Ministero della Pubblica Istruzione

Direzione Generale Istruzione Classica Scientifica e Magistrale

Unione Matematica Italiana

QUADERNI

26/2

"I TEMI 'NUOVI' NEI PROGRAMMI DI MATEMATICA (PROBABILITÀ, STATISTICA, LOGICA, …) E IL LORO INSERIMENTO NEL *CURRICULUM*"

4° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica per Docenti di Scuole Medie Superiori

Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri" Lucca

1/11 settembre 1997

DOCUMENTI DI LAVORO

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: G. Trainito
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinatore editoriale: A. Portolano
Editing: A. R. Cicala, E. Giansanti, G. Zito, P. Manzioli
Coordinamento del presente volume curato da Giuseppe Ciri
Revisione scientifica del testo Lucia Ciarrapico, Claudio Bernardi e Paolo Nardini
Grafica: F. Panepinto

Nota editoriale
In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.
Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale

Unione Matematica Italiana

“ I TEMI ‘NUOVI’ NEI PROGRAMMI DI MATEMATICA (PROBABILITÀ, STATISTICA, LOGICA, …) E IL LORO INSERIMENTO NEL *CURRICULUM* ”

4° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica
per Docenti di Scuole Medie Superiori

Liceo Scientifico Statale
“A. Vallisneri” - Lucca
1-11 settembre 1997

LA SERIE "DOCUMENTI DI LAVORO" DEI NOSTRI QUADERNI

La collana "Quaderni" della Dirclassica si arricchisce di una nuova "serie": essa porta quali suoi "segni" grafici distintivi il dorso rosso della copertina e la dizione "documenti di lavoro" che vi compare in aggiunta a quelle che contrassegnavano i "tradizionali" fascicoli "verdi" e "grigi". Ogni nuovo nato è testimonianza di vitalità. E difatti questa nuova serie risponde a una triplice esigenza di sviluppo.

In primo luogo, quella di dare tempestiva comunicazione del lavoro che la nostra Direzione viene compiendo – a ritmi di costante accelerazione – sul terreno della formazione e dell'aggiornamento degli operatori scolastici. Il numero crescente delle nostre iniziative richiede non solo un allargamento degli strumenti, ma pure un utilizzo delle forze e delle risorse disponibili che sappia farsi via via più articolato e diffuso.

In secondo luogo, alcuni seminari – per la loro peculiare natura di essere finalizzati a discutere questioni di pressante attualità – richiedono che gli esiti di lavoro trovino una disseminazione nella nostra realtà scolastica al possibile immediata e richiedono, pertanto, un taglio delle pubblicazioni che sappia privilegiare – rispetto alle altre serie – non solo la rapidità dei tempi, ma anche la caratteristica di indispensabile supporto informativo e documentario.

Infine – last but not least *– la scuola dell'autonomia richiederà sempre di più ai nostri presidi e ai nostri docenti la capacità di "volare da soli": questa terza serie, infatti, continuerà sì a essere il frutto di un dialettico rapporto di collaborazione tra "centro" e "periferia" e potrà ancora contare su un momento di editing teso a uniformare i criteri generali dell'intera collana, ma – in pari tempo – vedrà sempre più accentuato il responsabile ruolo delle singole scuole nella produzione di questo peculiare "prodotto" culturale.*

In tal modo, ritengo che non solo aumenteranno le frecce al nostro arco, ma riusciremo pure – questi almeno sono l'impegno e la speranza – a garantire alla collana grigia e a quella verde lo spazio temporale e la disponibilità umana per il lavoro legato alle scansioni necessariamente più dilatate dell'approfondimento tematico di alcune questioni di fondo.

