuna delle quali ci sono infinite rette tra loro parallele.
Questo gioco intellettuale ci permette di precisare un concetto che utilizziamo spesso:
quello di **direzione di una retta**.

Siccome il parallelismo è una relazione di equivalenza le varie “scatole si chiamano **classi di equivalenza**. Ecco allora la

Definizione 3: Si chiama **direzione** della retta **r** la **classe** di equivalenza di **r**, cioè l’insieme formato dalla retta **r** e da tutte le sue parallele.

Qualche osservazione.

- Bisogna distinguere la **direzione** di una retta, che è unica, dal **verso**.
  Ogni retta ha **due versi** ed una sola **direzione**.
  Spesso, però, nel linguaggio comune i due concetti sono usati come sinonimi o, meglio, la direzione viene intesa come verso.

- La **definizione 3** è una tipica definizione per **astrazione**, nel senso che si considera una proprietà, quella di essere parallele, di enti tra loro diversi e su di essa si fonda la definizione. In altre parole: le rette parallele tra loro diverse vengono accomunate per il fatto di avere tutte la proprietà considerata.
  Questo tipo di definizione, molto usato nella matematica di oggi, è abbastanza difficile perché fa entrare in gioco infinite rette. E’ quindi da sconsigliare nella scuola elementare quando si tratta di introdurre i numeri naturali come cardinali degli insiemi finiti equipotenti.

3. Trasformazioni geometriche piane

Nella definizione intervengono quattro parole.

3.1 Piane

Questo aggettivo serve per fissare “l’ambiente” in cui consideriamo le trasformazioni.
Potremmo parlare di trasformazioni che interessano solo una retta oppure tutto lo spazio.
Noi, invece, consideriamo solo trasformazioni che riguardano tutti i punti del piano.

3.2 Trasformazione

La parola “trasformazione” indica, intuitivamente, cambiamento, spostamento, ma dobbiamo essere disponibili ad accettare trasformazioni che trasformano poco o niente.

Così va il mondo... matematico.

Matematicamente la parola trasformazione significa che **ogni** punto **P** del piano si trasforma in **uno** ed **uno solo** punto **P'** del piano. E', quindi, proibito che nella stessa trasformazione il punto **P** vada a finire in due punti diversi **P'** e **P''**.

Possiamo dire che una trasformazione è una **corrispondenza** tra i punti del piano.

Il punto **P'**, corrispondente di **P** (si dice anche immagine di **P**), può essere diverso da **P**, cioè **P' ≠ P**, ma può anche coincidere con **P**, cioè **P' = P**.

Per esempio, nella simmetria assiale di asse **r** un punto **P** che **non** sta sull'asse ha come trasformato (simmetrico) un punto **P'** diverso da **P**, mentre un punto **Q** che sta sull'asse coincide con il proprio simmetrico, cioè **Q' = Q**.

3.3 Biunivoca

Questa parola, in matematica, significa due cose:

- due qualunque punti **diversi P** e **Q** si trasformano in due punti diversi **P'** e **Q'**.
  In altre parole: se **P ≠ Q** allora **P' ≠ Q'**.
  E' proibito, quindi, che due punti vadano a finire nello stesso punto.
  (I matematici dicono che la corrispondenza è iniettiva.)

- ogni punto del piano deve essere il corrispondente (l'immagine) di un punto del piano.
  E' proibita la "solitudine sdegnosa" di chi vuol "far parte solo con se stesso".
  (I matematici dicono che la corrispondenza è suriettiva.)

3.4 Continua

I matematici hanno impiegato secoli per precisare il concetto di continuità e ci sono riusciti solo alla fine del secolo scorso.

Non è il caso di riportare la definizione di trasformazione continua.

Qui ci accontentiamo di dire che se due punti **P** e **Q** sono "vicini", allora anche i loro trasformati **P'** e **Q'** sono "vicini".

Precisare che cosa vuol dire "vicini" significherebbe dare la definizione di trasformazione continua. Lasciamo tutto alla fantasia del lettore.
Possiamo concludere con la

Definizione: Una trasformazione geometrica piana è una corrispondenza biunivoca e continua tra i punti del piano.

3.5 Due grandi famiglie

Le trasformazioni geometriche piane sono raggruppate in grandi famiglie in base a certe proprietà che sono possedute da tutti e soli i componenti della famiglia.
Nei programmi delle elementari sono presenti due grandi famiglie.

3.5.1 Le isometrie.

La loro proprietà specifica è di mantenere inalterate le **distanze** (che indichiamo con **d**) tra punti, cioè se **P** e **Q** sono due punti e **P'** e **Q'** i loro trasformati, allora **d (P,Q) = d (P',Q')**.
Si tratta di trasformazioni un po' "rigide", con poca fantasia e che non trasformano molto. Ogni figura viene trasformata in una figura dello stesso tipo e ad essa congruente.
Così una retta si trasforma in una retta, un cerchio in un cerchio congruente e così via.
Le isometrie si suddividono in sottofamiglie, 4 per la precisione, ciascuna caratterizzata da proprietà specifiche. Le studieremo nel seguito.

3.5.2 Le similitudini.

E' il nome comune che si da in matematica agli "ingrandimenti e rimpiccolimenti in scala" dei programmi.
La loro caratteristica fondamentale è di moltiplicare le distanze per un fattore **K > 0**.
In altre parole: se **P** e **Q** sono due punti e **P'** e **Q'** i loro corrispondenti, allora **d (P',Q') = K d (P,Q)**.
Se **K > 1** si ha un ingrandimento, se **K < 1** si ha un rimpiccolimento, se **K = 1** si hanno le isometrie.

Il numero **K** si chiama **rapporto di similitudine** o **scala**.

Osservazione
I matematici hanno studiato altre famiglie interessanti di trasformazioni geometriche piane come le affinità e le proiettività, ma noi non le studieremo

3.6 L'organizzazione sociale

Le famiglie di trasformazioni geometriche piane conducono una vita di... famiglia, basata su una organizzazione sociale rigida, regolata da leggi chiare e rispettate.
Nel mondo matematico, questa non è una novità. Consideriamo il famigliare esempio dei **numeri interi relativi (Z)** e organizziamoli con **l'addizione**.
Noi sappiamo che

- sommando due numeri interi relativi otteniamo un numero intero relativo;
- l'addizione assicura ai numeri una certa libertà di movimento in forza della sua **proprietà associativa:** $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- nella famiglia c'è una mascotte ben vista da tutti perché non da fastidio a nessuno: è il **numero zero**, elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$;
- ogni numero ha un suo **opposto** che, ovviamente, cerca di "disfare" ciò che l'altro costruisce, cerca di "neutralizzarlo".
  In simboli si scrive così: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Per descrivere tutta questa vita sociale i matematici usano una parola: **gruppo**.
Precisamente dicono che **Z è un gruppo rispetto alla addizione**.
Ebbene **ciascuna grande famiglia** di trasformazioni geometriche piane è **organizzata socialmente a gruppo**.
Facciamo il discorso per le isometrie, ma avvertendo che esso vale tale e quale per le similitudini.
Indichiamo con **G** la famiglia (l'insieme) delle isometrie piane e con **f, g, h,...** le singole isometrie.
Dobbiamo anzitutto definire in **G** una **operazione binaria**

interna analoga alla addizione in **Z**.
Trattandosi di isometrie l'operazione più naturale che si presenta è quella di "**applicazione successiva**" spesso chiamata **prodotto** o **composizione** e indicata con il simbolo $*$.
Se **g** ed **f** sono due isometrie, che cosa vuol dire il prodotto $\mathbf{f * g}$? (si legge **g** per **f**, andando da destra a sinistra).
Sappiamo che le isometrie trasformano punti in punti e, quindi, figure in figure.
Ci domandiamo: data una figura **F** come agisce su di essa l'isometria composta $\mathbf{f * g}$?
Facciamo un esempio.

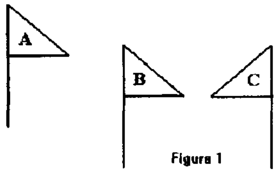


Figura 1

Consideriamo la bandierina **A** e trasformiamola con l'isometria **g**. Essa si trasforma nella bandierina **B**, cioè $\mathbf{B = g\,(A)}$.
Alla bandierina **B** applichiamo la isometria f trasformandola nella bandierina **C**, cioè $\mathbf{C = f\,(B)}$.
In conclusione: $\mathbf{C = f\,(B) = f\,(g\,(A))}$.
Ecco allora la definizione della operazione di prodotto tra isometrie:

$$\mathbf{f * g\,(F) = f\,(g\,(F))}.$$

In parole: l'isometria $\mathbf{f * g}$ consiste nell'applicare alla **F** prima la **g** e poi, al risultato, l'isometria f.
L'operazione che abbiamo definito è **associativa**, cioè : $\mathbf{(h * g) * f = h * (g * f)}$
Naturalmente anche nella famiglia delle isometrie c'è la mascotte: è **l'identita (id)** cioè la trasformazione che ad ogni punto **P** fa corrispondere lo stesso punto **P**.
In simboli: $\mathbf{f * id = id * f = f}$.
Infine ogni isometria ha una **sua inversa** che fa ritornare tutto "al punto di partenza".
Se **f** è una isometria, la sua inversa viene di solito indicata con $\mathbf{f^{-1}}$ (si legge "**f alla meno 1**").

In simboli: $\mathbf{f * f^{1} = f^{1} * f = id}$

La conclusione è: le isometrie (le similitudini) sono un gruppo rispetto all'operazione * di composizione.

Qui finisce il nostro discorso generale sulle grandi famiglie delle trasformazioni geometriche piane. Incominciamo ad indagare l'attività e la vita dei singoli personaggi della famiglia delle isometrie.

3.7 Simmetrie assiali

Sono certamente fra le isometrie più famigliari e semplici da rappresentare. E' facile infatti costruire figure simmetriche utilizzando specchi, piegature di fogli (macchie), forbici. Del resto la natura stessa offre numerosi esempi di "oggetti" dotati di assi di simmetria e spesso, fin dall'antichità, gli uomini si sono dilettati a dotare di elementi di simmetria le loro opere artistiche.

Sia **r** una retta ed α' e α'' i due semipiani di origine **r**.

Figura 1

Definizione

Si chiama **simmetria assiale** (o **ribaltamento**) di asse **r** l'isometria piana che ha queste caratteristiche:

1- lascia fissi tutti e soli i punti di **r** ;

2- trasforma α' in α'' e α'' in α';

3- applicata due volte dà l'identità.

Qualche commento.

- La simmetria di asse **r** di solito viene indicata col simbolo S_r.
- I punti della retta **r** sono punti **uniti** cioè ciascuno coincide con il proprio simmetrico.
- L'asse **r**, di conseguenza, è una retta **fissa, unita** cioè coincide con la propria simmetrica. Si dice anche che **r** è retta **unita** e di **punti uniti**. Questa frase lascia intravedere la possibilità che ci siano rette **unite** ma **non di punti uniti** (come le perpendicolari alla retta **r**).

- La proprietà **2**- ci fa capire perché la simmetria assiale si chiami anche ribaltamento.
  Bisogna, però, distinguere questo ribaltamento che avviene **esclusivamente** nel piano con lo scambio dei due semipiani, dal ribaltamento fisico degli oggetti che avviene nello spazio.

- La terza proprietà si esprime dicendo che la S_r è **involutoria** cioè $S_r * S_r = \mathbf{id}$.

- Osserviamo, anche, che lo studio dei punti e delle rette fisse in una isometria è importante perché serve per caratterizzare i vari tipi di isometrie. La simmetria assiale è **l'unica** isometria che ha una retta di punti fissi.

I programmi prevedono di classificare triangoli e quadrilateri in base ai loro assi di simmetria.
Tenendo presente che una figura possiede un asse di simmetria se nella simmetria rispetto a questo asse la figura si trasforma in se stessa, la classificazione è presto fatta.

- **Triangoli scaleni:** non hanno alcun asse di simmetria. Quindi hanno tre lati e tre angoli diversi. (Fig. 2)

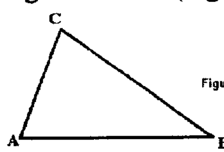


Figura 2

- **Triangoli isosceli:** hanno un asse di simmetria. Quindi hanno due lati e due angoli congruenti.
  Dicendo "un" asse di simmetria si intende dire almeno uno. (Fig. 3)

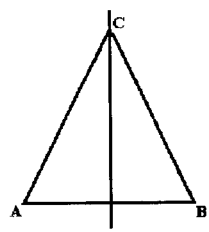


Figura 3

- **Triangoli equilateri:** hanno tre assi di simmetria. Quindi hanno tre lati e tre angoli congruenti. Ne deriva che i triangoli equilateri sono anche isosceli. (Fig. 4)

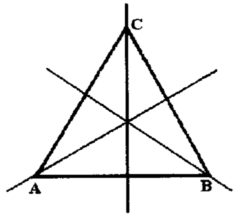


Figura 4

Il numero degli assi di simmetria può essere assunto anche come una definizione dei vari tipi di triangolo. Si tratta di definizioni semplici, operative, immediatamente verificabili (basta fare delle piegature), quindi preferibili dal punto di vista didattico.
Per i quadrangoli la situazione è un po' più complessa, ma egualmente dominabile.
Se ci limitiamo a quelli convessi possiamo dire che:

- I **quadrangoli generici** ed i **parallelogrammi** non hanno alcun asse di simmetria. (Fig. 5)

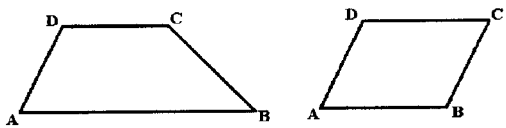


Figura 5

- Il **trapezio isoscele** ed il **deltoide** hanno un asse di simmetria, ma in posizione diversa perché mentre nel primo l'asse passa per i punti medi dei due lati paralleli, nel secondo passa per due vertici opposti. (Fig. 6)

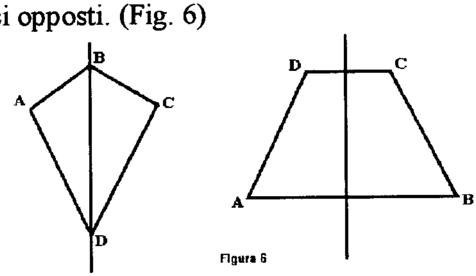


Figura 6

- Il **rettangolo** ed il **rombo** hanno due assi di simmetria, ma in posizione diversa come risulta evidente dalle figure. (Fig. 7)

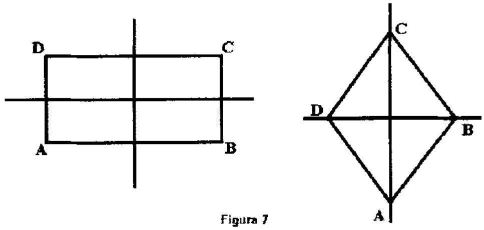


Figura 7

- Infine il **quadrato** ha quattro assi di simmetria. Per come sono questi assi possiamo dire che il quadrato è anche rombo, rettangolo, deltoide e trapezio isoscele. (Fig. 8)

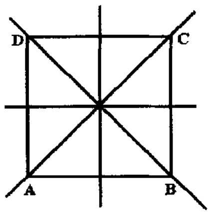


Figura 8

Dall'esistenza, dal numero e dalla posizione degli assi si traggono immediatamente le conseguenze per quanto riguarda le congruenze di lati e di angoli.
Il caso del triangolo equilatero (3 assi passanti per i vertici) e del quadrato (4 assi di cui 2 passanti per i vertici e 2 per i punti medi dei lati opposti) lascia intuire chiaramente che cosa succede negli altri poligoni regolari come pentagono, esagono, ecc..
Tutti hanno un numero di assi di simmetria pari al numero **n** di lati; quando **n** è dispari gli assi passano tutti per i vertici (come nel triangolo), quando **n** è pari metà passano per i vertici e metà no.
Quando **n** è dispari il punto di incontro degli assi è il centro delle rotazioni che trasformano in sé il poligono regolare, ma non è centro di simmetria; quando **n** è pari esso è anche centro di simmetria (si veda il paragrafo sulle rotazioni).

3.8 Traslazioni

Quando facciamo strisciare su un tavolo un oggetto rigido, per

esempio un cubo di legno, lo sottoponiamo ad una traslazione.
Se osserviamo attentamente ciò che succede, ci accorgiamo che i punti (per esempio vertici) si muovono su rette parallele e che le rette (per esempio gli spigoli) si trasformano in rette parallele.
Per convincersene basta disegnare su un foglio la posizione iniziale e quella finale della faccia appoggiata al tavolo. (Fig. 9)

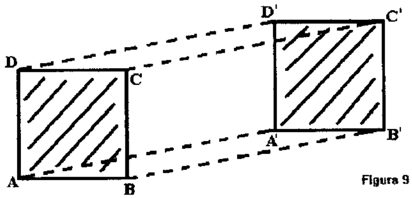


Figura 9

Abbiamo tutti gli elementi per fare l'identikit della traslazione.
Definiamo **traslazione** l'isometria nella quale:

- i punti si spostano tutti nella stessa direzione (si chiama la direzione della traslazione),
- le rette si trasformano in rette parallele.

Anche se può sembrare strano fra le traslazioni bisogna annoverare l'identità, che lascia tutto fermo, perché ne verifica la definizione.
In una traslazione, diversa dall'identità, non ci sono punti fissi, mentre sono fisse globalmente le rette che hanno la direzione della traslazione.

Per concludere diciamo che le traslazioni formano un **gruppo commutativo** (perché nel loro mondo l'operazione di prodotto è commutativa).

3.9 Rotazioni

Osserviamo gli spostamenti di alcuni oggetti della realtà che ci circonda:

- le lancette di un orologio ;
- il volante di un'automobile;
- la ruota panoramica di una giostra.

Se analizziamo le posizioni iniziali e finali in un dato intervallo di tempo, possiamo fare le seguenti osservazioni:

1. nello spostamento le distanze tra coppie di "punti" rimangono invariate;
2. c'è un punto che rimane fisso.

Abbiamo allora tutti gli elementi per definire una **rotazione**.
Una rotazione è un'isometria che è l'identità o ha un solo punto unito (il centro della rotazione).
L'identità viene inclusa tra le rotazioni per poter fornire le rotazioni, di dato centro, della struttura di gruppo, come avremo modo di vedere.

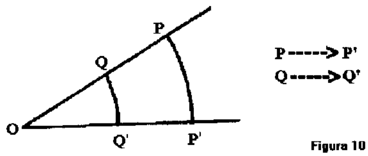


Figura 10

In una rotazione non identica non vi sono elementi uniti oltre al centro, a meno che non si tratti di un particolare tipo di rotazione chiamato **simmetria centrale**.
In essa i punti **P** e **P'** corrispondenti sono allineati con il centro **0**, equidistanti da esso, e si trovano, su semirette opposte rispetto ad **0**. (Fig. 11)

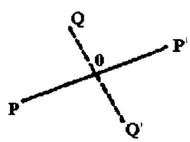


Figura 11

Le simmetrie centrali hanno due proprietà molto interessanti.
La prima è che le rette passanti per il centro **0** (si chiama anche **polo**) sono unite globalmente, non punto per punto.
La seconda, che le fa "assomigliare" alle traslazioni, è questa: una retta si trasforma in una retta ad essa parallela.

Possiamo utilizzare la simmetria centrale per dare la definizione di **parallelogrammo**: un quadrilatero **ABCD** è un parallelogrammo se esiste una simmetria centrale che scambia fra di loro **A** e **C** e **B** e **D**. (Fig. 12)

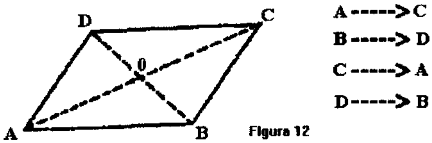


Figura 12

- $D\hat{A}B = D\hat{C}B$; $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ (angoli opposti paralleli)
- $AO = OC$; $DO = OB$ (le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà).

Concludiamo osservando che le rotazioni di assegnato centro formano un **gruppo commutativo**.

3.10 Glissosimmetrie

Il vocabolo glissosimmetria deriva dall'inglese "glide reflexion" e viene a volte sostituito con il termine "antitraslazione".
E' la meno nota delle isometrie e non è nominata nei N.P.; anche nella realtà raramente capita di eseguire glissosimmetrie.
Per farcene un'idea possiamo pensare a un cubo di legno che prima viene fatto strisciare su un tavolo e poi ribaltato rispetto a una retta parallela alla traslazione.
Nella scuola elementare può benissimo essere ignorata questa trasformazione geometrica, ma ne parliamo per dovere di completezza.

- Una **glissosimmetria** è una isometria che si ottiene come prodotto di una traslazione per una simmetria assiale il cui asse ha la stessa direzione della traslazione.

Ecco un disegno raffigurante una glissosimmetria: (Fig. 13)

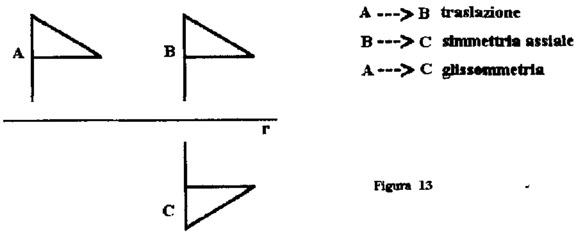


Figura 13

In una glissosimmetria non ci sono punti fissi e c'è un'unica retta globalmente unita: la retta r, chiamata anche "direttrice della glissosimmetria".

3.11 Isometrie e Simmetrie Assiali

Le quattro famiglie di isometrie che abbiamo esaminato esauriscono tutto il mondo delle isometrie piane come ci assicura il seguente

Teorema
Ogni isometria piana o è una simmetria assiale o è prodotto, al più, di tre simmetrie assiali.

Precisiamo.
Il prodotto di 2 simmetrie assiali è una **traslazione** se gli assi sono paralleli; è una **rotazione** se gli assi sono incidenti.
Il prodotto di 3 simmetrie assiali è sempre una **glissosimmetria**.
Saremmo tentati di dire che nel mondo delle isometrie piane le simmetrie assiali hanno la funzione di "regine madri".

Bibliografia

1- **M. Ferrari**, *Geometria e misura nei nuovi programmi di matematica per la scuola elementare*, "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate", vol. 10 n° 1 gennaio 1987, pag. 5-30.

2- **AA. VV.**, *Aggiornarsi secondo i programmi della scuola elementare: teoria e didattica*. Quaderno n° 2; Geometria, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

3- **F. Rohr, L. Ragusa, I. Sacchetti**, *Geometria dall'esperienza e dal gioco*, vol. 1 e 2, Giunti e Lisciani Editori.

4- **C. Bernardi, N. Cannizzano, N. Lanciano, P. Mentasti** (a cura di), *Geometria*, La Nuova Italia.

5- **AA. VV.**, *Geometria in Città*, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

ESPERIENZE NELLA DIDATTICA DELLA GEOMETRIA

Paolo Boero

Dipartimento di Matematica - Università di Genova

Premessa. Le esperienze descritte sono state condotte nell'ambito del Progetto "Bambini, maestri, realtà", le cui caratteristiche salienti sono: insegnamento "contestualizzato" della matematica, fino al lavoro sui concetti e sulle tecniche costruite (che da "strumenti risolutivi di problemi" diventano "oggetti di studio"); sviluppo integrato e coordinato di abilità in ambiti diversi (non solo matematico e scientifico-tecnologico, ma anche storico e soprattutto linguistico); centralità del compito dell'insegnante come "mediatore culturale".

La situazione attuale del Progetto è quella di un "ambiente di ricerca" in cui la collaborazione tra insegnanti-ricercatori e universitari mira alla produzione di conoscenze sui processi di insegnamento-apprendimento della matematica nella scuola elementare. L'obiettivo di fondo non è solo il miglioramento del progetto e non è la sua diffusione nelle scuole, ma è l'ottenimento di risultati scientifici da "spendere" nell'aggiornamento e nella formazione iniziale degli insegnanti

1. LA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO FISICO

La "rappresentazione dello spazio fisico" è considerata, nei vigenti programmi della scuola elementare e della scuola media, come attività di base per l'approccio alla geometria. Le esperienze condotte nell'ambito del Progetto "Bambini, maestri, realtà" confermano la produttività di tale indicazione e consentono di coglierne diverse potenzialità per lo sviluppo intellettuale del bambino. Considererò tre aspetti della rappresentazione dello spazio fisico, avvertendo che essi sono solo aspetti parziali di una problematica assai complessa sia dal punto di vista cognitivo che dal punto di vista geometrico.

1.1. Rappresentazione verbale. Si tratta di rappresentare verbalmente (con un lessico sempre più preciso) posizioni, relazioni e situazioni dello spazio fisico, come in questa ricostruzione verbale di un percorso ad anello effettuato attorno all'edificio scolastico (secondo quadrimestre della classe II). La verbalizzazione è la seconda prodotta da un bambino di livello alto; essa è stata preceduta da una ricognizione del percorso da parte della classe, dopo le difficoltà incontrate da tutti i bambini nella prima verbalizzazione: "*Dopo l'uscita siamo andati a destra fino al giornalaio, poi, senza attraversare la strada, siamo ancora andati a destra, diritto, attraversando anche due strade senza traffico, fino alla circonvallazione. Lì ci siamo fermati e abbiamo osservato come funzionava il semaforo. Poi siamo ancora andati a destra, lungo il marciapiede della circonvallazione, fino alla fine del cancello del Polisportivo. Abbiamo svoltato a destra e, arrivati alla farmacia, siamo andati a sinistra girando poi intorno alla chiesa, fino a quando non siamo tornati sulla strada della scuola*".

In questo caso la rappresentazione verbale è funzionale alla messa in ordine delle immagini richiamate via via dalla memoria. Si tratta di una attività importante ai fini dello sviluppo del controllo dei propri processi di pensiero!

1.2. Rappresentazione grafica. Si tratta di rappresentare sul foglio (bidimensionale) oggetti e situazioni dello spazio fisico (tridimensionale). E' noto che nelle culture antiche il problema della perdita della terza dimensione e della necessità, comunque, di rappresentare la "profondità" è stato risolto in modi diversi (ad esempio ripetendo uno stesso oggetto in grandezza diversa, oppure tracciando contorni più sfumati per gli oggetti più lontani). Solo nel Rinascimento i pittori e gli architetti hanno trovato, attraverso la rappresentazione prospettica, un sistema efficiente per dare il senso della profondità e insieme rispettare quello che vede il nostro occhio. Questa premessa di natura storica mi sembra utile per sottolineare il fatto che la rappresentazione grafica di oggetti, relazioni e situazioni spaziali "come le vediamo" non è affatto scontata e costituisce una grossa sfida intellettuale per il bambino (anche se oggi la famigliarità con le fotografie costituisce, rispetto all'antichità, un elemento di novità importante che favorisce l'approccio spontaneo a forme ingenue di rappresentazione "in prospettiva"). In Italia disponiamo di un percorso didattico ben strutturato sulla rappresentazione prospettica nella scuola elementare, messo a punto dal Gruppo di Ricerca Didattica di Modena (Bartolini Bussi et al., 1995): partendo dalla rappresentazione di oggetti e dalle riflessioni sul "punto di vista" (problematica che immediatamente scaturisce dai confronti delle rappresentazioni diverse prodotte dai bambini) è possibile gradualmente pervenire all'individuazione di "regole di rappresentazione" generali, utili per migliorare progressivamente le rappresentazioni realizzate.

1.3. Rappresentazione dello spazio e geometria (anzi, geometrie). L'attività di rappresentazione di oggetti, relazioni e situazioni spaziali chiama in causa sia figure geometriche (segmento, retta, triangolo...)

che relazioni (come il parallelismo tra due rette) e proprietà oggetto di studio nella geometria. Rinviando alla quarta parte dell'esposizione la discussione di quanta geometria vi sia nelle diverse attività illustrate in questo testo, vorrei evidenziare il fatto che nella rappresentazione di oggetti, relazioni e situazioni spaziali si pongono le premesse per sviluppare due diverse geometrie (la geometria "metrica", che modellizza lo spazio "come è", indipendentemente dal punto di vista; e la geometria "proiettiva", che corrisponde al tentativo di modellizzare lo spazio "come lo vediamo"). Consideriamo in particolare il parallelismo di due "rette": quando i bambini rappresentano il parallelismo (delle ombre del Sole - vedi 3.1; ma anche di un binario del treno o di un tratto rettilineo di autostrada) possono, se opportunamente guidati dall'insegnante, cogliere il contrasto tra quello che disegnano (con le "regole del disegno" che via via si precisano) e le proprietà della figura rappresentata (conservazione della distanza, ecc.). La maturazione di questa coscienza può avvenire già nella scuola elementare attraverso l'esplicitazione delle "regole" e la costruzione di embrioni di "teoria della rappresentazione prospettica". Un esempio assai interessante ci viene ancora dal Gruppo di Ricerca Didattica di Modena (Bartolini Bussi, 1996; Bartolini Bussi et al., 1995): nell'itinerario didattico sulla rappresentazione dello spazio visibile, iniziato in I, i bambini gradualmente arrivano in IV (sotto la guida dell'insegnante) a individuare gli "invarianti" della rappresentazione e ad esprimerli in termini geometrici (in particolare: "*rette vanno in rette*" e "*si conserva l'appartenenza di un punto a una retta*"). La situazione è matura per poter affrontare il seguente problema:

"*Disegna la pallina al centro del tavolo, e giustifica la tua soluzione - cioè spiega perchè il punto trovato è proprio il centro del tavolo*"

Parecchi bambini riescono a disegnare la pallina nel punto di incontro delle diagonali del quadrilatero che rappresenta la parte superiore del tavolo ed a fornire giustificazioni di questo tipo: "*Sappiamo che rette vanno in rette e se un punto appartiene a una retta, lo stesso deve succedere anche nel disegno in prospettiva; allora le diagonali del tavolo, che si incontrano nel centro del tavolo, si incontreranno nel centro del tavolo anche nel disegno in prospettiva*". La presenza di bambini che cercano di risolvere il problema con delle misurazioni (ad esempio unendo i punti medi dei lati opposti) può consentire, nella discussione che segue, di mettere a fuoco importanti differenze tra le figure "quali sono" e le figure "come vengono disegnate in prospettiva" (non conservazione dell'uguaglianza delle distanze).

1.4. Rappresentare lo spazio: diversi spazi. Per quanto riguarda le attività descritte nei paragrafi precedenti è opportuno distinguere tra rappresentazione di oggetti, rappresentazione di ambienti, rappresentazione di percorsi e situazioni spaziali non accessibili a una visione d'insieme. Le ricerche condotte da G. Brousseau e poi riprese e approfondite da R. Berthelot e M. H. Salin nel loro lavoro di tesi (vedi Berthelot et Salin, 1992) hanno chiarito la natura diversa della padronanza del micro-spazio (quello degli oggetti manipolabili), del meso-spazio (quello degli ambienti che possono essere dominati con lo sguardo), del macro-spazio (che sfugge a una visione d'insieme). Il nostro lavoro di ricerca sulla rappresentazione dello spazio fisico ha messo in evidenza vari aspetti interessanti di questa diversità, in particolare per quanto riguarda le potenzialità formative delle attività di rappresentazione nei tre casi.

In particolare abbiamo rilevato che nel caso degli oggetti manipolabili la difficoltà maggiore consiste nel tenere sotto controllo il rapporto tra le conoscenze che i bambini hanno dell'oggetto da rappresentare e ciò che vedono (o possono vedere, nel caso l'oggetto sia solo evocato). Tutti gli insegnanti possono constatare come nel disegno di una scatola da scarpe i bambini tendono a disegnare più facce di quelle che effettivamente vedono (o possono vedere).

Nel caso della rappresentazione degli ambienti la difficoltà maggiore consiste nella scelta e nel mantenimento di un unico punto di vista. Ad esempio se la consegna è quella di disegnare il corridoio della scuola (i bambini escono dall'aula, osservano l'ambiente da rappresentare e poi rientrano in classe per disegnarlo) abbiamo rilevato con una certa frequenza la sovrapposizione, in un unico disegno, di ciò che si vedrebbe da punti di vista diversi. Il bambino deve quindi imparare a disciplinare la sua immaginazione. Si ripresenta (con caratteristiche diverse) anche la tendenza a rappresentare certi particolari dell'ambiente "come sono" e non "come si vedono" (frequenti, nel disegno del corridoio, sono le porte delle aule rettangolari, con conseguente necessità di disegnarle coricate). Il superamento di tali difficoltà richiede che il bambino disciplini il rapporto tra esperienza visiva e conoscenza.

Nel caso della rappresentazione di situazioni del macro-spazio (ad esempio, ricostruzione di percorsi) si manifestano soprattutto difficoltà di organizzazione logica e/o temporale che richiedono il controllo e la gestione delle tracce di memoria. In generale il pensiero deve ricostruire una visione d'insieme a partire da informazioni separate.

2. LA MISURA

La trattazione estesa del tema "misura" nel quadro di un ciclo di lezioni sull'insegnamento-apprendimento della geometria si giustifica sulla base di due considerazioni: la geometria (come del resto indica l'etimologia del termine) ha a che fare con la misura delle grandezze fin dalle sue origini nelle civiltà antiche; d'altra parte i programmi vigenti danno rilievo alla misura delle grandezze geometriche. Detto ciò si deve però rilevare che il tema "misura" non può essere confinato all'interno della geometria: importanti competenze aritmetiche intervengono a livello operativo nella scrittura, nella lettura, nella trasformazione e nell'uso delle misure e possono a loro volta essere potenziate attraverso tali attività. Vediamo ora alcune tappe a mio avviso significative del lavoro sulle misure delle grandezze geometriche. Si tratta di situazioni didattiche ormai estesamente sperimentate dagli insegnanti che lavorano al progetto "Bambini, maestri, realtà", attraverso le quali matura progressivamente il concetto di misura e insieme si affinano gli altri concetti (geometrici e aritmetici) in gioco.

2.1. Additività della misura delle lunghezze nel primo quadrimestre della classe II. I bambini hanno imparato, in I, a leggere le temperature del termometro (come "gradi" raggiunti dalla colonnina del mercurio sulla scala graduata) e a riportare le temperature sui termometri disegnati. All'inizio della seconda hanno imparato a misurare, con il righello, lunghezze entro la misura del righello (in particolare, per seguire l'accrescimento delle piantine coltivate in classe); hanno imparato anche a misurare, con il doppio metro, lunghezze entro la misura dello strumento (in particolare nel caso delle loro stature) e a costruire segmenti di misura assegnata (sempre entro la misura dello strumento).

In dicembre - gennaio della classe II viene proposta la seguente situazione problematica:

"*La pianta-campione della classe II B ha raggiunto l'altezza di 21 cm, misurata dalla maestra con il metro. Come avranno fatto i bambini della II B a disegnare tale pianta sui loro quadernoni con i loro righelli che sono lunghi solo 16 cm?*"

I bambini hanno a disposizione dei fogli bianchi (formato A4) e delle squadrette (con scala graduata in cm e mm lunga 16 cm). Naturalmente, i bambini devono essere abituati a scrivere i loro ragionamenti ed i loro progetti.

La consegna ha lo scopo di attivare il "teorema in atto" (Vergnaud, 1990) dell'additività della misura delle lunghezze. In effetti molti bambini (da un terzo a due terzi, a seconda del livello della classe) riescono da soli e con strategie diverse a superare la limitazione dello strumento di misura: c'è chi scopre che basta aggiungere un segmento di 5 cm al segmento di 16 cm che può essere disegnato con la squadretta (*"avranno cominciato a disegnare un segmento di 16 cm e poi avranno aggiunto un altro segmento di 5 cm"*), c'è chi prolunga il segmento di 16 cm disegnato con la squadretta spostando la squadretta verso destra e poi si rende conto che basta mettere lo 0 del righello sull'estremo destro del segmento e segnare 17 in corrispondenza di 1, 18 in corrispondenza di 2... fino a 21 in corrispondenza di 5. C'è chi lavora prima in campo aritmetico scrivendo: 21=16+5 e poi trasferisce tale risultato in campo geometrico (*"21 è come 16+5; se 21 sono 21 cm, posso disegnare una linea di 16 cm e poi una linea di 5 cm e farà 21 cm"*). C'è, al contrario, chi opera inizialmente in campo geometrico, disegnando (con il lato più lungo della squadretta) un segmento su cui vengono riportati i numeri del righello (o solo lo 0 e il 16) e poi appoggiandosi alla scala graduata vengono segnati ogni cm i numeri 17, 18, 19, 20 e 21. Strategie analoghe si possono ottenere dai bambini inizialmente "bloccati" con qualche suggerimento da parte dell'insegnante (preferiamo suggerimenti scritti individuali, in modo da evitare di condizionare gli altri bambini: *"prolunga la linea a destra"*; e se non basta tale suggerimento, una volta che il bambino ha effettivamente prolungato la linea: *"di quanto devi prolungare la linea di 16 cm per ottenere 21 cm?"*). Gli esempi di strategie prima considerati mettono in evidenza il fatto che la proprietà additiva della misura delle lunghezze è alla portata dell'iniziativa autonoma di una parte dei bambini (vedi in particolare il primo e il terzo caso), grazie anche al supporto importante del righello e alla formulazione della consegna (che incoraggia i bambini con il riferimento alla classe parallela e al fatto che loro ci sono riusciti...). Altri bambini (in particolare, il secondo e l'ultimo) riescono a risolvere il problema ma senza manifestare la consapevolezza del fatto che la misura di 21 cm si può realizzare giustapponendo un segmento di 16 cm ed un segmento di 5 cm. Il confronto e la discussione (opportunamente guidata dall'insegnante) di alcune delle strategie prodotte dai bambini può servire per mettere in evidenza le relazioni tra il quadro aritmetico (21=16+5) e il quadro geometrico (segmenti giustapposti di 16 e di 5 cm rispettivamente che danno luogo ad un segmento di 21 cm).

Attività successive (di misura di segmenti e di costruzione di segmenti al di là della misura dello strumento disponibile) consentono di accertare il diffondersi rapido, nella classe, della padronanza operativa della proprietà additiva della misura delle lunghezze.

