Ministero della Pubblica Istruzione

Direzione Generale Istruzione Classica Scientifica e Magistrale

Direzione Generale Istruzione Elementare

Unione Matematica Italiana

GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ

5° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica per Docenti di Scuole Medie Superiori

QUADERNI 35

DOCUMENTI DI LAVORO

Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri" Lucca

23/27 novembre 1998 - 22/26 febbraio 1999

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: G. Cosentino
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinatore editoriale: G. Ciri
Revisione Scientifica: F. Arzarello, C. Bernardi, L. Ciarrapico, M. Dibilio
Editing: P. Nardini
Grafica: F. Panepinto, A. Commisso, L. Gerbino

Il presente fascicolo potrà essere riprodotto per essere utilizzato all'interno delle scuole in situazioni di formazione del personale direttivo e docente (Corsi, Collegi, riunioni per materia).

Nota editoriale

In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.

Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale
Direzione Generale Istruzione Elementare
Unione Matematica Italiana

V° CORSO UMI-MPI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
Seminario di formazione per Docenti
Scuole Medie Superiori

"GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ"

Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri" - Lucca

23-27 novembre 1998 - 22-26 febbraio 1999

INDICE

PRESENTAZIONE

Ferdinando Arzarello
Presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (*).
Lucia Ciarrapico
Dirigente superiore per i servizi ispettivi.

Questo volume raccoglie materiale elaborato in occasione del Quinto Corso in Didattica della Matematica, organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana.

Alla fine del 1993 il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un Protocollo d'Intesa, per promuovere «programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni». Nel quadro di una collaborazione fra mondo della Scuola e Università volta a realizzare forme di aggiornamento, il Protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale di due settimane, su temi di didattica della matematica. Nel 1994 si è svolto il Primo Corso, dal titolo «L'insegnamento dell'Algebra fra tradizione e rinnovamento» per docenti delle Scuole Superiori; nel 1995-96 si è tenuto il Secondo Corso, dedicato all'«Insegnamento della Geometria» e rivolto sia a docenti delle Scuole Medie sia a docenti delle Superiori; nel 1996-97 si è tenuto il Terzo Corso, diviso in due sezioni, una di "Aritmetica" per insegnanti della Scuola Elementare, una di "Didattica dell'analisi Matematica" per docenti delle Superiori; nel 1997-98 si è tenuto il Quarto Corso "Logica Probabilità Statistica" per docenti delle Superiori e delle Scuole Medie.

Il Quinto Corso in Didattica della Matematica si è svolto a Viareggio in due settimane separate, dal 23 al 27 novembre 1998 e dal 22 al 26 febbraio 1999.

Anche il Quinto Corso è stato articolato in due sezioni una per le Superiori, una per le Elementari, entrambe sul tema "Geometria e multimedialità".

Al solito, si è ritenuto preferibile presentare separatamente i testi relativi alle Superiori e quelli dedicati alle Elementari, per ottenere due volumi tipograficamente più agili e didatticamente mirati.

Al corso sono stati ammessi solo 30 docenti di ruolo per le elementari e 41 per le Superiori a fronte di un numero molto più elevato di domande. La scelta

(*) La Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica è una commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana, che si occupa specificamente dei problemi di carattere didattico.

è stata fatta sulla base dei titoli presentati dai docenti e cercando di soddisfare una rappresentanza uniforme di tutte le regioni italiane.

Nella Sezione "Superiori" si sono svolti 4 cicli di lezioni, con esercitazioni, conferenze, lavori di gruppo, esercitazioni al computer. Come appare dai testi, in cui sono sinteticamente riportati i vari momenti di lavoro (lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici), si è cercato di affrontare gli argomenti avvalendosi delle indicazioni fornite dalla ricerca didattica e di spunti suggeriti dalla storia e dalla epistemologia. Una particolare attenzione è stata dedicata alla fruizione a scuola delle moderne tecniche multimediali, approfondendo in un corso specifico l'utilizzo della rete Web nell'insegnamento della geometria.

Nei lavori di gruppo sono stati fra l'altro discussi problemi legati alla valutazione dell'apprendimento oltre che a tematiche specifiche relative all'insegnamento della Geometria.

Questo libro vuole essere uno strumento didattico per attività di studio, di aggiornamento e anche di prima formazione. L'efficacia di un Corso di didattica si misura dalla sua ricaduta: ci auguriamo che anche il libro permetta a molti di coloro che non hanno potuto partecipare al Corso, di usufruirne, sia pure a distanza di tempo, e possa anche costituire una fonte di suggerimenti per Enti e Associazioni che vogliano contribuire con iniziative locali alla formazione dei docenti.

Un sentito ringraziamento va rivolto a quanti hanno reso possibile la realizzazione dell'iniziativa:

– alla Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale, che ha curato l'organizzazione del Corso,
– alla Direzione Generale dell'Istruzione Tecnica, alla Direzione Generale dell'Istruzione Professionale e all'Ispettorato per l'Istruzione Artistica, che hanno contribuito alla realizzazione del Corso,
– al Preside Giuseppe Ciri del Liceo Scientifico "Vallisneri" di Lucca, che ha diretto il Corso, e al personale dello stesso Liceo, che ha offerto un efficace sostegno amministrativo e di segreteria,
– ai relatori, per la loro competenza e disponibilità,
– ai docenti partecipanti, che hanno dato contributi preziosi grazie alla loro preparazione e alla loro esperienza concreta.

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
SEZIONE SUPERIORI
V CORSO MPI-UMI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
"GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ"

Programma

Cicli di lezioni:

A **Gian Marco Todesco -** Digital Video **-** Roma
Proposte multimediali per la didattica della geometria

B **Aldo Morelli -** Università di Napoli
L'insegnamento della geometria

C **Benedetto Scimemi -** Università di Padova
Gruppi di trasformazioni geometriche

D **Enrico Giusti -** Università di Firenze
Momenti della storia della geometria

Conferenze:

Vinicio Villani - Università di Pisa
Un approccio multimediale per la formazione e l'aggiornamento degli insegnanti di matematica

Maria G. Bartolini Bussi - Università di Modena e Reggio Emilia
Geometria e multimedialità: reale o virtuale

STAFF DI GESTIONE DEL CORSO

Direttore: Giuseppe Ciri

Relatori:
Paolo Boero
Lucilla Cannizzaro
Giampaolo Chiappini
Stefania Cotoneschi
Nicoletta Lanciano
Mario Ferrari
Enrico Giusti
Aldo Morelli
Benedetto Scimemi
Franco Spinelli
Gian Marco Todesco

Segreteria organizzativa:
Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Stefano Mrakic, Maria Luisa Radini, Giovanni Romani.

La curatela del presente volume è stata seguita da Giuseppe Ciri.
La revisione scientifica dei testi è stata curata da Lucia Ciarrapico, Claudio Bernardi e Paolo Nardini.

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

Aldo Morelli
Università di Napoli "Federico II"
Facoltà di Scienze - Dipartimento di Matematica "R. Caccioppoli"

1. Gli approcci alla geometria euclidea.

Molti problemi si dibattono a proposito dell'insegnamento della geometria nella scuola secondaria superiore. In vari articoli su riviste didattiche e nei convegni rivolti alla didattica vengono affrontate diverse questioni. Gli stessi contenuti dei nuovi programmi e soprattutto i commenti che li accompagnano propongono delle scelte problematiche.

Consideriamo innanzitutto tre questioni di fondo:

a) ammesso che nel passaggio dalla scuola media alla superiore lo studio della geometria non può più basarsi soltanto o soprattutto sull'osservazione, l'intuizione e la verifica sperimentale, c'è allora da chiedersi: bisogna introdurre il metodo deduttivo limitandosi a considerare isole di ragionamenti, a sviluppare segmenti di deduzioni, senza preoccuparsi di una sistemazione globale; oppure partire, secondo il metodo euclideo, dalle basi della geometria, e tendere fin dall'inizio alla costruzione del sistema assiomatico?;

b) ammesso che, anche se non si vuole presentare agli studenti in modo sequenziale e rigoroso un'assiomatica della geometria, è comunque opportuno e necessario che l'insegnante faccia a questo riguardo una sua scelta, che deve tenere presente coerentemente, bisogna allora chiedersi: quali sono le possibili vie percorribili, tradizionali o moderne, quali le differenze fondamentali, quali i vantaggi e gli svantaggi di ognuna?;

c) ammesso che, qualunque siano le scelte relative ai punti a) e b), bisognerà certamente tenere conto delle vedute "moderne", che impongono di considerare nelle varie occasioni relazioni di vario tipo, corrispondenze, strutture, e in particolare le trasformazioni geometriche, indicate chiaramente anche nel programma (isometrie, similitudini, affinità fra piani o del piano o dello spazio), e eventualmente anche altre, allora quando e come trattare le trasformazioni?, in modo sintetico o con le equazioni e le matrici?, con quale grado di generalità e di approfondimento?, come utilizzarle nelle dimostrazioni di proprietà e nelle applicazioni a problemi?.

Cominciamo dalla questione b).

Poiché per la geometria di posizione, basata sugli assiomi di incidenza e di ordinamento, le differenze fra le varie assiomatiche non sono tanto rilevanti, anche se ce ne sono di interessanti (basta pensare al fatto che nell'assiomatica di Peano la retta e il piano non vengono introdotti come enti primitivi, ma vengono definiti, e al modo con cui si introducono i semipiani), interessiamoci soprattutto della questione della congruenza.

Per introdurre il problema, sia in classi di prima superiore o classi seguenti, sia in corsi universitari o di aggiornamento, si può porre la domanda:

" cosa vuol dire che il segmento AB è congruente al segmento A'B'?"

Le risposte più frequenti sono di due tipi: del tipo a) **" il segmento AB si dice congruente al segmento A'B' se è possibile trasportare con un movimento rigido il segmento AB sul segmento A'B' in modo che essi coincidano perfettamente"**; e del tipo b) **"due segmenti si dicono congruenti se hanno misure uguali"**.

Nel caso di risposta di tipo a) , se poi si chiede cosa sia un movimento, succede spesso che si danno risposte strane, difficili da analizzare e comunque inaccettabili, oppure si afferma, con molta convinzione, che un movimento è una corrispondenza tale che segmenti corrispondenti sono congruenti, utilizzando così lo stesso concetto che si vuole definire. Nel caso di risposta di tipo b) , se si chiede cosa sia la misura di un segmento, nel migliore dei casi si fa riferimento ad un confronto fra segmenti, che ancora utilizza proprio il concetto di congruenza, e ciò anche da parte di chi ha seguito l'impostazione della geometria con un'assiomatica a base metrica.

Il chiarimento avviene se si hanno ben chiare le idee sulle varie possibili assiomatiche.

Consideriamo, facendo i confronti essenziali, quella di **Hilbert** e quella di **Peano**, entrambe risalenti alla fine del secolo scorso e determinanti nella elaborazione dei molti testi scolastici prodotti da allora, alcuni tuttora adottati, e quelle che diciamo **a base metrica**, anche proposte in quei tempi, ma riproposte in tempi più recenti da **Choquet** ed altri, che pure vengono seguite in alcuni testi attuali, fra cui quello di **Prodi.**

Secondo Hilbert sono considerate **primitive**, senza dare definizioni esplicite, le relazioni di congruenza fra segmenti e fra angoli e si pongono cinque assiomi, che stabiliscono: a) l'esistenza del trasporto di un dato segmento su una data semiretta a partire dall'origine di questa; b) la proprietà comparativa per i segmenti; c) la proprietà additiva per i segmenti; d) l'esistenza e l'unicità del trasporto di un angolo, in un dato semipiano, a partire da una data semiretta appartenente all'origine del semipiano, insieme alla proprietà riflessiva per la congruenza fra angoli; e) parte del primo criterio di congruenza dei triangoli, cioè la congruenza degli angoli opposti a lati congruenti di due triangoli, supponendo che due lati del primo siano congruenti a due lati del secondo e che siano congruenti gli angoli compresi fra i lati considerati. .

Secondo Peano è considerato **primitivo** il concetto di moto e sono stabiliti gli assiomi che definiscono implicitamente i moti di un piano: a) i moti di un piano sono corrispondenze biunivoche fra i loro punti; b) i moti di un piano formano gruppo rispetto all'ordinario prodotto di corrispondenze; c) un moto manda rette in rette conservando le relazioni di ordine; d) valgono l'esistenza e l'unicità del moto che porta una data bandiera del piano, cioè un insieme costituito da un punto, da una semiretta con l'origine in questo punto e un semipiano avente per origine la retta di questa semiretta, in una data bandiera del piano.

Veramente Peano, che ha un'impostazione fusionista, stabilisce gli assiomi per i moti dello spazio, ma si ha una complicazione nel definire la perpendicolarità fra retta e piano e la simmetria assiale, che fa pensare che il sistema di assiomi non risulta completo.

Le due assiomatiche sono equivalenti: infatti, seguendo l'assiomatica di Hilbert e definendo congruenza fra due piani una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due piani tale che se a due punti qualsiasi A, B del primo corrispondono i punti A', B' del secondo e si ha che i segmenti AB e A'B' sono congruenti, allora segue che le congruenze di un piano soddisfano a tutte e quattro le proposizioni stabilite da Peano come assiomi (le congruenze si possono chiamare anche moti). Seguendo invece l'assiomatica di Peano e definendo congruenti due segmenti o due angoli quando essi si corrispondono in un moto, si dimostra che valgono allora tutte e cinque le proposizioni stabilite come assiomi da Hilbert.

Nelle assiomatiche a base metrica si parte dall'affermazione dell'esistenza di una funzione (non definita), detta distanza, che associa ad ogni coppia ordinata di punti del piano un numero reale non negativo e si stabiliscono per essa i noti assiomi (dello spazio metrico), cioè 1) la distanza fra due punti è nulla se e solo se i due punti coincidono; 2) la proprietà simmetrica (la distanza fra A e B, cioè associata alla coppia (A,B) è uguale alla distanza fra B ed A); 3) la disuguaglianza triangolare. Si aggiungono poi, con alcune differenze nelle varie assiomatiche, gli altri assiomi, riguardanti l'appartenenza, l'ordinamento, la continuità e il parallelismo ed ancora la congruenza. Una peculiarità delle assiomatiche a base metrica più diffuse è che, data la definizione di congruenza di un piano, detta ora più comunemente e coerentemente isometria, come corrispondenza biunivoca che mantiene le distanze, si afferma, con un assioma, l'esistenza e l'unicità della simmetria assiale rispetto ad una qualunque data retta, come isometria del piano che lascia fisso ogni punto della retta e scambia i semipiani determinati dalla retta. (Per questo fatto, cioè di considerare subito le simmetrie assiali ed anche perché si dà un maggior rilievo anche alle altre trasformazioni, isometriche o non, quando si segue un'assiomatica a base metrica, si parla di **geometria delle trasformazioni**).

L'equivalenza di un'assiomatica a base metrica e di un'assiomatica tradizionale non è tanto immediata. Già fra due assiomatiche a base metrica si trovano delle differenze significative, come fra quella proposta da Prodi e quella di Choquet. Accenniamo ad alcune questioni.

Intanto si possono, tornando alla domanda posta sulla congruenza di due segmenti, esaminare le possibili risposte.

Se si accetta l'assiomatica di Hilbert, la risposta è "la relazione di congruenza fra segmenti è un concetto primitivo"; oppure va bene la risposta di tipo b) , chiarendo il significato di misura di un segmento.

Se si accetta l'assiomatica di Peano, va bene una risposta di tipo a), chiarendo che il moto è un concetto primitivo, per il quale valgono assiomi ben dichiarati.

Se si segue l'assiomatica a base metrica, la risposta di tipo b) è quella giusta, definendo misura del segmento AB la distanza fra A e B, introdotta in modo assiomatico.

Presentiamo alcune questioni che riguardano le differenze più significative ed eclatanti che si hanno nello sviluppo della geometria nel seguire le varie assiomatiche, particolarmente quelle a base metrica di Prodi e di Choquet e quelle di tipo Euclide-Hilbert o Euclide-Peano, che diciamo tradizionali.

Si invita a riflettere e discutere su queste differenze, che talvolta sono veri capovolgimenti di situazioni.

1) **I numeri reali**: supposti noti per introdurre la funzione distanza, o ignorati (nelle assiomatiche tradizionali), almeno fino alla introduzione della misura per sviluppare la teoria delle proporzioni.

2) **La relazione triangolare**: introdotta come assioma, o scoperta con un teorema (nelle assiomatiche tradizionali).

3) **L'ordinamento della retta, del piano e dello spazio**.

4) **La continuità della retta**: stabilita con un assioma di completezza globale, o utilizzando l'assioma di Archimede e quello di Cantor oppure quello di Dedekind.

5) **La relazione di perpendicolarità fra rette**: definita utilizzando la simmetria assiale e collegandola alla funzione distanza (nelle assiomatiche a base metrica), o dopo aver introdotto la congruenza fra angoli e collegandola a questa relazione (nelle assiomatiche tradizionali).

6) **La definizione delle varie isometrie, la loro classificazione e le dimostrazioni delle loro proprietà**.

7) **L'unicità della parallela per un punto ad una retta**: data come assioma o dimostrata.

8) **Il teorema di Talete**.

9) **I teoremi di Euclide e di Pitagora.**

10) I criteri di congruenza dei triangoli.

Talvolta accade che la dimostrazione di un teorema appare più semplice seguendo un'assiomatica piuttosto che un'altra; ma con un'analisi attenta si scopre che si ha questa sensazione perché si sorvola su qualche precisazione. Ad esempio consideriamo il teorema

"se due rette sono parallele, esse formano con una trasversale angoli alterni interni congruenti".

In un'assiomatica a base metrica, in cui si introducono presto le simmetrie centrali, si presenta la seguente semplice dimostrazione: dette a, b le rette parallele e t la trasversale, che interseca a e b nei punti A e B, nella simmetria centrale avente il centro nel punto medio del segmento AB, le due rette a e b si trasformano una nell'altra, t resta fissa e quindi anche due angoli alterni interni si trasformano uno nell'altro e pertanto sono congruenti. Si dovrebbe precisare che esiste ed è unico il punto medio di un segmento, che la simmetria centrale è un'isometria, che in una simmetria centrale rette corrispondenti sono parallele e che vale l'unicità della parallela per un punto ad una retta.

E' interessante analizzare la via seguita da Enriques nel suo testo di geometria considerando le differenze che si riscontrano fra le prime edizioni, risalenti ai primi anni del secolo e le successive, degli anni '20. Nelle prime si nota un maggior rigore ed una maggiore adesione alla proposta di Hilbert: in particolare, nell'introdurre la congruenza dei segmenti e degli angoli non si dà nessuna definizione esplicita, e si enunciano gli assiomi alla maniera di Hilbert. Invece nelle altre si nota in qualche occasione una rinunzia al rigore e si dà una definizione della congruenza di due segmenti e di due figure in generale, utilizzando l'idea di movimento, senza però stabilire gli assiomi dei movimenti e continuando a dare gli assiomi della congruenza dei segmenti e degli angoli, come aveva già fatto nelle edizioni precedenti, comprendendo anche il primo criterio di congruenza.

Molto illuminante, per capire la scelte di Enriques, è la nota che è posta nel suo testo alla fine della planimetria e prima della stereometria. Si chiarisce il significato di sistema assiomatico, riflettendo sul cammino percorso, proprio come è indicato nei nuovi programmi, in riferimento al tema geometria, per le ultime classi della scuola secondaria superiore; e si mettono in rilievo le difficoltà di ordine didattico per far comprendere ed accettare l'esigenza di partire da proprietà non dimostrate e quella di considerare enti non definiti esplicitamente. L'ostacolo riguardante la seconda esigenza risulta, nella didattica, più difficile da superare, anche per motivi psicologici; anche nello sviluppo storicodel concetto di sistema assiomatico si è avuta questa maggiore difficoltà (lo stesso Euclide pretese di dare definizioni esplicite di ogni ente). Evidentemente per questo motivo Enriques non ha rinunziato a dare della congruenza fra segmenti una definizione esplicita ma vuota, pur considerandola idea primitiva.

2. Le isometrie del piano e dello spazio.

In riferimento alla questione c) posta inizialmente, si propongono le linee generali per introdurre, trattare ed applicare le isometrie del piano e dello spazio, le prime nel biennio, le seconde nel triennio della scuola secondaria superiore. Notiamo che invece le isometrie dello spazio sono inserite già nel programma del biennio.

A) Le isometrie del piano.

La definizione, considerando sia le isometrie di un piano che fra piani distinti, può essere la stessa, qualunque sia l'assiomatica scelta:

"un'isometria di un piano è una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano, tale che se a due punti qualunque A, B corrispondono i punti A' , B' i segmenti AB e A'B' sono congruenti",

salvo a precisare, come è stato detto, il significato di segmenti congruenti.

Le proprietà generali, conservazione dell'allineamento, e quindi di rette, semirette, segmenti, semipiani, angoli, e delle relazioni di parallelismo e di perpendicolarità, si dimostrano con qualche differenza a seconda dell'assiomatica adottata (per l'allineamento, seguendo una via tradizionale, occorre attendere che sia stabilito il teorema sulla disuguaglianza triangolare, che nell'assiomatica a base metrica è data per assioma).

Per la classificazione delle **isometrie di un piano**, si trova che ne esistono soltanto quattro tipi:

a) **traslazione di dato vettore**: sono corrispondenti due punti P e P' tali che il segmento orientato PP' appartiene al vettore dato;

b) **rotazione di dato centro e data ampiezza**: il centro O è unito e sono corrispondenti due punti P e P' tali che i segmenti OP e OP' sono congruenti e l'angolo POP' ha l'ampiezza data;

c) **simmetria rispetto ad una data retta (asse)**: ogni punto dell'asse è unito e sono corrispondenti due punti P e P' tali che l'asse del segmento PP' coincide con la retta data;

d) **glissosimmetria (o antitraslazione) rispetto ad una data retta e dato vettore non nullo, parallelo alla retta**: è il prodotto della simmetria rispetto alla retta data per la traslazione del vettore dato.

Per la dimostrazione di questo risultato, cioè che ogni isometria del piano è di uno di questi tipi, si può procedere stabilendo prima il **teorema fondamentale**:

"ogni isometria del piano o è una simmetria assiale o è il prodotto di due simmetrie assiale o è il prodotto di tre simmetrie assiali".

Per la dimostrazione di questo (seguendo Choquet), si può utilizzare l'osservazione preliminare semplicissima, secondo la quale,

"se in un'isometria del piano un punto U è unito e due punti corrispondenti P e P' sono distinti, allora U appartiene all'asse del segmento PP'".

Si procede allora con i seguenti passi:

a) se nell'isometria ω sono uniti tre punti A,B,C non allineati, allora ω è l'identità; infatti se ci fossero due punti corrispondenti distinti P, P' i tre punti A, B, C apparterrebbero alla stessa retta, asse di PP';

b) supposto che siano uniti in ω due punti, A, B, se ω non è l'identità, detti P , P' due punti distinti corrispondenti e σ la simmetria rispetto all'asse della coppia P,P', al quale appartengono A e B, si ha che nella isometria $\omega\sigma$, ottenuta applicando prima σ e poi ω , il punto P' risulta unito , come i punti A e B; ed essendo A, B, P' non allineati, l'isometria $\omega\sigma$ è l'identità I:

$$\omega\sigma = I, \quad \text{da cui} \quad \omega\sigma\sigma = I\sigma, \quad \text{da cui} \quad \omega = \sigma;$$

quindi ω se non è l'identità è una simmetria assiale;

c) supposto che in ω il punto A è unito, se ω non è l'identità, detti P, P' due punti distinti corrispondenti, e detta σ la simmetria rispetto all'asse del segmento PP', a cui appartiene A, si ha che nella isometria $\rho = \omega\sigma$ sono uniti i punti A e P'; essendo i punti A e P' distinti, per quanto detto in b) si ha che o ρ è l'identità, e quindi ω è la simmetria σ, oppure ρ è una simmetria σ_1, cioè

$$\omega\sigma = \sigma_1, \quad \text{da cui} \quad \omega\sigma\sigma = \sigma_1\sigma, \quad \text{da cui} \quad \omega = \sigma_1\sigma;$$

quindi ω o è l'identità, o è una simmetria o è il prodotto di due simmetrie;

d) senza fare nessuna supposizione sull'esistenza di punti uniti in ω, se questa non è l'identità, siano P e P' due punti distinti corrispondenti, e sia σ la simmetria rispetto all'asse del segmento PP'; nell'isometria $\omega\sigma$ il punto P' è unito e quindi, per quanto detto in c) essa o è l'identità, e allora ω è uguale a σ, oppure è una simmetria σ_1 e allora ω è data dal prodotto $\sigma_1\sigma$, oppure è data dal prodotto di due simmetrie $\sigma_2\sigma_1$, cioè

$$\omega\sigma = \sigma_2\sigma_1, \quad \text{da cui} \quad \omega\sigma\sigma = \sigma_2\sigma_1\sigma, \quad \text{da cui} \quad \omega = \sigma_2\sigma_1\sigma;$$

quindi ω o è l'identità, o è una simmetria, o è il prodotto di due simmetrie, o è il prodotto di tre simmetrie.

La distinzione delle isometrie di un piano in dirette ed inverse avviene introducendo il concetto di angolo orientato, (e di triangolo e poligono orientato), e la definizione di angoli (e triangoli e poligoni) orientati concordi e discordi: una isometria del piano si dice **diretta** o **inversa** a seconda che angoli (o poligoni) orientati corrispondenti siano concordi o discordi.

Osservato che una simmetria è una isometria inversa, che il prodotto di due isometrie inverse è un'isometria diretta, e che il prodotto di tre isometrie inverse è un'isometria inversa, si ha dal teorema fondamentale che le isometrie dirette sono soltanto i prodotti di due simmetrie assiali, e le isometrie inverse sono le simmetrie assiali e i prodotti di tre simmetrie assiali.

Si dimostra poi :

che il prodotto di due simmetrie assiali è una traslazione o una rotazione a seconda che gli assi delle simmetrie siano paralleli o incidenti;

che, inversamente, una traslazione si può ottenere in infiniti modi come prodotto di due simmetrie assiali con assi paralleli, e una rotazione si può ottenere come prodotto di due simmetrie assiale con assi incidenti;

che il prodotto di tre simmetrie assiali è una simmetria assiale, se gli assi delle simmetrie sono paralleli o concorrenti in un punto, altrimenti, in generale, è una glissosimmetria.

Si è così pervenuti al risultato anticipato, secondo cui ogni isometria del piano è di uno dei quattro tipi detti. Si può notare che l'identità si ha come traslazione di vettore nullo, come rotazione di ampiezza nulla, come prodotto di due simmetrie assiali coincidenti (cioè con gli assi coincidenti).

Possono seguire esercizi di determinazioni di isometrie date mediante coppie di punti corrispondenti. Si ha che una traslazione e una simmetria assiale sono individuate da una coppia di punti corrispondenti, una rotazione ed una glissosimmetria da due coppie di punti corrispondenti (A, A') e (B, B') tali che i segmenti AB e A'B' siano congruenti; dati due segmenti AB, A'B' congruenti, esistono una e una sola isometria diretta ed una ed una sola isometria inversa nelle quali ad A e B corrispondono rispettivamente A' e B'.

Una ricerca interessante ed utile consiste nella individuazione di sottogruppi di isometrie, anche finiti, ad esempio quelli costituiti dalle isometrie di una data figura, cioè che mutano la figura in sé.

Un particolare rilievo occorre dare alle applicazioni delle isometrie, sia per dimostrare teoremi, sia per risolvere problemi.

B) Le isometrie dello spazio

Un obiettivo indicato nei nuovi programmi è lo studio delle trasformazioni dello spazio, precisamente delle isometrie, con riferimento in particolare alle simmetrie dei poliedri, e delle omotetie. L'obiettivo è certamente condivisibile per vari motivi: la geometria dello spazio è sempre più trascurata nell'insegnamento nelle scuole medie (dove se si fa, non si fa bene); introdurre, classificare e applicare le trasformazioni dello spazio (almeno le isometrie) può offrire maggiori motivazioni all'introduzione dei concetti fondamentali, delle definizioni e del linguaggio appropriato e dei teoremi principali della geometria dello spazio, importante di per sé e per i collegamenti con altre discipline; si realizza un proficuo collegamento con la geometria del piano, per sviluppare sia il discorso della costruzione del sistema assiomatico, sia quello delle trasformazioni.

Bisogna comunque insistere sul fatto che, prima di parlare di isometrie e di poliedri, le idee di base (concetti, definizioni, teoremi) debbono essere fornite con sufficiente chiarezza, anche se si potrà, o dovrà, rinunziare ad alcune o a molte dimostrazioni, a seconda della fase e del livello di studio.

Occorre cioè che si abbiano sufficienti conoscenze e comprensione delle definizioni e delle proprietà concernenti i seguenti punti:

relazioni di appartenenza fra punti, rette e piani nello spazio;

ordinamento nello spazio, semispazi;

parallelismo fra piani e fra rette e piani;

ortogonalità fra rette e piani, fra piani e fra rette;

angoli e distanze;

diedri, triedri, angoloidi, poliedri; poliedri regolari (una proprietà da non trascurare è quella espressa dal teorema di Eulero).

Per lo studio delle isometrie dello spazio conviene supporre introdotta un'assiomatica del tipo di quella di Hilbert, ed estendere allo spazio la definizione di isometria (o congruenza) già data nel piano. Si stabiliscono poi, solo accennando a qualche dimostrazione, le proprietà generali delle isometrie dello spazio: la conservazione dell'allineamento, della complanarità; che semirette, semipiani, semispazi vanno rispettivamente in semirette, semipiani e semispazi; che angoli, diedri, angoloidi e poliedri vano rispettivamente in angoli, diedri, angoloidi e poliedri (congruenti); che si conservano le relazioni di parallelismo e di perpendicolarità.

Si può passare poi a definire e studiare le isometrie particolari, mostrando (o dimostrando) che si tratta effettivamente di isometrie e mettendo in evidenza qualche proprietà specifica:

la **traslazione di dato vettore**;

la **rotazione intorno ad una retta (asse) e di dato angolo (ampiezza)**, con il caso particolare della **simmetria assiale rispetto ad una retta**, che è la rotazione intorno alla retta, di ampiezza uguale ad un angolo piatto;

il **moto elicoidale, o rototraslazione, di dato asse e dato vettore parallelo all'asse,**: è il prodotto di una rotazione intorno all'asse per la traslazione del vettore dato;

la **simmetria planare intorno ad un dato piano;**

la **antitraslazione di dato piano e dato vettore parallelo al piano:** è il prodotto della simmetria planare intorno a quel piano per la traslazione del datol vettore;

la **antirotazione di dato piano, dato asse ortogonale al piano e data ampiezza**: è il prodotto della simmetria planare intorno al piano considerato per la rotazione intorno alla retta data con l'ampiezza data. E' rilevante il caso particolare della **simmetria centrale di dato centro**, che si può considerare come antirotazione rispetto ad un qualsiasi piano per il centro e rispetto alla retta per il centro perpendicolare a questo piano e con ampiezza uguale ad un angolo piatto; cioè come prodotto di una simmetria planare rispetto ad un piano per il centro per la simmetria assiale rispetto alla retta perpendicolare al piano considerato.

Si può dimostrare che non esistono altri tipi di isometrie dello spazio, mettendo anche in evidenza il ruolo delle simmetrie, assiali e planari.

Considerando prima le isometrie dei primi tre tipi, che sono le isometrie dirette (secondo una definizione che si darà dopo), si trovano, abbastanza facilmente, con dimostrazioni che qui si omettono, i seguenti teoremi, in cui interviene il concetto di composizione di isometrie, che si suppone noto.

1) *Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli è una traslazione: se gli assi sono le rette r, s, si ha la traslazione di vettore avente la direzione parallela al piano di r ed s, ortogonale ad r ed s, il verso da r ad s, ha la lunghezza doppia della distanza fra r ed s (se gli assi sono coincidenti si evidentemente l'identità).*

Si ha inversamente che una data traslazione si ottiene, in infiniti modi, come prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli (si possono subito stabilire le condizioni a cui debbono soddisfare questi assi).

2) *Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi incidenti è un rotazione intorno ad una retta: se gli assi sono le rette r ed s, che si intersecano nel punto O, si ha la rotazione intorno alla retta per O ortogonale al piano di r ed s, con ampiezza doppia dell'angolo di r ed s.*

Inversamente una data rotazione intorno ad una retta si ottiene, in infiniti modi come prodotto di due simmetrie assiali (si stabiliscono subito le condizioni a cui debbono soddisfare gli assi delle due simmetrie).

3) *Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi sghembi è un moto elicoidale: se gli assi sono le rette r ed s, si ha il moto elicoidale composto dalla rotazione intorno alla retta di minima distanza di r ed s, con ampiezza data dal doppio dell'angolo formato da r e dalla parallela s' ad s per un punto di r, e dalla traslazione determinata dalle simmetrie di assi s' ed s.*

Inversamente, un moto elicoidale si può ottenere, in infiniti modi, come prodotto di due simmetrie assiali con gli assi sghembi, soddisfacenti a condizioni che è facile stabilire.

4) *Il prodotto di due rotazioni con gli assi incidenti o coincidenti è una rotazione.*

5) *Un'isometria porta una bandiera (cioè l'insieme costituito da un punto O, una semiretta r uscente da O ed un semipiano avente per origine la retta di r) in una bandiera; esiste ed è unica l'isometria diretta che porta una data bandiera in una data bandiera; se le due bandiere sono (O, r, α) e (O', r', α'), e se nella traslazione τ che porta O in O' la semiretta r va nella semiretta s e il semipiano α va nel semipiano β, e se, supposta s distinta da r', nella rotazione ρ che porta s in r', il semipiano β va nel semipiano γ, supposto distinto da α, l'isometria che porta la prima bandiera nella seconda è data dal prodotto di τ per ρ e per la rotazione che porta γ in α'. In generale questo prodotto si può ottenere come prodotto di due simmetrie assiali ad assi sghembi ed è quindi una rototraslazione. In casi particolari si ha una traslazione o una rotazione intorno ad una retta.*

Si trova così che una isometria diretta è un moto elicoidale, o una traslazione o una rotazione intorno ad una retta.

La distinzione delle isometrie in dirette ed inverse si può fare introducendo i concetti di tetraedro orientato e di tetraedri orientati concordi o discordi: *un'isometria dello spazio si dice diretta o inversa a seconda che due tetraedri orientati corrispondenti siano concordi o discordi.*

Si vede chiaramente che una qualsiasi simmetria planare è una isometria inversa; il prodotto di un numero pari di simmetrie planari è allora diretta e il prodotto di un numero dispari di simmetrie planari è inversa.

Considerando tutte le isometrie dello spazio, non solo le dirette, si ha il seguente teorema fondamentale:

Una isometria dello spazio è una simmetria planare, oppure è il prodotto di due o tre o quattro simmetrie planari.

La dimostrazione si basa sull'osservazione che se un punto U è unito in una isometria e due punti corrispondenti P, P' sono distinti , allora U appartiene al piano assiale della coppia P, P'.

Si incomincia a stabilire che se in una isometria esistono quattro punti uniti non complanari, allora l'isometria coincide con l'identità: infatti se ci fossero due punti corrispondenti distinti P, P', i quattro punti dovrebbero appartenere tutti al piano assiale della coppia P, P'. Poi si suppone che nell'isometria esistono tre punti uniti non allineati, ... e si procede in modo analogo a quello seguito nella dimostrazione del teorema fondamentale delle isometrie del piano.... .

Seguono gli altri teoremi di composizione, dai quali si ritrova che le isometrie dirette sono soltanto dei tre tipi detti (traslazione, rotazione intorno ad una retta e rototraslazione) e si stabilisce inoltre che le isometrie inverse sono soltanto degli altri tre tipi (simmetria planare, antitraslazione, antirotazione, con il caso particolare della simmetria centrale).

1') *Il prodotto di due simmetrie planari rispetto a piani paralleli è una traslazione:*

2') *Il prodotto di due simmetrie planari rispetto a piani incidenti è una rotazione :*

3') *Il prodotto di quattro simmetrie planari è in generale un moto elicoidale, potendosi ridurre ad una traslazione o una rotazione intorno ad una retta.*

4') *Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione (in particolare simmetria assiale), con l'asse appartenente al piano di simmetria della simmetria planare oppure parallelo ad esso, è una antitraslazione.*

5') *Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione (in particolare simmetria assiale), con l'asse incidente il piano di simmetria della simmetria planare, è una antirotazione. In particolare il prodotto di una simmetria planare per la simmetria assiale con l'asse perpendicolare al piano di simmetria della simmetria planare è la simmetria centrale con il centro nel punto di intersezione di questo piano e di quell'asse.*

3. Le applicazioni delle isometrie.

Consideriamo alcuni esempi di applicazioni delle isometrie del piano, per risolvere problemi o per dimostrare teoremi. Un aspetto molto importante delle trasformazioni geometriche sta nel fatto che esse sono utili, talvolta indispensabili, per la risoluzione di problemi e la dimostrazione di teoremi: più si conoscono le trasformazioni, le loro classificazioni, le proprietà di cui godono, i loro invarianti, nella considerazione delle varie geometrie, secondo il programma di Klein, più si aprono possibilità di proficue applicazioni.

Dei vari problemi e teoremi che si considerano si danno soltanto alcuni suggerimenti per la loro risoluzione o dimostrazione. Non saranno affrontati problemi di esistenza e non si discuterà sul numero delle soluzioni.

1) *Date tre rette parallele, a, b, c, determinare un triangolo equilatero che abbia i vertici A, B, C, rispettivamente su a, b, c.*

Il punto A può essere scelto comunque su a; si determini poi la retta b' trasformata della retta b in una delle due rotazioni di centro A ed ampiezza uguale a $\pi/3$; che cosa ci dà il punto di intersezione di b' con la retta c (non trasformata)?.

2) *Siano assegnati un punto S, una circonferenza c ed una retta r: determinare un triangolo rettangolo che abbia il vertice dell'angolo retto in S e gli altri due vertici su c ed r.*

Si tratta di un problema analogo al precedente; si può utilizzare una rotazione di centro S ed ampiezza $\pi/2$ intersecando la trasformata di c con la retta r.

3) *Si considerino un punto S, un angolo α e due curve qualunque c ed; : determinare un triangolo isoscele che abbia il vertice in S, l'angolo al vertice uguale ad α e gli estremi della base su c e d.*

Si tratta di una generalizzazione dei problemi 1) e 2).

4) *Siano assegnati un vettore v (rappresentato dal segmento orientato PP') e due rette f e g: determinare un punto X su f ed un punto X' su g tali che il segmento orientato XX' appartenga al vettore dato.*

Si applichi alla retta f la traslazione di vettore v ; cosa ci dà il punto di intersezione della trasformata di f con la retta g (non trasformata)?.

Il problema si generalizza considerando due curve qualsiasi f e g invece delle rette.

5) *Da una nave sono visti due punti fissi A e B della costa sotto un angolo noto; dopo un tratto di navigazione di lunghezza, direzione e verso noti, dalla stessa nave gli stessi punti sono visti sotto un altro angolo noto; quali sono le posizioni iniziale e finale della nave? Il problema si schematizza geometricamente nel seguente: dati i punti A e B e due angoli α e β determinare due punti X e X' tali che gli angoli AXB e AX'B siano rispettivamente uguali ad α e β e il segmento orientato XX' appartenga ad un vettore dato v.*

Si tratta di un caso particolare del problema generale detto in 4): X appartiene all'arco capace dell'angolo α relativo al segmento AB, in uno dei due semipiani di origine la retta di AB, e il punto X' appartiene all'arco capace dell'angolo β relativo allo stesso segmento ed allo stesso semipiano.

6) Date una retta r e due curve c e d, determinare due punti X e X' che siano simmetrici rispetto ad r ed appartengano uno a c e l'altro a d.

Basta trovare la curva c' trasformata di c nella simmetria assiale di asse r ed intersecare c' con d (non trasformata), oppure trasformare d ed intersecare la curva trasformata con c (non trasformata); cosa ci dà ognuno dei punti di intersezione?

7) Il problema di Erone: dati i punti A e B dalla stessa parte rispetto ad una data retta r , determinare il minimo cammino che va da A a B toccando r: bisogna determinare il punto X di r in modo che la spezzata AXB sia minima.

Detto B' il simmetrico di B rispetto ad r , X è dato dall'intersezione di AX' con r.

8) Considerati l'angolo convesso di vertice O e lati le semirette r ed s ed i punti interni ad esso A e B, determinare il minimo cammino che va da A a B toccando prima r e poi s.

Bisogna determinare i punti X e Y rispettivamente su r ed s in modo che la spezzata AXYB sia minima. Detti A' il simmetrico di A rispetto ad r e B' il simmetrico di B rispetto ad s, se la retta A'B' interseca r d s, i punti di intersezione sono rispettivamente X ed Y.

9) Su un biliardo sono due biglie: colpire una di esse in modo che questa dopo uno o due rimbalzi colpisca l'altra.

Il problema si schematizza geometricamente in un problema del tipo 7) oppure 8).

10) Considerata su un biliardo una biglia, supposto, con un processo di astrazione, che essa sia ridotta ad un punto e che non esistano attriti, in modo che, una volta colpita secondo una data direzione, essa continui ininterrottamente a rimbalzare sulle pareti, qual è la probabilità che, fatta partire, essa ripassi per la posizione occupata inizialmente?

La risposta è: nulla. Infatti, si considerino e si contino le direzioni secondo cui la biglia ripassa per la posizione iniziale dopo un solo rimbalzo, dopo due rimbalzi, dopo tre rimbalzi, ecc. : si trova sempre, nei vari casi, un numero finito (via via più grande); e quindi si ha che l'insieme di tutte le direzioni secondo cui bisogna colpire la biglia affinché essa ripassi per la posizione iniziale, dopo un qualunque numero di rimbalzi, è numerabile; invece l'insieme delle rette per un punto ha la potenza del continuo.

11) Siano OABC ed OPQR due quadrati aventi solo il vertice O in comune e, considerati orientati, concordi. Si ha che la retta contenente l'altezza uscente da O del triangolo ORA coincide con la retta contenente la mediana uscente da O del triangolo OCP.

Per dimostrare questa proprietà si consideri il triangolo OR'C , trasformato di ORA nella rotazione di centro O e ampiezza $\pi/2$, e si osservi che i punti P, O, R' sono allineati, che la congiungente O con il punto medio di CP è parallela al lato R'C del triangolo PCR' e che questo lato è perpendicolare ad AR.

12) Siano H, K, L punti non allineati: si vuole determinare un triangolo XYZ che abbia i punti dati come punti medi dei lati.

Se H deve essere il punto medio di XY, K il punto medio di YZ e L il punto medio di ZX, si consideri la trasformazione ω, prodotto delle simmetrie di centri, ordinatamente, H, K, L. Un punto unito di ω coincide con X; poiché ω è una simmetria centrale si ha un solo punto unito; questo è dato dal centro di ω e può essere determinato costruendo il corrispondente di un punto qualsiasi comunque scelto sul piano (metodo della falsa posizione). La costruzione del triangolo cercato può anche essere effettuata mandando le parallele per H, K, ed L rispettivamente alle rette KL, LH ed HK. Ma il procedimento in cui si fa uso delle trasformazioni resta valido anche se H, K ed L sono allineati (ottenendo un triangolo degenere) e si presta per risolvere il problema analogo in cui sono assegnati quattro (problema 13) o più punti.

13) Considerati i punti H,K, L, M sul piano, si vuole costruire un quadrangolo che abbia questi come punti medi dei lati.

Con riferimento al procedimento indicato per l'esercizio 12), si osservi che ora la trasformazione ω , prodotto di quattro simmetrie centrali è una traslazione; se il vettore di questa non è nullo non si hanno punti uniti e quindi il problema non ha soluzioni; solo se il vettore della traslazione è nullo, cioè se si ha l'identità, si hanno punti uniti; anzi ogni punto è unito ed il problema ha infinite soluzioni. La condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni, come si sa da una proprietà dei quadrangoli, è che i punti dati siano vertici di un parallelogramma. La stessa condizione risulta anche sufficiente.

14) Si consideri un triangolo ABC: si vogliono costruire delle circonferenze con i centri in A, B e C che siano fra loro tangenti a due a due.

Il punto X di intersezione del lato AB con le circonferenze da determinare, di centri A e B, risulta il punto unito della trasformazione prodotto della rotazione di centro A che porta la semiretta AB su AC, per la rotazione di centro C che porta la semiretta CA su CB, per la rotazione di centro B che porta la semiretta BC su BA. Poiché questa trasformazione è una simmetria centrale, il problema ha una sola soluzione; essa può essere trovata costruendo una coppia qualunque di punti corrispondenti in detta trasformazione (metodo della falsa posizione): il punto medio fra essi è X.

15) Si consideri un quadrangolo ABCD: si vogliono costruire delle circonferenza con i centri in A, B, C, D, tali che la prima sia tangente alla seconda, la seconda anche alla terza, la terza anche alla quarta e questa anche alla prima.

Si tratta di un problema analogo al 14); ma ora, in generale non si hanno soluzioni; se però è verificata una condizione riguardante i lati del quadrangolo dato si hanno infinite soluzioni.

16) Il teorema di Napoleone: si consideri un qualunque triangolo ABC (anche degenere, cioè con i vertici allineati); costruiti i triangoli equilateri sui lati AC, BC, AB, nei semipiani opposti, rispettivamente, a quelli di B, A, e C (se il triangolo è degenere e B è fra A e C i triangoli equilateri di lati AB e BC vanno costruiti in un semipiano, quello di lato AC nell'altro, rispetto alla retta AC); si ha allora che i centri dei tre triangoli costruiti sono vertici di un triangolo equilatero.

Per la dimostrazione, supposto il triangolo orientato ABC con senso antiorario, detti O_1 , O_2 , O_3 , ordinatamente i centri dei triangoli costruiti su AC, BC, AB, e detta ω_i la rotazione di centro O_i e ampiezza $2\pi/3$, con verso antiorario, si osservi che si ha, essendo I l'identità

$$\omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1 = I \text{ e quindi } \omega_2 \circ \omega_1 = \omega_3^{-1};$$

che ω_3^{-1} ed ω_3 hanno lo stesso centro O_3, e che il centro della rotazione prodotto delle rotazioni ω_1 ed ω_2 si trova intersecando le semirette uscenti da O_1 e O_2 formanti rispettivamente con le semirette O_1O_2 e O_2O_1 gli angoli di ampiezza $\pi/3$ con verso antiorario.

17) Sia ABCD un quadrangolo convesso; costruiti sui lati AB, BC, CD, DA, i quadrati dalle parti opposte a quella in cui sta il quadrangolo, si ha che il quadrangolo avente per vertici i centri di questi quadrati ha le diagonali congruenti e fra loro perpendicolari; se il quadrangolo considerato è un parallelogramma allora il quadrangolo così costruito è un quadrato.

Se il quadrangolo ABCD è orientato in senso antiorario, si considerino in ordine le rotazioni aventi i centri nei centri M_1 ,M_2 , M_3 , M_4 dei quadrati detti e ampiezza $\pi/2$ con verso antiorario: il loro prodotto è l'identità; quindi il prodotto delle prime due è uguale al prodotto dell'inversa della quarta per l'inversa della terza. Questi prodotto coincidono con la simmetria avente centro nel vertice O comune dei triangoli rettangoli aventi per ipotenusa uno M_1 M_2 e l'altro M_3 M_4; si applichi poi la rotazione con centro in O di ampiezza $\pi/2$ e verso orario per vedere in cosa si trasforma il segmento M_1 M_3.

18) Il problema di Fagnano: considerato un triangolo acutangolo ABC, determinare il triangolo inscritto in esso di perimetro minimo.

Se H è un punto del lato BC, K del lato AC e L del lato AB, si ha che fissato H , affinché il perimetro del triangolo HKL sia minimo i punti K ed L debbono essere allineati con H', simmetrico di H rispetto alla retta AC e H'', simmetrico di H rispetto alla retta AB; infatti il perimetro di HKL è uguale alla lunghezza della spezzata H'KLH''. Al variare di H il triangolo H'AH'' resta isoscele con il vertice in A, i lati AH' ed AH'' sono congruenti al segmento AH e l'ampiezza dell'angolo al vertice è costante, uguale al doppio dell'ampiezza dell'angolo BAC; la base H'H'' di questo triangolo risulta minima quando è minima la lunghezza dei lati AH' ed AH'', cioè la lunghezza di AH, e questa è minima quando H coincide con il piede della perpendicolare condotta da A a BC. Analogamente si trova che i punti K ed L per cui il triangolo HKL risulta di perimetro minimo sono i piedi delle altezze condotte da B su AC e da C su AB. Quindi il triangolo di perimetro minimo inscritto nel triangolo dato è il triangolo ortotomico di ABC, cioè avente per vertici i piedi delle tre altezze.

19) Un problema di Fermat: Considerato un triangolo acutangolo ABC, determinare il punto per il quale si ha che la somme delle distanze di esso dai vertici del triangolo dato sia minima.

Sia A' il vertice del triangolo equilatero avente per lato AB, costruito dalla parte opposta a quella di C rispetto alla retta AB. Sia P un punto interno al triangolo e si consideri il punto P' trasformato di P nella rotazione di centro B , ampiezza $\pi/3$, che porta A in A'; la somma delle distanze di P da A, B, C è la lunghezza della spezzata CPP'A' : infatti PA è congruente a P'A' perché corrispondenti nella rotazione considerata e PB è congruente a PP' perché il triangolo BPP' è equilatero. Quindi il punto P per cui la somma delle distanze da A, B, C risulta minima è allineato con C ed A' ed inoltre l'angolo APB ha ampiezza $2\pi/3$, perché è congruente all'angolo A'P'B che è adiacente dell'angolo PP'B del triangolo equilatero detto. Analogamente si trova che P è anche sulle rette che congiungono A con il vertice del triangolo equilatero costruito sul lato BC dalla parte opposta a quella di A e sulla retta che congiunge B con il vertice del triangolo equilatero costruito sul lato AC dalla parte opposta a quella di B; inoltre P vede tutti e tre i lati del triangolo dato sotto un angolo di ampiezza $2\pi/3$.