Luigi Catalano

INDICE

PRESENTAZIONE

Alla fine del 1993 il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un protocollo d'intesa per promuovere "programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni".
Il protocollo, che costituisce il primo accordo del genere tra il Ministero ed una società scientifica, nasce dalla consapevolezza che una collaborazione tra mondo della scuola e università possa essere estremamente utile per realizzare forme di aggiornamento, di formazione in servizio e più generalmente, per offrire un sostegno concreto all'attività dei docenti.
In questo quadro, il protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale della durata di due settimane, dedicato all'aggiornamento dei docenti di matematica. Il progetto è stato puntualmente realizzato; a partire dal 1994 si sono tenuti a Viareggio corsi riguardanti i principali argomenti della matematica: algebra (1994), geometria (1995), analisi ed aritmetica (1996); il numero dei docenti coinvolti per motivi logistici ed organizzativi di norma è stato contenuto entro gli ottanta, dei quali la metà della scuola secondaria e l'altra metà, alternativamente della scuola media e delle elementari.
Nel 1997 si è giunti alla quarta edizione del Corso, tenutosi dal primo all'undici settembre a Lucca con il supporto tecnico-organizzativo del Liceo Scientifico "Vallisneri" come nei corsi precedenti. Le domande di ammissione al corso al solito sono state moltissime. Come è ormai consuetudine, sono stati ammessi 42 docenti, scelti tra quelli di ruolo in servizio presso la Scuola Media in modo da rappresentare tutte le regioni.
Gli argomenti affrontati questa volta riguardano dei temi particolarmente significativi ed innovativi, cioè la probabilità, la statistica e la logica matematica, argomenti che fanno parte dei programmi scolastici del '79.
Nella loro presentazione, si è avuta particolare cura nel proporre ai colleghi conoscenze di base, il più possibile collegate ai vari settori della matematica, così come a contesti significativi del 'mondo reale', come pure opportune trasposizioni didattiche adatte all'età dei discenti.
Il Corso si è articolato in 4 cicli di lezioni con esercitazioni, conferenze, lavori di gruppo ed esercitazioni al calcolatore, per complessive 80 ore di lezione. Il testo proposto è al solito una sintesi dei lavori svolti nel Corso; si tratta di lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici.

L'idea è che questo materiale, sintetizzato in un libro che viene inviato gratuitamente alle scuole che ne facciano richiesta al Liceo Vallisneri, possa servire per ulteriori corsi di aggiornamento in sede locale, opportunamente supportati dai partecipanti stessi a questo Corso e da docenti delle varie Università (una specifica circolare ministeriale contiene gli indirizzi cui rivolgersi, regione per regione). Come è già avvenuto per le precedenti edizioni, può quindi iniziare un 'circolo virtuoso', che produce diffusione di maggiore consapevolezza didattica e competenza nei docenti della scuola.

Lucia Ciarrapico - Ferdinando Arzarello

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
4° CORSO MPI-UMI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
“I TEMI “NUOVI“ NEI PROGRAMMI DI MATEMATICA (PROBABILITÀ, STATISTICA, LOGICA, ...) E IL LORO INSERIMENTO NEL CURRICULUM”

SEZIONE SUPERIORI

Programma

Cicli di lezioni:

A **Dario Palladino -** Università di Genova
Logica, dimostrazioni e teorie matematiche

B **Giorgio Dall’Aglio -** Università di Roma “La Sapienza”
Probabilità

C **Carla Rossi -** Università di Roma “Tor Vergata”
Statistica

D **Gabriele Anzellotti -** Università di Trento
I temi nuovi e la progettazione dei curricoli

Conferenze:

Daniele Mundici - Università di Milano
Logica e computer dai fondamenti alle applicazioni

Margherita Fasano - Università della Basilicata
Il pensiero relazionale nell’educazione matematica

STAFF DI GESTIONE DEL SEMINARIO

Direttore: Giuseppe Ciri

Relatori:
Gabriele Anzellotti - Università di Trento
Paolo Boieri - Politecnico di Torino
Raimondo Bolletta - CEDE - Roma
Giorgio Dall'Aglio - Università di Roma "La Sapienza"
Dario Palladino - Università di Genova
Carla Rossi - Università di Roma "Tor Vergata"
Maria Sciolis Marino - Università di Pisa
Roberto Tortora - Università di Napoli

Segreteria organizzativa:
Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Cesare Matteoni, Maria Luisa Radini, Giovanni Romani.