2.2. La misura delle ampiezze degli angoli. Siamo ormai arrivati in IV. I bambini hanno imparato a lavorare speditamente con le misure di lunghezza (anche in situazioni di riduzione in scala, ad esempio delle loro stature), hanno anche imparato (nel secondo quadrimestre della classe III) a usare la virgola per esprimere "*5 cm e 7 mm*" e anche "*1 m e 5 cm*". In III hanno cominciato attività di osservazione, descrizione (grafica e verbale), previsione sul fenomeno delle ombre del Sole, con molte situazioni ludiche e alcune attività di misurazione delle lunghezze e di riporto di tali lunghezze, in scala, sul loro quadernone. All'inizio della IV è stato introdotto lo strumento più importante per lo studio del fenomeno delle ombre del Sole - una tavoletta, che viene disposta orizzontalmente sul terreno, nella quale è piantato perpendicolarmente un chiodo, di diametro e altezza diversa da tavoletta a tavoletta (altezze comunque comprese tra 5 e 12 cm). Un foglio di carta viene fissato (ogni giorno in cui vengono compiute osservazioni) alla tavoletta con delle puntine da disegno o del nastro adesivo. Sui fogli vengono riportate all'incirca ogni mese le ombre rilevate ogni ora: si ottengono così i "ventagli" delle ombre di ottobre, novembre, dicembre... L'approccio al concetto di angolo può avvenire con situazioni diverse, in particolare con la riduzione in scala di uno dei ventagli delle ombre, in modo da farlo stare sul quadernone. I bambini risolvono il problema in vari modi (i primi due possono essere distinti solo grazie alla verbalizzazione del ragionamento seguito, in quanto il risultato grafico è sostanzialmente lo stesso):

I) tutte le lunghezze vengono divise a metà, non solo quelle delle ombre, ma anche quella "*del tratto che c'è tra le punte delle ombre*"; ovviamente il riporto di quest'ultima misura sul quadernone risulta piuttosto approssimativo, in quanto i bambini non sanno ancora utilizzare il compasso per questo tipo di costruzioni geometriche. Da parecchie interviste effettuate ci sembra che i bambini che procedono in questo modo rivolgano la loro attenzione al ventaglio delle ombre come "*disegno da ridurre in modo da farlo stare sul foglio*", trascurandone il carattere di modello di un fenomeno naturale;

II) le lunghezze delle ombre vengono ridotte a metà, mentre le "*ampiezze tra le ombre*" vengono conservate "*perchè se no si perde la direzione delle ombre*", "*perchè le ombre devono ruotare in un certo modo tra un'ora e l'altra*", ecc. Anche in questo caso la realizzazione pratica della conservazione dell'angolo è piuttosto approssimativa in quanto i bambini non conoscono ancora il goniometro e quindi sono costretti a utilizzare fogli di carta piegati o altri artifici, oppure a ridurre a metà la distanza tra "*le punte delle ombre*". Dalle interviste effettuate (e anche dai testi: vedi esempi precedenti) risulta chiaramente che la considerazione del fenomeno delle ombre guida la scelta di conservare le ampiezze degli angoli tra le ombre;

III) sia le lunghezze delle ombre che le ampiezze degli angoli vengono ridotte a metà. Si tratta di una soluzione proposta da pochi bambini, tanto è vero che occorre a volte ricorrere a "*un bambino di un'altra classe*" per l'attività successiva.

Una volta che i bambini hanno prodotto i loro testi e i loro disegni è opportuno che l'insegnante proponga a tutta la classe di eseguire la riduzione del ventaglio delle ombre secondo la terza strategia e poi di scrivere la loro opinione su tale strategia come tappe preliminari per una discussione in classe sulle diverse strategie (se ci sono bambini che hanno prodotto la terza strategia si può loro proporre di eseguire la riduzione seguendo il ragionamento del secondo gruppo). In effetti ci siamo resi conto del fatto che mentre i bambini che hanno prodotto la seconda strategia reagiscono in modo sicuro *("riducendo a metà gli angoli si perdono le direzioni" "... si perde il tempo" "... il ventaglio rimpicciolito non ha più niente in comune con il ventaglio fatto dal Sole")* una parte dei bambini del primo gruppo accetta la terza strategia come "*più giusta*". Ai fini della discussione successiva è però interessante il fatto che altri bambini del primo gruppo (e anche qualcuno del secondo) reagiscono osservando che "*non si conserva la forma*".

Durante la discussione che segue non è difficile per l'insegnante valorizzare le motivazioni legate alla conservazione delle direzioni, alla conservazione dei tempi (significato "dinamico" dell'angolo) e alla conservazione della forma (significato "statico" dell'angolo). E' bene tuttavia insistere sul fatto che si tratta di motivazioni legate all'utilità di una pratica convenzionale: potremmo anche decidere di dividere sia le lunghezze delle ombre che le ampiezze degli angoli a metà, il nuovo ventaglio sarebbe poco "espressivo" come rappresentazione del fenomeno... ma ricordando la convenzione seguita sarebbe ancora possibile risalire dal ventaglio ridotto al ventaglio "vero" (quindi, non ci sarebbe perdita di informazioni!)

Si può partire dalle idee emerse nella discussione per proporre altri esempi di rotazioni e di ampiezze di rotazione, e poi porre il problema della misura dell'ampiezza delle rotazioni fino ad arrivare al quarto di giro, al mezzo giro, ecc. e infine alle misure convenzionali con il goniometro (misure in gradi sessagesimali e poi, osservando la doppia scala del goniometro, in gradi centesimali - l'angolo retto è di 100 "gradi centesimali").

Quando i bambini hanno acquisito una sufficiente esperienza di misurazione degli angoli con il goniometro e di costruzione di angoli di misura data è bene proporre la seguente consegna: "*Immagina che un tuo compagno di classe sia stato assente nell'ultima settimana, quando abbiamo imparato a misurare gli angoli con il goniometro. Scrivi una lettera per spiegargli come si fa, in modo che possa farlo da solo*". L'attività proposta è utile per due motivi:

- si presta alla produzione di un testo interessante dal punto di vista algoritmico (*"algoritmo non numerico"*, nel testo dei programmi vigenti): i bambini devono cogliere l'alternativa presente nel procedimento di misura (lati più lunghi del raggio del goniometro) ed esprimerla in modo adeguato *("se i lati sono più lunghi del raggio del goniometro... altrimenti...);*

- si presta all'arricchimento del lessico geometrico: molti bambini si troveranno impacciati nel parlare del *"punto dove si incontrano le due linee dell'angolo"*, di *"linea più corta del tratto tra il centro del goniometro e la corona";* può essere una occasione per introdurre (o per valorizzare) l'uso di termini importanti del lessico geometrico (come *"vertice dell'angolo"*, *"lati dell'angolo"*, *"raggio del cerchio"*, ecc.).

2.3. Moltiplicazione tra i numeri decimali, area .... e proprietà di alcune figure geometriche. Abbiamo gradualmente messo a punto, nel nostro Progetto, un percorso didattico per la classe V in cui si intrecciano e si sostengono a vicenda apprendimenti in campo aritmetico (riguardanti la moltiplicazione tra numeri decimali e la padronanza di numeri "grossi") e in campo geometrico (riguardanti il concetto di area e le proprietà di alcune figure geometriche - in particolare, la "rigidità" del triangolo confrontata con la "non rigidità" dei quadrilateri).

Alla fine della classe IV i bambini hanno realizzato un duplice approccio al concetto di area: in situazioni non matematiche (studio di semplici questioni di geografia economica) e attraverso un percorso su scheda. All'inizio della classe V i bambini affrontano il problema del calcolo dell'area di un rettangolo di 0,3 dm di base e di 0,2 dm di altezza, ricavato all'interno di un quadrato di 1 dm di lato su un foglio di carta millimetrata (supporto che i bambini conoscono già perchè utilizzato a partire dal secondo quadrimestre della classe III per il tracciamento di grafici).

"tre decimi per due decimi...": si tratta di un punto assai impegnativo di una qualsiasi programmazione didattica. In particolare si può decidere di "insegnare la regola": *"decimi per decimi fa centesimi"*, eventualmente affiancandola alla regola per calcolare il prodotto di due frazioni; oppure di procedere in modo ancor più convenzionale (*"si trasformano i decimali in numeri interi spostando la virgola verso destra, si effettua la moltiplicazione degli interi ottenuti, e poi si posiziona la virgola con uno spostamento verso sinistra uguale a quello ottenuto sommando gli spostamenti nei due fattori":* regola dettata da una maestra ai suoi alunni). Questi approcci alla moltiplicazione tra numeri decimali (come molti altri) non riescono in realtà a fornire un riferimento semanticamente pregnante per le "regole da seguire": l'approccio apparentemente più "significativo" (che fa riferimento alle

frazioni) in realtà "scarica" sulla regola di calcolo del prodotto tra due frazioni (non motivata!) la regola di calcolo del prodotto tra 0.2 e 0.3.

Il riferimento al calcolo dell'area di un rettangolo fornisce un riferimento forte e preciso per la regola ("decimi per decimi fa centesimi"): l'area del rettangolo che ha per base 3 decimi di decimetro e per altezza 2 decimi di decimetro è di 6 centimetri quadrati, cioè 6 centesimi del quadrato di lato 1 dm). A rigore non si tratta nemmeno in questo caso di una giustificazione rigorosa, ma solo di un "modello"; tuttavia tale "modello" non è a sua volta oggetto di convenzioni (come nel caso delle frazioni), ma "*funziona così*" perchè "*si vede*" (come si esprimono i bambini). La geometria serve quindi per offrire un riferimento sicuro a una regola di calcolo aritmetico.

Proseguendo nell'itinerario didattico sulle aree, si perviene infine al seguente problema (proponibile verso la fine del primo quadrimestre della classe V): "*Trovare un valore approssimato dell'area del Portogallo mediante ricoprimento con triangoli della superficie del Portogallo. La cartina è in scala 1:2.000.000*". Effettuato un ricoprimento con triangoli e tracciata una altezza per ogni triangolo, l'alunno deve effettuare le misurazioni (delle basi e delle altezze dei triangoli), esprimere le misure con numeri decimali, moltiplicarle per la scala, trasformare le misure "vere" così ottenute in km, e infine calcolare e sommare le aree dei triangoli che si immagina coprano la superficie (vera) del Portogallo. Alternativamente, potrebbe calcolare l'area dei triangoli disegnati sulla cartina e poi moltiplicare per il quadrato della scala e infine trasformare i cmq ottenuti in kmq, ma questo procedimento risulta di non facile comprensione.

Quali acquisizioni concettuali e tecniche rendono possibile la risoluzione autonoma di questo problema? Quali sviluppi ulteriori sono possibili? Intanto, i bambini si devono essere resi conto che il ricoprimento con triangoli è quasi sempre il più efficiente: si riesce ad aderire bene alla superficie considerata con costruzioni facili da realizzare. Il triangolo è una figura facile da disegnare, mentre il rettangolo richiede una grande cura, sul foglio di carta bianco, per controllare la perpendicolarità dei lati - non basta che i lati opposti siano uguali! E questo dipende dal fatto che i quadrilateri non sono rigidi, ma possono assumere forme diverse a parità di lunghezze dei lati. Un bambino scrive: "*Con i rettangoli devo controllare quattro volte la perpendicolarità per ogni figura, mentre con i triangoli basta costruire una altezza perpendicolare per ogni figura*". Inoltre, i bambini devono avere imparato gradualmente a "compensare" porzioni di figura che "*escono fuori dalla triangolazione*" con pezzi che non appartengono alla figura e che "*sono sotto la triangolazione*", e ciò comporta l'interiorizzazione di un aspetto importante del concetto di area. Infine, i bambini devono essere padroni dei calcoli con numeri "grossi" e delle cosidette "equivalenze".

Tra gli sviluppi ulteriori, nelle classi che sperimentano il nostro Progetto si privilegiano uno sviluppo legato alla statistica elementare (valutazione dell'errore assoluto e dell'errore relativo rispetto ai dati "ufficiali" relativi alle regioni geografiche considerate) e uno sviluppo in campo geometrico (costruzione delle formule per il calcolo delle aree di alcune figure geometriche, attraverso la loro scomposizione in triangoli: trapezio, rombo, esagono).

3. LA COSTRUZIONE DEI CONCETTI DELLA GEOMETRIA

Nelle parti precedenti di questo testo abbiamo già visto, incidentalmente, come alcune attività sulla rappresentazione piana di oggetti e situazioni dello spazio e alcune attività sulla misura contribuiscano alla costruzione e alla padronanza dei concetti della geometria (ad esempio nel caso delle attività ora descritte sulla misura delle superfici geografiche). Per approfondire il tema della concettualizzazione in geometria è necessario precisare che cosa si intende per "concetto". Seguendo il lavoro teorico di Vergnaud (1990) possiamo dire che un concetto è costituito da:

- un insieme di situazioni di riferimento (che assicurano l'applicabilità del concetto a situazioni analoghe);
- un insieme di "invarianti operatori", in particolare di "schemi" (cioè di "comportamenti invarianti per una classe di situazioni simili"): gli invarianti operatori assicurano la padronanza "operativa" del concetto;
- un insieme di "rappresentazioni linguistiche", che consentono di descrivere il concetto, di comunicarlo, di farne oggetto di riflessione.

Naturalmente, le tre componenti della padronanza di un concetto sono soggette ad evoluzione nella vita di ogni persona (via via vengono esperite nuove situazioni di riferimento, via via si formano nuovi schemi, via via il linguaggio specifico si arricchisce...).

La definizione di Vergnaud mi sembra importante per l'insegnante in quanto consente di tenere sotto controllo (nell'insegnamento e nella verifica dell'apprendimento) le varie "componenti" della padronanza di un concetto. Spesso accade che tale padronanza sia solo parziale: possono non essersi ancora formati schemi adeguati (e allora l'alunno è molto impacciato nella risoluzione dei problemi in quanto manca delle tecniche operative necessarie), oppure possono mancare le situazioni di riferimento (e allora l'alunno non sa fare un uso autonomo del concetto anche se sa recitarne una definizione e se sa svolgere degli esercizi di routine che lo riguardano).

Nel progetto "Bambini, maestri, realtà" l'attività di costruzione concettuale si svolge in gran parte all'interno di "campi di esperienza" che fanno riferimento all'esperienza extrascolastica degli alunni opportunamente riproposta in classe con attività il più possibile "realistiche" (vedi il nostro Rapporto Tecnico).

Per "campo di esperienza" intendiamo qualcosa di più preciso della terminologia "metaforica" con cui tale espressione è entrata nella letteratura pedagogica italiana (ad esempio con i nuovi "Orientamenti" per la scuola dell'infanzia). Con riferimento al nostro Progetto, "Campo di esperienza" è un settore dell'esperienza umana identificabile con una breve espressione verbale (ad esempio: "Ombre del Sole", "Monete e prezzi", "Emigrazione") e omogeneo per quanto riguarda i "copioni" di comportamento che vengono attivati (l'espressione "il prezzo da pagare" ha significato proprio e non metaforico in "Monete e prezzi": se la si ascolta in quel contesto si sa che si riferisce ai soldi che bisogna sborsare). Dal punto di vista dell'insegnamento e dell'apprendimento a scuola, ogni "campo di esperienza" è costituito da tre "contesti" che evolvono nel tempo: il contesto "esterno" (oggetti, regole sociali di comportamento, vincoli oggettivi, espressioni linguistiche relative al campo di esperienza); il "contesto interno dell'allievo" (le sue concezioni, le sue conoscenze, i suoi invarianti operatori, ecc. relativi al campo di esperienza); il "contesto interno dell'insegnante" (concezioni, conoscenze, invarianti operatori... e anche esperienze, progetti e attese riguardanti l'uso didattico del campo di esperienza). Ad esempio, nel caso del campo di esperienza delle "Ombre del Sole" tra gli elementi del "contesto esterno" ci sono i vincoli intrinseci del fenomeno (il Sole nella nostra zona non può mai nascere a Nord), i ventagli mensili delle ombre, le espressioni verbali per descrivere il comportamento delle ombre...; tra gli elementi del contesto interno ci può essere la concezione che "*La nostra ombra per terra è più lunga alle 12 che alle 9 perchè alle 12 il Sole è più forte*" (quasi 40% degli alunni di I media manifestano, nel nostro test di ingresso, questa concezione in risposta alla domanda "*La nostra ombra per terra è più lunga alle 9 del mattino o a mezzogiorno? Perchè?*".

3.1. Modellizzazione geometrica del fenomeno delle ombre del Sole e costruzione di alcuni concetti di base della geometria. Abbiamo già visto come nel campo di esperienza delle "Ombre del Sole" possa essere realizzato un approccio significativo al concetto di angolo nei suoi significati "statico" e "dinamico". La situazione problematica di riduzione in scala del ventaglio delle ombre registrate in cortile può costituire una "situazione di riferimento" per entrambi i significati; le successive attività di misurazione di angoli dati e di costruzione di angoli di misura data costruiscono gradualmente "schemi" che assicurano l'operatività del concetto; il lavoro di confronto e riflessione sui testi che spiegano "come si fa a misurare un angolo" (o a "costruire un angolo di misura data") arricchisce e rende più preciso il linguaggio geometrico necessario per parlare in modo sintetico ed efficace del concetto di angolo.

Vediamo ora ulteriori esempi di costruzione di concetti di base della geometria nel campo di esperienza delle "Ombre del Sole".

Il concetto di parallelismo può essere affrontato in situazioni diverse (ognuna di esse evidenzia qualche aspetto particolare del parallelismo). Vediamo un esempio che riguarda la scoperta che le ombre di due pali verticali sono parallele sul terreno orizzontale. La situazione può essere organizzata così: in una giornata di sole si esce per "osservare le ombre". L'insegnante sistema due bambini da parti opposte rispetto a due pali alti (o due canne piantate nel terreno, o due stipiti sufficientemente alti di un cancello, o due alberi alti e stretti - ad esempio due cipressi) di cui sono visibili le ombre per terra. Chiede ai due bambini di descrivere come vedono le ombre. Ognuno dei due risponde che vede le ombre stringersi dalla parte del compagno! Altri bambini possono controllare che succede effettivamente ciò. "*Come mai? E come sono veramente le ombre?*"

Il riferimento ad esperienze comuni (i lati dell'autostrada che sembrano avvicinarsi, le case lontane su una via "diritta" che sembrano più vicine di quelle più prossime all'osservatore, ecc.) suggerisce ai bambini una risposta articolata: "*Forse è come con i lati dell'autostrada che sono sempre distanti uguale ma a noi sembra che si avvicinano*".

I bambini non sanno ancora che le ombre dei due pali sono parallele, l'interesse della situazione è proprio nella formulazione di questa ipotesi e nella sua verifica. Con foto di ombre sul terreno di file di alberi all'alba o al tramonto si può scoprire un'altra cosa interessante: le ombre sembrano "puntare" verso uno stesso punto, che si ricava facilmente prolungando le ombre...

Il parallelismo si manifesta in queste attività nel suo duplice aspetto di "conservazione della distanza" e di "convergenza apparente verso un punto all'infinito" (a livello adulto, possiamo osservare che sono presenti in nuce il modo "euclideo" e il modo "proiettivo" di considerare il parallelismo). L'insegnante può suggerire il termine di "uguale direzione" per designare tali proprietà delle ombre del Sole. Il riferimento alla "direzione Nord" (direzione delle ombre nel momento del mezzogiorno solare) consente di collegare l'analisi del fenomeno del parallelismo delle ombre del Sole alla problematica dell'orientamento.

A partire dalla situazione descritta il concetto di parallelismo viene costruito gradualmente; si arriva alla considerazione del parallelismo come concetto associato a quello di "direzione" di un fascio di rette, e alla considerazione di segmenti paralleli come "rappresentanti" di rette parallele. Le tecniche di costruzione della retta parallela a una retta data e passante per un punto assegnato rendono operativo il concetto. Il linguaggio verbale che via via si affina con l'aiuto dell'insegnante si interfaccia con i segni grafici (fornendo strumenti di controllo, di comunicazione e di riflessione sul concetto).

Le attività di costruzione della tavoletta con il chiodo (per la rilevazione sistematica dei ventagli delle ombre) pongono in primo piano il problema della giacitura del chiodo rispetto alla tavoletta. In effetti i bambini si rendono facilmente conto che variando l'inclinazione del chiodo rispetto alla tavoletta varia l'ombra sulla tavoletta. Emerge così la necessità di trovare una inclinazione "standard": l'idea del chiodo "dritto" (come si esprimono i bambini) viene di solito proposta dai bambini stessi. Ma come controllare se il chiodo è effettivamente "dritto"? L'insegnante può suggerire l'uso della squadretta: quanto più il chiodo è in posizione "dritta", tanto meglio esso aderisce ad uno dei lati perpendicolari della squadretta mentre l'altro lato aderisce alla tavoletta. L'osservazione attenta e la discussione possono condurre alla scoperta di importanti proprietà della relazione "chiodo dritto rispetto alla tavoletta" (che su suggerimento dell'insegnante verrà tradotta nel linguaggio geometrico consueto: "chiodo perpendicolare alla tavoletta"): anzitutto, non basta controllare la perpendicolarità con una sola posizione della squadretta (i bambini si rendono conto che il chiodo si può inclinare pur restando aderente al bordo della squadretta). Immediatamente intuiscono che con una seconda squadretta disposta "ad angolo" rispetto alla prima il sistema diventa rigido e la posizione del chiodo è effettivamente soddisfacente Sotto la guida dell'insegnante possono anche constatare come in tale posizione la rotazione di una squadretta attorno al lato che aderisce al chiodo mantiene l'aderenza dell'altro lato con la tavoletta. Praticamente può essere utile disporre di un pannello spesso di polistirolo e di uno stecco da spiedini o di un ago per far la maglia (al fine di assicurare una migliore visibilità e la mobilità del "chiodo" rispetto alla "tavoletta"). Con riferimento alla teoria di Vergnaud possiamo rilevare come la situazione problematica riguardante il posizionamento del chiodo rispetto alla tavoletta costituisca una situazione di riferimento assai significativa per il concetto di perpendicolarità tra una retta e un piano. Essa comporta l'apprendimento di una tecnica per il posizionamento perpendicolare legata al manifestarsi del "teorema in atto" che caratterizza la perpendicolarità di una retta con un piano attraverso la perpendicolarità a due rette incidenti giacenti sul piano. Comporta altresì la progressiva acquisizione di un linguaggio preciso per parlare del concetto in gioco.

Una volta costruite le tavolette con i chiodi e controllata la perpendicolarità dei chiodi rispetto alle tavolette, si tratta di posizionare le tavolette sul terreno. Anche in questo caso è facile per i bambini rendersi conto che la giacitura della tavoletta è rilevante per l'ombra che viene registrata. Occorre mettersi d'accordo su una giacitura standard (l'idea di mettere le tavolette "in piano" è subito proposta dai bambini).

Ma come si può controllare se una tavoletta è effettivamente "in piano"? Quando abbiamo affrontato per la prima volta, parecchi anni fa, la progettazione di una situazione didattica relativa a questo problema non sapevamo se proporre direttamente una soluzione tecnica senza preoccuparci dei suoi risvolti concettuali (controllo del livello dell'acqua in un bicchiere largo quasi colmo) oppure se svolgere un lavoro geometrico più impegnativo, mirante a caratterizzare la giacitura orizzontale attraverso la giacitura orizzontale di due rette incidenti (ovviamente, si tratta del linguaggio usato a livello adulto!). Alcuni "assaggi" effettuati in classe hanno evidenziato il fatto che diversi bambini in ogni classe avevano visto usare la livella a bolla per "mettere in piano" il pavimento della roulotte, il frigorifero di casa, ecc. Abbiamo così deciso che il problema del posizionamento orizzontale della tavoletta con l'uso di una livella a bolla poteva costituire una prima situazione di riferimento per il concetto di "giacitura di un piano". In pratica, l'attività si svolge così: i bambini manipolano la livella a bolla e si rendono conto del fatto che la bolla è in posizione centrale nel suo "tubicino" quando la livella è orizzontale. In cortile provano a controllare la giacitura delle tavolette disponendo a caso la livella in posizioni diverse e via via aggiustando la giacitura con degli spessori (sassolini, pezzi di cartoncino, ecc.). Rientrati in classe, l'insegnante chiede di ricostruire il procedimento seguito. Sono di seguito riportate le battute più importanti della discussione che si è sviluppata in una classe (grazie agli interventi dell'insegnante è in genere possibile riprodurre una discussione simile in ogni classe, purchè ovviamente la classe sia abituata a discutere in modo "partecipato" e produttivo!).

Daniela: "*Ho messo la livella sulla tavoletta e ho visto se la bolla era al centro, con una pietra ho aggiustato le cose finchè la bolla non è andata al centro*"

Ins.: "*Hai controllato se la livella era orizzontale tenendo la livella sempre nella stessa posizione sulla tavoletta?*"

Daniela: "*No, ho provato tante volte mettendola in posizioni diverse*"

Ins.: "*Perchè non basta controllare che la livella è orizzontale in una sola posizione sulla tavoletta?*"

Alcuni bambini chiedono di usare la livella; un bambino, Dario, tiene ferma con una mano la livella e ruota la tavoletta ed esclama:

Dario: "*E' come con le squadrette. Una posizione non basta! La tavoletta può ancora muoversi!*"

L'insegnante chiede ai bambini cosa pensano di quello che ha detto Dario, molti concordano (e mostrano quello che può succedere, tavoletta e livella alla mano), qualcuno non è convinto e chiede la tavoletta e la livella per controllare...

Ins. "*Quindi aveva ragione Daniela, occorre mettere la livella in posizioni diverse. Ma diverse come? Secondo voi, se mettessi la livella* *qui (su un lato lungo) e qui (sull'altro lato lungo), sarei sicura che la tavoletta è orizzontale?"*

Alcuni bambini sostengono di sì, finchè Elisa (tenendo la livella orizzontale su un lato della tavoletta e alzando e abbassando l'altro lato) non dice:

Elisa: "*Guardate cosa succede! L'altro lato può salire e scendere, è sempre orizzontale ma la tavoletta non è più orizzontale!*"

La tavoletta passa di mano in mano...

Stefano: "*Ma allora occorre che una posizione sia per il lato lungo e l'altra per il lato corto... così...* (esegue) ... *così non si può più muovere!*"

Elisa: "*Forse basta che non siano posizioni ... come si dice ... parallele*"

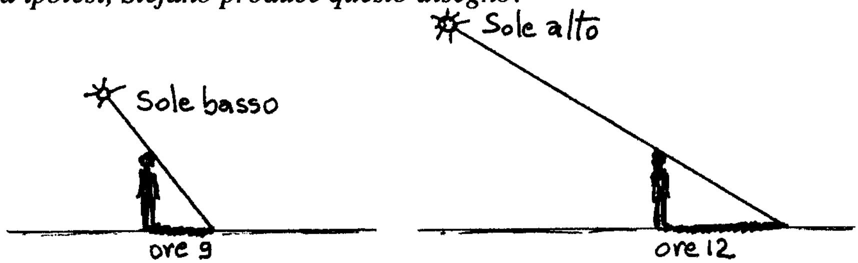
Antonella: "*Si, anche se una è lungo un lato e l'altra è di sbieco, va bene*" (notare che Antonella non ha la livella; ha in una mano la tavoletta e ragiona immaginando le due posizioni, che indica con l'altra mano).

Interessante nelle attività descritte (sul posizionamento del chiodo rispetto alla tavoletta e sulla "messa in piano" della tavoletta) è il fatto che la scoperta delle condizioni di "rigidità" del chiodo e poi della tavoletta avviene spontaneamente attraverso l'analisi dei movimenti che sono ancora possibili quando si fissa una sola condizione. Il corpo del bambino "partecipa" alla scoperta, e questo è importante in quanto può costituire la premessa dell'interiorizzazione del lavoro di esplorazione (come indica il caso di Antonella, che non ha più bisogno della livella ma riesce ad immaginarla). D'altra parte, il lavoro di esplorazione (in particolare, di esplorazione dinamica: Simon, 1996) delle situazioni geometriche è fondamentale per lo sviluppo del "pensiero produttivo" (cfr. Wertheimer, 1956).

3.2. Argomentazione nel campo di esperienza delle ombre del Sole e sviluppo della concettualizzazione. L'attività argomentativa appare cruciale ai fini dello sviluppo della concettualizzazione in quanto permette di individuare meglio i significati connessi alle situazioni di riferimento, di precisare la portata degli schemi e degli altri invarianti operatori e di sottoporre a controllo le rappresentazioni linguistiche; consente altresì di collegare tra loro concetti diversi. Con un esempio cercherò di illustrare alcune di queste potenzialità dell'argomentazione. Siamo nel secondo quadrimestre della classe IV; i bambini più volte hanno messo in relazione l'altezza del Sole con la lunghezza dell'ombra proiettata, senza mai arrivare a precisare cosa si intende per "altezza del Sole". La seguente consegna ha lo scopo di condurre i bambini alla concettualizzazione dell'altezza del Sole come "altezza angolare del

Sole" e insieme di affinare la padronanza del concetto di angolo (già introdotto con le attività descritte in precedenza).

"All'inizio del lavoro sulle ombre del Sole, Stefano (un bambino di I media) pensa che le ombre siano più lunghe quando il Sole è più alto e più forte. Altri bambini pensano il contrario. Al fine di giustificare la sua ipotesi, Stefano produce questo disegno:



e scrive: "Come possiamo vedere nel disegno, il Sole fa un'ombra più lunga quando è più alto, cioè a mezzogiorno, quando è anche più forte". *Noi invece sappiamo bene che le ombre sono più lunghe quando il Sole è più basso (cioè al mattino, dopo l'alba, e nel pomeriggio, verso il tramonto). Quindi, nel ragionamnto di Stefano c'è qualcosa che non funziona. Cosa c'è di errato nel ragionamento di Stefano, in particolare per quanto riguarda il suo disegno? Cerca di scrivere una spiegazione chiara dell'errore di Stefano, in modo che Stefano possa capirla."*

La consegna è gestita con questa successione di attività:

- testo individuale;
- presentazione di alcune produzioni scritte dei bambini, confronto e discussione;
- nuovo testo individuale (su quello che è emerso nella discussione);
- discussione conclusiva, finalizzata alla costruzione di una sintesi di quello che si è imparato attraverso l'attività.

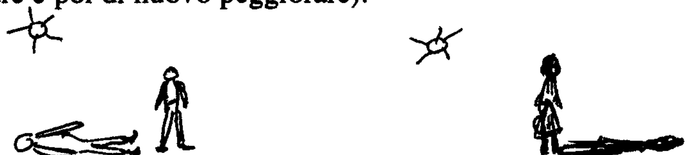
Di per sé, la consegna iniziale richiede un testo argomentativo (e parecchi bambini individuano la necessità di chiarire che quando si tratta di "altezza del Sole" si intende l'inclinazione del raggio del Sole, non l'altezza da terra del Sole disegnato lungo il raggio). Durante la prima discussione si verificano alcuni episodi significativi per quanto riguarda il ruolo dell'argomentazione nella concettualizzazione. Un episodio particolarmente significativo è il seguente. Un bambino (Domenico) si avvicina alla lavagna (su cui è riprodotto con cura il disegno della consegna) e dice: "*Se il Sole cambia posizione, la lunghezza dell'ombra cambia*", e accompagna queste parole con l'indicazione di una posizione del Sole spostata a destra rispetto a quella delle ore 12, e con il gesto della mano che accorcia l'ombra corrispondente. Un altro bambino (Andrea) reagisce dicendo: "*Ma se* *facciamo cambiare posizione al Sole lungo il raggio, la lunghezza dell'ombra non cambia!"*.

L'insegnante valorizza questo intervento richiamando su esso l'attenzione della classe e guidando la discussione in modo che emerga gradualmente una proprietà fondamentale: l'inclinazione del raggio (come la lunghezza dell'ombra) non cambia cambiando la posizione del Sole lungo il raggio! La discussione continua, fino a cogliere il fatto che parlando di inclinazione si intende in realtà l'angolo formato dal raggio del Sole con il terreno orizzontale. E a questo punto alcuni bambini, su sollecitazione dell'insegnante, richiamano l'episodio precedente per collegarlo con quello che si fa quando si misura un angolo con i lati corti: "*Si prolungano i lati, e la misura resta la stessa e la possiamo leggere sul goniometro*".

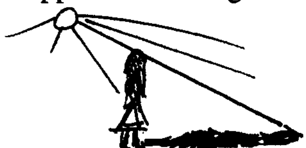
3.3. Modellizzazione geometrica del fenomeno delle ombre del Sole, concettualizzazione e modelli di razionalità. Vorrei aggiungere a questa presentazione di temi ed esempi riguardanti l'insegnamento della geometria nella scuola elementare alcune considerazioni inerenti il ruolo della geometria nel nostro modo di pensare i fenomeni della natura, in particolare il fenomeno delle ombre del Sole. In forma estremamente sintetica si può dire che la modellizzazione geometrica di tale fenomeno cambia in modo rilevante il modo di pensarlo, e che d'altra parte il "modo geometrico" di pensarlo può entrare in conflitto con sistemi di pensiero diversi. La "razionalità geometrica" è una delle forme di "razionalità" possibili e la giustapposizione (o lo scontro) con altre forme di razionalità pone problemi educativi non facili.

Le considerazioni precedenti trovano riscontro in varie esperienze che abbiamo condotto con bambini italiani, spagnoli (Catalogna), ungheresi (villaggio Gipsy di Csenyète, nel nord est dell'Ungheria), eritrei (alunni della Scuola Italiana di Asmara). A titolo di esempio riportiamo i risultati di due indagini sperimentali compiute negli ultimi anni.

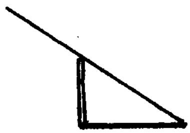
A. Il segno dell'ombra e i nessi causali nel rapporto tra posizione del Sole e lunghezza delle ombre. Il lavoro sulle "Ombre del Sole" in III elementare (attività analoghe vengono svolte anche all'inizio della scuola media nel nostro progetto di insegnamento integrato della matematica e delle scienze) comprende molte attività di osservazione, di gioco e di rappresentazione grafica e verbale del fenomeno. In particolare abbiamo potuto constatare (in III elementare come in I media) che per la stragrande maggioranza dei bambini non esiste alcuna relazione "geometrica" precisa tra posizione del Sole, estremità dell'oggetto che proietta l'ombra e estremità dell'ombra proiettata. Le rappresentazioni grafiche più frequenti sono le seguenti (la seconda esprime solo una relazione qualitativa approssimativa e labile tra posizione del Sole e posizione dell'ombra, di fatto da disegno a disegno l'allineamento può migliorare e poi di nuovo peggiorare):



Pochissimi bambini (meno dell'1% in III elementare, meno dell'8% in prima media) producono rappresentazioni grafiche di questo tipo:



Attraverso interviste ci è stato possibile accertare che nella maggior parte dei casi non si tratta di produzioni spontanee ma di effetti di apprendimento extrascolastico (fratelli maggiori che hanno svolto le stesse attività in anni precedenti o che frequentano il liceo, genitori che spiegano "come vanno le cose", ecc.).

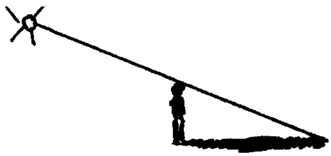


L'introduzione del "segno dell'ombra" (cioè del modello fondamentale per la modellizzazione geometrica elementare del fenomeno delle ombre del Sole) può essere realizzata dall'insegnante secondo modalità diverse, con una partecipazione più o meno attiva da parte degli alunni (su questo ci soffermiamo nel volume IV del Rapporto Tecnico del progetto "Bambini, maestri, realtà", vedi anche Scali, 1997). In tutti i casi le indagini svolte evidenziano un comportamento comune della maggior parte dei bambini: il passaggio da verbalizzazioni che descrivono la contiguità temporale del "Sole basso" con "l'ombra lunga" a verbalizzazioni in cui si stabilice un nesso causale tra "Sole basso" e "ombra lunga". Ecco un esempio in proposito:

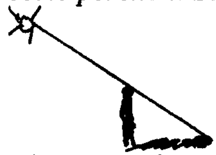
(in questo caso l'attività sulle ombre del Sole è iniziata a gennaio della classe IV, con una supplente):

(12 febbraio)("cosa sai sulle ombre del Sole dopo le prime due settimane di lavoro?") "*Quando andiamo in cortile la mattina alle 9 vediamo che il Sole è basso, appena sopra i tetti; vediamo anche che le ombre sono molto lunghe*".

(19 maggio, dopo l'introduzione del "segno delle ombre"): ("cosa sai sulle ombre del Sole dopo quattro mesi di lavoro?") "*So che al mattino, quando il Sole è basso, le ombre sono lunghe* (disegno).



Le ombre sono lunghe perchè il Sole è basso, invece a mezzogiorno le ombre sono molto più corte perchè il Sole è alto" (disegno) .



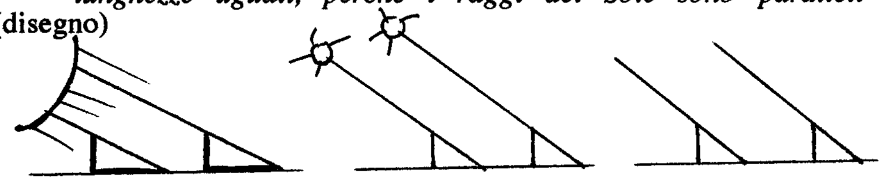
Qualche commento. Il passaggio alla contiguità temporale tra "ombre lunghe" e "Sole basso" rappresenta già (per molti bambini) una evoluzione importante rispetto alle loro concezioni iniziali (a 9 anni come a 11 anni la concezione più diffusa - attorno al 40% dei bambini - è, come abbiamo già visto, quella secondo cui "*l'ombra è più lunga a mezzogiorno perchè il Sole è più forte*"). L'evoluzione ulteriore verso un rapporto causale preciso tra altezza del Sole e lunghezza del'ombra non sembra possibile per molti bambini senza il supporto rappresentato dal "segno dell'ombra". Al più abbiamo osservato (in bambini di livello piuttosto alto) una evoluzione da contiguità temporale espressa nella forma "Le ombre sono lunghe quando il Sole è basso" a condizionalità "Se il Sole è basso le ombre sono lunghe" (di solito tale frase, o frasi semanticamente equivalenti, vengono prodotte all'interno di un testo che considera le diverse situazioni delle ore 9, delle ore 12, delle ore 16). Il segno dell'ombra introduce una "necessità" nel rapporto tra altezza del Sole e lunghezza dell'ombra; il bambino appare sensibile a tale "necessità" (soprattutto se ha realizzato confronti tra situazioni in ore diverse, e relative rappresentazioni grafiche) e la esprime nei suoi testi. In questo modo si modifica in modo rilevante il modo di pensare alle relazioni tra Sole e ombre proiettate.