4. Il problema della misura in geometria.

Nei nuovi programmi si dà il giusto rilievo al problema della misura in geometria; si tratta di una questione che si ritrova in varie fasi dell'insegnamento, ma conviene stabilire utili e naturali collegamenti e nell'ultimo o penultimo anno svolgere un discorso unitario. Ora affrontiamo, o almeno segnaliamo, alcuni problemi interessanti, più o meno delicati, considerando, in ordine:

a) i segmenti;
b) gli angoli;
c) la circonferenza ed altre curve piane;
d) i poligoni; (la teoria dell'equiscomponibilità);
e) il cerchio ed altre superfici;
f) le superfici non piane;
g) i solidi (poliedri e solidi rotondi).

I segmenti.

Una domanda molto utile, perché molto significativa per stabilire lo stato di conoscenza e di comprensione degli alunni su questo concetto, è semplicemente **"cosa è la misura di un segmento?"**. Una risposta ricorrente è **"è quante volte l'unità di misura entra nel segmento"** oppure, meglio, **"è il numero di volte secondo cui l'unità di misura si può riportare nel segmento"**; e se si chiede che tipo di numero, si resta di solito sconcertati. Un'altra risposta "seria" , non considerando quelle "strane", frequente è **" la misura di un segmento è il rapporto fra il segmento e quello scelto come unità di misura"**; ma se si chiede cosa è il rapporto fra due segmenti, spesso si sente rispondere che è la misura del primo rispetto al secondo.

Certamente la risposta alla domanda posta dipende dall'assiomatica scelta. ma anche se è stata introdotta l'assiomatica a base metrica, conviene osservare che la funzione distanza è definita a meno di un fattore, che dipende dalla scelta del segmento unitario; far conoscere il metodo della misurazione decimale; mettere in rilievo che il problema della misura dei segmenti è strettamente legato all'introduzione dei numeri reali, alla scoperta di segmenti incommensurabili e quindi dei numeri irrazionali e al postulato di continuità della retta.

Una dimostrazione della incommensurabilità della diagonale di un quadrato con il suo lato, che è opportuno presentare, è quella in cui non si fa riferimento al teorema di Pitagora, ma ad una specie di algoritmo euclideo.
commensurabili, esisterebbe un segmento h sottomultiplo sia di AC che di AB. Questo segmento sarebbe allora anche sottomultiplo della differenza fra AC e AB, cioè di CE, essendo E l'intersezione della circonferenza di centro A e raggio AB con la diagonale AC. La tangente condotta da E a questa circonferenza interseca BC nel punto K, e si ha BK = KE = CE. Il segmento h sottomultiplo comune di BC e di BK, sarebbe sottomultiplo anche della differenza CK, che è la diagonale del quadrato di lato CE: si è nella stessa situazione di partenza. Quindi h sarebbe sottomultiplo anche della differenza fra CK e CE; ripetendo la costruzione si trovano quadrati aventi lato e diagonale aventi sempre il segmento h come sottomultiplo. Ma il segmento CE = BK risulta minore di CK e quindi minore della metà del lato BC del primo quadrato; il lato del terzo quadrato risulta analogamente minore della metà del lato del secondo quadrato, ecc.. . Si troverà allora un quadrato avente il lato minore di h , che dovrebbe avere h come sottomultiplo. E ciò è assurdo.

Gli angoli.

La misura degli angoli presenta varie questioni problematiche, connesse alla difficoltà insita nel concetto stesso di angolo, suscettibile di diversi significati.

Conviene mettere in evidenza la differenza con la misura dei segmenti, essendo per gli angoli necessario parlare di una misura massima, chiarendo se si prendono in considerazione solo angoli convessi o anche angoli concavi, oppure definire la misura a meno di multipli della misura dell'angolo piatto o dell'angolo giro; è inopportuno parlare di angoli impropri, come si fa molto spesso. E' importante anche precisare il significato di angolo orientato e della misura relativa; chiarire la particolarità, in riferimento allo studio delle funzioni, della misura in radianti. Una proposta che sembra preferibile è quella, che si trova ad esempio nel testo di Prodi-Magenes di elementi di analisi: si dimostra l'esistenza di una misura degli angoli dopo aver introdotta la misura della circonferenza e degli archi; ma ciò rimanderebbe l'uso della misura degli angoli.

Può essere utile rendere partecipi gli alunni di questi problemi, notando che si hanno conclusioni diverse se si fanno delle scelte diverse. Ad esempio se gli angoli si considerano come rotazioni, o, meglio, classi di rotazioni (ogni classe costituita da una rotazione e da tutte quelle che si ottengono moltiplicandola per una traslazione), la somma delle misure degli angoli di un poligono qualunque è sempre uguale a 0 (se il numero dei lati è pari) o alla misura dell'angolo piatto, cioè della simmetria centrale (se il numero dei lati è dispari).

Curve piane; circonferenza.

Per dare un senso alla definizione di "circonferenza rettificata" e alle dimostrazioni che si trovano su tutti i testi per stabilire che esiste la misura della circonferenza, conviene riferirsi a curve piane più generali, e non subito e soltanto alla circonferenza ed agli archi di circonferenza e dare la definizione di archi di curva misurabili e della loro misura, in particolare della circonferenza. Non conviene eludere ed escludere i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme e di limite di una successione o di una funzione, limitandosi a utilizzare soltanto quello di classi contigue.

Conviene cogliere l'occasione per precisare il significato del problema della "rettificazione della circonferenza" , noto a tanti in modo tanto vago.

Poligoni.

Per la misura delle superfici piane, sorge il problema se sia conveniente sviluppare in precedenza la teoria della equiscomponibilità dei poligoni e dare definizioni e risultati concernenti l'area, o misura, dei poligoni, prima di introdurre il concetto di area di una superficie piana qualsiasi. Anche se si vuole introdurre il concetto di area di una superficie piana qualunque senza prima considerare le aree dei poligoni, fòrse è irrinunciabile, anche per pervenire poi a risultati fondamentali e pratici per le aree dei poligoni, svolgere nella forma più essenziale la teoria della equiscomponibilità dei poligoni. Fra l'altro si ritrovano così i teoremi più noti nella loro forma originaria (innanzitutto i teoremi di Euclide e di Pitagora).

Superfici piane; cerchio.

Per la misura delle superfici piane (aree), in particolare del cerchio, vale un discorso analogo a quello fatto a proposito della misura degli archi di una curva e di una circonferenza in particolare. Conviene partire dalla definizione di regione piana misurabile e della sua area, pervenendo in particolare alla misura del cerchio (e precisare i termini del famoso problema della "quadratura del cerchio"). Saranno utilizzati nuovamente i concetti di estremo superiore, di estremo inferiore, di limite e di classi contigue.

Nel caso in cui non è stata sviluppata la teoria delle aree dei poligoni, si dovrà pervenire alla definizione di area di una superficie qualsiasi, considerando solo pluriquadrati contenuti nella superficie e contenenti la superficie, come è proposto nel citato testo di Prodi e Magens, e il discorso può risultare troppo complesso.

Superfici non piane - solidi.

Anche per le aree delle superfici non piane e per i volumi dei solidi, conviene accennare al problema generale, ma riferirsi poi esclusivamente alle aree delle superfici dei poliedri e di coni, cilindri e sfere ed ai loro volumi.

Non vale la pena di sviluppare una teoria dell'equiscomponibilità per i poliedri, analoga a quella per i poligoni, che dovrebbe essere limitata ai prismi; infatti nello spazio si ha un risultato diverso da quello che si ha nel piano: mentre la relazione di equiestensione per i poligoni equivale a quella di equiscomponibilità, per i poliedri la equiestensione è una relazione più "ampia", nel senso che poliedri equiestesi (cioè aventi volumi uguali) in generale non sono equiscomponibili.

Conviene quindi dare il significato di volume, e stabilire i risultati utilizzando i concetti di limite, di estremo superiore e di classi contigue, già per i poliedri e poi per i solidi rotondi.

Con procedimenti dello stesso tipo si tratta delle aree delle superfici di cilindri, coni e sfere.

Riferimenti Bibliografici

Hilbert, D.; 1970, Fondamenti della geometria, Feltrinelli, Milano.
Peano, G. ; Si fondamenti della geometria . Rivista di Matematica; Vol IV (1894).
Choquet, G. ; L'insegnamento della geometria, Feltrinelli, Milano (i967).
Birkoff, G. D. ; A set of postulates for plane geometry, Annals of mathematics, (1932).
Moise, E.E. ; Elementary geometry from an advanced standpoit, Addison-Wesley (1964).
Enriques, F.- Amaldi, U. ; Elementi di geometria, Zanichelli, Bologna.
Prodi, G.; Matematica come scoperta, D'Anna (1975).
Prodi, G.- Magenes ; Elementi di analisi, D'Anna (1977).
Vita, V. ; I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unità d'Italia al 1986. Rilettura storico-critica, Pitagora, Bologna (1986).

GRUPPI DI TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Benedetto Scimemi
Dipartimento di Matematica pura e applicata - Università di Padova

§ 1. Introduzione.

Uno dei pregi didattici della geometria, rispetto ad altri settori della matematica scolastica, consiste nella sua accessibilità intuitiva, legata alle figure, alla visibilità; un altro pregio sta nella possibilità di farne una palestra per l'attività dimostrativa. L'impostazione analitica, che da qualche tempo è preferita dalla maggioranza dei docenti, non si presta a valorizzare questi pregi: l'intuizione visiva vi si esercita ben poco e le dimostrazioni sono per lo più verifiche di aridi calcoli. L'introduzione delle trasformazioni geometriche nei programmi della scuola secondaria si giustifica -a mio parere- soltanto se fornisce l'occasione di ritornare alla tradizione più antica, recuperando la geometria sintetica, che valorizza la visualizzazione e richiede metodi di prova talvolta più difficili, ma certamente più eleganti e non ripetitivi. In questo ritorno all'antico si presenta però l'occasione -almeno per il docente- di assumere un punto di vista relativamente moderno (Felix Klein, 1872), che è quello della teoria dei gruppi. Non è detto che questo punto di vista debba essere trasferito nella pratica scolastica, ma certamente fornisce al docente uno schema mentale chiaro e robusto. Ci proponiamo di illustrare questo approccio, cercando di valorizzarne non solo i pregi formali, ma anche l'utilità per risolvere alcuni problemi tradizionali, per esempio nella geometria del triangolo.

In tema di trasformazioni, ci limiteremo alle isometrie e alle similitudini del piano. La scelta, oltre che dai limiti imposti dal tempo, è suggerita appunto dalla loro valenza intuitiva, che dipende non da fatti matematici, ma da circostanze fisiche e psico-fisiche (percettive). Da un lato, i movimenti rigidi naturali (spostamenti, ribaltamenti ecc.) danno una base fisica alle isometrie del piano; dall'altro, il riconoscimento delle forme (le lettere dell'alfabeto, la fisionomia di una persona) è basato sull'equivalenza -per similitudine- che il nostro sistema percettivo compie spontaneamente sulle immagini. D'altra parte, la scelta delle similitudini è coerente con il punto di vista di Klein, perché gli ingredienti principali della geometria elementare del piano (rette, cerchi, angoli) sono appunto invarianti per similitudine.

In queste lezioni, utilizzando la nomenclatura e le proprietà fondamentali dei gruppi e i risultati più familiari della geometria euclidea (per es. i criteri di eguaglianza per i triangoli, il teorema di Talete) ci proponiamo di classificare isometrie e similitudini, deducendone varie proprietà; è questo il bagaglio culturale importante per il docente. Nelle esercitazioni invece, soprattutto utilizzando CABRI (ma anche le trasparenze o il piegamento della carta) si cercherà di mostrare come gli aspetti intuitivi siano di per sé meritevoli di attenzione e forniscano agli studenti lo stimolo a *congetturare,* un'attività importante almeno quanto il dimostrare.

Il punto di vista analitico sarà toccato solo brevemente, anche perché lo si trova più comunemente trattato nei libri: per dare un contributo in una direzione poco battuta, lo imposteremo introducendo i numeri complessi e il piano di Gauss, facendo vedere come in questo ambiente le similitudini si riconducano alle funzioni lineari, con notevole risparmio di formalità e senza ricorrere alle matrici.

§ 2. Gruppi di trasformazioni

Per **trasformazione** dell'insieme $\mathbb{A}$ intenderemo una permutazione di $\mathbb{A}$, cioè una corrispondenza biunivoca (sinonimo: funzione biiettiva) di $\mathbb{A}$ in sé. Poiché nel nostro caso $\mathbb{A}$ sarà per lo più un insieme di **punti** (non di numeri) indicheremo gli elementi di $\mathbb{A}$ con lettere latine maiuscole: P, Q, P', ... mentre le trasformazioni si indicheranno con lettere greche: α, β, .. ϕ,.... Se nella trasformazione α il generico elemento P di $\mathbb{A}$ ha come immagine l'elemento P', scriveremo $P'=\alpha(P)$, oppure $\alpha: P \rightarrow P'$. Poiché ogni elemento P' di $\mathbb{A}$ è immagine secondo α di uno e un solo elemento P, resta definita una funzione $\alpha^{-1}: P' \rightarrow P$ che risulta essere ancora biiettiva e si chiama la trasformazione **inversa** di α. Naturalmente $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$. Due trasformazioni α, β si **compongono** in modo naturale facendo agire "prima" l'una e "dopo" l'altra, dando luogo al **prodotto** $\beta\circ\alpha = \phi$ definito dal seguente schema: $\alpha:P\rightarrow P'$, $\beta:P'\rightarrow P''$, $\beta\circ\alpha:P\rightarrow P''$, cioè ponendo $\phi(P)=\beta(\alpha(P))$. In particolare, componendo una trasformazione α con la sua inversa α^{-1} si ottiene la trasformazione identica o **identità** $\iota : P\rightarrow P$ per ogni P, cioè la trasformazione che *fissa* ogni elemento. Poiché,per ogni α, β, γ,

il prodotto $\beta\circ\alpha$ è una trasformazione,

la composizione è associativa, cioè $\gamma\circ(\beta\circ\alpha) = (\gamma\circ\beta)\circ\alpha$,

l'identità ι è tale che $\alpha = \alpha\circ\iota = \iota\circ\alpha$,

l'inversa α^{-1} è tale che $\alpha^{-1}\circ\alpha= \iota = \alpha\circ\alpha^{-1}$, si dice che le **trasformazioni** dell'insieme $\mathbb{A}$ (con l'operazione $\circ$) formano un **gruppo**, che indicheremo con $\Gamma_{\mathbb{A}}$, o più semplicemente, Γ .

Un **sottogruppo** del gruppo Γ è un sottoinsieme Δ di Γ, **chiuso** rispetto all'inverso e alla composizione, nel senso che,invertendo o componendo due elementi di Δ,si ottiene ancora un elemento di Δ. Allora Δ è a sua volta un gruppo (rispetto alla stessa legge di composizione). Per indicare che Δ è un sottogruppo di Γ scriveremo $\Delta< \Gamma$. Se $\Lambda<\Delta$, allora anche $\Lambda< \Gamma$. Parlando di **un gruppo di trasformazioni** di $\mathbb{A}$ si intende normalmente un sottogruppo del gruppo $\Gamma_{\mathbb{A}}$. Ecco alcuni esempi importanti.

Dato un sottoinsieme $\mathbb{B}$ di $\mathbb{A}$, costituisce un sottogruppo l'insieme delle trasformazioni di $\mathbb{A}$ che trasformano $\mathbb{B}$ in sé, cioè lasciano $\mathbb{B}$ **invariato** : $\Gamma_{\mathbb{B}} = \{\phi\in\Gamma;\ \phi(\mathbb{B})=\mathbb{B}\}$. In particolare, dato un elemento B di $\mathbb{A}$, lo **stabilizzatore** di B (in Γ) è costituito dalle trasformazioni che **fissano** B: $\Gamma_B=\{\phi\in\Gamma;\ \phi(B)=B\}$. Più generalmente,vedremo che in molti casi si ottengono sottogruppi considerando le trasformazioni che **conservano** (sinonimo: lasciano invariati, fissano ecc.) certe proprietà degli elementi di $\mathbb{A}$, o il valore di certe funzioni definite in $\mathbb{A}$, ecc..

Viceversa, dati una trasformazione $\delta\in\Gamma$ oppure un sottogruppo $\Delta<\Gamma$, si studieranno gli elementi di $\mathbb{A}$ che sono **uniti** (sinonimi: fissi, invarianti) per δ: $\mathbb{A}_{\delta} =\{B\in \mathbb{A} ;\ \delta(B)=B\}$ oppure per Δ: $\mathbb{A}_{\Delta}=\{B\in \mathbb{A};\ \delta(B)=B$ per ogni $\delta\in\Delta\}$. Oltre agli elementi uniti, si studieranno anche *sottoinsiemi invarianti* per la trasformazione δ oppure per il gruppo Δ, oppure certe *proprietà invarianti* ecc..

Dato un sottogruppo $\Delta<\Gamma$, una **classe laterale** destra **modulo** Δ è l'insieme dei prodotti $\delta\circ\alpha$ in cui il fattore α è fisso (e si dirà **rappresentante** di quella classe), mentre il fattore δ *descrive* il sottogruppo: $\Delta\circ\alpha=\{\delta\circ\alpha;\ \delta\in\Delta\}$. Una stessa classe può avere rappresentanti diversi: $\Delta\circ\alpha =\Delta\circ\beta$ se e solo se $\beta\circ\alpha^{-1}\in\Delta$; il sottogruppo stesso è una particolare classe laterale e risulta $\Delta=\Delta\circ\beta$ se e solo se $\beta\in\Delta$. Ne segue che le classi laterali (destre, modulo Δ) formano una **partizione** di Γ, nel senso che ogni elemento di Γ appartiene ad una e una sola classe laterale: $\Gamma= \Delta\uplus(\Delta\circ\alpha)\uplus(\Delta\circ\beta)\uplus\ldots$ (il simbolo $\uplus$ indica l'unione *disgiunta*). Per qualche sottogruppo la partizione consiste di un numero finito di classi, per esempio soltanto due: $\Gamma= \Delta\uplus(\Delta\circ\alpha)$. In altri casi le classi laterali distinte sono infinite e talvolta si pone il problema di scegliere opportunamente i loro rappresentanti ι, α, β .... Un caso particolarmente interessante si ha quando si possono scegliere come rappresentanti gli elementi di un altro sottogruppo, sia Λ ; si scrive allora $\Gamma=\Delta\circ\Lambda$. Se poi l'intersezione è banale, $\Delta\cap\Lambda=\{\iota\}$, allora ogni elemento di Γ si può scrivere in modo unico nella forma $\gamma=\delta\circ\lambda$ con $\delta\in\Delta$, $\lambda\in\Lambda$ perché da $\delta_1\circ\lambda_1=\delta_2\circ\lambda_2$ segue $\delta_2^{-1}\circ\delta_1=\lambda_2\circ\lambda_1^{-1}=\iota$, quindi $\lambda_1=\lambda_2$, $\delta_1=\delta_2$. Scambiando i ruoli dei sottogruppi, si ha anche $\Gamma=\Lambda\circ\Delta$ e perciò in questo caso una trasformazione γ si può rappresentare sia come $\delta\circ\lambda$ che come $\lambda'\circ\delta'$, ma in generale $\lambda\neq\lambda'$, $\delta\neq\delta'$.

Analoghe considerazioni valgono per le classi laterali **sinistre**, cioè del tipo $\alpha\circ\Delta=\{\alpha\circ\delta;\ \delta\in\Delta\}$. In generale, $\alpha\circ\Delta\neq\Delta\circ\alpha$. Le inverse delle trasformazioni che appartengono a una classe laterale destra $\Delta\circ\alpha$ formano la classe sinistra $\alpha^{-1}\circ\Delta$. Un sottogruppo si dice **normale** (in Γ) se $\alpha\circ\Delta=\Delta\circ\alpha$ per ogni $\alpha\in\Gamma$; in tal caso ogni prodotto del tipo $\delta\circ\alpha$ si scrive anche $\alpha\circ\delta'$, ma in generale $\delta\neq\delta'$.

Dati due elementi P,Q di $\mathbb{A}$, l'insieme delle trasformazioni che portano P in Q costituisce una classe laterale destra, modulo lo stabilizzatore di Q, e anche una classe laterale sinistra, modulo lo stabilizzatore di P. Infatti se $\alpha(P)=Q$ e $\delta\in\Gamma_Q$ anche $\delta\circ\alpha(P)=Q$; d'altra parte, se anche $\beta(P)=Q$, allora $\beta\circ\alpha^{-1}(Q)=Q$ e quindi $\beta\in\Gamma_Q\circ\alpha$. Analogamente, se $\gamma\in\Gamma_P$, anche $\alpha\circ\gamma\,(P)=Q$ e, d'altra parte, $\alpha^{-1}\circ\beta(P)=P$, e quindi $\beta\in\alpha\circ\Gamma_P$.

Si definisce **coniugata** di α **mediante** γ la trasformazione $\gamma\circ\alpha\circ\gamma^{-1}$. La coniugata di un prodotto di trasformazioni è il prodotto delle coniugate: $\gamma\circ(\alpha\circ\beta)\circ\gamma^{-1}=(\gamma\circ\alpha\circ\gamma^{-1})\circ(\gamma\circ\beta\circ\gamma^{-1})$. Coniugando un sottogruppo si ottiene un sottogruppo. I sottogruppi normali sono quelli che coincidono con tutti i loro coniugati. E' fondamentale, per quanto segue, la seguente osservazione, di immediata verifica: se α fissa l'elemento B (o il sottoinsieme $\mathbb{B}$), allora la coniugata $\gamma\circ\alpha\circ\gamma^{-1}$ fissa l'elemento $\gamma(B)$ (il sottoinsieme $\gamma(\mathbb{B})$) e viceversa. In simboli: $\gamma\circ\Gamma_B\circ\gamma^{-1}=\Gamma_{\gamma(B)}$, $\gamma\circ\Gamma_{\mathbb{B}}\circ\gamma^{-1}=\Gamma_{\gamma(\mathbb{B})}$; in parole: coniugando mediante γ lo stabilizzatore di un punto (o sottoinsieme), si ottiene lo stabilizzatore del punto (o sottoinsieme) immagine secondo γ.

§3. Isometrie nel piano euclideo.

D'ora in avanti l'insieme $\mathbb{A}$ sarà sempre il piano euclideo e pertanto **trasformazione** significherà senz'altro *corrispondenza biiettiva dell'insieme dei punti del piano in sé.* In questo ambiente si daranno per già introdotte le nozioni tradizionali e le proprietà principali, tra cui rammentiamo quelle di: punto, allineamento, retta, semiretta, segmento, parallelismo, angolo (elementare), distanza, rette e segmenti orientati e loro misura, vettori e loro somma, angoli orientati e loro somma ecc.. Quanto ai teoremi, useremo la disuguaglianza triangolare, il teorema di Talete, i criteri di uguaglianza e similitudine per i triangoli, le proprietà angolari del cerchio ecc..

DEF. *Un'isometria è una trasformazione* γ*:* $P \to P'$ *che conserva (o lascia invariata) la distanza tra punti :* $|P'Q'|=|PQ|$ *per ogni* P, Q.
Si vede subito che le isometrie formano un gruppo, che denoteremo con il simbolo **Iso**. La conservazione della distanza comporta molte altre invarianze; per esempio, si sa che, per la disuguaglianza triangolare, la relazione $|AB|=|AP|+|PB|$ è caratteristica di tre punti *allineati*, e anzi vale se e solo se P è *compreso* tra A e B. Se ora γ:P$\to$P' è un'isometria, risulta anche $|A'B'|=|A'P'|+|P'B'|$ e dunque γ conserva l'allineamento, trasforma rette in rette, segmenti in segmenti ecc.. Due rette parallele vengono trasformate in rette parallele (per la biiettività), dunque un parallelogramma in un parallelogramma, quindi un vettore in un vettore. Anche gli angoli elementari vengono trasformati in angoli *eguali* (intenderemo: con la stessa *misura*). Non così per gli angoli orientati, la cui misura indicheremo con (ABC), riferendoci (ordinatamente) alle semirette BA, BC; alcune isometrie li conservano (ABC)=(A'B'C'), altre li trasformano in angoli opposti (ABC)= - (A'B'C').

DEF. *Un'isometria si dice* ***pari*** *(o positiva) se conserva le misure degli angoli orientati, cioè trasforma ogni triangolo ABC in un triangolo A'B'C' orientato concordemente. Le isometrie che non sono pari si chiamano* ***dispari*** *(o negative).*
I nomi sono scelti in conformità al fatto che, nella composizione, valgono le solite leggi : pari + dispari = dispari ecc. (ovvero + per - = -). Allora si vede che le isometrie pari formano un gruppo che denoteremo con $\mathbf{Iso}^+$ (e dunque scriveremo $\mathbf{Iso}^+ < \mathbf{Iso}$) mentre le isometrie dispari costituiscono l'unica altra classe laterale: $\mathbf{Iso}=\mathbf{Iso}^+ \cup (\mathbf{Iso}^+ \circ \alpha)$, dove il rappresentante α si può scegliere arbitrariamente (tra le isometrie dispari). Infatti è chiaro che, se α è dispari, ogni trasformazione appartenente alla classe $\mathbf{Iso}^+ \circ \alpha$ è dispari; viceversa, se β è dispari, allora $\beta \circ \alpha^{-1}$ è pari e dunque $\beta \in \mathbf{Iso}^+ \circ \alpha$.

DEF. *Assegnato un insieme* $\mathbb{B}$ *di punti del piano* (tipicamente: una figura geometrica, come un poligono oppure un cerchio ecc.) *una* ***simmetria*** ϕ *di* $\mathbb{B}$ *è un'isometria che lascia* $\mathbb{B}$ *invariato :* $\phi(\mathbb{B})=\mathbb{B}$. *Queste trasformazioni formano il gruppo* $\mathbf{Iso}_{\mathbb{B}}$ *, che si chiama il* ***gruppo delle simmetrie*** *di* $\mathbb{B}$.

Individuare e studiare il gruppo delle simmetrie di una figura geometrica è un problema interessante e costituisce forse l'esercizio più popolare in questo argomento (vedi gli esercizi).

N.B. Questa definizione suggerisce di evitare l'uso del termine *simmetria* (puntuale,assiale) per le familiari trasformazioni che stiamo per descrivere nel prossimo § ; infatti una certa figura può ammettere come simmetria anche una traslazione, una rotazione, ecc... Per analoghi scopi di chiarezza si è preferito chiamare un'isometria *dispari* piuttosto che *inversa* (per evitare che l'inversa di un'isometria possa non essere inversa!).

§ 4. Famiglie di isometrie.

Richiamiamo alcune famiglie di isometrie con le principali proprietà.

DEF. *Assegnati due punti A,B la* ***traslazione*** τ_{AB}*:P→P' è la trasformazione definita dall'uguaglianza vettoriale* $\underline{PP'} = \underline{AB}$.

Si intende qui che i segmenti orientati AB, PP' sono *equipollenti*, ovvero i punti A, B, P', P sono (ordinatamente) i vertici di un parallelogramma. Si ha $\tau_{AB}=\tau_{CD}$ se e solo se $\underline{AB}=\underline{CD}$ e dunque le traslazioni sono in corrispondenza biunivoca con i vettori $\underline{u}=\underline{AB}$ e si potrà scrivere $\tau_{AB}=\tau_{\underline{u}}$. Si prova elementarmente (con le proprietà del parallelogramma) che $\tau_{\underline{u}}$ è un'isometria pari e che nella composizione risulta $\tau_{\underline{u}}\circ\tau_{\underline{v}}=\tau_{\underline{u}+\underline{v}}$ cioè le traslazioni si compongono *come* i loro vettori si sommano; in particolare $\tau_{\underline{u}}^{-1} =\tau_{-\underline{u}}$; $\tau_{\underline{0}} = \iota$. Da questo segue che le traslazioni formano un gruppo, che si denoterà con **Tra**. Possiamo scrivere allora **Tra<Iso$^+$<Iso**. Il gruppo **Tra** si dice *commutativo* (o abeliano) perché due traslazioni *còmmutano*: $\tau_{\underline{u}}\circ\tau_{\underline{v}}= \tau_{\underline{v}}\circ\tau_{\underline{u}}$. **Tra** agisce come gruppo *transitivo* sui punti del piano, cioè scelti arbitrariamente due punti A,B, esiste in **Tra** una trasformazione che manda A in B. Scelta una traslazione $\tau_{\underline{u}}$ (non identica: $\underline{u} \neq \underline{0}$), lo studio dei suoi *invarianti* porta alle seguenti conclusioni: non ci sono punti fissi, le rette unite sono tutte e sole quelle parallele a $\underline{u}$. Il fatto che ogni retta viene trasformata da ogni traslazione in una retta parallela si esprime dicendo che le traslazioni conservano le *direzioni*. Le traslazioni *in una certa direzione* (cioè le $\tau_{\underline{u}}$ con $\underline{u}$ parallelo a una retta assegnata) formano un sottogruppo di **Tra** ; scelte comunque due diverse direzioni, **Tra** è il prodotto dei relativi sottogruppi e la scrittura è unica.

DEF. *Assegnati un punto O e un angolo orientato θ, la* ***rotazione*** $\rho_{O,\theta}$*:P→P' è la trasformazione definita dalle uguaglianze* $|OP'|=|OP|$; $(POP')=\theta$. Abbiamo indicato con (POP') la misura dell'angolo (orientato) che la semiretta OP descrive nel fascio di centro O per sovrapporsi alla semiretta OP'. Queste misure (riferite a un verso di rotazione prefissato una volta per tutte) sono individuate modulo 2π e anzi (purché $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$) risulta $\rho_{O,\theta} = \rho_{Q,\omega}$ se e solo se O=Q e $\theta\equiv\omega \bmod 2\pi$. Si verifica elementarmente (per es.

con i criteri di uguaglianza per i triangoli) che una rotazione è un'isometria pari. La rotazione $\rho_{O,0}$ è l'identità. Per le rotazioni che hanno lo stesso punto unito (o **centro**) O si verifica che $\rho_{O,\theta} \circ \rho_{O,\omega} = \rho_{O,\theta+\omega}$, cioè due tali rotazioni si compongono sommando gli angoli. Poiché $\rho_{O,\theta}^{-1} = \rho_{O,-\theta}$, si vede che le rotazioni *che hanno un prefissato centro O* formano un sottogruppo, che indicheremo con $\mathbf{Rot_O}$. Per ogni scelta del centro O potremo dunque scrivere $\mathbf{Rot_O}<\mathbf{Iso^+}<\mathbf{Iso}$. $\mathbf{Rot_O}$ agisce *transitivamente sulle direzioni orientate*, nel senso che, presi comunque due vettori, esiste una rotazione di centro O che trasforma il primo in un vettore parallelo e equiverso al secondo. Se si compongono rotazioni con centro diverso, come vedremo, ne può risultare un'altra rotazione oppure una traslazione, e le due cose si escludono: $\mathbf{Tra} \cap \mathbf{Rot_O}=\{\iota\}$. Per una rotazione (non identica) di centro O, l'unico punto unito è O; non ci sono rette unite, a meno che l'angolo non valga π . La rotazione $\rho_{O,\pi}$ si chiama anche *mezzo-giro* attorno a O (nome tradizionale: *simmetria puntuale*), che indicheremo semplicemente con ρ_O. Per un mezzo-giro sono unite le rette che passano per il centro e tutte le direzioni. Un mezzo-giro è una trasformazione *involutoria*, cioè coincide con la sua inversa: $\rho_O^{-1} = \rho_O$.

DEF. *Data una retta r, la* ***riflessione*** *su r (o rispetto a r) è la trasformazione $\sigma_r : P \rightarrow P'$ definita dal fatto che il punto medio $(P+P')/2$ appartiene a r e PP' è perpendicolare a r (* nome tradizionale*: simmetria assiale).*

Si verifica elementarmente che una riflessione è un'isometria dispari, involutoria ($\sigma_r^{-1} = \sigma_r$). Si ha $\sigma_r = \sigma_s$ se e solo se r=s. I punti uniti per σ_r sono tutti e soli quelli della retta r. Le rette unite sono, oltre alla stessa r, tutte quelle ad essa perpendicolari. Le direzioni unite sono due: quella di r e la sua perpendicolare. Da quanto si è detto segue che qualunque riflessione σ_r si può scegliere come rappresentante delle isometrie dispari: $\mathbf{Iso} = \mathbf{Iso^+} \cup (\mathbf{Iso^+} \circ \sigma_r)$. Il prodotto di due riflessioni deve essere un'isometria pari: infatti si verifica elementarmente che si tratta di una traslazione oppure di una rotazione e precisamente:

1) se r, s sono rette parallele e una qualunque retta ad esse perpendicolare le incontra rispettivamente nei punti R, S , allora $\sigma_s \circ \sigma_r = \tau_{2RS}$;

2) se r, s si incontrano in O, formando un angolo θ, allora $\sigma_s \circ \sigma_r = \rho_{O,2\theta}$.

In entrambi i casi, se si scambiano i fattori, il prodotto si inverte. Il prodotto di due riflessioni su rette perpendicolari che si incontrano in O è il mezzo-giro attorno a O. Viceversa, è spesso utile rappresentare una traslazione o una rotazione come prodotto di riflessioni; questi fattori non sono univocamente individuati;

per es. $\rho_{O,2\theta} = \sigma_s{}^o\sigma_r = \sigma_{s'}{}^o\sigma_{r'}$, purché r', s' si incontrino in O e formino lo stesso angolo θ .

DEF. *Una **glissoriflessione** è il prodotto* $\phi = \sigma_n{}^o\tau_{\underline{u}}$ *di una riflessione* σ_n per *una traslazione* $\sigma_{\underline{u}}$ *(* $\underline{u} \neq \underline{0}$ *) nella direzione della retta n.*

Come si vede elementarmente (e ci ritorneremo) il parallelismo tra $\underline{u}$ e n comporta la permutabilità dei fattori:$\tau_{\underline{u}}{}^o\sigma_n = \sigma_n{}^o\tau_{\underline{u}}$. Una glissoriflessione non fissa alcun punto ma fissa la (sola) retta r (asse di *scivolamento*) e la sua direzione. E' facile provare che in una glissoriflessione P→P' il punto medio (P+P')/2 appartiene in ogni caso alla retta unita n. I punti di n sono quelli che rendono minima la distanza |PP'|, perché per essi ha effetto soltanto lo spostamento longitudinale (dovuto alla traslazione),mentre è nullo quello trasversale (dovuto alla riflessione).

§ 5. Classificazione delle isometrie.

TEOR. *Un'isometria non identica che fissa due punti distinti è la riflessione sulla retta che li congiunge.*

Dim. Se ϕ: P→P' fissa A=A' e B=B', per ogni punto P si ha |AP'|=|AP|, |BP'|=|BP|, quindi P' appartiene ai due cerchi (distinti) che passano per P, di centro A e B. Se P sta sulla retta r=AB, i due cerchi sono tangenti e hanno un unico punto in comune; dunque P=P' (e quindi i punti della retta AB sono uniti). Se P non sta sulla retta AB, i due cerchi si incontrano in due punti distinti P, P* e, per le proprietà elementari del cerchio, σ_r : P→P*. Dunque P'=P oppure P'=P*. La prima o la seconda alternativa si presentano in dipendenza dalla natura di ϕ e non dalla scelta del punto P, nel senso che, se Q≠P è un punto che non sta su r, non può accadere, per es. che P'=P* e Q'=Q, perché ciò comporterebbe |PQ|≠|P'Q'|. Si conclude $\phi = \iota$ oppure $\phi = \sigma_r$, come volevamo.

TEOR. *Se due segmenti hanno la stessa lunghezza |AB|=|CD|≠ 0, esistono esattamente due isometrie, una pari e una dispari, che trasformano A in C e B in D.*

Dim. Una tale isometria ϕ si ottiene, per es., componendo la traslazione τ_{AC} con un'opportuna rotazione attorno a C : $\phi = \rho_{C,\theta}{}^o\tau_{AC}$. Per ogni isometria ψ che mandi A in C e B in D la trasformazione $\phi^{-1}{}^o\psi$ fissa sia A che B e dunque, per il lemma precedente, $\psi = \phi$ oppure $\psi = \phi^o\sigma_r$.

TEOR. *Ogni isometria pari è una traslazione oppure una rotazione.*

Ogni isometria dispari è una riflessione o una glissoriflessione.

Dim: L'identità è simultaneamente una traslazione e una rotazione. Sia ϕ:P→ P' un'isometria pari non identica. Allora esiste A≠A' e sia r l'asse del segmento AA'. La trasformazione $\psi = \phi^{-1} \circ \sigma_r : Q \to Q^*$ fissa A=A'=A* ma non è identica (essendo dispari) e dunque esiste B≠B* e si ha B≠A. Sia s l'asse di BB*. Allora A appartiene a s, perché |AB|=|AB*|. La trasformazione $\psi^{-1} \circ \sigma_s$ fissa A e B e dunque, essendo pari, è l'identità. Allora $\phi = \sigma_r \circ \sigma_s$ e sappiamo che il prodotto di due riflessioni è una traslazione oppure una rotazione, come si voleva.

Sia $\phi : P \to P'$ un'isometria dispari. Allora esiste A≠A'; si consideri il mezzo-giro ρ_M attorno al punto M=(A+A*)/2. La trasformazione $\psi = \phi^{-1} \circ \rho_M : Q \to Q^*$ fissa A=A'=A* ma non è identica (essendo dispari) e dunque esiste B≠B* e si ha B≠A. Sia s l'asse di BB*. Allora A appartiene a s, perché |AB|=|AB*|. Ora $\psi^{-1} \circ \sigma_s$ fissa sia A che B e dunque, essendo pari, è l'identità. Allora $\phi = \rho_M \circ \sigma_s$. Consideriamo ora due rette passanti per M, siano p, parallela a s, e n, perpendicolare a s. Allora $\rho_M = \sigma_n \circ \sigma_p$ e dunque $\phi = (\sigma_n \circ \sigma_p) \circ \sigma_s = \sigma_n \circ (\sigma_p \circ \sigma_s)$. Se p=s, allora $\phi = \sigma_n$, una riflessione. Altrimenti $\sigma_p \circ \sigma_s = \tau_{\underline{u}}$ è una traslazione non identica nella direzione di n , quindi $\phi = \sigma_n \circ \tau_{\underline{u}}$ è una glissoriflessione, come si voleva.

Con il precedente argomento si è implicitamente dimostrato anche il ben noto enunciato:

TEOR. *Ogni isometria è il prodotto di al più tre riflessioni* .

Il fatto che ogni isometria rientri nelle famiglie studiate nel precedente paragrafo consente di risolvere speditamente molti problemi. Per esempio: *il prodotto di due rotazioni* $\rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\beta}$ *è una traslazione* τ_{AD} *se* $\alpha+\beta = 0$ *, altrimenti è una rotazione* $\rho_{C,\, \alpha+\beta}$.

La dimostrazione di ciò, se basata sulle definizioni, richiederebbe un certo impegno: è invece una banale conseguenza del fatto che quel prodotto è un'isometria pari (per determinare i punti D e C si rinvia agli esercizi).

Si incontra talvolta anche la seguente

DEF. *Un'* ***isometria*** *si dice* ***direzionale*** *se conserva tutte le direzioni.*

La classificazione ci dice che si deve trattare di una traslazione o di un mezzo-giro. E la *conservazione* suggerisce che siamo in presenza di un gruppo, che indichiamo con **Dir** . E infatti:

il prodotto di due mezzi-giri è una traslazione;

il prodotto di un mezzo-giro e una traslazione è una traslazione;

(vedremo negli esercizi quale). Possiamo cioè scrivere **Tra<Dir** e nel gruppo **Dir** i mezzi-giri costituiscono una classe laterale modulo **Tra**.

Si chiarisce anche la struttura del gruppo delle isometrie pari:

Fissato arbitrariamente un punto O, il gruppo delle isometrie pari si fattorizza nella forma $\mathbf{Iso^+} = \mathbf{Tra} \circ \mathbf{Rot}_O = \mathbf{Rot}_O \circ \mathbf{Tra}$ *e la scrittura è unica* (ma i fattori dei singoli elementi non sono permutabili, cfr. § 2).

Ricordando poi le partizioni del tipo **Iso** = **Iso**$^+ \cup$(**Iso**$^+ \circ \alpha$), si rileggono fatti ben noti, come: ogni isometria dispari è del tipo $\tau_{AB} \circ \rho_{O,\theta} \circ \sigma_r$, cioè si può ottenere come prodotto di una (qualsiasi) riflessione per una (opportuna) rotazione attorno a un (qualsiasi) punto per una (opportuna) traslazione ecc..

TEOR. *La coniugazione mediante una qualunque isometria* γ *conserva il tipo di isometria (secondo la denominazione del § 4) e precisamente:*

1)	*se* $\gamma: r \to r'$,	*allora*	$\gamma \circ \sigma_r \circ \gamma^{-1} = \sigma_{r'}$;
2)	*se* $\gamma: A \to A', B \to B'$,	*allora*	$\gamma \circ \tau_{AB} \circ \gamma^{-1} = \tau_{A'B'}$;
3)	*se* $\gamma: O \to O'$,	*allora*	$\gamma \circ \rho_{O,\theta} \circ \gamma^{-1} = \rho_{O',\pm\theta}$;

dove il segno $\pm$ va scelto in corrispondenza alla parità di γ.

Dim. Per provare 1) si osservi che $\gamma \circ \sigma_r \circ \gamma^{-1}$ è dispari e - per l'osservazione fatta alla fine del § 2 - fissa tutti i punti di r'. Dunque si tratta di $\sigma_{r'}$.

Per provare 2) si pensi la traslazione come prodotto di due riflessioni su rette parallele, $\tau_{AB} = \sigma_r \circ \sigma_s$, e sia γ: r→r', s→s'. Allora anche r', s' sono parallele e si calcola $\gamma \circ \tau_{AB} \circ \gamma^{-1} = \gamma \circ (\sigma_r \circ \sigma_s) \circ \gamma^{-1} = (\gamma \circ \sigma_r \circ \gamma^{-1}) \circ (\gamma \circ \sigma_s \circ \gamma^{-1}) = \sigma_{r'} \circ \sigma_{s'}$ che è appunto, come si vede facilmente, la traslazione $\tau_{A'B'}$.

Per provare 3) si pensi la rotazione come prodotto di due riflessioni su rette incidenti in O che formano l'angolo $\theta/2$: $\rho_{O,\theta} = \sigma_r \circ \sigma_s$. Allora l'angolo tra r', s' vale $\pm\,\theta/2$ in corrispondenza alla parità di γ. Dunque si calcola

$\gamma \circ \rho_{O,\theta} \circ \gamma^{-1} = \gamma \circ (\sigma_r \circ \sigma_s) \circ \gamma^{-1} = (\gamma \circ \sigma_r \circ \gamma^{-1}) \circ (\gamma \circ \sigma_s \circ \gamma^{-1}) = \sigma_{r'} \circ \sigma_{s'}$,

che è appunto la rotazione $\rho_{O,\pm\theta}$.

L'enunciato 2) equivale a dire che **Tra** è un sottogruppo normale, ciò che consente di scrivere, per esempio, $\gamma \circ \tau_{AB} = (\gamma \circ \tau_{AB} \circ \gamma^{-1}) \circ \gamma = \tau_{A'B'} \circ \gamma$ (se γ : A→ A', B→ B') cioè di *spostare* un fattore traslazione in un prodotto, con la sostituzione indicata. Con le stesse formule si risolvono facilmente questioni di *permutabilità*, del tipo:

$\sigma_r \circ \tau_{AB} = \tau_{AB} \circ \sigma_r$	*se e solo se AB e r sono paralleli;*
$\rho_{O,\theta} \circ \tau_{AB} = \tau_{AB} \circ \rho_{O,\theta}$	*se e solo se* $A=B$ *oppure* $\theta = 0$ *;* *(cioè uno dei due fattori è l'identità);*
$\rho_{O,\theta} \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \rho_{O,\theta}$	*(*$\theta \neq 0$*) se e solo se O appartiene a r.*

§6. Similitudini.

DEF. *Una **similitudine** è una trasformazione γ: $P \to P'$ che conserva (o lascia invariato) il **rapporto** tra le distanze tra punti (distinti) :*

$$|P'Q'|/|R'S'|=|PQ|/|RS| \quad \text{per ogni } P, Q, R, S.$$

Anche questa definizione, basata sull'invarianza, suggerisce il fatto che le similitudini si compongono in modo da formare un gruppo, che denoteremo con **Sim**. Per verificarlo, si può preferire una definizione equivalente del tipo:

DEF. *Assegnato un numero reale $\mu>0$, una trasformazione γ: $P \to P'$, si dice **similitudine** se risulta $|P'Q'|/|PQ|=\mu$ per ogni P, Q.*

Con ciò si evidenzia che ad ogni similitudine γ resta associato il numero $\mu>0$, che si chiama *coefficiente* (o *fattore di scala*). Inoltre scrivendo $|P''Q''|/|PQ| = (|P''Q''|/|P'Q'|)\cdot(|P'Q'|/|PQ|) = \mu_2\cdot\mu_1$ si vede che nel comporre le similitudini i coefficienti si moltiplicano. In particolare, le isometrie sono le similitudini per cui $\mu=1$ e possiamo scrivere **Iso < Sim**. Il sottogruppo **Iso** è anzi normale, perché la coniugata $\gamma\circ\alpha\circ\gamma^{-1}$ di un'isometria α mediante una similitudine γ che ha fattore di scala μ è una similitudine che ha fattore di scala $\mu\cdot1\cdot\mu^{-1}=1$, dunque un'isometria.

Le similitudini conservano l'allineamento (basta adattare la dimostrazione per le isometrie), quindi trasformano rette in rette, segmenti in segmenti ecc.. Esse conservano anche gli angoli elementari (per provarlo si possono usare i criteri di similitudine per i triangoli), mentre per gli angoli orientati occorre, come per le isometrie, distinguere.

DEF. *Una similitudine si dice **pari** (o positiva) se conserva le misure degli angoli orientati, cioè trasforma ogni triangolo ABC in un triangolo A'B'C' orientato concordemente. Le altre si chiamano **dispari** (o negative).*

Le isometrie pari formano un gruppo che denoteremo con **Sim$^+$** (<**Sim**), mentre le dispari costituiscono l'unica altra classe laterale: **Sim** = **Sim$^+$**$\cup$(**Sim$^+$**$\circ\alpha$), dove il rappresentante α si può scegliere arbitrariamente tra le similitudini dispari (per esempio una riflessione).

§ 7. Omotetie.

DEF. *Assegnati un punto O e un numero reale $\lambda\neq0$, l'**omotetia** $\eta_{O,\lambda}$: $P\to P'$ è la trasformazione definita dall'uguaglianza vettoriale $\underline{OP'} = \lambda\cdot\underline{OP}$.*

Si prova (con il teorema di Talete) che un'omotetia è una similitudine pari (indipendentemente dal segno di λ) con fattore di scala $\mu=|\lambda|$. Si vede anche che ogni segmento (o retta) AB viene trasformato in un segmento (o retta) A'B' parallelo ad AB. A questo proposito, è utile introdurre una convenzione per confrontare le misure con segno di segmenti *paralleli*, indicando con AB/CD il numero $\pm|AB|/|CD|$, secondo che i segmenti orientati AB e CD abbiano versi eguali o opposti. Allora se $\eta_{O,\lambda}: P \to P'$, si scrive $\lambda = P'Q'/PQ$ per ogni P,Q. In particolare, tra le omotetie si ritrovano l'identità ($\lambda = 1$, O qualsiasi) e il mezzo-giro ($\lambda = -1$): $\rho_O = \eta_{O,-1}$.

Per un'omotetia $\eta_{O,\lambda}$ con $\lambda \neq 1$ l'unico punto fisso è O, che si dice **centro** dell'omotetia. Le rette unite sono tutte e sole quelle del fascio di centro O. Tutte le direzioni sono unite. La composizione di due omotetie *con lo stesso centro* produce un'omotetia che ha lo stesso centro e i coefficienti si moltiplicano: $\eta_{O,\lambda} \circ \eta_{O,\nu} = \eta_{O,\lambda\nu}$. Dunque le omotetie che hanno un certo centro O formano un gruppo, che indicheremo con $\mathbf{Omo}_O$. Se non hanno lo stesso centro, il prodotto di due omotetie può essere (come vedremo) ancora un'omotetia oppure una traslazione.

Le omotetie svolgono un naturale ruolo di raccordo tra le similitudini e le isometrie; infatti si vede che:

TEOR. *Fissato arbitrariamente il punto O, ogni similitudine è il prodotto di un'omotetia di centro O per un' (opportuna) isometria.*

Basta infatti notare che, se la similitudine γ ha fattore di scala μ, allora $\eta_{O,\mu} \circ \gamma^{-1}$ è un'isometria. Perciò le omotetie, nel gruppo **Sim**, si possono scegliere come rapprentanti delle classi laterali modulo **Iso**. E' bene però osservare che la fattorizzazione $\mathbf{Sim} = \mathbf{Iso} \circ \mathbf{Omo}_O$ non produce una scrittura unica (cfr. § 2), perché nell'intersezione $\mathbf{Iso} \cap \mathbf{Omo}_O$ non c'è solo l'identità, ma anche il mezzo-giro ρ_O (questo si potrebbe evitare se si chiamassero omotetie soltanto le $\eta_{O,\lambda}$ con $\lambda > 0$, ma ciò non è nella tradizione).