LOGICA, DIMOSTRAZIONE E TEORIE MATEMATICHE

Dario Palladino
Università di Genova

Il recente inserimento della logica fra i temi dei programmi della scuola secondaria apre nuove interessanti prospettive per l'insegnamento della matematica. Come accade ogni volta che si introducono argomenti che non hanno alle spalle una tradizione consolidata con cui rapportarsi, occorre impostare un discorso organico che, in primo luogo, sgombri il terreno da possibili fraintendimenti e, in secondo luogo, sia efficace sul piano educativo e informativo. Ci proponiamo di discutere brevemente le ragioni che hanno favorito l'ingresso di questi nuovi contenuti, di analizzare le loro potenzialità e il loro possibile ruolo nel contesto più ampio del programma di matematica e, soprattutto, cercheremo di suggerire alcune modalità del loro inserimento nella concreta attività didattica.

1. UNO SGUARDO AI PROGRAMMI

Dalla lettura delle parti dedicate alla logica inserite nei programmi di matematica e dei relativi commenti, si possono trarre alcune indicazioni per cercare di realizzare gli obiettivi che ci siamo prefissi.

- Nel percorso che va dalle scuole elementari alla fine delle superiori la logica è collegata dapprima con il linguaggio, poi con l'attività deduttiva e infine con le teorie matematiche intese come sistemi ipotetico-deduttivi.
- Praticamente in tutti i commenti ai programmi si evidenzia che la logica non va trattata a sé, ma deve essere tenuta presente durante l'intero percorso educativo: sostanzialmente le vengono attribuite peculiari e positive potenzialità didattiche per la conquista delle competenze linguistiche e di ragionamento, e un ruolo più specifico per comprendere la natura delle teorie matematiche.
- È ricorrente l'invito rivolto all'insegnante a non eccedere in simbolizzazioni e formalizzazioni, a servirsi soprattutto di esempi e di restare il più possibile nel concreto.
- Vengono continuamente richiamate le possibili interazioni con l'informatica.

In sintesi, gli estensori dei diversi programmi concordano sul fatto che la logica sia "importante" nell'insegnamento, ma che al tempo stesso sia una potenziale fonte di eccessi. In particolare si sottolinea come possa essere fuorviante una trattazione autonoma, slegata dagli altri argomenti dei programmi, e soprattutto come non debba figurare solo in un capitolo a sé stante, collocato prima degli altri, come se la logica costituisse una premessa indispensabile per acquisire competenze linguistiche e deduttive.

Questa "bivalenza" del ruolo attribuito alla logica è a nostro avviso il sintomo delle molteplici e spesso contrastanti caratteristiche che la disciplina è ritenuta avere non solo nell'opinione comune, ma persino tra gli addetti ai lavori, per non parlare delle enormi differenze di significato che il termine "logica" ha avuto nel corso della storia.

Per affrontare in modo costruttivo il problema dell'inserimento della logica nella scuola secondaria bisogna preliminarmente caratterizzare, almeno sommariamente, la natura e i metodi della disciplina. Nel farlo cercheremo di non lasciarci condizionare da visioni preconcette, anche se siamo consapevoli che ciò è realizzabile solo in parte. In ogni caso una riflessione anche molto critica su quanto verremo esponendo può avere benefici effetti sull'impostazione dell'insegnamento della logica[1].

2. COS'È LA LOGICA

Non è facile definire in via preliminare l'oggetto e i metodi di studio di una disciplina scientifica, in quanto sono in genere richiesti alcuni termini specifici della disciplina stessa. Nel caso della logica la situazione non è diversa: ai nostri fini ci si può limitare a dire che essa è lo studio della relazione di conseguenza logica. L'evidente circolarità di questa caratterizzazione si spezza esaminando come la relazione è definita nell'ambito della disciplina.

La conseguenza logica è una relazione fra proposizioni che fa riferimento alla possibilità di molteplici interpretazioni: una proposizione A è *conseguenza logica* di un insieme X di proposizioni quando A è vera in tutte le interpretazioni che rendono vere le proposizioni di X.