B. Il rapporto con il modello geometrico del fenomeno delle ombre del Sole: due modelli di razionalità diversi. Alcune settimane dopo l'introduzione del "segno dell'ombra" viene proposta una situazione problematica impegnativa (i bambini nel frattempo hanno imparato a usare il segno dell'ombra e le proprietà geometriche dei raggi del Sole, in particolare il parallelismo, per risolvere vari problemi - ad esempio quello di prevedere, con il disegno, quanto sarà lunga l'ombra di un chiodo di 8 cm sapendo quanto è lunga l'ombra di un chiodo di 5 cm alla stessa ora).

"*Non potremo più rilevare le ombre nel cortile della nostra scuola, perchè verranno i muratori a fare dei lavori. Ci dobbiamo spostare nel cortile della scuola media. Secondo te questo cambiamento di posto* *avrà delle conseguenze sulle lunghezze delle ombre oppure no? Cioè: misurando le ombre nello stesso momento nel nostro cortile e nel cortile della scuola media si otterranno le stesse lunghezze oppure no?*" (questa è una delle tante versioni della consegna; in situazioni diverse si possono trovare motivi diversi per cambiare il luogo delle misurazioni...).

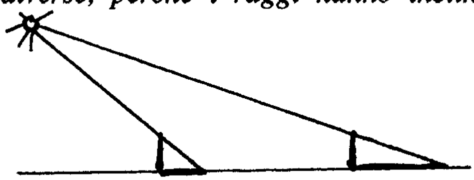
Il comportamento tipico della stragrande maggioranza (oltre l'80%) dei bambini delle classi italiane e catalane consiste, in IV e V elementare come in I media, nell'applicazione del "segno dell'ombra" come strumento per risolvere il problema proposto. Si hanno soluzioni diverse, essenzialmente di due tipi:

- "*lunghezze uguali, perchè i raggi del Sole sono paralleli*" (disegno)



(sono in effetti prodotti tre tipi di disegno, uno con un grande Sole da cui escono i raggi paralleli, l'altro con due soli, il terzo senza il Sole);

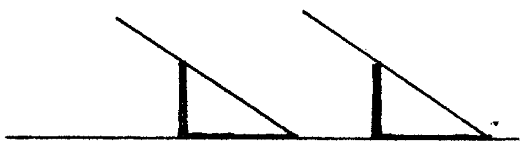
- "*lunghezze diverse, perchè i raggi hanno inclinazione diversa*" (disegno).



Nel caso delle due classi di Asmara (II media) che hanno svolto questo compito nel 1999 la maggioranza dei bambini ha rovesciato il rapporto tra uso del segno dell'ombra e risoluzione del problema:

"*Il Sole è lo stesso, l'oggetto che fa l'ombra è lo stesso, quindi le ombre saranno le stesse.*

(disegno)



Vediamo con il disegno che i raggi del Sole vengono paralleli, come sappiamo"

(varianti: il disegno mette in crisi alcuni bambini, che vorrebbero fare convergere i raggi nel Sole... qualcuno allora disegna due soli, qualcun altro disegna un Sole più grande).

E' interessante notare come l'uso del modello conduce, nella sostanza, agli stessi problemi di rappresentazione per quanto riguarda la convergenza dei raggi in uno stesso Sole. Quello che risulta completamente diverso è il rapporto con il modello geometrico: nel caso dei bambini italiani e catalani, il modello geometrico è lo strumento di risoluzione del problema, mentre nel caso della maggioranza dei bambini delle due classi di Asmara la soluzione è ottenuta con un ragionamento che prescinde dal modello geometrico e il modello geometrico viene usato per illustrare la soluzione ottenuta (e ritrovare le cose studiate in classe, forse perchè il lavoro è svolto con l'insegnante di matematica e scienze...).

Approfondendo il confronto tra le due situazioni abbiamo rilevato altre differenze significative, che possono servire a spiegare il perchè dei comportamenti osservati: nel caso dei bambini italiani e catalani, la concezione più diffusa nel questionario iniziale *("ombra più lunga a mezzogiorno perchè il Sole è più forte")* non regge nel rapporto con le osservazioni compiute in seguito. Si tratta inoltre di una concezione "infantile", senza collegamenti forti con i modi di pensare diffusi nella società. Invece nel caso dei bambini di Asmara la concezione più diffusa all'inizio dell'attività è che *"l'ombra a mezzogiorno è più corta, perchè il Sole è più splendente e l'ombra si riduce"*. Ci siamo interrogati sulle origini possibili di tale concezione, essa sembra dipendere da un rapporto fisico diverso con il fenomeno (per due volte all'anno al mezzogiorno solare il Sole è sulla verticale!) e anche da un modo di pensare le ombre diverso (come manifestazione del buio antagonista della luce del Sole) che sembra collegato a un sistema di pensiero diffuso anche tra gli adulti. Comunque, la cosa più interessante è che tale concezione non è contraddetta dalle osservazioni più immediate e dalle verifiche sperimentali! Quindi i bambini si sentono legittimati a farne uso per risolvere un problema difficile e nuovo...

Il problema delicato che si pone nel caso dei bambini di Asmara è quello del tipo di intervento che l'insegnante può realizzare per consentire ai bambini di esperire la razionalità geometrica nella risoluzione di un problema di previsione come quello proposto. Infatti l'obiettivo non può essere quello di combattere forme di ragionamento profondamente radicate nella cultura locale, efficienti in molte situazioni e importanti in assoluto perchè sappiamo che spesso l'innovazione scientifica viene realizzata con ragionamenti di natura non strettamente scientifica (ad esempio facendo ricorso a "principi" generali non verificati empiricamente come il principio di continuità o il principio di semplicità delle leggi della natura). L'obiettivo deve essere quello di conoscere forme di ragionamento che si sono rivelate molto efficienti nell'interpretazione e nella previsione di parecchi fenomeni naturali. Si pone in altre parole il problema di come realizzare un rapporto consapevole tra forme di razionalità geometrica e altre forme di razionalità che consenta un arricchimento della cultura dei soggetti senza comprometterne alcuna specificità interessante. Su questo problema stiamo attualmente lavorando a fondo, anche in vista della prevedibile estensione nelle classi italiane della percentuale di alunni extracomunitari portatori di culture "diverse".

4. CONCETTI GEOMETRICI E MODELLI CONCRETI

In quest'ultima parte della mia esposizione vorrei affrontare brevemente una questione che il lettore si sarà sicuramente posto e che potrebbe essere formulata così: "*D'accordo, ci hai mostrato alcune attività coinvolgenti per i bambini, si può immaginare che i bambini siano attivi e produttivi quando vengono loro proposte certe consegne sulle ombre del Sole o sulla rappresentazione dello spazio visibile... Ma questa non è geometria, semmai è fisica o è disegno tecnico!*".

All'obiezione di assenza della "geometria vera" dalla maggior parte del testo si può rispondere in vari modi.

A) Dal punto di vista storico, la geometria si costituisce nella cultura umana (durante decine di secoli, prima della sistemazione euclidea) come sapere "pratico" riguardante lo spazio: nell'edilizia, nei problemi di orientamento, nell'astronomia, nell'agrimensura si forgiano i concetti di base che poi verranno via via "depurati" dai riferimenti "concreti" e collegati tra loro da una rete di relazioni da alcuni filosofi e matematici greci, fino alla teoria di Euclide. Tale operazione di "depurazione" e di costruzione teorica risponde a varie esigenze. In primo luogo una esigenza filosofica: ricordiamo la filosofia di Platone, in cui le "idee" della geometria sono esempi di verità immutabili. Per inciso possiamo qui rilevare che Platone, e ancor più Aristotele, attribuiscono comunque un grande valore all'esperienza sensibile come punto di partenza per pervenire alle "idee". C'è però anche una esigenza operativa: il carattere di "generalità", di "universalità" e di "astrazione" delle teorie geometriche ne facilita l'applicazione ad ambiti diversi e consente di lavorare in condizioni "ideali", prescindendo dai vincoli del disegno impreciso, dei modelli concreti imperfetti, ecc. Nella stessa matematica greca e poi ellenistica sono tuttavia presenti (accanto agli "Elementi" di Euclide) altre opere in cui la teoria geometrica si sviluppa come teoria relativa ad "oggetti concreti idealizzati" che hanno proprietà geometriche (ruote e ingranaggi in Erone, specchi e raggi di luce nello stesso Euclide nel trattato sull'ottica, specchi e contenitori di varia forma in Archimede). Il libro di M. Serres sulle "Origini della geometria" costituisce un riferimento importante per le origini della geometria nelle civiltà antiche del Mediterraneo. Tale libro fornisce anche una giustificazione in sede storica per la centralità del lavoro nel campo di esperienza delle "Ombre del Sole" ai fini dell'insegnamento della geometria nel nostro progetto.

Ancora dal punto di vista storico occorre ricordare che la teoria della geometria proiettiva si sviluppa inizialmente come sistemazione teorica delle regole che gli architetti ed i pittori del Rinascimento formulano per la rappresentazione prospettica degli edifici.

B) Dal punto di vista epistemologico e cognitivo, nel lavoro dei matematici (del passato e di oggi) il riferimento ad oggetti e situazioni concrete è spesso cruciale per lo sviluppo delle teorie geometriche (in particolare per la formulazione di congetture e per la scoperta delle ragioni profonde, inerenti l'organizzazione dello spazio, per cui una certa proprietà geometrica è vera). Recenti indagini (cfr. Longo, 1997; Lakoff e Nunez, 1997) si spingono ancora più avanti e ipotizzano (con riscontri numerosi nel lavoro dei matematici, nella storia e nei processi di apprendimento a tutte le età) che non sia addirittura possibile una attività costruttiva in campo geometrico (congetturare, dimostrare, risolvere problemi...) senza il ricorso al rapporto fisico (concretamente realizzato, o almeno immaginato) del soggetto con lo spazio. Addirittura tale discorso viene esteso a tutta la matematica: l'"iscrizione corporale" (o "embodiment") dei concetti e delle relazioni di base della matematica viene ipotizzata come sorgente e punto di riferimento ineludibile per tutte le attività non puramente ripetitive in campo matematico. Si tratta di ipotesi che evidentemente si collocano agli antipodi dei progetti "formalisti" di sistemazione della matematica che sono stati sviluppati dalla fine del secolo scorso in poi, secondo i quali l'essenza della matematica sarebbe costituita dalla manipolazione di segni e relazioni prive di riferimenti all'esperienza sensibile, al "concreto", al funzionamento fisico del nostro corpo ("metafore" considerate talvolta utili, ma spesso di ostacolo e comunque assolutamente non necessarie per il ragionamento matematico).

In presenza di questi dati di natura storica e di queste importanti indagini in campo epistemologico e cognitivo appare legittimo un insegnamento della geometria nella scuola elementare che apertamente ricorre ad oggetti concreti, a metafore fisiche, a relazioni di natura geometrica esperite con il corpo: non si tratta di un punto di partenza da abbandonare al più presto (appena i bambini dimostrano di saper ragionare in termini di "rette" e non di "raggi di luce"), ma di un "luogo", di un "ambiente di apprendimento" in cui i bambini esperiscono per anni le attività fondamentali della geometria (costruire concetti con una molteplicità di situazioni di riferimento che ne "fissano" il senso e ne garantiscono l'applicabilità, individuare relazioni geometriche, individuare possibili ragioni per cui una certa proprietà geometrica è vera). Il passaggio (a livello lessicale e anche in termini di "astrazione") a segmenti, rette, cerchi, angoli, ecc. deve essere favorito gradualmente dall'insegnante attraverso la mediazione dei termini tecnici della geometria e attraverso la molteplicità delle situazioni problematiche esperite in classe (comprese situazioni interne alla matematica - come quando si tratta di costruire, in V, le formule per il calcolo dell'area di talune figure geometriche). In tale percorso verso la "geometria ufficiale" non va tuttavia perduto il riferimento alle situazioni di riferimento "concrete" collegate all'esperienza extrascolastica e a significative attività manipolative: altrimenti il bambino rischia di non essere in grado di compiere i ragionamenti di cui sono stati forniti vari esempi in questo testo (ad esempio a proposito del modo di verificare la perpendicolarità di un chiodo rispetto alla tavoletta in cui è piantato: vedi 3.1)

BIBLIOGRAFIA

AA.VV. [1999], Bambini, maestri, realtà: un progetto per la scuola elementare, Rapporto Tecnico, Dipartimento di Matematica, Università di Genova.

BARTOLINI BUSSI, M. [1996], Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 31, 11-41

BARTOLINI BUSSI, M.; BONI, M. & FERRI, F. [1995], Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, Centro Documentazione Educativa, Comune di Modena

BERTHELOT, R. & SALIN, M. H. [1992], L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse, L.A.D.I.S.T., Université de Bordeaux-I

DOUEK, N. [1998], Analysis of a Long Term Construction of the Angle Concept in the Field of Experience of Sunshadows, *Proceeding of PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, pp. 264-271

DOUEK, N. [1999], Argumentation and Conceptualization in Context: a Case Study on Sunshadows in Primary School, *Educational Studies in Mathematics* (in corso di stampa).

LAKOFF, G. & NUNEZ, R.[1997], The Metaphorical Structure of Mathematics, in L. English (ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, L.E.A., Hillsdale, NJ, pp. 21-89

LONGO, G. [1997], Géométrie, Mouvement, Espace: Cognition et Mathématiques, *Intellectica*, 25, 195-218

SCALI, E. [1997], Choix des taches et organisation des intéractions dans la classe pour l'appropriation des signes de la géométrie dans les activités de modélisation, *Proceedings of CIEAEM-49*, Setubal, pp. 186-194

SERRES, M. [1993], Les origines de la géométrie, Flammarion, Paris (trad. italiana: [1994], Le origini della geometria, Feltrinelli, Milano)

SIMON, M. [1996], Beyond inductive and deducyive reasoning: the search for a sense of knowing, *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210

VERGNAUD, G. [1990], La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-170

VYGOTSKIJ, L. S. [1990], Pensiero e linguaggio, Laterza, Bari.

WERTHEIMER, M. [1965], Il pensiero produttivo, Giunti-Barbera, Firenze

GEOMETRIA IN SPAZI CONCRETI

Nicoletta Lanciano

Dipartimento di Matematica - Università di Roma "La Sapienza"

INTRODUZIONE

Il testo che segue rispecchia il lavoro condotto nelle lezioni della prima parte del corso "Geometria e multimedialità" rivolto ad insegnanti di scuola elementare. Come è stato precisato nel progetto di tale corso, e come è stato detto all'inizio del medesimo ai corsisti, non era possibile fissare prima un calendario e un indice preciso della materia perché l'ordine e la scelta delle attività, in una proposta di questo tipo, che porta ad esplorare soprattutto lo spazio esterno, dipendono in modo forte dal tempo meteorologico. Il progetto del docente deve essere pertanto flessibile ed è legato alla presenza del Sole, o invece alle nuvole, quindi senza Sole ma con possibilità di stare all'aperto, o ancora alla pioggia e quindi dalla necessità di lavorare solo al chiuso. Le lezioni e le esercitazioni si avvalgono di esempi e di stimoli dall'astronomia e dall'uso della città.

La scelta di avere questa flessibilità è una scelta di tipo didattico: ben altra e ben maggiore è l'elasticità e la dipendenza di ogni progetto didattico da condizioni esterne al docente, che lavora con bambini, con gruppi ogni volta diversi, con la natura imprevedibile e ricca di sorprese, con le emozioni e i pensieri di chi impara. In questo senso mettersi nella condizione di scegliere di volta in volta che cosa concretamente fare in relazione a stimoli esterni, è un'attitudine con cui ogni insegnante ha necessità di confrontarsi. Per questo ci sembra paradigmatico e di esempio metterci, con esplicita scelta, in tale condizione. Questo vuol dire non avere un solo programma, ma una serie di varianti possibili, organiche tra loro.

INTENTI del MODULO

- Includere nell'azione didattica lo **spazio grande**, dove il corpo può muoversi e lo sguardo può andare lontano e in tutte le direzioni, oltre lo spazio piano del foglio. Sottolineare e sperimentare il peso del lavoro nello spazio tridimensionale;
- prestare attenzione particolare al **cerchio**, alle curve, alla sfera, agli angoli per organizzare lo spazio, perché spesso questi sono elementi "dimenticati" nell'azione didattica;
- usare come **strumenti** di stimolo e di conoscenza: il proprio corpo, il Sole, lo spazio grande, le architetture;
- usare **luoghi vari** per l'azione didattica, non solo l'aula, ma anche luoghi all'aperto;
- riflettere sulla peculiarità della progettazione di un **lavoro all'aperto** che non prescinde dalle condizioni meteorologiche per cui prevede delle varianti, è flessibile;
- indicare **testi dalla storia** della matematica e dell'astronomia, con l'uso di linguaggi diversi: linguaggio poetico, del racconto, del mito, linguaggio iconico in cui il pensiero è mediato dalle figure, da fotografie, linguaggio delle formule.

PRESENTAZIONE del LAVORO

La nostra accezione di **multimedialità** è in senso etimologico e non tecnologico: nella sua radice tale parola rimanda a "usare **molti mezzi"** e questa è oggi un'abilità importante e necessaria, la base per accedere in modo attivo alla "multimedialità tecnologica". Quest'ultima richiede di essere pronti alla lettura delle immagini, saper riconoscere il punto di vista adottato; saper passare da un linguaggio all'altro, saper fare collegamenti continui tra raffigurazioni in 2 dimensioni (2D) confrontandole con le 3 dimensioni (3D).

La geometria è scienza che riguarda lo spazio: ma quali sono gli **spazi concreti** di cui intendiamo occuparci ? Sono quello occupato dal nostro corpo in quiete e in movimento; quello naturale, delimitato in basso dal suolo e non limitato verso l'alto, cioè il cielo; quello urbano e antropizzato, oltre a quello del foglio su cui tracciare il disegno.

Leggiamo di Talete da Proclo (410-485 d.C.):

"Come tra i Fenici, per i traffici e gli affari, ebbe origine la conoscenza esatta dei numeri, così, per la ragione che ho detta, ebbe origine in Egitto la geometria. Fu Talete colui che, andato in Egitto, ne riportò in Grecia questo studio; e molte scoperte fece lui stesso, di molte ricerche suggerì i principi a quelli che vennero poi, **alcune cose studiando più in astratto, altre più in concreto."**

GEOMETRIA e SPAZIO nei NOSTRI VISSUTI

Un primo momento di lavoro prevede una autopresentazione di ciascuno attraverso il racconto di un proprio **piacevole ricordo** di geometria: questo ricordo può venirci dalla nostra condizione di studenti o di insegnanti o da altre situazioni, letture, incontri.

Riteniamo importante dedicare tempo e attenzione alla formazione del gruppo, dato che lo "star bene" nel gruppo il conoscersi, renderà possibile lavorare, pensare e imparare tutti insieme.

Dall'ascolto dei racconti emergono diverse categorie per definire e qualificare lo spazio:
- la presenza del movimento: i nostri corpi in movimento (il gioco, il salto, attività in palestra) e le figure, gli enti geometrici in movimento (geometria dinamica con spostamenti e trasformazioni);
- 2D e 3D e passaggi da 2D a 3D (progettare e realizzare) e da 3D a 2D (rappresentare);
- lo spazio virtuale, nel computer, che non si sa più se è un 2D o un 3D;
- lo spazio più piccolo o più grande (v. definizioni in seguito).

Aspetti dello spazio riconoscibili nei racconti:
- artistico: rimando a figure;
- creativo: letture (Flatlandia, Il mago dei numeri, Platone filosofo);
- affettivo: libertà di esplicitare ciò che ci piace e ciò che ci piace di più (ad esempio tra poligoni e coniche, tra solidi o figure piane, se la simmetria ci piace o ci disturba...);
- legame con il tempo: crescita dei bambini in altezza, spostamento delle ombre al passare del tempo;

- lo spazio strutturato dalle regole del gioco: campana, "attenti al lupo", giochi con la palla.
Ipotesi di classificazione a partire dai 36 racconti individuali:

MICRO spazio	MESO spazio	MACRO spazio	MEGA spazio
lavagna	palestra	città	la Terra gira
quaderni	aula	la natura	
		lo gnomone col Sole	

Definiamo:
- il micro spazio come lo spazio dei libri e dei quaderni, degli oggetti manipolabili; questo spazio è visto e vissuto solo dall'esterno;
- il meso spazio come quello di una scuola, di una casa, di una piazza che è raggiungibile interamente almeno dallo sguardo;
- il macro spazio è lo spazio grande, quello in cui siamo immersi, della città e della natura: non lo possiamo raggiungere interamente e pertanto lo possiamo vedere e vivere solo dall'interno;
- il mega spazio come lo spazio del cielo, del cosmo, della Terra intesa come pianeta e non solo come mondo su cui camminare e navigare: nel mega spazio sono in gioco oggetti comparabili con la Terra e maggiori di questa. (Lanciano N., 1996)

Perché fare attenzione a queste categorie relative alla dimensione dello spazio? Perché abilità e competenze raggiunte ad esempio nel micro spazio non sono automaticamente sempre trasferibili nelle altre categorie. Quindi è utile nell'azione didattica prevedere lavori in spazi diversi, lavori mirati all'esperienza e alla riflessione su diversi tipi di spazio.

UN MITO di ORIGINE dello SPAZIO COSMICO e del TEMPO: GEA e URANO

Il mito racconta attraverso l'evocazione di immagini, come è stato strutturato lo spazio: una prima organizzazione è "in alto e in basso", ciò che è nel cielo e ciò che è sulla terra.

All'inizio prima che ci fosse il tempo, Gea la Terra era interamente ricoperta da Urano, il cielo. Il cielo toccava la Terra in ogni suo punto e non vi era luogo in cui vi fosse distanza tra la Terra e il cielo: per tutta la sua estensione il cielo posava sopra la terra. Da questa unione tra Gea e Urano nacquero tanti figli. Essi erano custoditi nel ventre della madre perché non vi era spazio nel quale potessero venire alla luce: erano schiacciati da Urano. La madre non sopportava di non vedere i suoi figli e si rivolse loro per chiedere aiuto per allontanare Urano. Fu Crono, il più piccolo, che si propose per aiutare Gea la madre. Allora Gea prese del metallo dalle profondità delle sue viscere e forgiò un falcetto. Con questo Crono evirò il padre che con un urlo tremendo si allontanò per sempre da Gea e andò su in alto. Fu allora che i figli uscirono dal ventre materno e con la loro nascita sulla terra comparvero la crescita, il mutamento e la morte. I fiumi iniziarono a scorrere, gli alberi a crescere, i vulcani modellarono la terra. Da allora regna Crono, il signore del tempo, ciò che prima non c'era nell'immutabilità.

Quando guardiamo all'orizzonte, molto lontano possiamo vedere ancora il cielo che tocca la terra, ricordo di quel tempo iniziale in cui cielo e terra si toccavano ovunque.

GEOMETRIA in CITTÀ

Lo studio della geometria si basa su esperienze spaziali, fa appello alla propria conoscenza dello spazio costruita anche attraverso esperienze dirette. Ne sperimentiamo alcune che possono essere paradigmatiche rispetto all'azione didattica.

Ci occupiamo dello spazio accessibile con il movimento e con lo sguardo e di quello inaccessibile al movimento e accessibile solo allo sguardo.

Uso di uno spazio urbano strutturato: Piazza Mazzini a Viareggio

Il tempo è nuvoloso; vengono proposte esperienze nello spazio aperto, un meso spazio, con **l'uso dello sguardo, del movimento e del ritmo** (Lanciano N.et al, 1998). La Piazza è uno spazio protetto dal traffico: ha aiuole con palme disposte intorno ad una fontana che occupa il centro di simmetria e ha inoltre due assi di simmetria perpendicolari tra loro.

- Lavoro sui percorsi: percorsi individuali, attenzione ai suoni, al percepire dei piedi, ai punti di riferimento.

Percorsi effettuati a coppie, sottobraccio, a turno uno ha gli occhi aperti e l'altro ha gli occhi chiusi.
Affidarsi all'altro, guidare un altro, fare attenzione alla luce, muoversi anche in cerchio, prestare attenzione alle forze che esercitiamo e che vengono esercitate dall'altro su di noi: questi sono alcuni elementi che emergono dalla riflessione comune.
- Attività in cui è richiesto di ripetere percorsi con precisione: con il movimento e con lo sguardo. I percorsi individuali vengono mostrati in piccoli gruppi e devono essere trovate le parole per descrivere il percorso effettuato solo con gli occhi, che non può essere "mostrato" come quello del movimento del corpo.
- Ricerca individuale e in piccoli gruppi di moduli ripetuti nell'architettura della piazza e nelle strutture ornamentali (piante, fontana...) e ricerca di traduzione del ritmo osservato in suoni con oggetti da percussione.
- Realizzazione in gruppi di "concerti spaziali".

Riflessioni in aula

Sono attivate metariflessioni sul lavoro svolto da un punto di vista didattico e in particolare sulla gestione didattica degli errori. Una possibile attitudine, utile in alcuni contesti, è suggerita dalla lettura da Rodari ("L'errore creativo" in Grammatica della fantasia, 1973).

Disegno individuale a memoria del proprio percorso fatto con il movimento e di quello fatto solo con gli occhi.

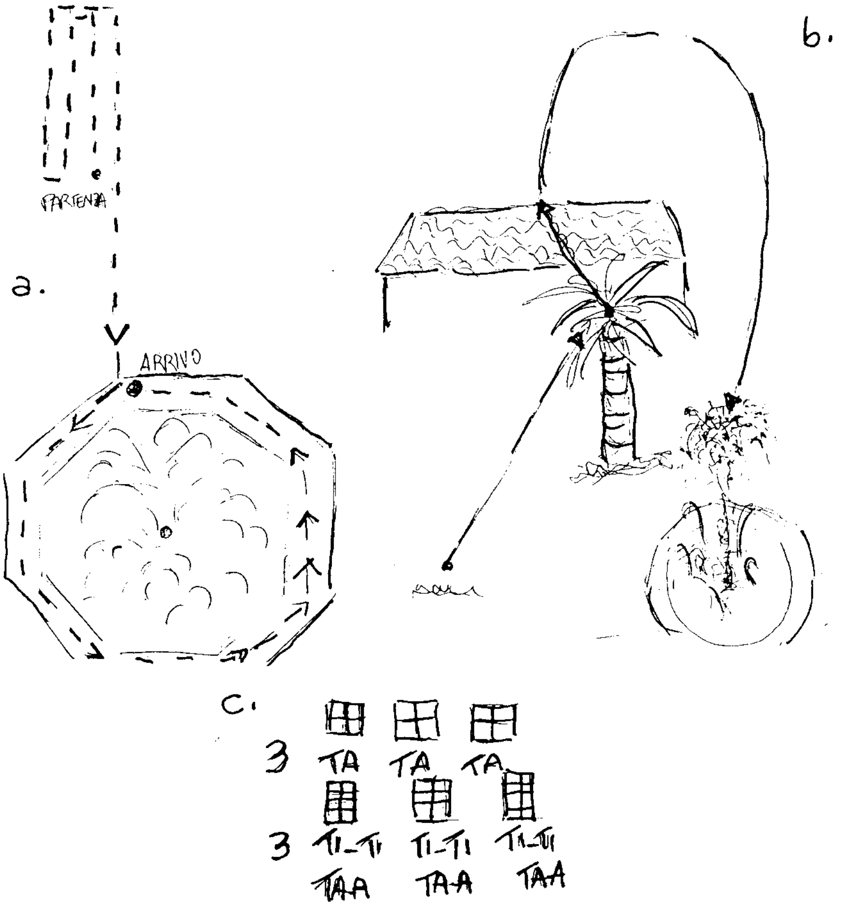
Quali punti di riferimento sono stati utilizzati? Quale punto di vista è possibile riconoscere nel disegno di un altro? Quali differenze abbiamo percepito tra il movimento del corpo e quello dello sguardo?

FIGURA 1

a.disegno a memoria di un percorso effettuato col movimento

b. disegno a memoria di un percorso effettuato con lo sguardo

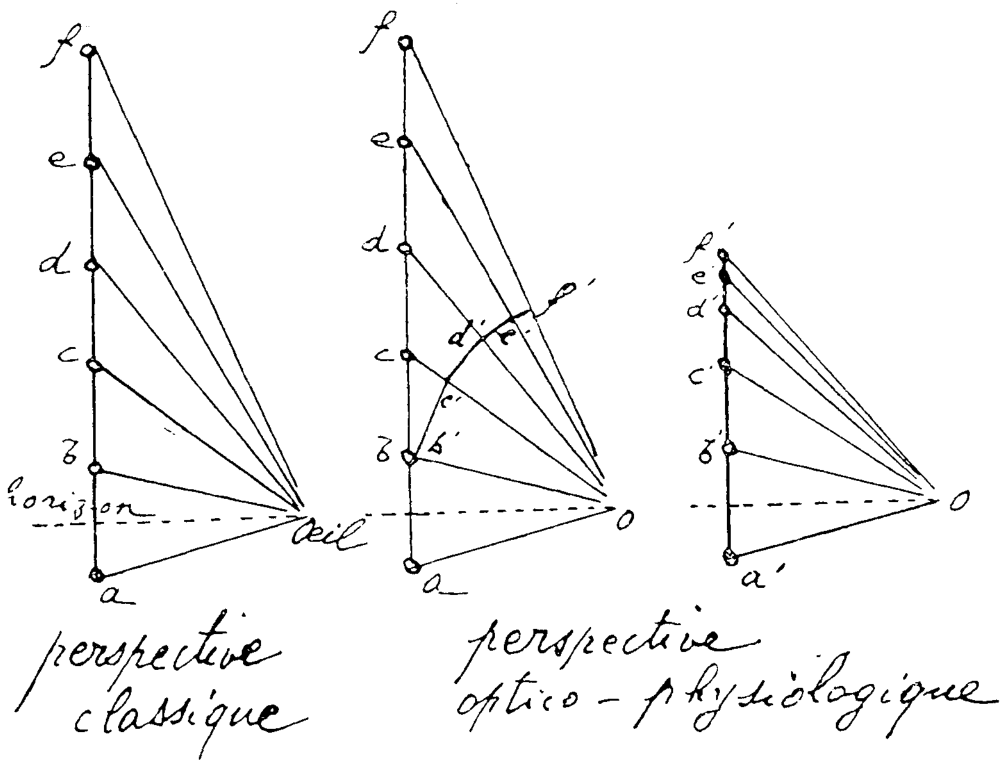
c.scrittura del ritmo: codifica personale e rilettura da parte degli altri, dei simboli usati



E' possibile definire il **ritmo** come "periodicità percepita", come ricorrenza di elementi, con raggruppamenti identici o simili in una composizione artistica spaziale. La parola ritmo viene dal greco "reo" = scorro, come una serie di numeri.

Ma i rapporti tra le parti e i ritmi sono influenzati e deformati, ad esempio nella visione di una facciata si ha una prospettiva ottico-fisiologica (Ghyka M.C., 1959): "in realtà le immagini viste da un osservatore non sono il risultato di proiezioni centrali su un piano verticale come le proiezioni-immagine della prospettiva classica" che dal 1400 in poi ci propongono in occidente pittori e disegnatori.

FIGURA 2
Da Ghyka M.C., 1959



Gli studi sulla percezione ci dicono che la visione non è istantanea: la visione di una facciata verticale è su piani di volta in volta perpendicolari all'asse della visione stessa dunque sempre più inclinati rispetto al piano orizzontale andando verso l'alto; anche se guardiamo un grande edificio o un panorama da destra a sinistra l'occhio gira per percorrerlo tutto. Per questi motivi fisiologici per ottenere determinati risultati sono state apportate correzioni ottiche già indicate da Vitruvio per la costruzione di alte colonne con rigonfiamenti opportuni: ciò che sembra un cilindro è tutt'altro proprio per apparire un cilindro!

Questa riflessione sulla non unicità delle rappresentazioni della realtà, è particolarmente pregante rispetto alla lettura e alla guida al disegno dei bambini. La prospettiva rinascimentale non è l'unica rappresentazione possibile della realtà, né quindi quella corretta in assoluto.

Torniamo al ritmo e alla musica: "i greci mescolarono coscientemente i termini dell'architettura e della musica; di più, i concetti architettonici, la morfologia estetica sono per loro coscientemente discussi e percepiti in analogie musicali..."; sono analoghi i "...termini relativi alla successione di elementi nella durata e alle giustapposizioni di elementi nello spazio (corrispondenze giustificate dal fatto che le sensazioni visuali non sono né globali né istantanee, ma si mettono in serie e si raccordano spesso nella durata come le impressioni uditive)". (Ghyka M.C., 1959).

Il ritmo, vissuto irreversibilmente, dà l'incanto ritmato di cui la musica pura è una modalità.
In musica come in architettura usiamo termini quali: intervallo, accordo, proporzione, armonia, euritmia, simmetria.

GEOMETRIA sulla SPIAGGIA

E' nuvolo, il gruppo lavora all'aperto.

Non è invece possibile lavorare all'aperto sulle ombre e la luce, né quindi sulle proporzioni "viste" da Talete nel macro spazio.

Un sistema di riferimento nel macro spazio: l'osservazione dell'orizzonte visibile locale

La parola orizzonte viene dal greco "delimito", "confine"; la parola oriente viene dal verbo "sorgere". L'astronomia dell'orizzonte è l'antica astronomia studiata dall'Archeoastronomia, la scienza che indaga sull'orientamento dei templi e delle città antiche, su complessi quali Stonhenge e le piramidi Maya.

La linea dell'orizzonte visibile è una linea chiusa, continua e frastagliata; tutto intorno a noi, quando siamo all'aperto, segue il profilo di colline, case, alberi, del mare là dove cielo e terra si uniscono e si separano. Non giace su un piano come invece il cerchio dell'orizzonte astronomico teorico: quest'ultimo giace su un piano parallelo al piano tangente la sfera teorica della Terra, nel punto in cui si trova l'osservatore.

FIGURA 3
L'osservazione dell'orizzonte locale

Sulla linea dell'orizzonte, le direzioni cardinali sono lette con la bussola con centro nel punto di osservazione: ogni direzione individua un semipiano che passa per il punto in cui si trova l'osservatore, per lo zenit, cioè la direzione "della testa" dell'osservatore, e per il punto cardinale sull'orizzonte astronomico. Tale semipiano individua anche un punto sull'orizzonte vero locale.

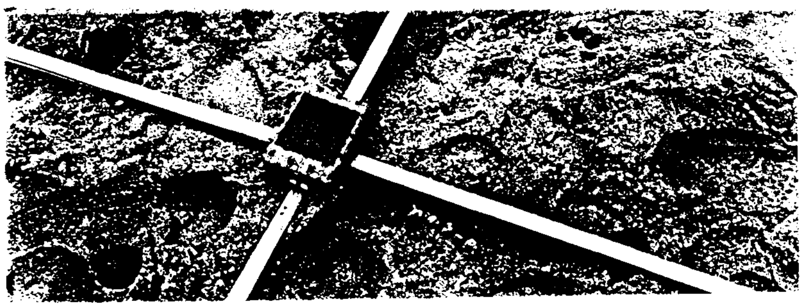
Nell'osservazione guidata dell'orizzonte usiamo diversi metodi (Lanciano N.et al, 1991) e identifichiamo sulle colline e sul Faro del porto, i punti che corrispondono al Nord e al Sud in un riferimento strettamente locale: il piano del meridiano locale incontra il Faro rosso sul molo, a Sud, e la sommità del Monte Altissimo nelle Apuane, a Nord.

La percezione della provenienza della luce del Sole attraverso le nuvole ci guida per individuare il Nord-Sud.

Riflettiamo sulla differenza che corre tra l'allineare oggetti sulla sabbia con le mani, nel micro spazio, e allineare con lo sguardo punti inaccessibili dell'orizzonte, nel macro spazio. Il controllo delle mani che fanno uno spostamento è garantito da un oggetto, uno spago teso o un'asta riconosciuta come rettilinea; lo sguardo invece "va diritto di suo".

Le direzioni dello spazio quindi sono organizzate **a partire da sé,** come davanti e dietro, in alto verso lo Zenit e in basso lungo la verticale del corpo, a destra e a sinistra; si leggono invece come **esterne a sé** (Nord, Sud, Est, Ovest) all'orizzonte.

FIGURA 4
La bussola cinese e le 4 direzioni cardinali



La misura degli angoli

La misura degli angoli è nata insieme alla misura del tempo "e il tempo invero fu fatto insieme col cielo" scrive Platone nel Timeo. 365 notti sono necessarie per riportare il Sole a sorgere nello stesso punto dell'orizzonte orientale, nella stessa costellazione, e questo ha portato forse per primi i Babilonesi intorno al 5000 a.C., in un sistema sessagesimale di computo, a dividere il cerchio dell'anno (anulus per i latini) in 360 gradi. I giorni necessari al Sole a compiere il suo ciclo sono 365 ma questo è un numero "scomodo" perché con pochi divisori. D'altra parte i giorni del calendario furono spesso divisi in 360 più 5 giorni particolari, detti epagomeni dagli egiziani. Questi giorni aggiunti a volte sono diventati i giorni del carnevale, in cui si sovvertono tutte le regole usuali.

Dunque sono i calendari solari che hanno guidato nella divisione dell'angolo giro. Anche questo numero 360 che sembra arbitrario e "inventato" dai matematici, ha invece origine dall'osservazione attenta e ripetuta del cielo.

Tanti modi per tracciare cerchi con spaghi, legni e grandi compassi di legno

Se fare un cerchio sul foglio con il compasso è un'operazione a tutti nota, proviamo ora a spostarci nel meso spazio e cerchiamo di tracciare cerchi grandi sulla sabbia, cerchi nei quali noi possiamo entrare fisicamente, di cui possiamo essere il centro o possiamo percorrere una corda.

Nei gruppi nascono tante diverse strategie:
- per mano camminiamo in tanti: tracciamo tanti cerchi concentrici intorno a una persona centrale che ruota solo su se stessa;
- in due, uno ruota su se stesso e regge l'altro che gli corre intorno, uniti a braccia tese;
- picchetto e corda;
- un bastone che ruota raso terra intorno al suo centro;
- le due gambe usate come compasso.