Da questo segue subito la *doppia transitività* del gruppo delle similitudini :

TEOR. *Assegnati comunque due segmenti (non nulli) AB, A'B', esistono esattamente due similitudini, una pari e una dispari, che trasformano A in A' e B in B'.*

Infatti, se $|A'B'|/|AB| = \mu$ l'omotetia $\eta_{O,\mu}$ trasforma AB in A"B", che ha la lunghezza di A'B', e dunque basta comporla con un'isometria (pari o dispari) che manda A"B" in A'B'. Viceversa, se per ϕ e ψ si ha $AB \to A'B'$, allora $\phi^{-1} \circ \psi$ è un'isometria che fissa due punti, dunque (§ 5) è l'identità o una riflessione, per cui $\psi = \phi$ oppure $\psi = \phi \circ \sigma_r$, dove r è la retta AB.

Come si è detto, le omotetie conservano le direzioni. Viceversa:

TEOR. *Una similitudine che lascia invariate tutte le direzioni è un'omotetia o una traslazione.*

Dim. Se $\gamma: AB \to A'B'$, si ponga $A'B'/AB = \lambda$ e si consideri $\eta_{O,\lambda}: AB \to A'B'$ (oppure la traslazione $\tau_{AA'}$, se $\lambda = 1$). Allora $\gamma^{-1}\eta_{O,\lambda}$ fissa A e B e conserva tutte le direzioni, dunque è l'identità: $\gamma = \eta_{O,\lambda}$. Se $\lambda \neq 1$, il centro O si ottiene come intersezione delle rette AA', BB'; la condizione $\lambda \neq 1$ garantisce infatti che le due rette si incontrano (se A,A', B, B' fossero allineati, basterebbe sostituire B con un altro punto B* non allineato). . Come sempre la *conservazione* suggerisce la presenza di un gruppo, che indicheremo con **Dil** , perché talvolta si dà la seguente:

DEF. *Una* ***dilatazione*** *è una trasformazione che manda ogni retta (segmento) in una retta parallela.*

Scriviamo **Tra<Dil<Sim⁺** e anzi, per ogni scelta del punto O, risulta **Dil** =**Tra**^{o}**Omo**$_O$. Possiamo precisare : *il prodotto di due omotetie* $\eta_{A,\lambda}\,{}^o\eta_{B,v}$ *è un'omotetia* $\eta_{C,\lambda v}$ *se* $\lambda v \neq 1$, *una traslazione* $\tau_{\underline{u}}$ *se* $\lambda v = 1$.

(Negli esercizi si determineranno il centro C e il vettore u) . Analogamente, *il prodotto di un'omotetia con una traslazione è un'omotetia.*

Infine si vede facilmente che **Sim⁺=Dil**^{o}**Rot**$_O$. Combinando con la precedente fattorizzazione per le dilatazioni, ogni similitudine pari si può scrivere come prodotto di tre fattori: una rotazione, un'omotetia e una traslazione (nel prossimo § vedremo che scegliendo opportunamente la rotazione e l'omotetia si può fare a meno del fattore traslazione). La rappresentazione di una similitudine dispari si ottiene moltiplicando per un quarto fattore, per esempio una riflessione.

La coniugazione nel gruppo delle similitudini produce risultati analoghi a quelli già incontrati: l'enunciato del §5 rimane identico se γ indica una similitudine invece che un'isometria. A ciò si aggiunge il fatto, di facile verifica, che la coniugata di un'omotetia è un'omotetia. Precisamente, per ogni similitudine γ: *se* $\gamma: O \to O'$, *allora* $\gamma\,{}^o\,\eta_{O,\lambda}\,{}^o\,\gamma^{-1} = \eta_{O',\lambda}$.

Ne deriva, in particolare,

$$\rho_{O,\theta}{}^o\eta_{Q,\lambda} = \eta_{Q,\lambda}{}^o\rho_{O,\theta} \qquad (\theta\neq 0,\ \lambda\neq 1) \quad \textit{se e solo se } O=Q\,;$$

$$\sigma_r{}^o\eta_{O,\lambda} = \eta_{O,\lambda}{}^o\sigma_r \qquad (\lambda\neq 1) \quad \textit{se e solo se O appartiene a r.}$$

§ 8. Punti uniti delle similitudini.

Come nella geometria analitica si semplificano certi calcoli se si scelgono opportunamente l'origine e gli assi, così, nella rappresentazione delle similitudini come prodotto di un omotetia con un'isometria, conviene spesso riferirsi al *centro* della similitudine, la cui esistenza è oggetto del seguente:

TEOR.*Ogni similitudine non isometrica ha un (unico) punto unito (o* ***centro****).*

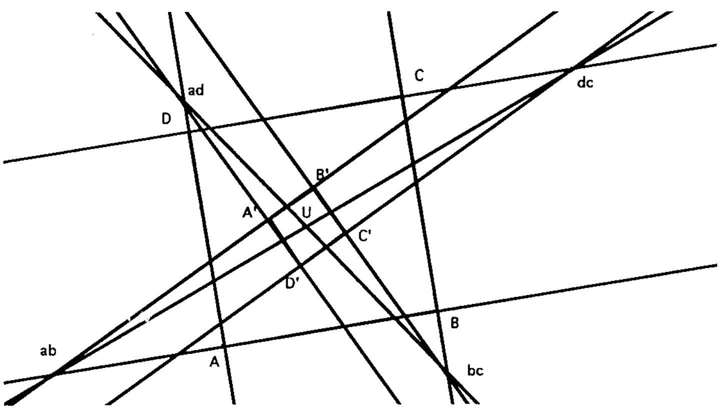
Dim. Conviene premettere un'osservazione di natura più generale, che enunciamo ricorrendo alla convenzione sul confronto tra segmenti paralleli introdotta nel § 7:

Siano A, B, P, P' punti allineati e A≠B. Se AP/PB = AP'/P'B,allora P=P'.

Si può convincersene orientando (arbitrariamente) la retta di appartenenza e trattando i segmenti come scalari (con segno). Si scrive allora AP·P'B=AP'·PB e,poiché AB =AP+PB=AP'+P'B, si riscrive (AB+BP)·P'B = (AB+BP')·PB, da cui (cancellando AB≠ 0) P'B=PB e infine P'=P.

Sia dunque ϕ:P→P' una similitudine non isometrica. Se ogni retta viene trasformata in una retta parallela, non potendo ϕ essere una traslazione (che è isometrica) è un'omotetia e dunque ha centro. Possiamo allora supporre ϕ:AB→A'B' con AB, A'B' non paralleli. Sui lati AB, A'B' costruiamo due quadrati ABCD, A'B'C'D' che si corrispondano (si noti che la parità di ϕ comporta versi concordi o discordi per questi percorsi, quindi determina C',D'). Sia R l'intersezione della retta AD con la retta A'D', S quella di BC con B'C'. Indichiamo con R', S' le immagini di R,S mediante ϕ. Per costruzione, RR' ed SS' sono paralleli. Allora RS e R'S' non possono essere paralleli, altrimenti R,S,R',S' sarebbero vertici di un parallelogramma, e i due segmenti RS, R'S' avrebbero eguale lunghezza, quindi si tratterebbe di un'isometria. Dunque le rette RS, R'S' si incontrano in un punto U. Proviamo che U è fisso per ϕ. Infatti, se pensiamo U come elemento della retta RS, la sua immagine U' deve appartenere alla retta R'S' e soddisfare la relazione U'R'/U'S' = UR/US (anche nel segno). D'altra parte, anche U appartiene a R'S' e, per il parallelismo di A'D' e B'C', soddisfa (Talete) UR'/US'=UR/US. Ne segue R'U/US' = R'U'/U'S' e dunque, per l'osservazione preliminare, U'=U, come si voleva. Non può esserci un altro punto fisso V, altrimenti sarebbe |UV|=|U'V'| e ϕ sarebbe un'isometria.

Costruzione del centro. Per *costruire* il punto unito U consideriamo, accanto ai punti R=DA∩D'A', S=BC∩B'C', anche i punti V=AB∩A'B', W=CD∩C'D'. Per motivi analoghi ai precedenti, U appartiene anche alla retta VW e dunque U si può costruire intersecando RS con VW.



Dobbiamo però garantirci che queste due rette (su cui sta U) non coincidano. Supponiamo infatti, per assurdo, che R,S,V,W siano allineati. Allora segando con le rette AB, RS (del fascio per V) le rette parallele AD, BC, si avrebbe

(Talete) VA/VB = VR/VS ; analogamente, segando con le rette A'B', RS (dello stesso fascio per V) le rette parallele A'D', B'C' , si avrebbe VA'/VB'= VR/VS. Ne seguirebbe VA/VB = VA'/VB', per cui V sarebbe un punto fisso (vale la precedente dimostrazione per U). Con lo stesso argomento risulterebbe fisso anche W≠V e sappiamo che ciò non può essere.

N.B. Se invece ϕ fosse isometrica, le rette RS, VW potrebbero coincidere; se, per esempio, $\phi=\sigma_r$, allora le intersezioni R,S,V,W sono allineate su r.

N.B. La costruzione si può fare - e la dimostrazione è la stessa - utilizzando, al posto dei quadrati, due parallelogrammi ABCD, A'B'C'D' che si corrispondano (questa variante è consigliabile quando siano già disponibili due triangoli simili ABC, A'B'C').

Altra costruzione, per similitudini pari. Quando la similitudine è pari, una costruzione alternativa del punto unito U si ottiene sfruttando le proprietà angolari del cerchio, cioè il fatto che un punto X del piano appartiene al cerchio $\mathfrak{C}$(ABC) circoscritto al triangolo ABC se e soltanto se X e C *vedono sotto lo stesso angolo* il lato AB, cioè quando l'angolo orientato tra le rette AC,BC coincide con quello tra le rette AX, BX, ciò che scriveremo [ACB]=[AXB]. Allora la costruzione del centro di γ:AB→A'B' si ottiene come segue: se le rette AA', BB' si intersecano in Z, i due cerchi $\mathfrak{C}$(ABZ), $\mathfrak{C}$(A'B'Z) si intersecano, oltre che in Z, in un secondo punto U. Proviamo che U è unito. Infatti [AUB] = [AZB] = [A'ZB'] = [A'UB']; [BAU] = [BZU] = [B'ZU] = [B'A'U] e, analogamente, [UBA] = [UB'A']. Allora i due triangoli ABU, A'B'U hanno tre angoli orientati eguali e perciò sono legati da una similitudine pari che manda AB in A'B' e dunque (per l'unicità) coincide con γ. Ma allora risulta U'=U, come si voleva. Se poi le rette AA', BB' sono parallele, non possono esserlo AB e A'B' (γ sarebbe un'isometria) e dunque esse si incontrano in un punto U, che risulta unito con la solita argomentazione.

Questa costruzione suggerisce una caratteristica del centro che ha un importante ruolo intuitivo: il centro di una similitudine pari è l'unico punto del piano che *vede* sotto lo stesso angolo tutti i segmenti che si corrispondono [AUB]=[A'UB']. E poiché quest'ultima uguaglianza equivale a [AUA']=[BUB'] si vede che la similitudine individua un angolo [PUP'] che è indipendente da P. Il ruolo che svolge questo angolo si chiarirà meglio con le considerazioni che seguono.

Dalle condizioni di permutabilità per le omotetie (§ 7) e dall'esistenza del centro U conseguono i seguenti enunciati.

Ogni similitudine pari non isometrica si scrive come prodotto di un'omotetia e una rotazione permutabili: $\gamma = \rho_{U,\theta} \circ \eta_{U,\lambda} = \eta_{U,\lambda} \circ \rho_{U,\theta}$ *; questa rappresentazione è unica, salvo lo scambio di* λ *con* $-\lambda$ *e di* θ *con* $\theta+\pi$ *:*

$\rho_{U,\theta} \circ \eta_{U,\lambda} = \rho_{U,\pi+\theta} \circ \eta_{U,-\lambda}$.

Ogni similitudine dispari non isometrica si scrive come prodotto di un'omotetia e una riflessione permutabili (cioè con U appartenente a r) : $\gamma = \sigma_r \circ \eta_{U,\lambda} = \eta_{U,\lambda} \circ \sigma_r$ *; questa rappresentazione è unica, salvo lo scambio di* λ *con* $-\lambda$ *e di r con s, perpendicolare a r per U:* $\sigma_r \circ \eta_{U,\lambda} = \sigma_s \circ \eta_{U,-\lambda}$.

Dim. Sia γ dispari. Sia U il punto unito e sia $A \neq A'$. Allora la riflessione σ_r su una bisettrice r dell'angolo [AUA'] trasforma A in A", che sta sulla retta UA'. Se λ = UA'/UA", allora $\eta_{U,\lambda} \circ \sigma_r \circ \gamma^{-1}$ fissa U e A' e dunque è l'identità. L'appartenenza di U a r garantisce la permutabilità dei fattori. Quanto all'unicità, la trasformazione $\eta_{U,\lambda} \circ \sigma_r = \eta_{V,\mu} \circ \sigma_s$, con U su r e V su s, fissa i punti U e V. Dunque U=V e $\eta_{U,1/\lambda} \circ \eta_{U,\mu} = \sigma_r \circ \sigma_s$ è una dilatazione isometrica con un punto fisso, cioè l'identità (e allora $\lambda=\mu$, r=s), oppure un mezzo-giro : $\lambda = -\mu$, e in tal caso le rette r, s sono perpendicolari (s è l'altra bisettrice dell'angolo AFA'). Se invece γ è pari, si considera la rotazione $\rho_{U,\theta}$ con θ= (AFA') nel ruolo di σ_r e si procede in modo analogo. Anche qui dalla $\eta_{U,\lambda} \circ \rho_{U,\theta} = \eta_{V,\mu} \circ \rho_{V,\omega}$ segue U=V, mentre $\eta_{U,1/\lambda} \circ \eta_{U,\mu} = \rho_{U,\theta} \circ \rho_{U,-\omega}$ se non è l'identità ($\lambda=\mu$, $\theta=\omega$), è un mezzo-giro ($\lambda = -\mu$, $\omega = \theta + \pi$).

Queste rappresentazioni suggeriscono un'idea intuitiva di come agisce una similitudine: prima una dilatazione, poi una rotazione (o viceversa) con lo stesso centro oppure - secondo la parità - una riflessione rispetto a una retta passante per quel centro. Perciò qualche autore definisce **rotazione dilativa** (o roto-dilatazione) un prodotto del tipo $\rho_{U,\theta} \circ \eta_{U,\lambda}$ e **riflessione dilativa** uno del tipo $\sigma_r \circ \eta_{U,\lambda}$ con U su r. I precedenti enunciati *classificano* le similitudini non isometriche, facendole appunto rientrare tutte in una (e una sola) delle due famiglie precedenti.

§ 9. Gruppo affine di un campo. Similitudini della retta reale.

Introdurre in un capitolo della geometria il punto di vista analitico significa **rappresentare** opportunamente gli enti geometrici e le loro proprietà mediante dei **numeri** e delle **equazioni**. La parola *opportuno* sta già a indicare che esistono rappresentazioni diverse, e che la scelta va fatta *ad hoc*, tenendo conto del particolare argomento. Sappiamo, per esempio, che nella familiare rappresentazione cartesiana una buona scelta del sistema di riferimento (origine, assi, unità di misura) può rendere facile la trattazione di un certo problema, altrimenti complicato. Vogliamo qui far vedere che, per lo studio delle similitudini del piano euclideo, si può convenientemente fare una scelta diversa più a monte, sostituendo fin dall'inizio una coppia ordinata di numeri reali (x,y) con il singolo **numero complesso** x+iy. Infatti nella tradizionale rappresentazione (x,y) le trasformazioni si rappresentano mediante **coppie di equazioni lineari** nelle due variabili; se si tratta di similitudini, vi compaiono sei coefficienti, che sono soggetti a certe condizioni. Se poi si vuole discuterne la composizione (il prodotto), si arriva inevitabilmente all'algebra delle **matrici** . La rappresentazione complessa ha il pregio di semplificare non poco sia gli aspetti concettuali che quelli formali: un punto si rappresenta con un singolo numero; una trasformazione con una singola equazione in una singola variabile, che nel caso delle similitudini pari è lineare e non soggetta a condizioni particolari; infine la composizione di due trasformazioni si riconduce ad addizioni e moltiplicazioni, secondo leggi che sono già familiari. Con questa composizione vogliamo incominciare, per introdurre l'argomento.

Consideriamo le ordinarie **funzioni reali di variabile reale** $y=f(x)$ e tra queste scegliamo quelle **lineari**, del tipo $y=ax+b$, con $a\neq 0$. La funzione f è individuata dai coefficienti a,b e perciò la denoteremo più propriamente con $f_{a,b}: x \to ax+b$. L'ipotesi $a\neq 0$ garantisce che $f_{a,b}$ è biiettiva e anzi la sua inversa è $(f_{a,b})^{-1} = f_{1/a,\,-b/a} : x \to a^{-1}x - a^{-1}b$. Componendo due di queste funzioni si ottiene ancora una funzione lineare: $f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{ca,\,cb+d} : x \to c(ax+b)+d$ e dunque, con riferimento al § 2, siamo in presenza di un gruppo di trasformazioni dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che si denota con **Aff**($\mathbb{R}$) e si chiama il **gruppo affine** su $\mathbb{R}$. Per dare a questo gruppo un significato geometrico, si può prendere una retta r e introdurre su di essa una coordinata cartesiana x, scegliendo un punto origine O (x=0) e un punto unità (x=1). Tra queste funzioni lineari se ne riconoscono subito alcune cui non esitiamo ad attribuire nomi familiari, suggerito dal loro *effetto geometrico* sulla retta r, come per esempio:

$f_{1,b} : x \to x+b$, traslazione;

$f_{-1,b} : x \to -x+b$, riflessione rispetto al punto (fisso) $x=b/2$;

$f_{a,0} : x \to ax$, dilatazione (omotetia) attorno all'origine.

Componendo le traslazioni $f_{1,b}$ con le omotetie $f_{a,0}$ si ottengono tutte le **similitudini** della retta, nel senso che, come si verifica facilmente, si tratta di tutte e sole le trasformazioni della retta che rispettano i rapporti tra le distanze dei suoi punti. Questi fatti si riassumono dicendo che il gruppo delle similitudini della retta è rappresentato analiticamente da **Aff**($\mathbb{R}$) cioè dalle funzioni reali lineari (invertibili, cioè non costanti) $y=ax+b$. Con i simboli dei §2 e successivi, pensando r come sottoinsieme del piano, **Aff**($\mathbb{R}$) rappresenta $\Gamma_r \cap$**Sim**.

Si può osservare che in tutto quanto si è sviluppato in questo §, prima dell'interpretazione geometrica, la genesi di un gruppo come **Aff**($\mathbb{R}$) non è legata alla particolare natura dei numeri reali: abbiamo adoperato soltanto le operazioni razionali (addizione e moltiplicazione) e il fatto che ogni numero $a\neq 0$ ammette inverso a^{-1}. Avremmo potuto, per esempio, fare lo stesso discorso sostituendo il campo reale con il campo razionale $\mathbb{Q}$ (si chiama infatti **campo** ogni ambiente numerico in cui si possano compiere le quattro operazioni con le familiari proprietà) e introdurre **Aff**($\mathbb{Q}$).

Ci proponiamo di mostrare che introducendo il campo **complesso** $\mathbb{C}$ nel ruolo di $\mathbb{R}$, il corrispondente gruppo affine rappresenta precisamente quello delle similitudini pari del piano euclideo.

§ 10. Il campo complesso e il piano di Gauss.

Esistono vari modi di introdurre i numeri complessi, che sono abbastanza noti e presenti nei libri da richiedere qui soltanto brevi richiami. Se nell'insieme delle coppie (x,y) di numeri reali si introducono le operazioni di addizione e moltiplicazione ponendo

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad \text{e} \quad (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc),$$

si verificano facilmente i seguenti fatti: le operazioni soddisfano le proprietà associativa, commutativa e distributiva; le coppie (0,0) e (1,0) sono elementi neutri, rispettivamente, per le due operazioni; per ogni (a,b) l'opposto è $-(a,b)=(-a,-b)$; se poi $(a,b)\neq(0,0)$ allora c'è il suo inverso $(a,b)^{-1} = (a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2))$. Si è dunque in presenza di un campo, che si chiama il **campo dei numeri complessi** (o campo complesso) e si indica con $\mathbb{C}$.

Le coppie del tipo (a,0) costituiscono un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ *identificabile* con il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali nel modo seguente: vi è una corrispondenza biunivoca $a \rightarrow (a,0)$ che *rispetta* entrambe le operazioni: $a+b\rightarrow(a,0)+(b,0)$; $ab\rightarrow(a,0)(b,0)$. Si può dunque pensare $\mathbb{R}$ come sottoinsieme (sottocampo) di $\mathbb{C}$ e scrivere semplicemente a invece di (a,0). Il numero complesso (0,1) si indica con la lettera i (unità immaginaria) e poiché $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$, si dice che i è una radice quadrata di -1. Con queste convenzioni ogni numero complesso si scrive nella forma $(a,b) = a(1,0)+b(0,1) = a+ib$ e sulle espressioni di questo tipo si opera con le solite regole (cioè le solite proprietà delle operazioni) dei numeri reali, ricordando inoltre che risulta $i^2 = -1$.

In questo paragrafo un numero complesso si indicherà con una lettera maiuscola come Z, W, ecc.. Poiché la scrittura $Z=x+iy$ è unica, Z individua la *parte reale* $x=\mathrm{Re}(Z)$ e il *coefficiente dell'immaginario* $y=\mathrm{Im}(Z)$.

Associando a un numero $Z=x+iy$ il suo *coniugato* $Z^*=x-iy$, si ottiene una trasformazione di $\mathbb{C}$ che *rispetta* le operazioni: $(Z+W)^*=Z^*+W^*$, $(ZW)^*=Z^*W^*$. La somma $Z+Z^*=2x$ e il prodotto $ZZ^*=x^2+y^2$ sono reali. Il numero reale non negativo $\sqrt{(ZZ^*)} = \sqrt{(x^2+y^2)}$ si chiama *modulo* o *valore assoluto* di Z. Poiché i numeri reali $x/\sqrt{(x^2+y^2)}$, $y/\sqrt{(x^2+y^2)}$ sono compresi tra -1 e 1 e anzi la somma dei loro quadrati è 1, essi si possono pensare come seno e coseno di un angolo θ; quindi ogni numero complesso Z si scrive nella *forma trigonometrica* :

$$Z = \mu (\cos\theta + i \sin\theta), \text{ dove } \mu = \sqrt{(x^2+y^2)}, \quad \theta = \arccos(x/\mu) = \mathrm{arcsen}(y/\mu).$$

(μ,θ) sono le coordinate polari del punto (x,y) nel sistema polare associato. L'*anomalia* θ è individuata a meno di multipli di 2π. Il prodotto di due numeri complessi Z_1Z_2 in forma trigonometrica si ottiene moltiplicando i moduli e sommando le anomalie:

$\mu_1(\cos\theta_1 + i \sin \theta_1)\cdot \mu_2(\cos \theta_2 + i \sin\theta_2) = \mu_1 \cdot \mu_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2))$, come si verifica subito, con le *formule della somma* del seno e del coseno.Per brevità si possono scrivere i numeri che hanno modulo 1 con la notazione esponenziale: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Allora $Z = \mu e^{i\theta}$, $Z^* = \mu e^{-i\theta}$ e

$$Z_1Z_2 = \mu_1 e^{i\theta_1} \cdot \mu_2 e^{i\theta_2} = \mu_1 \, \mu_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)} .$$

Il **piano di** (Argand-) **Gauss** è un piano (della geometria euclidea) in cui si è introdotto un sistema cartesiano ortogonale xy (origine O, punto unità U sull'asse x) e ad ogni punto (x,y) si è associato il numero complesso $Z=x+iy$. Così punti e numeri complessi *si identificano*, indicando con lo stesso simbolo Z sia il punto (x,y) che il numero $x+iy$. I punti dell'asse x (asse *reale*) sono i numeri (complessi) reali, quelli dell'asse y (asse *immaginario*) si chiamano *immaginari puri*. La somma Z_1+Z_2 è il punto Z_3 individuato dall'equazione vettoriale $\underline{OZ_1}+\underline{OZ_2}=\underline{OZ_3}$ (cioè dal parallelogramma $OZ_1Z_3Z_2$). Quanto alla moltiplicazione, riferendosi alla rappresentazione trigonometrica, il prodotto Z_1Z_2 è l'intersezione del cerchio di centro O e raggio $\mu_1\mu_2$ con la semiretta di origine O e formante l'angolo $\theta_1+\theta_2$ con l'asse x; se $\lambda>0$ è un numero reale, λZ è l'intersezione del cerchio di raggio $|\lambda\mu|$ con la semiretta OZ; se $\lambda<0$, con la sua opposta. Il coniugato Z^* è il simmetrico di Z rispetto all'asse x.

§ 11. Rappresentazione analitica delle similitudini.

Siamo ora in grado di interpretare geometricamente alcune funzioni di $\mathbb{C}$ in sé, osservando, in particolare, le rappresentazioni

$\tau_{OB} : \ Z \to Z + B$	per la traslazione di vettore $\underline{OB}$,
$\rho_{O,\theta} : \ Z \to Z e^{i\theta}$	per la rotazione attorno a O di angolo θ ,
$\eta_{O,\lambda} : \ Z \to \lambda Z$	per l'omotetia di centro O e fattore λ,
$\sigma_x : \ Z \to Z^*$	per la riflessione sull'asse x .

Si prenda ora il punto di vista del § 10. Come si è lì anticipato, le funzioni lineari di $\mathbb{C}$ in sé formano un gruppo, perché $\mathbb{C}$ è un campo. Allora la generica funzione lineare $Z \to AZ+B$, come si può vedere scrivendo $A=\mu e^{i\theta}$, rappresenta la trasformazione $\tau_{OB} \circ \rho_{O,\theta} \circ \eta_{O,\mu}$, quindi una similitudine pari. Viceversa, sappiamo che ogni similitudine pari è prodotto di tre fattori: un'omotetia, una rotazione e una traslazione. Anzi, nella rotazione e nell'omotetia i centri si possono scegliere arbitrariamente (con il fattore $\mu>0$), pur di scegliere opportunamente la traslazione. Ne consegue che il gruppo **Sim$^+$** si rappresenta con il gruppo **Aff($\mathbb{C}$)**, nel senso che tra i due gruppi c'è una corrispondenza biunivoca che rispetta la composizione. Quanto alle similitudini dispari, sappiamo che si ottengono tutte moltiplicando quelle pari per una riflessione, prefissata arbitrariamente. Se dunque le rappresentiamo nella forma $\tau_{OB} \circ \rho_{O,\theta} \circ \eta_{O,\mu} \circ \sigma_x$, troviamo tutte e sole le funzioni $Z \rightarrow AZ^* + B$, che sono ovviamente funzioni biiettive di $\mathbb{C}$ in sé, ma non funzioni lineari (si chiamano *semilineari*), per la presenza della coniugazione. Tra queste similitudini, siano esse pari o dispari, le isometrie si caratterizzano con la condizione $AA^*=1$, le traslazioni con $A=1$.

Può servire rappresentare analiticamente una particolare similitudine γ che sia stata individuata mediante informazioni geometriche, per es. una rotazione di un certo angolo attorno a un certo punto diverso dall'origine ecc., Si può allora ricorrere alla coniugazione (cfr. § 5 e 7) e scrivere, per esempio,

$$\rho_{B,\theta} = \tau_{OB} \circ \rho_{O,\theta} \circ \tau_{OB}^{-1}, \qquad \text{da cui} \quad \gamma : Z \rightarrow e^{i\theta}(Z-B)+ B .$$

Come altro esempio, se una retta r è assegnata mediante un suo punto B e l'angolo θ=(UOB) che OB forma con l'asse reale (qui U=1 è il punto unità), si può traslare r su una retta s passante per O, ruotare s fino a sovrapporla all'asse reale, infine riflettere sull'asse reale. Si scrive cioè

$$\sigma_r = \tau_{OB} \circ \sigma_s \circ \tau_{OB}^{-1}, \quad \sigma_s = \rho_{O,\theta} \circ \sigma_x \circ \rho_{O,\theta}^{-1}, \quad \sigma_r = \tau_{OB} \circ \rho_{O,\theta} \circ \sigma_x \circ \rho_{O,\theta} \circ \tau_{OB}^{-1},$$

quindi $\quad \gamma : Z \rightarrow e^{i\theta} [e^{-i\theta} (Z-B)]^* + B = e^{2i\theta} (Z^*-B^*) + B.$

Le analoghe similitudini si rappresentano semplicemente introducendo un fattore μ accanto all'esponenziale. Volendo ricavare, per le stesse trasformazioni, le più tradizionali equazioni in coordinate cartesiane, $(x,y) \rightarrow (x',y')$ basta calcolare separatamente, nella precedente descrizione di $Z' = \gamma(Z)$, la parte reale e il coefficiente dell'immaginario. Per esempio:

la rotazione $\rho_{B,\theta}$ è rappresentata dalle due equazioni

$$x' = (x - x_B) \cos \theta - (y - y_B) \sin \theta + x_B,$$
$$y' = (x - x_B) \sin \theta + (y - y_B) \cos \theta + y_B ;$$

la riflessione σ_r è rappresentata dalle due equazioni

$$x' = (x - x_B) \cos 2\theta + (y - y_B) \sin 2\theta + x_B,$$
$$y' = (x - x_B) \sin 2\theta - (y - y_B) \cos 2\theta + y_B .$$

Le espressioni analitiche nella variabile complessa Z si prestano a dimostrazioni alternative che, in qualche caso, sono più semplici di quelle sintetiche. Per esempio, si prova molto facilmente che ogni similitudine non isometrica ha un punto unito . Infatti, se la similitudine ϕ è pari, allora ϕ: $Z \rightarrow AZ+B$, $A \neq 1$, e il punto fisso è $U = B/(1-A)$. (Si osservi che se $A \neq 1$,

$AA^*=1$, la formula dà il centro di una rotazione). Se invece ϕ è dispari, allora ϕ: $Z \to AZ^*+B$, con $AA^* \neq 1$, e il punto unito soddisfa $U = AU^*+B$. Passando ai coniugati, si ha $U^*=A^*U+B^*$ da cui, sostituendo, $U=(AB^*+B)/(1-AA^*)$. (Se $AA^*=1$ questa espressione perde di significato, ma l'esistenza di infiniti punti fissi suggerisce che le riflessioni, tra le isometrie, si possono caratterizzare con l'ulteriore condizione $AB^*+B=0$). Non possiamo aspettarci, naturalmente, che queste espressioni suggeriscano il modo più opportuno per individuare geometricamente il punto unito .

Esercizi e complementi

Per i § 2, 3, 4 (gruppi di isometrie).

1) Se $\gamma \in \Gamma$, le potenze (intere) di γ costituiscono il minimo sottogruppo contenente γ. Esso si indica con $<\gamma> = \{ \gamma^i ; i = 0, \pm 1, \pm 2... \}$ e si chiama *generato* da γ. Si studino i sottogruppi generati da una traslazione, da una rotazione, da una riflessione, da una glissoriflessione.

2) Se $\gamma \in \Gamma$, il *periodo* (o ordine) di γ è il minimo intero $n>0$, se esiste, tale che $\gamma^n = 1$. Se un tale n esiste o non esiste, γ si dice rispettivamente *periodico* o *aperiodico*. Quali sono le isometrie periodiche? Qual'è il loro periodo?

3) Provare che se, modulo un sottogruppo, le classi laterali sono esattamente due, allora il sottogruppo è normale. Si applichi questo risultato a $\mathbf{Iso}^+$ in **Iso.** Individuare un gruppo di isometrie in cui $\mathbf{Rot}_O$ è normale.

4) Se due sottogruppi Δ, Λ sono normali in Γ e l'intersezione è identica , allora $\delta \circ \lambda = \lambda \circ \delta$ per ogni $\delta \in \Delta$, $\lambda \in \Lambda$. Individuare gruppi di isometrie in cui questo si verifica.

5) Se $\Delta < \Gamma$, $B \in \mathbb{A}$, la Δ-*orbita* di B è l'insieme $B^\Delta = \{\delta(B);\ \delta \in \Delta\}$ che è il minimo insieme Δ-invariante contenente B. Studiare le Δ-orbite di un punto B quando Δ è il gruppo generato da una traslazione, oppure ecc., come nell'es.1.

Per i § 3, 4 (isometrie: esercizi preliminari per la classe).

1) Disporre sulla tavola, in varie posizioni, due oggetti "eguali": due fiammiferi, due monete da 100 lire (stessa faccia), due chiavi Yale (facce diverse), due "4 di cuori", ecc.. Introdurre il concetto di isometria riconducendolo ai movimenti che "portano" il primo oggetto sul secondo.

2) Per la lavagna luminosa: riprodurre in due colori diversi su due fogli trasparenti lo stesso disegno (un triangolo, un numero, ecc.) ed esemplificare tutte le famiglie di isometrie spostando un foglio rispetto all'altro.

3) Osservare una fotografia (un ritratto, un paesaggio, un interno, ecc.) e studiare se e con quali soggetti si è in grado di accorgersi se nella stampa il negativo è stato inavvertitamente ribaltato.

4) Si fanno due copie della stessa carta geografica e si sovrappongono dopo averle spostate (e/o ribaltate) l'una rispetto all'altra. Guardandole poi in trasparenza (contro il vetro della finestra o alla lavagna luminosa) si studia la corrispondente isometria (si cerca un punto fisso, l'angolo di rotazione).

5) Studiare le lettere dell'alfabeto maiuscolo, individuandone eventuali simmetrie e raggruppandole in corrispondenza: H, X , O, ... W, A, U, ... , C, D, E, .. N, S, Z ....R, P, F .... . Cercare parole che allo specchio si leggono con lo stesso significato (OTTO), oppure con significati diversi (IVA).

6) Studiare le simmetrie delle carte da gioco.

7) Individuare il gruppo delle simmetrie di:

a) un rombo ; b) un rettangolo ; c) un parallelogramma;
d) un n-gono regolare; e) un cerchio; f) una parabola;
g) un'ellisse; h) una retta; i) due rette parallele:
l) due rette perpendicolari; m) due rette non parallele non perpendicolari.

8) Piegando la carta si materializza una riflessione: la piega avviene lungo una retta r e ogni punto P viene sovrapposto a un altro: $P'=\sigma_r(P)$. Studiare (quali sono? quante sono?) le pieghe r che :

a) mandano un dato punto in sé: A=A';
b) mandano una data retta in sé: r=r' ;
c) scambiano due dati punti: A'=B, B'=A;
d) scambiano due date rette: r'=s, s'=r. (si distingua: parallele o no);
e) mandano un dato punto in un altro che stia su una data retta;
f) mandano il segmento AB in un dato segmento A'B' (è possibile?);
g) mandano la retta r in una data retta s.

9) Studiare le rotazioni (oppure tutte le isometrie) che a) ... b) ... c) ecc..

10) Dato un intero $n>1$, disegnare figure che ammettano esattamente n simmetrie.

Per i § 4, 5 (composizione di isometrie)

1) Assegnata una rotazione mediante due segmenti corrispondenti AB, A'B', costruire (con riga e compasso) il punto fisso (centro) e individuare l'angolo.

2) Assegnata un'isometria dispari mediante due segmenti corrispondenti AB, A'B', costruire (con riga e compasso) la sua retta unita.

3) Studiare il prodotto di tre riflessioni su rette parallele. Lo stesso per tre rette concorrenti in uno stesso punto.

4) Studiare il prodotto di un mezzo-giro con una traslazione .

5) Studiare in quali casi due riflessioni sono permutabili (=còmmutano).
Lo stesso per due rotazioni, in particolare per due mezzi-giri. Lo stesso per una riflessione e una rotazione, o una traslazione ecc..

6) Un prodotto $\rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\beta}$ è una rotazione $\rho_{X,\theta}$ oppure una traslazione $\tau_{\underline{u}}$. Si determinino X, θ, $\underline{u}$ in funzione di A, B, α, β. E' vero che ogni traslazione è prodotto di due rotazioni? Quali?

7) Studiare in quale caso il prodotto di quattro riflessioni è l'identità.

8) Studiare il prodotto delle quattro riflessioni sui lati (ordinati ciclicamente) di un quadrato. Lo stesso per un parallelogramma.

9) Provare: ogni prodotto $\rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\beta} \circ \rho_{A,-\alpha} \circ \rho_{B,-\beta}$ è una traslazione.

10) Dimostrare (usando 9 e la nozione di *periodo*) : se in un gruppo *finito* di simmetrie vi sono rotazioni, allora hanno tutte lo stesso centro. Dedurre: un gruppo finito di simmetrie è essenzialmente quello di un n-gono regolare (o un suo sottogruppo).

Per i § 5, 6, 7 (similitudini: esercizi preliminari per la classe)

1) Studiare le similitudini suggerite dall'azione di una fotocopiatrice (usando vari ingrandimenti, ma senza spostare l'originale). Discutere l'eventuale similitudine tra i fogli che si usano per la stampa (cosiddetti A4, A3, ..) e i

2) Disegnare sulla lavagna due triangoli non isometrici con lati paralleli. Individuare approssimativamente, poi costruire il centro dell'omotetia.

3) Disegnare due triangoli (pari-)simili e non omotetici. Individuare approssimativamente il centro della similitudine.

4) Produrre due copie di una stessa carta geografica in scale diverse e riproporre l'esercizio analogo al 4) per le isometrie.

5) Quali tra le seguenti (coppie) di figure sono simili? E quali (quante) sono le eventuali similitudini che le legano? (Si distinguano le pari dalle dispari):
a) due quadrati ; b) due rettangoli ; c) due parallelogrammi;
d) due cerchi; e) due semicerchi; f) due parabole ; g) due ellissi.

6) Studiare (costruire) tutte le omotetie che:
a) mandano un dato punto in sé ; b) mandano una data retta in sé ;
c) mandano un dato punto in un altro dato punto ;
d) scambiano due rette assegnate (è possibile?) ;
e) mandano un dato cerchio in un altro assegnato;
f) mandano un segmento AB in un dato segmento A'B' (è possibile?);
g) mandano una data retta r in una data retta s (è possibile?).

7) Studiare le similitudini (pari, dispari) che a) ... b) ... c) ecc..

Per i § 7, 8 (complementi sulle similitudini)

1) Provare (teor. dei *triangoli omotetici*) che, se due triangoli hanno i lati a due a due paralleli,allora c'è un'omotetia (o traslazione) che manda l'uno nell'altro.

2) Dati due punti $A \neq B$, trovare punti e rette fissati da $\eta_{B,3} \circ \eta_{A,-2}$.

3) Più generalmente, studiare il prodotto di due omotetie $\eta_{B,\beta} \circ \eta_{A,\alpha}$ (se $\alpha\beta \neq 1$ il centro U è allineato ... , la sua distanza da .. è .. ; se invece $\alpha\beta=1$...).

4) In quali casi un'omotetia commuta Con un'altra omotetia? Con una riflessione? con una rotazione?

5) Dato un triangolo equilatero ABC (oppure isoscele in C) si trovino punti e rette fissati dalla similitudine $\sigma_{AB} \circ \eta_{C,2}$.

6) Quali similitudini hanno per quadrato a) l'identità ; b) un'omotetia?

7) Assegnati nel piano quattro punti A,B,C,D, si descrivano costruzioni con riga e compasso che dal generico punto P portano a $P'=\gamma(P)$ per i casi:

i) γ è una riflessione che manda la retta AB nella retta CD;

ii) γ è una rotazione che manda la retta AB nella retta CD;

iii) γ è la similitudine pari che manda A in C e B in D.

8) Assegnati due triangoli simili ABC, A'B'C', si costruiscano due opportuni parallelogrammi ABCD, A'B'C'D' per poi determinare il centro della similitudine (si adatti il primo metodo del §8).

9) Assegnati due segmenti AB, A'B', si applichi il secondo metodo del §8 per costruire il centro della similitudine pari che manda AB in A'B' ; si ripeta poi la costruzione per la similitudine che manda AA' in BB' e si confrontino i centri.

10) Assegnati nel piano due punti distinti A,B e il loro punto medio M, siano $\mathbb{Q}_1$ il quadrato che ha per diagonale AM, $\mathbb{Q}_2$ il quadrato che ha per diagonale AB. Si studino le similitudini che mandano $\mathbb{Q}_1$ in $\mathbb{Q}_2$ (conviene subito distinguere tra pari e dispari). Quante sono? Di che tipo (omotetie...)? Per ciascuna di esse si costruisca il centro e si dia una fattorizzazione permutabile.

Similitudini nella geometria del triangolo

Il triangolo $\mathbb{A}=A_1A_2A_3$ ha vertici A_i e lati A_jA_h (rette o segmenti), dove (i,j,k) è una permutazione di {1,2,3}. G è il baricentro (intersezione delle mediane), H l'ortocentro (- delle altezze), O il circocentro (- degli assi), I l'incentro (- delle bisettrici interne).

1) Studiare il prodotto delle tre riflessioni sui tre assi.

2) Lo stesso per le bisettrici interne.

3) Provare e studiare la similitudine $A_i \to M_i$ tra un triangolo e il suo triangolo *mediale* , che ha per vertici i punti medi : $M_i =(A_j+A_h)/2$. Qual è il punto fisso? E il fattore di scala?

4) Applicare 3) per provare la relazione (vettoriale) $\underline{OH} = 3\ \underline{OG}$. La *retta di Eulero* del triangolo è quella cui appartengono O, H, G.

5) Dimostrare e studiare le similitudini tra un triangolo e i triangoli $A_iH_jH_h$, dove H_j è il piede dell'altezza per A_j (parità, centro, fattore di scala..).

6) Applicare 5) per provare che il triangolo *ortico* $H_1H_2H_3$ è un'*orbita chiusa* per le riflessioni sui lati, nel senso che l'insieme dei suoi lati (come rette) è per esse invariante.

7) Applicare 5) e 6) per provare che il triangolo ortico è, tra i triangoli inscritti in un dato triangolo, quello di perimetro minimo (*teorema di Fagnano*).

8) Date tre rette r_1, r_2, r_3, due a due non parallele, studiare la fattorizzazione $\sigma_{r3}\circ\sigma_{r2}\circ\sigma_{r1} = \sigma_r\circ\tau_{\underline{u}} = \tau_{\underline{u}}\circ\sigma_r$, costruendo la retta r e il vettore $\underline{u}$ della glissoriflessione (nel triangolo che ha le tre rette per lati, si congiungano i piedi di due altezze).

9) Nel problema precedente, nel caso che il triangolo delle r_i sia acutangolo, si dimostri che il triangolo ortico ha perimetro $|\underline{u}|$.

10) Come il problema 8), ma con due rette parallele.

11) Studiare il prodotto delle tre riflessioni sulle bisettrici esterne di $\mathbb{A}$ (si usino i risultati precedenti).

12) Dati due triangoli $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, costruire un triangolo omotetico a $\mathbb{B}$ e circoscritto ad $\mathbb{A}$.

13) Dati $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$,costruire un triangolo omotetico a $\mathbb{B}$, inscritto in $\mathbb{A}$.

14) Dimostrare che $\eta_{H,1/2}$ e $\eta_{G,-1/2}$ trasformano il circocerchio di un triangolo in uno stesso cerchio. Dedurre che su quel cerchio cadono i 9 punti: medi dei lati, piedi delle altezze, medi tra H e vertici (*teorema di Poncelet*).

15) Costruire il punto F, detto *di Fermat* , per cui è minima la somma delle distanze dai vertici $\Sigma\, |FA_i|$ (*teorema di Cavalieri-Torricelli*).

16) Sia B_i l'immagine di O nella riflessione sul lato A_jA_h . Si provi che c'è un'isometria $\gamma : A_i \rightarrow B_i$. Che tipo di isometria? Chi è il punto unito ?

17) Sia K_i la proiezione ortogonale di H sull'asse di A_jA_h . Si provi che K_1, K_2, K_3 , H, O appartengono alla medesima circonferenza. Si provi che $\phi : A_i \rightarrow K_i$ è una similitudine dispari. Che cosa si può dire di ϕ se $\mathbb{A}$ è rettangolo (per es. in A_3) ?E se $\mathbb{A}$ è isoscele?

18) Siano r_1, r_2, r_3 tre diverse rette passanti per il punto O. Sia P_i (i=1,2,3) l'immagine del punto P (generico) nella riflessione sulla retta r_i. Si provi che

O è il circocentro del triangolo $\mathbb{T}(P) = P_1P_2P_3$. Si provi che variando P si ottengono triangoli simili $\mathbb{T}(P), \mathbb{T}(P')$ e si studi la similitudine.

19) Si discutano le possibilità per un triangolo di essere simile al suo triangolo ortico. Si osservi che esiste un caso non banale (si considerino i lati e le diagonali di un 7-gono regolare).

20) Di un triangolo $A_1A_2A_3$ si conoscano gli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Siano E_1, E_2, E_3 gli excentri (intersezioni di due bisettrici esterne). Si provi che i triangoli $E_1E_2E_3$ e $A_iA_jE_h$ sono simili. Si fattorizzino le similitudini (in omotetie, riflessioni, rotazioni) esprimendo i parametri in funzione degli α_i.

Altri esercizi riassuntivi

1) Sia $\mathbb{A} = A_1A_2A_3A_4$ un parallelogramma e sia $\mathbb{B} = B_1B_2B_3B_4$ un altro parallelogramma definito dal fatto che B_iB_j è (allineato con) l'asse del lato A_hA_k (i,j,h,k sono una permutazione di 1,2,3,4) Si provi che $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono simili, trovando il rapporto e il centro della similitudine.

2) Siano prefissate due rette non ortogonali r , s che si incontrano in C. Per ogni punto P, indicati con $R = P_r$, $S = P_s$ le proiezioni ortogonali di P su r e su s, si definisca P' mediante l'equazione vettoriale $\underline{PP'}=\underline{PR}+\underline{PS}$. Si provi che ϕ: P$\rightarrow$ P' è una trasformazione, costruendo l' inversa ϕ^{-1}: P'$\rightarrow$P. (Si dimostri l'uguaglianza tra angoli orientati [RCP] = [P'CS]. Per il triangolo CRS il punto P' è..., mentre P appartiene al ...). Si provi che ϕ è una similitudine e la si studi. Si provi che ϕ^2 è un'omotetia: quale?

3) Due circoli $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ di centri C_1, C_2 si intersecano in due punti Q, R. Se $P_1 \neq Q$ è un punto di $\mathbb{C}_1$, sia P_2 l' (ulteriore) intersezione della retta P_1R con $\mathbb{C}_2$. Si provi che c'è una similitudine $\gamma : P_1QP_2 \rightarrow C_1QC_2$ e la si descriva in funzione della scelta di P_1.

4) Sia $A_1A_2A_3A_4$ (ciclicamente) un parallelogramma. Si indichino con ρ_i il mezzo-giro attorno al vertice A_i e con σ_{ij} la simmetria rispetto al lato A_iA_j. Si provi che $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 \circ \rho_4$ è l'identità. Si provi che $\sigma_{12} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{34} \circ \sigma_{41}$ è - in generale - una rotazione e in tal caso il suo centro O appartiene all'asse della diagonale A_2A_4. In quali casi particolari $\sigma_{12} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{34} \circ \sigma_{41}$ è una traslazione? E quale?

5) Se P è un punto e $\mathbb{B} = B_1B_2B_3$ un triangolo, sia $\mathbb{B}^P = C_1C_2C_3$ il triangolo che ha per lati gli assi del segmento PB_i. Assegnato $\mathbb{B}$, si studi come si può scegliere P affinché i) $\mathbb{B}$ e $\mathbb{B}^P$ siano simili; ii) $\mathbb{B}^P$ sia nullo (abbia i vertici coincidenti); iii) $\mathbb{B}^P$ sia equilatero; iv) si provi che $((\mathbb{B}^P)^P)^P$ è simile a $\mathbb{B}$. Qual è il centro della similitudine?

6) Assegnati tre punti O, A_1, A_2 (non allineati) e un numero reale $\lambda \neq 0,1$,sia B_1B_2 l'immagine del segmento orientato A_1A_2 nell'omotetia $\eta_{O,\lambda}$. Si consideri la similitudine pari ϕ che manda A_1B_1 in A_2B_2 e la si descriva come prodotto (commutativo) di un' isometria e di un' omotetia.

7) Date due similitudini pari ϕ_1: P $\rightarrow$ P', ϕ_2: P $\rightarrow$ P'', si provi che è una similitudine pari anche ϕ_3: P $\rightarrow$ (P'+P'')/2..
N.B. La dimostrazione è banale se si usa la rappresentazione analitica complessa.

8) Siano assegnate due semicirconferenze $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$, i cui diametri siano A_1B_1, A_2B_2 . Si considerino separatamente soltanto i seguenti casi: a) i 4 punti A_i, B_i stanno su una stessa circonferenza; b) i 4 punti A_i , B_i stanno una stessa retta. Si studino le similitudini che mandano $\mathbb{C}_1$ in $\mathbb{C}_2$ (quante sono? di che tipo? come si fattorizzano? ecc.).