Mentre i primi due metodi sono basati sulla fiducia di saper valutare una distanza a occhio, conservandola nel movimento, gli altri sono a priori "più corretti".

FIGURA 5
Tanti modi di tracciare cerchi

Dal cerchio all'ellisse

Il centro si sdoppia in due punti che si allontanano: diventano i due fuochi di un'ellisse che ha asse minore pari al diametro del cerchio originario. Ne tracciamo il contorno con il metodo del giardiniere.

Se uniamo diversi archi di cerchi abbiamo curve chiuse quali "il raccordo di cerchi", figure quali la pianta del Colosseo, o di Piazza San Pietro a Roma (Castelnuovo, Barra 1976).

Disegniamo anche il Circo romano che è un raccordo di segmenti rettilinei e di archi di cerchio.

Analizziamo le altre curve ottenute dall'intreccio di cerchi di raggio diverso e ne studiamo gli assi di simmetria.

Disegniamo due cerchi di raggio r tra loro tangenti ed entrambi tangenti internamente ad un cerchio di raggio 2r.

In un cerchio di cui è cancellato il centro proviamo a ritrovarlo usando spaghi e canne di bamboo disponibili sulla spiaggia.

La stella a 8 punte

In un gruppo di 8 persone avviene la scoperta della stella a 8 punte a partire dal cerchio, con un movimento ripetuto più volte nello stesso modo, fino a tornare al punto di partenza.

a. Se 1 va in 4, cioè se fa 3 passi, si ha una stella, una figura chiusa, in cui gli 8 punti sono toccati tutti una e una sola volta;
se 1 va in 6, cioè se fa 5 passi, si ha la stessa stella, percorsa in senso inverso $3 + 5 = 8$.

b. Se 1 va in 3, cioè se fa 2 passi si ha un quadrato, una figura chiusa, in cui sono toccati solo 4 punti;
se 1 va in 7, cioè se fa 6 passi si ha lo stesso quadrato, percorso in senso inverso $2 + 6 = 8$.

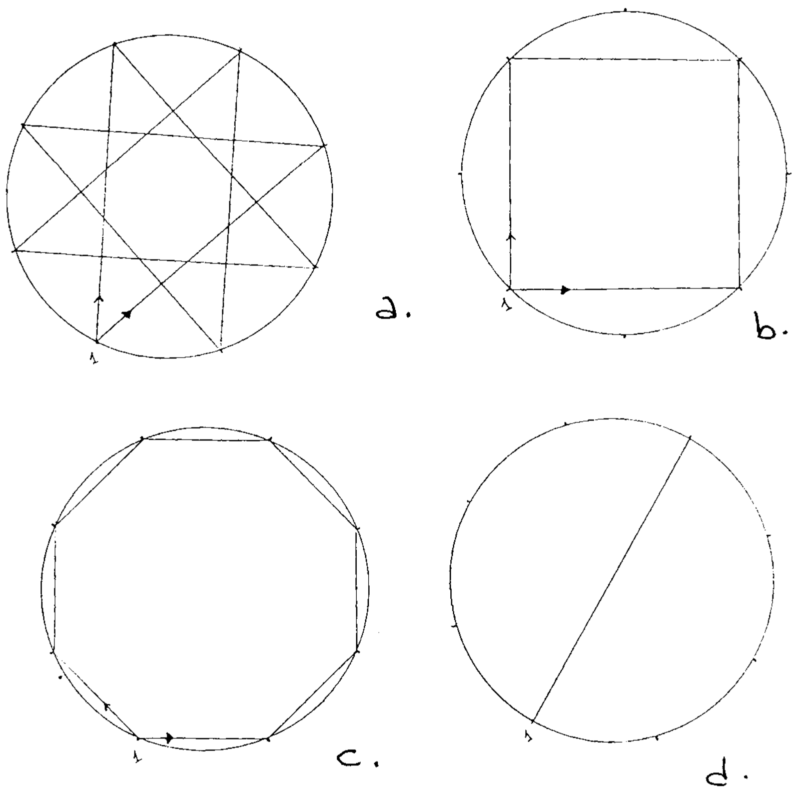
c. Se 1 va in 2, cioè se fa 1 passo, si ha un ottagono, una figura chiusa, in cui gli 8 punti sono toccati tutti una e una sola volta

se 1 va in 8, cioè se fa 7 passi, si ha lo stesso ottagono percorso in senso inverso $1 + 7 = 8$.

d. Se 1 va in 5, cioè se fa 4 passi, poi torna in 1 con altri 4 passi e fa un segmento $4 + 4 = 8$.

Il lavoro evolve verso la stella a 7 punte con la spiegazione della sequenza dei nomi dei giorni della settimana (v. anche Lanciano, 1988).

FIGURA 6



GEOMETRIA in AULA

Dal cerchio all'ellisse

Nel disegno tracciato in terra su grandi fogli di carta, marchiamo i triangoli isoperimetrici, con un lato in comune, che danno luogo all'ellisse tracciata con il metodo del giardiniere. Ragioniamo sui triangoli che non sono equivalenti come invece qualcuno suggerisce, che hanno tutti la base sulla stessa retta che è l'asse maggiore dell'ellisse.

Da un punto di vista metodologico osserviamo come il gruppo "pensa" insieme e funziona "come mente". Le osservazioni, le domande, le scoperte, le imprecisioni di linguaggio, le ipotesi sbagliate di qualcuno aiutano il gruppo.

Dall'ellisse e dal cerchio con continuità costruiamo le altre "coniche", sezioni piane del cono: la parabola e le iperboli fino al caso limite della retta.

Nel guardare i disegni tracciati sui fogli riflettiamo sulle differenze tra continuo e discreto: il tracciato dell'ellisse con il metodo del giardiniere è una linea continua, i vertici liberi dei triangoli isoperimetrici sono punti discreti: le coordinate dei punti dei vertici e la misura dei due lati dei triangoli a somma costante introducono il discreto e permettono di caratterizzare e nominare, separandoli, i punti di quella linea.

Nella geometria il compasso precede il goniometro, su cui si legge la misura con i gradi, e la riga (una bacchetta di legno diritta) precede e dà luogo al righello centimetrato: **riga e compasso** guidano la **forma** ma precedono la misura.
D'altra parte la parola compasso viene da "cum-passo", ossia tracciare o misurare col passo.

Sistemi di coordinate in cielo e in terra

Riprendiamo il **riferimento locale:** l'orizzonte con l'azimut e l'altezza o elevazione rispetto al piano dell'orizzonte astronomico. L'azimut è una coordinata angolare che si legge sul cerchio dell'orizzonte astronomico: a seconda delle convenzione, l'azimut può andare da 0° a 360°, ad esempio partendo da Sud e andando verso Est, Nord e Ovest. L'altezza sull'orizzonte invece si legge da 0° sul piano stesso dell'orizzonte fino a 90° allo zenit. Altezze negative da 0° a –90° corrispondono ad esempio agli astri sotto il nostro orizzonte.

Il riferimento polare

E'il riferimento più naturale, quello usato spontaneamente per dare le indicazioni delle località, è formato da una direzione e da una distanza: ad esempio "verso Firenze per 20 km".

"Fissati un punto O polo e una retta orientata o una semiretta x passante per O, detta asse polare, ad un punto P del piano sono associate una distanza OP = r (raggio vettore del punto) e l'angolo "f" (anomalia o ascissa angolare) tra la semiretta x e il raggio r; r ed f sono le coordinate polari del punto". (Castelnuovo G., 1969)

Le coordinate dunque sono un angolo, ossia la distanza angolare di una direzione da una direzione scelta di partenza, e una misura lineare di distanza dal centro.

Le carte del cielo

Nelle carte del cielo è possibile avere una griglia che permette a una latitudine definita, a una certa data e a una certa ora, di descrivere altezza e azimut degli astri. I miti raccontati negli antichi testi di Astronomia, spesso scritti in poesia, descrivono la posizione degli astri nel cielo con riferimento all'orizzonte e agli altri astri. E' questo un linguaggio che non ha la precisione dei numeri ma che indica dove quel mito è stato ideato ed è un modo per fornire indicazioni spaziali. Un esempio di questo è Il mito di Callisto (traduzione di Testa G., in Lanciano N., 1987).

Usualmente nelle carte del cielo sono indicate altre due coordinate angolari: ascensione retta e declinazione, che sono lette a partire dal cerchio massimo dell'Equatore Celeste, lungo i meridiani celesti.

Rispetto al cielo stellato noi siamo osservatori posti nel centro di una sfera, concava, che è tutta intorno a noi.

Rispetto alla Terra, invece, noi siamo in un punto della superficie della sfera, convessa, che è tutta sotto i nostri piedi.

Latitudine e longitudine sono le due coordinate necessarie per individuare un punto sulla superficie della sfera della Terra. In questo caso le coordinate sono due angoli.

La parola angolo viene dalla radice "auk" che significa "curvo", fa dunque riferimento ad un cerchio.

Nell'antichità la latitudine era definita da alcuni rapporti osservati in situazioni particolari di spazio e di tempo.

Leggiamo da Plinio il Vecchio (Naturalis Historia) (74), (77), (80)

"Inoltre non si possono usare ovunque gli stessi Quadranti Solari, in quanto nel giro di trecento stadi **le ombre del Sole** si modificano. Pertanto l'ombra dello stilo, che chiamano gnomone, a mezzogiorno dell'Equinozio ammonta in Egitto a un po' più di metà dello gnomone; a Roma l'ombra è al di sotto di 1/9; nella città di Ancona lo supera di 1/35; nella regione d'Italia chiamata Venezia, alle stesse ore, l'ombra risulta pari alla lunghezza dello gnomone."

"Così succede che, per **l'accrescimento variabile delle giornate**, a Meroe il giorno più lungo comprende 12 ore equinoziali e 8/9 d'ora, ma ad Alessandria 14 ore, in Italia 15, 17 in Britannia, dove le chiare notti estive garantiscono senza incertezza quello che la scienza impone di credere, e cioè che nei giorni del solstizio Estivo...le terre soggiacenti hanno giorni ininterrotti di sei mesi..."

"Occorre collegare a questa trattazione **i fenomeni che si intrecciano a cause celesti.** Non si può dubitare infatti che gli Etiopi siano riarsi dal calore dell'astro a loro vicino e, già nascendo siano simili agli ustionati, con la barba e i capelli crespi..."

Carte del cielo e dettato stellare, da Bernardi C. et al, 1991

Su un foglio con riferimento polare, in cui il centro dei cerchi corrisponde al Polo Nord Celeste (quasi coincidente con la stella Polare), si segnano le posizioni delle stelle più luminose della costellazione prescelta.

In questo caso, le due coordinate che individuano un punto sono una espressa in angoli e l'altra in ore: ogni cm di distanza di un cerchio dal centro (cioè ogni cm del raggio) è pari a 10° di declinazione, che corrisponde alla latitudine sulla Terra, ed è espressa in gradi.

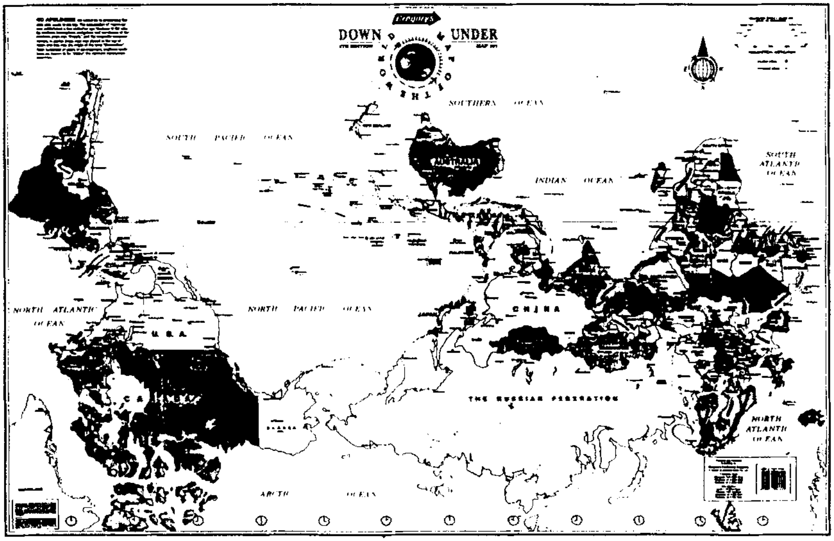
La declinazione di un astro è 0° all'Equatore e 90° al Polo Nord. L'Equatore celeste è la proiezione dal centro della terra sulla volta celeste, dell'Equatore terrestre. Per gli astri dell'emisfero celeste Sud (tra l'Equatore celeste e il Polo Sud) la declinazione è negativa.

Carte geografiche

Latitudine e longitudine possono essere visti sulla sfera del mappamondo o su una proiezione piana, una carta geografica.

"La prima carta geografica nel senso scientifico della parola, pare sia dovuta a Dicearco di Messina, un greco del 300 a.C. Nella sua rappresentazione cartografica Dicearco aveva diviso la terra con due rette, una orizzontale e una verticale. L'orizzontale partiva dalle Colonne d'Ercole (l'attuale stretto di Gibilterra) e attraverso la Sicilia, il Peloponneso e la Turchia, arrivava all'estremità orientale del mondo conosciuto, il Caucaso indiano; la verticale passava per Siene (l'attuale Assuan, città dell'Egitto al confine con il Sudan). Su queste due linee erano fissate delle unità di misura, e su tutta la Terra "rispecchiata in un disegno", poteva essere tracciato un reticolato. Ogni punto della Terra e del mare era in tal modo individuato da due numeri. La distanza dalla linea verticale e la distanza dalla linea orizzontale." (Castelnuovo E., 1998)

FIGURA 7
La carta geografica prodotta in Australia



Questa immagine impone una riflessione sulla differenza tra alto / basso e Nord / Sud, due binomi spesso erroneamente e inconsapevolmente tra loro confusi.

Il mappamondo parallelo

"Dov'è la Norvegia ?"

Usiamo un mappamondo liberato dal suo usuale sostegno e orientato con la bussola, con l'asse polare sul Nord. L'inclinazione dell'asse è trovata sistemando il mappamondo "a occhio" in modo che il piano tangente la sfera su Viareggio risulti parallelo al piano del pavimento e dell'orizzonte.

In tal modo sulla sfera della Terra vera, il piano tangente in ogni punto o paese, risulta parallelo al piano tangente la sfera del mappamondo che chiameremo per questo "mappamondo parallelo". Posto al sole possiamo leggere sul modello, in diretta, quello che succede nei vari paesi del globo, dove è giorno e dove il Sole sta per tramontare, dove è in meridiano, dove ha le ombre rivolte a Sud... (Lanciano N., 1996).

Riferimento cartesiano

Accenniamo ad alcune riflessioni circa il sistema formato dagli assi cartesiani per rappresentare lo spazio e le figure.

Ricordiamo che le parole "orizzontale" e "verticale" hanno bisogno della specifica "rispetto a" per acquisire un significato univoco. Nello spazio fisico una superficie orizzontale è data dal pelo dell'acqua, e dalle sue parallele, e in astratto è il piano tangente la sfera della Terra in un punto; la verticale è la direzione del filo a piombo: tra loro il filo a piombo e la superficie dell'acqua sono perpendicolari.

Nell'etimologia "verticale" è legato a vertice = volgere (verso l'alto), ed è contrapposto a vortice, verso il basso.

Le coordinate cartesiane sono misure lineari e ricordiamo che misura viene da men, radice anche di mese, e vuol dire Luna, origine di misure di tempo e di spazio.

Errori tipici

Riassumiamo alcuni errori tipici nell'organizzazione implicita dello spazio (v. anche Azzali E., 1997):
- Nord-Sud confusi con alto-basso (v.cartina Australia);
- "prepotenza" dei piani verticale e orizzontale;
- piano confuso con giacitura orizzontale;
- perpendicolare confuso con pendere (verticale);
- parallelo implica inconsciamente, implicitamente anche vicinanza; "partire e arrivare allo stesso punto", "procedere in parallelo";
- l'orizzonte viene considerato solo il confine tra il mare e il cielo.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

- *Azzali E., in Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria - Atti del II Internuclei scuola dell'obbligo, a cura di L.Grugnetti, Parma, 1997*
- *Bernardi C. et al, Geometria, La Nuova Italia, Firenze, 1990*
- *Castelnuovo E., Barra M., Matematica nella realtà, Boringhieri, 1976*
- *Castelnuovo E., Figure nel piano, La Nuova Italia, 1998*
- *Castelnuovo G., Lezioni di geometria analitica, Soc. Ed. D.Alighieri, 1969*
- *Ghyka M.C., Le nombre d'or, Gallimard, Parigi, 1959*
- *Lanciano N., "L'osservazione del cielo ad occhio nudo", in Le onde elettromagnetiche in astrofisica, Quaderno della S.A.It., Firenze, 1987*
- *Lanciano N., Due numeri tra cielo e terra: cinque e sette", L'educazione matematica, n 1, vol 3, Cagliari, 1988*
- *Lanciano N. et al, Dall'orizzonte al cielo, in L'educazione scientifica nella scuola elementare, a cura di F. Dupré, La Nuova Italia ed, 1991*
- *Lanciano N., L'analisi delle concezioni e l'osservazione in classe: strumenti per la definizione degli obiettivi educativi e delle strategie di insegnamento dell'astronomia nella scuola elementare in Italia", Tesi di dottorato, FPSE Università di Ginevra, 1996*
- *Lanciano N., Tra luce ed ombra: aspetti di geometria e astronomia, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol 13 n 3,5,7,9, 1990*
- *Lanciano N. et al, Geometria in città, Centro Ugo Morin, 1998*
- *Sacchetti, I., Caleidoscopio, Tecnodid, Napoli, 1993*
- *Serres M., Le origini della geometria, Feltrinelli, 1994*

Letture consigliate

- *Abbott E., Flatlandia*
- *Saint Exupéry, Il piccolo principe*
- *Rodari G., Grammatica della fantasia*

LA MEDIAZIONE DEL CALCOLATORE NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

Giampaolo Chiappini

Consiglio Nazionale delle Ricerche
Istituto per la Matematica Applicata - Genova
E-mail: chiappini@ima.ge.cnr.it

Introduzione

Il mio contributo nell'ambito di questo corso di aggiornamento è suddiviso in tre parti:

- nella prima parte cercherò di inquadrare a livello generale l'approccio seguito nella mia ricerca relativa all'uso dei sistemi multimediali nell'insegnamento/apprendimento della matematica;
- nella seconda parte cercherò di analizzare più in dettaglio il ruolo di mediazione fornito dal calcolatore nell'apprendimento della geometria del piano; realizzerò questa analisi basandomi sul sistema Cabri Géomètre attraverso anche il confronto con altri sistemi quali il Logo e gli editori grafici;
- nella terza parte cercherò di analizzare il ruolo di mediazione fornito dal calcolatore nello sviluppo di competenze coinvolte nella rappresentazione piana di oggetti dello spazio fisico reale; realizzerò questa analisi sulla base di un'esperienza da me condotta nella implementazione e sperimentazione di un sistema per lo sviluppo di tali capacità.

1. Ruolo del calcolatore nell'apprendimento della matematica

L'ottica che ho assunto nella mia ricerca relativa all'uso del calcolatore per scopi di apprendimento matematico si può sintetizzare nei seguenti tre punti generali:

- la tecnologia di per sé non può portare a un mutamento educativo;
- l'uso della tecnologia non è neutrale rispetto al sapere in gioco;
- l'efficacia sul terreno dell'apprendimento di una tecnologia non dipende solamente dalle caratteristiche del software ma anche dal modello di gestione didattica che si sviluppa nel contesto d'uso del software stesso.

Troppo spesso l'attenzione viene posta solamente sulle caratteristiche del prodotto tecnologico, partendo dal presupposto che se la tecnologia che si usa é "buona", l'educazione cambierà necessariamente in meglio. Si enfatizzano così gli aspetti di semplicità, di comodità, di interesse e di motivazione nell'uso della tecnologia senza tuttavia entrare nel merito nell'analisi delle macro-variabili che caratterizzano la complessità del rapporto tra tecnologia e apprendimento e cioè la variabile epistemologica (analisi del sapere incorporato nella tecnologia), la variabile cognitiva (l'analisi del supporto fornito sul piano cognitivo nella soluzione dei compiti), la

variabile didattica (precisazione di efficaci modelli gestione didattica nel contesto d'uso della classe).
Questa impostazione di solito genera entusiasmo iniziale per certi prodotti (si pensi al Logo e ora ai sistemi multimediali), quindi un successivo discredito. Il problema è che questi ambienti vengono spesso valutati sulla base di aspettative impossibili, non ben definite o troppo generali (si pensi, ad esempio, ad alcune delle giustificazioni adottate per motivare l'introduzione del Logo). In questo modo si nasconde la ricerca e la definizione degli obiettivi specifici per cui il ricorso ad un certo prodotto può essere significativo.
Di qui la necessità prima di tutto di calare la ricerca in precisi contesti disciplinari approfondendone gli aspetti epistemologici, cognitivi e didattici ad essi propri.

1.1 Micromondi

I sistemi che sono attualmente giudicati molto efficaci per favorire l'apprendimento in campo matematico sono basati su micromondi. La nozione di micromondo ha avuto una forte evoluzione negli ultimi 15 anni. La nozione di micromondo è cambiata: da nozione utile per insegnare al calcolatore a risolvere problemi in certi contesti circoscritti e vincolati, a nozione utile per la progettazione di ambienti di apprendimento che possono essere favorevoli all'appropriazione di conoscenze.
In generale, nella maggior parte degli apporti che si trovano in letteratura viene enfatizzata l'importanza della base epistemologica del micromondo; si afferma che un sistema basato su micromondi è particolarmente efficace per l'apprendimento matematico perché incoraggia l'alunno a esplorare l'ambiente reso disponibile dall'interfaccia. Tale ambiente, che incorpora un modello di un dominio di conoscenze matematiche, viene valutato in generale sulla base della sua capacità di sviluppare un atteggiamento esplorativo in relazione al sapere che risulta incorporato nel micromondo.
L'esplorazione è necessariamente vincolata ma vincolata, in modo da favorire l'apprendimento. Al centro del micromondo c'è il dominio di conoscenza che deve essere investigato attraverso l'interazione con il software.
Il quadro di riferimento teorico delle ricerche che hanno alla base l'analisi del ruolo dei micromondi nell'apprendimento matematico può essere schematicamente descritto dalle parole principali a cui fanno riferimento gli autori nel descrivere e nel situare il loro lavoro: "costruttivismo", "sistemi basati su chi apprende (learner centered)", "problem-based". Alla base c'é l'idea che l'apprendimento migliori se lo studente è immerso in un argomento ed é motivato a cercare nuova conoscenza e ad acquisire nuove capacità dalle necessità poste dal problema a cui sta lavorando. L'obiettivo è un apprendimento basato sull'esplorazione attiva e la costruzione personale, piuttosto che basato su un modello di tipo trasmissivo. L'approccio è quello di realizzare un apprendimento per problemi. Problemi che l'insegnante struttura in modo tale che nella loro soluzione lo studente possa, in modo naturale, affrontare tematiche pertinenti per l'apprendimento di un certo sapere. Questa descrizione, pur semplificando molto i vari aspetti trattati, cattura però le tendenze principali dell'approccio che attualmente viene

considerato efficace per l'apprendimento (almeno nel settore della didattica delle materie scientifiche e della matematica in particolare).
L'attività di soluzione di problemi nel micromondo, pur assumendo caratteristiche differenti a seconda dei sistemi, viene riconosciuta come funzionale, nel contesto d'uso, al raggiungimento di due obiettivi:

- favorire l'evoluzione delle strategie degli alunni in relazione al compito;
- favorire la costruzione di significati che permettano di stabilire una relazione tra concetti matematici e loro rappresentazioni.

Sotto quali condizioni un micromondo possa permettere il raggiungimento di questi due importanti obiettivi é attualmente un argomento di studio e di ricerca.
La ricerca in questo settore ruota attorno ad alcune domande chiave.

- Quali sono le cose nuove che si possono fare con le tecnologie e che non potevano essere realizzate prima (o che non era praticamente possibile fare)?
- Quali aspetti del pensiero matematico le nuove tecnologie possono promuovere, enfatizzare o nascondere?
- Quali modelli di gestione didattica appaiono più proficui nell'uso di un determinato sistema nella classe?

Cercherò di affrontare queste problematiche analizzando il ruolo di mediazione del calcolatore nell'apprendimento della geometria del piano e nello sviluppo di competenze nella rappresentazione piana di oggetti dello spazio fisico reale.

2. Il calcolatore nell'insegnamento/apprendimento della geometria del piano

Questa parte è stata realizzata prendendo come riferimento le ricerche sviluppate in Francia da Colette Laborde (Laborde, 1993) e in Italia da M.A. Mariotti (Mariotti, 1998) relative all'uso di Cabri Géomètre nel curriculum di geometria. Nelle lezioni del corso l'attenzione si è focalizzata ad analizzare le caratteristiche epistemologiche, cognitive e didattiche di questo sistema, anche attraverso un confronto con altri sistemi, quali LOGO e gli editori grafici.
Le ricerche condotte a livello nazionale e internazionale mettono in evidenza che la mediazione di un sistema come Cabri Géomètre può modificare il modo in cui mettersi in relazione con la conoscenza geometrica. I cambiamenti introdotti nell'attività didattica dall'uso del software possono essere discussi in termini di:

- nuovo status assunto dalle figure geometriche in quanto mediate dal computer;
- comportamento degli studenti quando affrontano compiti geometrici con la mediazione del computer.

2.1 Analisi del sapere in gioco

Nel lavoro di ricerca sviluppato da Laborde la geometria è vista come una teoria matematica per modellare lo spazio fisico e contemporaneamente come teoria autonoma con propri assiomi, oggetti, regole e problemi. Questa doppia visone della geometria si rispecchia sul piano didattico nelle due impostazioni che hanno caratterizzato la didattica della geometria a livello scolare, che ha costantemente oscillato tra un'impostazione descrittiva e una assiomatica. A tale riguardo Mariotti, mettendo in evidenza la complessità della relazione tra la dimensione intuitiva e quella teorica che caratterizza la conoscenza geometrica, parla di due differenti prospettive didattiche, quella empirica e quella deduttiva. La dicotomia tra le due impostazioni (descrittiva/assiomatica o empirica/deduttiva) è dovuta principalmente al ruolo giocato dalle figure geometriche nella geometria del piano. Il ruolo giocato dalle figure nella geometria 2D riflette questa dualità.

Secondo Laborde le figure geometriche sono:

- entità materiali tracciate su un mezzo fisico;
- oggetti di una teoria, risultanti da una astrazione dalla realtà.

Come rappresentazioni materiali (disegno) le figure rendono possibile una impressione visuale e contemporaneamente fanno riferimento a concetti teorici.

Dare conto di questo doppio ruolo, comporta distinguere tra disegno e figure:

- il disegno si riferisce all'entità materiale;
- le figure si riferiscono ad oggetti teorici in termini di "oggetti geometrici che sono descritti da testi che li definiscono".

Un disegno può essere visto come un esperimento grafico che rispetto ad una teoria gioca un ruolo simile al ruolo degli esperimenti in fisica.

Il significato di una figura non può essere dedotto solamente dal disegno, seppur idealizzato, ma deve essere dato da un testo o in un modo discorsivo.

La distinzione fra disegno materiale e disegno idealizzato comporta che:

- solo alcune caratteristiche di un disegno sono rilevanti per un dato problema da risolvere;
- un disegno non può esprimere la variabilità degli elementi della figura.

Un disegno idealizzato è solo un elemento della classe di tutti i possibili disegni relativi ad una stessa descrizione.

Secondo Mariotti una figura geometrica non è né pura immagine, né puro concetto. In accordo con Fischbein e con la sua nozione di *figural concept*, ella ritiene che le figure geometriche possiedano sia proprietà figurali che concettuali.

Il problema educativo che scaturisce da queste considerazioni di tipo epistemologico è connesso alle difficoltà di integrare i due approcci in modo che la dicotomia tra empirico/deduttivo o tra approccio descrittivo e approccio assiomatico possa in qualche modo essere risolta migliorando i risultati sul terreno dell'apprendimento.

Per affrontare questo problema cercherò di analizzare più in dettaglio le difficoltà che gli alunni incontrano nel rapporto con le figure geometriche e cercherò di approfondire la riflessione sulle nuove possibilità di mediazione offerte dall'uso di software didattici.

2.2 Origine delle difficoltà degli studenti

Nell'approccio al sapere geometrico la capacità di risolvere compiti di costruzione geometrica assume una importanza cruciale. Ogni costruzione geometrica incorpora un significato teorico che trascende il compito pratico inerente la sua costruzione. Mariotti ha messo ben in evidenza che è possibile creare una corrispondenza tra gli specifici strumenti e regole utilizzati per la costruzione e un insieme di assiomi che strutturano una parte di teoria. All'interno di questa teoria la validità di una costruzione corrisponde a un teorema.

Notiamo che nei compiti di costruzione emergono svariate difficoltà dovute principalmente al fatto che tradizionalmente nell'insegnamento della geometria non vengono usualmente presi in considerazione tutti i livelli che consentono il passaggio dal disegno materiale alla figura geometrica, così come risulta dalla sua descrizione teorica.

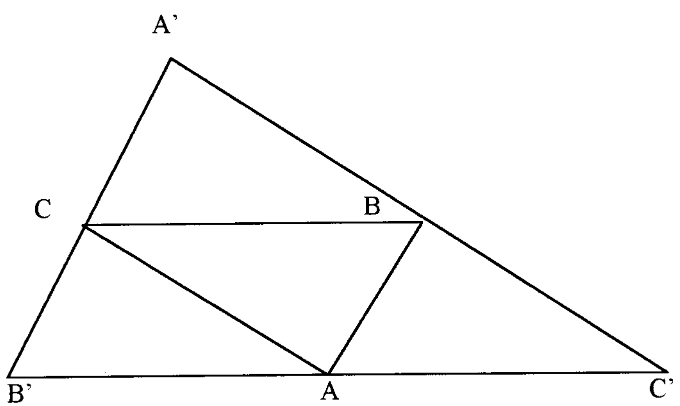
Gli studenti lavorano sul disegno materiale mentre ci si aspetta che essi lavorino sulle figure o sulla descrizione delle figure.

Per esempio, in molti casi gli studenti non considerano che un compito di costruzione possa comportare l'uso di proprietà geometriche, ma lo intendono piuttosto come la richiesta di costruire un disegno materiale visivamente corretto.

In altri casi, come messo in evidenza da Laborde, l'aspetto visuale del disegno materiale può essere di ostacolo all'analisi teorica della corrispondente figura, il che dipende dal fatto che la percezione visuale del disegno entra in conflitto con l'interpretazione del disegno stesso. Tale interpretazione deve essere supportata dal ragionamento per condurre alla soluzione del problema e, soprattutto, per permettere lo sviluppo di giustificazioni che siano fondate teoricamente.

Un'altra difficoltà messa in evidenza da Duval deriva dal fatto che in un problema geometrico la soluzione richiede rotture successive nel modo di guardare il disegno , che comportano cambiamenti di punti di vista.

L'esempio di Duval sotto riportato mette ben in evidenza questa difficoltà.



Provare che A è il punto di mezzo di B'C', sapendo che B'C'//BC, A'C'//AC, A'B'//AB.
Gli studenti sono molto attratti nel disegno dagli elementi che loro stessi hanno costruito; è difficile per loro considerare gli elementi geometrici che non sono stati disegnati, cioè guardare il disegno secondo un punto di vista diverso. Nell'esempio riportato risulta molto difficile riconoscere nel disegno tre parallelogrammi e sviluppare di conseguenza un ragionamento pertinente sfruttando proprietà che derivano da questa assunzione.

2.3 La mediazione del calcolatore

Come messo in evidenza da Laborde, disegno e figure differiscono in due principali caratteristiche: variabilità degli elementi di una figura, che è assente in un disegno; irrilevanza di proprietà di un disegno per il problema che si deve risolvere.
Il computer è stato utilizzato per progettare programmi che materializzino la molteplicità dei disegni che possono essere associati alla stessa figura.
Le caratteristiche comuni a tutti questi programmi consistono nell'uso esplicito di una descrizione della figura nella comunicazione con il computer e nella possibile variazione dei disegni associati alla stessa figura. I programmi che presentano queste caratteristiche si differenziano profondamente dagli editori grafici normalmente utilizzati per realizzare disegni geometrici per una varietà di scopi professionali e editoriali. I normali editori grafici forniscono strumenti che facilitano la realizzazione di un disegno permettendo, anche in fasi successive, di tornare ad agire su di esso con modifiche e correzioni, sapendo che in ogni momento è possibile recuperare il disegno di partenza o i disegni intermedi registrati. Lavorando con un editore grafico il soggetto sfrutta costantemente le possibilità di azione disponibili con il software, che sono sempre in corrispondenza ad un'operazione grafica che non necessita di una descrizione esplicita, ma che viene controllata solo sul piano percettivo visuale.
Lavorare con un editore grafico è molto vicino a lavorare con carta e matita. Si sfruttano le possibiltà di azione permesse dal software per tracciare sullo schermo segmenti, poligoni senza la necessità di dover in qualche modo esprimere ciò che si sta costruendo. Non c'è, in generale, alcuna possibilità di rendere visibili attraverso una opportuna procedura la variabilità di disegni che possono essere associati ad una certa figura, potendo verificare che vengono conservate alcune proprietà quando si modificano gli elementi variabili della figura stessa. L'uso degli editori grafici per nella didattica della geometria non è molto diffuso. A livello di ricerca mi risulta che sia stata realizzata un'unica sperimentazione, condotta alcuni anni fa da Iman Osta nella sua tesi di dottorato.
La necessità di una descrizione esplicita di proprietà della figura nella comunicazione con il computer e la possibilità di attualizzare sullo schermo la variabilità di disegni associati ad una figura sono invece una caratteristica fondamentale di altri sistemi, quali per esempio LOGO e Cabri Géomètre, largamente utilizzati in campo didattico.

Essi differiscono tra loro nel modo in cui si realizza la descrizione delle proprietà e nel modo in cui essi consentono la visualizzazione della variabilità connessa con la figura.
Come messo in evidenza anche dalla Laborde, in LOGO a variabilità è ottenuta solo nel linguaggio di programmazione per mezzo di procedure con variabili.
E' noto che il linguaggio LOGO può essere usato a differenti livelli.
A un livello basso il LOGO è uno strumento per realizzare disegni, sia che esso venga utilizzato assegnando comandi diretti, sia realizzando procedure senza l'uso di variabili.
E' solamente quando si utilizzano variabili e procedure ricorsive che si ha la possibilità di operare non solo con disegni ma con classi di figure. A tale riguardo osserviamo però che la variabilità associata ad una figura è incorporata nel linguaggio e si esprime di volta in volta all'atto dell'esecuzione della procedura dopo aver istanziato le variabili.
E' importato osservare inoltre che la geometria incorporata nel LOGO è una geometria di tipo metrico.
Le differenze tra il LOGO e Cabri Géomètre sono notevoli. In Cabri la realizzazione di un disegno non comporta aspetti di misura, ma è strettamente collegata alla struttura profonda della geometria euclidea. L'elemento fondamentale di ogni costruzione geometrica è il punto; alcuni oggetti geometrici sono definiti in termini di punti (per esempio una linea retta è definita per mezzo di due punti); altri oggetti sono definiti come funzioni di altri oggetti già costruiti (per esempio la retta passante per un punto, perpendicolare ad una retta data). La variabilità dei disegni si ottiene agendo direttamente sul disegno con il mouse, potendo "trascinare" sullo schermo gli elementi variabili della figura e potendo osservare di conseguenza le proprietà che si conservano. Il movimento prodotto dal trascinamento è un modo per esternalizzare l'insieme delle relazioni che definiscono una figura.
Come messo in evidenza anche da Mariotti, in Cabri la funzione di trascinamento assume una importanza cruciale. E' infatti attraverso questa funzione che lo studente può validare la costruzione realizzata: <u>il compito di costruzione è risolto quando il disegno supera il test di trascinamento</u>.

2. 4 Cambiamenti portati dal computer alla relazione con la figura.
Per cominciare a comprendere il ruolo di mediazione offerto dall'uso di Cabri nell'apprendimento della geometria mi piace partire da una attività realizzata con gli insegnanti della scuola elementare durante le ore di esercitazione del corso.
Dopo aver esplorato alcune primitive disponibili con il sistema e l'effetto grafico che producevano sullo schermo, agli insegnanti ho chiesto di costruire un quadrato. Si tratta di un classico compito che può essere risolto attraverso strategie differenti. Occorre osservare che, quando hanno affrontato questo compito, gli insegnanti avevano già partecipato alle lezioni in cui erano state discusse le caratteristiche principali del sistema, attraverso esempi sviluppati direttamente sul calcolatore e proiettati sulla parete. La discussioni aveva già riguardato anche la mediazione fornita dal sistema sul terreno didattico.