Costruzioni con CABRI o SKETCHPAD

Costruire una similitudine, descritta mediante nozioni geometriche (per es. centro e angolo di una rotazione, vettore della traslazione, ecc.) qui significa programmare una successione di istruzioni (una MACRO) che producano il punto P' partendo da P . Nelle vecchie versioni di CABRI, le più diffuse nelle scuole, le uniche similitudini direttamente disponibili sono i comandi: **simmetrico rispetto a** una retta (=riflessione) o a un punto (mezzo-giro). E' un utile esercizio produrre macro per tutte le similitudini, come nei seguenti esempi.

1) Assegnati i punti A,A' costruire la riflessione σ_r : A$\rightarrow$ A' (usare l'**asse**).

2) Assegnati A,A', costruire il mezzo-giro ρ_O : A$\rightarrow$ A' (usare il **punto medio**).

3) Assegnati due punti A,A' costruire la traslazione $\tau_{AA'}$ (usare **retta parallela** per costruire un parallelogramma AA'P'P, oppure usare **punto medio** e **simmetrico**).

4) Assegnato un angolo [AOB],costruire la rotazione $\rho_{O,[AOB]}$ (scomporla in due riflessioni; usare la **bisettrice**).

5)Assegnati due segmenti di egual lunghezza e non paralleli AB, A'B', costruire la rotazione $\rho_{O,\alpha}$: AB $\rightarrow$ A'B' (costruire O con gli **assi**).

6) Assegnati due segmenti di egual lunghezza AB, A'B', costruire la glissoriflessione γ : AB $\rightarrow$ A'B' (decomporla in tre riflessioni: prima σ_r: A$\rightarrow$ A', poi una rotazione; oppure costruire la retta unita r con i **punti medi** di AA' e BB', poi decomporre γ come $\sigma_r{}^o\tau_{\underline{u}}$, traslazione parallela).

7) Assegnati tre punti allineati O, A, A'; costruire l'omotetia $\eta_{O,\lambda}$: A $\rightarrow$ A' (usare **retta parallela**).

8) Assegnati due segmenti paralleli non isometrici AB, A'B', costruire l'omotetia $\eta_{O,\lambda}$: AB$\rightarrow$A'B'. (Il centro O si ha come **intersezione** AA'$\cap$BB').

9) Assegnati due segmenti AB, A'B' non isometrici,costruire il centro U della similitudine (occorre specificare: pari o dispari) γ : AB $\rightarrow$ A'B' con il procedimento dei due quadrati.

10) Se γ : AB $\rightarrow$ A'B' è pari, costruire il centro U con il metodo dei cerchi circoscritti (**intersezione** Q =AA'$\cap$BB', ecc.).

11) Assegnati due segmenti AB, A'B' non isometrici, costruire la similitudine pari (oppure dispari) γ: AB$\rightarrow$A'B'. (Si costruisce il centro U come prima; se γ è pari, $\gamma = \rho_{O,[AOA']} {}^o \eta_{O,\lambda}$; se γ è dispari, si considera la **bisettrice** r di [AOA']; allora $\gamma = \sigma_r {}^o \eta_{O,\lambda}$).

BIBLIOGRAFIA

H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry*, J.Wiley & sons, 1969.
M. Dedò, *Trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli , 1996.
G.E. Martin,*Transformation geometry: an introduction to symmetry,* Springer, 1982.
B.Scimemi, *Studio delle similitudini piane con l'aiuto del calcolatore,* Notiziario U.M.I., suppl. al n.° 8-9, Ago-Sett.1995.

PROPOSTE MULTIMEDIALI PER LA DIDATTICA DELLA GEOMETRIA

Gian Marco Todesco
Digital Video - Roma

Introduzione

Questo ciclo di lezioni si propone di presentare l'utilizzo di alcuni strumenti informatici in ambito didattico matematico. In particolare ci occuperemo di Internet (o più precisamente del World Wide Web) e delle animazioni interattive. Questa scelta di temi è parziale è ampiamente personale: molti altri mezzi informatici hanno un'influenza sempre più grande sul nostro modo di insegnare; pensiamo alla posta elettronica, ai gruppi di discussione su Internet, alla possibilità di fare lezioni ed esami a distanza, alla disponibilità di programmi per preparare rapidamente *slide show*, eccetera. Ho scelto di parlare di Internet e delle animazioni interattive perché mi sembra che si sia una grande distanza fra l'uso che oggi se ne fa e quello che sarebbe tecnicamente possibile.

Il primo argomento di cui parlerò è il World Wide Web (o più semplicemente Web). Questo strumento di comunicazione sta superando lo stadio di eccitante novità e sta diventando sempre più comune, conosciuto e diffuso. In campo didattico può essere usato come super biblioteca da cui attingere stimoli e con cui integrare i libri di testo. Inoltre può essere usato per incentivare la comunicazione fra scuole diverse e per "pubblicare" i lavori e le esercitazioni svolte in classe.

L'altro argomento di cui ci occuperemo riguarda la possibilità di generare con il computer delle immagini animate che evolvono sotto il controllo di chi le guarda. Queste animazioni interattive, a differenza dei filmati, permettono di fare esperimenti "immergendosi" in maniera più vivida e profonda nel soggetto rappresentato.

Questi due temi, il Web e le animazioni interattive, sono collegati fra loro: su Web è facile trovare delle animazioni interattive e le risorse che servono per costruirne altre e, d'altro lato, un'efficace animazione realizzata in classe rappresenta un candidato ideale per la "pubblicazione" su Web.

Le difficoltà tecniche connesse con l'uso di questi strumenti sono modeste quindi la metodologia che seguirò in queste lezioni sarà incentrata sui contenuti: verranno proposti e commentati degli esempi concreti e per quanto riguarda gli aspetti più tecnici mi limiterò a fornire dei riferimenti.

Coerentemente con il tema trattato la maggior parte del materiale presentato è stato acquisito nel Web. Quindi al posto di una bibliografia, ho composto qualcosa che si potrebbe chiamare "web-grafia" che comprende tutti gli indirizzi dei siti visitati. Anche questo documento si trova, in formato ipertestuale, in un insieme di pagine Web da me mantenute [1].

Internet e il World Wide Web

In questo capitolo presenterò brevemente la "rete delle reti" e la "ragnatela mondiale". L'argomento è vasto ed io mi limiterò a riassumere i concetti fondamentali, a fornire un veloce inquadramento storico e a indicare una selezione di siti scelti per il loro interesse geometrico-didattico.

Definizioni base.

Internet è una rete globale di reti che permette a computer di tipo diverso, geograficamente distanti fra loro, di comunicare in maniera diretta e trasparente scambiandosi servizi e informazioni. È uno strumento di grande valore messo al servizio di innumerevoli comunità.

I computer collegati tramite Internet sono detti nodi; ad ogni nodo é associato un indirizzo univoco. Comunicando attraverso la rete i nodi si scambiano informazioni rendendo disponibile ai loro utenti un insieme di servizi che vanno dalla posta elettronica al World Wide Web. Con Internet è oggi possibile recuperare informazioni sugli argomenti più disparati[1],

[1] Ho fatto un esperimento (coronato da successo) con queste domande: Quali sono le lune di Giove? Da dove viene il verso "Life's but a walking shadow"? Quando è stata fondata la repubblica in Kosovo?

prenotare alberghi, effettuare acquisti e scambiarsi messaggi in maniera versatile e veloce.

Tecnicamente l'informazione (messaggi di posta elettronica, immagini, suoni, ecc.) viaggia sulla rete scomposta in tante unità dette "pacchetti". Ogni pacchetto conosce il suo indirizzo finale e ogni nodo è in grado di inoltrare i pacchetti verso la loro destinazione evitando le linee temporaneamente inattive e cercando anzi di utilizzare quelle più libere. Solo a destinazione i pacchetti vengono rimessi insieme in modo da ricomporre il messaggio iniziale. Se qualche pacchetto è andato smarrito il sistema si preoccupa di ritrasmetterlo. Questa tecnica è affidabile e robusta e, soprattutto, non prevede un controllo centrale. Di fatto una delle caratteristiche più sorprendenti di Internet è proprio la mancanza di un centro direttivo[2]; questa mancanza rende molto difficile un controllo unilaterale della rete che risulta quindi un dispositivo intrinsecamente democratico.

L'evoluzione di Internet è stata straordinariamente veloce: quella che è stata definita la 4° rivoluzione nella storia delle comunicazioni umane (dopo l'invenzione della parola, della scrittura e della stampa) non esisteva affatto appena 40 anni fa. Per capire meglio questa realtà può essere utile ripercorrere le tumultuose fasi di questo rapido sviluppo.

Un po' di storia

Internet nasce da un problema militare: come costruire un sistema di comunicazione in grado di resistere ad una guerra termonucleare? Un simile sistema andrebbe costruito considerando inaffidabile ogni singolo segmento di rete e non potrebbe basarsi su un nucleo centrale che sarebbe un immediato bersaglio per le bombe atomiche. Ogni nodo della rete dovrebbe avere la stessa autorità e i messaggi fra due nodi dovrebbero poter seguire un percorso non prefissato (in modo da evitare eventuali rami danneggiati).

[2] Nonostante la mancanza di un centro di controllo, in quasi tutti i paesi del mondo esistono degli organi che sovrintendono al corretto utilizzo della rete. In Italia, per esempio, opera il GARR (Gruppo di Armonizzazione delle Reti di Ricerca).

Infine la rete dovrebbe essere composta da computer eterogenei (dovendo unire centri militari di tipo disparato).

Nei primi anni '60 diversi centri di ricerca si occupano del problema. Fra questi: il MIT[3] (L.Kleinrock, J.C.R. Licklider, W. Clark, L.G.Roberts), il National Physics Laboratory in Inghilterra (Donald Watts Davies) e la RAND CORPORATION (P. Baran).

Nel 1968 l'ARPA[4] finanzia la realizzazione di un prototipo chiamato ARPANET. Entro dicembre 1969 vengono attivati 4 nodi[5], e nel 1972 i nodi connessi sono già 37. Quell'anno viene sviluppato il primo programma di posta elettronica.

Fin dai primi anni la rete viene utilizzata molto di più per comunicare che per sfruttare la potenza di calcolo messa a disposizione. I ricercatori utilizzano ARPANET per collaborare sui progetti, ma anche per scambiarsi pettegolezzi o messaggi personali.

Negli anni '70 il protocollo migliora (da NCP) fino ad arrivare all'attuale standard noto come TCT/IP[6]. Nel frattempo la potenza e la diffusione dei computer cresce. Cominciano ad apparire altre reti basate sul protocollo TCP/IP. Nel 1981 viene istituita BITNET (Because It's Time NETwork) nell'Università di New York. Nello stesso tempo una collaborazione[7] fra gruppi di ricerca finanziata dal NFS[8] costituisce CSNET(Computer Science NETwork) per assicurare servizi di rete (specialmente la posta elettronica) a

---

[3] Massachusetts Institute of Technology.

[4] L' ARPA (Advanced Research Project Agency) è stata fondata dopo il 1957 dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti con il fine di sviluppare e promuovere la ricerca e lo sviluppo di tecnologie con applicazioni militari.

[5] UCLA (University of California Los Angeles), SRI (Standford Research Institute, UK), UCSB (University of California Santa Barbara) e University of Utah.

[6] TCP (Trasmission Control Protocol) si occupa della gestione dei pacchetti in cui viene diviso ogni messaggio; IP (Internet Protocol) definisce l'indirizzamento univoco dei nodi.

[7] University of Delaware, Purdue University, University of Wisconsin, RAND Corporation and BBN.

[8] National Science Foundation.

quelle università che non avevano accesso ad ARPANET. CSNET è la prima rete completamente autonoma da ARPANET.

Nel 1984 viene introdotto il Domain Name System con una considerevole semplificazione degli indirizzi.

Nel 1985 nasce una delle prime e più note comunità della rete: the Whole Earth 'Lectronic Link (WELL) [2]. Internet sta cominciando a non essere più solo uno strumento di comunicazione per scienziati e militari, ma comincia a delinearsi come un fenomeno sociale interamente nuovo.

Nel 1986 il NSF costituisce 5 centri di super calcolo accessibili alle Università e ai centri di ricerca. Questa azione, dato l'alto costo dei computer in quegli anni, favorisce un'esplosione di connessioni. Poiché il software TCP/IP è pubblico e la struttura stessa della rete non è dotata di un organismo centrale (con il diritto di rifiutare nuove connessioni) la crescita di quella che oramai si chiama Internet diventa inarrestabile.

Il 1991 segna una svolta nella storia di Internet: Tim Berners-Lee del Cern di Ginevra rilascia il World Wide Web ed entro due anni vengono sviluppati i primi browser grafici. E' probabile che questo nuovo strumento sia determinante nella crescita esplosiva di Internet negli anni successivi.

Sempre nel 1991 il NSF rimuove le restrizioni all'utilizzo privato della rete. Comincia un limitato traffico commerciale e compaiono i primi fornitori di accesso telefonico ad Internet. Nel 1994 i primi shopping center approdano in rete e lo stesso anno si può ordinare una pizza tramite Internet.

L'apertura di Internet al commercio elettronico apre una nuova fase nello sviluppo della Rete, fornendo opportunità di guadagno a chi utilizza Internet commercialmente (pubblicità, acquisti a distanza, prenotazioni, ecc.), ai produttori di hardware e software e ai gestori delle linee telefoniche.

Molte informazioni su Internet si trovano nel sito della Internet Society [3]. In particolare sono disponibili diversi resoconti storici sulla nascita e sull'evoluzione di Internet [4]. Altre informazioni sono in [5] e [6]. C'è anche qualcosa in italiano [7][8][9].

Situazione attuale.

Attualmente il numero stimato[9] di computer connessi ad Internet è almeno 43.230.000; di questi si presume[10] che ce ne siano 8.426.000 contemporaneamente attivi [10].

Più impressionante del numero di computer connessi è la velocità con cui tale numero cresce: nell'agosto del 1981 Internet annoverava 213 computer collegati. Da quella data il numero ha continuato a triplicarsi in media una volta ogni 2 anni.

Valutare il numero di persone "collegate" è più difficile che contare i computer connessi. La società Nua Ltd. ha raccolto e integrato i risultati di diverse ricerche ottenendo quella che viene definita una *educated guess* sul numero di utenti di Internet [11]. Il numero risulta essere 179 milioni di individui in tutto il mondo, e 42.69 milioni nella sola Europa: la popolazione di un piccolo stato. Non è un caso che sempre più spesso nei biglietti da visita, accanto a telefono e fax si trovi anche l'indirizzo e-mail.

Il Web e il linguaggio HTML

Come ho accennato sopra, parte del successo di Internet deriva dall'invenzione, fatta al CERN di Ginevra, del World Wide Web. Questo termine significa letteralmente "ragnatela estesa su tutto il mondo". La "ragnatela" consiste in una rete di computer (*web server*) che comunicano fra loro tramite Internet utilizzando un particolare protocollo chiamato HTTP (Hyper Text Transfer Protocol). Questo protocollo prevede che l'informazione memorizzata nei server venga organizzata in pagine ognuna delle quali può contenere una combinazione di testo, grafica, suoni ecc. Le pagine sono collegate fra loro con dei legami ipertestuali detti *link*. Ciò significa che particolari elementi di una pagina (ad esempio una parola o un'immagine) contengono l'indirizzo di altre pagine eventualmente residenti su di un altro computer.

La portata di questa innovazione è stata colta in pieno dopo la realizzazione di idonei programmi grafici che permettono di visualizzare le

---

[9] Stima effettuata nel gennaio del 1999.

[10] La valutazione è stata fatta interrogando l'1% dei computer connessi.

pagine web in maniera naturale. Questi strumenti si chiamano *web browser* dal verbo inglese *to browse* che significa leggere per diletto, curiosare. Un web browser è in grado di rappresentare il contenuto multimediale di una pagina. I link ipertestuali sono evidenziati in qualche modo (ad es. con un colore diverso). Facendo click su uno di questi il browser visualizza la pagina collegata che a sua volta può contenere altri link e così via.

Chi usa il browser non si deve più preoccupare degli indirizzi; di fatto può non rendersi conto di quale sia il computer da cui proviene la pagina visualizzata. Il web si presenta come un vero e proprio spazio totalmente svincolato dalla conformazione geografica della rete sottostante. In questo spazio le distanze separano i contenuti delle pagine e non i computer che le ospitano: ad esempio una pagina in un sito bolognese sulla didattica della matematica sarà "vicina" ad una pagina omologa in un sito americano e "lontana" da una pagina dedicata allo sport ospitata dallo stesso sito.

Il primo browser a comparire sulla scena è stato Mosaic, sviluppato al NCSA [12]. In seguito il gruppo creò una società per lo sfruttamento commerciale dell'idea e mise sul mercato Netscape [13], uno dei due browser più usati oggi. La Microsoft propose un suo browser, Internet Explorer[14] e la "guerra" fra questi due programmi ha fino ad oggi provocato una drastica caduta dei prezzi: oggi è possibile acquisire entrambi i software gratuitamente. Nel frattempo, fra i due litiganti, è comparso un terzo concorrente sviluppato da una società norvegese: si tratta di Opera, un browser apparentemente molto compatto e veloce [15].

Le pagine Web sono scritte in un linguaggio chiamato HTML (Hyper Text Markup Language) e che i Web browser sono in grado di interpretare. Ma non è necessario conoscere l'HTML per produrre una pagine web, infatti le versioni più recenti dei programmi di video scrittura permettono di produrre automaticamente pagine HTML, e gli stessi browser sono spesso corredati da una funzionalità di creazione e di modifica.

Le informazioni di prima mano sul Web si trovano direttamente presso il World Wide Web Consortium. Per chi fosse interessato, in [16] ci sono informazioni specifiche sul linguaggio HTML.

Come ci si orienta

Oggi si stima [5] che ci siano più di 4,300,000 siti web: una quantità impressionante di informazione immediatamente accessibile. Proprio questa sovrabbondanza costituisce, paradossalmente una delle maggiori limitazioni nell'accesso all'informazione stessa. Le notizie utili e interessanti sono mescolate in un mare sterminato di materiale inutile. Mantenendo la metafora marina possiamo dire di aver bisogno di bussole, atlanti e portolani. Su questa linea un insieme di strumenti sempre più sofisticati ha preso forma nell'ultimo decennio e la ricerca nel settore è fra le più stimolanti e attive.

Oggi per orientarsi nella rete possiamo usare cataloghi, motori di ricerca e liste tematiche. Vediamoli brevemente:

Cataloghi e motori di ricerca:

Fin dalle prime fasi della crescita esplosiva del Web si sono sviluppati siti il cui obiettivo principale era catalogare la crescente massa di informazioni. I giganteschi indici prodotti possono essere consultati direttamente per argomento, ma è anche possibile fare una ricerca per parole chiave. Ad esempio diventa possibile cercare tutte le pagine in cui compare la parola "Pythagora".

Il risultato della ricerca viene presentato come un elenco di siti, spesso corredati da un brevissimo condensato delle frasi salienti. La lista è spesso molto lunga (anche molte migliaia di siti per una cattiva scelta della parola chiave), ma il cercatore fa del suo meglio per presentare prima i siti più interessanti (o almeno i più "frequentati"). In genere non serve controllare più di una decina di siti (meglio eventualmente cambiare le parole chiave).

Nella ricerca per parole chiave bisogna scrivere di seguito, separati da spazi, quanti più termini specifici servano per delineare l'argomento desiderato cercando di evitare le parole troppo comuni. In genere vengono restituite le pagine che contengono almeno una delle parole chiave, dando la preferenza a quelle che ne contengono di più.

Ci sono motori di ricerca generali (Altavista[17], Lycos[18], Excite [19], WebCrowler[20], MetaCrowler[21], Yahoo[22], etc.), ma anche specializzati per la matematica (MathSearch[23], Math Forum[24], isLeuth.com [25], ecc.).

Le liste tematiche

I motori di ricerca danno un orientamento grossolano: il numero di pagine trovate è, in genere, ancora troppo grande e la percentuale di materiale inutile rimane sempre troppo alta. Se, tuttavia si riesce a trovare un sito interessante, questo può rappresentare un punto di partenza per una ricerca più raffinata. È infatti molto probabile che un buon sito contenga una pagina di riferimenti a siti affini. Questa pagina di riferimenti, compilata da un essere umano, rappresenta il risultato di una valutazione critica ben oltre le capacità dell' "intelligenza artificiale" del motore di ricerca.

Riporto una elenco (parzialissimo) di liste tematiche. Esse provengono da siti di notevole interesse che presenterò brevemente nelle prossime pagine. Intanto questi pagine [26],[27] e [28] possono essere un valido aiuto per la navigazione nella parte più geometrica del Web.

Un po' di esempi

Quella che vedremo adesso si può considerare una mia personale lista tematica. Rappresenta i risultati di una personale ricerca sui siti matematici e argomenti connessi. Si tratta di un insieme di siti ricchi e stimolanti che possano fornire ottimo materiale per la didattica. Per ogni sito fornirò una breve descrizione del contenuto:

- **Il Geometry Center** [29]

E' mantenuto dal Center for the Computation and Visualization of Geometric Structures, dell'Università del Minnesota. Il centro si occupa, come dice il nome, della visualizzazione di strutture matematiche. Ha realizzato una serie di notevolissimi documentari didattici, fra cui uno (splendido) sul rovesciamento della sfera. Nel sito si trovano diverse immagini tratte dai documentari prodotti e svariate animazioni interattive su sitemi dinamici, gruppi di simmetria ed altri argomenti. Il sito è completato da una ricca lista di riferimenti [27].

- **Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles** [30]

È un sito stimolante e ricchissimo di materiale. L'autore si è proposto di combattere "l'ansia da matematica" e a tal fine ha raccolto dozzine di pagine piene di entusiasmo, fantasia e sottile umorismo. Una pagina riporta 29 dimostrazioni differenti del Teorema di Pitagora. Particolarmente aggiornata è la lista dei riferimenti[26]. L'intero sito è disponibile in CD-ROM.

- **U Science** [31]

Questo è decisamente un sito molto "americano", nel bene e nel male, con tanto di fotografie di tutti i collaboratori e possibilità di comporre e comprare una T-shirt con disegni geometrici. Merita senz'altro una visita. Contiene sezioni dedicate alla matematica e all'astronomia. Nella sezione matematica è particolarmente notevole un insieme di lezioni molto chiare e ben illustrate sui gruppi di simmetria del piano e sulle tassellature periodiche e non periodiche.

- **The Geometry Junkyard** [32]

Il titolo si potrebbe tradurre con "Deposito di rottami di geometria". Contiene tanto materiale sulla geometria più o meno organizzato.

- **Gli Elementi di Euclide** [33]

D.E.Joyce si è sobbarcato il compito di mettere on-line i 13 libri che compongono gli Elementi di Euclide. In queste pagine web si trova il testo completo tradotto in inglese e corredato da un insieme di figure animabili. Lo stesso autore ha sviluppato l'applet Java[11] che permette di realizzare tali figure. Durante il corso abbiamo utilizzato questo applet per realizzare figure nuove.

Oltre agli Elementi di Euclide si può leggere anche l'interessante posizione dell'autore in merito all'insegnamento della geometria nelle scuole americane e in particolare sui libri di testo.

- **Math Forum** [34]

Costituisce un vivace gruppo di discussione sulla divulgazione in matematica. Ci sono alcune pagine stimolanti dedicate a Cabri II[12].

---

[11] Un applet Java è un particolare programma scritto in linguaggio Java e inserito in una pagina Web. Ne parlerò estesamente nel capitolo sulle animazioni interattive.

[12] Cabri II è un software didattico per la manipolazione di figure geometriche il cui utilizzo è relativamente diffuso in Italia. Ne parlerò in seguito.

- **Mathpuzzle.com** [35]

Una delle maniere più allettanti di apprendere una disciplina è quello di imparare giocando. Queste pagine raccolgono una discreta collezione di giochi, puzzle e rompicapo ad argomento matematico.

Il WorldWideWeb come strumento di comunicazione

Fino a qui ho cercato di mostrare come il Web possa essere utilizzato analogamente ad una biblioteca, ricca di pagine stimolanti. In questo capitolo affronterò l'ipotesi di un uso non solo passivo di questa risorsa.

Il Web, infatti, può essere considerato uno strumento rapido ed economico per pubblicare documenti. In ambito didattico possiamo immaginare che una scuola si doti di un server web sul quale vengano raccolti, oltre alle informazioni sull'orario ecc., anche i risultati delle ricerche e delle tesine fatte dagli studenti.

Questo tipo di attività ha, secondo me, un triplice scopo educativo. Innanzitutto la prospettiva di rendere visibile il proprio lavoro su scala nazionale (e in linea di principio mondiale, lingua permettendo) rappresenta sicuramente una forte motivazione per gli studenti. Il confronto con tesine sviluppate in un contesto simile da altri ragazzi, magari in città diverse, rappresenta una preziosa sorgente di informazioni per superare le prime difficoltà e sviluppa un positivo senso di competizione.

In secondo luogo la creazione di una pagina web obbliga a organizzare i concetti in modo razionale e strutturato. La percezione che la pagina possa essere vista al di fuori del contesto della lezione e da un numero arbitrariamente grande di persone agisce da sprone a renderla accattivante, chiara ed autoconsistente.

Infine la natura anglofona e multimediale del web assieme alla spinta a creare pagine "interessanti" favoriscono la multidisciplinarietà nella realizzazione delle pagine stesse: infatti avranno maggiore successo le pagine che fondono più componenti tecniche con suggestioni artistiche; per realizzare pagine simili sono necessarie competenze di matematica, informatica, lingua straniera, architettura, disegno, ecc.

Gli studenti si impadroniscono molto rapidamente, in genere, delle tecniche necessarie per progettare la singola pagina e, con l'aiuto di qualche stimolo, suggerimento e correzione, dovrebbero rivelarsi relativamente autonomi nella redazione delle pagine stesse. Il problema principale è progettare la struttura generale del sito.

Credo che sia molto importante concepire ogni nuovo sito come parte di una "confederazione" di siti collegati fra loro. Basterebbe che ogni scuola compilasse una pagina di collegamenti con le scuole vicine (magari con delle valutazioni critiche) e in breve tempo diventerebbe possibile compilare una mappa delle scuole italiane presenti in rete.

L'obiettivo principale di questo sforzo è quello di massimizzare la visibilità: se tutte le scuole fossero collegate fra loro allora basterebbe trovarne una per riuscire ad accedere facilmente a tutte le altre. Uno studente che esplorasse il sito della propria scuola, magari solo per controllare l'orario delle lezioni, sarebbe messo rapidamente in contatto con i lavori preparati dagli studenti di tutte le altre scuole con i vantaggi esposti sopra. Seguendo questa strategia e dopo il superamento di una massa critica di pagine si dovrebbe assistere ad una crescita esponenziale della qualità dei siti.

Come ho suggerito sopra, i siti web delle scuole dovrebbero avere un insieme di pagine gestite quasi completamente dagli studenti. Uno dei punti di forza di questa tecnologia è proprio la capacità di coinvolgere direttamente lo studente in un ruolo attivo e creativo. Personalmente ritengo un grave errore non sfruttare questa opportunità e, invece, cedere alla tentazione di utilizzare il nuovo strumento con le vecchie modalità. Un esempio di utilizzo didattico di Internet interessante, ma limitato proprio su questo fonte è *Apprendere in Rete* [36]. La pagina introduttiva cita Aristotele e Seneca e fa propria la massima "imparare facendo". Nella pratica gli autori, occupati a promuovere l'utilizzo del loro software nelle scuole, non sembrano rendersi conto che "fare" è diverso da "eseguire". Si "impara facendo" solo se si medita e si decide autonomamente ogni scelta che il "fare" in genere presenta. Al contrario le dettagliate istruzioni presenti nelle unità didattiche di *Apprendere in Rete* mi sembra che tolgano allo studente l'incomodo di dover decidere o meditare alcunché.

I problemi tecnici implicati nella redazione di un insieme di pagine web non sono insormontabili. Le versioni più recenti dei programmi di videoscrittura eliminano la necessità di conoscere l'HTML. In rete ci sono molti documenti che indirizzano verso la produzione di pagine di buona qualità ([37], [38] e [39]). Alla fine è anche possibile sottoporre il sito ad un correttore automatico che evidenzia gli eventuali errori tecnici [40].

Il costo dell'hardware necessario e della connessione a Internet è relativamente modesto ed è probabilmente destinato a scendere nei prossimi anni.

Animazioni interattive

Il computer può essere usato come "lavagna" in alternativa a quella di ardesia. Sullo schermo (magari il grande schermo di un videoproiettore) possono comparire immagini che illustrano, per esempio, i passaggi salienti di una dimostrazione di geometria. Questa tecnica ha vantaggi e svantaggi rispetto all'uso della lavagna. Quest'ultima è indubbiamente più versatile: con un pezzo di gesso è possibile illustrare praticamente qualunque cosa e senza bisogno di lavoro preparatorio. Inoltre anche a disegno finito è possibile fare limitate modifiche e aggiunte, magari per rispondere ad una domanda o per precisando un'affermazione.

D'altro canto, il computer è in genere molto più preciso e può rappresentare con chiarezza dei modelli che, per la loro complessità, sono proibitivi per la lavagna: per esempio un'immagine tridimensionale o la rappresentazione a falsi colori di un campo scalare.

Un altro aspetto positivo è che le immagini generate dal computer possono essere animate e possono modificarsi in maniera arbitrariamente complessa spesso direttamente sotto il controllo del relatore. Consideriamo, ad esempio, un'intricata figura geometrica costruita (utilizzando un programma adatto) a partire da un triangolo qualunque. In ogni momento è possibile modificare la posizione dei vertici del triangolo deformando coerentemente tutta la figura. Durante la trasformazione le rette parallele rimangono parallele, i punti medi continuano a dividere in parti uguali i segmenti su cui si trovano e, in sostanza, tutti i vincoli imposti durante la costruzione rimangono integri mentre le grandezze "libere" (per esempio la forma del triangolo iniziale) possono cambiare.

Immagini in movimento come quella che ho esemplificato catturano l'attenzione e si fissano nella memoria in maniera più vivida rispetto alle immagini fisse. Inoltre questa tecnica dà una chiara evidenza di quanto la dimostrazione non dipenda dalla forma del triangolo iniziale.

È necessaria molta abilità ed esperienza per realizzare i programmi che rendono possibili queste animazioni, ma da molti anni sono disponibili strumenti per realizzare animazioni sofisticate in maniera grafica e intuitiva senza alcun bisogno di conoscenze informatiche.

Possiamo dividere questi programmi in due grandi classi. Da un lato ci sono i sistemi per lo sviluppo di applicazioni matematiche. Essi permettono di manipolare equazioni in forma simbolica e sono spesso in grado di visualizzare in forma grafica gli oggetti trattati. È quindi possibile generare modelli di superfici immerse nello spazio tridimensionale, grafici di funzioni di due variabili, eccetera. Esempi di software di questo tipo sono: MathLab, Mathematica, Maple, Derive.

L'altra classe di programmi comprende quelli specificamente realizzati per realizzare costruzioni geometriche in ambito didattico. Sono sistemi che permettono di disegnare e modificare con semplicità delle figure. In ogni istante ogni elemento della costruzione (punti, rette, cerchi, ecc.) può essere spostato o modificato, seguendo sempre i vincoli imposti durante la costruzione: un punto che giaccia su una retta si limiterà a scorrere lungo la retta stessa, ecc. Vediamo tre esempi un po' più da vicino:

- **SketchPad** [41]

Viene commercializzato dalla KeyCurriculum Press dall'aprile del 1991. Una caratteristica notevole è la capacità di esportare le costruzioni geometriche in un formato che può essere inserito in una pagina Web (cioè sotto la forma di *applet* Java). In rete [42] si trova una bella galleria di modelli preparati in questo modo e direttamente visualizzabili con un comune Web Browser.

- **Cabri II** [43],[44],[45]

Cabri è un software sviluppato in Francia dal gruppo EIAH[13]. Una prima versione di Cabri-géomètre viene utilizzata in un contesto didattico nei

[13] L' *Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain* (EIAH) è un gruppo del *Laboratoire Leibniz all'Institut d'Informatique et de Mathematiques*

primi mesi del 1988. Lo stesso anno il programma riceve dalla società Apple l'*Education Trophy* come miglior software educativo. All'inizio del 1995 viene rilasciato Cabri II con il supporto di Texas Instruments Inc. Questa versione del software gira anche su un'economica calcolatrice programmabile, la TI-92, e questa circostanza influenza in modo determinante la diffusione del programma. Cabri II è un software piuttosto conosciuto e utilizzato in Italia.

- **Cinderella** [46]

In marzo 1999 viene messo in vendita un nuovo software per l'insegnamento della geometria scritto in linguaggio Java. Nel sito di Cinderella c'è un'interessante pagina comprendente un certo numero di animazioni (non tutte interattive) visibili direttamente con un Web Browser.

Linguaggi di utilizzo generale

Per quanto sofisticati e potenti, i programmi sopra riportati permettono di esplorare solo ambiti ben definiti. Ci sono diversi motivi che spingono verso altre soluzioni: innanzitutto la voglia di creare un modello che esuli dalle specifiche del programma; ad esempio un automa cellulare [47], un'immagine definita in maniera ricorsiva [48], una dinamica caotica [49], eccetera. Queste animazioni esulano dalle potenzialità degli strumenti sopra descritti. Un altro motivo per non limitarsi ai programmi già fatti può essere semplicemente il desiderio di scendere più in profondità nella tecnologia per capirne meglio il funzionamento. Questa esplorazione, sicuramente difficile, è spesso molto gratificante e stimolante.

L'obiettivo è quindi realizzare un piccolo programma "geometrico" con un linguaggio di programmazione di uso generale. Il compito può apparire arduo, ma a volte si può coinvolgere nel progetto l'insegnante di informatica e, d'altra parte, il programma desiderato è spesso molto semplice dal punto di vista informatico.

Nelle prossime pagine presenterò degli esempi. Si tratta di animazioni interattivi, molto semplici, ma dotate di una qualche valenza didattica. Oltre

---

Appliquees in Grenoble (IMAG). Il laboratorio è affiliato al *Centre National de la Recherche Scientifique* (CNRS) ed è parte dell' *Université Joseph Fourier.*

a illustrare la tecnica rappresentano dei punti di partenza per chi volesse provare a sviluppare un modello più complesso.

Questi programmi possono agevolmente essere realizzati con i linguaggi di programmazione più diffusi (C,C++,Pascal, Delphi, VBasic, ecc.) a patto che sia disponibile una libreria per la gestione della grafica. Se l'insegnante conosce già un linguaggio di programmazione farà benissimo ad utilizzare quello. Io ho scelto il linguaggio Java della Sun Microsystems per diversi motivi: è un linguaggio moderno, molto popolare e relativamente facile da usare, gestisce la grafica in maniera semplice e diretta, l'ambiente di sviluppo è gratuito, ma soprattutto con Java si scrivono gli *applet*.

Un applet è un particolare programma scritto in Java che può essere inserito in una pagina Web, come un'immagine. L'applet occupa una ben definita posizione di spazio dentro la pagina, può essere circondato da testo o immagini e viene scaricato dal web server assieme alla pagina stessa. Una volta scaricato può interagire con l'utente reagendo ai comandi impartiti con la tastiera e con il mouse. In altre parole si comporta come un programma indipendente ospitato all'interno del browser.

Un applet scritto in Java è immediatamente utilizzabile senza bisogno di trasferire files o eseguire procedure di installazione e senza preoccuparsi della compatibilità con il computer usato: lo stesso applet funziona sia su MacIntosh che su Pentium, sia su Windows che su Linux, ecc.[14]

L'ambiente di sviluppo, che permette di sviluppare in Java programmi e applet è gratuito e si può scaricare liberamente dal sito della Sun. Manuali su Java e l'uso di Java per scrivere applet sono facilmente reperibili nelle librerie italiane, ma una documentazione completa si può di nuovo scaricare gratuitamente dalla rete ([50] e [51]).

Creare applet

La produzione di un applet Java comincia con la redazione del "codice sorgente": bisogna codificare il comportamento desiderato dell'applet scrivendo uno o più files in linguaggio Java. Questi files devono avere

[14] Basta che il browser usato supporti Java. Lì sta il trucco: il browser è specifico per quel particolare tipo di computer e agisce da "interprete".

l'estensione *.java*. Il compilatore Java legge il codice sorgente e, se non ci sono errori di grammatica, produce uno o più files con l'estensione *.class*. Questi ultimi vanno trasferiti sul server Web.

Infine, nel documento che descrive la pagina in cui l'applet va inserito, bisogna aggiungere le istruzioni in linguaggio HTML che fanno riferimento al nome dell'applet, che ne definiscono l'ingombro all'interno della pagina e che, eventualmente, gli passano uno o più parametri.

Tutte queste operazioni sono esaurientemente descritte nel sito della Sun nominato prima.

In classe, per prendere confidenza con gli applet, abbiamo cominciato a utilizzare un applet già fatto. Cioè abbiamo preso direttamente i files .class e ci siamo limitati a scrivere delle nuove pagine HTML modificando i parametri dell'applet. Abbiamo usato il *GeometryApplet* realizzato da D.E.Joyce per illustrare gli Elementi di Euclide. Tale applet accetta un grande numero di parametri e può essere usato per generare immagini modificabili simili a quelle prodotte con SketchPad. In [33] ci sono le istruzioni dettagliate per l'utilizzo del *GeometryApplet*.

Per ragioni di brevità gli esperimenti fatti con il *GeometryApplet* e il codice sorgente degli applet presentati nei prossimi paragrafi si trovano solo sulla versione on-line di questo documento [1].

Dopo aver usato l'applet di Joyce abbiamo cominciato ad analizzare e modificare il sorgente di piccoli applet creati per l'occasione. I primi esempi sono estremamente semplici: nessun listato supera le 100 linee di codice (un paio di schermate). I temi sviluppati sono stati:

- **Disegno di una funzione definita in coordinate polari**

Utilizzare Java per disegnare il grafico di una funzione ad una sola variabile è forse l'esercizio più semplice. I grafici in coordinate polari di molte funzioni danno luogo a disegni piacevoli; può essere stimolante la ricerca delle funzione che permetta di ottenere un particolare effetto "decorativo". Normalmente si chiede allo studente il contrario: cioè di stimare il grafico di una funzione nota. Questo esercizio, come molti problemi "inversi" è più difficile, richiede (e stimola) una conoscenza capillare dell'argomento e, in genere, ammette più di una soluzione.

Un applet appena un po' più complicato del precedente permette di variare il valore di un parametro interattivamente, permettendo di modificare la figura rappresentata con un movimento del mouse.

- **Figure di Lissajous**

Le figure di Lissajous sono ben note a chi ha utilizzato un oscilloscopio. Appare naturale creare un modello animato che le rappresenti. Questi applet, a differenza dei precedenti, evolvono anche senza intervento dell'utente.

- **Disegno di una funzione f(x,y) usando un codice di colore per i valori della funzione**

Questo esercizio ci fa scontrare con la (relativamente) limitata potenza di calcolo degli attuali PC: un'animazione è ancora fuori portata. Il disegno del campo scalare può prendere più di un secondo e per ottenere un'animazione fluida è necessario generare almeno 10 immagini al secondo[15]. Anche in questo caso le immagini prodotte possono avere un certo fascino per un'opportuna scelta della funzione oggetto e del codice di colore.

- **La scritta UMI che cambia con il movimento del mouse**

In questo caso l'applet si presenta come un'immagine statica che raffigura la parola UMI scritta in lettere maiuscole, ma se il mouse passa sopra l'immagine, le parti più vicine al cursore vengono distorte con un effetto che ricorda un gorgo. Matematicamente l'immagine viene deformata secondo un campo vettoriale che assegna uno spostamento ad ogni punto del piano. Il centro di questo campo è la posizione del cursore; lontano da questo centro il campo si annulla. Qual'è la forma del campo vettoriale? Che succede, qualitativamente, modificando i coefficienti nelle formule?

- **Stima dell'area del cerchio e della lunghezza della circonferenza**

Questi applet rappresentano un modo di stimare l'area (o il perimetro) di figure curvilinee (in questo caso un cerchio). Nel primo caso, ad esempio, la

---

[15] Al cinema siamo abituati a vedere 24 fotogrammi al secondo; la televisione italiana (sistema PAL) ne presenta 25. I vecchi film del cinema muto erano girati a 18 fotogrammi al secondo (questo spiega perchè, proiettati oggi, appaiono accelerati).

superficie attorno al cerchio viene ricoperta da quadrati. I quadrati assumono tre colori diversi a seconda che siano interni, esterni o sul confine. In basso si possono leggere le aree occupate e che rappresentano una stima per eccesso e una per difetto dell'area incognita. Il numero di quadrati si può cambiare interattivamente e tutta la figura si aggiorna.

- **Qualche esempio più complicato**

Gli esempi presentati fino a questo momento richiedono una limitatissima abilità programmativa. Una classe che voglia sviluppare delle tesine con un contenuto informatico oltre che matematico può studiare qualche esempio più complicato (poche centinaia di linee di codice).

Sono stati presentati tre applet come supporto ad altrettante dimostrazioni del teorema di Pitagora. La dimostrazione evolve in maniera continua da un istante iniziale ad uno finale ed in ogni momento si può modificare la forma del triangolo iniziale aggiornando coerentemente tutta la costruzione.

L'ultimo applet visualizza in prospettiva un insieme di poliedri regolari inclusi uno dentro l'altro. Si può cambiare il punto di vista e si possono aggiungere o togliere poliedri.

Conclusioni

In queste pagine ho presentato un'ipotesi di utilizzo didattico dei computer e di Internet: il World Wide Web può essere utilizzato per effettuare ricerche ed integrare le informazioni presenti sui libri di testo. Gli studenti possono preparare delle relazioni scritte sotto forma di pagine web e queste pagine possono essere "pubblicate" sul sito web della scuola. All'interno di queste pagine possono trovare posto animazioni grafiche interattive realizzate dagli studenti utilizzando programmi specializzati come Cabri II, SketchPad e Cinderella oppure direttamente in linguaggio Java. I siti web delle varie scuole si riferiscono a vicenda in modo che gli studenti abbiano un facile accesso ai lavori prodotti dai loro giovani colleghi.

Questo approccio alla didattica si affianca all'insegnamento tradizionale senza sostituirlo. La figura dell'insegnante rimane centrale e serve come sempre da stimolo e da guida.

I vantaggi di questo scenario sono: coinvolgimento degli studenti, lavoro di gruppo, interdisciplinarietà ed esercizio pratico di tecnologie emergenti.

Gli svantaggi sono quelli da sempre connaturati alle innovazioni tecnologiche: il rischio che si privilegi l'effetto speciale a scapito del contenuto o che le attività proposte vengano percepite come una specie di videogioco il cui senso sfugge. Osservazioni intelligentemente critiche sulla didattica e le nuove tecnologie si trovano in Lucio Russo [52].

Un altro problema è che, per realizzare la situazione descritta sopra, è necessario prima superare una barriera di impedimenti strutturali: nelle scuole non ci sono computer o sono troppo pochi, nessuno li sa usare eccetera. A fronte di queste difficoltà va ricordato che il nostro è un mondo in rapida evoluzione. Il prezzo dei computer crolla e la loro diffusione sta crescendo in maniera esponenziale. È possibile e necessario giocare di anticipo, formando una cultura e un progetto sull'utilizzo dei computer prima che questi siano realmente presenti in ogni scuola. In quel momento sarà tardi per improvvisare una strategia.

Spetta alla bravura e alla professionalità del docente massimizzare i vantaggi e minimizzare gli svantaggi. Tengo a sottolineare che ignorare i nuovi strumenti per paura dei problemi connessi è sicuramente accettabile in una prospettiva di corto raggio, ma nel lungo periodo mi sembra una colpevole omissione. I Computer e Internet si stanno radicando sempre più profondamente nel nostro modo di lavorare e di vivere e io credo che la scuola debba insegnare, fra le altre cose, anche a controllare la tecnologia senza esserne assoggettati. Inoltre in questi anni l'utilizzo di queste nuove tecniche nella didattica non è ancora stato definito rigidamente. Questo è il momento magico in cui il suggerimento, l'esempio e l'esperimento hanno ottime possibilità di influenzare lo sviluppo tecnologico. L'occasione non va sprecata.

Glossario

Ho raccolto in questo glossario un insieme di termini di uso corrente che riguardano Internet e che sono stati definiti e/o usati nel testo.

Applet: Programmi scritti in linguaggio Java inclusi all'interno di una pagine Web. Le versioni non troppo vecchie di tutti i più comuni WebBrowser sono in grado di visualizzare applet. Questi appaiono come figure inserite nel testo e con le quali l'utente può interagire.

DNS: Domain Name Server. Introdotto nel 1984. Permette di riferirsi agli indirizzi IP utilizzando degli indirizzi mnemonici. Un indirizzo mnemonico è costituito da un insieme di parole separate da punti. Queste parole indicano il nodo e i domini di appartenenza, dal particolare al generale. L'ultima parola dell'indirizzo può essere un indicazione geografica (ad esempio 'it' con cui terminano tutti gli indirizzi italiani) oppure un indicatore di tipologia ('gov' per le strutture governative, 'mil' per le militari, 'edu' per scuole e università, 'com' per le società commerciali, 'org' per le organizzazioni non commerciali e 'net' per i nodi che si occupano della gestione della rete).

FAQ: L'acronimo significa *Frequently Asked Question*, ovvero "domande poste frequentemente". Sono delle liste di domane comuni su un certo soggetto compilate da persone o da organizzazioni. Sono una buona fonte di informazioni. Sul World Wide Web si possono trovare facilmente delle FAQ che riguardano Internet e gli argomenti connessi.

HTML : HyperTextMarkupLanguage. Un linguaggio che permette di definire una pagina contenente testo, immagini, link ad altre pagine, etc. La maggior parte dei documenti sul World Wide Web sono scritti utilizzando l'HTML.

HTTP: Hypertext Transfer Protocol. È l'insieme di regole che stabiliscono come si devono trasmettere i documenti HTML sulla rete. Il World Wide Web si basa interamente su questo protocollo.

Internet : La "rete delle reti". È un insieme di reti di computer che comunicano fra loro attraverso tutto il mondo utilizzando un protocollo che si chiama TCP/IP.

Ipertesto: Un documento connesso con altri tramite un insieme di collegamenti detti *link*. I link sono associati a determinate parole o immagini del documento stesso. Quando si visualizza un documento ipertestuale utilizzando un programma apposito (per esempio un Web Browser) le parole associate ad un link sono evidenziate in qualche modo (ad esempio con un colore diverso e/o con la sottolineatura). Facendo click con il mouse su queste parole si passa al documento collegato.

Java: Un linguaggio di programmazione sviluppato dalla Sun Microsystems. (→ Applet).

Link: In un documento ipertestuale è il legame fra un documento ed un altro.

Motore di ricerca: E' uno strumento che permette di rintracciare su Internet informazioni su un dato argomento. La ricerca viene in genere fatta utilizzando parole chiave o semplici domande in inglese.

Multimediale: Che usa molti media. Un documento multimediale è composto da una mescolanza di testo, immagini, animazioni, suoni ecc.

Netiquette: Un insieme di regole di comportamento da seguire in rete. Rappresenta l'equivalente del Galateo su Internet.

Sito Web: È un nodo del World Wide Web. Indica anche l'insieme di pagine HTML raggruppate sotto lo stesso indirizzo.

Smileys Faces o **Emoticons**: Sono sequenze di simboli che formano una faccia stilizzata (vanno letti inclinando il capo verso sinistra). Sono ampiamente usati nella posta elettronica o nei gruppi di discussione per esprimere stati d'animo o per precisare il significato di espressioni potenzialmente ambigue. Ad esempio dopo una frase ironica si può aggiungere una strizzata d'occhio ;-)

Software Freeware: E' software utilizzabile gratuitamente. Tuttavia è coperto da copyright: non può essere analizzato o rivenduto senza una precisa autorizzazione dell'autore.

Software Public Domain: Software non coperto da copyright. Si può utilizzare (in genere scaricandolo dalla rete) senza alcuna limitazione.

Software Shareware: Rappresenta una valida alternativa al software commerciale. È sottoposto a copyright, ma lo si utilizza sulla base di un rapporto di fiducia. Lo si può usare gratuitamente per un limitato periodo di tempo trascorso il quale si deve pagare una somma (in genere modesta) all'autore. In diversi siti si può trovare software shareware. Ad es. in [53] e [54].

TCP/IP: Il protocollo ovvero l'insieme di regole che i computer connessi ad Internet utilizzano per scambiarsi informazioni. Gli acronimi TCP e IP significano rispettivamente: *Trasmission Control Protocol* (si occupa della divisione dell'informazione in pacchetti, del trasferimento dei pacchetti stessi e la loro ricomposizione a destinazione) e *Internet Protocol* (si occupa dell'indirizzamento dei nodi).

URL: Uniform Resource Locator. È il sistema di indirizzamento utilizzato sul World Wide Web. Permette di individuare univocamente un file che si trovi in Internet. Un esempio di URL è: *http://www.divideo.it/personal/todesco/umi/index.html*. Definisce: il protocollo usato (*http*), il nome del nodo (*www.divideo.it*), la directory (*/personal/todesco/umi/*) e il nome del file (*index.html*).

Web Browser: È un programma progettato per presentare documenti scritti in formato HTML che in genere si trovano sul World Wide Web. Un Web Browser è spesso in grado di visualizzare testo, grafica, animazioni e legami ipertestuali e può permettere l'ascolto dei brani audio inseriti nelle pagine.

Web Server: Sono i computer che conservano le pagine del World Wide Web. Un Web Browser interroga uno o più Web Server per ottenere le pagine da presentare sul video.

WorldWideWeb o **Web** : letteralmente: la Ragnatela Estesa su Tutto il Mondo. È una collezione di pagine scritte in formato HTML e conservata da un enorme numero di Web Server. Le pagine possono contenere molti tipi di informazione (testo, immagini, suoni, ambienti 3D, ecc.) e sono collegate fra loro in modo ipertestuale.

Riferimenti

Qui di seguito riporto gli indirizzi delle pagine web da cui ho tratto il materiale presentato durante queste lezioni. Ho verificato gli indirizzi il 22 luglio 1999, ma Internet è un universo in rapida evoluzione e qualche pagina potrebbe diventare obsoleta nei prossimi mesi.

[1] **Proposte multimediali per la didattica della geometria**, *Gian Marco Todesco, Digital Video s.r.l.*
Questo stesso documento in formato ipertestuale.
http://www.divideo.it/personal/todesco/umi/index.html

[2] **About the Well**, *the Well.*
Una delle prime comunità nate sulla rete.
http://www.well.com/aboutwell.html

[3] **Internet Society (ISOC) Web Site**, *Internet Society.*
Il sito della ISOC. La Internet Society si propone di organizzare e armonizzare gli sforzi per migliorare le infrastrutture che stanno alla base di Internet.
http://www.isoc.org

[4] **History of the Internet**, *Internet Society.*
Tratta dal sito precedente, questa pagina raccoglie un certo numero di documenti sulla

storia di Internet.
http://www.isoc.org/internet/history/

[5] **Hobbes' Internet Timeline v4.1**, *Robert H'obbes' Zakon.*
Accurata cronistoria dell'evoluzione di Internet dal 1957 fino al 1999. Contiene anche grafici sul numero di host, siti web, ecc.
http://info.isoc.org/guest/zakon/Internet/History/HIT.html

[6] **Internet for Historians, History of the Internet,** *J. de Jong e M.P. Rhebergen.*
Un corso tenuto all'Università di Leida sulla storia di Internet.
http://www.let.leidenuniv.nl/history/ivh/frame_theorie.html

[7] **La storia di Internet**, *NCC s.r.l.*
Sempre una storia di Internet, ma in italiano. Idem per i due indirizzi successivi.
http://www.ncc.it/storia.htm

[8] **Breve storia di Internet,** *Planet s.r.l.*
http://www.planetweb.it/guida/storia.html

[9] **Internet, un po' di storia,** *FlowNet.*
http://www.flownet.it/Informazioni/Internet/Storia.html

[10] **Internet Domain Survey,** *Internet Software Consortium.*
Informazioni sulle dimensioni attuali di Internet e sulla sua crescita.
http://www.isc.org/dsview.cgi?domainsurvey/index.html

[11] **How many online?**, *Nua Ltd.*
La pagina contiene una stima del numero di "utenti" di Internet stimati a giugno 1999.
http://www.nua.ie/surveys/how_many_online/index.html

[12] **NCSA Mosaic Home Page,** *The National Center for Supercomputing Applications at the University of Illinois at Urbana-Champaign.*
Mosaic è stato il primo Web browser grafico ad essere largamente diffuso e ha contribuito in maniera determinante alla crescita del World Wide Web. Adesso è tecnologicamente superato, ma mantiene il suo posto nella storia di Internet.
http://www.ncsa.uiuc.edu/SDG/Software/Mosaic/NCSAMosaicHome.html

[13] **Netscape Netcenter**, *Netscape Communications Corporation.*
Uno dei due Web Browser piú diffusi.
http://www.netscape.com

[14] **Internet Explorer Home Page,** *Microsoft Corporation.*
Il Web browser della Microsoft.
http://www.microsoft.com/windows/ie/

[15] **Opera Home Page**, *Opera Software.*
Un terzo browser sulla scena. Pare sia particolarmente compatto e veloce.
http://www.opera.com

[16] **HTML home page**, *World Wide Web Consortium.*
Il World Wide Web Consortium (Massachusetts Institute of Technology, Institut national de recherche en informatique et en automatique, KeioUniversity) è il principale riferimento per tutto quello che riguarda il Web. In questa pagina viene presentato il linguaggio HTML.
http://www.w3.org/MarkUp

[17] **AltaVista**, *AltaVista Company.*
Uno dei piú diffusi motori di ricerca ad utilizzo generale.
http://www.altavista.com

[18] **Lycos**, *Lycos, Inc.* Idem http://www.lycos.com

[19] **Excite**, *Excite Inc.* Idem http://www.excite.com

[20] **WebCrawler**, *Excite Inc.* Idem http://www.webcrawler.com.

[21] **MetaCrawler**, *Go2Net, Inc.* Idem http://www.metacrawler.com

[22] **Yahoo!**, *Yahoo!.*
Il motore di ricerca della Yahoo! Yahoo è stato uno dei primi siti costruiti con lo scopo di indicizzare il World Wide Web.
http://search.yahoo.com

[23] **MathSearch**, *Dr Jim Richardson, School of Mathematics & Statistics, University of Sydney*
Un motore di ricerca specializzato per la matematica. Idem i due indirizzi seguenti.
http://www.maths.usyd.edu.au:8000/MathSearch.html

[24] **Math Forum Search Page**, *The Math Forum.*
http://forum.swarthmore.edu/grepform.html

[25] **Search Sciences – Mathematics**, *iSleuth.com, Inc.*
http://www.isleuth.com/math.html

[26] **Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles/Other Sites**, *Alexander Bogomolny.*
Lista di riferimenti tratta da Interactive Mathematics Miscellaney and Puzzles.
http://www.cut-the-knot.com/collection.html

[27] **The Geometry Center / Other Sites**, *The geometry Center of the University of Minnesota.*
Lista di riferimenti tratti dal Geometry Center
http://www.geom.umn.edu/external/education.html

[28] **CTC Math/Science Gateway**, *Cornell Theory Center,*
Lista di siti ad argomento matematico compilato al Cornell Theory Center.
http://www.tc.cornell.edu/Edu/MathSciGateway/math.html

[29] **Geometry Center**. *The geometry Center of the University of Minnesota.*
Uno splendido sito sulla visualizzazione delle strutture della geometria.
http://www.geom.umn.edu

[30] **Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles**, *Alexander Bogomolny.*
Il sito si propone di fare da antidoto alla diffusa "ansia da matematica".
http://www.cut-the-knot.com

[31] **Science U**, *Geometry Technologies.*
Un sito divertente con ottime lezioni sulle simmetrie del piano.
http://www.scienceU.com

[32] **The Geometry JunkYard**, *David Eppstein, Theory Group, ICS, UC Irvine.*
Molto materiale sulla geometria accatastato con entusiasmo.
http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard

[33] **Euclid's Elements**, *D.E.Joyce , Clark University.*
I 13 libri che costituiscono Gli Elementi di Euclide, tradotti in inglese e corredati da figure animabili (applet).
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html,

[34] **The Math Forum**, *National Science Foundation, Swarthmore College.*
Fra gli argomenti si parla anche di "Math education".
http://forum.swarthmore.edu

[35] **MathPuzzle.com**, *Ed Pegg Jr.*
Un sito che raccoglie centinaia di giochi, puzzle e rompicapo matematici.
http://www.mathpuzzle.com

[36] **Apprendere in Rete – Matematica e Geometria**, *CIRED - Università Ca' Foscari - Venezia, LTA - Università Roma 3 - Roma, Microsoft Corporation.*
Un esempio concreto di didattica in rete. Non molto interattivo e molto "pubblicitario".
http://www.microsoft.com/italy/education/air/AiR_Venezia/html/matemati.htm

[37] **Composing Good HTML**, *J.E.Tilton.*
Una buona guida di stile su come costruire pagine Web.
http://www.cs.cmu.edu/~tilt/cgh/

[38] **Hints for Web Authors**, *W. Steel.*
Un altra guida sulla costruzione di pagine Web. Orientata alla compatibilità fra varie versioni dell'HTML.
http://www.mcsr.olemiss.edu/~mudws/webhints.html

[39] **HTML Bad Style Page**. *Tony Sanders.*
Una preziosa raccolta di cose da evitare nella creazione di pagine Web.
http://www.earth.com/bad-style/

[40] **SiteInspector**, *LinkExchange™, Inc.*
Valuta (automaticamente) la "bontà" tecnica di un sito. La valutazione è dettagliata e

comprende anche suggerimenti per migliorare le pagine.
http://siteinspector.linkexchange.com/

[41] **The Geometer's Sketchpad® Resource Center**, *Key Curriculum Press.*
Il sito ufficiale di SketchPad, un software per lo studio della geometria.
http://www.keypress.com/sketchpad/index.html

[42] **JavaSketchpad DR3 Gallery**, *Key Curriculum Press.*
Galleria di modelli realizzati con SketchPad ed esportati sotto forma di applet Java. Ho trovato particolarmente stimolanti: LEAST SQUARES, THE CONIC SECTION e LINKAGE
http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/gallery.html

[43] **Cabri-géomètre**, *Université Joseph Fourier de Grenoble, CNRS.*
Il sito ufficiale di Cabri, un software per lo studio della geometria.
http://www-cabri.imag.fr/index.html Cabri II

[44] **Cabri-géomètre**, *Sezione Scuola Media dell'IRRSAE-ER*
Un sito su Cabri realizzato a Bologna.
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/

[45] **Cabri Geometry II™**, *Texas Instruments, Inc.*
Il sito della Texas Instruments su Cabri.
http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm

[46] **Cinderella - The interactive Geometry Software**, *Jürgen Richter-Gebert & Ulrich Kortenkamp.*
Le pagine di presentazione (con informazioni ed esempi di utilizzo) di Cinderella, un altro software per lo studio della geometria.
http://www.cinderella.de

[47] **Cellular automata**, *Andreas Ehrencrona*
Una splendida pagina sugli automi cellulari. Contiene diverse animazioni.
http://cgi.student.nada.kth.se/cgi-bin/d95-aeh/get/lifeeng

[48] **Snakegully – Fractal Applet**, *sgully@msn.bc.ca*
Un applet Java che produce immagini ricorsive
http://www.msn.bc.ca/~sgully/class/fractals/

[49] **The Lorenz Model – Demonstrations**, *Michael Cross.*
Un insieme di dimostrazioni sulla dinamica di Lorenz basate su applet Java.
http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Lesson1/Demos.html

[50] **The Source for Java™ Technology**, *Sun Microsystems, Inc.*
Il sito ufficiale sul linguaggio Java.
http://www.javasoft.com

[51] **The Java™ Tutorial**, *Sun Microsystems, Inc.*
Un corso introduttivo sul linguaggio Java.
http://java.sun.com/docs/books/tutorial/

[52] **Il computer è un buon contabile, ma lo spirito di ricerca è altra cosa.**, *Lucio Russo, Telèma 14, autunno 1998.*
Uno stimolante articolo critico sul rapporto fra le tecnologie informatiche, la ricerca e l'insegnamento.
http://baldo.fub.it/telema/TELEMA14/Russo14.html

[53] **WinFiles.com!**, *CNET, the Computer Network.*
Una raccolta di software shareware oltre che di consigli e informazioni su Internet.
http://www.winfiles.com

[54] **Tucows**, *Tucows.com, Inc.*
Un'altra raccolta di software shareware.
http://www.tucows.com

MOMENTI DELLA STORIA DELLA GEOMETRIA

Enrico Giusti
Dipartimento di Matematica - Università di Firenze
(Appunti delle lezioni elaborati dai Proff. Ercole Castagnola e Nicoletta Nolli)

Introduzione

La storia della geometria fa luce sulla storia della matematica in generale, in quanto la geometria esauriva, in passato, gran parte della matematica. Ricordiamo che era considerata geometria anche lo studio di Archimede sul centro di gravità dei solidi.

Vogliamo qui tener conto del problema di come inserire un'analisi di tipo storico nell'insegnamento della matematica. Alla luce degli attuali programmi scolastici, la storia della matematica ha una posizione laterale. D'altra parte la struttura delle discipline scientifiche, in generale, e in particolare della matematica, lascia in ombra lo sviluppo storico. È inoltre una prassi consolidata quella di leggere nei documenti più antichi la matematica moderna. Tutti i risultati nuovi in matematica tendono a comprendere quelli precedenti (ad esempio negli spazi di Hilbert si parla di Teorema di Pitagora.) Questa operazione che i matematici fanno sistematicamente è un'operazione legittima, ma, assumendo tale punto di vista nella ricerca storica, tutta la storia della matematica viene appiattita sulla matematica moderna. La storia della matematica ha il compito inverso; cioè quello di dipanare i fili che la tradizione ha rimescolato cercando di rileggere i contributi dei matematici del passato inserendoli nel loro ambito. Ovviamente questo è tanto più difficile, quanto più ci si avvicina ai tempi moderni.

Il problema della fedeltà allo sviluppo storico è uno dei problemi fondamentali che deve affrontare un insegnante che voglia inserire temi storici nella propria didattica. Si tratta, cioè, di riprendere argomenti che si conoscono per dar loro spessore storico: ciò significa usare testi che riportino temi che interessano il lavoro in classe. Solitamente un insegnante che cerca un argomento di matematica, lo trova sviluppato in modo troppo esteso. Per quanto riguarda la storia si ha la situazione inversa, perché i testi di storia devono condensare in 400-500 pagine eventi che si sono svolti nel corso di millenni. È quindi difficile trovare trattazioni non episodiche, ma l'esigenza di approfondire temi storici particolari richiederebbe la consultazione di testi di ricerca.

Origine del pensiero geometrico occidentale

Il problema dell'origine della matematica è molto dibattuto e, probabilmente, insolubile. Alcuni storici fanno una netta distinzione tra la matematica preclassica (sviluppatasi in Egitto, Cina, Medio Oriente, ecc.) e la matematica classica (greca). Le fonti che si hanno a disposizione sulla matematica greca (anche molto antiche) collocano in Egitto il luogo di nascita della geometria (fanno riferimento, secondo quanto affermato da Erodoto, al viaggio di Talete in Egitto per imparare la geometria.) Infatti le persone che volevano approfondire i loro studi si recavano in Egitto per imparare la geometria, in Fenicia per l'aritmetica (utilizzata per i traffici commerciali) e in Caldea per l'astronomia.

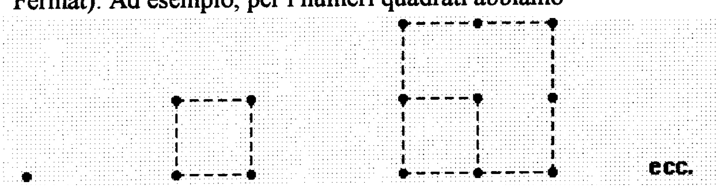
Nonostante la grande tradizione della matematica egizia, i documenti disponibili risultano poverissimi (solo alcuni papiri, tra cui il famosissimo papiro di Rhind, che, per la parte matematica, sembrano testi per il livello elementare.) mentre nella matematica babilonese si ha la situazione inversa (migliaia di tavolette.)

Il primo testo importante della matematica greca è costituito dagli *Elementi* di Euclide. Mentre gli altri matematici antichi, come Talete e Pitagora, si conoscono soltanto sulla base delle testimonianze.

Tutti concordano nell'attribuire a Pitagora e alla scuola pitagorica lo studio dei numeri. Come risulta dal seguente brano di Aristotele [*La metafisica*, libro I]:

> *I cosiddetti pitagorici, avendo cominciato ad occuparsi di ricerche matematiche ed essendo grandemente progrediti in esse, furono condotti da questi studi ad assumere come principi di tutte le cose esistenti quelli di cui fanno uso le scienze matematiche. E poiché i primi che qui si incontrano sono, per natura, i numeri, sembrò loro di ravvisare in questi molte più analogie con ciò che esiste e avviene nel mondo, di quante se ne possono trovare nel fuoco, nella terra e nell'acqua* [...]. *Avendo poi riconosciuto che le proprietà e le relazioni delle armonie musicali corrispondono a rapporti numerici, e che in altri fenomeni naturali si riscontrano analoghe corrispondenze coi numeri, furono tanto più indotti ad ammettere che i numeri siano gli elementi di tutte le cose esistenti e che tutto il cielo sia proporzione ed armonia.*

Alla scuola pitagorica si attribuisce anche lo studio dei cosiddetti numeri figurati di cui si farà largo studio (almeno fino ai tempi di Fermat). Ad esempio, per i numeri quadrati abbiamo

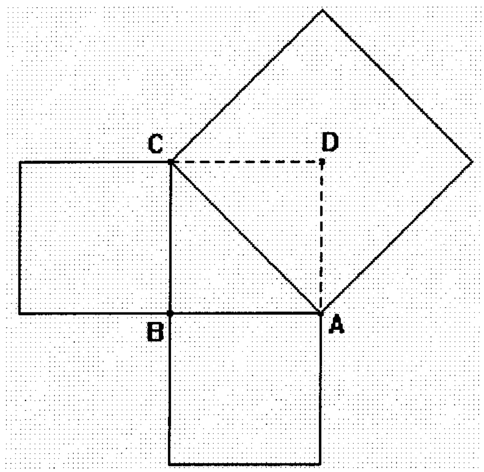


L'incommensurabilità e la crisi della geometria numerica

Alla scuola pitagorica è attribuita la prima crisi dei fondamenti, cioè la scoperta degli incommensurabili riportata anche negli *Elementi* di Euclide [si tenga presente che la versione oggi utilizzata è probabilmente quella dovuta a Teone.]

La scuola pitagorica non si poneva certo scopi divulgativi nei confronti della matematica, scienza riservata a pochi eletti. Al volgo dovevano essere comunicati solo alcuni semplici risultati. Si pensi al destino di chi divulga la prova dell'esistenza di grandezze incommensurabili. In altre parole, si scopre che i numeri non sono sufficienti per esprimere una proprietà di questo tipo. Aristotele cita la dimostrazione per assurdo dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato.

Dimostrazione (moderna). Per la dimostrazione utilizzeremo il teorema di Pitagora. Se applichiamo questo teorema al triangolo



rettangolo isoscele indicato in figura otteniamo che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa vale due volte l'area del quadrato costruito su un cateto. Poiché

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{e} \quad AB = BC,$$

otteniamo $AC^2 = 2AB^2$.

Qual è il valore del rapporto AC/AB? I pitagorici tentarono di trovare due numeri naturali proporzionali ad AC e ad AB. Indichiamo con p e q questi due numeri naturali che supponiamo primi fra loro. Allora

$$AC/AB = p/q,$$

dove, in particolare, p e q non sono entrambi pari. Poiché $AC^2 = 2AB^2$, si ha

$$AC^2/AB^2 = 2$$

e quindi

$$p^2/q^2=2,$$

ossia

$$p^2 = 2q^2.$$

Se ne deduce che p^2 è pari; ma allora anche p è pari. Quindi p è uguale a $2r$ (essendo r ancora un numero naturale). Dunque

$$4r^2 = 2q^2$$

da cui

$$2r^2 = q^2.$$

Da tutto questo segue che q^2 è pari e quindi q è pari. D'altra parte p e q non sono entrambi pari e noi abbiamo già dedotto che p è pari, quindi q deve essere dispari. Ma un numero non può essere contemporaneamente pari e dispari; la nostra ipotesi porta dunque a una contraddizione. Pertanto *non è possibile esprimere il rapporto tra la diagonale del quadrato e il lato come rapporto tra due numeri naturali*. In linguaggio geometrico questo equivale a dire che *la diagonale del quadrato e il lato sono tra loro incommensurabili*. □

Sorgono a questo punto i seguenti problemi:

1) Come si devono trattare le grandezze geometriche se non si possono rappresentare con dei numeri?
2) Come si valutano i rapporti delle grandezze tra loro? Cosa vuol dire che una grandezza ne misura un'altra?

Una prima risposta (che si trova anche in Aristotele) è che le grandezze geometriche sono sempre divisibili (in cui si può ravvisare un primo esempio di continuità), in contrapposizione con le grandezze aritmetiche.

D'altra parte la matematica greca è ricca di problemi di grande rilevanza filosofica in cui si assiste spesso a una successione di questo tipo: 1) scoperta di un'aporia, 2) soluzione dell'aporia, 3) accettazione della soluzione.

Un tipico esempio di aporie si ha con Zenone (citato in Aristotele nella *Fisica*) con i paradossi del movimento.

> *Zenone cade in un paralogismo, quando dice: se sempre ogni cosa è in quiete [o in moto], quando sia in un luogo uguale ad essa, e se l'oggetto spostato è sempre in un istante, la freccia, nell'atto in cui è spostata, è immobile. Questo è falso, perché il*

tempo non risulta composto da istanti indivisibili, e così neppure ogni altra grandezza.

Quattro sono i ragionamenti di Zenone intorno al movimento, i quali mettono di cattivo umore quelli che tentano di risolverli.

Il primo intende provare l'esistenza del movimento per il fatto che l'oggetto spostato deve giungere alla metà prima che al termine finale: ma questo ragionamento noi l'abbiamo demolito nei discorsi precedenti.

Il secondo è il cosiddetto "Achille": questo intende provare che il più lento, correndo, non sarà mai sorpassato dal più veloce: infatti, necessariamente, l'inseguitore dovrebbe giungere prima là donde il fuggitivo è balzato in avanti; sicché necessariamente il più lento conserva una certa precedenza. Questo ragionamento è appunto quello della dicotomia, ma ne differisce per il fatto che non divide in due anche la grandezza successivamente assunta. La conclusione di tale ragionamento è che il più lento non viene raggiunto; ma a questa conclusione si arriva mediante lo stesso procedimento fatto nella dicotomia (infatti la conclusione di entrambi i ragionamenti è che non si può giungere al limite, dal momento che la grandezza è divisa in un certo modo: ma nel secondo ragionamento si aggiunge il fatto che neppure l'eroe che è stato altamente celebrato come il più veloce, riesce a raggiungere nell'inseguimento la cosa più lenta); sicché necessariamente anche la soluzione sarà la medesima. Ma, in realtà, è falso ritenere che ciò che precede non venga raggiunto: infatti, sol fin quando precede, non viene raggiunto; ma tuttavia esso viene raggiunto, purché si ammetta che venga percorsa una distanza finita.

Questi sono, intanto, i primi due ragionamenti: il terzo è quello poc'anzi citato, che, cioè, la freccia, nell'atto in cui è spostata, sta ferma. Ma questa conclusione si ottiene solo se si considera il tempo come composto da istanti; se questo non si ammette, non ci sarà sillogismo.

Il quarto è quello delle masse uguali che si muovono nello stadio in senso contrario a quello di altre masse uguali, le une dalla fine dello stadio, le altre dal mezzo, con uguale velocità. E con questo ragionamento egli crede nel risultato che la metà del tempo sia uguale al doppio. Il paralogismo sta nel supporre che una uguale grandezza venga spostata con uguale velocità in un tempo uguale sia lungo ciò che è mosso, sia lungo ciò che è in *quiete. Ma questo è falso. Ad esempio: stian ferme le masse uguali AA; invece le masse BB, uguali alle prime per numero e per grandezza, comincino a muoversi dalla metà; e, ancora, le masse ΓΓ, uguali alle precedenti per numero e per grandezza, comincino a muoversi dalle estremità, e si muovano con la stessa velocità di B. Accade che il primo B e il primo Γ sono simultaneamente all'estremità, muovendosi l'uno accanto all'altro. Accade pure che Γ abbia compiuto il percorso lungo tutti i B nella loro interezza, mentre B avrà compiuto il percorso lungo la metà degli A: sicché anche il tempo è dimezzato, perché ciascuna sua parte è uguale in relazione a ciascuna massa. Simultaneamente, poi, accade che B avrà compiuto il percorso lungo i Γ nella loro interezza: infatti, il primo Γ e il primo B saranno simultaneamente nelle estremità contrarie [essendo il tempo impiegato lungo ciascuno dei B, uguale a quello impiegato lungo ciascuno degli A, come egli afferma,] per il fatto che entrambi si muovono in tempo uguale lungo gli A. Questo è il ragionamento, ma esso si fonda su quell'errore che abbiamo rilevato.*

Prima aporia: struttura atomica dello spazio e del tempo, quindi del movimento, in quanto rapporto tra spazio e tempo. La differenza tra spazio e tempo si inizia a cogliere con l'incommensurabilità, da cui si deduce che lo spazio ha più di una dimensione, mentre il tempo è monodimensionale. Quindi, se lo spazio è infinitamente divisibile e il tempo non lo è, sorgono delle contraddizioni [Achille impiega almeno un istante per percorrere qualsiasi spazio.] Aristotele risolve la questione affermando che il tempo e lo spazio sono infinitamente divisibili. Nasce a questo punto la separazione tra geometria e aritmetica.

OSSERVAZIONE. Oggi un segmento e una retta vengono sempre pensati come insiemi di punti. Nella matematica greca i punti sono presenti nel segmento e nella retta solo in potenza: è solo al momento della suddivisione che si passa dalla potenza all'atto.

Teorie delle proporzioni: Eudosso, Euclide, Archimede

Una volta riconosciuta l'esistenza dell'incommensurabilità, quali sono le strade che si possono seguire?

1) Classificazione degli incommensurabili (che si fa risalire a Eudosso di Cnido): quelli che lo sono semplicemente (in cui l'incommensurabilità si risolve con un elevamento a potenza); gli irrazionali quadratici ($a + \sqrt{b}$); ecc.

2) Ci si dimentica di quale può essere il risultato di un rapporto e si costruisce una teoria delle grandezze (es. Teeteto.)

La struttura generale degli *Elementi* di Euclide è la seguente:

I primi quattro libri riguardano la geometria senza grandezze:

I. Triangoli

II. Rettangoli

III. Circonferenze

IV. Poligoni

V e VI Teoria delle proporzioni (tipicamente eudossiana)

VII-VIII-IX Aritmetici

X Classificazione degli irrazionali quadratici

XI-XII Teoria eudossiana dei solidi

XIII Poliedri

Nel 500-600 gli *Elementi* di Euclide vengono adattati per l'insegnamento nelle scuole: vengono eliminati i libri aritmetici e la classificazione degli irrazionali.

La teoria delle proporzioni diventa l'unico linguaggio applicabile al di fuori della geometria. La teoria che ne deriva, come abbiamo visto, trova la sua formalizzazione nel V libro degli *Elementi*, in cui vengono posti i fondamenti della teoria, che sarà poi applicata alle grandezze geometriche nel VI per le figure piane nell'XI e XII per i solidi. Questa teoria delle proporzioni è solo una delle possibili. Esistono, infatti, solide ragioni che fanno pensare all'esistenza di almeno due altre formalizzazioni. La prima è basata sull'algoritmo euclideo di divisione. Tale algoritmo funziona per tutte le grandezze, ma, mentre per i numeri converge molto rapidamente, applicato alle altre grandezze non è detto che termini. Infatti, date due grandezze A e B, la procedura consiste nel sottrarre dalla grandezza maggiore (ad esempio A) il massimo multiplo possibile della minore (diciamo n_1B). Il resto $C = A - n_1B$ è minore di B e quindi si può ripetere il procedimento sottraendo da B il massimo multiplo possibile di C (diciamo n_2C). Il nuovo resto $D = B - n_2C$ è minore di C e si può ripetere il procedimento. Si presentano allora due casi: 1) il processo termina dopo un numero finito di passi con un resto nullo, le grandezze A e B sono commensurabili e l'ultimo resto non nullo è la loro comune misura (questo è il caso dei numeri per i quali l'algoritmo dà il massimo comun divisore); 2) il processo non ha mai fine, le grandezze sono incommensurabili e la sequenza dei quozienti n_1, n_2, ... è caratteristica del rapporto $A : B$, nel senso che se due coppie di grandezze A, B e C, D hanno la stessa sequenza di

quozienti, allora hanno lo stesso rapporto, cioè $A : B = C : D$. La complessità della verifica dell'uguaglianza delle sequenze di quozienti, che si manifesta immediatamente non appena si voglia applicarla a problemi geometrici non banali, è probabilmente la causa del suo abbandono a favore di teorie meno operative dal punto di vista della divisione, ma più duttili nelle applicazioni.
La più importante di queste teorie, che si trova negli *Elementi*, è quella dovuta a Eudosso.

Il cardine della teoria è il confronto tra il rapporto $A : B$ di due grandezze e quello $m : n$ fra due numeri. Si dirà che $A : B > m : n$ (qui facciamo un abuso di notazioni in quanto il segno > è molto posteriore) quando $n\,A > m\,B$. In questo modo il confronto tra due rapporti, cui uno numerico, è ricondotto a quello fra due grandezze, e si effettuerà con le modalità della classe di grandezze in esame. Se ora si vogliono confrontare due rapporti di grandezze arbitrarie $A : B$ e $C : D$, diremo $A : B > C : D$ se si può trovare un rapporto numerico $m : n$, con $A : B > m : n > C : D$. Questa è essenzialmente la definizione V.7 degli *Elementi*. Analogamente, se esiste un rapporto numerico $m : n$ tale che $A : B < m : n < C : D$, risulterà $A : B < C : D$.

Infine i due rapporti saranno uguali se né l'una né l'altra delle due precedenti eventualità si verifica. Questa è la definizione V.5 degli *Elementi*.

La definizione di proporzionalità è dunque una definizione "negativa"; per dimostrare che $A : B = C : D$ non si può far altro che escludere le possibilità opposte $A : B > C : D$ e $A : B < C : D$. Le dimostrazioni relative sono piuttosto complesse; ad esempio per escludere che sia $A : B > C : D$ si deve far vedere che non può esistere un rapporto numerico $m : n$ tale che $A : B > m : n > C : D$, ossia in modo equivalente che le disuguaglianze $nA > mB$ e $nC < mD$ sono contraddittorie.

La teoria eudossiana svela così una doppia complessità; da una parte la definizione dell'uguaglianza come non disuguaglianza inverte l'ordine naturale delle cose (un ordine solo formalmente ristabilito negli *Elementi*) e a patto di una ulteriore difficoltà di comprensione. Dall'altra essa introduce una notevole complessità dimostrativa, dato che si deve sempre operare con le quattro grandezze A, B, C e D e con i loro multipli.

Troviamo così una terza teoria delle proporzioni, evidente soprattutto nell'opera di Archimede, che per dimostrare che $A : B = C : D$ assume una nuova grandezza E tale che $A : B = C : E$ e fa vedere che

$E = D$. Anche quest'ultimo passaggio si compie per assurdo, escludendo le possibilità $E > D$ ed $E < D$, ma si tratta del confronto fra due sole grandezze e non tra quattro come nella teoria eudossiana.

In ogni caso la dimostrazione della proporzionalità tra quattro grandezze (ma anche quella dell'uguaglianza tra due grandezze) è ricondotta al confronto tra le grandezze medesime, un confronto che si effettua con modalità peculiari a ciascuna classe di grandezze. Così, ad esempio, i segmenti si confrontano per inclusione e i pesi per mezzo di una bilancia.

Per le figure piane e solide il confronto è più delicato. In primo luogo due figure sono equivalenti quando sono equiscomponibili; di qui l'equivalenza di due parallelogrammi con base e altezza uguali. In secondo luogo si ha $A < B$ se A è contenuta in B o può essere contenuta in B con un movimento rigido.

D'altra parte, nessuna di queste due definizioni è sufficiente di per sé a stabilire in generale il confronto tra due figure geometriche. Si può però usare una combinazione delle due: risulta $A < B$ quando A può essere scomposto in un numero finito di parti, che ricomposte diano una figura contenuta in B.

In questo modo l'uguaglianza $A = B$ assume un carattere negativo; per dimostrarla (eccezion fatta per i casi di equiscomponibilità) non si potrà far altro che escludere i casi $A > B$ e $A < B$. In questo consiste il metodo di esaustione.

Il primo teorema della quadratura del cerchio di Archimede stabilisce che un cerchio è uguale a un triangolo che ha come base la circonferenza e come altezza il raggio. La dimostrazione viene fatta utilizzando poligoni regolari iscritti e circoscritti per i quali l'equivalenza con i triangoli relativi è provata scomponendoli in triangoli uguali. Un procedimento per esaustione conclude poi la dimostrazione.

La proposizione precedente, relativa all'uguaglianza di due figure, non mette in evidenza le differenze tra le due teorie delle proporzioni sopra delineate. Questa è invece più esplicita nella dimostrazione della proposizione XII.2: "I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri".
Qui abbiamo due cerchi C e D con diametri c e d e si tratta di dimostrare che $C : D = Q(c) : Q(d)$, dove si è indicato con $Q(c)$ il quadrato costruito sul diametro c.

Un uso diretto della teoria del V Libro vorrebbe che si escludessero le possibilità $C : D > Q(c) : Q(d)$ e $C : D < Q(c) : Q(d)$. Ad esempio, per la prima, occorre far vedere che non esistono due interi m ed n tali che $nC > mD$, mentre $nQ(c) < mQ(d)$. Euclide invece procede diversamente: presa un'area E tale che $C : D = Q(c) : E$, fa vedere che dev'essere $E = Q(d)$ escludendo le possibilità $E > Q(d)$ ed $E < Q(d)$.

Le origini della matematica moderna

Nel 1500, con una specie di cortocircuito, la matematica greca si rincolla alla matematica moderna. In altre parole, i matematici contemporanei degli scienziati del '500 sono i matematici greci. L'avvenimento fondamentale che spiega tale fenomeno è l'invenzione della stampa (in particolare vale la pena di ricordare che a Venezia si stampano circa la metà dei libri pubblicati nell'intera Europa.) Nel 1482 si ha la prima stampa degli *Elementi* di Euclide, che vengono poi ristampati a più riprese, e poi via via tutti gli altri autori (in generale, in latino.) Nel 1543 Tartaglia pubblica la prima versione in lingua volgare degli *Elementi*. Si comprende come l'invenzione della stampa produca una vera rivoluzione qualitativa, che si traduce immediatamente in una rivoluzione quantitativa. Per rendersi conto di questo fatto basta considerare il fatto che attualmente si conoscono circa 200 manoscritti antichi, il che fa presumere, tenendo conto di quelli dispersi, un'esistenza nel Medio Evo di circa 400 manoscritti. Nel '500 vengono stampate 70 edizioni degli *Elementi* di Euclide, che si traducono (supponendo una media di circa 300 copie per ogni edizione) in un totale di circa 20000 libri. Quindi, per la prima volta nel mondo, si assiste al fenomeno di una comunità di studiosi che parla lo stesso linguaggio. Da questa comunità nasce la matematica moderna e la rivoluzione scientifica trova il suo terreno in questa comunità di studiosi. Euclide diventa la vera conoscenza di base di tutti gli scienziati. Alle opere di Euclide fanno seguito quelli di altri matematici, in particolare Archimede. Ogni autore che non arriva alla stampa è destinato a scomparire. Alla fine del '600 si assiste a una seconda importante rivoluzione, cioè alla nascita delle prime riviste scientifiche.

Nel '500 dunque si riparte dai classici; in particolare si applica la matematica alle scienze naturali. Ricordiamo che nel passato chi si occupava di matematica studiava altri settori (ad esempio, Euclide scrive di ottica, Archimede ha una serie di opere dedicate alla fisica, in particolare ai centri di gravità, ecc...).Nel '500 riprende lo studio matematico del movimento anche in vista di una trattazione quantitativa di nuovi problemi tecnici (moto dei proiettili, quindi artiglieria e problemi connessi). In particolare l'artigliere richiede una trattazione di come si muovono i proiettili.

Vale la pena di citare, visti i suoi legami con le simmetrie, l'opera di Francesco Maurolico (1494-1575), uno dei più importanti matematici del '500, anche se non molto conosciuto, di cui ci restano una ventina di volumi e uno di questi è dedicato ai centri di gravità. La trattazione è di stile archimedeo (anche se Maurolico non conosceva Archimede, in quanto scrive prima della pubblicazione delle opere di Archimede). Tra i postulati di Maurolico (che non usa postulati relativi all'equilibrio dei corpi come invece fa Archimede) vi è quello che afferma che tutte le figure hanno sempre uno e un solo centro di gravità e che se due figure sono congruenti anche i centri di gravità sono congruenti (cioè se due figure congruenti vengono fatte coincidere, allora coincidono anche i loro centri di gravità). Da questo si deduce, in generale, che le simmetrie conservano i centri di gravità, quindi i centri di gravità coincidono con i centri di simmetria.

Teorie del moto prima di Galileo

Nel '500 si presenta dunque in tutta la sua importanza il problema del moto, che però, fino a quel momento, non era un problema delle scienze matematiche, ma un problema filosofico ed è pertanto affrontato in tutti i trattati di filosofia a partire da Aristotele. Aristotele ne parla nella *Fisica* e lo affronta non solo come movimento da un posto ad un altro, ma più in generale come cambiamento. Il tema del cambiamento è centrale nella filosofia classica ed è un tema con il quale tutti i filosofi dopo Parmenide si devono confrontare. Parmenide sosteneva che l'essere è unico ed immutabile e quindi come può divenire? Per questo problema cruciale Aristotele (nella *Fisica*) propone la seguente soluzione: l'essere non è univoco, ma si deve distinguere tra essere in atto e essere in potenza. Il passaggio dall'essere in potenza e l'essere in atto è ciò che caratterizza il moto.

> *Poiché, a proposito di ciascun genere, ciò che è in atto è stato distinto da ciò che è in potenza, l'atto di ciò che è in potenza, in quanto tale, è il movimento; ad esempio: dell'alterato, in quanto alterato, è l'alterazione; dell'accrescibile e del suo opposto, cioè del diminuibile (non c'è, infatti, nessun nome che sia comune ad entrambi questi termini), il movimento consiste nell'accrescimento e nella diminuzione; del generabile e del corruttibile il movimento è la generazione e la corruzione; dello spostabile lo spostamento.*

Tra questi movimenti Aristotele distingue inoltre un moto locale, in cui un corpo muta di posizione. In Aristotele sono presenti poche indicazioni di carattere quantitativo, sia nella *Fisica* che nelle opere di carattere metafisico come il *De caelo*. Il movimento è strutturato nel modo seguente: ogni corpo ha un suo luogo naturale ed il movimento naturale è quello che gli consente di raggiungere il proprio luogo naturale (così il movimento naturale della terra è rettilineo verso il basso, mentre quello del fuoco è rettilineo verso l'alto). Il tipo di movimento è una caratteristica propria di ogni elemento. Sulla terra che è il luogo del cambiamento e della corruzione, il movimento dev'essere rettilineo. Nei cieli, in cui si hanno i movimenti eterni, il moto deve essere circolare. Inoltre (come risulta dal *De caelo*), per quanto riguarda i movimenti rettilinei c'è una relazione tra la gravità insita in ogni corpo e la velocità: un corpo si muove tanto più velocemente tanto più è pesante.

> *Ma che sia impossibile che esista un peso infinito, risulta evidente da quanto segue. Se un dato peso percorre un dato spazio in un dato tempo, un peso uguale al primo più qualcosa lo farà in un tempo minore, e la proporzione che c'è tra i pesi si ripeterà, nel rapporto inverso, per i tempi; ad esempio, se metà del peso si muove in un dato tempo, un peso doppio del primo si muoverà nella metà di quel tempo.*

Quindi il tempo è inversamente proporzionale al peso del corpo. Ma non è soltanto il peso che ha a che fare col movimento, in quanto esso dipende anche dal mezzo in cui il corpo si muove: se un corpo si muove nell'aria (mezzo sottile e leggero) con una certa velocità, lo stesso corpo nell'acqua si muoverà con una velocità minore.

> *Sia, dunque, il corpo A spostato attraverso la grandezza B in un tempo Γ e attraverso la grandezza Δ, che è più sottile, in un tempo E: se la lunghezza di B e quella di Δ sono uguali, il tempo sarà proporzionato alla resistenza del corpo che fa da attrito. Siano, infatti, B acqua e Δ aria: di quanto l'aria è più leggera e più incorporea dell'acqua, di tanto A passerà più velocemente attraverso Δ che attraverso B.*

Se si vuole esprimere questa relazione in modo moderno mediante una formula, si potrà scrivere

$$v \sim \frac{peso}{densità}.$$

Questa è una formula moderna, in quanto nella matematica classica non si può fare il rapporto tra grandezze non omogenee. Aristotele si serve di questa relazione per dedurre alcune conseguenze importanti; ad esempio l'impossibilità del vuoto. Infatti se il vuoto esistesse, avendo densità zero, il corpo si muoverebbe in tale mezzo con velocità infinita, cioè un corpo si potrebbe trovare nello stesso istante in più luoghi.

Questa è, grosso modo, la situazione nel '500 quando viene ripreso il problema del moto, tenendo presenti anche altri problemi che Aristotele aveva considerato solo marginalmente. Infatti non esistono solo i moti naturali (altrimenti dopo un certo tempo non si muoverebbe più nulla), ma anche i cosiddetti moti violenti. In effetti i corpi si possono estrudere dai luoghi naturali in modo violento e l'agente può essere anche l'uomo. Questo pone subito un problema: chi muove i proiettili? Se un uomo lancia un sasso, una volta staccatosi dalla mano il sasso dovrebbe precipitare verticalmente. Una delle debolezze della teoria aristotelica è proprio la spiegazione del moto dei proiettili: il corpo lanciato muove l'aria che gli sta davanti e quindi lascia uno spazio vuoto che l'aria si affretta a colmare e spinge in tal modo il sasso in avanti. La spiegazione è molto debole in quanto la presenza del mezzo impedisce il moto invece che favorirlo. Nel Medio Evo si cominciano ad elaborare altre teorie, tra cui quella dell'impeto, secondo la quale la mano imprime al corpo un certo impeto che, a differenza della gravità insita nel corpo, non agisce in modo costante ma si consuma. Pertanto il sasso segue un moto rettilineo quando l'impeto è forte e cade poi verso il basso quando l'impeto si è consumato. Questa è la situazione quando Tartaglia pubblica "*La nuova scienza*" (1532), nella quale descrive il moto dei proiettili utilizzando una teoria non matematica, ma aderente alla realtà. Tartaglia assume a priori alcuni dati dell'esperienza su cui baserà la sua trattazione e ipotizza che la traiettoria sia composta da una prima parte rettilinea nella direzione del tiro, seguita da una parte circolare e da una seconda parte rettilinea verticale; una traiettoria vicina a quella effettivamente osservata nei tiri di artiglieria. Il motivo risiede nel fatto che all'epoca non esistevano strumenti matematici in grado di spiegare una situazione così complessa, cioè quella del moto di un corpo non soggetto solo alla velocità iniziale e all'azione della gravità, ma anche a quello della resistenza dell'aria che agisce in modo proporzionale al quadrato della velocità. Visto in termini moderni, si tratta di un'equazione differenziale che non è nemmeno integrabile in forma finita, ma bisogna trattare in maniera numerica. [Ricordiamo che la prima trattazione matematica del moto dei corpi si ha nei "*Principia mathematica*" di Newton.]

Si tratta dunque di un problema di modellistica: occorre decidere tra queste due forze che agiscono sul corpo quale considerare essenziale e quale trascurabile. Se si considera essenziale la forza di gravità, si avrà la teoria galileiana. Se si considera invece trascurabile la gravità ed essenziale la resistenza dell'aria si otterrà un moto asintotico. Si deve, pertanto, fare una scelta che non può essere dettata da motivi matematici, ma da motivi filosofici.

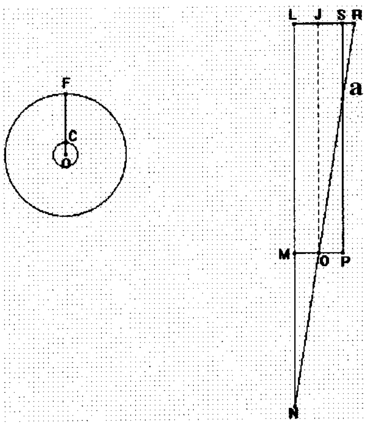
Lo strumento matematico disponibile è quello già visto, cioè la teoria delle proporzioni, che permette di trattare grandezze di qualsiasi tipo. Per quanto riguarda la velocità esiste un problema matematico a priori, che è quello di definire la velocità stessa (che Aristotele aveva lasciato in ombra.) Da un punto di vista moderno, ad esempio in un moto uniforme, la velocità è data dal rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Ma questo è in disaccordo con la matematica classica che non consente di fare il rapporto tra grandezze disomogenee. Occorre prendere in esame due moti diversi, per i quali si può scrivere (sempre in termini moderni)

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} \otimes \frac{t_2}{t_1},$$

in cui la "moltiplicazione" va intesa come la composizione dei due moti. Ne risulta una struttura nettamente più complessa che richiede, per poterla rappresentare matematicamente, di sapere a priori cos'è la velocità. E questo vale sempre quando si usa la teoria delle proporzioni: non esistono grandezze derivate, ma solo grandezze primitive. Cioè, ogni nuova grandezza deve essere definita a parte. Questo spiega perché non si trova alcuna definizione esplicita di velocità prima della metà del '600. Ad esempio nella *Mechanica* del Wallis (1669) e nella *Neo-statica* di G. Saccheri (1708) nessuno dei due autori specifica di quale moto si tratta. L'idea centrale è che ogni moto ha una sua velocità, che in qualche modo ha a che fare con lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Dati due moti, uno è più veloce dell'altro se, nello stesso tempo, nel primo si percorre uno spazio maggiore che nel secondo. Qual è dunque la velocità in un moto di rotazione? Ad esempio nel caso di un cerchio che gira su un asse perpendicolare al moto (si pensi al piatto di un giradischi), cioè di un corpo che globalmente sta fermo, ma si muove una delle sue parti. Questo era un problema di una certa importanza che era già stato affrontato nel Medio Evo. La prima opera di cinematica in cui si trova un simile problema è il *Liber de motu* di Gherardo da Bruxelles dell'inizio del XIII secolo: qual è la velocità di un segmento che ruota intorno a un estremo? Non potendo dare una risposta numerica, dovrà darla in comparazione a un'altra velocità; in genere si dice che questo corpo si muove con la stessa velocità di un altro che si muove di moto rettilineo uniforme. La prima proposizione di Gherardo da Bruxelles considera il moto di un segmento CF che ruota attorno a un punto O (che può coincidere con un suo estremo C) descrivendo la corona circolare di raggi OC e OF. Per stabilire la sua velocità, Gherardo confronta il suo moto con quello di un secondo segmento uguale, che si sposta di moto rettilineo uniforme. Dalla prima proposizione del *De quadratura circuli* di Archimede, il cerchio di raggio OF è equivalente al triangolo che ha base $LR = OF$ e altezza LN uguale alla circonferenza di raggio OF; queste permette a Gherardo di affermare che il cerchio si muove come un triangolo che ruota attorno a un asse. Presa ora $LS = CF$, SQ sarà uguale alla circonferenza di raggio OC, e la corona circolare al trapezio $LSQN$. Quest'ultimo poi sarà uguale al rettangolo $LSPM$, il cui lato MP divide a metà NQ.



Utilizzando alcuni postulati (e una dimostrazione per assurdo) Gherardo arriva a concludere che il segmento CF si muove come il segmento SL e, dato che tutti i punti di SL si muovono ugualmente, in particolare come il suo punto di mezzo *J*, che percorrerà la linea *JO*. Quest'ultima è uguale alla circonferenza percorsa dal punto medio di *CF* e dunque questo punto si muoverà come *J*, e dunque come *SL*, ossia come *CF*. In conclusione la velocità del segmento è quella del punto di mezzo.

La teoria galileiana del moto dei gravi

Questa è la situazione quando interviene Galileo. Come sappiamo la trattazione del moto dei gravi e del moto dei proiettili occupa il III e il IV libro dei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche*" pubblicato a Leida nel 1638. In realtà Galileo ha cominciato a pensare alle questioni del moto già nella sua giovinezza (i primi trattati giovanili si hanno attorno al 1590) e si pone il problema della seconda delle posizioni che abbiamo esaminato, cioè pensa che l'accelerazione sia una caratteristica accidentale e poi il moto diventerà uniforme. La teoria è piuttosto povera da un punto di vista matematico, mentre più interessante è la motivazione. Galileo riprende la teoria dei proiettili: se un corpo viene lanciato verso l'alto gli si imprime un certo impeto che è contrastato dalla gravità; all'inizio l'impeto è più forte della gravità, quindi il corpo comincia a muoversi verso l'alto, però l'impeto via via va diminuendo, cioè viene consumato dalla gravità. Quindi un moto che va verso l'alto continua a decelerare fino a quando la gravità compensa l'impeto, il corpo si ferma e comincia di nuovo ad accelerare fino ad aver consumato completamente l'impeto e da quel momento in poi comincia il vero moto naturale. Cosa succede quando un corpo viene lasciato cadere? Anche in questo caso, per tenerlo sospeso senza farlo cadere bisogna fornirgli un impeto che controbilanci la gravità. Quando il corpo viene lasciato cadere è come se si fosse messo il corpo nel punto più alto della sua traiettoria verticale (del caso precedente). C'è dunque questa accelerazione iniziale prima che il corpo cada naturalmente. Galileo in seguito si convince che le cose vanno diversamente: diventa essenziale l'accelerazione e occorre tener presente la resistenza dell'aria. Nel vuoto le cose andrebbero diversamente; il vuoto è l'unico posto in cui il corpo si muove naturalmente. L'idea di Galileo è che il mezzo interviene soltanto mediante la spinta archimedea. Cioè un corpo immerso in un mezzo pesa meno di quanto dovrebbe pesare. A questo punto entra in gioco una terza velocità, cioè la velocità istantanea che dev'essere descritta e trattata matematicamente. Il problema della velocità istantanea è il seguente: non producendo nessun effetto misurabile (essendo il tempo un istante e lo spazio uguale a zero) non si sa come valutarla. Galileo ha l'idea di correlarla ad altri fenomeni che avvengono in un istante, ad esempio l'urto contro una materia cedente; gli effetti di quest'urto, cioè le deformazioni subite dall'ostacolo, saranno indice e misura della velocità al momento dell'urto. Citiamo, a tale proposito, il seguente passo dei *Discorsi*:

Posate un grave sopra una materia cedente, lasciandovelo finché prema quanto egli può con la sua semplice gravità: è manifesto che, alzandolo un braccio o due, lasciandolo poi cadere sopra la medesima materia, farà con la percossa nuova pressione, e maggiore che la fatta prima co'l solo peso; e l'effetto sarà cagionato dal mobile cadente congiunto con la velocità guadagnata nella caduta, il quale effetto sarà più e più grande, secondo che da maggiore altezza verrà la percossa, cioè secondo che la velocità del percuziente sarà maggiore. Quanta dunque sia la velocità d'un grave cadente, lo potremo noi senza errore conietturare dalla qualità e quantità della percossa.