Durante la soluzione del compito gli insegnanti lavoravano in gruppo di 3-4 persone su ciascun calcolatore. Assegnato il compito, mi aspettavo che il riferimento alle attività sviluppate nelle ore di lezione, all'interno di un'attività di gruppo, potesse essere una garanzia per lo sviluppo di strategie di costruzione pertinenti.
Ho invece constatato che la maggioranza dei gruppi hanno risolto il compito o collocando quattro segmenti o disegnando quattro rette, in modo da formare un quadrato in base ad un controllo percettivo. Questi gruppi, inoltre, non sono stati in grado di usare in modo autonomo la funzione di trascinamento per validare la propria strategia. Tale validazione è stata realizzata attraverso il mio intervento.
L'approccio empirico, tipico del lavoro con carta e matita, ha avuto immediatamente il sopravvento; gli insegnanti lavoravano sul disegno lasciandosi guidare dagli aspetti percettivi, invece di esercitare un controllo della percezione dal punto di vista concettuale, sfruttando le possibilità di azione offerte dal sistema. Solo dopo aver constatato il fallimento della propria strategia, tali gruppi hanno cominciato a risolvere il compito cercando di utilizzare metodi costruttivi che permettessero di preservare le proprietà della figura quadrato quando il disegno veniva fatto variare con la funzione trascinamento. In pratica, solo dopo essersi resi conto di aver sbagliato (attraverso il mio intervento), molti insegnanti hanno cominciato a capire veramente l'importanza della funzione trascinamento e hanno cominciato ad usare in modo pertinente le possibilità di azione del software. Questa attività di esercitazione è stata molto utile perché ha permesso agli insegnanti di esperire personalmente che la funzione di trascinamento permette di validare un'azione, una serie di azioni, una intera strategia sviluppata nella soluzione di un compito di costruzione. Permette, cioè, di validare il risultato ottenuto. Abbiamo inoltre potuto riflettere sul fatto che la giustificazione sulla correttezza o meno di un risultato dipende dal metodo di verifica messo a disposizione dall'ambiente di Cabri, cioè dipende dal metodo di verifica del contesto in cui viene risolto il compito. Si è infine osservato che, perché si realizzi un salto qualitativo sul terreno dell'apprendimento geometrico occorre che l'attenzione venga spostata dalla validazione del risultato in base a metodi del contesto (funzione di trascinamento), alla produzione di giustificazioni in grado di validare la procedura risolutiva in base a motivazioni che fanno riferimento ad una teoria. Passare da giustificazioni che dipendono da metodi di verifica disponibili con il micromondo a giustificazioni che fanno riferimento a metodi di verifica della teoria (metodo deduttivo), non è né semplice, né automatico e richiede di precisare un modello di gestione didattica in grado di favorire l'appropriazione del metodo deduttivo. In questo quadro è importante anche analizzare il ruolo che il micromondo Cabri può svolgere a supporto dello sviluppo di una gestione didattica con questa finalità.
Durante le lezioni del corso e l'esercitazione abbiamo cercato di affrontare anche questa problematica. Per esempio, nonostante il poco tempo a disposizione per l'esercitazione, c'è stata la possibilità anche di effettuare un confronto tra alcune procedure che avevano superato il test di validazione.
Per l'analisi della procedura seguita in un compito di costruzione o per il confronto tra procedure diverse, Cabri mette a disposizione un importante comando, il comando

"storia", che permette di visualizzare sullo schermo, passo dopo passo, le azioni che hanno portato alla realizzazione di una determinata costruzione.
Tale comando può svolgere importanti funzioni sul terreno didattico. Come messo in evidenza da Mariotti, tale comando può permettere di sviluppare nella classe un gioco di interpretazione e di anticipazione che può essere molto importante per perseguire i seguenti obiettivi:

- Consentire agli alunni di entrare in contatto con le strategie risolutive realizzate da altri alunni, permettendo di cogliere passo dopo passo il senso delle azioni compiute in relazione all'obiettivo del compito. In questo quadro un uso del comando "storia" a supporto di una discussione collettiva dentro la classe, tesa a mettere in evidenza le motivazioni che hanno portato all'esecuzione delle azioni di costruzione che via via vengono visualizzate sullo schermo, appare appropriata e proficua sul piano didattico.
- Favorire lo sviluppo della capacità di realizzare anticipazioni sulle azioni successive da realizzare, in relazione ad un compito di costruzione e sulla base di quanto osservato e compreso sino a quel momento della procedura visualizzata sullo schermo attraverso il comando storia. Anche in questo caso una pratica collettiva di classe mediata dall'uso del comando "storia" può costituire la modalità di gestione più efficace per perseguire lo scopo descritto.
- Favorire il passaggio da giustificazioni basate sulle azioni e sugli effetti grafici da esse prodotte (che possono essere sottoposte a verifica empirica), a giustificazioni della validità della procedura messa in atto, basate sulla produzione di enunciati che gradualmente si strutturano in un quadro di tipo deduttivo.

E' importante osservare che i primi due obiettivi possono essere finalizzati sia allo sviluppo della capacità di risolvere un determinato compito di costruzione, sia all'evoluzione della giustificazione della procedura realizzata, come descritto nel terzo obiettivo.
In quest'ultimo caso è importante notare che l'interpretazione delle azioni compiute gradualmente dovrebbe strutturarsi secondo un modello di tipo deduttivo che, partendo da ipotesi iniziali e facendo riferimento a pezzi di teoria geometrica e/o a fatti precedentemente dimostrati (teoremi), fornisca una giustificazione della validità della procedura controllabile sul piano concettuale (dimostrazione).
Per esempio, provare a giustificare perché alcune costruzioni funzionano e altre no può permettere di portare gli alunni a produrre un ragionamento sulle relazioni tra le proprietà che si conservano nella costruzione, quando il disegno viene fatto variare. Ovviamente non ci aspettiamo, soprattutto nella scuola dell'obbligo, un ragionamento rigoroso di tipo deduttivo, ma lo sviluppo di un discorso in cui si cominci strutturare l'essenza del metodo deduttivo, cioè lo sviluppo della capacità di giustificare le azioni realizzate nella costruzione geometrica sulla base di un discorso che faccia riferimento a relazioni tra le proprietà della costruzione stessa.
In questo percorso il ruolo di mediazione dell'insegnante risulta cruciale. Questo tipo di apprendimento, infatti, non è il risultato della sola interazione tra alunno e software e neppure si costruisce spontaneamente come risultato dell'aver osservato sullo schermo splendide costruzioni che si modificano preservando alcune proprietà. Esso si

costruisce nell'interazione sociale, all'interno di uno spazio di lavoro in cui gli alunni possono sperimentare, sotto la guida dell'insegnante, il valore e l'importanza di giustificare la procedura realizzata secondo metodi che trascendono la sola validazione di tipo percettivo. L'uso didattico del comando storia secondo le modalità descritte può costituire la garanzia perché la gestione didattica non rimanga prigioniera delle potenzialità di visualizzazione offerte dal sistema, con il rischio di rimanere intrappolati in un puro empirismo, testimoniato, purtroppo, da numerose esperienze didattiche attualmente documentate sull'uso di Cabri.

3. Mediazione del calcolatore nella rappresentazione piana di oggetti dello spazio fisico reale

Uno degli usi più diffusi del calcolatore da parte dei ragazzi è legato alla realizzazione di giochi. Tra il numero incredibile di giochi attualmente presenti sul mercato e disponibili anche sulla rete Internet vi è una categoria di giochi che sta riscuotendo un successo sempre più crescente. Mi riferisco a quella categoria di giochi che va sotto il nome di giochi 3D.
Questi giochi presentano in generale la simulazione di un ambiente tridimensionale (quasi sempre di tipo fantastico) nel quale il ragazzo può muoversi attraverso opportuni comandi impartiti con il mouse o con specifici tasti (per esempio: avanti, indietro destra, sinistra, in alto , in basso - anche in modo combinato tra loro). Se si osserva un ragazzo alle prese con uno di questi giochi, si rimane colpiti dalla grande capacità di rispondere agli stimoli percettivi di tipo spaziale che prendono vita nella sua interazione con il software. Il ragazzo, immerso nell'ambiente, si muove in esso come si muoverebbe nell'ambiente reale, spostandosi secondo i comandi descritti in precedenza. Osserviamo che le azioni di spostamento che i ragazzi di volta in volta mettono in atto costituiscono la risposta più efficace al feedback grafico visualizzato sullo schermo e che il gioco si sviluppa nell'intreccio tra azione e feedback senza alcuna necessità di dare un'esplicitazione delle azioni compiute. La geometria soggiacente al gioco è trasparente. Anche se nel gioco il ragazzo deve coordinare punti di vista diversi o deve in qualche modo utilizzare la nozione di proiezione (per esempio,per colpire un obiettivo da un determinato posizione dello spazio 3D), questo avviene in modo implicito attraverso un controllo attivo di tipo percettivo, senza la necessità di portare su un piano di coscienza di tipo concettuale l'azione compiuta o da compiere.
Da pochissimo tempo sono disponibili sulla rete anche altri ambienti di natura 3D nella cui esplorazione vengono mobilitate competenze che richiedono, oltre al controllo di tipo percettivo, anche un controllo che, seppur in modo implicito, fa riferimento a nozioni di geometria 3D, quali quello di vista o di proiezione. Mi riferisco ad ambienti 3D realizzati attraverso tecniche di Virtual Reality Modelling Language (VRML). Si tratta di ambienti che vengono realizzati per una varietà di scopi professionali, ma anche per scopi di documentazione utile anche ai fini didattici.

Durante l'esercitazione del corso, l'esplorazione da parte dei maestri di alcuni di questi ambienti ha permesso di mettere in evidenza che le difficoltà principali nell'interazione con essi erano dovute alla necessità di dover utilizzare strumenti di navigazione che incorporavano nozioni di geometria 3D, per il cui corretto ed efficace uso nel contesto non era sufficiente il solo controllo di tipo percettivo.
Per cercare di mettere in evidenza la natura delle difficoltà che emergono nella padronanza del sistema proiettivo che sottostà ad una rappresentazione 3D, nelle lezioni del corso è stata presentata un'attività di ricerca basata su una sperimentazione volta a studiare in quale misura il calcolatore possa essere utilizzato per il superamento di difficoltà che riguardano principalmente le concettualizzazioni geometriche legate allo sviluppo delle nozioni di proiezione, di cambiamento del punto di vista, di assunzione di un sistema di riferimento.
La ricerca fa riferimento a compiti di lettura e di produzione che richiedono il passaggio da un disegno in prospettiva parallela al corrispondente in viste ortogonali e viceversa. Tali compiti vengono affrontati potendo utilizzare strumenti disponibili attraverso l'uso di un particolare software sviluppato presso l'Istituto per la Matematica Applicata di Genova.

3.1 Caratteristiche generali del software implementato

Il software, realizzato in ambiente Autocad sfruttando le potenzialità del linguaggio Autolisp, permette di affrontare i seguenti due tipi di problema :
i) data una rappresentazione di una struttura di policubi in viste ortogonali, costruire la rappresentazione della struttura in prospettiva parallela;
ii) data una particolare rappresentazione di una struttura di policubi in prospettiva parallela, costruire la rappresentazione della struttura in viste ortogonali.

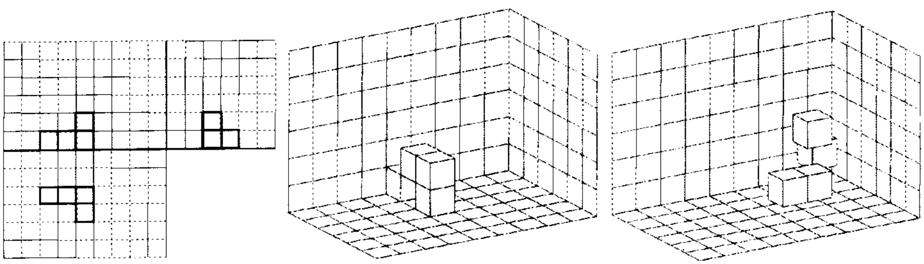
Il software é stato progettato in modo da strutturare il processo risolutivo dell'alunno in tre fasi distinte:
- fase in cui l'alunno compie le proprie osservazioni sul testo del problema e raccoglie le informazioni che ritiene utili per mettere in atto una propria strategia risolutiva (fase di anticipazione della soluzione);
- fase in cui l'alunno mette in atto la propria strategia risolutiva avvalendosi delle possibilità di azione offerte dall'ambiente software realizzato (fase di costruzione della strategia di soluzione);
- fase in cui l'alunno ha la possibilità di compiere una validazione della strategia risolutiva messa in atto, verificando la correttezza o meno dei risultati ottenuti in relazione al problema proposto (fase di validazione della strategia messa in atto).

Gli elementi geometrici di base manipolati dal software sono quadrati di lato unitario, quando si opera sulle viste, e cubi di spigolo unitario, quando si opera in prospettiva. Ciascuno dei due tipi di problema richiede al ragazzo di operare nei due ambienti, viste ortogonali e prospettiva parallela, rispettivamente come ambiente di partenza e di validazione o come ambiente di lavoro e viceversa. Selezionando uno specifico comando, il software costruisce automaticamente e visualizza sullo schermo la rappresentazione in prospettiva o in viste ortogonali corrispondenti, rispettivamente, alla rappresentazione in viste ortogonali e in prospettiva realizzata dall'alunno. Notiamo che il testo del problema, la soluzione dell'alunno e la rappresentazione costruita automaticamente dal calcolatore non possono mai essere contemporaneamente presenti sullo schermo. L'alunno può passare dall'una all'altra selezionando specifici comandi.

3. 2 Le situazioni didattiche proposte

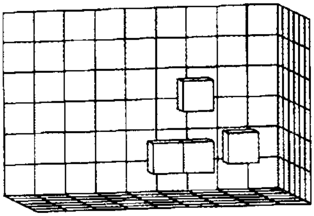
Riportiamo di seguito i testi dei problemi che gli alunni hanno affrontato nel corso della sperimentazione.

I tre testi erano accompagnati da una richiesta orale da parte dello sperimentatore del tipo: "in ciò che vedi sullo schermo é rappresentata la struttura di un oggetto. Devi scoprire di quale struttura si tratta e rappresentarla in questo nuovo ambiente".

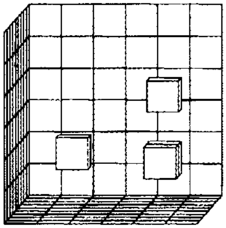


Prob A **Prob B** **Prob C**

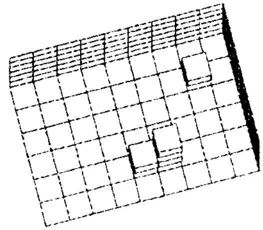
In relazione ai problemi B e C, alla visualizzazione del testo del problema sono associati alcuni comandi che offrono all'alunno la possibilità di esplorare la struttura di policubi da tre punti di vista differenti. A titolo di esempio e solo per il problema C, riportiamo di seguito le altre tre rappresentazioni disponibili con la selezione di specifici comandi.



C1



C2



C3

Nei disegni riportati la rappresentazione in prospettiva degli oggetti é opaca. Il software in realtà privilegia, per difetto, la rappresentazione trasparente (che permette di visualizzare anche le linee interne della costruzione del cubo), ma é possibile richiedere, attraverso uno specifico comando, anche la rappresentazione opaca dell'oggetto. Osserviamo inoltre che per l'esercizio B la rappresentazione opaca del testo non permette di rendersi conto della presenza di un quinto cubo, che può essere intuita nella rappresentazione trasparente e precisata dalla lettura e dal coordinamento degli altri tre punti di vista disponibili.
Notiamo che nella visualizzazioni offerte sullo schermo sia i piani del triedro che quelli delle viste sono quadrettati e colorati, in modo da favorire una messa in corrispondenza da parte dell'alunno (rosso il piano orizzontale, blu il piano frontale, giallo il piano laterale).
La costruzione della strategia risolutiva per l'esercizio A avviene attraverso il posizionamento di cubi nello spazio di lavoro definito da un triedro trirettangolo identico a quello rappresentato nei testi B e C. Tale collocazione avviene definendo implicitamente con il mouse sul piano orizzontale le coordinate di un vertice privilegiato del cubo (vertice la cui proiezione sul piano orizzontale é più vicina all'intersezione dei tre piani del triedro) e assegnando, con un dato numerico intero compreso tra 0 e 5, l'altezza rispetto a tale piano espressa in quelle unità implicitamente definite dalla quadrettatura sui piani del triedro.
A questo modo di operare e di rappresentare é soggiacente una concezione dello spazio che vede l'identificazione del cubo data dalla coppia delle coordinate della sua proiezione sul piano orizzontale vista come intersezione di riga/colonna sulla quadrettatura del piano e dalla coordinata secondo l'asse ad essa ortogonale. Occorre inoltre notare che la costruzione di ciascun cubo é possibile solo specificando le coordinate della sua proiezione solamente rispetto al piano orizzontale; pertanto le tre direzioni del triedro non sono equivalenti.
La costruzione della strategia risolutiva per gli esercizi B e C avviene con l'inserimento tramite mouse delle proiezioni desiderate sulla quadrettatura dei piani

delle viste. L'uso del software favorisce una concezione dello spazio secondo la quale ogni cubo risulta individuato dalle coordinate (riga/colonna) delle sue proiezioni sui tre piani di un sistema di riferimento euclideo tri-rettangolo,viste come intersezione di riga/colonna sulla quadrettatura dei piani. Selezionando uno specifico comando, l'alunno ha la possibilità di accedere automaticamente alla rappresentazione in viste o in prospettiva corrispondenti, rispettivamente,alla rappresentazione in prospettiva o in viste ortogonali da lui realizzata. Ciò permette di compiere una validazione delle strategie risolutive messe in atto.

3.3 Analisi a priori delle situazioni didattiche

L'analisi a priori riguarda gli aspetti concettuali inerenti l'utilizzo del software in relazione alle possibili strategie che gli alunni possono mettere in atto per risolvere le situazioni-problema proposte e ai cambiamenti di strategia nel corso dell'attività con il calcolatore.
Gli oggetti sui quali si concentra l'attività di rappresentazione dell'alunno sono configurazioni geometriche astratte (cubi e/o strutture di policubi),la cui forma e la cui collocazione nell'ambiente proposto sullo schermo non sono soggetti ad alcun vincolo di equilibrio. Non essendo oggetti tecnologici caratterizzati da una loro specifica funzione d'uso, la formazione di un'immagine mentale dell'oggetto rappresentato non può basarsi su un processo di identificazione di una forma nota, ma deve essere ogni volta costruita dall'alunno.
La situazione A pone il problema di interpretare un sistema di viste e di produrre la corrispondente rappresentazione in prospettiva.
Le strategie che gli alunni possono mettere in atto possono corrispondere a livelli di conoscenze e di anticipazioni molto diversi e possono essere messi in relazione con le informazioni che essi fissano prima di passare all'azione.
A priori abbiamo individuato 4 possibili primi approcci alla soluzione:
- procedere senza prendere appunti,cercando di costruire la rappresentazione fidandosi della memoria;
- riprodurre le viste su un foglio, anche se in modi diversi: appunti delle sole "sagome", senza riportarne le posizioni sui piani delle viste; appunti delle posizioni tramite coordinate; schizzo completo di "sagome" e "quadrettatura";
- eseguire sul foglio una rappresentazione in prospettiva, dell'oggetto, con o senza l'indicazione di una localizzazione nello spazio;
- disegnare solo una vista (quella dall'alto principalmente), con un numero posizionato sopra a ciascun quadrato a indicare il numero di cubi "presenti" in quella posizione.

In generale ci si può aspettare che il comportamento degli alunni nel mettere in atto la loro strategia risolutiva dipenda non solo dagli appunti che hanno preso, ma anche dalla loro conoscenza del sistema delle viste. Per esempio, se gli alunni non hanno mai lavorato con le proiezioni ortogonali e non conoscono le regole geometriche che le governano, possono decidere di disegnare tre oggetti diversi corrispondenti alle 3 viste come viste dall'alto, o tre oggetti che corrispondono alle viste come facciate di tre oggetti.

All'inizio l'attenzione principale degli alunni sarà centrata sulla ricostruzione della forma dell'oggetto,mentre solo in un secondo momento si porranno il problema della corretta collocazione dell'oggetto nello spazio euclideo misurato e orientato, soprattutto se nella loro anticipazione non sono state messe in qualche modo in evidenza le coordinate dell'oggetto.

Per risolvere le situazioni B e C gli alunni devono capire come é fatto l'oggetto e come é collocato nello spazio del triedro; devono raccogliere le informazioni per riuscire a riprodurre le viste, tenuto conto che la sola rappresentazione data nel testo può non essere sufficiente.

A priori abbiamo individuato quattro primi approcci alla soluzione:

- procedere senza prendere appunti, cercando di costruire la rappresentazione contando solo sulla propria memoria;
- disegnare direttamente le proiezioni ortogonali dopo aver analizzato le quattro rappresentazioni prospettiche offerte dal software, prendendo o no nota della collocazione dell'oggetto;
- riprodurre il disegno in prospettiva su un foglio per ricordarsi come é fatto, dando in questo modo per scontato di essere in grado di ricavare da esso tutte le informazioni necessarie per la rappresentazione nelle viste;
- disegnare la vista dall'alto,con un numero posizionato sopra a ciascun quadrato per indicare il numero di cubi presenti in quella posizione.

In tutti i problemi affrontati le possibilità di apprendimento sono legate alla evoluzione delle strategie e delle conoscenze degli alunni nel corso della attività. Durante il processo di realizzazione della strategia risolutiva, in relazione ad ogni azione compiuta dagli alunni,si ottiene sullo schermo la visualizzazione dell'effetto prodotto da tale azione, senza tuttavia avere alcuna indicazione sulla sua adeguatezza e pertinenza in relazione alle finalità del compito.

La validazione della propria strategia o di una specifica azione può essere effettuata in un secondo tempo,confrontando in successione cronologica il testo del problema con la rappresentazione prodotta automaticamente dal calcolatore,in relazione alla soluzione realizzata dagli alunni. Le discrepanze che gli alunni possono eventualmente osservare possono indurli a tornare sulle azioni compiute,instaurando così, in relazione al compito dato, un processo dinamico tra anticipazioni e validazioni che pensiamo possa essere significativo per la comprensione delle regole che governano la rappresentazione in viste e in prospettiva parallela.

Il software offre pertanto una possibilità di validazione ma la decisione "se , quando, come utilizzarla" spetta solamente agli alunni. Non essendo stata posta alcuna limitazione al numero di validazioni che gli alunni possono compiere nel corso di un esercizio,ci aspettiamo che ciò possa influire sul modo in cui essi la utilizzano, quindi, in ultima istanza,che possa concorrere a caratterizzare il ruolo del calcolatore nel processo di apprendimento degli alunni.

3.4 Discussione su alcuni risultati della sperimentazione.

Il ruolo del calcolatore come mediatore del processo di apprendimento degli alunni é emerso dall'analisi dei processi attraverso i quali gli alunni giungevano a superare gli errori commessi e a costruire una strategia di soluzione adeguata al compito.

Il superamento dell'errore coinvolge la capacità di mettere in discussione ciò che lo studente aveva anticipato di ottenere attraverso l'azione, e la capacità di elaborare obiettivi più adatti per la soluzione del compito.

Nel nostro contesto lo sviluppo di tali capacità è stato mediato dal sistema in uso, che ha permesso una immediata attualizzazione, attraverso immagini, delle azioni degli alunni e una possibilità di validazione delle strategie impiegate.

Nel corso della sperimentazione sono emerse le seguenti tipologie di errori:

- errori nel coordinamento delle viste;
- errori nell'adozione di un sistema di riferimento;
- errori nello sviluppo della nozione di proiezione.

I seguenti due esempi mettono in evidenza la natura delle difficoltà riscontrate nel coordinamento delle viste.

Esempio 1. La figura 1 e la figura 2 rappresentano rispettivamente il testo di un problema assegnato nella fase di familiarizzazione con il sistema e la soluzione proposta da una coppia di alunni

Fig. 1

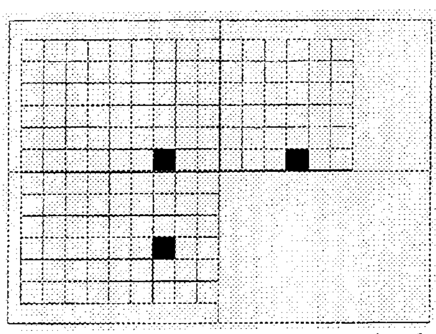
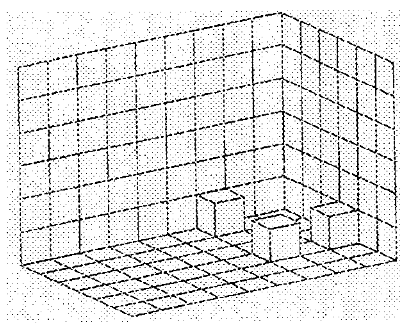


Fig. 2



L'errore consiste di aver concepito le tre proiezioni delle viste ortogonali come rappresentazioni di tre differenti oggetti. Attraverso la validazione gli alunni hanno potuto costatare che ai tre cubi da loro disegnati corrispondevano 9 proiezioni nella rappresentazione in viste ortogonali. Ciò li ha portati a mettere in discussione la propria strategia e a effettuare una esplorazione sul numero di proiezioni che il sistema metteva in corrispondenza ad ogni cubo disegnato, sino a giungere ad effettuare un coordinamento tra le tre viste.

Esempio 2. La figura 3 rappresenta il testo del problema assegnato mentre le figure 4–5–6 rappresentano tre distinte soluzioni realizzate da una coppia di alunni.

Fig. 3

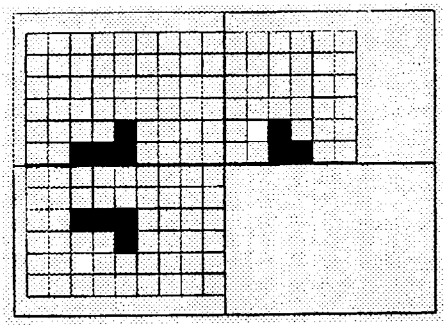


Fig. 4

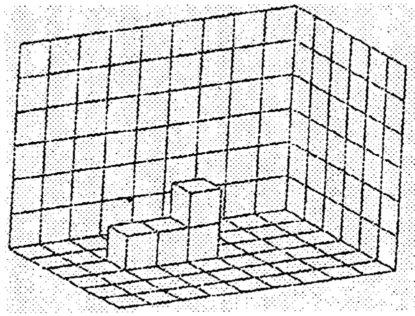


Fig. 5

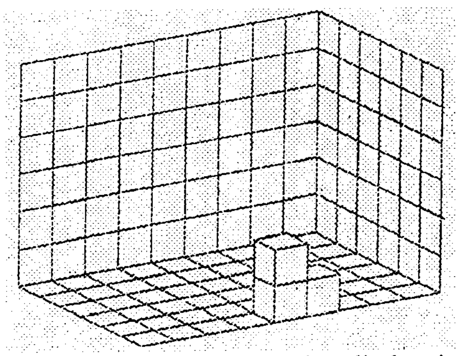
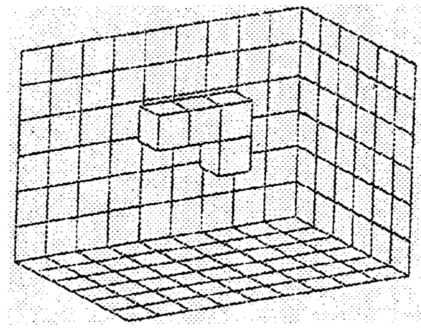


Fig.6



Notiamo come di volta in volta gli alunni abbiano realizzato le soluzioni basandosi sulle informazioni fornite da una sola vista. Solo dopo aver esperito le tre possibilità e aver verificato attraverso la possibilità della validazione la non correttezza della loro strategia, gli alunni hanno cominciato a pensare alla necessità di un coordinamento tra le viste. Le difficoltà riscontrate nell'adozione di un sistema di riferimento si sono espresse, per esempio, nel prendere in considerazione la ricostruzione della forma dell'oggetto ma non la corretta collocazione nello spazio del triedro. Gli alunni, cioè ricostruivano mentalmente, o attraverso anche l'uso di un foglio di carta, la forma dell'oggetto, ma al momento della collocazione dei cubi nello spazio del triedro non realizzavano alcuna corrispondenza tra i piani delle viste e i piani del triedro. Anche in questo caso il test di validazione ha consentito loro di giungere a mettere in discussione la loro strategia e di pervenire alla soluzione corretta. I seguenti due esempi mettono in evidenza la natura delle difficoltà riscontrate nello sviluppo della nozione di proiezione.

Esempio 3. La figura 7 rappresenta il testo del problema. Nelle fig. 8-9 sono rappresentate le proiezioni dei cubi sui piani del triedro pensate dagli alunni.

Fig. 7

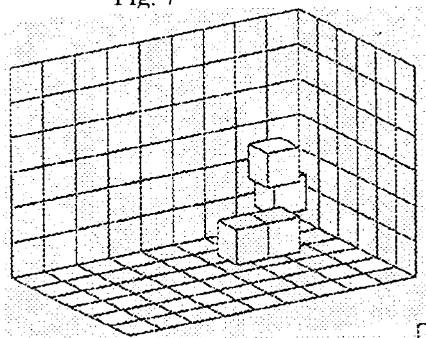


Fig.. 8

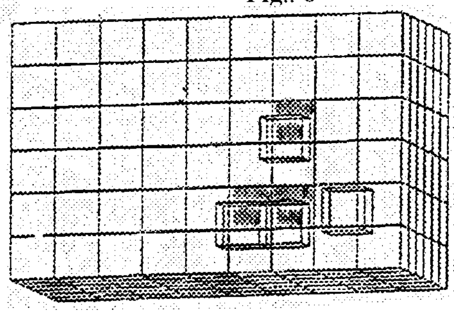
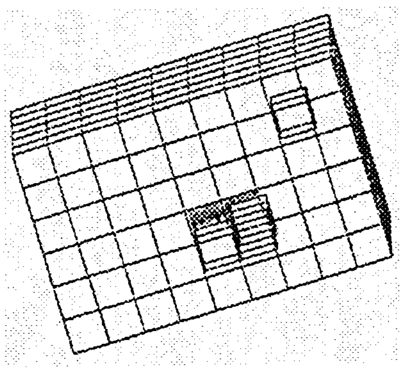


Fig. 9



Notiamo come la collocazione delle proiezioni prospettate dagli alunni sia guidata da aspetti di percezione visuale, piuttosto che da considerazioni fondate concettualmente sulla nozione di proiezione. Infatti essi scelgono come collocazione della proiezione i quadrati che risultano maggiormente" ricoperti" dalla faccia del cubo sul piano laterale. Anche in questo esempio il test di validazione è stato cruciale per la possibilità di apprendimento (si veda a tale riguardo il dialogo riportato successivamente).

Esempio 4. La fig. 10 rappresenta il testo del problema, la figura 11 rappresenta la soluzione realizzata da una coppia di alunni.

Fig. 10

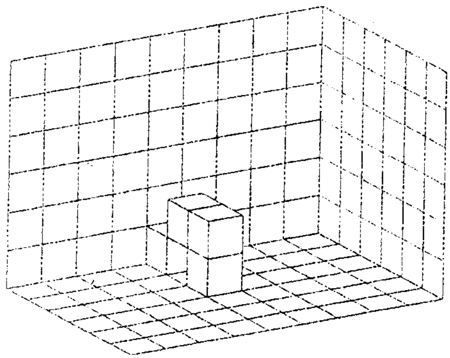
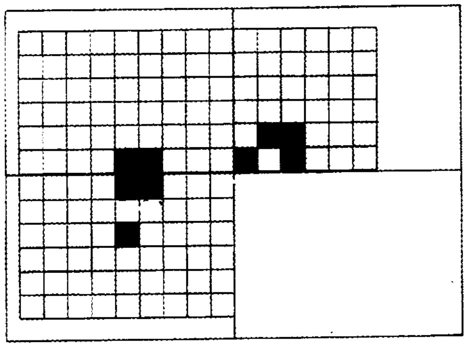


Fig. 11



In questo caso si può notare come nella vista dall'alto risulti mancante la proiezione del cubo che non appoggia sul piano orizzontale del triedro.
L'errore testimonia una concezione della proiezione come traccia o impronta lasciata da un oggetto su un piano. Occorre infine notare come questa concezione sia fortemente collegata al piano preso in considerazione; essa infatti, in generale, emerge in relazione al piano orizzontale.
Nel corso della sperimentazione abbiamo osservato che il feedback visivo connesso con la possibilità di validazione é stato utilizzato in modi diversi dagli alunni.
In alcuni casi il superamento dell'errore (ma anche la costruzione di una soluzione corretta) é stato basato su una pratica per tentativi ed errori, che si appoggiava al feedback visivo connesso con la validazione per compiere un esame di correttezza delle azioni effettuate. In tali casi le azioni che gli alunni mettevano di volta in volta in atto dipendevano da come essi percepivano il feedback visivo connesso con l'azione precedente. Per esempio, nel problema A una pratica per tentativi ed errori si é riscontrata in tutte le coppie, in relazione allo sviluppo di una concezione di sistema di riferimento 3D adeguata alla logica di funzionamento del software. Abbiamo osservato che in alcuni alunni tale pratica ha anche permesso di mettere in crisi una mis-concezione, che vedeva lo spostamento di un punto verso l'alto dello schermo coincidere sempre con un aumento della sua distanza dal piano orizzontale nel sistema di riferimento adottato.
In generale, osserviamo che la pratica per tentativi ed errori necessita di un alto numero di validazioni e si caratterizza per la messa in atto da parte degli alunni di processi cognitivi di basso livello, centrati su aspetti operazionali e tecnici che sono guidati dal feedback visivo offerto dal calcolatore. Anche se in alcuni contesti, quali quelli legati alla scoperta della logica di funzionamento del software, l'approccio

basato su tentativi ed errori risulta molto spesso essere l'unico approccio praticabile dagli alunni, osserviamo che nella soluzione dei compiti dati tale approccio risulta essere poco efficace per il processo di apprendimento degli alunni.
Nella nostra sperimentazione solo una coppia su cinque é rimasta prigioniera del ciclo azione - validazione tipico della pratica per tentativi ed errori; nello svolgimento dei vari compiti tale coppia ha continuato a mettere in atto interventi per approssimazioni successive, appoggiando ogni azione esclusivamente sulla memoria di come tali alunni avevano percepito l'ultimo feedback visivo, senza mai compiere una anticipazione globale di strategia. Osserviamo inoltre che questa coppia é stata l'unica a non essere in grado di portare a compimento l'esercizio C, per la soluzione del quale era necessario elaborare una strategia di intervento più articolata di quella che può essere messa in atto con una pratica per tentativi ed errori.

In tutte le altre coppie abbiamo invece osservato che le attualizzazioni visive offerte dal calcolatore,in relazione all'azione compiuta e alla validazione,hanno permesso agli alunni di osservare "regolarità" nel funzionamento del sistema proiettivo soggiacente all'utilizzo del software e di elaborare, in relazione ad esse, schemi di comportamento che hanno concorso alla individuazione di obiettivi intermedi via via più articolati per la messa a punto di strategie di soluzione adeguate ai vari compiti.
Le "regolarità" osservate hanno per esempio riguardato la corrispondenza che si viene a determinare tra la collocazione di un cubo nello spazio del triedro e la localizzazione delle sue proiezioni nei piani delle viste, oppure la direzione degli spigoli dei cubi in relazione ai nodi della quadrettatura dei piani del triedro nei vari punti di vista disponibili.
Abbiamo osservato che l'elaborazione di uno schema di comportamento connesso con la regolarità osservata dagli alunni é il risultato di una analisi che assume caratteristiche non formali, prodotta nella dialettica tra anticipazione - azione - attualizzazione e immagine - validazione che si realizza attraverso l'interazione con il computer. Caratteristica peculiare di questa analisi non formale compiuta con la mediazione del computer é il legame che si viene a stabilire, nel corso nella comunicazione tra gli alunni, tra la "regolarità" osservata e una o più "parole chiave" ricavate dal vocabolario personale di ciascun alunno.
Il calcolatore è uno strumento che media la possibilità di dialogo tra gli alunni. Tali dialoghi sono inerenti il sapere coinvolto nell'attività. Riportiamo di seguito il dialogo che si è sviluppato tra una coppia di alunni in relazione alla soluzione del problema C, presentato all'inizio di questa sezione. La questione affrontata in questo dialogo è relativa alla collocazione delle proiezioni dei cubi sui piani del triedro.
In maiuscolo vengono riportate le parole di uno studente e in minuscolo quelle dell'altro studente. In corsivo vengono riportati i nomi dei comandi che gli alunni utilizzano. I commenti sono preceduti dal simbolo "--", mentre gli interventi dello sperimentatore sono preceduti da "sperim".

Altri PV

ALTO

Secondo me , ah, questo é su questo lato qua perché vedi che questa sta in su.