Galileo crede, pertanto, che la velocità sia proporzionale all'altezza (in realtà è proporzionale al quadrato della velocità attraverso l'energia cinetica), in quanto l'effetto dell'urto è proporzionale alla velocità ed è proporzionale anche all'altezza. Questa velocità è quella efficace al momento dell'urto e non la velocità "globale" del moto. Per indicare tale velocità efficace Galileo usa il termine "momento della velocità". [Ricordiamo che solo nel '700 il fisico padovano Poleni (1685-1761) dimostrerà che l'effetto dell'urto è proporzionale all'altezza.]

Questa ipotesi iniziale di Galileo (velocità istantanea proporzionale all'altezza di caduta) è conseguenza di un meccanismo tipico della teoria delle proporzioni: la trasformazione di una dipendenza monotòna in una dipendenza lineare. In altre parole, se l'effetto della percossa cresce col crescere dell'altezza da cui il corpo cade, la supposizione più semplice, e dunque la prima, è che le due grandezze siano proporzionali. Questa ipotesi spinge Galileo a supporre

Che il grave cadente vada continuamente accrescendo la sua velocità secondo che accresce la distanza dal termine da cui si partì,

in altre parole che la velocità sia proporzionale allo spazio percorso a partire dalla quiete.

Tuttavia è chiaro che le due assunzioni da cui deriva l'ipotesi precedente, e cioè la proporzionalità tra velocità e percossa e quella tra percossa e altezza, provengono da due meccanismi diversi. La prima dipende dalla definizione stessa di velocità istantanea, la seconda è per così dire un'ipotesi dettata dalla semplicità. Una tale diversità di livello diviene evidente nel momento in cui Galileo, avendo verificato che la velocità di un grave cadente è proporzionale non allo spazio percorso ma al tempo impiegato, e dovendo di conseguenza abbandonare l'una o l'altra delle due ipotesi, non esita a sbarazzarsi di quella (giusta) della proporzionalità tra percossa e altezza di caduta, pur di mantenere quella tra percossa e velocità, errata quanto si vuole, ma necessaria per ancorare gli altrimenti evanescenti momenti della velocità alle altre grandezze macroscopiche, permettendone così una trattazione matematica.

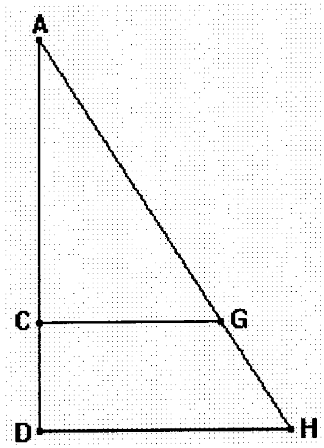
Anche in questa operazione la teoria delle proporzioni non mancherà di far sentire le sue ragioni, o piuttosto la sua forza. Infatti dove altri, operando in un universo algebrizzato, moltiplicheranno ogni velocità per un tempuscolo inassegnabile ($ds = v{\cdot}dt$), per ricavarne infine, sommando tutti gli spazietti così ottenuti, lo spazio percorso in un tempo dato $\left(\int v\,dt\right)$, Galileo sarà costretto a percorrere strade diverse e più tortuose, che si riveleranno alla fine dei vicoli ciechi.

Nella teoria delle proporzioni, infatti, non è possibile moltiplicare velocità e tempi: sono i rapporti, non le grandezze, meno che mai grandezze eterogenee, che si moltiplicano tra loro. Ne consegue che Galileo sommerà non gli spazi infinitesimi percorsi dal mobile nei singoli istanti, bensì le velocità istantanee, i momenti delle velocità ora divenuti "gradi di velocità", componenti elementari della velocità complessiva.

Pertanto il cammino che conduce Galileo alla ben nota legge oraria del moto risulterà piuttosto tortuoso. Come già sappiamo e come testimonia la lettera che Galileo indirizza a Paolo Sarpi il 16 ottobre 1604, Galileo assume che la velocità istantanea nel moto di caduta sia proporzionale allo spazio percorso dalla quiete: $v = ks$ e afferma

> *perché la velocità con la quale il mobile è venuto da A in D è composta di tutti i gradi di velocità auti in tutti i punti della linea AD, e la velocità con che ha passata la linea AC è composta di tutti i gradi di velocità che ha auti in tutti i punti della linea AC, adunque la velocità con che ha passata la linea AD alla velocità con che ha passata la linea AC, ha quella proporzione che hanno*

tutte le linee parallele tirate da tutti i punti della linea AD sino alla AH, a tutte le parallele tirate da tutti i punti della linea AC sino alla AG; e questa proporzione è quella che ha il triangolo ADH al triangolo ACG, ciò è il quadrato AD al quadrato AC. Adunque la velocità con che si è passata la linea AD, alla velocità con che si è passata la linea AC, ha doppia proporzione di quella che ha DA a CA.



Allora, per il teorema di Talete, i triangoli ACG e ADH sono simili e i segmenti orizzontali possono rappresentare le velocità essendo proporzionali alle altezze. Questa struttura triangolare è una struttura classica che si trova in Galileo. L'idea è, grosso modo, che la velocità sia la "somma" delle velocità istantanee. In altre parole la velocità in AC si ottiene componendo tutti i gradi di velocità avuti in tutti i punti della linea AC. In modo simbolico risulta

$$\frac{v_{AD}}{v_{AC}} = \frac{AD^2}{AC^2}.$$

Come si trova ora il rapporto tra spazio e tempo? A questo punto Galileo compie una vera piroetta dimostrativa:

E perché la velocità ha contraria proporzione di quella che il tempo al tempo (imperò che il medesimo è crescere la velocità che scemare il tempo), adunque il tempo del moto di AD al tempo del moto in AC ha subduplicata proporzione di quella che ha la distanza AD alla distanza AC. Le distanze dunque dal principio del moto sono come i quadrati dei tempi.

Simbolicamente

$$\frac{t_{AC}}{t_{AD}} = \sqrt{\frac{AC^2}{AD^2}},$$

da cui si deduce che

$$\frac{v_{AD}}{v_{AC}} = \frac{t_{AD}^2}{t_{AC}^2}.$$

Inoltre, siccome gli spazi sono proporzionali alle velocità, risulta

$$\frac{s_{AD}}{s_{AC}} = \frac{t_{AD}^2}{t_{AC}^2}.$$

In effetti, per arrivare a questa conclusione, Galileo utilizza una relazione valida per moti uniformi. Questo è il limite di questa struttura. In termini moderni si può giungere a questo risultato utilizzando il calcolo infinitesimale. In sostanza, la teoria delle proporzioni rappresenta una vera e propria gabbia interpretativa da cui Galileo non riuscirà mai ad evadere. Per scardinarla Galileo dovrà abbandonare la teoria delle proporzioni e, nei *Discorsi*, farà una "regressione" ai metodi medievali utilizzando un tipo di ragionamento, condotto più attraverso la persuasione che per mezzo di una dimostrazione, già presente in Nicola Oresme (ca. 1323-1382).

In definitiva la matematica classica si rivela insufficiente per affrontare e risolvere in modo soddisfacente i problemi del moto accelerato. La soluzione verrà solo cinquant'anni più tardi, con l'invenzione del calcolo infinitesimale, una teoria che ha i suoi prerequisiti e la sua origine non nei metodi classici di esaustione, come è stato più volte affermato, ma nella geometria algebrica cartesiana.

Geometria e algebra nel cinquecento

All'inizio del '500, mentre Euclide era ampiamente studiato anche grazie alle diverse traduzioni dall'arabo, Archimede era praticamente sconosciuto, tranne per alcuni temi, come la quadratura del cerchio e alcuni problemi dell'equilibrio. Anche Apollonio era quasi sconosciuto (tranne per gli specchi ustorii). Il '500 non è soltanto il ritorno della matematica classica, vi è un'altra parte della matematica che all'inizio non ha niente a che fare con la matematica precedente e che trova una grande diffusione: l'algebra. Mentre i classici greci giungono in Europa attraverso la Spagna grazie alle traduzioni dei matematici arabi, l'algebra, che pure ha il suo inizio tra gli arabi, giunge in Italia per via marittima. È noto, infatti, che Leonardo Pisano (ca. 1170-1250) (figlio di un mercante, che segue il padre nei suoi viaggi vicino ad Algeri) è il primo che scrive una summa delle conoscenze dell'epoca, il *Liber Abaci* che viene pubblicato per la prima volta nel 1202, che poi rivedrà vent'anni più tardi assieme a un testo di geometria, sempre di stile abachistico, cioè una teoria in cui i termini numerici hanno la parte preponderante. Quale algebra viene appresa dal modo arabo? Quella delle equazioni di secondo grado.

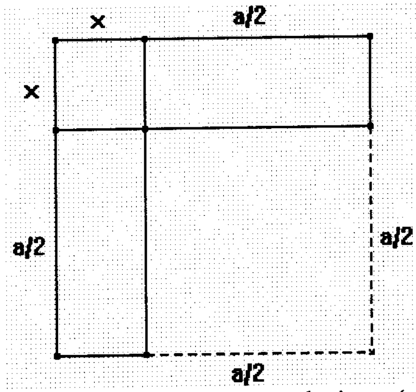
All'inizio del '500 si assiste a un primo progresso europeo ed è la soluzione algebrica delle equazioni di terzo grado da parte di Scipione Del Ferro (ca. 1465-1526), di cui si conosce poco più del nome [si sa che insegnava all'Università di Bologna]. È infatti del tutto sconosciuto il metodo con cui Del Ferro riesce a risolvere l'equazione di terzo grado. Scipione aveva comunicato la soluzione a un suo parente, Antonio Maria del Fiore, il quale la divulga tramite le cosiddette disfide matematiche. Proprio a causa di una di queste disfide, Nicolò Tartaglia (ca. 1500-1557) si accorge di questo fatto e pensa che qualcuno deve aver risolto le equazioni di terzo grado e quindi inizia a studiare il problema e trova a sua volta la soluzione. È noto che Tartaglia comunica la soluzione a Cardano, con la promessa di non divulgarla e che Cardano pubblica invece tale soluzione nel 1545 nell'*Ars Magna*.

Lo sviluppo dell'algebra ha uno sbocco inatteso. Quando un certo numero di matematici del '500 intraprende lo studio dei classici, si assiste a una netta divisione tra geometri e abachisti (in generale con scarsi rapporti reciproci.) I geometri si rivolgevano direttamente alla matematica classica, di cui si ritenevano gli unici eredi e consideravano con una certa sufficienza gli abachisti (eredi di una tradizione medievale di aritmetica pratica), di algebra applicata alla pratica. L'algebra è dunque considerata come l'arte della manipolazione, molto spesso priva di giustificazione. Alla fine del '400 si scopre un autore che sconvolge questo modo di pensare: Diofanto. Regiomontano (1436-1476) scopre questo autore greco che praticava metodi algebrici. Quindi anche l'algebra ha i suoi "quarti di nobiltà". In qualche modo l'algebra diventa una materia di pari dignità della geometria. E inizia in questo modo una convergenza tra metodi algebrici e metodi geometrici, che avrà i suoi esiti più importanti nel secolo successivo. [Tale convergenza era presente già in alcuni autori arabi come Al-Kowaritzmi]. Da un punto di vista algebrico, ciò che si conosce alla fine del ‘400 è la risoluzione dell’equazione di secondo grado, tenendo presente che non è la formula risolutiva quale l’intendiamo oggi che si conosce, bensì l’algoritmo risolutivo, quasi sempre interpretato in modo geometrico.

Consideriamo, ad esempio, l’equazione

$$x^2 + ax = b\,.$$

La soluzione di tale equazione si deduce immediatamente dalla seguente figura:



Dalla quale si ricava anche la seguente relazione (scritta in termini moderni) che corrisponde sostanzialmente all’attuale formula risolutiva.

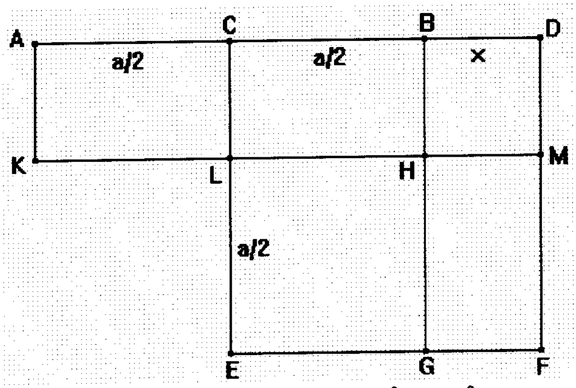
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = b+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Questa relazione è già presente in Al-Kowaritzmi.

Per quanto riguarda le dimostrazioni, queste non potevano essere che geometriche, dato che in algebra non si dimostra, ma si fanno solo delle manipolazioni. Quindi la geometria entra nell’algebra come strumento dimostrativo.

Già in Euclide sono presenti delle costruzioni geometriche, che corrispondono alla risoluzione di equazioni algebriche come mostra la seguente Proposizione II.6 degli *Elementi*.

Se una retta è divisa in due parti uguali, e le si aggiunge di seguito un’altra retta, il rettangolo formato dalla retta intera più l’aggiunta e dalla retta aggiunta, più il quadrato sulla metà, è uguale al quadrato sulla retta composta dalla metà e dall’aggiunta.



$$AK \times AD + BC^2 = CD^2$$

$$(a+x)x+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2$$

Se risulta

$$x^2 + ax = b$$

si ha

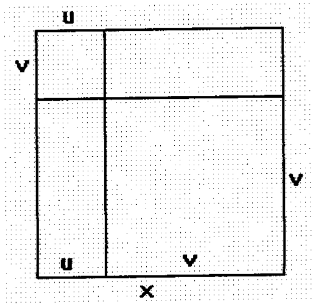
$$b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2$$

e dunque

$$x=\sqrt{b+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

Occorre, inoltre, tener presente che nel Medio Evo non si usavano i numeri negativi e questo spiega la presenza di diverse forme dell'equazione di secondo grado. Ad esempio, l'equazione $x^2 = ax + b$ viene risolta geometricamente nella Proposizione II.7 degli *Elementi*

Se una retta è divisa in due parti, il quadrato della retta insieme a quello di una delle parti è uguale al doppio del rettangolo formato dalla retta e dalla parte, più il quadrato dell'altra parte



Se si riscrive l'equazione nella forma $x^2 = 2ux + v^2 - u^2$, si deduce facilmente dal confronto delle due forme che risulta

$$u = \frac{a}{2} \qquad \text{e} \qquad v^2 - u^2 = b$$

da cui segue che

$$v = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

Si ha allora

$$x = u + v = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} .$$

Nel '500 si fa allora la congettura che un procedimento analogo possa portare alla risoluzione dell'equazione di terzo grado $x^3 = 3ax + b$. Si supponga di poter scrivere x come somma di due termini: $x = u + v$. Se si riscrive l'equazione precedente nella forma $x^3 = 3uvx + u^3 + v^3$, segue dal confronto tra le due forme che

$$\begin{cases} uv = a \\ u^3 + v^3 = b \end{cases}$$

o, equivalentemente

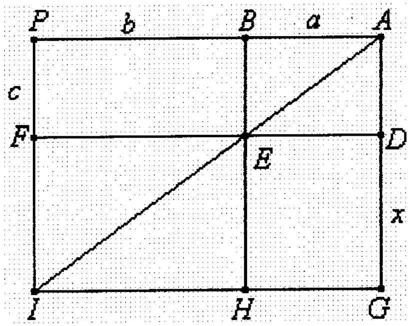
$$\begin{cases} u^3 v^3 = a^3 \\ u^3 + v^3 = b \end{cases}.$$

Si tratta dunque di risolvere un sistema di secondo grado (nelle variabili u^3 e v^3), per il quale possono presentarsi diverse possibili soluzioni.

Algebra e Geometria in Bombelli

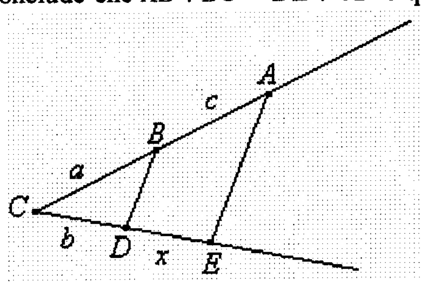
Bombelli (1530-1573) scrive la sua *Algebra* attorno al 1550, ma la sua opera non viene pubblicata fino al 1572. Il quarto libro dell'*Algebra* riguarda le costruzioni geometriche; in particolare, il terzo capitolo (su cui fisseremo la nostra attenzione) è interamente dedicato alla soluzione di problemi geometrici. Come si può osservare, la risoluzione geometrica precede quella algebrica, tuttavia in Bombelli è l'equazione, o meglio la forma dell'equazione algebrica, che determina i passi successivi della costruzione. Inoltre non si può non sottolineare il carattere composito delle sue costruzioni. Bombelli non è in grado di isolare un piccolo insieme di operazioni geometriche elementari, che possano servire per elaborare

costruzioni più complesse; al contrario egli sceglie di volta in volta costruzioni differenti, che considera più aderenti al problema in esame. Alcuni esempi possono risultare utili per illustrare questo punto.
Problema. Determinare il quarto proporzionale di tre segmenti a,b,c $[a : b = c : x]$.
Bombelli fornisce due costruzioni differenti. Nella prima egli considera il rettangolo *FPBE*, di lati b e c; poi, avendo posto $BA = a$, congiunge i punti A, E, I e costruisce il rettangolo *PAGI*. I due rettangoli *FPBE* e *EDHG* sono equivalenti per la proposizione I.43 degli *Elementi* e quindi DG è la soluzione dell'equazione $ax = bc$,



cioè $x = \dfrac{bc}{a}$.

Nella seconda costruzione Bombelli sfrutta il teorema di Talete e pone $AB = c$, $BC = a$ e $CD = b$ e, utilizzando la proposizione VI.12 degli *Elementi*, conclude che $AB : BC = DE : CD$ e quindi DE è la

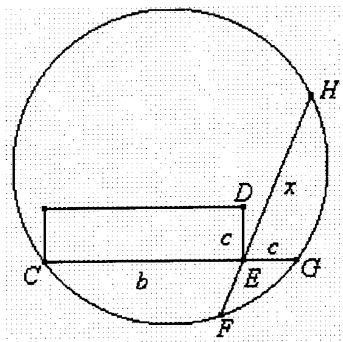


soluzione richiesta.

In un'altra sezione dell'*Algebra*, Bombelli risolve lo stesso problema geometrico utilizzando il teorema III.25 degli *Elementi*.

Dato il rettangolo *CED*, Bombelli prende $EG = DE = c$ e traccia EF di lunghezza uguale al segmento dato a e di direzione arbitraria. Poi costruisce la circonferenza passante per i tre punti C, F, G e prolunga il segmento EF fino ad incontrare la circonferenza in H. Il teorema citato, che afferma che due corde arbitrarie di una circonferenza si intersecano formando segmenti inversamente proporzionali, implica che i rettangoli *CED* e $FE \times EH$ sono equivalenti.

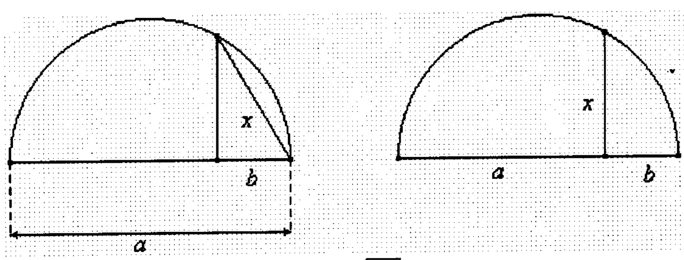
Una volta individuata la costruzione che permette di ricavare



$x = \dfrac{bc}{a}$, se si vuole effettuare la divisione tra due grandezze basta considerare $b = 1$, mentre se si vuole effettuare il prodotto basta prendere $a = 1$.

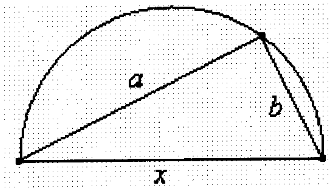
Per quanto riguarda le operazioni che coinvolgono l'estrazione di radice quadrata, Bombelli utilizza esclusivamente quelle che conservano l'omogeneità. Precisamente:

a) Costruzione del medio proporzionale, cioè $x = \sqrt{ab}$ (vedi figura). Si utilizza il teorema di Euclide che afferma che un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. Lo stesso schema può servire anche per effettuare la divisione a^2/b.



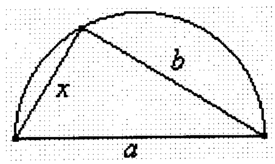
$$x = \sqrt{ab}$$

b) La radice quadrata della somma di due quadrati $\sqrt{a^2+b^2}$, come applicazione del teorema di Pitagora.



$$x=\sqrt{a^2+b^2}$$

c) La radice quadrata della differenza di due quadrati $\sqrt{a^2-b^2}$, come applicazione congiunta delle proprietà della semicirconferenza e del teorema di Pitagora.



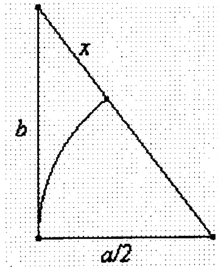
$$x=\sqrt{a^2-b^2}$$

Con questo gruppo di costruzioni elementari Bombelli affronta la costruzione di un numero di problemi geometrici, che portano a equazioni di secondo grado e, occasionalmente, di terzo. La trattazione segue un procedimento che possiamo schematizzare nel modo seguente:

1. Formulazione del problema.
2. Costruzione geometrica della soluzione.
3. Risoluzione di un esempio numerico per via algebrica.

In ogni caso la soluzione geometrica precede quella algebrica. Tuttavia è chiaro dall'analisi dei singoli casi, che è l'equazione, o meglio la forma della soluzione algebrica, che determina i successivi passi della costruzione. Alcuni esempi illustreranno questo concetto.

Il primo esempio riguarda l'equazione $x^2 = ax + b^2$, che è collegata al problema seguente: determinare un rettangolo uguale al quadrato dato b^2, tale che la differenza tra i lati sia a.



Se si conosce la formula risolutiva:

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}-\frac{a}{2}$$

questa indica anche la costruzione geometrica con riga e compasso che permette di trovare la soluzione. Si deve considerare $\frac{a}{2}$ e quindi costruire un triangolo rettangolo che ha come cateti $\frac{a}{2}$ e b, l'ipotenusa è $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}$, da questa si deve togliere $\frac{a}{2}$ e quindi trovare x.

La dipendenza della costruzione dall'equazione risulta più evidente in situazioni più complesse, come nel caso del prossimo problema: Dividere una linea a in due parti, in modo che la somma dei quadrati delle parti sia uguale a un quadrato b^2 dato, più il rettangolo delle parti.

Detta x una parte della linea, l'altra è $a - x$ e quindi il problema equivale a risolvere l'equazione:

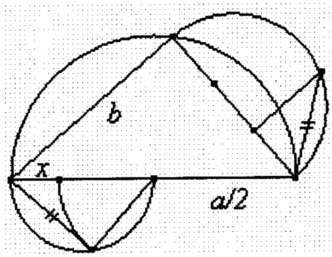
$$x^2+(a-x)^2=b^2+x(a-x)$$

che svolgendo i calcoli diventa:

$$x^2+\frac{a^2-b^2}{3}=ax$$

La soluzione dell'equazione è:

$$x=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-b^2}{3}}$$



La costruzione inizia dall'argomento della radice quadrata, che si deve pensare come $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Questo significa che si deve innanzi tutto costruire $\beta = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{3}}$. Questa costruzione viene effettuata in tre stadi: prima si costruisce $\sqrt{a^2 - b^2}$ mediante il procedimento già visto, poi si divide questo segmento in tre parti uguali per ottenere $\sqrt{a^2 - b^2}/3$ e infine si costruisce, come già visto, il medio proporzionale tra i due segmenti ottenuti. A questo punto il procedimento è diretto, in quanto il termine $\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - \beta^2}$ si determina facilmente con la costruzione che fornisce la radice quadrata della differenza di due quadrati. La figura risulta ora evidente.

La costruzione geometrica segue non tanto la formula risolutiva ma l'algoritmo risolutivo: una volta interpretate le operazioni algebriche come operazioni geometriche, l'algebra diventa l'algoritmo che porta alla soluzione.

Algebra e Geometria in Viète

Come sottolineato precedentemente, il metodo di Bombelli è caratterizzato da un'immediata corrispondenza tra equazioni e loro soluzioni da una parte e costruzioni con riga e compasso dall'altra. Nella geometria di Viète (1540-1603) questa catena è spezzata: algebra e geometria non comunicano direttamente, ma solo attraverso il filtro della teoria delle proporzioni. Sono i libri geometrici degli *Elementi* di Euclide che danno il fondamento per le dimostrazioni. Precisamente Viète, considerando il libro V degli *Elementi*, rilegge le equazioni algebriche come problemi che riguardano le proporzioni.

Già nell'*Isagoge* (e in seguito nella *Canonica recensio*) Viète stabilisce una corrispondenza biunivoca tra equazioni e proporzioni:

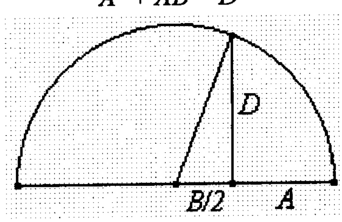
Equazioni	Proporzioni
$A^2 + AB = D^2$	$(A+B):D = D:A$
$A^2 - AB = D^2$	$(A-B):D = D:A$
$AB - A^2 = D^2$	$(B-A):D = D:A$

Con Viète ha inizio l'algebra letterale: egli introduce lettere per denotare grandezze incognite e termini noti e introduce tecniche di calcolo con le lettere. Rilegge le tecniche dell'algebra numerica nei termini dell'algebra letterale. Usa consonanti per indicare le costanti e vocali per indicare le variabili.

Se si esamina la prima equazione in corrispondenza alla prima proporzione, si nota che il problema geometrico che corrisponde al problema algebrico di trovare le soluzioni della prima equazione si può così enunciare: *date tre grandezze in proporzione continua e date le medie e la differenza delle estreme, trovare la grandezza estrema*. L'equazione di secondo grado si riconduce ad un problema di teoria delle proporzioni. Viète dice: *l'equazione è la risoluzione della proporzione e la proporzione è la composizione dell'equazione*. In modo analogo si può interpretare la seconda equazione: *data la media e la somma delle estreme trovare l'estrema*; e la terza: *data la media e la somma delle estreme trovare l'estrema*. Si hanno così tre equazioni che si traducono in tre problemi nella teoria delle proporzioni e, dato che esiste una tecnica geometrica che lega tra loro tre segmenti in modo che uno sia la media proporzionale degli altri due (in un triangolo rettangolo l'altezza relativa alla ipotenusa è media proporzionale dei segmenti della base), si tratta di adattare questo schema ai vari casi: la media proporzionale è data sempre, nei primi due casi è data la differenza degli estremi e nel terzo la somma.

La figura illustra la costruzione geometrica che permette di risolvere la prima equazione:

$A^2 + AB = D^2$



B è la differenza delle estreme e D è la media: si considera B e con riga e compasso si costruisce D perpendicolare a B, si divide B a metà (sempre con riga e compasso), si traccia la circonferenza di centro il punto medio del segmento B e raggio l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti D e $B/2$, questa interseca il prolungamento del segmento B individuando un segmento A. Per il teorema di Euclide si ha quindi: $(A + B) : D = D : A$. Si ottiene dunque una equazione di secondo grado che diventa un problema di proporzioni, che a sua volta viene riletto in termini geometrici tramite la struttura "media proporzionale" la quale, infine, permette la costruzione della soluzione dell'equazione.

In Viète troviamo anche un'analoga trattazione delle equazioni di terzo grado:

> *La somme et le produit des extrèmes de quatre grandeurs en proportion continue étaut donnés, trouver la somme des moyennes*

$$A^3 - 3BA = BD$$

Viète fa vedere come nella struttura della proporzione continua di due medie proporzionali si celino i problemi che conducono all'equazione generale di terzo grado (mancante del termine di secondo grado).

Si consideri una struttura di quattro grandezze in proporzione continua:

$$\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$$

con la seguente interpretazione:

$\alpha\delta = \beta\gamma = B$ prodotto delle estreme

$\alpha + \delta = D$ somma delle estreme

$\gamma + \beta = A$ incognita (somma delle medie)

Facendo un po' di calcoli si vede come la proporzione corrisponda all'equazione sopra indicata.

Il problema è quindi: date quattro grandezze in proporzione continua, di cui si conoscono il prodotto delle estreme e la somma delle estreme, trovare la somma delle medie.

Un modo più semplice di indicare quattro grandezze in proporzione continua è il seguente:

$$u^3,\ u^2v,\ uv^2,\ v^3$$

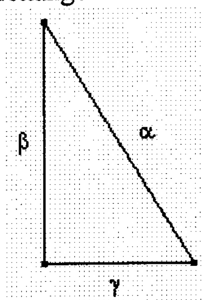
nel quale è evidente la ragione che è v/u.

In questo modo il problema si risolve tramite il sistema

$$\begin{cases} u^3v^3 = B \\ u^3 + v^3 = D \end{cases}$$

che equivale alla risoluzione di una equazione di secondo grado: *date la somma e il prodotto di due grandezze, trovare le due grandezze.*

Viète tratta anche le equazioni biquadratiche, che, però, riconduce a problemi sui triangoli rettangoli



Si hanno tre grandezze in proporzione continua

$$\beta^2 : \alpha\beta = \alpha\beta : \alpha^2$$

Sono dati la base e il prodotto di un cateto per l'ipotenusa

$$\gamma = B$$
$$\alpha\beta = D^2$$

Si possono avere due casi:

1) se l'incognita è l'altezza $\beta = A$, allora $\alpha^2 = A^2 + B^2$ e quindi la proporzione precedente diventa:

   $$A^2 : D^2 = D^2 : (A^2 + B^2)$$

   e cioè si ottiene l'equazione biquadratica:

   $$A^4 + A^2B^2 = D^4$$

2) se l'incognita è l'ipotenusa $\alpha = A$, allora $\beta^2 = A^2 - B^2$ e quindi la proporzione precedente diventa:

   $$(A^2 - B^2) : D^2 = D^2 : A^2$$

   e cioè si ottiene l'equazione biquadratica:

   $$A^4 - A^2B^2 = D^4$$

Entrambi i casi si possono però ricondurre allo stesso problema: *in un triangolo rettangolo data la base e la media proporzionale tra l'altezza e l'ipotenusa trovare il triangolo.*

Si può considerare anche, sullo stesso triangolo rettangolo, un altro problema, conoscendo l'ipotenusa e la media proporzionale tra i due cateti

$$\beta^2 : \gamma\beta = \gamma\beta : \gamma^2$$

Sono dati cioè

$$\alpha = B$$
$$\gamma\beta = D^2$$

e l'incognita è $\gamma = A$. Si ottiene quindi

$$(B^2 - A^2) : D^2 = D^2 : A^2$$

che equivale all'equazione biquadratica:

$$A^2B^2 - A^4 = D^4$$

Descartes nella sua *Géométrie* prenderà le mosse da dove Viète si era fermato. In particolare dell'algebra di Viète utilizzerà la trattazione comune delle incognite e delle quantità date e si servirà delle lettere per indicare entrambe, ma eliminerà il canonico ma complicato apparato dei rapporti e delle proporzioni, collegando direttamente operazioni algebriche e geometriche, più in linea con l'opera di Bombelli e la tradizione abachista.

La Géométrie

Descartes ha avuto un'influenza sostanziale non solo sulla matematica, ma anche sulla filosofia moderna. La sua opera più importante in tutti i campi esce nel 1637, a Leida. Renè Descartes pubblica in forma anonima il suo *Discorso sul metodo*, che costituisce una pietra miliare nella storia della filosofia, accompagnato da tre saggi, *La diottrica* (che contiene, tra l'altro, le leggi della riflessione), *Le meteore* (trattato meteorologico, legato alla concezione cartesiana dell'universo) e *La geometria*, che ha gettato le basi della matematica moderna. *La geometria* è inoltre la prima opera moderna che si legge anche oggi con notevole profitto, senza traduzione dei termini e delle notazioni usati (salvo alcuni piccoli cambiamenti). In particolare è di Descartes l'uso delle ultime lettere dell'alfabeto per indicare le incognite e delle prime per le costanti.

Se c'è stata mai una rivoluzione nel campo della matematica sicuramente questa avviene con l'opera di Descartes: *La Geometria* cambia radicalmente il corso della matematica, si suole dire che c'è una matematica pre-cartesiana e una matematica post-cartesiana, anche se questo passaggio avviene gradualmente. Non si vuole affermare che comincia una matematica completamente diversa (ci sono matematici che non la conoscono o anche che l'avversano), ma da Newton in poi tutti conoscono l'opera di Descartes. Il Settecento si configura come un secolo in cui la geometria cartesiana ed il calcolo infinitesimale diventano la totalità della matematica e bisognerà aspettare l'Ottocento per veder sorgere di nuovo i metodi sintetici, che erano stati abbandonati a favore della versatilità e della duttilità del metodo cartesiano. La geometria cartesiana in realtà affronta soltanto una parte dei temi geometrici, per esempio non viene mai affrontato il problema della misura. Forse la migliore definizione di geometria è quella di Leibniz:

> *La geometria si compone di due parti totalmente differenti; l'una trattata da Apollonio, l'altra da Archimede. La prima si serve solo della misura delle rette, e della posizione delle curve in quanto determinata dalla misura delle rette; l'altra misura la quantità delle curve, e determina con certezza le cose che ne dipendono. Così si può chiamare la prima geometria di determinazione, l'altra geometria di misura.*

Leibniz parla di una geometria apolloniana e di una geometria archimedea: la prima è una geometria che parla della posizione degli oggetti ed pertanto è una geometria di determinazione, l'altra è una geometria che misura gli oggetti. Quando Leibniz scrive pensa alla geometria cartesiana nei termini di una geometria apolloniana e pensa che solo il suo calcolo infinitesimale possa realizzare l'unificazione delle due geometrie.

Breve sommario della Géométrie

LIBRO I: Introduzione. Costruzione delle equazioni di secondo grado. Enunciato del problema di Pappo

LIBRO II: Metodi per tracciare le curve. Selezione e classificazione delle curve. Soluzione del problema di Pappo. Metodo per le tangenti. Ovali cartesiane.

LIBRO III: Costruzione delle equazioni.

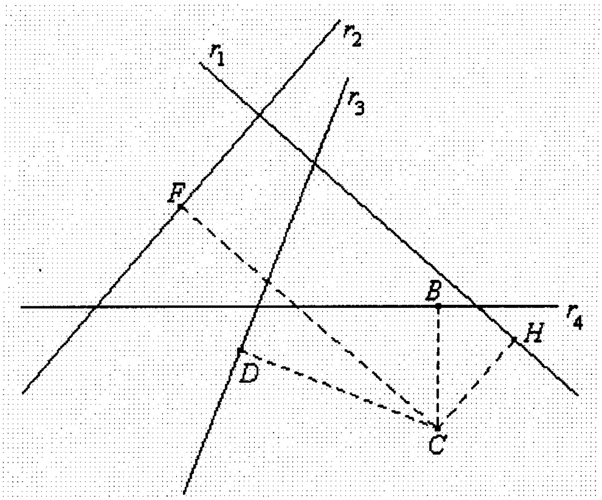
Nel Libro I, nell'introduzione, Descartes mostra come le operazioni algebriche e le operazioni geometriche siano in corrispondenza, quindi espone come si costruiscono con riga e compasso le soluzioni di equazioni di 2° grado ed infine enuncia il problema di Pappo.

Nel Libro III si trova la costruzione delle equazioni: come trovare la soluzione di una equazione di grado qualsiasi tramite l'intersezione di due curve, in generale di una curva con una circonferenza. (Per esempio le soluzioni di equazioni di 3° e 4° grado si possono ottenere intersecando una parabola fissa ed una circonferenza variabile, quelle di equazioni di 5° e 6° grado intersecando una curva di 3° grado fissa ed una circonferenza variabile e così via).

Il Libro II è il libro cruciale, quello in cui si esplica veramente la massima novità della geometria: da una parte Descartes inizia descrivendo alcune macchine con le quali tracciare delle curve, poi passa a selezionare e a classificare le curve. Questo è un punto veramente importante in quanto Descartes sostiene che la sua geometria non si applica a tutte le curve e quindi elenca i tipi di curve che lui definisce geometriche e le distingue da quelle chiamate meccaniche. Nel Libro II è anche contenuta la soluzione del problema di Pappo enunciato nel Libro I e viene affrontato il problema centrale della costruzione della retta tangente ad una curva.

Problema di Pappo

Date quattro rette trovare un punto *C* tale che *CD·CB* = *CH·CF*.



Il problema si può generalizzare ad un numero qualsiasi di rette. Il problema è prettamente teorico e nasce dalla lettura delle *Collezioni matematiche* di Pappo, nelle quali Pappo racconta quali sono le opere degli autori che lo hanno preceduto (è una delle fonti più importanti per la conoscenza di opere che sono andate perdute.) Pappo racconta che questo problema era stato enunciato da Apollonio che lo aveva risolto nel caso di quattro rette dimostrando che i punti *C* stavano su una sezione conica, senza però specificare quale. Per un numero superiore di rette Pappo parla di un luogo di linee, il che vuol dire che non ne conosceva la natura. Il problema viene affrontato anche da matematici moderni (dopo la pubblicazione delle *Collezioni matematiche* avvenuta nel 1588) e rimane un problema aperto. Descartes affronta il problema nel Libro II e ne dà una soluzione generale. Il problema centrale consiste nella determinazione della distanza di un punto da una retta.

Descartes dimostra che la distanza di un punto da una retta si esprime linearmente rispetto alle coordinate del punto: se si hanno le coordinate (x,y) di un punto, la distanza di questo punto da una retta data è del tipo $|ax + by + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$ dove a, b, c dipendono dalla retta data.

In particolare se si ha l'equazione di una retta r_i : $a_iX + b_iY + c_i = 0$ e se ci si riduce al caso $a_i^2 + b_i^2 = 1$ (cosa che si può sempre fare dividendo l'equazione per $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$) allora la distanza di un punto $C(x,y)$ dalla retta r_i è $|a_ix + b_iy + c_i|$. Di conseguenza l'equazione della curva soluzione è:

$$\pm(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = (a_3x + b_3y + c_3)(a_4x + b_4y + c_4)$$

che, essendo di 2° grado, è una sezione conica.

In questo modo Descartes ha risolto completamente il problema di Pappo per un numero qualsiasi di rette, ma la soluzione è raggiunta solo se si accetta che una curva (luogo di punti) sia identificabile o interpretabile con una equazione. È questo il vero carattere di novità dell'opera cartesiana: nella matematica classica una curva era un'altra cosa, poteva essere data direttamente tramite un sistema definizione-postulati (il cerchio nel I libro degli *Elementi*), oppure tramite una definizione operativa (le coniche come sezioni del cono), oppure ancora mediante una costruzione (cissoide di Diocle, spirale di Archimede). Questi sono però metodi particolari, ogni curva ha bisogno della sua generazione specifica, e quindi non possono far altro che condurre a delle curve "nominate".

L'accettare invece l'equazione come tratto caratteristico di un curva significa generalizzare la questione: si hanno cioè a disposizione un'infinità di curve, tutte quelle rappresentabili con equazioni algebriche che, inoltre, possono essere assoggettate al calcolo in modo generale. Da qui la distinzione tra curve che possono essere assoggettate al calcolo (quelle esprimibili con equazioni algebriche) e quelle che, non potendo essere rappresentate da equazioni, non possono essere soggette al calcolo, le curve meccaniche (spirale di Archimede, cicloide, quadratrice, ...). A questo punto è necessario fare una precisazione: alcune curve non hanno un'equazione perché l'unica equazione possibile all'epoca di Descartes era del tipo

$P(x,y) = 0$ dove P è un polinomio. Quando Descartes scrive non ci sono le funzioni e sono stati introdotti da poco i logaritmi sotto forma di tavole numeriche e lo stesso accade per seni e coseni. Solo con Leibniz, cinquanta anni dopo, si inizia a parlare di curva logaritmica, di curva dei seni, di curva cicloide. Al tempo di Leibniz non è ancora presente l'idea di funzione, ma egli distingue tra curve algebriche, quelle del tipo $P(x,y) = 0$, e curve trascendenti, per esempio $x^y = 27$, il cui grado non è costante e quindi trascendono qualsiasi classificazione. Quando Descartes scrive, le curve note sono tante e sono noti anche molti metodi per determinarle (sono conosciute almeno 75 opere, prima di Descartes, che trattano metodi per tracciare le curve), quindi egli si trova anche di fronte alla necessità di selezionare le curve che si possono trattare nella sua geometria da quelle che non si possono accettare. Ne derivano una serie di "regole" di selezione:

1) curve che si descrivono tramite il moto (che si fanno con le macchine)

   non si devono escludere le linee composte più che quelle semplici, purché si possa immaginarle descritte da un movimento continuo, o da più movimenti successivi, di cui gli ultimi siano interamente regolati da quelli che li precedono.

   La Spirale, **la Quadratrice** e *simili non appartengono che alle meccaniche, e non sono del numero di quelle che io penso si possano trattare qui, poiché le si immagina descritte da due movimenti separati, che non hanno tra loro alcun rapporto che possa essere misurato esattamente.*

2) curve che si fanno con dei fili (che secondo Descartes devono essere sempre tesi)

   non si devono escludere nemmeno quelle per le quali ci si serve di un filo, o di una coda ripiegata, per determinare l'uguaglianza o la differenza di due o più rette che possono essere tirate da ogni punto della linea che si cerca a certi altri punti, o su certe altre linee a certi angoli. ... Ma al contrario non si possono accettare linee che somigliano a delle corde, cioè che diventano a volte rette e a volte curve, perché la proporzione che c'è tra le rette e le curve non essendo nota e, credo, non potendolo essere, non si potrebbe concludere da ciò nulla di esatto e di definito.

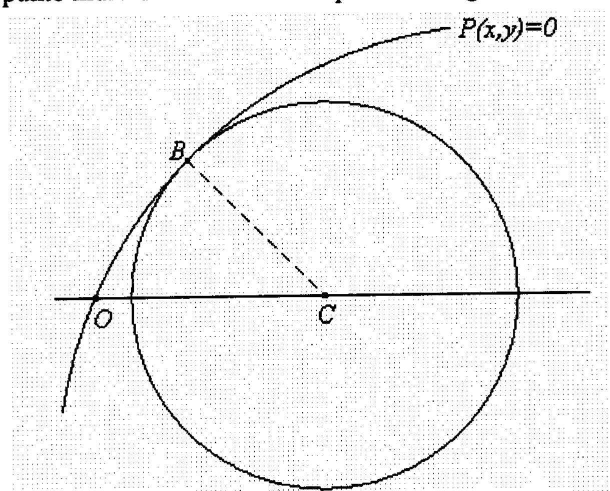
3) curve che si descrivono per punti

   È anche a proposito osservare che c'è una grande differenza tra questo modo di trovare più punti per tracciare una curva, e *quello di cui ci si serve per la spirale e le sue simili. Perché con quest'ultimo non si trovano indifferentemente tutti i punti della linea cercata, ma solo quelli che possono essere determinati per qualche procedimento più semplice di quello richiesto per comporla, e così a rigore non si trova nessuno dei suoi punti.*

Alla fine però Descartes conclude:

Potrei mettere qui molti altri modi per tracciare e definire delle linee curve, che sarebbero più e più composte all'infinito. Ma per comprendere insieme tutte quelle che esistono in natura, e distinguerle ordinatamente in classi, non conosco niente di meglio che dire che tutti i punti di quelle che si possono chiamare geometriche, cioè che cadono sotto qualche misura precisa ed esatta, hanno necessariamente una relazione con tutti i punti di una retta, che può essere espressa con un'equazione, e tutti con una sola.

Se le curve geometriche sono esprimibili tramite un'equazione, si può stabilire anche un metodo generale, cioè valido per tutte, per trovare la retta tangente alla curva in suo punto. In realtà più che le tangenti Descartes cerca le normali ricercando uno dei cerchi tangenti alla curva nel punto: il raggio del cerchio tangente che passa per il punto individua la normale e quindi la tangente alla curva.



La curva è individuata da una equazione del tipo $P(x,y) = 0$. Esistendo diversi cerchi tangenti alla curva nel punto e volendone trovare uno solo, Descartes impone una particolare condizione e cioè che il centro appartenga all'asse x. Fissato il punto O come origine del riferimento e l'asse delle ascisse, note l'equazione della curva e le coordinate del punto B di tangenza, si tratta di determinare il punto C appartenente all'asse delle ascisse in modo che la circonferenza di centro C sia tangente in B alla curva. Individuare il cerchio tangente significa trovare quel cerchio che ha riunite in B le due intersezioni con la curva, o, come si dice, ha una intersezione doppia.

Sia $B(x_0,y_0)$, $OC = v$ e $CB = s$, l'equazione del cerchio sarà allora $(x-v)^2+y^2=s^2$. Per trovare le intersezioni tra cerchio e curva bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases}(x-v)^2+y^2=s^2\\ P(x,y)=0\end{cases}$$

che, dopo aver eliminato la y, si riduce ad una equazione nella sola x del tipo $Q(x) = 0$. Se l'equazione deve avere una radice doppia in $x = x_0$ deve poter essere riscritta nella forma

$$Q(x) = (x - x_0)^2 \cdot R(x)$$

con $R(x)$ polinomio incognito di grado inferiore di due unità rispetto a $Q(x)$. Se il polinomio $Q(x)$ ha grado n, l'identità scritta precedentemente dà luogo a $n + 1$ equazioni ricavate dall'uguaglianza degli $n+1$ coefficienti del polinomio a primo membro con i rispettivi coefficienti del polinomio a secondo membro. In queste $n + 1$ equazioni sono presenti $n + 1$ incognite: v, s e gli $n - 1$ coefficienti del polinomio $R(x)$.

È necessario, quindi, risolvere un sistema non lineare di $n + 1$ equazioni in $n + 1$ incognite che comporta dei calcoli abbastanza laboriosi e che costringe, per ricavare l'unica incognita che interessa (l'ascissa v del punto C), a calcolare anche un numero rilevante di incognite non necessarie al fine della risoluzione del problema.

Per chiarire meglio il metodo cartesiano, si consideri la normale alla parabola di equazione $y=x^2$ nel punto B di coordinate x_0 e $y_0=x_0^2$. Bisogna in primo luogo eliminare la y tra le equazioni $y=x^2$ della curva e $(x - v)^2 + y^2 = s^2$ della circonferenza. In questo caso l'eliminazione è molto semplice, e si ottiene l'equazione $(x - v)^2 + x^4 = s^2$, ossia sviluppando

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - s^2 = 0.$$

Si impone ora che questa equazione abbia una radice doppia per $x = x_0$, ossia che risulti

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - s^2 = (x - x_0)^2(x^2 + ax + b)$$

ovvero, sviluppando il prodotto a secondo membro,

$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - s^2 = x^4 + (a - 2x_0)x^3 + (x_0^2 + b - 2ax_0)x^2 + (ax_0^2 - 2bx_0)x + x_0^2 b$

Uguagliando i coefficienti delle potenze simili, si ottiene

$$\begin{cases} a - 2x_0 = 0 \\ x_0^2 + b - 2ax_0 = 1 \\ ax_0^2 - 2bx_0 = -2v \\ x_0^2 b = v^2 - s^2 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a = 2x_0 \\ b = 1 + 3x_0^2 \\ v = x_0 + 2x_0^3 \\ s^2 = x_0^4(1 + 4x_0^2). \end{cases}$$

In realtà trovare il raggio s è superfluo, dato che una volta determinato il valore di v è individuato il centro C, e la normale si ottiene congiungendo C con B.

Se invece di cercare il cerchio tangente, si ricercasse direttamente la retta tangente molti calcoli sarebbero semplificati. E in effetti fu proprio questo il primo passo, dopo *La geometria* di Descartes, che fu fatto per migliorare il procedimento: già nella prima traduzione latina dell'opera di Descartes (1649) compaiono dei commenti che suggeriscono di ricercare la retta tangente, anziché il cerchio. La traduzione latina dell'opera di Descartes, scritta originariamente in francese (lingua, a quel tempo, poco conosciuta al di fuori della Francia), ne consente un'ampia diffusione e discussione.

Nella stessa epoca un altro importante "geometra", Fermat, si occupa più o meno delle stesse cose, ma a differenza di Descartes, non pubblica nulla delle sue numerose e comunque conosciute opere.