EH SI
dovrebbe essere 4.....;
-- localizzano sulle varie facce
1,2,3,4 .... 2 QUA
METTI CUBO
Il terzo
AH SI, GIUSTO
SI, SU QUESTO QUA 2 E 4
Sperim. : Non sei d'accordo tu?
No secondo me é su questo
PERCHE' VEDI CHE LE GRIGLIE GIALLE E LE GRIGLIE BLU CHE SONO VISTE....., NON E' PROPRIO DALL'ALTO. I LATI DEL CUBO **CONVERGONO** IN GIU' , **ANCHE LE LINEE GIALLE CONVERGONO IN GIU'** . QUESTE LINEE QUA, I LATI DEL CUBO, COME SI CHIAMANO, LE ...?... VEDI CHE CONVERGONO SUL SECONDO E SUL QUATTRO
VEDI NEL SECONDO PUNTO DI VISTA CHE CONVERGEVANO IN QUESTO QUA
INVECE IN QUESTO QUA CONVERGONO IN GIU'.
Eh si, però potrebbero anche convergere ....
NO, NON POTREBBERO PERCHE' IL LATO SOTTO ..E' SOTTO.. HAI CAPITO?
QUESTO CUBO QUA LE LINEE POSSONO ..? .. PERO' SI VEDE CHE , VEDI CHE LE LINEE SI SOVRAPPONE A QUELLA DI SOTTO.
Secondo me verrebbe così anche in questo caso
TU DICI CHE DOVREBBE VENIRE NEL SECONDO
Perché tu fai così, invece io farei così.
Sperim: Chi ha ragione? Tu lo metteresti sul terzo?
Io lo metterei sul terzo
LINEE NASCOSTE
VEDI CHE SOVRAPPONE QUELLO, LA FACCIA DI SOPRA SOVRAPPONE QUELLA DI SOTTO
Non ho capito cosa vuol dire?
QUESTA FACCIA CHE VEDIAMO NERA SOVRAPPONE LA FACCIA CHE E' SOTTO CHE NON VEDIAMO.
Eh?
QUESTE LINEE CONVERGONO QUA, QUESTA NON SI VEDE E' APPOGGIATA, CONVERGONO SU QUESTO CUBO QUA.
NON HAI CAPITO ANCORA
No, disegnalo qua
QUESTA FACCIA NERA
Questa qua del cubo?
SI. SE NOI RADDRIZZASSIMO COMPLETAMENTE LA GRIGLIA

ROSSA, E SI VEDESSERO SOLAMENTE UNA LINEA BLU E UNA LINEA GIALLA, RUOTAVA IN SU ....QUESTE LINEE GIALLE QUI CHE SONO COSI', LE RUOTIAMO COSI' E QUESTO CUBO VA COSI' LO RUOTIAMO COSI', E VA SU QUESTO
Io credo che sia sul terzo.
PROVIAMO SUL TERZO
-- Lui dice proviamo sul terzo, ma non é convinto
-- Provano a inserire
FRONTE 4,4
LATO 2,4
ALTO SUL QUATTRO NATURALMENTE ; EH, E' SUL 2, VEDI CHE QUESTO GIALLO QUA, CIOE' SE LI CONGIUNGIAMO IL GIALLO E' SUL SECONDO QUINDI ANCHE IL ROSSO DEVE ESSERE PER FORZA SUL SECONDO, ALTRIMENTI NON COSTITUISCONO UN CUBO.
Ah, ho capito.
Ver CUBO
Prospettiva mia
MI SEMBRA
TESTO
Sperim : vai a vedere terzo PV
HAI CAPITO COS'E' CHE INTENDEVO IO
CIOE', SI VEDONO QUESTE LINEE QUA CHE TRAGGONO IN INGANNO, QUELLE DELLA FACCIA DI SOTTO, PERO' VISTO CON LE LINEE NASCOSTE , SI VEDE CHE LA FACCIA DI SOPRA SOVRAPPONE QUELLA DI SOTTO, CHE PUO' TRARRE IN INGANNO
HAI CAPITO?
Ma..... lui dice che é sul secondo e io non capisco perché lui dice che é sul secondo..
CERCO DI SPIEGARTELO
-- usa un foglio di carta
ATTUALMENTE LA GRIGLIA ROSSA E' MESSA COSI', LA GRIGLIA BLU E' MESSA COSI' , LA GRIGLIA GIALLA COSI'. SE NOI LA GRIGLIA BLU, CHE E' MESSA COSI', LA METTIAMO COSI', IL CUBO CHE E' MESSO COSI' LO VEDIAMO COSI'; QUESTA FACCIA QUA VA SU QUESTO QUADRATO QUA
Ho capito cosa vuoi dire, non riesco a trovarmelo nella mente.
Ah, ho capito, anche secondo me é sul due.
Io dicevo che era sul terzo perché io congiungevo questi lati cosi', invece ora ho capito che se tu lo giri e giri anche il cubo, ora praticamente é come se fosse sollevato, se tu non l'appoggi alla griglia andrebbe sul secondo

Il dialogo riportato testimonia le difficoltà connesse con la costruzione della nozione di proiezione coinvolta nella lettura di rappresentazioni in prospettiva parallela. Il dialogo è caratterizzato dalla costruzione di esperimenti mentali nei quali gli alunni fanno ruotare il triedro e contemporaneamente la struttura di policubi. Essi affrontano il problema in modo che la direzione della proiezione sia sempre ortogonale al piano dello schermo (cosa che, in modo intenzionale, non si è voluto rendere disponibile con il calcolatore). Il calcolatore svolge contemporaneamente un ruolo di mediatore dell'attività individuale e dell'attività di comunicazione, che si sviluppa nel suo contesto d'uso; esso incide sia sulle capacità di elaborazione e di trattamento delle informazioni del singolo (anche a livello di esperimenti mentali), sia sulla qualità degli scambi comunicativi che si instaurano nella coppia attraverso la sua mediazione.

Le osservazioni compiute sollevano una importante questione didattica.

Come è possibile trasformare l'analisi non formale condotta con la mediazione del computer in un'analisi che faccia riferimento ai principi della teoria geometrica coinvolta nell'attività.? Come è possibile trasformare la conoscenza in atto sviluppata con la mediazione del computer in apprendimento cosciente della conoscenza geometrica in gioco?

Si ripropone anche in questo contesto la stessa problematica affrontata nella geometria del piano con la mediazione di Cabri.

Le osservazioni e la scoperta di regolarità geometriche, favorite dall'interazione con il software, deve trovare una sistemazione teorica. Il processo di riorganizzazione teorica delle intuizioni sviluppate con la mediazione del computer non è né spontaneo, né naturale.

A differenza di Cabri questo sistema non rende disponibile un comando "storia", non rende cioè disponibile uno strumento che permette di rendere oggettiva la strategia impiegata nella soluzione di un compito, per poterla successivamente descrivere e giustificare. La possibilità dell'evoluzione delle strategie dipende quindi dalla qualità dell'interazione che si sviluppa nel contesto d'uso, facilitata tuttavia dagli strumenti disponibili con il sistema, cioè dalla possibilità di poter passare continuamente dal testo del problema all'ambiente di soluzione e da questo all'ambiente di validazione, oltre alle varie possibilità di azione e di feedback, solo in parte descritte in questo testo.

In questo processo di evoluzione delle giustificazioni degli alunni, in relazione alle strategie impiegate nella soluzione dei compiti, assume un ruolo decisivo l'insegnante.

L'insegnante svolge il ruolo cruciale di mediatore di tale processo. Nell'esempio del dialogo precedentemente riportato il suo ruolo risulta decisivo per far sì che gli esperimenti mentali compiuti dagli alunni per sviluppare un controllo attivo della percezione, possano evolvere gradualmente verso giustificazioni che facciano riferimento in modo pertinente alle nozioni geometriche in gioco nell'attività.

Il calcolatore in questo contesto gioca un duplice ruolo: da una parte esso è strumento di mediazione dell'azione degli alunni in relazione al compito, dall'altra è strumento di mediazione della comunicazione che si sviluppa nel contesto, tesa portare gli alunni ad entrare in contatto con gli aspetti teorici coinvolti nell'attività.

Bibliografia

Mariotti M.A., 1998, Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 21B, N 3, pp 209-252.

Laborde C. (1993), The computer as part of the learning environment: the case of geometry, in Keitel C. & Ruthven K. (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Nato Asi Series F, Vol. 121, Berlin: Springer Verlag, 48-67.

Osta I., 1988, L'ordinateur comme outile à l'enseignement. Une séquence didactique pour l'enseignement du reperage dans l'espace à l'aide de logiciels graphiques, These pour obtenir le titre de Docteur de l'UniversitéJoseph Fourier -Grenoble I.

Polo M., 1989, Sistema di riferimento e geometria dello spazio: analisi di comportamenti spontanei di bambini di 8-9 anni, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 11 n. 7/8.

http://www-leibniz.imag.fr/cabri-renvoi.html

http://arci01.bo.cnr.it/cabri/

PROGETTI MULTIDISCIPLINARI E MULTIMEDIALITÀ NELLA SCUOLA DI BASE

Stefania Cotoneschi - Franco Spinelli
Scuola–Città Pestalozzi - Firenze

Il lavoro per progetti, che da alcuni anni si sta sviluppando nella nostra scuola, ha ormai accumulato una serie di esperienze e di riflessioni al nostro interno, cosicché sentiamo l'esigenza di confrontarsi con altre realtà interessate a sviluppare metodologie articolate che rispecchino il modo di procedere per reti concettuali.

Abbiamo accumulato diverse esperienze nel campo dei progetti di Educazione Ambientale e ci sembra che questi siano particolarmente significativi, perché si tratta di progetti multidisciplinari che coinvolgono l'attività didattica di una o più classi e si sviluppano con l'apporto di tutti gli insegnanti di un biennio.

L'educazione ambientale considera l'ambiente come sistema di relazioni e l'uomo come uno degli organismi che in quel sistema vive ed è un processo di conoscenza e di esperienza finalizzato alla modifica dei comportamenti, o meglio si propone di mettere a punto un percorso di esperienze conoscitive e metodi per concorrere a portare le persone alla cultura del rapporto e delle relazioni, per raggiungere un comportamento di consapevolezza e responsabilità. '

Il processo cognitivo è basato sul sistemico, cioè sulla capacità di cogliere le relazioni e le diversità permette quindi di inserire i soggetti che partecipano al progetto nella dimensione della complessità.

Conoscenza, esperienza e comportamenti sono i concetti relativi ai tre livelli con cui rapportarsi all'ambiente, che l'UNESCO ha così indicato: studio SULL'AMBIENTE, attività NELL'AMBIENTE, attività PER L'AMBIENTE, con un percorso a spirale che continuamente torna su se stesso attraverso i tre momenti.

Si tratta di una interpretazione in senso lato di ambiente. In questa visione si va al di là di quella concezione che limita l'oggetto della educazione ambientale alla descrizione scientifica di un certo ecosistema, con l'elencazione dei problemi legati all'ecologia. L'ambiente di cui ci occupiamo nei nostri lavori coinvolge la natura ma anche la storia, gli aspetti sociali, economici, artistici etc.

In questo senso la lettura dell'ambiente si può' e si deve avvalere di tutte le competenze disciplinari.

Ci siamo accorti che l'ottica delle singole discipline non basta, è necessaria una più ampia rete di interpretazione che tenga conto non solo dei linguaggi e delle necessarie competenze disciplinari, ma anche delle diverse esperienze e dei saperi informali dei componenti del gruppo alunni-insegnanti.

Questo modo di lavorare utilizza linguaggi specifici diversi che concorrono alla lettura della complessità della realtà in cui si vive individualmente e collettivamente.

Il gruppo di adulti progetta ed esperimenta parti del lavoro che farà con i ragazzi. II gruppo dei ragazzi partecipa alla elaborazione del progetto, nel senso che la programmazione iniziale non deve essere rigida, si deve poter adattare in itinere alle esigenze che via via emergono (flessibilità nei tempi, nei modi).

Nella costruzione del progetto una fase importante è quella preparatoria, durante la quale si ascolta, si accoglie l'esperienza di ciascuno per individuare i problemi sui quali si lavorerà' durante il progetto stesso. È necessario partire dai saperi dei ragazzi e per questo si dedica molta attenzione alla ricognizione iniziale. La pratica dell'ascolto, dell' operatività, del coinvolgimento e della collaborazione sia a livello adulto, sia fra adulti e ragazzi, sono le caratteristiche metodologiche scelte.

L'organizzazione del lavoro si avvale di diverse procedure: lavoro individuale, di gruppo, sperimentazione diretta, lezione frontale, interviste, discussioni per problemi, ricerca su testi scritti, uso di documenti, esplorazione di movimenti, suoni, immagini.....

Elementi fondamentali del Progetto sono secondo noi, i seguenti.

- la trasversalità, *cioè un approccio al reale indipendentemente dagli occhiali disciplinari, perché l'ambiente non ha niente a che vedere con le divisioni delle discipline. Ne consegue che il lavoro è sempre svolto da una équipe, che può essere semplice (insegnante e alunni) o più articolata, con la presenza di insegnanti ed esperti esterni*.
- la flessibilità. *Non ci può essere una programmazione rigida per obiettivi parziali e finali, anche se ovviamente sono necessari vari momenti di programmazione, all'inizio e in itinere*.
- la ricerca-insieme, *cioè tutto il gruppo, nelle diverse competenze, si pone paritariamente nella dimensione della ricerca*.

Ci sembra importante rilevare i seguenti punti.

1. Lavorare allo stesso progetto nel terzo biennio (V elementare- I media) vuol dire confrontarsi nei contenuti e nel metodo di lavoro fra elementari e medie.

2. Il gruppo che progetta per quelle classi lavora nello stesso tempo a formare se stesso come équipe e a calibrare il progetto per la fascia di età.
3. La partecipazione di tutti permette di affrontare sia la complessità del contesto, dal punto di vista delle discipline e dei linguaggi, sia di costruire e gestire la complessità del progetto che emerge dal confronto e dalle competenze di tutti.
4. Ricerca insieme vuol dire porre «domande legittime» e cercarne insieme le risposte; ne deriva quindi una programmazione non rigida, flessibile, in grado di accogliere modifiche; non pensare di insegnare quello che si sa già, ma essere disponibili a esplorare ed imparare insieme e ad accettare di non arrivare a risposte definite; valorizzare il contributo di tutti e la molteplicità dei punti di vista, cercando le diversità e non solo le somiglianze; non dimenticare che noi siamo dentro l'ambiente e non osservatori esterni , che ciascuno nel gruppo di lavoro ha la sua responsabilità e diritto di intervento; i ragazzi sentono che gli insegnanti credono in quello che fanno.
5. Usare le stesse procedure di lavoro fra adulti e con i ragazzi, rendendole esplicite, permette di riflettere sulla costruzione delle conoscenze (di imparare ad imparare), di valorizzare i saperi informali di tutti mettendo sullo stesso piáno emozioni, sensazioni conoscenze, di trovare un fondamento nel reale per le discipline, oltre che un riferimento concreto con lo specifico disciplinare.
6. Impegnarsi nella costruzione di un prodotto fmale, che sia una mostra o altro, è una opportunità importante che rappresenta un momento di verifica di quanto gli alunni hanno acquisito sul piano delle conoscenze e sul piano della rielaborazione per la comunicazione.
7. La scelta di realizzare anche un ipertesto é motivata dal fatto che si sentiva la necessità di avere anche un prodotto aderente al lavoro del progetto in una forma che favorisse la comunicazione, più versatile del materiale cartaceo e, soprattutto, più adatta a rappresentare il processo seguito durante tutto il progetto che è quello delle relazioni per costruire una rete concettuale.
8. Collaborare con altre scuole anche lontane ci sembra la naturale conseguenza del privilegiare il lavoro di gruppo e il confronto. (Alcuni dei nostri progetti sono stati oggetto di scambio in progetti Comenius).
9. La rilevanza locale dell'azione educativa proposta risulta essere assai alta, infatti il lavoro sul campo, il rapporto col territorio e con gli enti locali, i diversi piani coinvolti, affettivo, cognitivo, sociale, fanno sì che tutto il percorso sia significativo per il cambiamento di comportamento delle persone coinvolte nei confronti dell'ambiente.
10. Con il lavoro per progetti siamo in presenza di: innovazione educativa, cambiamento nella organizzazione della scuola e del lavoro scolastico, in

termini di metodi e contenuti d'insegnamentoapprendimento e di relazioni (trasversalità delle iniziative, quindi colloquio tra le discipline, ma anche tra le persone; possibilità di fare ricerca-insieme).

11. È importante l'attenzione al cambiamento di conoscenze, di atteggiamenti, di valori e comportamenti. Sono rilevanti la flessibilità, la capacità di valorizzare le differenze, I'educazione all'incertezza e alla conflittualità, lo sviluppo delle qualità dinamiche, delle capacità di agire autonomamente e responsabilmente, di prendere decisioni, di convivere con l'imprevedibilità del reale.

Il progetto a cui facciamo riferimento nel nostro intervento è quello realizzato nell'Anno scolastico 1996-97 - Terzo biennio: classi quinta e prima media.

NATURARTINBOBOLI: un accordo tra uomo e natura.

Discipline coinvolte:

- Lingua italiana e scienze umane -
Indagine sociale sui visitatori di Boboli e su chi lavora nel giardino (attraverso interviste).
Ricerca sui giardini delle fiabe popolari e invenzione di una fiaba ambientata in Boboli.
- Lingua inglese - *Caccia al tesoro prima su una mappa e poi nella realtà ambientata nel giardino.*
Recita in inglese de "Il giardino segreto".
- Scienze -
Analisi di due microambienti diversi del giardino, uno più selvaggio, uno più curato dall'uomo.
Esperimenti sui hpi di terreno, osservazioni su piante e loro riconoscimento, osservazioni sugli animali.
L'acqua di una vasca e la sua popolazione .
- Matematica - *Quanto è grande il giárdino? Progettazione e costruzioni di strumenti e strategie di misurazione .*
Quanta acqua può contenere una vasca?
- Educazione Tecnica - *Le vasche e i giochi d'acqua.*
- Educazione Artistica - *Dalle statue e dagli elementi verdi a sagome come superfici su cui lavorare.*
Dalle forme della mappa del giardino alla rielaborazione fantastica di queste forme e alla progettazione di un giardino immaginario.

- Teatro -
Dall'osservazione delle statue alla ricostruzione di costumi; analisi di dipinti d' epoca .
- Educazione fisica -
Uso di due spazi verdi del giardino che in passato erano usati per danze e spettacoli per studiare movimenti e andature in accordo con l'osservazione di statue e animali .
- Musica -
Dai suoni e rumori del giardino rielaborazioni di musiche per accompagnare il movimento.

Alunni di quinta: n. 21 (14 F e 7 M) J, alunni di prima media (10 F e 10 M)

Periodo scolastico in cui si é svolto il progetto:
Dicembre: *solo lavoro fra adulti*;
Gennaio - Aprile lavoro con i ragazzi .
Contributi Esterni:
Soprintendenza ai Beni Ambientali ed Architettonici per le Provincie di Firenze e Pistoia - Direzione Giardino di Boboli;
Università degli Studi di Firenze.

Il Progetto contribuisce a realizzare i seguenti obiettivi generali del Piano Educativo di Istituto.

- Realizzazione della Continuità Educativa tra scuola elementare e scuola media.
- Progettazione collegiale nei Consigli di classe riuniti.
- Costruzione di un percorso didattico multidisciplinare e interdisciplinare .
- Applicazione e sviluppo della metodologia della "ricerca insieme" tra adulti e tra adulti e ragazzi.
- Uso della procedura dello "sfoglio disciplinare" fra adulti e fra adulti e ragazzi.
- Realizzazione di materiali ipertestuali per il Progetto "Telocomunicando: Caro computer ti presento i miei tesori" del M.P.I. e della STET.
- Sviluppo di tematiche di educazione ambientale nell'ambito del Progetto Europeo Comenius in collaborazione con le scuole: "Kiiminkijoen" Koulu, Finlandia e"Korfaltsskolan" di Ostersund, Svezia.

Nella fase iniziale abbiamo seguito il seguente itinerario:

* rilevamento dei saperi informali:

- associazione libera di 10 parole su «giardino» e successivamente su «Bo boli»;
- elaborato grafico: disegno su un foglio diviso in tre parti, con parole, numeri, poesie..... .

* Sfoglio empirico dell'ambiente:

- visita al Giardino senza alcuna consegna precisa se non quella di o,sservare e registrare emozioni;
- brain-storming: le due classi vengono divise in quattro gruppi; i bambini dei diversi gruppi scrivono su un cartellone tutte le associazioni libere a partire dalla parola «giardino di Boboli»;
- raccolta delle parole in categorie all' interno degli stessi gruppi;
- confronto delle categorie emerse nel lavoro dei gruppi e selezione di 14 parole che possano costituire una mappa concettuale di relazioni: COLORI, REGOLE, TEMPO, ANIMALI, SENSAZIONI, NON VIVENTE, AZIONI, PERSONE, IMMAGINARIO, VEGETAZIONE, COSTRUZIONI, ACQUA, FORME, ATMOSFERA;
- costruzionee di percorsi logici utilizzando grupp'i di tre o quattro parole scelte tra le 14 (lavoro in piccoli gruppi interclasse).

* Sfoglio disciplinare:
- ai ragazzi è stato chiesto:

« GIARDINO DI BOBOLI. Cosa ti piacerebbe scoprire, immaginare, fare»?
Riguardando collettivamente le richieste, abbiamo raggruppato tutte quelle che potevano essere soddisfatte da una stessa disciplina (cosa possiamo sapere con gli «occhiali» delle scienze, della storia, dell'educazione artistica);
- individuazione di percorsi possibili all'interno delle singole discipline e definizione della programmazione.

La parte del progetto su cui ci soffermeremo é quella che riguarda la matematica in quinta, ma prima é utile far riferimento a qualche passo dei programmi dell' 85 per la scuola elementare.

"L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita";

"non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, I'attività di matematizzazione, la risoluzione dei problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione";

“ le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo”.

Condividendo completamente queste asserzioni dei programmi, ci siamo sforzati di creare situazioni adatte dal punto di vista didattico per realizzare un insegnamento/apprendimento della matematica consono a queste indicazioni. La matematica diventa, al pari delle altre discipline, uno strumento di ricerca, di lettura, di comprensione; le competenze che si costruiscono sono pienamente giustificate da domande legittime che sorgono durante la ricerca.

Gli aspetti metodologici vengono molto curati; alcuni vanno qui ricordati per permettere una migliore comprensione del lavoro:

- il luogo deve essere vicino alla scuola per permettere di lavorare spesso “sul campo”;
- il tema deve essere ben delimitato perché la ricerca non sia troppo ampia e poco definita;
- il titolo scelto fin dall’ inizio deve essere indicativo della ricerca;
- i problemi devono sorgere da reali curiosità dei ragazzi e possono, incorso d’ opera, modificare 1’ attività;
- è necessario che ci siano alcune domande legittime, ossia domande alle quali con il nostro lavoro di ricerca possiamo dare risposta e che non siano percepite dai ragazzi come argomenti che 1’ insegnante deve trattare.

Durante la fase iniziale del progetto “Naturartinboboli: un accordo tra uomo e natura”, cioè nella fase della ricognizione dei saperi informali e della progettazione insieme ai ragazzi, abbiamo cercato di stimolare domande e problemi guardando l’ambiente “con gli occhiali” delle diverse discipline.

Quando siamo arrivati a parlare di matematica, i ragazzi hanno pensato che con essa avremmo potuto: (si sono raccolte le proposte in una conversazione a classe intera).

- disegnare dei “luoghi” che hanno una forma geometrica per poterli misurare (con luoghi essi intendevano prati, aiuole, fontane, vialetti...);
- trovare quanto è grande il giardino
- quanto è lungo, quanto è largo,
- quanto è l’area,
- quanto è il perimetro
- quanto è profonda l’acqua delle vasche.

Si decide di lavorare su due problemi: - *quanto è grande il giardino* - *e* - *quanta acqua c'è nella vasca di Nettuno.*

COME SI POTREBBE FARE...

Molto spazio si da' alla discussione per porre domande e individuare problemi.

Le strategie di soluzione possibili vengono anche discusse e si decide insieme quali siano realizzabili. Si danno esempi di proposte e di attività scaturite dalle discussioni in classe seguendo la cronologie del lavoro svolto.

Quanto è grande il giardino

- Misura di lunghezze sul campo.
- Costruzione e uso di un odometro (utilizzando una vecchia ruota di bicicletta), uso del contapassi. Lavoro sulla circonferenza e sulla media aritmetica. Approssimazione di misure lineari.
- Misura di lunghezze sulla carta. Dalle misure prese nella realtà alla scala della mappa usata. Determinazione del perimetro del giardino.
- Misura di aree su carta attraverso la quadrettatura .
- Misura di aree tramite «pesatura»
- Ingrandimenti e riduzioni di forme. Scala e misure di aree.
- Determinazione dell'area reale del giardino.

Quanto è grande la vasca del Nettuno

- Rilievo a vista della forma della vasca.
- Osservazioni sulla simmetria .
- Misura del perimetro della vasca.
- Osservazioni sull' acqua della vasca.
- Il concetto di volume.
- Misura di volumi.
- Capacità di recipienti, riempimento con cubetti e con acqua.
- Misura delle tre dimensioni e scoperta della formula per il calcolo del volume di solidi "semplici".
- Relazione fra misure di capacità e misure di volume (1 dm^3 - 1 litro) .
- Scala e misura di volumi.
- Costruzione di un modellino della vasca.
- Determinazione del volume della vasca utilizzando il modellino.
- Determinazione del volume dell'acqua della vasca attraverso la misura dell'area e della profondità.

Una delle domande più frequenti riguardo ai nostri progetti é proprio quella del rapporto che esiste fra il progetto e la programmazione curricolare, così abbiamo elencato anche questa serie di obiettivi.

- Individuare, formulare, risolvere problemi.
- Individuare situazioni problematiche in ambiti di esperienza.
- Risolvere problemi con possibilità di soluzioni diverse .
- Risolvere problemi di geometria, anche grafici.
- Approfondire i concetti relativi alla misura e all’uso delle principali unità internazionali.
- Approfondire i concetti relativi alla misura del tempo.
- Utilizzare il concetto di perimetro in opportune situazioni.
- Osservare e riconoscere le caratteristiche del cerchio.
- Consolidare il concetto di area.
- Acquisire il concetto di volume.
- Riconoscere alcune trasformazioni geometriche.
- Interpretare, costruire ed usare semplici strumenti statistici.
- Acquisire il concetto di “scala” e usarlo nella costruzione di mappe e nella lettura di carte e mappe.

Ci sembra evidente che il lavoro del progetto si possa a tutti gli effetti considerare inserito a pieno nelle attività previste dal curricolo, anzi ci sembra questo il pregio maggiore di questa metodologia, quello che ci ha spinto più volte a ripetere esperienze simili in questa fascia di età.

Utilizzazione della multimedialità nella didattica

Il nostro lavoro sembra ben descrivibile attraverso una narrazione cronologica, ma subito ci si accorge che ciò è insoddisfacente, poiché ogni momento è collegato a piani di intervento diversi. Alla narrazione si sovrappone una rete di lettura complessa, nella quale si intrecciano alcuni percorsi lineari relativi a punti di vista specifici.

Per documentare e per riflettere su un progetto del genere, é quindi necessario uno strumento complesso e articolato, uno strumento ipertestuale, che si adatta bene a realizzare il prodotto del lavoro di ricerca e permette di riflettere sul processo di costruzione della rete di conoscenze.

Sia lavorando con i bambini della scuola elementare che con quelli della secondaria, resta immutato il diverso approccio alla conoscenza che i nuovi mezzi della comunicazione elettronica richiedono: si tratta di dare spazio ad un pensiero associativo e non lineare, che permetta percorsi plurimi all’interno dell’oggetto del conoscere e della sua comunicazione.

L’ipertesto può essere visto, quindi, come una ragnatela che ha una pagina iniziale collegata (attraverso bottoni, parole calde, campi attivi) con pagine di sviluppo, che a loro volta possono essere dei nodi dai quali partono altri collegamenti con altre pagine di sviluppo.

Le nuove modalità della comunicazione elettronica richiedono contaminazioni tra piani disciplinari, perciò a priori non si possono stabilire steccati troppo rigidi tra le materie e si deve privilegiare, invece, una procedura aperta. All’utente finale del prodotto comunicativo di tipo ipermediale apparirà una sorta di navigazione libera e anarchica, ma da parte di chi costruisce questo tipo di comunicazione deve esserci, a priori, una struttura di riferimento, una specie di sceneggiatura, che evidenzi chiaramente gli incroci della rete ipertestuale.

Conviene concentrare l’attenzione sulla strutturazione del prodotto ipertestuale o ipermediale, perché è qui che si misura più evidentemente il cambiamento di prospettiva operato dalle nuove tecnologie nel campo della comunicazione e dell’educazioneapprendimento. Questi atti comunicativi fanno uso di media diversissimi tra loro, che possono utilizzare parole, immagini, sia statiche sia in movimento, e suoni, senza per questo riprodurre in piccolo l’esperienza televisiva, molto passiva, ma anzi esaltando gli aspetti di interattività che il mezzo computer permette. Non solo, c’è una differenza sostanziale tra come si articola un percorso conoscitivo e come si decide di comunicarlo; tra la fase conoscitiva di un oggetto e quella della comunicazione ad altri del suo contenutosi produce uno scarto del punto di vista, dall’io al tu.

Da una parte si può procedere con fasi di libera associazione di parole, di emersione della soggettività; dall’altra bisogna riacquistare un punto di vista comune, che si ponga dal versante di colui che riceverà l’atto comunicativo. La differenza con altri tipi di comunicazione è che qui il ricevente è chiamato ad interagire con il testo, a manipolarlo, a cambiarlo se occorre.

L’opportunità che gli ipermedia forniscono è di utilizzare e inserire informazioni codificate in media diversi (foto, video, suoni, testi scritti, grafici) e di fare entrare nelle classi un repertorio molto ricco di strumenti e materiali. Gli alunni sono impegnati in attività di lettura e interpretazione dei materiali che utilizzano codici differenti e in operazioni volte a tradurre le informazioni da un codice all’altro (decidere quale linguaggio utilizzare per comunicare un’informazione, scegliere tra le rappresentazioni grafiche quella più adeguata, produrre simboli o icone). La costruzione di un ipertesto sollecita quindi un’attenzione particolare alla pluralità dei linguaggi e alle loro regole di funzionamento.

Nel corso degli anni la nostra scuola ha utilizzato il computer nella didattica, prevalentemente per programmi di scrittura e calcolo; dal 1994, con la partecipazione al progetto «Telecomunicando ti presento i miei tesori» (M. P. I. e STET), è iniziata la nostra esperienza nella progettazione e costruzione di ipertesti.

Quasi tutte le scuole partecipanti al progetto hanno lavorato intorno alla conoscenza di un bene artistico, possibilmente poco conosciuto, della propria città. Se di solito il tema ha attivato prevalentemente discipline ruotanti intorno all'area storico/artistica, nella nostra scuola abbiamo allargato la ricerca anche alle discipline tecnico scientifiche, in modo da coinvolgere l'intero consiglio di classe.

Nel portare avanti i tre progetti realizzati per Telocomunicando, abbiamo seguito il percorso metodologico già in atto da tempo nella nostra scuola, quello dei progetti multidisciplinari per l'educazione ambientale.

Lo strumento ipertesto c'è sembrato subito il più adatto a riprodurre il procedimento del costruire relazioni all'interno di una mappa concettuale.

Uno dei momenti didatticamente più significativi della realizzazione dei nostri ipermedia è stato la progettazione, che è avvenuta attraverso l'elaborazione di story board.

Gli alunni hanno realizzato queste progettazioni in piccoli gruppi: stendendo la ragnatela dei collegamenti tra i vari percorsi, scegliendo i testi e il materiale iconografico più coerente e comunicativo, inserendo giochi per rendere più appetibile la «scoperta» nella navigazione e inserendo suoni e musiche. Sempre in questo ambito è stata formulata l'interfaccia grafica cioè si è stabilito come doveva presentarsi esteticamente la «pagina», quindi si è pensato non solo a risolvere il problema della comunicazione dei contenuti, ma anche a creare una cornice estetica funzionale per facilitare la comunicazione.

Bibliografia

AA.VV., Isfol Strumenti e ricerche - Educazione ambientale: gli indicatori di qualità Franco Angeli M1 1991.

F. FRABBONI, Ambiente e educazione - Laterza Bari 1990.

R. SEMERARO, Educazione ambientale Ecologia, Istruzione. -F. Angeli MI 1992.

PONTECORVO, AIELLO, ZUCCHERMAGLIO, Discutendo si impara, La Nuova Italia 1991.

S. COTONESCHI, F. SPINELLI, Naturartinboboli: Un accordo tra uomo e natura, in L'Insegnamento della Matematica e delle scienze integrate Vol.21A - N.5 Settembre 1998.

UN APPROCCIO MULTIMEDIALE PER LA FORMAZIONE E L'AGGIORNAMENTO DEGLI INSEGNANTI DI MATEMATICA

Vinicio Villani
Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

In ambito internazionale la documentazione audiovisiva delle dinamiche di insegnamento-apprendimento sta assumendo una crescente rilevanza. Basti ricordare le centinaia di ore di lezioni videoregistrate qualche anno fa in classi di scuole secondarie di vari paesi, nell'ambito dell'indagine internazionale TIMSS (Third International Mathematics and Science Study). In Italia finora poco è stato fatto in questa direzione. Mi sembra quindi opportuno esporre qui di seguito le principali caratteristiche di un'esperienza pilota realizzata nel corso dell'anno scolastico 1997-98.

Un (modesto) finanziamento del Ministero della P.I. ha consentito la costituzione di un gruppo di lavoro del quale facevano parte 4 docenti del Seminario Didattico del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, 5 insegnanti del primo biennio di vari tipi di Scuole Secondarie Superiori di tre regioni italiane, e una studentessa, a quel tempo laureanda in Matematica all'Università di Pisa.

Grazie alla disponibilità degli insegnanti e delle strutture scolastiche coinvolte, abbiamo potuto effettuare alcune ore di riprese (artigianali) video e audio nelle loro classi. Voglio precisare che si è trattato di lezioni "normali" tenute in classi "normali", nel senso che la presenza della telecamera non ha modificato il normale svolgimento delle lezioni. Detto in maniera ancor più esplicita: né le esposizioni degli insegnanti, né gli interventi degli studenti erano stati in alcun modo "concordati" preventivamente.

Lo scopo dichiarato del progetto era quello di estrarre dal complesso delle registrazioni alcune brevi sequenze, da utilizzare poi come base di discussione in occasione di attività di formazione di insegnanti (per es. corsi universitari di didattica della matematica, o corsi post-laurea nell'ambito delle istituende scuole di specializzazione per insegnanti secondari) nonché per l'aggiornamento e l'autoaggiornamento di insegnanti in servizio.

Poiché ci premeva richiamare l'attenzione dei destinatari del prodotto multimediale sugli aspetti metodologici dei processi di insegnamento-apprendimento, piuttosto che sulla trasmissione di specifici contenuti, abbiamo privilegiato argomenti classici, soprattutto di algebra e in un caso di geometria euclidea.

All'inizio non disponevamo di una "scaletta" dettagliata per la costruzione del prodotto finale al quale stavamo lavorando. Ma due sono stati gli aspetti ricorrenti in tutte le lezioni videoregistrate che ci hanno maggiormente colpito:

- *Le interazioni insegnante-allievi: domande, risposte, silenzi.*
- *Gli imprevisti: ambiguità, fraintendimenti, errori.*

Di conseguenza, abbiamo deciso di lavorare su questi due aspetti, assumendoli come titoli delle due parti (della durata di circa 30 minuti ciascuna) di un'unica videocassetta, formata da vari brevi spezzoni particolarmente significativi al riguardo.

Abbiamo quindi proposto la cassetta alla visione e alla discussione di gruppi ristretti di insegnanti, in due incontri organizzati rispettivamente a Viareggio (Giugno 1998) e a Lucca (Novembre 1998).

In questa sede devo limitarmi a descrivere a parole le principali risultanze emerse, pur consapevole che una visione diretta sarebbe stata di gran lunga più efficace:

- La documentazione audiovisiva è risultata estremamente coinvolgente per tutti i partecipanti e ne sono seguite discussioni assai vivaci e approfondite. In particolare, i partecipanti hanno avuto modo di rendersi conto "dal vivo" che uno stesso argomento può essere presentato secondo numerosi stili d'insegnamento differenti: lezione frontale, discussione a piccoli gruppi, discussione collettiva di tutta la classe, lavoro in laboratorio di informatica come premessa ad una successiva sistemazione teorica, ecc.
- Gli stessi insegnanti protagonisti delle videoregistrazioni (che erano presenti all'incontro di Lucca) hanno potuto confrontare con maggiore distacco i "punti di vista" degli studenti con il proprio "punto di vista" personale. Tutti si sono meravigliati nel rilevare episodi ai quali nel corso della loro attività in classe non avevano fatto caso.

Ecco un tipico esempio relativo alle interazioni insegnante-allievi: tutti indistintamente gli insegnanti lasciavano troppo poco tempo agli allievi per riflettere e per rispondere a domande non di routine (con la conseguenza che anche nel caso di docenti convinti di avere praticato un metodo di insegnamento interattivo, era quasi sempre lo stesso insegnante a dare anzitempo una "sua" risposta alla sua domanda).

Ed ecco un secondo esempio relativo agli imprevisti documentati dalle videoriprese: nonostante un indubbio impegno alla chiarezza espositiva da parte degli insegnanti, si è registrata un'elevata frequenza di fraintendimenti (alcuni veramente fantasiosi) da parte degli allievi, anche su aspetti apparentemente banali. Per es. si è visto che basta un disegno non perfetto alla lavagna per trarre in inganno buona parte degli studenti, o che un termine matematico non familiare (nel caso specifico si trattava della parola "corrispondenza biunivoca") benché scandito assai chiaramente dall'insegnante, risulta poi trascritto sui quaderni degli allievi in forma distorta nei modi più svariati e fantasiosi ("corrispondenza biunica", "corrispondenza biulivica", ecc).

Com'era naturale, e in certo senso auspicabile, durante i due incontri di Lucca e di Viareggio sono stati evidenziati anche i difetti e i limiti di questo primo tentativo di documentazione audiovisiva e sono state avanzate proposte concrete per migliorare future edizioni del prodotto.
Trascrivo le principali indicazioni emerse:

- Va migliorata la resa tecnica, soprattutto per quanto riguarda l'audio, perché a volte il brusio di fondo della classe rende difficilmente intelligibili gli interventi estemporanei dai banchi. E' altresì opportuno disporre di almeno due telecamere, onde riuscire a documentare simultaneamente i punti di vista dell'insegnante e degli allievi.
- Per consentire ai fruitori del prodotto di "entrare in situazione" è necessario corredare la documentazione audiovisiva di tutta una serie di informazioni supplementari, come per es.:

- precisazioni sul programma svolto in precedenza;
- precisazioni sul programma che ci si propone di sviluppare nel seguito;
- interviste agli insegnanti videoregistrati, chiedendo ad essi di esplicitare gli obiettivi specifici che si erano prefissi a priori in vista della lezione destinata ad essere videoregistrata, seguite da interviste "a caldo" al termine della lezione, volte a stabilire un confronto fra le loro aspettative a priori e lo svolgimento effettivo della lezione, e affiancate infine, ove possibile, da ulteriori interviste, dopo avere visto la registrazione della propria lezione e gli elaborati degli studenti;
- pagine del libro di testo relative agli argomenti trattati nella lezione;

- pagine tratte dai quaderni degli allievi, relative agli appunti presi (o non presi ...) durante la lezione;
- pagine tratte dai quaderni degli allievi, con le soluzioni degli esercizi assegnati per casa al termine della lezione (in duplice versione: pagine prima della correzione in classe e pagine con le aggiunte e le precisazioni inserite a seguito della correzione).

- L'eccessiva ricchezza di suggestioni trasmesse dal prodotto audiovisivo lo rende di difficile decodificazione in vista di una discussione mirata, per cui da più parti è stata sollecitata una "guida di lettura". Ad esempio potrebbe essere opportuno intercalare le sequenze video con interruzioni programmate, fornendo suggerimenti per eventuali discussioni finalizzate a mettere in risalto specifici aspetti didattici, pedagogici, contenutistici, intuizioni felici, occasioni mancate,... Si potrebbero anche inserire domande provocatorie del tipo:
"Cosa avreste fatto voi a questo punto?",
"Siete d'accordo con ciò che ha detto or ora l'insegnante?",
"La sua gestione della lavagna è stata efficace?",
"Il suo linguaggio è stato chiaro?",
"E` stato comprensibile alla classe?",
"L'esemplificazione fornita è stata esauriente?",
"L'interazione fra l'insegnante e la classe ha coinvolto solo pochi allievi particolarmente motivati, o anche tutti gli altri?",
"Quali esercizi avreste proposto voi per verificare l'acquisizione o meno di questo o quel concetto?",...