Il metodo delle tangenti di Fermat prende origine da altre ricerche che lo studioso stava facendo, sotto l'influsso della lettura delle opere di Viète, sui massimi e i minimi delle quantità.
Un esempio del metodo per ricercare i massimi e i minimi è il seguente

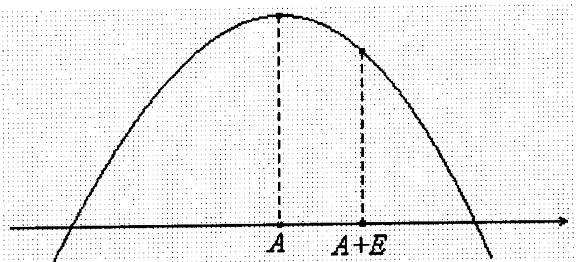
È data una retta da dividersi in due parti mediante un punto in modo tale che il rettangolo formato dalle due parti abbia area massima. In termini moderni si tratta di trovare il massimo della funzione $y = bx - x^2$: infatti se un segmento è lungo b e una sua parte è x, l'altra parte è $b - x$ e quindi l'area del rettangolo è $x(b-x) = bx - x^2$.

Non sapendo qual è il massimo, si consideri un valore Z minore del massimo; allora esistono due valori A ed E per i quali il rettangolo ha area Z: $BA - A^2 = Z = BE - E^2$ (utilizzando ora le notazioni di Fermat). Ciascuna delle due equazioni di secondo grado è risolvibile ed ha due soluzioni; si conoscono anche le relazioni tra i coefficienti e le soluzioni dell'equazione, per esempio, essendo $BA - A^2 = Z = BE - E^2$ si ottiene $BA - BE = A^2 - E^2$ e quindi $B = \frac{A^2 - E^2}{A - E} = A + E$. Se Z è effettivamente il valore massimo, le radici si riducono ad una sola e quindi $B = 2A$. Pertanto il valore massimo si ottiene quando il segmento è diviso esattamente a metà e quindi quando il rettangolo è un quadrato.

Se si considera una funzione qualunque di equazione $y = f(x)$ e la si "taglia" con una retta orizzontale $y = Z$, si ottengono due intersezioni; il che vuol dire che le ascisse A ed E sono tali che $f(A) = f(E)$ e quindi $f(A) - f(E) = 0$ e $\frac{f(A) - f(E)}{A - E} = 0$. Se poi si semplifica l'espressione, eliminando il denominatore, e quindi la si calcola con $E = A$, si ottiene il punto di massimo. Per semplificare i calcoli Fermat suggerisce di chiamare i due punti A ed $A + E$, in modo che il rapporto e la semplificazione che ne segue sia più semplice

$$\frac{f(A+E) - f(A)}{E} = 0.$$

Con questa notazione quando i due punti coincidono, cioè quando si trova il massimo, E sarà zero ed il massimo sarà proprio il punto A.



Si può supporre quindi a priori che A sia il massimo.

La quantità $f(A + E) - f(A)$ non sarà zero, ma si potrà scrivere $f(A + E) - f(A) \cong 0$, cioè non una equazione ma una "adequazione" (la quantità è "quasi" zero) e allo stesso modo

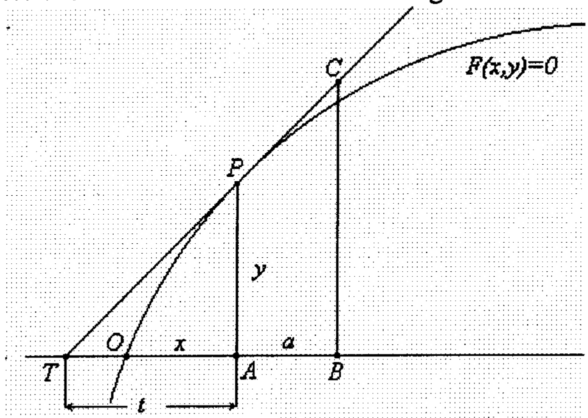
$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E} \cong 0.$$

Quando si calcola l'espressione per $E = 0$, allora l'"adequazione" diventa una equazione: $\left.\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right|_{E=0} = 0$.

In questa trattazione sembra emergere il concetto di rapporto incrementale e anche quello di derivata. In realtà, se è vero che si trattano rapporti incrementali, lo stesso non si può dire dell'operazione di derivata. Infatti vengono trattate equazioni o "adequazioni", ma non esiste alcun cenno ad operazioni. Nell'analisi moderna quando si vogliono calcolare i massimi ed i minimi di una funzione si calcola prima la derivata e poi la si pone uguale a zero; Fermat parte invece da quantità che pone da subito uguali a zero, tratta cioè equazioni. Questo riveste una importanza fondamentale, perché se si trattano operazioni si hanno a disposizione delle regole che possono semplificare i calcoli (se si deve fare la derivata della somma di due funzioni, si possono fare le derivate delle singole funzioni e poi si possono sommare), se invece si trattano espressioni complesse uguagliate a zero queste non possono essere semplificate uguagliandone a zero le singole parti. L'importanza della derivata sta proprio nel fatto che è una operazione e pertanto esistono regole di derivazione che permettono di semplificare il calcolo. Nella trattazione di Fermat c'è tutto tranne il concetto di derivata come operazione.

Questa trattazione permette, comunque, di affrontare il problema della retta tangente ad una curva. Secondo Euclide la retta tangente ad una circonferenza è quella retta che tocca la circonferenza ma non la taglia; all'epoca di Fermat, anche se alla circonferenza può venire sostituita una curva qualsiasi, la definizione rimane pressoché la stessa. Anche se si conoscono le cubiche, l'immagine più comune della tangente è quella di una retta che sta tutta dalla stessa parte rispetto alla curva.

La curva di equazione $F(x,y) = 0$ separa il piano in due regioni, una in cui $F(x,y) < 0$ e l'altra in cui $F(x,y) > 0$. La tangente si trova tutta da un parte rispetto alla curva; nel grafico si trova nella regione in cui $F(x,y) < 0$. Se si calcola l'espressione della curva sulla tangente questa sarà sempre minore di zero tranne che nel punto di tangenza nel quale sarà nulla, quindi avrà un massimo nel punto di tangenza. Per determinare la tangente si dovrà quindi imporre che l'espressione della curva calcolata sulla tangente abbia un massimo



nel punto di tangenza. Sia $AT = t$, $AP = y$, $AO = x$ e $AB = a$. I triangoli TPA e TCB sono simili, quindi

$$y : t = BC : (t + a)$$

da questo si ricava

$$BC = y\left(1 + \frac{a}{t}\right)$$

La quantità

$$f(a) = F\left(x + a, y\left(1 + \frac{a}{t}\right)\right)$$

rappresenta l'espressione della curva calcolata sulla tangente e deve avere un massimo quando $a = 0$.
Quindi si calcola

$$\left.\frac{f(0+e) - f(0)}{e}\right|_{e=0} = 0$$

e si risolve rispetto all'incognita t. Il segmento $AT = t$ si chiama *sottotangente* ed è uno dei responsabili del ritardo con cui si perverrà al calcolo infinitesimale. È un parametro geometrico d'elezione per la determinazione della retta tangente, ma dal punto di vista analitico l'espressione di t non è la migliore per effettuare calcoli. La sottotangente di una funzione si esprime come $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$; se si conoscono le sottotangenti di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ come si può ricavare la sottotangente della funzione somma? Come si può esprimere $\frac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}$ in termini di $\frac{f(x)}{f'(x)}$ e $\frac{g(x)}{g'(x)}$? Il calcolo non è sicuramente semplice. Se si considera come parametro la tangente goniometrica dell'angolo che la tangente geometrica forma con l'asse x, anche se non è un parametro geometrico, il calcolo diventa molto più semplice in quanto tale parametro è ben compatibile con le operazioni algebriche.

Nota. Questi appunti sono stati raccolti durante le lezioni tenute dal Prof. Enrico Giusti ed elaborati dai Professori Nicoletta Nolli ed Ercole Castagnola.

UN APPROCCIO MULTIMEDIALE PER LA FORMAZIONE E L'AGGIORNAMENTO DEGLI INSEGNANTI DI MATEMATICA

Vinicio Villani
Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

In ambito internazionale la documentazione audiovisiva delle dinamiche di insegnamento-apprendimento sta assumendo una crescente rilevanza. Basti ricordare le centinaia di ore di lezioni videoregistrate qualche anno fa in classi di scuole secondarie di vari paesi, nell'ambito dell'indagine internazionale TIMSS (Third International Mathematics and Science Study). In Italia finora poco è stato fatto in questa direzione. Mi sembra quindi opportuno esporre qui di seguito le principali caratteristiche di un'esperienza pilota realizzata nel corso dell'anno scolastico 1997-98.

Un (modesto) finanziamento del Ministero della P.I. ha consentito la costituzione di un gruppo di lavoro del quale facevano parte 4 docenti del Seminario Didattico del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, 5 insegnanti del primo biennio di vari tipi di Scuole Secondarie Superiori di tre regioni italiane, e una studentessa, a quel tempo laureanda in Matematica all'Università di Pisa.

Grazie alla disponibilità degli insegnanti e delle strutture scolastiche coinvolte, abbiamo potuto effettuare alcune ore di riprese (artigianali) video e audio nelle loro classi. Voglio precisare che si è trattato di lezioni "normali" tenute in classi "normali", nel senso che la presenza della telecamera non ha modificato il normale svolgimento delle lezioni. Detto in maniera ancor più esplicita: né le esposizioni degli insegnanti, né gli interventi degli studenti erano stati in alcun modo "concordati" preventivamente.

Lo scopo dichiarato del progetto era quello di estrarre dal complesso delle registrazioni alcune brevi sequenze, da utilizzare poi come base di discussione in occasione di attività di formazione di insegnanti (per es. corsi universitari di didattica della matematica, o corsi post-laurea nell'ambito delle istituende scuole di specializzazione per insegnanti secondari) nonché per l'aggiornamento e l'autoaggiornamento di insegnanti in servizio.

Poiché ci premeva richiamare l'attenzione dei destinatari del prodotto multimediale sugli aspetti metodologici dei processi di insegnamento-apprendimento, piuttosto che sulla trasmissione di specifici contenuti, abbiamo privilegiato argomenti classici, soprattutto di algebra e in un caso di geometria euclidea.

All'inizio non disponevamo di una "scaletta" dettagliata per la costruzione del prodotto finale al quale stavamo lavorando. Ma due sono stati gli aspetti ricorrenti in tutte le lezioni videoregistrate che ci hanno maggiormente colpito:

- *Le interazioni insegnante-allievi: domande, risposte, silenzi.*
- *Gli imprevisti: ambiguità, fraintendimenti, errori.*

Di conseguenza, abbiamo deciso di lavorare su questi due aspetti, assumendoli come titoli delle due parti (della durata di circa 30 minuti ciascuna) di un'unica videocassetta, formata da vari brevi spezzoni particolarmente significativi al riguardo.

Abbiamo quindi proposto la cassetta alla visione e alla discussione di gruppi ristretti di insegnanti, in due incontri organizzati rispettivamente a Viareggio (Giugno 1998) e a Lucca (Novembre 1998).

In questa sede devo limitarmi a descrivere a parole le principali risultanze emerse, pur consapevole che una visione diretta sarebbe stata di gran lunga più efficace:

- La documentazione audiovisiva è risultata estremamente coinvolgente per tutti i partecipanti e ne sono seguite discussioni assai vivaci e approfondite. In particolare, i partecipanti hanno avuto modo di rendersi conto "dal vivo" che uno stesso argomento può essere presentato secondo numerosi stili d'insegnamento differenti: lezione frontale, discussione a piccoli gruppi, discussione collettiva di tutta la classe, lavoro in laboratorio di informatica come premessa ad una successiva sistemazione teorica, ecc.
- Gli stessi insegnanti protagonisti delle videoregistrazioni (che erano presenti all'incontro di Lucca) hanno potuto confrontare con maggiore distacco i "punti di vista" degli studenti con il proprio "punto di vista" personale. Tutti si sono meravigliati nel rilevare episodi ai quali nel corso della loro attività in classe non avevano fatto caso.

Ecco un tipico esempio relativo alle interazioni insegnante-allievi: tutti indistintamente gli insegnanti lasciavano troppo poco tempo agli allievi per riflettere e per rispondere a domande non di routine (con la conseguenza che anche nel caso di docenti convinti di avere praticato un metodo di insegnamento interattivo, era quasi sempre lo stesso insegnante a dare anzitempo una “sua” risposta alla sua domanda).

Ed ecco un secondo esempio relativo agli imprevisti documentati dalle videoriprese: nonostante un indubbio impegno alla chiarezza espositiva da parte degli insegnanti, si è registrata un'elevata frequenza di fraintendimenti (alcuni veramente fantasiosi) da parte degli allievi, anche su aspetti apparentemente banali. Per es. si è visto che basta un disegno non perfetto alla lavagna per trarre in inganno buona parte degli studenti, o che un termine matematico non familiare (nel caso specifico si trattava della parola “corrispondenza biunivoca”) benché scandito assai chiaramente dall'insegnante, risulta poi trascritto sui quaderni degli allievi in forma distorta nei modi più svariati e fantasiosi (“corrispondenza biunica”, “corrispondenza biulivica”, ecc).

Com'era naturale, e in certo senso auspicabile, durante i due incontri di Lucca e di Viareggio sono stati evidenziati anche i difetti e i limiti di questo primo tentativo di documentazione audiovisiva e sono state avanzate proposte concrete per migliorare future edizioni del prodotto.

Trascrivo le principali indicazioni emerse:

- Va migliorata la resa tecnica, soprattutto per quanto riguarda l'audio, perché a volte il brusio di fondo della classe rende difficilmente intelligibili gli interventi estemporanei dai banchi. E' altresì opportuno disporre di almeno due telecamere, onde riuscire a documentare simultaneamente i punti di vista dell'insegnante e degli allievi.
- Per consentire ai fruitori del prodotto di “entrare in situazione” è necessario corredare la documentazione audiovisiva di tutta una serie di informazioni supplementari, come per es.:

- precisazioni sul programma svolto in precedenza;
- precisazioni sul programma che ci si propone di sviluppare nel seguito;
- interviste agli insegnanti videoregistrati, chiedendo ad essi di esplicitare gli obiettivi specifici che si erano prefissi a priori in vista della lezione destinata ad essere videoregistrata, seguite da interviste “a caldo” al termine della lezione, volte a stabilire un confronto fra le loro aspettative a priori e lo svolgimento effettivo della lezione, e affiancate infine, ove possibile, da ulteriori interviste, dopo avere visto la registrazione della propria lezione e gli elaborati degli studenti;
- pagine del libro di testo relative agli argomenti trattati nella lezione;

- pagine tratte dai quaderni degli allievi, relative agli appunti presi (o non presi ...) durante la lezione;
- pagine tratte dai quaderni degli allievi, con le soluzioni degli esercizi assegnati per casa al termine della lezione (in duplice versione: pagine prima della correzione in classe e pagine con le aggiunte e le precisazioni inserite a seguito della correzione).

- L'eccessiva ricchezza di suggestioni trasmesse dal prodotto audiovisivo lo rende di difficile decodificazione in vista di una discussione mirata, per cui da più parti è stata sollecitata una "guida di lettura". Ad esempio potrebbe essere opportuno intercalare le sequenze video con interruzioni programmate, fornendo suggerimenti per eventuali discussioni finalizzate a mettere in risalto specifici aspetti didattici, pedagogici, contenutistici, intuizioni felici, occasioni mancate,... Si potrebbero anche inserire domande provocatorie del tipo:
"Cosa avreste fatto voi a questo punto?",
"Siete d'accordo con ciò che ha detto or ora l'insegnante?",
"La sua gestione della lavagna è stata efficace?",
"Il suo linguaggio è stato chiaro?",
"E` stato comprensibile alla classe?",
"L'esemplificazione fornita è stata esauriente?",
"L'interazione fra l'insegnante e la classe ha coinvolto solo pochi allievi particolarmente motivati, o anche tutti gli altri?",
"Quali esercizi avreste proposto voi per verificare l'acquisizione o meno di questo o quel concetto?",...

Di tutti questi rilievi critici e di queste proposte migliorative cercheremo di tenere conto, corredando le future registrazioni con materiale ausiliario del tipo detto, e rendendo il tutto disponibile su un CD.

Un incoraggiamento a proseguire nel cammino appena iniziato ci è venuto dal fatto che i partecipanti agli incontri di Lucca e di Viareggio, pur con accentuazioni diverse, hanno sinceramente apprezzato il lavoro finora svolto, ritenendolo utile sia per un'autovalutazione dell'efficacia dell'impostazione didattica da parte degli stessi insegnanti coinvolti nelle videoregistrazioni, sia per attività di formazione e aggiornamento a più ampio raggio.

Avviandomi alla conclusione di questa presentazione, vorrei ribadire esplicitamente un punto che peraltro dovrebbe essere risultato chiaro già da quanto detto finora: non era e non è nostro obiettivo presentare esempi di "lezioni perfette" destinate ad essere imitate, quanto piuttosto una pluralità di approcci, per documentare il fatto che anche nell'insegnamento della matematica, e anche negli argomenti più tradizionali, sono possibili diversi stili di insegnamento, diversi metodi di valutazione, diversi tipi di "contratto didattico" tra insegnanti e allievi, ognuno con i suoi pregi e i suoi difetti.

Infine, desidero esprimere il mio più vivo ringraziamento e apprezzamento per gli insegnanti e gli allievi che hanno accettato di partecipare al progetto e di mettere pubblicamente in discussione il loro operato.

BIBLIOGRAFIA

Una documentazione esauriente di quanto finora realizzato si trova nella tesi (non pubblicata) di Lucia BETTINI: "Il mezzo audiovisivo come strumento per la ricerca didattica", Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, 1998.

GEOMETRIA E MULTIMEDIALITÀ: REALE O VIRTUALE [1]

Maria G. Bartolini Bussi
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università degli studi di Modena e Reggio Emilia
E-mail: bartolini@unimo.it

Introduzione

Nell'accezione corrente si parla di 'documento multimediale' intendendo un documento contenente testo, suoni, immagini, filmati ; un computer si dice multimediale quando è dotato di scheda sonora, microfono, altoparlanti, telecamera, eccetera. In molte scuole si costruiscono ambienti virtuali o si esplorano ambienti virtuali (creati dall'insegnante o disponibili su internet o su un cdrom locale). La tecnologia informatica è quindi chiamata in gioco con forza dal titolo di questo corso per insegnanti. In questo articolo, tuttavia, il termine è interpretato in senso più ampio, includendo nell'approccio multimediale tutto ciò che introduce novità significative rispetto al modo tradizionale di insegnare matematica con carta, penna, lavagna e ascolto dell'insegnante. Nel seguito verranno illustrate brevemente alcune ricerche, rinviando per dettagli alla bibliografia.

La drammatizzazione : il Menone nella scuola elementare

Il dialogo è uno scambio di battute, intese in senso lato non solo come espressioni verbali, ma anche come azioni, gesti o pause. Il dialogo può rivestire molta importanza nella didattica, sia nella sua forma esterna, finalizzata alla comunicazione con un interlocutore, che nella forma interna di dialogo con se stessi. Uno dei più famosi dialoghi della storia (il Menone, e, in particolare, l'episodio del dialogo tra Socrate e lo schiavo relativo al problema della duplicazione del quadrato) è stato utilizzato in classe come uno strumento non-standard in relazione al delicato problema didattico del riconoscimento di errori concettuali e del loro superamento attraverso spiegazioni di carattere generale (vedi Boero, Chiappini & Garuti (inviato per la pubblicazione)).

Alcune espressioni verbali e non verbali (specialmente quelle prodotte da scienziati del passato - ma anche da scienziati contemporanei) rappresentano in modo ricco e denso importanti passi nella evoluzione della matematica e delle scienze. Affrontando e risolvendo opportuni compiti proposti dall'insegnante, lo studente può tentare di collegare a una voce le proprie interpretazioni, concezioni, esperienze e può tentare di produrre un 'eco', cioè un legame con la voce reso esplicito attraverso un discorso. Il 'gioco voci-eco' è una particolare metodologia attraverso la quale gli studenti sono portati a produrre echi per mezzo di compiti specifici, come, ad esempio : 'Come avrebbe potuto X interpretare il fatto che .... ? Nell'esperimento sul Menone, dopo una attenta lettura e interpretazione del dialogo, si è chiesto agli studenti (di V elementare e II media) di produrre individualmente un dialogo dello stesso tipo su un errore concettuale 'importante' nella loro storia scolastica. Il dettaglio del progetto didattico non è riportato per mancanza di spazio.

Il gioco voci-eco si è dimostrato, nel caso del Menone, una metodologia educativa appropriata per : 1) sviluppare la consapevolezza degli studenti sul funzionamento della conoscenza teorica quando sono in gioco errori concettuali ; 2) promuovere la consapevolezza dei (diversi) ruoli assunti dall'insegnante e dagli allievi nelle attività riguardanti gli errori concettuali. Poiché il riconoscimento e il superamento degli errori concettuali riveste un ruolo cruciale nell'evoluzione della matematica e delle scienze, è naturale che nella storia della matematica e piu' in generale nella storia della cultura si incontrino voci dialogiche (scambi di lettere, dialoghi immaginari, ecc.) che affrontano questo tema. La produzione di echi a voci dialogiche ben scelte in compiti opportuni può quindi condurre gli studenti a partecipare consapevolmente al processo di riconoscimento e superamento di errori concettuali.

La manipolazione di strumenti : ingranaggi nella scuola elementare

In un'altra ricerca (Bartolini Bussi & al, in stampa), si introducono in classe ingranaggi, meccanismi e figure testi che consentono una loro modellizzazione geometrica. La scelta di un contesto didattico ricco di oggetti concreti presenta limiti e vantaggi per l'attività matematica. Tra i limiti ricordiamo il pericolo che gli oggetti concreti inducano processi cognitivi di tipo quotidiano e non matematico. Tra i vantaggi segnaliamo la potenzialità della esplorazione dinamica guidata della realtà (realizzabile anche con allievi molto giovani) come passo preliminare alla molto più libera esecuzione di esplorazioni dinamiche mentali. Poiché tali esplorazioni dinamiche sembrano essere uno degli elementi fondamentali del ragionamento matematico, non si deve sottostimare l'importanza degli oggetti concreti nel dare inizio a tale processo nei primi anni di scuola. Per evitare di cadere nei processi tipici della vita quotidiana, è necessaria una accurata gestione delle situazioni problematiche. Gli oggetti concreti non sono di per sé trasparenti, anche se molti creatori di materiale strutturato pensano il contrario. Il loro significato viene costruito attraverso le pratiche culturali messe in opera nella classe con l'aiuto dell'insegnante. La semplice proposta di ingranaggi non è sufficiente ad avviare processi cognitivi interessanti per la matematica.

I problemi di meccanismi e ingranaggi da noi considerati sono sostanzialmente di due tipi: a) problemi di *costruzione* (es. costruzione di ingranaggi o meccanismi con vincoli dati), b) problemi di *funzionamento* (es. analisi del funzionamento di un ingranaggio o di un meccanismo dato).

Nella costruzione, che si basa anche sullo 'smontaggio' di oggetti già dati, si esplorano le relazioni geometriche tra gli elementi che costituiscono l'oggetto, a volte modellizzabili nel piano (es. correttore a nastro o bianchetto, puliscitestine, catena di trasmissione), ma più spesso nello spazio (es. apriscatole, cambio della bicicletta, mulino, cavatappi, frullino a mano). La geometria di Euclide è una delle teorie che offrono modelli per la matematizzazione di questi problemi. E' opportuno precisare che la geometria di Euclide non è semplicemente 'applicata' alla soluzione dei problemi, ma arricchita dalla soluzione di problemi che evocano il movimento di ingranaggi, attraverso l'introduzione di una componente dinamica che troppo spesso rimane nascosta.

Nel funzionamento, ciò che è in gioco è la cinematica (la dinamica, riguardante forze e attriti è al di fuori della portata dei nostri allievi): è interessante osservare che questo è un esempio di teoria scientifica (risalente almeno ad Erone) facilmente esplicitabile anche ad allievi giovani o di estrazione socioculturale bassa, fino alla realizzazione di prime dimostrazioni. A partire dal postulato: *Due ruote dentate ingranate hanno versi di rotazione opposti* è facile dimostrare alcuni teoremi (es. *Tre ruote ingranate a due a due non possono girare*) che prevedono anche ragionamenti per assurdo. La produzione di questi enunciati e la loro dimostrazione si e' rivelata accessibile anche ad allievi di scuola elementare di estrazione socioculturale molto bassa.

La manipolazione di strumenti reali nella scuola superiore

Esiste a Modena una ampia collezione di macchine matematiche (oltre 150), prodotte e conservate da Annalisa Martinez, Marcello Pergola e Carla Zanoli, presso il Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica. Le macchine comprendono, oltre a modelli statici di grandi dimensioni (es. sezioni coniche), anche numerosi modelli dinamici tra cui ricordiamo gli strumenti per la prospettiva (*prospettografi* statici e dinamici), i meccanismi per il tracciamento di curve (*curvigrafi*) e i biellismi per la realizzazione di trasformazioni geometriche (*pantografi*). Diversi studi hanno evidenziato che nel corso dell'esplorazione guidata di curvigrafi gli studenti sperimentano 'in atto' concetti importanti per la geometria, quali :

1) il concetto *di sistema di riferimento* : lo strumento e le regolarità che si rivelano nel suo uso determinano coppie di rette (guide fisiche, fili o traiettorie), che possono essere ortogonali o no ; la relazione della curva tracciata dallo strumento con tali rette, attraverso misure esatte e precise, 'può essere espressa per mezzo di una equazione, la stessa per tutti i punti' (per usare le parole di Descartes);

2) il concetto di *funzione* : lo strumento consente di esperire 'moti rettilinei che dipendono uno dall'altro' (per usare le parole di van Schooten) ;

3) il concetto di *parametrizzazione di una curva algebrica* : lo spazio dei parametri è un luogo reale (una guida o una traiettoria) percorso dal punto che viene impugnato per pilotare il moto (punto 'direttore', per usare le parole di Newton), mentre la penna (punto 'tracciatore') disegna la curva.

La manipolazione di strumenti virtuali nella scuola superiore

Esistono numerosi software, con finalità professionali e/o didattiche, che consentono di realizzare o di utilizzare a scuola ambienti virtuali dinamici. La letteratura al riguardo è sempre più vasta (e autocelebrativa), anche se la ricerca didattica sui limiti nell'uso e sui processi mentali messi in opera rappresenta una parte molto limitata della produzione.

Nel nostro gruppo abbiamo per ora utilizzato le potenzialità di alcuni software per realizzare ambienti con strumenti virtuali. Abbiamo costruito simulazioni della maggior parte delle macchine matematiche con il software Cabri II Windows, con Java e con Microstation (vedi Bartolini Bussi & al. 1999) [2]. L'utilizzo didattico può essere di vario tipo :

1) presentazione da parte dell'insegnante, nel corso di una lezione dalla cattedra (schermo come lavagna dinamica) ;

2) ricostruzione da parte degli studenti della simulazione di una macchina (macchina virtuale) a partire dall'osservazione di un modello reale o di un progetto (con immagini e testi) o di un'altra simulazione già prodotta;

3) esplorazione da parte degli studenti di una macchina virtuale per produrre congetture e costruire le relative dimostrazioni.

La costruzione della simulazione di una macchina può essere facile o difficile, rapida o laboriosa a seconda del software utilizzato. A titolo di esempio possiamo confrontare la procedura di costruzione di una simulazione in Cabri e in Java. Cabri è un software didattico sufficientemente noto. Java è un linguaggio di programmazione ad oggetti : è stato da noi predisposto un package (*MathMachine©*), che contiene, come una scatola di meccano virtuale, gli oggetti elementari utilizzati per costruire le simulazioni delle diverse macchine (giunti o perni ; aste ; corde ; scanalature). Ogni applet che contiene una macchina accede alle classi del package con una semplice istruzione di *import*. Questo consente di scrivere per ciascuna macchina solo la parte di codice che la differenzia dalle altre. Nonostante ciò, la costruzione di simulazioni con Java è abbastanza complessa per chi non sia esperto di programmazione. Mentre il compito di costruire una simulazione Cabri può essere alla portata di studenti di scuola superiore, la costruzione di una simulazione Java è decisamente più problematica.

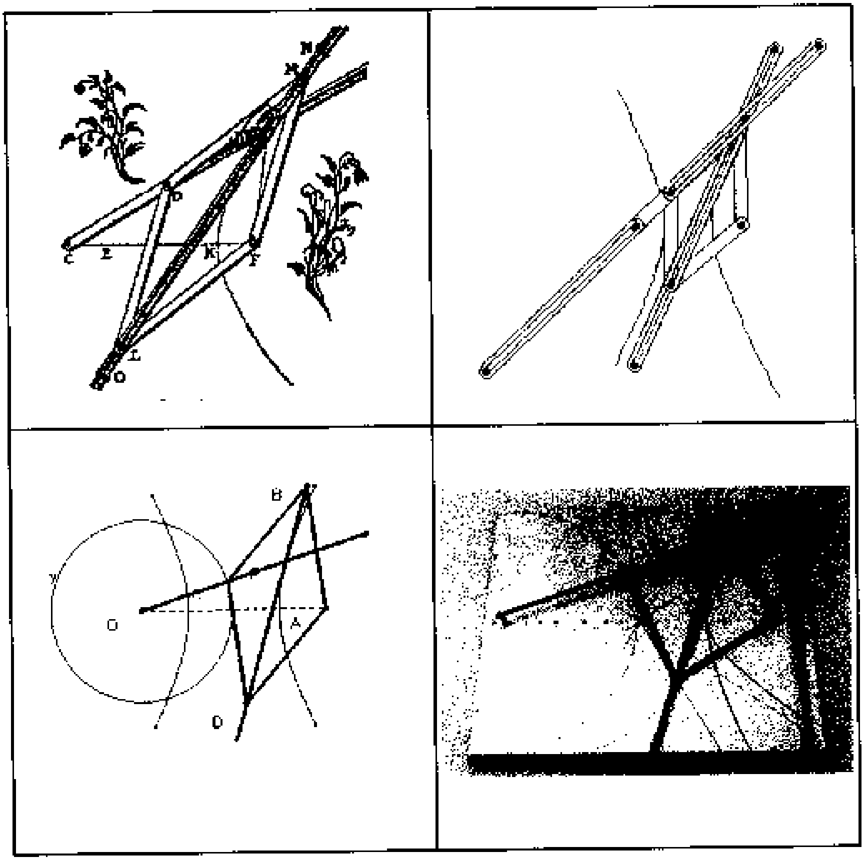
Sulle simulazioni già pronte in Cabri o in Java è possibile compiere esplorazioni per certi aspetti simili a quelle che si possono compiere sulle macchine reali, e, per altri aspetti, estremamente diverse. E' simile la possibilità di esplorazione attraverso il moto dei punti direttori, anche se, non sempre i vincoli meccanici di una particolare realizzazione della macchina reale sono rispettati. C'è maggiore flessibilità, poiché, in entrambi i casi, si può in modo semplice modificare alcuni parametri dello strumento, costruendo, a partire dalla stessa simulazione, una intera famiglia di strumenti virtuali. E' interessante anche confrontare i due ambienti virtuali Cabri e Java *MathMachine©*. L'ambiente Cabri si presta a due utilizzi diversi e complementari : è lo spazio della simulazione su cui muovere la macchina virtuale e la lavagna dinamica su cui eseguire costruzioni ausiliarie. Proprio questa sua duplicità può dare qualche problema didattico : lo studente può, forse troppo facilmente, modificare la simulazione iniziale, distruggendo la macchina virtuale, e cambiare quindi i termini del problema. In Java *MathMachine©* non è invece possibile compiere costruzioni aggiuntive. Sotto questo aspetto, la macchina Java è indistruttibile, anche se è messa in moto da utenti del tutto inesperti. In entrambi i casi, la facilità a tradurre in esperimento reale il progetto di un esperimento mentale può facilmente spostare l'attenzione degli studenti sulle verifiche solo empiriche, creando le premesse perché la fase (necessaria) di dimostrazione sia rifiutata dagli studenti.

Conclusione

In questa breve rassegna di ricerche, abbiamo presentato studi di diversa natura. In tutti i casi considerati, l'ambiente carta e matita (eventualmente dotato di riga e compasso) in cui si sviluppa di solito la geometria a scuola, è arricchito da elementi e modalità di azione nuovi : non più solo l'ascolto passivo della lezione o la soluzione in solitudine di un problema carta e matita, ma la drammatizzazione e la produzione di un dialogo ; la manipolazione e la produzione di oggetti reali o virtuali e la enunciazione di congetture sulle loro proprietà.

In questa presentazione, il reale e il virtuale non sono contrapposti, ma piuttosto collocati e posti in relazione tra loro in un repertorio di opportunità a cui l'insegnante può attingere per costruire ambienti efficaci per l'insegnamento - apprendimento della geometria. Quando, come nel caso paradigmatico dei curvigrafi da noi illustrato, sono disponibili ambienti reali e virtuali con 'gli stessi' oggetti, nei quali è possibile compiere 'le stesse' esplorazioni, ci sono ragioni che giustificano la scelta di uno di essi ? e, se tali ragioni esistono, di che natura sono ? Organizzative ? Epistemologiche ? Cognitive ?

Abbiamo dato alcuni elementi, ancora frammentari, per iniziare a rispondere a queste domande. E' urgente condurre ricerche serie in questa direzione, per evitare che la scelta, ove possibile, dell'uno o dell'altro ambiente sia compiuta sulla base di ragioni puramente ideologiche. Questo, nella sua complessità, è un tipico problema di ricerca in didattica della matematica.



Curvigrafi reali e virtuali:
il disegno di Van Schooten, la simulazione Java (*MathMachine*©)
la simulazione Cabri, il modello fisico

Note

[1] Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del progetto nazionale 'Ricerche di Matematica e Informatica per la Didattica' (coord. F. Arzarello).

[2] L'ipertesto è esplorabile nel sito web : < http://museo.unimo.it/theatrum/ >

Bibliografia minima

Bartolini Bussi M., Boni M., Ferri F. and Garuti R. (in stampa), Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School. Educational Studies in Mathematics

Bartolini Bussi M., Nasi D., Martinez A., Pergola M., Zanoli C. & al. (1999), Laboratorio di Matematica. Theatrum Machinarum. I CD rom del Museo (1). Modena : Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica.

Boero P., Chiappini G. & Garuti R. (inviato per la pubblicazione), Bringing the Voice of Plato in the Classroom : Students' Approach to Detecting and Overcoming Conceptual Mistakes in Mathematics.

GEOMETRIA E SOFTWARE DIDATTICO

Giovanni Olivieri

Docente di Matematica applicata in servizio presso
I.T.C. "Carlo Matteucci" di Roma

Negli ultimi anni l'utilizzo di software nell'insegnamento della geometria, o della matematica in generale, ha avuto un forte incremento, grazie anche alla diffusione di prodotti dedicati, tra i quali, ad esempio, *Cabri Géométre* e *Derive*, che risultano tra i più conosciuti. Questi due sono stati gli ambienti a disposizione per le attività di laboratorio e la scelta dei problemi da proporre per i lavori di gruppo è stata effettuata proprio in considerazione di questa disponibilità.

Con riferimento al problema particolare dell'insegnamento della geometria, l'utilizzo di software cambia in modo quasi radicale il modo di affrontare lo studio, di analizzare situazioni e di risolvere problemi. L'uso di strumenti informatici comporta infatti un modo di lavorare sostanzialmente diverso da quello derivante dall'approccio "carta e matita", in quanto, ad esempio, si possono

- dinamicamente modificare figure o configurazioni, ad esempio "trascinandone" gli elementi di base;
- effettuare calcoli complessi o simbolici, senza eccessivamente preoccuparsi della correttezza del relativo sviluppo sintattico;
- rappresentare situazioni anche complesse in modo sostanzialmente corretto, che non sempre si possono invece facilmente rappresentare con disegni "carta e matita".

Occorre però tenere presente che l'uso indiscriminato e acritico di software comporta svantaggi a volte notevoli nell'apprendimento e nell'elaborazione delle conoscenze, in quanto, ad esempio, si corre il rischio di confondere il piano dell'illustrazione di formule o teoremi, ovvero della verifica, con quello della dimostrazione e il piano dell'*evidenza*, o almeno di ciò che sembra l'evidenza, con quello della *verità*.

L'utilizzo di software nell'insegnamento comporta, quindi, indubbi vantaggi, ma anche non trascurabili svantaggi, che a volte possono diventare vere e proprie "barriere" all'apprendimento, poiché spesso portano all'accettazione passiva dei risultati forniti dal calcolatore ("esatti per definizione") e impediscono, o quantomeno rendono molto meno sentita, la necessità di rafforzare l'intuizione con il ragionamento e l'analisi argomentata, ovvero con la dimostrazione.

PRIMA GIORNATA DI ATTIVITÀ

I problemi selezionati per la prima giornata di lavoro in laboratorio rispondevano soprattutto all'esigenza di far prendere familiarità con i software a disposizione, che non tutti i docenti sapevano peraltro utilizzare con sufficiente padronanza. Il livello di complessità dei problemi proposti è quindi piuttosto debole e nessuno di essi presenta particolari difficoltà sul piano concettuale.

Proposta di lavoro numero 1

Partendo eventualmente dall'analisi dei problemi di seguito proposti, con riferimento alla propria esperienza di insegnanti, analizzare e discutere i seguenti aspetti:

- è opportuno l'uso di software anche per risolvere problemi di verifica "numerica";
- l'uso del computer fa diminuire il tasso concentrazione dello studente, ovvero comporta più svantaggi che vantaggi;
- l'uso del computer consente di concentrarsi sulla soluzione di problemi, piuttosto che sulla produzione del risultato; in altre parole aumenta la "qualità" del lavoro di analisi.

Problemi

1. Dato un triangolo equilatero, studiare la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolare condotti da un punto interno (esterno) a ciascuno dei tre lati.
2. Dato un triangolo, studiare la relazione che esiste tra baricentro, ortocentro e circocentro.
3. Verificare se i tre punti A=(-3,1) B=(3\4, 7\2) e C=(-5\2, 199\150) sono allineati.
4. Costruire un parallelogramma data la lunghezza delle sue diagonali.
5. Costruire un quadrato dato un lato.
6. Costruire una parabola come luogo geometrico.
7. Costruire la tangente ad una circonferenza da un punto esterno.

8. Costruire una circonferenza dati due punti e la lunghezza del raggio.
9. Costruire una circonferenza tangente ad una retta in un punto e passante per un punto dato.

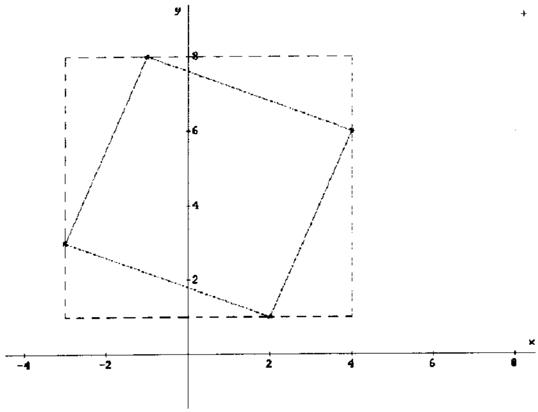
Tutti i problemi, ad eccezione del terzo, sono stati risolti in laboratorio utilizzando *Cabri Géomètre*.

Dalla discussione effettuata nei diversi gruppi sono emerse alcune considerazioni di carattere generale, esplicitate anche con riferimento alle osservazioni effettuate da molti insegnanti sui propri studenti, mentre questi lavorano in laboratorio:

- una volta impadroniti nell'uso di *Cabri*, gli studenti effettivamente si concentrano con maggior attenzione sulla soluzione del problema;
- si lavora in ambiente dinamico e questo consente di poter effettuare congetture, grazie anche alla possibilità di analizzare in un tempo relativamente breve una grande varietà di situazioni;
- dall'osservazione di numerosi casi discende la possibilità di effettuare congetture con relativa facilità;
- si supera il problema del saper disegnare (questo fatto rappresenta un vantaggio per molti studenti), e ciò consente una buona visualizzazione delle situazioni;
- l'uso libero di ambienti informatizzati consente la ricerca di percorsi diversi, in funzione della personale capacità di vedere o ipotizzare relazioni o connessioni.

L'inserimento del problema numero 3, verifica dell'allineamento di 3 punti, aveva l'obiettivo di cominciare a far riflettere sul problema di quanto fosse effettivamente evidente una "proprietà evidente". La rappresentazione dei tre punti in un piano dotato di sistema di riferimento cartesiano, ad esempio quello utilizzato da *Derive*, sembra rendere manifesta la proprietà di allineamento. Questa "evidenza" è in qualche modo ulteriormente rafforzata dalla "constatazione" che la retta condotta per A e per C "passa" per il punto B, ovvero che questo punto sta sulla retta passante per A e per C. La verifica numerica, ad esempio mediante calcolo dei rapporti $\Delta y/\Delta x$, rende invece conto di quanto la realtà non corrisponda all'evidenza della rappresentazione.

Riguardo al problema numero 5, costruzione di un quadrato di dato lato, è stato invece osservato che esso può essere risolto utilizzando in modo intuitivo il piano vettoriale, ovvero ragionando sulle componenti del lato assegnato, inteso come vettore. Il lato può essere assegnato dando le coordinate dei due punti che ne costituiscono gli estremi. Il quadrato può quindi essere costruito riportando opportunamente le componenti del lato, individuate parallelamente ai due assi cartesiani. Questo modo di pensare alla costruzione del quadrato può essere intuitivamente utilizzato da studenti che sono anche solo in grado di individuare la posizione di punti sul piano cartesiano.



Più avanti negli anni, questo stesso problema può essere nuovamente analizzato al fine di definire una funzione in *Derive*, atta a individuare i quattro vertici del quadrato. Ad esempio, il quadrato è completamente individuato dalla seguente funzione delle quattro variabili x_0, y_0, x_1 e y_1:

$$Q(x0,\ y0,\ x1,\ y1) := \begin{bmatrix} x0 & y0 \\ x1 & y1 \\ x1 - (y1 - y0) & y1 + (x1 - x0) \\ x0 - (y1 - y0) & y0 + (x1 - x0) \\ x0 & y0 \end{bmatrix}$$

SECONDA GIORNATA DI ATTIVITÀ

I problemi selezionati per la seconda giornata di attività in laborâtorio, avevano l'obiettivo principale di far emergere con maggior evidenza i limiti all'uso del software e la consapevolezza che, prima di operare con mouse o tastiera, è necessario riflettere sulla struttura della situazione da affrontare e, soprattutto, fare un piano di lavoro. Il passaggio praticamente immediato tra acquisizione del compito e utilizzo del calcolatore impedisce spesso di percepire la vera essenza del problema ed è questo un errore in cui gli studenti tipicamente incorrono. Tipici esempi del fatto che una preliminare analisi del problema porta a "percepire" in modo diverso la situazione sono il primo e l'ultimo dei problemi proposti.

Proposta di lavoro numero 2

Partendo dalla risoluzione dei problemi di seguito proposti, con riferimento alla propria esperienza di insegnanti, analizzare e discutere i seguenti aspetti, per almeno tre dei problemi di seguito riportati:

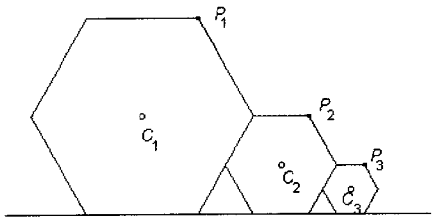
- gli aspetti didattici che l'uso di software può evidenziare nella risoluzione dei problemi;
- i nodi concettuali ai quali occorre porre l'attenzione durante la risoluzione dei problemi, che vengano con l'aiuto del computer o meno;
- gli approfondimenti e i collegamenti che possono essere sviluppati a partire dalla risoluzione dei problemi.

Problemi

1. Studiare in modo completo la funzione[1]:
$$f:\begin{cases} R \to R \\ x \mapsto \dfrac{x^3-4x}{x^2-1}+5[\ln(x+1)-\ln(x-1)] \end{cases}$$
2. Studiare in modo completo le funzioni:
$$f_{1,2}:\begin{cases} R \to R \\ x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}+10[\ln(x^2-1)-\ln(x\pm 3)] \end{cases}$$
3. Determinare la matrice della simmetria assiale rispetto alla retta r di equazione $ax+by+c=0, \quad \text{con } a,b\neq 0$
4. Dati due diversi quadrati, con $l_1 \neq l_2$, determinare le caratteristiche della trasformazione che porta l'uno nell'altro.
5. Sono fissati una circonferenza Γ e un punto P non appartenente a Γ. Considerato un punto A sul Γ, studiare le proprietà della linea descritta dal punto medio del segmento AP, al muoversi del punto A.
6. Una successione di esagoni regolari è costruita come in figura. Studiare l'andamento delle successioni di distanze dei punti C_1, C_2, e C_3 dalla linea di "terra" e dei punti P_1, P_2, e P_3 dalla stessa linea di terra. Studiare

[1] Questo problema è stato presentato e discusso nel seminario "Matematica e software didattico", organizzato dall'IRRSAE Emilia e Romagna (Bellaria 22-24 aprile 1998).

inoltre l'andamento della successione costituita dal rapporto delle distanze dei punti P_i rispetto ai relativi punti C_i, sempre con riferimento alla linea di terra.



In questa seconda giornata, a differenza della prima, il dibattito e la discussione sono stati più incentrati sull'analisi delle caratteristiche dei singoli problemi, che in effetti si prestavano meglio per una discussione più puntuale, anche in considerazione del fatto che si era ormai acquisita familiarità con l'uso dei software a disposizione. Ci si è quindi meglio concentrati sulle caratteristiche dei problemi proposti.

Problema numero 1 (e 2)

Il grafico ottenuto con *Derive* è errato: questo fatto non è in genere immediatamente rilevato dagli studenti, se non hanno prima riflettuto sulle proprietà generali della funzione e, quindi, individuato il relativo insieme di definizione. In *Derive* il logaritmo di un numero viene calcolato nell'insieme dei numeri complessi e questo fatto porta alla rappresentazione della funzione anche per quei valori reali, che invece dovrebbero essere esclusi poiché non appartenenti all'insieme di definizione. La discussione sull'equivalenza formale o sostanziale di espressioni logaritmiche porta a meglio approfondire i limiti entro i quali si possono utilizzare determinate proprietà dei logaritmi, ad esempio per trasformare il logaritmo di un quoziente nella differenza di logaritmi, o viceversa. Trasformando invece $-\ln(a)$ in $\ln(a^{-1})$, il grafico è disegnato in modo corretto.

È interessante proporre questo esempio in laboratorio, proprio per evidenziare la necessità che i risultati prodotti da un automa, di cui spesso non si conoscono appieno le modalità di funzionamento, siano acquisiti con un minimo di attenzione. Indagare in questo caso sul comportamento dell'automa implica un naturale approfondimento di proprietà relative al campo dei numeri complessi.

Problema numero 3

Il vantaggio nell'uso del software deriva soprattutto dal fatto che si evita la complessità del calcolo simbolico, che deve invece essere eseguito per ottenere il risultato voluto.

Un'accurata analisi preliminare del problema porta comunque a semplificare la complessità del calcolo, scegliendo un opportuno sistema di riferimento. Ad esempio, considerando l'equazione dell'asse di simmetria nella forma $y = mx + q$, si può effettuare una traslazione che porti il punto $(0; q)$ nell'origine del sistema di riferimento, riconducendosi così a un caso più semplice da sviluppare.

Problema numero 4

Il problema assume diversa complessità di analisi a seconda che i vertici dei due quadrati siano "denominati" oppure no. In questo secondo caso infatti si può prescindere da un'eventuale rotazione che riporti uno dei due quadrati in se stesso, orientandolo in modo opportuno rispetto all'altro.

Dall'osservazione che *due quadrati diversi sono sempre simili tra loro*, si riesce a individuare una particolare soluzione al problema, ad esempio determinando le caratteristiche dell'isometria che "riorienta" uno dei due quadrati e, successivamente, una delle due omotetie che trasformano l'uno nell'altro.

Problema numero 5

La situazione, una volta impostata, risulta sufficientemente chiara: il punto descrive una circonferenza di raggio uguale alla metà di quello della circonferenza Γ. La linea generata dal movimento del punto medio del segmento AP, al muoversi di A, corrisponde al risultato di un'omotetia di centro P e rapporto 1/2.

Il problema può essere proposto a diversi livelli: come indagine e ricerca in classi di biennio oppure come verifica in classi di triennio. Un'analisi accurata del problema dovrebbe infatti portare quasi subito a individuare la soluzione, senza avere la necessità di impostare il lavoro al calcolatore.

Problema numero 6

Il problema rappresenta un forte momento di rottura rispetto alla "frenesia" di utilizzare mouse e tastiera: la sua natura è apparentemente complessa ed è posto in fondo ad una lista di questioni in cui l'uso del calcolatore è quasi indispensabile; "ovvia" la tendenza a lavorare pensando all'uso di software. Una breve analisi preliminare, invece, porterebbe quasi immediatamente a individuare che:

- prima e seconda successione sono progressioni geometriche di ragione 1/2, con primo elemento rispettivamente l'apotema, $l\sqrt{3}/2$, del primo esagono o il doppio di tale apotema;
- la successione dei rapporti è costituita da valori costanti e uguali a 2.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

L'utilizzo di software presenta indubbi vantaggi per analizzare e meglio comprendere la struttura di un problema e per indagare motivatamente su fatti e situazioni anche complesse. L'utilizzo di ambienti informatizzati è a volte necessario per affrontare particolari tipi di problemi, complessi oppure risolubili con calcoli particolarmente complicati. Come ogni medaglia, però, anche quella relativa all'uso di prodotti informatici ha un suo rovescio: l'uso acritico potrebbe addirittura diventare una vera e propria barriera alla flessibilità cognitiva e all'analisi di situazioni in cui l'uso del software potrebbe aiutare poco o addirittura per niente.