Di tutti questi rilievi critici e di queste proposte migliorative cercheremo di tenere conto, corredando le future registrazioni con materiale ausiliario del tipo detto, e rendendo il tutto disponibile su un CD.

Un incoraggiamento a proseguire nel cammino appena iniziato ci è venuto dal fatto che i partecipanti agli incontri di Lucca e di Viareggio, pur con accentuazioni diverse, hanno sinceramente apprezzato il lavoro finora svolto, ritenendolo utile sia per un'autovalutazione dell'efficacia dell'impostazione didattica da parte degli stessi insegnanti coinvolti nelle videoregistrazioni, sia per attività di formazione e aggiornamento a più ampio raggio.

Avviandomi alla conclusione di questa presentazione, vorrei ribadire esplicitamente un punto che peraltro dovrebbe essere risultato chiaro già da quanto detto finora: non era e non è nostro obiettivo presentare esempi di "lezioni perfette" destinate ad essere imitate, quanto piuttosto una pluralità di approcci, per documentare il fatto che anche nell'insegnamento della matematica, e anche negli argomenti più tradizionali, sono possibili diversi stili di insegnamento, diversi metodi di valutazione, diversi tipi di "contratto didattico" tra insegnanti e allievi, ognuno con i suoi pregi e i suoi difetti.

Infine, desidero esprimere il mio più vivo ringraziamento e apprezzamento per gli insegnanti e gli allievi che hanno accettato di partecipare al progetto e di mettere pubblicamente in discussione il loro operato.

BIBLIOGRAFIA

Una documentazione esauriente di quanto finora realizzato si trova nella tesi (non pubblicata) di Lucia BETTINI: "Il mezzo audiovisivo come strumento per la ricerca didattica", Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, 1998.

GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ: REALE O VIRTUALE [1]

Maria G. Bartolini Bussi

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università degli studi di Modena e Reggio Emilia
E-mail: bartolini@unimo.it

Introduzione

Nell'accezione corrente si parla di 'documento multimediale' intendendo un documento contenente testo, suoni, immagini, filmati ; un computer si dice multimediale quando è dotato di scheda sonora, microfono, altoparlanti, telecamera, eccetera. In molte scuole si costruiscono ambienti virtuali o si esplorano ambienti virtuali (creati dall'insegnante o disponibili su internet o su un cdrom locale). La tecnologia informatica è quindi chiamata in gioco con forza dal titolo di questo corso per insegnanti. In questo articolo, tuttavia, il termine è interpretato in senso più ampio, includendo nell'approccio multimediale tutto ciò che introduce novità significative rispetto al modo tradizionale di insegnare matematica con carta, penna, lavagna e ascolto dell'insegnante. Nel seguito verranno illustrate brevemente alcune ricerche, rinviando per dettagli alla bibliografia.

La drammatizzazione : il Menone nella scuola elementare

Il dialogo è uno scambio di battute, intese in senso lato non solo come espressioni verbali, ma anche come azioni, gesti o pause. Il dialogo può rivestire molta importanza nella didattica, sia nella sua forma esterna, finalizzata alla comunicazione con un interlocutore, che nella forma interna di dialogo con se stessi. Uno dei più famosi dialoghi della storia (il Menone, e, in particolare, l'episodio del dialogo tra Socrate e lo schiavo relativo al problema della duplicazione del quadrato) è stato utilizzato in classe come uno strumento non-standard in relazione al delicato problema didattico del riconoscimento di errori concettuali e del loro superamento attraverso spiegazioni di carattere generale (vedi Boero, Chiappini & Garuti (inviato per la pubblicazione)).

Alcune espressioni verbali e non verbali (specialmente quelle prodotte da scienziati del passato - ma anche da scienziati contemporanei) rappresentano in modo ricco e denso importanti passi nella evoluzione della matematica e delle scienze. Affrontando e risolvendo opportuni compiti proposti dall'insegnante, lo studente può tentare di collegare a una voce le proprie interpretazioni, concezioni, esperienze e può tentare di produrre un 'eco', cioè un legame con la voce reso esplicito attraverso un discorso. Il 'gioco voci-eco' è una particolare metodologia attraverso la quale gli studenti sono portati a produrre echi per mezzo di compiti specifici, come, ad esempio : 'Come avrebbe potuto X interpretare il fatto che .... ?' Nell'esperimento sul Menone, dopo una attenta lettura e interpretazione del dialogo, si è chiesto agli studenti (di V elementare e II media) di produrre individualmente un dialogo dello stesso tipo su un errore concettuale 'importante' nella loro storia scolastica. Il dettaglio del progetto didattico non è riportato per mancanza di spazio.

Il gioco voci-eco si è dimostrato, nel caso del Menone, una metodologia educativa appropriata per : 1) sviluppare la consapevolezza degli studenti sul funzionamento della conoscenza teorica quando sono in gioco errori concettuali ; 2) promuovere la consapevolezza dei (diversi) ruoli assunti dall'insegnante e dagli allievi nelle attività riguardanti gli errori concettuali. Poiché il riconoscimento e il superamento degli errori concettuali riveste un ruolo cruciale nell'evoluzione della matematica e delle scienze, è naturale che nella storia della matematica e piu' in generale nella storia della cultura si incontrino voci dialogiche (scambi di lettere, dialoghi immaginari, ecc.) che affrontano questo tema. La produzione di echi a voci dialogiche ben scelte in compiti opportuni può quindi condurre gli studenti a partecipare consapevolmente al processo di riconoscimento e superamento di errori concettuali.

La manipolazione di strumenti : ingranaggi nella scuola elementare

In un'altra ricerca (Bartolini Bussi & al, in stampa), si introducono in classe ingranaggi, meccanismi e figure testi che consentono una loro modellizzazione geometrica. La scelta di un contesto didattico ricco di oggetti concreti presenta limiti e vantaggi per l'attività matematica. Tra i limiti ricordiamo il pericolo che gli oggetti concreti inducano processi cognitivi di tipo quotidiano e non matematico. Tra i vantaggi segnaliamo la potenzialità della esplorazione dinamica guidata della realtà (realizzabile anche con allievi molto giovani) come passo preliminare alla molto più libera esecuzione di esplorazioni dinamiche mentali. Poiché tali esplorazioni dinamiche sembrano essere uno degli elementi fondamentali del ragionamento matematico, non si deve sottostimare l'importanza degli oggetti concreti nel dare inizio a tale processo nei primi anni di scuola. Per evitare di cadere nei processi tipici della vita quotidiana, è necessaria una accurata gestione delle situazioni problematiche. Gli oggetti concreti non sono di per sé trasparenti, anche se molti creatori di materiale strutturato pensano il contrario. Il loro significato viene costruito attraverso le pratiche culturali messe in opera nella classe con l'aiuto dell'insegnante. La semplice proposta di ingranaggi non è sufficiente ad avviare processi cognitivi interessanti per la matematica.

I problemi di meccanismi e ingranaggi da noi considerati sono sostanzialmente di due tipi: a) problemi di *costruzione* (es. costruzione di ingranaggi o meccanismi con vincoli dati); b) problemi di *funzionamento* (es. analisi del funzionamento di un ingranaggio o di un meccanismo dato).

Nella costruzione, che si basa anche sullo 'smontaggio' di oggetti già dati, si esplorano le relazioni geometriche tra gli elementi che costituiscono l'oggetto, a volte modellizzabili nel piano (es. correttore a nastro o bianchetto, puliscitestine, catena di trasmissione), ma più spesso nello spazio (es. apriscatole, cambio della bicicletta, mulino, cavatappi, frullino a mano). La geometria di Euclide è una delle teorie che offrono modelli per la matematizzazione di questi problemi. E' opportuno precisare che la geometria di Euclide non è semplicemennte 'applicata' alla soluzione dei problemi, ma arricchita dalla soluzione di problemi che evocano il movimento di ingranaggi, attraverso l'introduzione di una componente dinamica che troppo spesso rimane nascosta.

Nel funzionamento, ciò che è in gioco è la cinematica (la dinamica, riguardante forze e attriti è al di fuori della portata dei nostri allievi): è interessante osservare che questo è un esempio di teoria scientifica (risalente almeno ad Erone) facilmente esplicitabile anche ad allievi giovani o di estrazione socioculturale bassa, fino alla realizzazione di prime dimostrazioni. A partire dal postulato: *Due ruote dentate ingranate hanno versi di rotazione opposti* è facile dimostrare alcuni teoremi (es. *Tre ruote ingranate a due a due non possono girare)* che prevedono anche ragionamenti per assurdo. La produzione di questi enunciati e la loro dimostrazione si e' rivelata accessibile anche ad allievi di scuola elementare di estrazione socioculturale molto bassa.

La manipolazione di strumenti reali nella scuola superiore

Esiste a Modena una ampia collezione di macchine matematiche (oltre 150), prodotte e conservate da Annalisa Martinez, Marcello Pergola e Carla Zanoli, presso il Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica. Le macchine comprendono, oltre a modelli statici di grandi dimensioni (es. sezioni coniche), anche numerosi modelli dinamici tra cui ricordiamo gli strumenti per la prospettiva (*prospettografi* statici e dinamici), i meccanismi per il tracciamento di curve (*curvigrafi*) e i biellismi per la realizzazione di trasformazioni geometriche (*pantografi*). Diversi studi hanno evidenziato che nel corso dell'esplorazione guidata di curvigrafi gli studenti sperimentano 'in atto' concetti importanti per la geometria, quali :

1) il concetto *di sistema di riferimento* : lo strumento e le regolarità che si rivelano nel suo uso determinano coppie di rette (guide fisiche, fili o traiettorie), che possono essere ortogonali o no ; la relazione della curva tracciata dallo strumento con tali rette, attraverso misure esatte e precise, 'può essere espressa per mezzo di una equazione, la stessa per tutti i punti ' (per usare le parole di Descartes);

2) il concetto di *funzione* : lo strumento consente di esperire 'moti rettilinei che dipendono uno dall'altro' (per usare le parole di van Schooten) ;

3) il concetto di *parametrizzazione di una curva algebrica* : lo spazio dei parametri è un luogo reale (una guida o una traiettoria) percorso dal punto che viene impugnato per pilotare il moto (punto 'direttore', per usare le parole di Newton), mentre la penna (punto 'tracciatore') disegna la curva.

La manipolazione di strumenti virtuali nella scuola superiore

Esistono numerosi software, con finalità professionali e/o didattiche, che consentono di realizzare o di utilizzare a scuola ambienti virtuali dinamici. La letteratura al riguardo è sempre più vasta (e autocelebrativa), anche se la ricerca didattica sui limiti nell'uso e sui processi mentali messi in opera rappresenta una parte molto limitata della produzione.

Nel nostro gruppo abbiamo per ora utilizzato le potenzialità di alcuni software per realizzare ambienti con strumenti virtuali. Abbiamo costruito simulazioni della maggior parte delle macchine matematiche con il software Cabri II Windows, con Java e con Microstation (vedi Bartolini Bussi & al. 1999) (2). L'utilizzo didattico può essere di vario tipo :

1) presentazione da parte dell'insegnante, nel corso di una lezione dalla cattedra (schermo come lavagna dinamica) ;

2) ricostruzione da parte degli studenti della simulazione di una macchina (macchina virtuale) a partire dall'osservazione di un modello reale o di un progetto (con immagini e testi) o di un'altra simulazione già prodotta;

3) esplorazione da parte degli studenti di una macchina virtuale per produrre congetture e costruire le relative dimostrazioni.

La costruzione della simulazione di una macchina può essere facile o difficile, rapida o laboriosa a seconda del software utilizzato. A titolo di esempio possiamo confrontare la procedura di costruzione di una simulazione in Cabri e in Java. Cabri è un software didattico sufficientemente noto. Java è un linguaggio di programmazione ad oggetti : è stato da noi predisposto un package (*MathMachine©*), che contiene, come una scatola di meccano virtuale, gli oggetti elementari utilizzati per costruire le simulazioni delle diverse macchine (giunti o perni ; aste ; corde ; scanalature). Ogni applet che contiene una macchina accede alle classi del package con una semplice istruzione di *import*. Questo consente di scrivere per ciascuna macchina solo la parte di codice che la differenzia dalle altre. Nonostante ciò, la costruzione di simulazioni con Java è abbastanza complessa, per chi non sia esperto di programmazione. Mentre il compito di costruire una simulazione Cabri può essere alla portata di studenti di scuola superiore, la costruzione di una simulazione Java è decisamente più problematica.

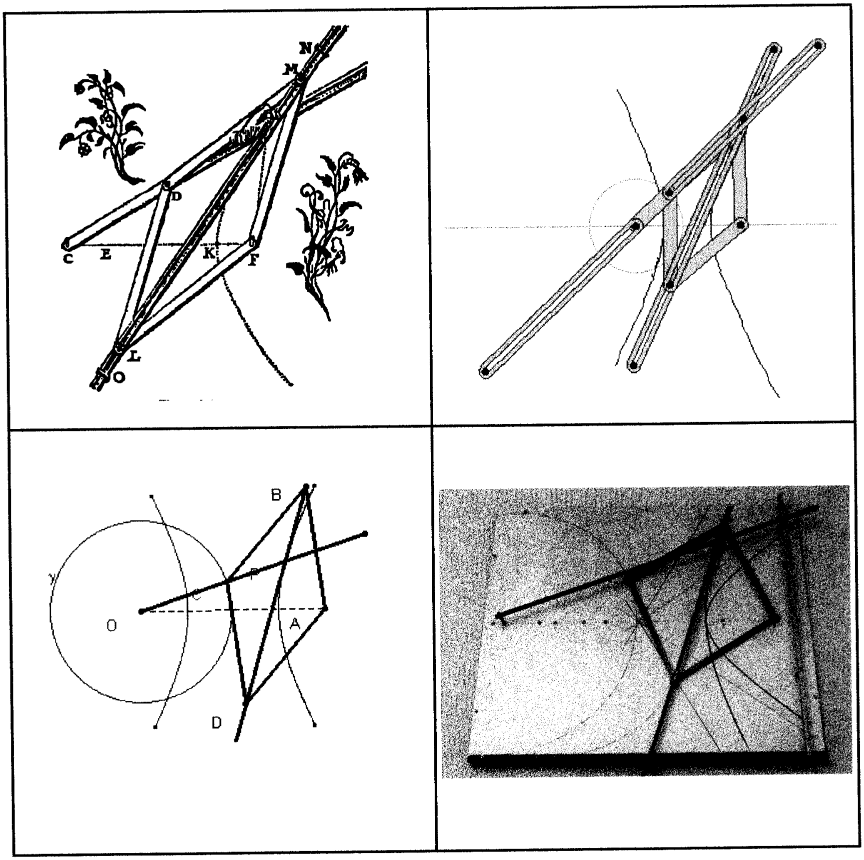
Sulle simulazioni già pronte in Cabri o in Java è possibile compiere esplorazioni, per certi aspetti, simili a quelle che si possono compiere sulle macchine reali, e, per altri aspetti, estremamente diverse. E' simile la possibilità di esplorazione attraverso il moto dei punti direttori, anche se, non sempre i vincoli meccanici di una particolare realizzazione della macchina reale sono rispettati. C'è maggiore flessibilità, poiché, in entrambi i casi, si può in modo semplice modificare alcuni parametri dello strumento, costruendo, a partire dalla stessa simulazione, una intera famiglia di strumenti virtuali. E' interessante anche confrontare i due ambienti virtuali Cabri e Java *MathMachine*©. L'ambiente Cabri si presta a due utilizzi diversi e complementari : è lo spazio della simulazione su cui muovere la macchina virtuale e la lavagna dinamica su cui eseguire costruzioni ausiliarie. Proprio questa sua duplicità può dare qualche problema didattico : lo studente può, forse troppo facilmente, modificare la simulazione iniziale, distruggendo la macchina virtuale, e cambiare quindi i termini del problema. In Java *MathMachine*© non è invece possibile compiere costruzioni aggiuntive. Sotto questo aspetto, la macchina Java è indistruttibile, anche se è messa in moto da utenti del tutto inesperti. In entrambi i casi, la facilità a tradurre in esperimento reale il progetto di un esperimento mentale può facilmente spostare l'attenzione degli studenti sulle verifiche solo empiriche, creando le premesse perché la fase (necessaria) di dimostrazione sia rifiutata dagli studenti.

Conclusione

In questa breve rassegna di ricerche, abbiamo presentato studi di diversa natura. In tutti i casi considerati, l'ambiente carta e matita (eventualmente dotato di riga e compasso) in cui si sviluppa di solito la geometria a scuola, è arricchito da elementi e modalità di azione nuovi : non più solo l'ascolto passivo della lezione o la soluzione in solitudine di un problema carta e matita, ma la drammatizzazione e la produzione di un dialogo ; la manipolazione e la produzione di oggetti reali o virtuali e la enunciazione di congetture sulle loro proprietà.

In questa presentazione, il reale e il virtuale non sono contrapposti, ma piuttosto collocati e posti in relazione tra loro in un repertorio di opportunità a cui l'insegnante può attingere per costruire ambienti efficaci per l'insegnamento - apprendimento della geometria. Quando, come nel caso paradigmatico dei curvigrafi da noi illustrato, sono disponibili ambienti reali e virtuali con 'gli stessi' oggetti, nei quali è possibile compiere 'le stesse' esplorazioni, ci sono ragioni che giustificano la scelta di uno di essi ? e, se tali ragioni esistono, di che natura sono ? Organizzative ? Epistemologiche ? Cognitive ?

Abbiamo dato alcuni elementi, ancora frammentari, per iniziare a rispondere a queste domande. E' urgente condurre ricerche serie in questa direzione, per evitare che la scelta, ove possibile, dell'uno o dell'altro ambiente sia compiuta sulla base di ragioni puramente ideologiche. Questo, nella sua complessità, è un tipico problema di ricerca in didattica della matematica.



Curvigrafi reali e virtuali:
il disegno di Van Schooten, la simulazione Java (*MathMachine©*)
la simulazione Cabri, il modello fisico

Note

(1) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del progetto nazionale 'Ricerche di Matematica e Informatica per la Didattica' (coord. F. Arzarello).

(2) L'ipertesto è esplorabile nel sito web : < http ://museo.unimo.it/theatrum/ >

Bibliografia minima

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F. and Garuti R. (in stampa), Early Approach To Theoretical Thinking: Gears In Primary School. Educational Studies in Mathematics

Bartolini Bussi M., Nasi D., Martinez A., Pergola M. Zanoli C. & al. (1999), Laboratorio di Matematica. Theatrum Machinarum, I CD rom del Museo (1), Modena : Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica.

Boero P., Chiappini G. & Garuti R. (inviato per la pubblicazione), Bringing the Voice of Plato in the Classroom : Students' Approach to Detecting and Overcoming Conceptual Mistakes in Mathematics.

LETTURE DI PAGINE CLASSICHE

Franca Ferri
Scuola Elementare "P. da Palestrina" X Circolo di Modena
Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica- Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata - Università degli Studi di Modena

Premessa

La lettura di pagine classiche all'interno di un corso di formazione per insegnanti elementari pone immediatamente un interrogativo: - Perché?
Alcune possibili risposte a questa semplice domanda si possono trovare a diversi livelli secondo il punto di vista da cui si esamina la questione: storico/culturale, disciplinare, didattico...
Attraverso i lavori di gruppo si é cercato di approcciarsi, sebbene in modo frammentario, a tutti questi aspetti, percependone innanzitutto la complessità.
La scelta di letture dagli "Elementi" di Euclide e dai "Nuovi principi della geometria" di Lobačevskij é stata pensata, assieme ai relatori del corso, come conseguenza anche di diversi approcci al pensiero geometrico che i relatori hanno evidenziato nel corso delle loro trattazioni.

Confronto

Euclide, 300 a. C. circa
Elementi
Definizioni (Termini)
I. Punto é ciò che non ha parti.
II. Linea é lunghezza senza larghezza.
III Estremi di una linea sono punti.
...
...
Lobačevskij, 1793 - 1856
Nuovi principi della geometria
I. I primi concetti della geometria

Il contatto costituisce l'attributo caratteristico dei corpi; ad esso i corpi debbono il nome di corpi geometrici, non appena noi teniamo fissa l'attenzione su questa loro proprietà, e non consideriamo invece tutte le altre proprietà, siano esse essenziali o accidentali.
Oggetto del giudizio, oltre ai corpi, sono anche, ad esempio, tempo, forza e velocità del movimento; ma il concetto contenuto nella parola contatto non si riferisce a ciò....
Non si potrebbero immaginare inizi di trattati così diversi: immediatamente balzano agli occhi alcune differenze fondamentali. Da una parte Euclide definisce esplicitamente termini primitivi quali "punto", "linea"..., dall'altra Lobačevskij dà come termini primitivi "corpo" e "contatto di corpi", inserendoli in un discorso articolato e complesso con l'assenza di definizioni lineari specificatamente collegate tra loro dal pensiero logico -deduttivo.
Euclide ci immerge nella geometria piana, Lobačevskij in quella solida.
Certamente i duemila anni che li separano contengono da un punto di vista epistemologico moltissime motivazioni delle loro differenze. Dal mondo delle idee di Platone sino allo spazio come a priori di Kant, la dimensione della geometria appare più metafisica che reale e, più che alla scienza, sembra appartenere all'estetica. Lobačevskij rompe con questo aspetto metafisico per portarci quasi verso le scienze sperimentali. Il movimento, il tempo, la forza presenti nei "Nuovi principi della geometria" mostrano un legame forte tra la geometria e la fisica. Con Lobačevskij ci sembra venga introdotta l'idea di più possibili interpretazioni della realtà fisica, attraverso modelli geometrici dei quali la geometria euclidea é uno, ma non il solo.
Da un punto di vista strettamente matematico ci era impossibile addentrarci in problemi più specifici come, ad esempio, quello aperto dal V postulato di Euclide e dalla trattazione che ne fa Lobačevskij, ma ci é parso importante in ugual misura cercare di comprendere le differenze culturali dei due matematici attraverso una lettura comparata.

Considerazioni

L'Istituto Magistrale, che sino a pochi anni fa formava gli insegnanti elementari, ha avuto per tradizione una impostazione legata al pensiero idealistico, piuttosto che a quello positivista o materialista. Molti degli insegnanti preparati da questo Istituto hanno visto il modello euclideo come unico approccio alla geometria. Le conseguenze, nella prassi didattica, sono state visibili fino a pochi anni or sono sia nelle scelte di insegnamento, sia nell'adozione di testi che riproponevano in forma "ridotta", e a volte persino ridicola, il mondo euclideo. La linea, le forme erano spesso il punto di partenza di scelte geometriche che giungevano di norma sino alle figure e qualche volta ai solidi. Tutto questo, legato sempre alla misura, andava a creare una solida base di geometria piana, metrica, euclidea. Il mondo reale degli oggetti nello spazio non era considerato, era "sporco", non apparteneva al mondo delle idee, a cui non poteva appartenere il contatto dei corpi di Lobačevskij.

Tutto ciò non sta a dimostrare che gli insegnanti fossero consapevoli delle scelte geometriche che andavano facendo; ma semplicemente seguivano una prassi indotta che ripetevano: la geometria era quella.

Contemporaneamente si é iniziato a parlare di scelte didattiche diverse, ad esempio, partire dal tridimensionale per arrivare al bidimensionale. Giungevano quindi nelle classi gli oggetti reali: c'erano cubi, dadi, scatole, palle, sfere.... Ci si iniziava a "sporcare", a portare dentro l'aula una realtà che ci avrebbe forse portato al mondo delle idee, ma che intanto si faceva manipolare, toccare, muovere.

La necessità, inoltre, di contestualizzare percorsi didattici spesso lontani dai ragazzi ci ha portato a confrontarci con situazioni complesse, dove tutto diventava più problematico e più aperto alla ricerca di nuovi strumenti di interpretazione.

Anche i programmi del 1985 ci indicavano la matematica come strumento per interpretare la realtà...: *non é possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione di problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione*; si iniziava così a parlare di matematizzazione e si iniziavano a vedere altre geometrie che potevano aiutarci a tentare di modellizzare quelle realtà sempre più complesse. Problemi legati alla rappresentazione del mondo visibile, problemi di modellizzazione del fenomeno delle ombre del sole, problemi di cinematica degli ingranaggi, ci conducevano, ad esempio, a cercare risposte in geometrie diverse da quella sino a quel momento conosciuta ed accettata.

A queste scelte didattiche non sempre corrispondeva un'adeguata consapevolezza di quali conoscenze geometriche si mettevano in gioco, ma ci si rendeva conto della necessità di altre fonti, di altre leggi matematiche.

La necessità di maggiore consapevolezza delle scelte può essere una prima risposta al perché leggere pagine di classici della matematica: conoscere teorie diverse per interpretare fenomeni complessi della realtà potrebbe

mutare il modo di insegnare o, perlomeno, potrebbe diluire le certezze di unicità e veridicità di un approccio rispetto ad un altro.
Un'altra risposta possibile al perché leggere classici é quella di un uso didattico degli stessi. All'interno della scuola elementare sembra assai improbabile avvicinarsi ai classici: difficoltà di linguaggio, formalismo eccessivo o, molto più semplicemente, contenuti troppo difficili per i ragazzi di quella fascia scolare.
La convinzione che la voce culturale, storica, di un pensatore possa entrare direttamente nella classe e dialogare con la voce dell'insegnante e con quelle dei ragazzi, ha fatto nascere alcune sperimentazioni didattiche molto interessanti.
La voce di Galileo è entrata in una classe quinta a testimoniare la difficoltà a rapportarsi con il concetto di infinito.
La voce di Piero della Francesca é entrata in alcune classi quinte introducendo "regole" di geometria che hanno dato risposte a problemi concreti di rappresentazione che i ragazzi avevano.
Le voci di Euclide e di Erone hanno permesso a ragazzi del secondo ciclo di confrontare le definizioni di cerchio che essi avevano costruito con quelle dei due matematici e di trovarvi affinità o differenze.
La voce di Platone (Menone) entra come metodologia didattica per la costruzione ad eco di un dialogo socratico su un errore matematico scelto e vissuto dai ragazzi.
La convinzione che la conoscenza sia un prodotto di tante voci culturali che nel corso del tempo hanno dato forma alla cultura fa sì che si cerchi di portare ai ragazzi alcuni frammenti di queste voci e li si incoraggi a dialogare con esse.
Anche questo assume, forse, un aspetto di multimedialità, almeno nel senso etimologico del termine, permettendo nelle classi l'uso di mezzi, voci, per una costruzione continua di nuovi dialoghi.

RIFERIMENTI

Bartolini Bussi M., Bergamini B., Betti B., Boni M., Ferri F., Fortini C., Garuti R. Monari F., Mucci A., I campi di esperienza dei meccanismi e degli ingranaggi tra esperienza quotidiana, tecnologia e geometria, Atti del Convegno Internuclei per la Scuola dell'obbligo, Salsomaggiore, 1997.

Bartolini Bussi M., Boni M. Ferri F., Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, CentroDocumentazioneEducativa, Comune di Modena, 1995.

Bartolini Bussi M., La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica: analisi di due casi, L'Ins. Della Mat. E delle Sci. Int., vol. 12 (5), 615-654, 1989.

Boero P. (a cura di), Bambini, Maestri, Realtà: un progetto per la scuola elementare, voll. 1-4 (ediz. 1996).

Boni M., Prime dimostrazioni di cinematica degli ingranaggi, Atti del Convegno Internuclei per la Scuola dell'obbligo, Salsomaggiore, 1997

Euclide, Elementi (traduzione ed edizione a cura di A. Frajese), ediz. UTET .

Ferri F. & Bergamini B., Dialogo di campi di esperienza e di teorie: ruote e cerchi in problemi di costruzione, Atti del Convegno Internuclei per la Scuola dell'obbligo, Salsomaggiore, 1997.

Lobačevskij N.I., Nuovi principi della geometria (traduzione ed edizione a cura di L. Lombardo Radice), ediz. Boringhieri, 1955.

NODI E CONCETTI FONDAMENTALI DELLA GEOMETRIA

Maria Giuseppina Staderini

IRRSAE Toscana

Riflessioni iniziali

L'approfondimento e la discussione sui nodi concettuali della geometria si fondano su alcune considerazioni.

In primo luogo, il lavoro ha consentito di organizzare i contenuti delle conferenze e delle esercitazioni in modo significativo, inserendo e articolando gli argomenti, che mano a mano si sono svolti nelle due sessioni del corso, all'intemo di un quadro generale condiviso, favorendo la ricostruzione del corpo disciplinare in una trama sensata ed evitando un'interpretazione dei contenuti come ambiti chiusi e isolati. Per questa ragione la riflessione sui nodi e i concetti è stata importante come momento iniziale di tutti i lavori.

Un'altra considerazione ha riguardato la necessità di ripensare alle scelte innovative fatte dopo il 1985, quando la riflessione sulla geometria è entrata nella scuola elementare, per la prima volta, almeno in termini di programmi ministeriali.

I partecipanti al corso hanno potuto "dare aria" alle scelte fatte negli anni precedenti, valutarne la tenuta. Questa operazione di "mantenimento" e di "rinnovo" trova oggi una nuova ragione di riflessione poiché le innovazioni più recenti, autonomia, riforma, documento dei saggi, richiedono ancora un confronto sui contenuti essenziali e sulla revisione del curricolo.

Infine, l'introduzione di nuove tecnologie e di programmi multimediali nella scuola elementare pone nuove domande e nuove visioni sui concetti e i nodi fondamentali di tutto il curricolo e della geometria in particolare. Infatti i criteri di scelta e di uso delle tecnologie e di interpretazione della multimedialità, a qualsiasi livello di applicazione, determinano possibilità diverse nella defìnizione dei processi di insegnamento e di apprendimento.

Il lavoro dei gruppi

La definizione dei nodi concettuali

Nella definizione dei nodi si sono confrontate interpretazioni diverse.

I nodi concettuali sono pensati in tutti i gruppi, in modo generale, come **luoghi di incontro e di movimento:**

(... un nodo non solo serve per andare avanti, ma anche per andare indietro - punto necessario per arrivare ad altri concetti - rete di informazioni che confluiscono da diverse strade - punto di incontro - punto di incrocio significativo di concetti, contenuti, informazioni che permettono di operare - organizzatore cognitivo - incrocio fra concetti che si integrano e si completano...).

Su questa interpretazione generale si sono innestate altre definizioni.

Alcuni hanno interpretato i nodi come **incroci fra sistemi teorici;** in questo caso si evidenzia la struttura coerente e compatta della matematica, si notano le relazioni e i riferimenti interni alla matematica o alla sola geometria:

(... i nodi sono incroci che permettono di muoversi all'interno della disciplina- un nodo consente libertà di movimento nella disciplina - luogo concettuale dove affluiscono diversi concetti geometrici...).

Altri ancora vedono nei nodi **le relazioni fra strutture matematiche e strutture di altri campi disciplinari:**

(... i nodi concettuali sono incroci fra discipline diverse - connessioni di saperi - collegamento con altre discipline e con altri settori della stessa disciplina...).

Infine i nodi sono stati interpretati come **intrecci insolubili o come significati oltre le discipline:**

(... la struttura concettuale della matematica è complessa, presenta intrecci che non possono essere risolti, si possono solo riconoscere - i nodi sono qualcosa di non risolto - nodo è un concetto al quale si vuole arrivare attraverso tante discipline - qualcosa da cui non puoi prescindere, non è tanto un contenuto, momento di conoscenza, ma una sintesi di tanti linguaggi, tante strategie...).

I nodi concettuali

La discussione sui nodi concettuali ha preso forma quando si è incontrata con i concetti, i temi e i contenuti della geometria. I gruppi hanno costruito alcune mappe che nascono da scelte interpretative diverse. Sono tutte chiaramente pensate sui problemi dell'insegnamento, più che su quelli disciplinari.

Infatti esse disegnano visioni della geometria attraverso aggregazioni di concetti e temi che si rinforzano e definiscono a vicenda, acquistando significatività e indicando anche possibili approcci didattici.

La prima mappa è lineare, propone aggregazioni stratificate di concetti e di temi.

orizzontalità – verticalità – inclinazione
perpendicolarità – parallelismo – incidenza
lunghezza (distanza, larghezza, altezza, profondità)
angolo
linea (retta, curva, spezzata, mista, aperta, chiusa)
direzione – verso – senso
figure piane (poligoni, cerchi)
figure solide
concavità e convessità di figure
sistemi di riferimento (locale, polare, cartesiano)
misura del perimetro ,dell'area, del volume
trasformazioni geometriche (traslazione, rotazione, similitudine, simmetria)

Una nota chiarisce che l'ordine di elencazione non indica una gerarchia; il percorso didattico, si snoda sui cinque anni ed è lo specifico progetto a scegliere di volta in volta i punti di partenza, di sviluppo e di "ritorno".

La seconda mappa presenta aggregazioni di concetti e temi intorno a nodi concettuali fondanti.

misura grandezza (lunghezza, altezza, estensione, durata) unità di misura ampiezza perimetro superficie e area volume	**relazioni** distanza perpendicolarità parallelismo incidenza
figure punto linea angolo segmento figure piane e solide	**trasformazioni** traslazioni simmetrie rotazioni
sistemi di riferimento verso direzione verticalità e orizzontalità coordinate cartesiane e polari	

Questa descrizione indica nuclei di lavoro che possono essere tradotti in percorsi concettuali e operativi. Il nodo delle trasformazioni, invece, viene descritto solo con l'elenco dei contenuti, quindi non restituisce possibili visioni didattiche.

Nel prossimo lavoro si notano tre nodi concettuali ai quali afferiscono concetti e temi.

nodi concettuali / concetti	figura	sistemi di rifer.	trasfor.
angolo			
linea chiusa			
direzione			
segmento			
retta			
punto			
forma			
diametro			
parallel./perpend.			
altezza			
piano			
estensione			
diagonale			
spazio			
simm. ass/cent.			
distanza			
binomi locativi			
unità di misura			
ordine/verso			
dimensione			
semipiano			
congruenza			
similitudine			

Dalla tabella si rileva che:

- i concetti di retta, di parallelisrno e di perpendicolarità sono presenti in **tutti i nodi;**
- i concetti di angolo, direzione, segmento, punto, forma, piano, simmetria assiale/centrale e distanza
  sono presenti in **due nodi;**
- i concetti di linea chiusa, diametro, altezza, estensione, diagonale, spazio, binomi locativi, unità di misura, ordine/verso, dimensione, semipiano, congruenza, similitudine sono presenti in **un solo nodo.**

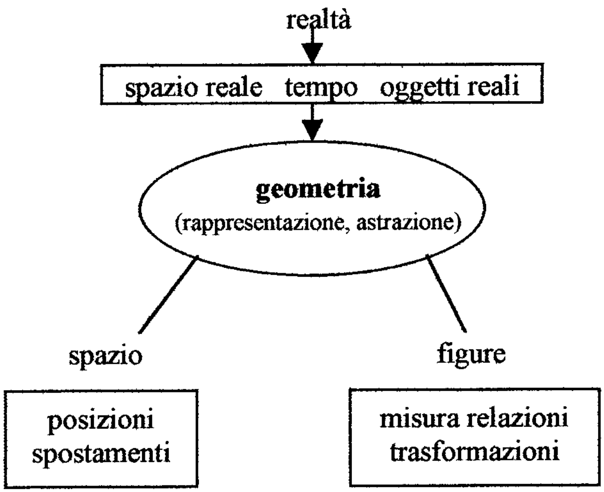
Questa mappa ci restituisce una visione assai compatta della geometria; i nodi sono incroci per temi diversi; e uno stesso tema si ritrova in più nodi.

La forza di aggregazione diversamente distribuita fra i tre nodi indica che alcuni concetti sono più coinvolgenti e che alcune piste di lavoro sono da privilegiare, nel tempo e nel modo.

Il nodo delle trasformazioni, che ha scarsa tradizione di insegnamento (appare nella scuola elementare con i Nuovi Programmi), in questa descrizione è analizzato attraverso contenuti conosciuti nelle pratiche didattiche, come angolo, direzione, segmento, retta, forma, diametro, ecc., ponendo così le basi per la strutturazione di un percorso.

L'ultimo lavoro si differenzia dai tre precedenti, i quali, pur attraverso proposte variamente articolate, tendono a ritrovare i fondamenti della geometria all'interno della disciplina stessa.

La mappa che segue pensa la geometria come una organizzazione particolare della realtà; in questo modo la disciplina è implicitamente collegata con tutte le altre.



Un percorso didattico che dà rilievo a questa interpretazione, probabilmente, tiene conto dei rapporti con gli insegnamenti dell'intero curricolo.

La presentazione delle mappe rende un'idea della discussione che si è sviluppata nei gruppi, tuttavia è opportuno notare che il lavoro si è svolto il secondo giorno della prima sessione del corso, quando le conferenze e gli approfondimenti sulle innovazioni erano ancora da presentare.

Quali nodi concettuali si sarebbero previsti se le mappe fossero state richieste **anche** alla fine dell'ultima sessione del corso?

La lettura e il commento degli *Elementi* di Euclide, poi lo spostamento d'ottica nel pensare lo spazio con la lettura e il commento dei *Nuovi principi della geometria* di Lobačevskij, avrebbero influenzato la ricostruzione delle mappe?

Le ipotesi formulate nei gruppi sarebbero rimaste le stesse o sarebbero intervenuti dei cambiamenti?

UN PROGETTO DI ITINERARIO DIDATTICO SU GEOMETRIA E ARITMETICA

Teresa Gazzolo
Scuola Elementare Statale di Camogli (GE)

Un itinerario didattico che intrecci concetti geometrici e concetti aritmetici non può non percorrere quel ponte tra il numero e lo spazio, tra il discreto e il continuo, che è la misura. Dalla necessità di risolvere problemi reali di padronanza dello spazio a livello operativo, nascono e maturano, nella storia della cultura (astronomia, agrimensura orientamento, edilizia...), come nella storia personale di ciascuno di noi (muovere il proprio corpo in relazione ad altri, afferrare un oggetto, scansare un sasso...), pratiche e concetti che richiedono l'uso integrato di elementi quantitativi e qualitativi. Allo stesso modo elementi geometrici ed elementi aritmetici si intrecciano in molte attività abitualmente svolte nei cinque anni di scuola elementare; non sempre, però, tali attività sono inserite in un progetto teso a favorire una progressiva e sistematica costruzione di significati e procedure. Il titolo proposto chiede proprio questo: andare oltre un episodico ricorso ad alcune di queste attività, per organizzarle in un progetto che preveda una sequenza ben strutturata di tappe di lavoro e approfondimento.

Un progetto a lungo termine che realizzi stretti legami tra aritmetica e geometria può essere avviato in I con attività in una dimensione (linea dei numeri, colonnina del termometro...) e in due dimensioni (tabelle, istogrammi, grafici e analisi del loro andamento, …) e via via, attraverso l'intreccio tra costruzione dei concetti e pratica della misura, arrivando in V alla padronanza dei numeri decimali e delle operazioni con essi.

Fin dai primi mesi di scuola in I i bambini possono imparare a rappresentare alcune situazioni reali, cui hanno posto attenzione quotidianamente (presenze e assenze di ciascun alunno e stato del cielo, registrati ogni giorno in classe sul tabellone del calendario), per mezzo di istogrammi e grafici. L'esecuzione di tali rappresentazioni, che diviene via via più autonoma e ordinata, mentre costruisce abilità importanti per quel che riguarda la capacità di orientarsi sul foglio in relazione a due coordinate, struttura un modello matematico in cui si intrecciano il significato cardinale del numero (conta di crocette, di quadratini...) e quello di misura (altezza delle colonnine). L'evidente diversa altezza delle colonnine, ad esempio, fa da supporto a ragionamenti numerici:

“Chi vince?”; “Di quanto vince?”; “Da cosa lo hai capito?”; “Come puoi controllare se è proprio vero?”

Si tratta del primo approccio ad un modello che descrive una situazione reale semplificandola, cioè selezionando alcuni elementi e tralasciandone altri; i bambini, discutendo tra loro, possono capire che un istogramma è comodo da leggere e interpretare, ma presenta dei limiti per ciò che riguarda le informazioni che può dare (perdita di informazioni relative al singolo dato).

Nella seconda parte dell’anno la precedente attività può essere ampliata con la lettura quotidiana sul termometro della temperatura esterna, registrata poi individualmente su un termometro fotocopiato. Di nuovo l’altezza di una colonnina dà un’informazione su una quantità numerica, i gradi, prima del controllo attraverso la conta, mentre nella successiva registrazione si passa da:
MISURAZIONE——-> NUMERO a: NUMERO———->MISURAZIONE.

È evidente l’importanza di questa attività per la padronanza del concetto di misura, che richiede l’interiorizzazione di entrambi i passaggi. A livello adulto è opportuno tuttavia rilevare che la grandezza “temperatura” non soddisfa la proprietà additiva della misura e che però, in realtà, con i bambini si lavora sulle misure delle lunghezze dei segmenti che rappresentano le temperature.

Le strategie spontanee che i bambini usano, per leggere sul termometro le temperature e per rappresentare le temperature sul termometro, sono molto diverse: alcuni contano tutti i gradi partendo dallo 0, altri molto presto scoprono delle scorciatoie e partono da l0, 20,... utilizzando la strategia additiva, altri partono da 10, 15 ... per aggiungere o togliere a seconda dei casi. Naturalmente le strategie di tutti i bambini devono evolvere verso quelle più efficienti, ma ciò deve avvenire per maturazione personale, magari attraverso “esposizioni” alle strategie dei compagni più veloci, non per insegnamento/apprendimento mnemonico di un comportamento non ancora interiorizzato.

Le temperature rilevate vengono registrate mensilmente in un grafico ed i bambini ne rilevano l’andamento, discutono su quale è stata la temperatura più alta, quale la più bassa, che differenza c’è; spiegano agli altri le strategie seguite, ne confrontano l’efficacia.

Il concetto di misura può essere ripreso e ampliato in II con le misure di lunghezza legate inizialmente alla misurazione dell’altezza di una piantina che cresce in classe, rilevata con strumenti d’uso comune: righello, asta graduata, metro snodato.... I bambini già conoscono, ed alcuni usano fuori della scuola, questi strumenti, che permettono di affiancare all’attività di misurazione la riflessione sulle sue proprietà, quindi non c’è motivo di non usarli da subito anche in classe.

Le abilità acquisite e i concetti costruiti possono tornare in gioco in altri due contesti famigliari ai maestri: quello della "Storia del bambino", con la misurazione delle altezze di ciascuno, e quello dei "Percorsi", con la ricostruzione della struttura di un percorso ben noto alla classe (anche se questo lavoro, riguardando la rappresentazione dello spazio fuori della portata immediata della vista, investe abilità e processi di natura diversa e più complessa).

Nei precedenti contesti di lavoro all'attività di misurare e registrare si possono affiancare: l'approccio alle riduzioni in scala; l'approccio al significato di numero decimale e la familiarizzazione con il fatto che in 1 m ci sono 100 cm e in 1 cm ci sono 10 mm; la consapevolezza che a determinare la misura non sono le tacche dello strumento, ma gli spazi tra una tacca e l'altra.

La padronanza delle misure di lunghezza con uso consapevole delle unità di misura tra il millimetro e il metro si può stabilizzare in III attraverso la rappresentazione grafica del mesospazio in cui si osservano le ombre del Sole. Rappresentare le ombre in un grafico che ne evidenzi le variazioni nel tempo o rappresentare il mesospazio per ragionare e fare congetture sul fenomeno, comporta la ricerca di una scala di riduzione opportuna (ovviamente semplice, in modo che i bambini siano in grado di gestirla autonomamente: 1:2, 1:10), quindi un primo approccio all'idea di rapporto in un contesto operativo. Misurazione di ombre, riduzioni in scala, costruzione di grafici possono essere utilizzati anche per introdurre ed approfondire il significato e l'uso operativo dei numeri decimali, che verranno scritti con la virgola solo quando tutta la classe ne padroneggerà il significato.

In IV, proseguendo le attività riguardanti le ombre, può essere introdotto ed approfondito il concetto di angolo, come ampiezza di rotazione delle ombre, quando si affronta il problema di riportare un ventaglio di ombre sul quaderno, riducendole in scala: come riportare l'ampiezza degli angoli tra un'ombra e l'altra? Dovrà essere ridotto in proporzione anche quello? Si arriva così all'uso del goniometro sul piano orizzontale e alle conseguenti operazioni con le misure in gradi.

Altro problema interessante potrà essere quello di definire e misurare l'altezza angolare del Sole sull'orizzonte, attività non scontata in quanto non è scontato il trasferimento del concetto di angolo e della sua misura dal piano orizzontale al piano verticale.

In IV si può anche lavorare al consolidamento e approfondimento delle misure di lunghezze e delle riduzioni in scala con applicazione alle carte geografiche, stradali...., con il passaggio alla scrittura dei numeri decimali con la virgola e alle addizioni e sottrazioni con essi e con l'uso ragionato di approssimazioni adatte alle situazioni da rappresentare.

Il lavoro sulle misure di lunghezza, che ha permesso la costruzione contestualizzata dei significati del numero decimale, unitamente al lavoro sulle aree, offrono in V la possibilità di costruire in modo ragionato le tecniche di calcolo scritto della moltiplicazione e della divisione. Attraverso il lavoro su aree di quadrati e rettangoli costruiti su carta millimetrata, infatti, i bambini costruiscono un modello significativo per la moltiplicazione fra numeri decimali, basato sul fatto, evidente sulla carta millimetrata, che decimi x decimi dà centesimi, decimi x centesimi dà millesimi..., senza ricorrere alla tecnica puramente mnemonica del contare il numero delle cifre decimali nei due fattori per stabilire il numero delle cifre decimali nel prodotto (o almeno conoscendo il significato sotteso a tale tecnica!).

Se vogliamo che questo itinerario sia formativo, cioè vada a strutturare concetti, conoscenze, abilità utilizzabili sia per rappresentare e interpretare fatti e situazioni reali, che per accedere al sapere ufficiale di riferimento, occorre che l'alunno sia partecipe dello sforzo conoscitivo proposto, altrimenti egli finisce per acquisire solo gli aspetti formali e normativi. Per questo è opportuno che vengano via via proposte situazioni vissute come "problema reale" dai bambini, in modo da attivare quei processi profondi di razionalizzazione dell'esperienza che consentono di rappresentare e interpretare situazioni sempre più complesse e di maturare capacità di astrazione crescente.

L' esperienza fisica vissuta, le rappresentazioni mentali dei fenomeni attivate dalle percezioni e dalle informazioni disponibili, gli atti di pensiero e di linguaggio di ciascuno, confrontati con quelli dei compagni, possono portare a costruire un rapporto consapevole e critico tra la realtà e i modelli che la rappresentano.

All'interno di questo percorso, che utilizza situazioni didattiche coinvolgenti che possono veicolare contenuti geometrici ed aritmetici intrecciati tra loro, si possono proporre unità didattiche brevi (come quelle che comportano la costruzione di oggetti concreti: scatole, girandole, ...), sia per strutturare modelli matematici attraverso la scoperta di caratteristiche significative dell'oggetto da realizzare, sia per verificare la ricaduta su attività concrete dei modelli matematici appresi.

Un esempio: in V, dopo il lavoro su misure di lunghezza e di superficie, si può proporre agli alunni di costruire un aquilone uguale a quello portato dall'insegnante, con una consegna che vada a mettere in gioco le conoscenze acquisite e a valutarne la padronanza flessibile.

Consegna:

"Scrivi come ti organizzi per sapere quanta carta velina e quante asticciole di balsa bisogna acquistare perché ognuno di voi possa costruire il proprio aquilone".

Vincoli:

– puoi chiedere per iscritto all' insegnante le informazioni che ti servono per iscritto;
– devi scrivere come pensi di utilizzare le informazioni ottenute;
– bisogna usare meno materiale possibile (la cassa non è ricca!);
– la parte di carta velina non può avere più di un' incollatura.

Durante il lavoro l'aquilone-modello con alcuni strumenti (righello, metro a nastro...) e un foglio di carta velina sono a disposizione degli alunni in corridoio, per evitare che, vedendo ciò che fanno i primi compagni, gli altri procedano per imitazione.

Possibili domande/risposte e procedimenti:

– *"Quanto misurano le asticciole?" "Vai a misurarle"*
– *"Si comprano già di quella lunghezza ?" "No, ogni pezzo è lungo...cm"*

Gli alunni potrebbero decidere di tagliare prima tutte le asticciole corte, poi tutte le lunghe, oppure una lunga e una corta, una lunga e..., in base ad una scelta casuale, non ad una scelta ragionata che tenga conto del terzo vincolo.

– *"Quanta carta serve per un aquilone? Quanto misura ogni foglio di velina?" "Non lo so. Trova tu un modo per scoprirlo"*.

Gli alunni dovrebbero misurare tutti lunghezza e larghezza del foglio, trattandosi di un rettangolo; diverse le scelte possibili per l'aquilone, che potrebbe essere visto come due triangoli divisi dalla diagonale maggiore o dalla minore, di cui misurare base e altezza, o come un romboide di cui misurare le diagonali (probabilmente considerandolo in questo caso come metà di un rettangolo).

A questo punto si possono ipotizzare percorsi molto diversi:

– rappresentazione in scala del foglio di carta velina e dei triangoli che formano il corpo dell' aquilone, per cercare un modo di incastrarli che porti ad usare meno carta possibile;
– calcolare le superfici e fare una divisione "di contenenza" che porta allo spreco di molta carta, se ci si ferma al risultato intero, oppure, se la divisione arriva ai decimali, si può arrivare ad un collage di ritagli, che non rispetterebbe il quarto vincolo;
- lavorare sulle relazioni tra altezza del foglio e altezza dell'aquilone, larghezza del foglio e larghezza dell'aquilone, il che può portare a considerare in realtà il rettangolo in cui è inscritto il romboide, con conseguente spreco di carta.

Dal confronto, durante la discussione, fra le procedure utilizzate da ciascuno potrebbe essere resa consapevole la necessità di utilizzare criteri di funzionalità dei modelli in relazione al contesto d'uso: modello geometrico/aritmetico *corretto* non significa *valido in tutte le situazioni.*

BIBLIOGRAFIA

AA.VV.: 1998, Bambini, maestri, realtà: un progetto per la scuola elementare. Vol. I-II III-IV-V, Centro Stampa Dipartimento Matematica Università di Genova.

BOERO, P.: 1987, 'Problemi ed esperienze di insegnamento della geometria nel 11 ciclo della scuola elementare', *L'ins. della matematica e delle scienze integrate*, vol. 9. DAPUETO, C.: 1987, 'Il primo apprendimento geometrico', *ibidem*, vol. 10.

LAENG M. ET AL.: 1985, I nuovi programmi della scuola elementare. Giunti & Lisciani ed.

GEOMETRIA SENZA NUMERI: PROBLEMI DI COSTRUZIONE

Teresa Gazzolo
Scuola Elementare Statale di Camogli (GE)

1. Geometria senza numeri

"Geometria senza numeri", prima parte del titolo, fa immediatamente pensare a tutto ciò che in campo geometrico esclude la misura, cioè tutto ciò che non è legato alla corrispondenza che si attua tra lunghezze, aree, volumi..., e numeri nello stabilire quante volte l'unità di misura scelta è contenuta nel segmento, superficie, solido..., considerati. Essa non esclude peraltro le attività di riporto, raddoppio, dimezzamento di segmenti, angoli, etc..

"Geometria senza numeri" evoca attività di rappresentazione e sistematizzazione di esperienze spaziali, di denominazione, astrazione e generalizzazione, di riconoscimento di proprietà di classi di figure, di individuazione di modelli geometrici.... In tal senso essa può apparire il luogo naturale di strutturazione dei concetti, quello più idoneo per avviare al pensiero generalizzante e astraente, che orienterà poi la scelta delle procedure da attivare nel pensare/risolvere situazioni particolari concrete.

Tuttavia non dobbiamo dimenticare che anche l'attività di misurazione contribuisce in modo pregnante a strutturare concetti, prima della riflessione sugli stessi. Essa è infatti una di quella pratiche sociali, utilizzate spesso solo a livello pratico-operativo, che possono concorrere a strutturare concetti importanti, se portate a consapevolezza, in quanto sottendono concetti, proprietà, strategie matematiche. Il "misurare" presenta inoltre il vantaggio di offrire ai bambini:

– un più facile accesso ai concetti impliciti, con cui possono acquisire familiarità attraverso il "fare", se esso è contestualizzato in situazioni problematiche significative (non è casuale che alunni in difficoltà di fronte ad un problema senza dati numerici tendano a darsene di ipotetici, per meglio inquadrare e dominare la situazione, facendola diventare particolare e più concreta);
– un rinforzo fuori della scuola, grazie all'eco che nel quotidiano ha questa pratica largamente condivisa, cui i bambini potrebbero guardare/partecipare con consapevolezza crescente.

Sicuramente la geometria senza numeri è comunque il luogo della teoria, dei problemi generali, dei metodi di validazione attraverso il ragionamento; il luogo in cui i concetti comuni diventano esperienza culturale e a cui si torna ogniqualvolta ci si muove sul piano metacognitivo per riflettere su modelli geometrici.

Anche il ragionamento messo in atto per progettare la risoluzione generale di problemi che includono numeri e misure è “geometria senza numeri”: in quanto costruzione di una strategia risolutiva generale, esso trascende i dati e potrebbe costituire un anello tra la pratica di misurare e calcolare all’interno di casi particolari e la teoria che generalizzando esclude, anzi include, tutti i casi particolari possibili.

2. Problemi senza numeri e programmi del 1985

I Programmi del 1985 sembrano indirizzare le attività geometriche nella scuola elementare più all’osservazione, descrizione, riproduzione/ rappresentazione grafica di oggetti quotidiani e situazioni spaziali, che non alla possibilità di esplorarli/interpretarli/usarli come strumenti di mediazione verso la teoria geometrica.

Forse ciò dipende dal fatto che questo tipo di lavoro richiede all’alunno, affinché l’approccio sia produttivo, un livello cognitivo (di sequenzialità logica, di capacità di interpretazione e di riflessione) ritenuto troppo alto per la fascia d’età della scuola elementare? Se così fosse, ciò non sarebbe vero per tutti i bambini, ma soprattutto si trascurerebbe la possibilità di utilizzare questi contesti come palestra per avviare processi cognitivi interessanti per la geometria che dovrà essere affrontata successivamente.

Sempre nel testo dei Programmi si parla di “sistematizzazione delle esperienze spaziali del fanciullo”; ma a quale spazio si fa riferimento? Lo spazio di cui si parla è sicuramente lo spazio esterno, quello dell’ambiente antropizzato o naturale, in cui si compiono le nostre esperienze percettive e di movimento, e quello rappresentato delle fotografie, dei disegni prospettici, di quelli in scala..., e infine quello dei riferimenti cartesiani, polari, sferici, ..., in cui collocare oggetti e situazioni.

Dal punto di vista cognitivo, però, ci dobbiamo occupare anche di altri “spazi”; infatti, per “sistematizzare” occorre realizzare connessioni e operazioni intellettuali complesse e dirigere in modo volontario i processi di pensiero. È evidente allora che lo spazio a cui ci si riferisce deve essere anche lo spazio interno, quello in cui ambientiamo le nostre immagini mentali, statiche o dinamiche, in cui ricostruiamo o progettiamo situazioni; lo spazio logico dei processi ipotetico-deduttivi, delle alternative possibili, dei controlli e delle argomentazioni.

Il concetto di spazio, infatti, è un concetto complesso, in cui conta molto il processo costruttivo-culturale del soggetto e la cui padronanza non si realizza solo fuori di noi, ma anche e soprattutto nella nostra mente, e la geometria ci dà gli strumenti, ci aiuta a costruire i modelli necessari per organizzare la percezione dello spazio, scoprirne regolarità e ritmi, rappresentarlo attraverso schemi via via più astratti.

La padronanza dello spazio e la capacità di "rappresentarselo" e rappresentarlo si possono realizzare nell'interazione dialettica fra tre componenti:

– lo spazio reale come campo d'esperienza con relazioni e vincoli intrinseci;
– il contesto interno dell'allievo con concezioni, concetti "comuni", capacità di dirigere in modo volontario i propri processi di pensiero;
– il contesto interno dell'insegnante che media fra gli elementi culturali - concettuali e i segni presenti nel campo d'esperienza e le strategie di ragionamento e i processi attivati dall'alunno.

3. Problemi di costruzione

Con riferimento al precedente quadro, cosa si intende per "problemi di costruzione"?

Di primo acchito la parola "costruzione" evoca il "fare" concreto; fa pensare a costruzioni con cartoncino, legno, tangram... o a rappresentazioni iconiche, a disegni con riga e compasso...; meno ovvio è associare il termine "costruzione" all'idea di rappresentazione mentale e verbale, fino alla strutturazione logica di catene ipotetico-deduttive, ad attività costruttive di formulazione di congetture, di dimostrazioni, ecc. (come nella costruzione delle validazioni argomentative delle ipotesi).

A questo punto emerge con maggior chiarezza la connessione tra le due proposizioni del titolo: lavorare su problemi di costruzione in geometria senza numeri significa muoversi in un contesto che consente di attivare conoscenze di tipo progettuale e riflessivo, non di calcolo; ad esempio: *"Come si fa a costruire.... ?"* oppure: *"Funziona o non funziona la seguente definizione… ?"*.

Si delineano così situazioni problematiche aperte, significative, che escludono il ricorso a formule e a schemi "preconfezionati" e memorizzati; esse richiedono al soggetto, posto di fronte ad uno stimolo, un atto creativo per individuare strategie mentali personali che si appoggiano alla capacità di autoporsi domande e di rielaborare concetti, script, modelli strutturati in precedenti esperienze, stabilendo fra essi relazioni nuove, verificandone via via la coerenza e la funzionalità rispetto al contesto.

È utile per maggiore chiarezza esemplificare alcuni di questi problemi di costruzione che si possono così classificare:

a) progetti di costruzioni geometriche;

b) elaborazione di rappresentazioni;

c) costruzioni di validazioni.

a) - *Come puoi ritagliare da un foglio di carta una sagoma in un solo pezzo che, piegata, ti permetta di costruire una scatola che abbia la forma di quella che vedi sul tavolo dell'insegnante (parallelepipedo)?*

– *Con sei stecchini uguali fra loro, come puoi formare quattro triangoli equilateri?*
– *Spiega come puoi disegnare un quadrato su un foglio bianco (su cui è già disegnato un lato non parallelo ai lati del foglio).*
– *Progetta un modo per scoprire se i raggi del Sole arrivano sulla terra paralleli fra loro.*

b) - *Immagina di aprire e appiattire sul tavolo la scatola di cartone (parallelepipedo) che vedi sul tavolo. Disegna la sagoma che ottieni.*

– *Spiega come fai a riportare il ventaglio delle ombre dello gnomone, rilevate nel corso della mattina, sul tuo quaderno.*
– *Trova un modo per far camminare il Sole su e giù lungo lo spigolo del palazzo come una lucertola. Spiega come hai pensato.*

c) - Le forme tanto diverse ottenute usando ogni volta tutte le tesserine del tangram, sono equiestese? Motiva la tua risposta.

– *Spiega come mai portando il lato minore di un rettangolo a combaciare con il lato maggiore, piegando e poi riaprendo, si ottiene sempre un quadrato.*

4. **Un esempio di lavoro in classe, relativo a una consegna di tipo c)**

CLASSE IV (febbraio) -Consegna: *Spiega quali di queste figure è sicuramente un cerchio e perché.*

Condizioni di lavoro: ogni bambino ha un foglio su cui sono disegnati quattro cerchi e due ovali, indicati ciascuno con una lettera. Il lavoro viene svolto individualmente per iscritto. Questo è un momento di lavoro all'interno di un'unità didattica che si concluderà con la lettura delle definizioni di cerchio date da Euclide e da Erone, confrontate poi con alcune delle definizioni messe a punto dalla classe.

Le tappe che hanno preceduto questo lavoro sono indicativamente le seguenti:

– progetto individuale per costruire un carretto con ruote funzionanti;
– confronto fra alcuni progetti per individuare i vincoli da rispettare per otte-

nere ruote funzionanti;

– progetto per disegnare ruote rotonde (senza conoscere il compasso);
– riflessione individuale seguita da discussione sul motivo per cui le ruote non possono essere quadrate o ovali.

Obiettivo di apprendimento: avvicinarsi ad una definizione di cerchio personalmente conquistata.

Obiettivo di ricerca: analisi delle dinamiche in atto e valutazione della capacità di verbalizzarle.

BIBLIOGRAFIA

BARTOLINI BUSSI, M.; BONI, M.; FERRI, F.: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola,* Comune di Modena.

BARTOLINI BUSSI, M.; BERGAMINI, B.; BETTI, B.; BONI, M.; FERRI, F.; FORTINI, C.; MONARI. F.; MUCCI, A.; GARUTI, R.: 1997, 'I campi di esperienza dei meccanismi e degli ingranaggi tra esperienza quotidiana, tecnologia e geometria', *Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria, Atti 2 Internuclei Scuola dell'Obbligo.* Salsomaggiore, 1997; Dipartimento Matematica Università, Parma, pp. 95-l00.

BOERO, P.: 1997, 'Questioni di metodo sul rapporto tra segni geometrici, geometria e esperienza spaziale', *ibidem,* pp. 45-48.

SCALI, E.: 1997, 'Problemi di mediazione dei segni geometrici nella scuola elementare: il caso del "triangolo delle ombre"', *ibidem,* pp. 123-130.

FERRARI, M.: 1999, Geometria e misura nei programmi di matematica per la scuola elementare, *in questo volume.*

LANCIANO, N. ET AL: 1998, *Geometria in città,* Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, Paderno del Grappa.

LANCIANO, N.: 1996, *L'analyse des conceptions et l'observation en classe.* tesi di dottorato, FPSE, Università di Ginevra, cap. II.

GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ: RELAZIONE DEI LAVORI DI GRUPPO

Franco Giua

Scuola elementare Sinnai, Via Caravaggio, 11 - 09048 Sinnai (CA)
CRSEM - Dipartimento di Matematica, Università, viale Merello, 92 - CA
E-mail: fgiua@tin.it

Premessa

Il gruppo coordinato da Franco Giua,è composto da: Magnaterra Teresa (AN), Muro Vittoria (SA), Novelli Angelo (MO), Onofrio Eva (TS), Casella Patrizia (LU), Provitera Carla (MN), Puglisi Marta (PI), Frison Antonella (BZ), Zuccaro Elisabetta (BZ). Come stabilito nella riunione preparatoria del corso, il tutor ha seguito il medesimo gruppo per le due sessioni e tutti i gruppi hanno lavorato su tutti i temi oggetto del corso. Le relazioni dei tutor avrebbero poi dovuto mettere in evidenza gli aspetti dei temi proposti approfonditi nei lavori di gruppo e le conclusioni a cui il gruppo,insieme al tutor,era giunto.

Questa relazione riporta il processo di formazione che il gruppo da me seguito ha vissuto nelle due sessioni del corso e anche nel periodo intercorrente, in cui tutti hanno continuato a lavorare, secondo le modalità concordate, tenendosi in contatto con telefono, fax, lettere, e-mail.

Lavori della prima fase

Nella prima riunione,il 23/11,il gruppo ha affrontato il tema proposto: *Quali sono i nodi e i concetti fondamentali in geometria*? Riportiamo parte del verbale della discussione per dar conto del tipo di ricerca e di interazione che si è svolto nel gruppo.

<u>Patrizia</u>: Dobbiamo far trovare ai bambini le categorie di spazio-tempo attraverso il movimento; noi facciamo riferimento ad un nostro piano cartesiano.

<u>Marta</u>: Bidimensionale?

<u>Eva</u>: In questo momento nella mia mente interferiscono il modo in cui faccio geometria a scuola, l'idea che ho della geometria, l'idea della geometria di Mario Ferrari, quella di Nicoletta Lanciano e il risultato è che adesso sono disorientata.

<u>Patrizia</u>: Le difficoltà di insegnamento sono aumentate perché è cambiato il modo di vivere e i bambini ora non possono fare più tutte quelle esperienze d'ambiente (strada, campagna) che noi abbiamo fatto.

Vittoria: Dipende anche da come i "saperi" vengono proposti; al sud i bambini trascorrono ancora molto tempo in strada.

Elisabetta: Dobbiamo generalizzare, non fare nord, sud.

Carla: Stiamo sconfinando nella metodologia.

Tutti: Sarebbe necessario vedere cosa dicono per la geometria i Programmi Didattici per la scuola elementare.

Eva: Dobbiamo differenziare l'intervento didattico per adattarlo a ciascun alunno, poi mi domando: i nodi cosa sono: punti fondamentali, punti di contatto, difficoltà da sciogliere, mappa concettuale, o cosa?

Carla: Possiamo rifarci alla lezione di Ferrari di stamattina: oggetti (figure), trasformazioni, misura.

Angelo: Figura come oggetto tra virgolette.

Antonella: Consideriamo i "nodi" come facenti parte di una mappa concettuale.

Tutti: Realizziamo su un cartellone una “mappa concettuale.”

Oggetto reale concreto ⇒ Rappresentazione bi-tridimensionale*⇒
⇒ Concetti geometrici →
→ Relazioni (parallelismo, perpendicolarità, incidenza)
→ Trasformazioni (traslazione, simmetria, rotazione, ingrandimento,
rimpiccolimento)
→ Misurazioni (lunghezze, angoli, aree, volumi)
⇒ = attraverso l'astrazione
→ = soggetti/e a
* La rappresentazione prevede una classe di oggetti.

Tutti: Parliamo di "Nodi" come connessioni dei saperi.

Marta: Esistono due piani: piano della realtà e piano delle rappresentazioni: gli oggetti reali concreti e le rappresentazioni fanno parte del piano della realtà, la geometria si occupa di astrazioni.

Teresa: Non c'è un solo livello di astrazione, la figura è un primo livello di astrazione, anche la localizzazione degli oggetti nello spazio è un livello di astrazione. Esistono varie geometrie, per cui ho difficoltà a ritrovarmi nello schema. La negazione del 5° postulato di Euclide porta alla costruzione di altre geometrie.

Patrizia: Io uso lo spazio discreto e non nego Euclide, uso le due alternative in situazioni didattiche diverse.

Eva: Dobbiamo parlare della disciplina "geometria" o dei Programmi Didattici di geometria?

Angelo: Non riesco ad inserire un discorso di localizzazione di oggetti e forme nello spazio in questa mappa e nel discorso di Mario Ferrari.

Franco: Proviamo a vedere come indicazione di lavoro anche la relazione di Nicoletta Lanciano.

Marta: Geometria è il titolo, sta fuori dalla mappa. C'è lo spazio reale, che sta fuori dalla geometria, e lo spazio geometrico, che è uno spazio astratto (convenzionale, che non esiste). La realtà (micro-spazio, meso-spazio, macro-spazio) proietta delle immagini che sono le rappresentazioni geometriche.

Angelo: Bisogna distinguere spazio reale da spazio mentale e spazio virtuale.

L'essenziale delle conclusioni del gruppo viene così sintetizzato:

Lo spazio della realtà i cui caratteri principali sono

Spazio fisico	Tempo	Oggetti concreti

Lo spazio della geometria[i] (rappresentazione, astrazione) (spazio mentale e/o virtuale) **i cui caratteri principali sono:**

spazio	figure
organizzazione	misura - trasformazioni - relazioni
posizioni	spostamenti

Nella riunione del 25 novembre il gruppo si propone di realizzare nel periodo tra le due sessioni un'esperienza in classe su "Geometria senza numeri" e si impegna a portare a febbraio i risultati dell'esperienza: il lavoro dovrà avere un contenuto sufficientemente libero per potersi adattare alle diverse difficoltà dell'ambiente di provenienza di ciascuno, ma permettere la costruzione di un "metodo" comune. Obiettivo principale sarà la riflessione sul processo attraverso il quale, insieme, si possono costruire delle conoscenze in didattica della matematica.

Nella riunione del 27 nasce così, facendo riferimento alle osservazioni fatte con Nicoletta Lanciano sulla predominanza nello spazio antropico della forma quadrata, e man mano si delinea meglio la nostra ipotesi di lavoro comune e di sperimentazione sull'utilizzo di carte strutturate.

Nella nostra scuola la strutturazione del foglio con l'uso del quadrato è predominante, per cui l'abitudine ad usare fogli quadrettati influenza la ricerca di forme quadrate anche in fogli strutturati con forme diverse; quali condizioni didattiche possono favorire o impedire tale influenza?

Descrizione sintetica dell'esperienza da realizzare in classe.

Consegne per l'insegnante: si distribuiranno agli alunni due fogli: in ambedue è disegnato un Albero di Natale, il primo è costituito da un triangolo e da un rettangolo il cui interno è tassellato a triangoli rettangoli isosceli. Il secondo è costituito da un triangolo e da un trapezio isoscele,il cui interno è tassellato a triangoli equilateri. I bambini devono evidenziare le forme diverse che riescono ad individuare all'interno dei due alberi. Consegne per l'alunno: "un mago ha nascosto dentro quest'albero tante forme, gingilli, decori. Scoprile e colorale".

Tra novembre e febbraio i corsisti si sono messi in comunicazione tra loro e con il coordinatore attraverso lettere, telefono, fax, e-mail, così da mettere a punto il materiale, confrontare diverse proposte e metodologie e adattarle alla realtà in cui si operava.

Lavori della seconda fase

Nella fase di febbraio, avendo ottenuto, come richiesto a novembre, l'installazione di due stazioni multimediali, una parte del lavoro è dedicata ad uno scambio di esperienze sull'uso del computer e di notizie sui software utilizzati per l'insegnamento. Alcuni corsisti dichiarano la loro scarsa conoscenza sia del mezzo computer che dei suoi possibili usi didattici, altri hanno buone conoscenze tecniche e scarse esperienze didattiche, altri ancora vantano pregresse esperienze dell'uso del computer nella didattica che risalgono indietro nel tempo ai "Commodore 64", macchine che tra il 1982 e il 1988 sono state utilizzate in molte scuole. Dalla discussione emerge un dato di critica delle posizioni di alcuni relatori che, più che i vantaggi, hanno evidenziato i rischi legati all'uso del computer nella didattica, lasciando aperti tutti i problemi legati alle modalità ed alla pertinenza dell'uso della multimedialità nell'insegnamento /apprendimento della geometria nella scuola elementare.

Dato il poco tempo a disposizione, si riesce a dedicare solo una sessione e mezza dei lavori di gruppo alla comunicazione e al confronto dei lavori e delle sperimentazioni realizzate, delle quali ciascun componente ha prodotto una relazione scritta. Si concorda sul fatto che la sperimentazione "si è andata strutturando passo passo, prendendo quasi sempre direzioni non previste nella fase di organizzazione. I percorsi originariamente progettati sono stati modificati nel lavoro in classe con i bambini. E' stato difficile conciliare la vitalità dell'interazione didattica con il rigore necessario al fine di ottenere un risultato di sintesi coerente con l'ipotesi di lavoro formulata nella prima fase. In questa situazione si è ritenuto più produttivo approfondire la riflessione sulle relazioni prodotte dai singoli componenti il gruppo[ii] al fine di avviare una possibile ricerca che, nella determinazione del gruppo di proseguire nel lavoro comune a distanza, potrà essere oggetto di una futura pubblicazione.

Conclusione

Crediamo sia importante mettere in evidenza l'interesse ingenerato nei colleghi da questa modalità di formazione che ha confermato l'assunto che non si cambia il proprio modo di fare scuola discutendo, ma programmando e lavorando insieme. Tutti hanno espresso l'esigenza di rimanere in contatto per continuare a scambiare le esperienze, generalizzando l'uso della posta elettronica, con l'obiettivo di costruire un prodotto multimediale sull'esperienza fatta con le classi.

Purtoppo solo nella seconda fase si è entrati nel merito dell' uso nella didattica del mezzo multimediale e l'uso del computer è stato confinato quasi esclusivamente nello spazio della "autoformazione assistita".

Tutti i corsisti hanno auspicato che il programma di formazione del Ministero e dell'U.M.I preveda degli incontri successivi di richiamo e di verifica del "Processo di formazione a cascata" che, con il corso di Viareggio,si dovrebbe innescare nelle varie realtà locali.

Bibliografia

F.Giua-M.P. Pinna, 1996, Hansel e Gretel: una fiaba per...., *L'Educazione Matematica*, vol 3, pp. 124-142.

F.Speranza, 1994, Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio, *L'Educazione Matematica, vol 2, pp. 95-116.*

E.Pentiraro, 1982, A scuola col computer, *Laterza*.

[i]Ci riferiamo evidentemente alla geometria delle trasformazioni in R^3.

[ii]Tali relazioni e ogni altro materiale prodotto dal gruppo,potranno essere richieste al coordinatore.

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Balsano	Anna	SE G. Fava - Plesso Monti Iblei	Palermo
Bertini	Lina	1° Circolo	Montebelluna (TV)
Boscia	Maria	SE Carducci	Terni
Castiglia	Delia	Circolo Montessori	Roma
Ciarciaglini	Maria Antonietta	6° Circolo	Chieti
Cicerone	Michele	IC D'Annunzio	Sesto Campano (CB)
D'Avino	Loredana	DD Crevoladossola	Crevoladossola (VB)
Di Carlo	Francesca	28 Circolo	Roma
Duca	Marisa	SE De Amicis	Remanzacco (UD)
Fanelli	Maria Lina	IOSA	Gambatesa (CB)
Frascini	Anna Maria	1° Circolo	Paola (CS)
Granato	Battista	1° Circolo Corrado Alvaro	S. Giovanni in Fiore (CS)
Leone	Adele	3° Circolo Borgo Ferrovia	Avellino
Lotti	Lorenzo	SE De Amicis	Bibbiano (RE)
Magnaterra	Teresa	IC Filottrano	Ancona
Muro	Vittoria	Don Bosco	Auletta (SA)
Novelli	Angelo	10° Circolo Da Palestrina	Modena
Onofrio	Eva	SE F.lli Visintini	Trieste
Profeta	Paola	IC	Raiano (AQ)
Provitera	Carla	SE L. Grossi	Viadana (MN)
Puglisi	Marta	SE E. Pardi	Migliarino Vecchiano (PI)
Rago	Vincenzo	2° Circolo	Policoro (MT)
Rigobello	Franca	SE Pertini	Badia Polesine (RO)
Sagrestani	Fiorella	SE Le Corone	Spoleto (PG)
Sciortino	Marisa	DD Porto Empedocle	Porto Empedocle (AG)
Signore	Sandra	SE Cannole	Lecce
Tempra	Luigi	SE M. Gianasso	Ponte Valtellina (SO)
Tomasetti	Teodora	SE Parco di Veio	Roma
Zoppi	Ughetta	2° Circolo L. Sbrana	Viareggio (LU)
Zunino	Angela	SE Camporosso	Camporosso (IM)

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

1 – Gestione e innovazione*
2 – Lo sviluppo sostenibile
3 – La valenza didattica del teatro classico
4 – Il postsecondario per la professionalità* (2 tomi)
5 – Dalla memoria al progetto
6 – La sperimentazione della sperimentazione*
7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
8 – Probabilità e statistica nella scuola liceale
9 – L'Italia e le sue isole
10 – Lingua e civiltà tedesca
11 – La scuola nel sistema polo** (manuale guida)
12 – La "città" dei filosofi
13 – Le città d'Europa
14 – Dal passato per il futuro
15 – Gestione, innovazione e tecnologie*
16 – Per non vendere il cielo
17 – Briser la glace: la dinamica della comunicazione francese
18 – Dalla lingua per la cultura: la didattica del latino
19 – L'insegnamento della geometria (2 tomi)
20 – La lingua del disegno: al crocevia fra scienza e arte
21 – Insegnare storia**
22 – Problemi della contemporaneità.
Tomo primo: Unità e autonomie nella storia italiana
23 – Aritmetica**
24 – Analisi matematica**

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco (*) si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei Presidi; gli altri sono dedicati alla formazione dei Docenti. I titoli segnalati col doppio asterisco (**) si riferiscono alla serie "Documenti di lavoro"

VOLUMI IN CORSO DI PUBBLICAZIONE

25 – Logica, probabilità, statistica
26 – Se hace camino al andar: didattica della comunicazione spagnola
27 – Gli IDEI nel progetto formativo
28 – Il linguaggio dei linguaggi

matteoni stampatore Lucca
maggio 2000

MALGRÉ TOUT