In ogni caso, occorre tenere presente che gli studenti, soprattutto all'inizio, devono imparare a collegare l'*ambiente macchina*, dotato di una sua logica e di sue regole, con l'ambiente *carta e matita*, tradizionali strumenti utilizzati per fare matematica. Il collegamento tra questi due ambienti deve avvenire con la forza della razionalità e dell'accettazione critica dei risultati che emergono dall'uso di strumenti automatici di elaborazione, ponendosi abbastanza spesso l'obiettivo di confermare o confutare con l'argomentazione e il ragionamento la validità dei risultati intuiti.

Il problema che infatti sembra oggi emergere con sempre più evidenza tra gli insegnanti, non è tanto quello di interrogarsi *se* usare software nell'insegnamento, quanto piuttosto *come* usarlo, avendo ben presenti vantaggi e svantaggi relativi, campo di applicabilità e limiti nell'uso di tali strumenti.

BIBLIOGRAFIA

MARGIOTTA G., (a cura di) *Matematica e software didattici*, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna, 1999

ANICHINI G., D'AMORE B., (a cura di) *Apprendere la matematica: errori, difficoltà, conquiste*, atti del XIX convegno nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica, Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, supplemento al n.ro 10, ottobre 1998

LA DIMOSTRAZIONE IN GEOMETRIA

Ornella Robutti

Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Torino

Per tradizione, la dimostrazione si ha in geometria. Questa posizione ha caratterizzato fortemente la prassi didattica: non solo in Italia, ma un po' ovunque, in classe, la dimostrazione viene introdotta con la geometria e, in particolare, con la geometria sintetica.

In realtà, negli ultimi anni, nella scuola superiore italiana si sono andate diffondendo tendenze didattiche che si basano su un progressivo ridimensionamento dell'insegnamento della geometria euclidea, soprattutto per quanto riguarda la dimostrazione in geometria, o dell'abitudine a risolvere problemi con dimostrazioni. Senza volerne discutere le cause e le ripercussioni, abbiamo dedicato uno dei lavori di gruppo proprio alla riflessione sul tema della dimostrazione in geometria, con l'obiettivo di discutere su un possibile rinnovamento della didattica della geometria che integri ciò che offrono le nuove tecnologie con gli elementi di tradizione, come i problemi di dimostrazione o di costruzione. L'integrazione dello strumento informatico con l'insegnamento di una disciplina così classica presuppone che qualche cosa si debba cambiare nei contenuti e nella metodologia d'insegnamento rispetto a quella tradizionale.

Siamo consapevoli che occorra fare delle scelte, alla base della nostra programmazione didattica, di obiettivi, contenuti, metodologie, strumenti, ecc...

Se un obiettivo è quello di fare della dimostrazione un oggetto di didattica, allora occorre progettare percorsi che, attraverso i contenuti della geometria in particolare, (ma anche di altri campi quali: teoria dei numeri, algebra, geometria analitica, trigonometria o analisi), conducano gli studenti a "fare" dimostrazioni. Conviene quindi evitare di spiegare dimostrazioni tramite la lezione frontale, oppure di leggere dimostrazioni sui libri di testo, perché in questo modo gli studenti sono passivi nei confronti delle stesse, e il rischio di tale metodologia è quello di formare ragazzi in grado di ripetere dimostrazioni fatte da altri, ma di non essere in grado (ad eccezione dei migliori) di farle in maniera autonoma. Allora la proposta potrebbe essere quella di insegnare agli alunni a costruire una dimostrazione, passando attraverso tutte quelle fasi per cui passano i matematici "esperti", ossia: la ricerca di proprietà, la formulazione di congetture, la messa alla prova delle congetture per vedere se valgono o meno, (per esempio tramite la ricerca di controesempi), infine la costruzione di dimostrazioni di congetture validate, all'interno di una teoria di riferimento. Per un'attività didattica di questo tipo può essere utile un software come Cabri-Géomètre[1], che, soprattutto nella versione I.7, si presta particolarmente bene, in quanto fa riferimento ad un dominio teorico circoscritto (quello della geometria euclidea e delle costruzioni con riga e compasso). Anche nella versione successiva (II) è utilizzabile, ma poiché integra la geometria euclidea con la geometria analitica e quella delle trasformazioni, può essere utilizzato in un secondo momento rispetto a Cabri I, magari a livello di triennio.

Grazie alla funzione di trascinamento, che differenzia Cabri dalla carta e matita, è possibile progettare attività che aiutino gli studenti a mettere in atto ragionamenti di tipo trasformazionale, a cogliere invarianti durante il trascinamento, a vedere le parti di cui è composta una figura geometrica in relazione di dipendenza funzionale le une dalle altre, quindi a riconoscere luoghi descritti da punti al variare di altri punti, oppure a scoprire sotto quali ipotesi vale una certa tesi, ... L'importante è alternare momenti di spiegazione con momenti in cui gli allievi possano esplorare situazioni geometriche, scoprendo essi stessi le proprietà. Allo scopo di favorire tale scoperta, si possono per esempio proporre schede di lavoro in cui i ragazzi utilizzano Cabri per risolvere un problema di tipo aperto, che si presenta come una situazione che lo studente deve

---

[1] Baulac, Y., Bellemain, F., Laborde, J.M.: 1988, *Cabri-Géomètre, un logiciel d'aide à l'apprentissage de la géomètrie. Logiciel et manuel d'utilisation,* Cedic-Nathan, Paris, (trad. it.: P. Boieri, *Cabri-Géomètre*, Manuale dell'utente, 1993, Loescher, Torino).

esplorare, per trovare risultati che poi vanno dimostrati. Le domande tipiche di un problema aperto sono per esempio: "Quali configurazioni assume ... Quali relazioni puoi trovare tra ...", piuttosto che le classiche: "Dimostra che...", "Trova ...", "Verifica ...". Sembra infatti che domande del tipo "Dimostra che ..." inibiscano addirittura la dimostrazione, soprattutto negli studenti della fascia medio-bassa, che trovano quasi impossibile avere quell'illuminazione utile a fare la dimostrazione.

Uno degli obiettivi che possiamo porci come insegnanti è il motivare gli studenti a dimostrare. Succede spesso infatti, che i primi esempi di dimostrazione che si affrontano in classe (per esempio se un triangolo è isoscele, allora ha gli angoli alla base congruenti), addirittura non vengano "sentiti" dagli studenti, che sono convinti che se una proprietà "si vede", allora è vera, dunque "perché dimostrarla?". Alcuni dati (Paola & Robutti, in stampa) suggeriscono che far lavorare gli studenti su problemi che richiedono esplorazioni dinamiche in un ambiente come Cabri li possa aiutare significativamente nel far nascere motivazioni alla dimostrazione, nel senso che, vista una proprietà con l'aiuto di Cabri, sorga la necessità di motivarla in un contesto teorico. Come suggerisce Polya (1954), prima ci si convince e poi si è pronti e motivati a dimostrare.

Problemi di tipo aperto non sono molto diffusi sui libri di testo, ma non è difficile costruirli a partire da un problema di tipo chiuso (es. "Dimostra che ..."), riformulando l'enunciato in modo da cambiare il meno possibile la situazione iniziale e da richiedere di scoprire proprietà su di essa.

Gli obiettivi principali della seguente proposta di lavoro sono:

1. analizzare la struttura di un elenco di problemi, per vedere se privilegiano un'attività di scoperta-congettura, o di dimostrazione;
2. trasformare in aperti i problemi di tipo chiuso dell'elenco stesso.

PROPOSTA DI LAVORO 1

Prendere in considerazione il testo dei problemi di seguito elencati, analizzandolo nelle informazioni fornite e negli obiettivi richiesti, cercando di evidenziare le parole chiave che fanno riferimento alle attività di scoperta, congettura o dimostrazione.

Per ciascun problema descriverne le caratteristiche, specificando se privilegia una attività di scoperta/congettura oppure di dimostrazione.

1. Dimostra che le bisettrici dei quattro angoli interni determinati da due parallele tagliate da una trasversale si incontrano in quattro punti che sono vertici di un rettangolo. Dimostra inoltre che la diagonale che non appartiene alla trasversale considerata è parallela alle due rette date.
2. Sia dato un quadrilatero ABCD. Considera le bisettrici dei quattro angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M (considerate in senso antiorario). Fai variare ABCD, esaminando tutti i casi particolari: come cambia la figura HKLM? (Che cosa diventa? quadrilatero particolare, triangolo, punto, ...)
3. Dato il trapezio ABCD, prolunga la base maggiore BC dalla parte di C di un segmento CE uguale alla base minore AD. Congiungi A con E e sia F il punto d'incontro della retta AE con il lato CD. Dimostra che i triangoli AFD e CEF sono uguali e che il quadrilatero ACED è un parallelogramma.
4. Sia dato un parallelogramma ABCD, tre rette passanti per A, B, C e parallele tra loro e una retta qualunque passante per D. Chiama E, F e G i punti di intersezione delle tre rette parallele con quella uscente da D. Studia le relazioni che sussistono tra il segmento BF e i segmenti AE, CG:
   - al variare della retta per D in un fascio tenendo fisse le parallele;
   - al variare delle parallele tenendo fissa la retta per D.
5. Siano date due circonferenze c e c' (con centri O e O') che si intersecano in due punti distinti A e B; siano D ed E i punti diametralmente opposti ad A rispettivamente su c e c'. Dimostra che i punti D, B, E sono allineati. Dimostra che i segmenti DE e OO' sono paralleli.
6. Tre circonferenze aventi lo stesso raggio passano per un punto comune P. Esiste una relazione tra gli altri tre punti di reciproca intersezione? E tra i loro tre centri?
7. Una corda di lunghezza costante scivola in un cerchio dato. Gli estremi della corda vengono proiettati ortogonalmente su un diametro fissato. Le proiezioni ottenute e il punto medio della corda sono i vertici di un triangolo. Si dimostri che il triangolo è isoscele e non cambia mai la sua forma allo spostarsi della corda nel cerchio[2].

[2] Questo problema è stato presentato e discusso nel seminario "Matematica e software didattico", organizzato dall'IRRSAE Emilia e Romagna (Bellaria 22-24 aprile 1998).

SITUAZIONE 2

Un problema di tipo chiuso può essere riformulato in modo aperto (e viceversa). Di seguito trovate come esempio un problema classico (problema di Varignon) e la sua modificazione in problema aperto.

PROBLEMA A

Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N, P i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, CD, DA. Dimostrare che il quadrilatero LMNP è un parallelogramma.

PROBLEMA B

Situazione

Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N, P i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, CD, DA.

Proposta di lavoro

- *Quali proprietà ha il quadrilatero LMNP?*
- *Quali configurazioni particolari assume il quadrilatero LMNP?*
- *Quali ipotesi sul quadrilatero ABCD occorre fare affinché LMNP assuma tali configurazioni particolari?*

PROPOSTA DI LAVORO 2

Trasformate in problemi aperti i problemi di tipo chiuso della prima parte della proposta di lavoro.

Dall'attività dei gruppo di lavoro sono emerse le seguenti osservazioni. Nel problema n.1, formulato in modo chiuso, è prevalente l'attività di dimostrazione. E' adatto a un primo anno di scuola superiore. Può essere risolto con carta e matita, ma sembra essere utile Cabri per una risoluzione di una sua formulazione più aperta, come la seguente:

Disegna due rette parallele r ed s. Disegna una trasversale t. Considera gli angoli interni formati dalla trasversale t con r ed s. Traccia le bisettrici degli angoli interni. I loro punti di intersezione sono i vertici di un quadrilatero.

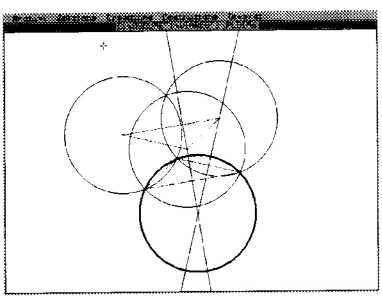
Proposta di lavoro:

- *Che tipo di quadrilatero hai ottenuto?*
- *Osservi una particolare proprietà di una delle diagonali del quadrilatero?*
- *Motiva le risposte e dimostra le congetture.*

In questa nuova formulazione, il problema si presta ad essere affrontato in Cabri, perché il dinamismo del software offre la possibilità di muovere le due rette parallele, o la trasversale, osservando che la figura costruita si mantiene sempre un rettangolo, con una diagonale parallela alle due rette.

I problemi n. 2, 4, 6 favoriscono particolarmente le attività di scoperta e congettura. Si tratta di problemi aperti, particolarmente ricchi di stimoli e di potenzialità, da proporre con l'uso di Cabri in una seconda superiore, perché il software è idoneo per l'esplorazione dinamica della figura, l'individuazione dei casi particolari, l'analisi delle connessioni logiche tra ipotesi e tesi, con procedimenti in ascesa e discesa tra le une e le altre. Lo strumento tradizionale, (carta e matita), in questi problemi si rivela inadeguato perché non permette la stessa ricchezza di congetture, esplorazioni, ... Il problema n.2 è particolarmente ricco di risultati, perché può essere esplorato dagli studenti a vari livelli: a un primo livello si ottiene che, se il quadrilatero "esterno" è un quadrato o un rombo, allora quello "interno" (cioè quello formato dalle bisettrici) degenera in un punto. Ma ad un livello più approfondito si possono trovare ipotesi più generali delle precedenti, (in questa ricerca sicuramente Cabri offre un supporto fondamentale): se il quadrilatero esterno è circoscritto a una circonferenza, allora le quattro bisettrici si intersecano in un punto. Quindi è possibile che gli studenti affrontino il problema in due modi diversi: partendo da un quadrilatero particolare (rettangolo, quadrato, rombo, ecc) e osservando come diventa il quadrilatero interno, oppure partendo dal risultato (quadrilatero interno con una particolare configurazione) e cercando sotto quali ipotesi sul quadrilatero esterno essa si presenta.

Il problema n.6, piuttosto impegnativo, può anche essere proposto nel triennio. Si tratta di scoprire che i tre punti in questione individuano una circonferenza di raggio uguale a quello delle altre tre. La stessa proprietà vale per i tre centri, inoltre i due triangoli determinati da queste terne di punti si corrispondono in una



simmetria centrale.

Nel problema n.3, in cui è prevalente l'attività di dimostrazione, l'uso di Cabri può essere proficuo, ma non particolarmente significativo rispetto allo strumento carta e matita. La riformulazione del problema in termini aperti può aumentare la motivazione degli studenti e favorire la gradualità di approccio alla fase dimostrativa.

Disegna un trapezio ABCD. Prolunga la base maggiore BC dalla parte di C di un segmento CE uguale alla base minore. Congiungi A con E e chiama F il punto di incontro della retta AE con il lato CD.

<u>*Proposta di lavoro:*</u>

- *Che relazione osservi tra i triangoli AFD e CEF?*
- *Di che tipo è il quadrilatero ACED?*
- *Esiste una relazione tra il trapezio ABCD e il triangolo ACE?*

Motiva le risposte in modo sintetico e dimostra le congetture.

Le stesse considerazioni si possono fare per il problema n. 5. La sua riformulazione in termini aperti può essere la seguente:

Disegna due circonferenze c e c' (con centri O e O') che si intersecano in due punti distinti A e B. Costruisci i punti D ed E diametralmente opposti ad A su c e c'.

<u>*Proposta di lavoro:*</u>

- *Considera i punti D, B ed E. Cosa osservi?*
- *Quali relazioni osservi tra i segmenti DE ed OO'?*
- *Motiva le risposte in modo sintetico e dimostra le congetture.*

Il problema n. 7 ha una formulazione chiusa, ma richiede comunque una capacità di esplorazione della figura, l'attivazione di ragionamenti trasformazionali e, soprattutto nella fase di dimostrazione, la individuazione (non immediata) della similitudine tra due triangoli. In questa fase è particolarmente utile l'uso di uno strumento di geometria dinamica quale Cabri. Una riformulazione aperta del problema può essere la seguente:

Disegna una circonferenza e una sua corda AB. Chiama M il punto medio della corda. Proietta ortogonalmente gli estremi della corda su un diametro fissato. Chiama E ed F tali proiezioni. Disegna il triangolo EFM.

Proposta di lavoro:

- *Di quale proprietà gode il triangolo EFM?*
- *Al variare della posizione degli estremi della corda AB, mantenendo costante la sua lunghezza, quali caratteristiche*

del triangolo rimangono invariate (lati, angoli, area, forma,...)?
- *In quali casi il triangolo degenera?*

Motiva le risposte usando la forma Se .... allora ... e dimostra le congetture.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Nei gruppi di lavoro sono emerse posizioni favorevoli ad una attività coordinata di scoperta, congettura e dimostrazione, che aiuti gli studenti a costruire essi stessi le loro dimostrazioni, motivandoli sia nella ricerca di risultati che nella loro giustificazione all'interno della teoria. Un lavoro di questo tipo presuppone che gli insegnanti progettino situazioni che, a partire dall'esplorazione, sollecitino gli studenti alla dimostrazione, impresa certamente non facile, ma realizzabile se si trasformano i problemi di tipo tradizionale in problemi aperti. E' chiaro che un software come Cabri può essere molto utile non perché dimostra (Cabri non è un dimostratore di teoremi!), ma perché favorisce la scoperta di proprietà e la formulazione di congetture nella forma *Se ... allora,* prima tappa nel cammino che porta alla dimostrazione. Il nodo concettuale della dimostrazione può evolvere nell'intero quinquennio della scuola superiore, prendendo per mano gli studenti nei primi anni, e lasciandoli camminare a poco a poco da soli, fino a staccarli completamente.

BIBLIOGRAFIA

Paola, D. & Robutti, O., (in stampa), La dimostrazione alla prova. Itinerari per un insegnamento integrato di algebra, logica, informatica, geometria, *Quaderni della direzione Classica, Ministero della Pubblica Istruzione.*

Polya, G.: 1954, *Induction and analogy in mathematics*, Princeton.

GEOMETRIA E …

Marcello Ciccarelli
Liceo Scientifico "E. Majorana" - Latina

Le finalità del lavoro svolto dai gruppi di docenti su "Geometria e..", discendono da considerazioni sull' apprendimento degli studenti in matematica ed in particolare in geometria. A tal proposito:

a) una debole persistenza delle conoscenze della geometria euclidea;
b) una insufficiente capacità di utilizzare ragionamenti sintetici sulle proprietà delle figure geometriche;
c) una preferenza, nella ~~risoluzione dei problemi~~, per itinerari analitico-numerici piuttosto che sintetici;
d) una non utilizzazione sincronica dei diversi ambiti di risoluzione.

L'obiettivo dei lavori di gruppo è stata proprio quella di confrontarsi con tali problemi. E l'idea che ha guidato questo confronto è stata quella del potenziamento dell'apprendimento del metodo sintetico. Nel fare questa scelta non è secondaria la considerazione che il metodo sintetico possa essere utilizzato anche come paradigma di un processo di formazione logico-deduttiva e di concettualizzazione. E' del tutto ovvio che tale paradigma possa essere desunto anche in altri ambiti della matematica, ma per costruire un modello altrettanto significativo sono necessari approfondimenti che porterebbero ad escludere gli insegnamenti che utilizzano il programma "debole" di matematica.

La situazione, nella didattica della geometria, non è delle più felici. Si ha la convinzione, confermata anche dalle esperienze dei docenti nei gruppi di lavoro, che sono in atto, nell'insegnamento della geometria, alcune tendenze che convergono in una sorta di liquidazione della geometria euclidea. Tale fenomeno di accantonamento avviene in modo diverso a seconda che si operi in istituti ad indirizzo tecnico-professionale o classico-scientifico.

-Nel primo caso, la geometria euclidea è, tout-court, sostituita, fin dal primo anno delle superiori, con la geometria analitica in quanto ritenuta troppo difficile per la sua impostazione assiomatica e per le dimostrazioni che richiede; inoltre si ritiene che non essendo integrabile con le altre discipline perda, per gli studenti, di significatività.

-Nel secondo caso , la geometria euclidea viene invece svolta nel biennio ma il fine didattico è prevalentemente quello di far eseguire agli alunni una sorta di ginnastica mentale, di gentiliana memoria. I contenuti appresi infatti non sono quasi mai utilizzati nei curricula del triennio, tranne che per un veloce e ansioso ripasso in occasione dell'esame di Stato. Comunque anche in questo indirizzo ben presto i metodi della geometria analitica si sovrappongono a quelli sintetici.

La questione dell'insegnamento della geometria euclidea non è certamente nuova. Negli ultimi anni stiamo assistendo ad un suo rinnovato slancio grazie al software Cabri, che permette di affrontare la didattica della geometria euclidea con una inedita impostazione. Vi è comunque da rilevare che, pur in presenza di un uso crescente di tali software dedicati, includiamo anche il Derive, nelle pratiche didattiche dei docenti di matematica, che alcune questioni di fondo dell'apprendimento della geometria sintetica non possono essere risolte affidandosi "ciecamente" ai software.

Il problema principale rilevato è che la amichevole interfaccia geometrica del Cabri, come quella della manipolazione simbolica del Derive, non deve lasciare in ombra che il software sicuramente costruisce ma difficilmente dimostra.

In conclusione, abbiamo l'affermarsi di alcuni modi di essere della didattica della geometria che non appaiono né casuali, né contingenti perché dettati dalla onesta volontà dei docenti di offrire, a gruppi sempre più ampi di studenti, percorsi di matematica ritenuti accessibili.

In tale contesto possono, però, verificarsi alcune situazioni quali la :

a) sostituzione del piano euclideo, inteso come luogo della scienza dimostrativa, con il piano cartesiano, luogo della verifica numerica;

b) sostituzione del piano euclideo con il piano dello schermo del computer , luogo della costruzione ed intuizione visiva.

In conclusione il calcolo prenderebbe il posto del ragionamento; la costruzione quello della dimostrazione e l'evidenza quello della deduzione.

Tutto ciò porta, secondo noi, a non utilizzare la geometrica euclidea come un efficace modello di ragionamento scientifico. Senza citare tutti i pensatori che hanno ritenuto la geometria euclidea addirittura un modello generale di riferimento della scienza, è sufficiente osservare che essa costituisce *ancora* un valido ambiente ove lo studente possa apprendere e sviluppare la capacità di usare enti teorici senza il pericolo di confonderli con la loro rappresentazione. E non si vede all'orizzonte ancora un'alternativa valida a questo modello a meno che non si ritenga che possiamo fare a meno di assegnare all'insegnamento della matematica *anche* il compito formativo della **concettualizzazione** oltre che presentarsi come esempio di percorso logico-deduttivo.

Premesso tutto ciò noi abbiamo cercato di riflettere, svolgendo alcuni problemi, su questioni che ci sono apparse nodali per una rivisitazione della didattica della geometria e cioè .

1) sull' integrazione fra geometria sintetica-euclidea e geometria analitico-numerica e
2) sulla reciprocità fra software e geometria nella giustificazione\costruzione, verifica\ dimostrazione delle proprietà geometriche delle figure.

PROPOSTA DI LAVORO

Nella risoluzione dei seguenti problemi tenere presenti questi punti:

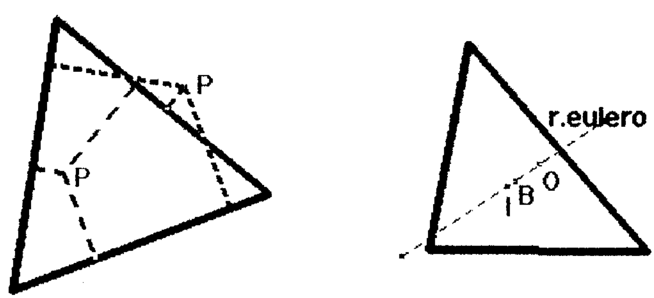
a) le conoscenze geometriche indispensabili per poterlo risolvere;
b) lo strumento software più appropriato a cui eventualmente appoggiarsi per affrontarlo;
c) nel caso in cui il problema venga risolto per via intuitiva o con strumenti che hanno aiutato a formulare congetture, dite quale ambito scegliereste per la sua dimostrazione.

Riportiamo, insieme ai testi dei problemi, alcune figure-costruzioni e la sintesi delle osservazioni dei docenti

Problemi

I) *Dato un triangolo equilatero,* ***studiare*** *la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolari condotti da un punto interno (esterno) a ciascuno dei tre lati.*

II) *Dato un triangolo,* ***studiare*** *la relazione che esiste tra baricentro B, ortocentro O e circocentro I.*



Sono problemi, in particolare il primo, che hanno una trattazione diversa *a seconda dell'ambiente ove si risolvono.*

L' ambiente Cabri rende agevole la intuizione della risoluzione. Usando il trascinamento, si muove il punto in questione e si osserva che se il punto è interno al triangolo oppure se appartiene ai lati del triangolo, allora la somma delle distanze è costante ed equivale all'altezza del triangolo equilatero. Sono particolarmente interessanti i "casi limite" in cui il punto coincide con un vertice del triangolo oppure appartiene ad un lato. Se invece il punto è esterno al triangolo, è facile comprendere che la somma è maggiore dell'altezza del triangolo equilatero dato. Questa parte del problema richiede tuttavia che si considerino i prolungamenti dei lati del triangolo, altrimenti perde di significato anche la domanda posta.

L' ambiente euclideo "carta e matita" non aiuta a risolvere il problema.

Il problema si presta a diversi livelli di approfondimento e può essere proposto sia nel biennio che nel triennio. Nel triennio può essere proposto anche nell'ambito dei problemi di minimo e di massimo.

Per il secondo problema si osserva che **l'ambiente cartesiano\derive** permette di risolvere casi particolari mentre l'ambiente cabri permette di affrontare proprietà geometriche particolari del triangolo come la retta di Eulero. Il problema mostra chiaramente la differenza fra una conoscenza indotta da una procedura costruttivo\intuitiva e dimostrativa\sintetica.

Si tratta di un problema che fino a qualche anno fa si trovava soltanto negli esercizi di geometria analitica e se ne richiedeva la soluzione nel caso particolare, assegnando le coordinate dei vertici di un triangolo.

Risulta invece piuttosto difficile pensare, in entrambi i problemi, ad una dimostrazione adatta ai primi anni di liceo.

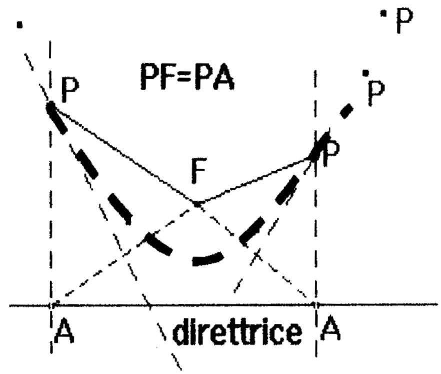
III) ***Verificare*** *che i punti A(-3, 1), B(3/4, 7/2) e C(-5/2, 199/150) sono allineati.*

Svolgendo l'esercizio con Cabri si ottiene l'allineamento dei 3 punti mentre sappiamo che il punto C non appartiene alla retta per A,B.

Il problema si presta a mostrare i limiti dell'intuizione informatica del Cabri. L'uso del Derive invece aiuta a risolvere le condizioni numeriche dell'allineamento. Problemi di rottura come questo sono utili, per mettere in crisi la fiducia che si ripone nello strumento, a favore di una maggiore analisi critica del problema

IV) ***Costruire** una parabola come luogo geometrico, dati il fuoco e la direttrice.*

AE direttrice;
si tracciano la retta passante per A e perpendicolare alla direttrice e l'asse del segmento AF;
il punto P è l'intersezione delle due rette tracciate ed è un punto della parabola.



L'esperienza dimostra che un approccio esclusivamente analitico del concetto di luogo rende infruttuoso, o perlomeno, non efficiente l'apprendimento, in quanto si sollecita una impostazione eccessivamente procedurale. E' invece necessaria anche una comprensione effettiva della natura geometrica della situazione proposta. A tal fine è conveniente far incontrare il concetto, più volte, in contesti diversi.

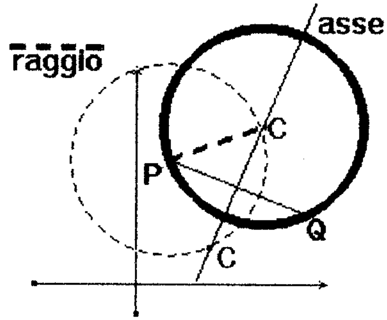
V) ***Costruire** un parallelogramma data la lunghezza delle sue diagonali.*
VI) ***Costruire** un quadrato dato un lato*
VII) ***Costruire** la tangente ad una circonferenza da un punto esterno.*

I problemi assegnati costituiscono un buon esempio di come integrare il software e le conoscenza delle proprietà delle figure geometriche, Tale integrazione si può realizzare in contesti diversi o per far conoscere come funziona il Cabri, attraverso la costruzioni di macro, oppure, al primo anno, per rafforzare le conoscenze attraverso un fare operativo in prima persona ed infine, in un momento qualsiasi del percorso didattico, come strumento di recupero di proprietà offuscate.

VIII) ***Trovare l'equazione** della circonferenza passante per i punti $A(2,0)$ $B(0,2)$ e di raggio $r= \sqrt{2}$*

Costruire *una circonferenza dati due punti e la ~~lunghezza del raggio~~.*

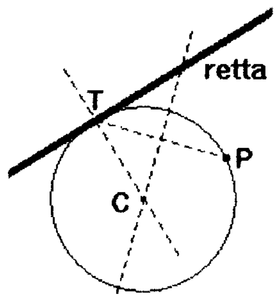
Si costruisce l'asse dei due punti P,Q. Dal punto P si traccia la circonferenza di raggio dato.



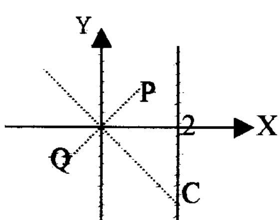
IX) ***Trovare l'equazione*** *della circonferenza tangente nel punto T(0,0) alla retta y=x e passante per il punto P(2,0) .*

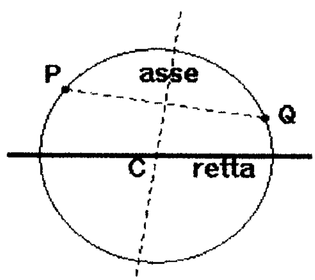
Costruire *una ~~circonferenza~~ ~~tangente ad una retta in un~~ ~~punto~~ T e ~~passante per un punto~~ dato P.*

Il centro C è l'intersezione della perpendicolare in T alla tangente e l'asse del segmento TP. Il raggio è CD.



X) ***Determinare l'equazione*** *della circonferenza che passa per P(1, 1) e Q(-1, -1) ed ha il centro sulla retta di ~~equazione~~ x=2.*





Questi problemi sono utili per far comprendere l'importanza dell'ambiente in cui si opera in quanto, per la loro risoluzione, si devono integrare l'ambiente euclideo-sintetico e quello cartesiano-analitico.

Da notare che nella sequenza dei problemi, dal I) al X), si è passati dallo *studiare*, al *verificare*, al *costruire*, al *determinare l'equazione*. Sono termini che graduano la difficoltà dei problemi. Tali termini vanno, ovviamente, decodificati per rendere esplicita agli studenti l'abilità richiesta. A tal fine si possono presentare problemi, come il VIII) IX) X), nella duplice formulazione "trovare o determinare l'equazione..", oppure " costruire..". Ciò può realizzare una opportuna riflessione sul rapporto fra il caso particolare e quello generale e sui diversi ruoli che possono avere in questo contesto, cioè nello sviluppo delle abilità geometriche dello studente, il metodo sintetico e analitico.

La dimostrazione generale di un caso per via algebrica presenta difficoltà, anche se l'uso di Derive può aiutare. La dimostrazione per via sintetica si lascia, come in questi problemi, preferire per economia di tempo e per eleganza formale.

Osservazioni conclusive:

" Possono la geometria euclidea ed i suoi procedimenti sintetici acquisire una nuova centralità negli obiettivi dell' insegnamento della matematica ?"

Ovvero può divenire, *anche*, un ambiente privilegiato ove sviluppare la concettualizzazione, cardine decisivo di una formazione scientifica alla cui costruzione la didattica della matematica deve dare un contributo significativo *qualunque sia l' indirizzo degli studi secondari*?

Nell'affrontare la geometria lo studente si abitua ad impiegare "enti teorici" per descrivere oggetti concreti, senza confondere gli uni con gli altri.

Le note difficoltà di apprendimento che presenta il modello didattico euclideo e che ne hanno consigliato un accantonamento possono essere, oggi, affrontate con una didattica più amichevole ed efficace attraverso un uso avvertito dei software a disposizione.

In definitiva il "nuovo" ambiente euclideo sembra rispondere alla ricerca di invarianti didattici per una formazione di base comune ai vari corsi di studi.

PERCORSO DI GEOMETRIA

Ercole Castagnola

Liceo Scientifico "Alberti" - Minturno (LT)

OBIETTIVI E FINALITÀ

L'obiettivo del gruppo di lavoro è stato quello di fornire, attraverso un esame delle esperienze dei diversi docenti (tenendo conto anche delle difficoltà incontrate dagli alunni), una serie di indicazioni su alcuni possibili percorsi didattici nell'introduzione della geometria nel biennio, in vista anche del fatto che il biennio è il ciclo di passaggio dalla Scuola Media alla Scuola Superiore.

PROPOSTA DI LAVORO

1) Sulla base della vostra esperienza, riflettete sull'approccio finora utilizzato nel vostro insegnamento, evidenziando difficoltà degli studenti e punti di forza che hanno favorito l'apprendimento della geometria nel quinquennio.
2) Analizzate i libri di testo che avete a disposizione individuando la scelta assiomatica degli autori nella presentazione del loro percorso geometrico.

La prima domanda che ci si pone, tenuto conto del livello di conoscenze degli studenti che iniziano il biennio, è quale sia il miglior approccio alla trattazione della geometria. Essenzialmente si possono distinguere cinque possibili percorsi.

1) Un approccio assiomatico sintetico del tipo Euclide-Hilbert.
2) Un approccio assiomatico metrico del tipo presentato da Birkhoff o da Choquet.
3) Un approccio analitico che parte dal piano cartesiano.
4) Una geometria per problemi che privilegia le costruzioni geometriche e lo studio delle figure.
5) La geometria delle trasformazioni.

Sui precedenti percorsi si possono fare le seguenti osservazioni:

1. È sicuramente l'approccio più tradizionale e, attualmente, il più diffuso nei testi scolastici. Raramente la successione degli argomenti è rigorosa e coerente. Le dimostrazioni sono spesso lunghe e difficili. In generale non si riesce a cogliere il quadro globale della trattazione.

2. Questo approccio (attualmente il più usato nei paesi anglosassoni) è scarsamente adottato nei testi italiani (con l'importante eccezione del libro di G. Prodi "Matematica come scoperta"). Nella trattazione metrica (che utilizza fin dall'inizio la retta reale) ci si ricollega più facilmente a quanto appreso nella Scuola Media (due segmenti sono congruenti se hanno la stessa lunghezza; due angoli sono congruenti se hanno la stessa ampiezza) senza per questo perdere in rigore deduttivo.

3. È l'approccio spesso considerato più "facile", in quanto già noto agli studenti della Scuola Media. Esso consente di tradurre il problema geometrico in forma algebrica e, pertanto, aiuta lo studente a potenziare le sue abilità di manipolazione simbolica.

4. È probabilmente l'approccio che meglio si presta ad essere sviluppato con l'ausilio di software didattici come CABRI o GEOMETER'S SKETCHPAD. La successione è del tipo: *proposizione* (che contiene la costruzione da effettuare), *problema* (da risolvere mediante la costruzione), *schema* (da seguire per effettuare la costruzione), *figura* (che illustra la costruzione), *costruzione*, *dimostrazione* (della validità della costruzione).

5. Tale approccio è probabilmente il più vicino all'esperienza quotidiana che lo studente ha della geometria (specchi, ombre, modelli, prototipi, ecc.), ma, per essere convincente e facilmente utilizzabile, richiede una conoscenza approfondita delle proprietà delle figure geometriche elementari.

ESEMPIO DI LAVORO PER IL PERCORSO 4

OSSERVAZIONE PRELIMINARE. Nello schema seguente si utilizzeranno le seguenti notazioni:

A_B indica la circonferenza passante per B di centro A

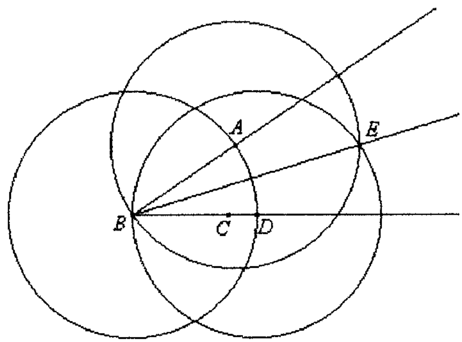
s_{AB} indica la semiretta di origine A e passante per B

Inoltre

	p, q	
	P, Q	

è un'abbreviazione per "siano P e Q i punti di intersezione delle figure p e q".
Infine, seguendo la notazione anglosassone, indicheremo con *LLL* (cioè, Lato-Lato-Lato) il Terzo Criterio di Congruenza dei Triangoli.

Euclide I.9. Costruire la bisettrice dell'angolo $\angle ABC$.



Problema. Dato un angolo $\angle ABC$, costruire la semiretta s_{BE} tale che $\angle ABE \cong \angle EBC$.

Schema

B_A, s_{BC}	A_B, D_B	s_{BE}
D	B, E	

Costruzione. Dati i tre punti A, B, C che determinano l'angolo $\angle ABC$, sia D il punto di intersezione della circonferenza B_A con la semiretta s_{BC}. Siano B ed E i punti di intersezione delle circonferenze A_B e D_B. Tracciamo la semiretta s_{BE}. Allora $\angle ABE \cong \angle EBC$.

Dimostrazione. Poiché $\overline{AB} = \overline{BD}$, $\overline{AE} = \overline{DE}$ e $\overline{BE} = \overline{BE}$, segue per il criterio *LLL* che $\Delta ABE \cong \Delta DBE$. Quindi, in particolare, $\angle ABE \cong \angle EBD$. Ma $s_{BC} = s_{BD}$ e quindi $\angle EBD = \angle EBC$. Pertanto $\angle ABE \cong \angle EBC$. □

DISCUSSIONE E ANALISI DELLE PROBLEMATICHE

Dalla discussione emerge chiaramente l'estrema difficoltà di comunicare agli studenti del biennio delle scuole superiori la necessità di una trattazione assiomatica della geometria e di una sua formalizzazione in un sistema logico-deduttivo. Ad accrescere tale difficoltà contribuisce ovviamente il limitato numero di ore che l'insegnante ha a disposizione. Infatti la trattazione assiomatica richiederebbe una scansione estremamente lenta e graduale degli argomenti, attualmente impraticabile.

Si pone a questo punto il problema di individuare le possibili alternative a una trattazione assiomatica globale della geometria. La strada più seguita a livello di Istituti Tecnici e Professionali è quella di privilegiare la geometria analitica. La motivazione è duplice:

- gli studenti arrivano dalla Scuola Media spesso completamente privi di conoscenze di geometria sintetica;
- gli insegnanti del triennio richiedono come prerequisiti nozioni di geometria analitica, necessarie per lo studio delle funzioni, l'analisi statistica dei dati, ecc.

Gli inconvenienti di una trattazione puramente analitica sono molteplici e, in particolare, si segnalano i seguenti:

- non vengono, di regola, affrontate le dimostrazioni;
- c'è il rischio (evidenziato da molti insegnanti) che lo studente perda la capacità di visualizzare le figure e di fare previsioni sui possibili risultati, riducendo in tal modo la geometria al solo calcolo algebrico.

Un'altra strada potrebbe essere quella che privilegia le costruzioni geometriche (è probabilmente l'approccio più vicino allo spirito euclideo delle costruzioni con riga e compasso), che risulta favorito anche dall'uso dei nuovi software precedentemente menzionati e, in generale, dalle nuove tecnologie multimediali. In tale ambito cambia totalmente il concetto di figura geometrica che da oggetto statico diventa un oggetto dinamico che racchiude in sé "infinite" figure diverse. Tutto ciò ha l'indubbio vantaggio di stimolare lo studente, anche attraverso l'analisi di situazioni particolari, ad effettuare congetture e generalizzazioni. Si rilevano, anche in questo ambito, alcune difficoltà; in particolare vale la pena di citare le seguenti:

- esiste il rischio di diminuire (o di non stimolare) la capacità personale di astrazione e visualizzazione;
- non è sempre facile convincere lo studente della necessità di dimostrare l'esistenza di una proprietà geometrica che la visualizzazione informatica rende evidente (si pensi anche alla difficoltà di "visualizzare" una dimostrazione per assurdo!).

È chiaro a questo punto il ruolo fondamentale dell'insegnante, che non deve usare la dimostrazione al solo scopo di convincere lo studente, ma deve chiarire il ruolo della dimostrazione all'interno di una teoria, come conseguenza logica degli assiomi e dei teoremi già dimostrati. In questa prospettiva lo studente *prima* si convince che una certa proprietà è vera attraverso la visualizzazione con un opportuno software didattico, *poi* sente l'esigenza di dimostrarla utilizzando assiomi e teoremi.

La strada delle trasformazioni geometriche consente di sviluppare parallelamente sia l'aspetto sintetico che quello analitico e potrebbe, quindi, rappresentare un'utile sintesi tra i diversi approcci. Tuttavia, come già sottolineato, tale percorso didattico richiede una conoscenza approfondita delle figure geometriche. (Come si possono studiare le simmetrie delle figure se non si conoscono le loro proprietà caratteristiche?)

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

A questo punto risulta ovviamente molto difficile (se non, addirittura, impossibile) fornire delle indicazioni metodologiche di carattere generale in grado di soddisfare le necessità dei vari tipi di Istituti Superiori (e, anche, le preferenze dei vari insegnanti.)

Dalla discussione generale si possono far emergere i seguenti suggerimenti che possono servire come punto di partenza per ulteriori approfondimenti.

1. Se non si vuole rinunciare a una trattazione assiomatica della geometria, conviene limitarsi ad opportune assiomatiche "locali" [ad esempio, porre come assiomi i criteri di congruenza dei triangoli e dedurre da questi le proprietà fondamentali dei triangoli.]
2. La geometria non è l'unico ambito in cui effettuare le dimostrazioni. Le dimostrazioni geometriche (quando non sono banali e, pertanto, poco significative) sono caratterizzate, in genere, da lunghe catene di deduzioni, difficili da seguire da parte degli studenti del biennio [può risultare utile l'uso di tabelle a due colonne, che mettono in evidenza i "passi elementari" in cui si può decomporre la dimostrazione, fornendo di ognuno di essi la relativa motivazione.] È, quindi, opportuno effettuare preliminarmente dimostrazioni più semplici (ma non banali) in ambiti non geometrici come la teoria dei numeri o il calcolo algebrico.
3. L'uso delle nuove tecnologie deve avere un duplice obiettivo: da una parte far scoprire allo studente proprietà geometriche non evidenti (e fargli quindi apprezzare il valore, se non la necessità, della dimostrazione); dall'altra far nascere nello studente,

attraverso l'esame di diverse possibili dimostrazioni di uno stesso teorema (si pensi a quante dimostrazioni si possono trovare del teorema di Pitagora!), un sano spirito di emulazione che lo induca a ricercare in modo autonomo una nuova dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

Euclide, *Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni - Ed. UTET, Torino 1970

D. Hilbert, *I fondamenti della geometria*, con i supplementi di P. Bernays [trad. it.] - Ed. Feltrinelli, Milano 1970

A. Morelli, *Geometria*, Vol.1 e 2 – Ed. Loffredo, Napoli 1989

G. Prodi, *Matematica come scoperta*, Vol. I (e guida per insegnante) - Ed. D'Anna, Firenze 1975

G. Prodi, *Matematica come scoperta*, Vol. II (e guida per insegnante) - Ed. D'Anna, Firenze 1977

B. Spotorno e V. Villani, *Matematica. Idee e metodi*, Vol.1 - Ed. La Nuova Italia, Firenze 1979

B. Spotorno e V. Villani, *Matematica. Idee e metodi*, Vol.2 - Ed. La Nuova Italia, Firenze 1982

R. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea* [trad. it.] - Ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1991

ELENCO DEI PARTECIPANTI

ISTRUZIONE TECNICA

Andrulli	Eustachio	ITC	Loperfido	Matera
Battista	Egidio	ITCG	Palizzi	Vasto (CH)
Borghetto	Tiziana	ITCG	Einaudi	Montebelluna (TV)
Branella	Berardo	ITCG	Olivelli	Edolo (BS)
Bovio	Mauro	ITCG	Leardi	Casale Monferrato (AT)
Cecchi	Rita	ITAS	A. Cecchi	Pesaro
De Vita	Mauro	ITCG	Leardi	Roma
Indovina	Gabriella	ITC	Duca D. Abruzzi	Palermo
Malara	Rossana	ITC	Repaci	Villa S. Giovanni (RC)
Marchioni	Adalberto	ITC	L. Paciolo	Fidenza (PR)
Miller	Roberta	ITI	G. Ferraris	S. Giovanni Valdarno (AR)
Paba	Giancarlo	ITC	Chironi	Nuoro
Saubbo	Caterina	ITG	Righi	Reggio Calabria
Traverso	Daniela	ITI	Capellini	La Spezia
Tundo	Anna Maria	ITC	De Viti De Marco	Casarano (LE)
Vellone	Anna	ITI	Giordani	Caserta

ISTRUZIONE PROFESSIONALE

Antonazzo	Luana	IPSAR	Moro	S. Cesarea Terme (LE)
Banchi	Maurizio	IPAA	De Franceschi	Pistoia
Filardo	Pietro	IPC	Trapani	Trapani
Guiso	Caterina	IPSCT	Azuni	Cagliari
Sanin	Alessandra	IPSIA	L. D. Estensi	Lido degli Estensi (FE)
Tabai	Carla	IPSIA	G. G. Bosco	Viadana (MN)

ISTRUZIONE CLASSICA

Aquilino	Angela	LS	Romita	Campobasso
Auber	Walter	LS	Preseren	Trieste
Briata	Anna Maria	LS	Torelli	Fano (PS)
D’Antonio	Nicola	LS	Galilei	Lanciano (CH)
Della Seta	Adriana	LS	Moro	Reggio Emilia
Di Sorbo	Domenica	LS	Garofano	Capua (CE)
Grazzini	Rosanna	LS	Rodolico	Firenze
Lopiano	Anna Maria	LS	Volta	Caltanisetta
Lotteria	Domenico	LC	Palmieri	Lecce
Margiotta	Giovanni	LS	F. D’Assisi	Roma
Masini	Tiziana	LS	Bafile	L’Aquila
Munzi	Marcella	LS	Alessi	Perugia
Scarnati	Anna Luisa	LS	Scorza	Cosenza
Severino	Anna	LC	Botta	Ivrea (TO)
Somaglia	Anna Maria	LS	Colombo	Genova
Tomasi	Luigi	LS	Galilei	Adria (RO)

ISTRUZIONE ARTISTICA

Cicchiello	M. Felicia	LA		Frosinone
Pagni	Camillo	LA		Firenze
Rejna	Sergio	ISA		Padova

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

0 – L'indirizzo Linguistico*
1 – Gestione e innovazione*
2 – Lo sviluppo sostenibile
3 – La valenza didattica del teatro classico
4 – Il postsecondario per la professionalità* (2 tomi)
5 – Dalla memoria al progetto
6 – La sperimentazione della sperimentazione: il progetto Proteo (2 tomi)*
7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
8 – l'insegnamento di probabilità e statistica nella scuola liceale
9 – L'Italia e le sue isole. Fase I: Sardegna*
10 – Lingua e civiltà tedesca
11 – La scuola nel sistema polo* (manuale guida)
12 – La "città" dei filosofi
13 – Le città d'Europa (2 tomi)
14 – Dal passato per il futuro: la didattica del Greco
Dal passato per il futuro: lessico di base (2 tomi)
15 – Gestione, innovazione e tecnologie*
16 – Per non vendere il cielo
17 – Briser la glace: la dinamica della comunicazione francese
18 – Dalla lingua per la cultura: la didattica del latino
19 – L'insegnamento della geometria (2 tomi)
20 – La lingua del disegno: al crocevia fra scienza e arte
21 – Dalla memoria al progetto (2 tomi)
22 – Problemi della contemporaneità: Unità e/autonomie nella storia italiana (2 tomi)
23 – Aritmetica**
24 – Analisi matematica**
25 – Insegnamento della Fisica negli indirizzi sperimentali
26 – I temi "nuovi" nei programmi di Matematica (probabilità, statistica, logica…) e il loro inserimento nel curriculum (2 tomi)
27 – La Fisica dei trienni P.N.I.
28 – Se hale camino al andar
29 – Non solo Storia: un modello di formazione per il tutor
30 – La differenza come ricchezza

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco (*) si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei Presidi; gli altri sono dedicati alla formazione dei Docenti.

COLLANA “*CLASSICA IPERMEDIA*” (SU CD-ROM)

1 – F.A.R.E.: le Scienze Naturali, spunti per una riflessione storico epistemologica.
2 – Le nuove tecnologie nelle aree: scientifica, storico-filosofica, umanistica
3 – L’Italia e le sue isole. Fase I: Sardegna. Le reti telematiche
4 – Uso del laboratorio e insegnamento della Fisica
5 – L’Italia e le sue isole. Fase II: Basilicata. Le reti telematiche

PACCHETTI FORMATIVI MULTIMEDIALI

1 – L’insegnamento del Latino nelle scuole dell’ordine classico, scientifico e magistrale.
2 – L’insegnamento del Diritto e dell’Economia nelle scuole dell’ordine classico, scientifico e magistrale
3 – L’insegnamento del Greco nelle scuole dell’ordine classico

matteoni stampatore Lucca
maggio 2000

MALGRÉ TOUT