La logica ha carattere *formale*, individua schemi che devono esplicitare le argomentazioni corrette, valide universalmente a prescindere dai contenuti, e quindi che A e X, dovendo essere suscettibili di diverse interpretazioni, sono espressioni di un linguaggio con caratteristiche assai diverse dal linguaggio naturale, con il quale normalmente si aspira a esprimere univocamente un unico significato.

[1] La nostra concezione della logica è in sintonia con quella più volte espressa da G. Lolli in numerose pubblicazioni. Si vedano, ad esempio, i volumi citati in bibliografia.

Illustriamo il concetto di conseguenza logica e il carattere formale dell'indagine logica con un esempio. Se consideriamo le tre seguenti concatenazioni di proposizioni:

2 è minore di 5
Se un numero è minore di un altro, allora il secondo è maggiore del primo
Quindi 5 è maggiore di 2

La retta *r* è perpendicolare alla retta *s*
Se un retta è perpendicolare a un'altra, allora la seconda è incidente alla prima
Quindi *s* è incidente a *r*

Mario è nipote di Aldo
Se una persona è nipote di un'altra, allora quest'ultima è zio della prima
Quindi Aldo è zio di Mario

si può immediatamente constatare la loro strettissima analogia. Per l'instaurarsi del nesso di conseguenza logica non è importante la natura degli individui menzionati (numeri, rette, persone), né delle relazioni coinvolte (minore e maggiore, perpendicolare e incidente, nipote e zio), quanto i nessi stabiliti fra le premesse e la conclusione. In tutti e tre i casi vi è la stessa *forma logica*. Appare allora del tutto naturale rendere trasparente questa forma logica con una opportuna riscrittura. Se indichiamo con a e b i due individui, con R la prima relazione, con S la seconda (ossia gli elementi che variano nelle tre concatenazioni di proposizioni), si ottiene lo schema:

Rab
per ogni due individui x,y, se Rxy, allora Syx
Quindi Sba

Il nesso di conseguenza logica acquista significato proprio in relazione a scritture come questa, in cui figurano termini il cui significato è indeterminato, e quindi è legittimo chiedersi se la conclusione è vera quando le premesse sono vere. Il nesso di conseguenza logica, e quindi la correttezza dello schema precedente, sussiste perché, qualsiasi siano gli individui denotati da a e da b, e le relazioni binarie denotate da R e da S, *se le premesse sono vere, allora è vera anche la conclusione.*

Ciò che abbiamo evidenziato in questo caso particolare accade in generale: se da alcune premesse discende logicamente una conclusione, lo stesso accade in tutte le situazioni in cui le premesse e la conclusione hanno la stessa forma logica. L'individuazione della forma logica avviene con riferimento a un linguaggio le cui espressioni non sono né vere né false, ma che sono suscettibili di molteplici interpretazioni.

L'uso dei simboli non è essenziale, ma facilita enormemente il riconoscimento del sussistere del nesso di conseguenza logica. Come è noto, in logica si formalizzano poi anche le restanti parti degli enunciati di partenza e si perviene alla seguente configurazione:

$$\frac{\begin{array}{l} Rab \\ \forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Syx) \end{array}}{Sba}$$

Nel modo comune di parlare si dice che le tre precedenti concatenazioni di proposizioni costituiscono dei *ragionamenti*. Va comunque tenuto presente che con "ragionamento" si intende di solito qualcosa di diverso, ossia un qualsiasi procedimento intellettuale in cui una conclusione sia derivata da premesse in base a *ragioni*.

Ebbene, è difficile sostenere che negli esempi precedenti siamo in presenza di situazioni in cui si sono esplicitate le *ragioni*, nel senso comune del termine. Se una delle caratteristiche del ragionamento è quella di cercare di convincere, non crediamo che uno sia più convinto del fatto che "5 è maggiore di 2" o che "Aldo è zio di Mario" dopo aver letto i precedenti esempi. Solo raramente la produzione e l'accettazione di un ragionamento avvengono con le modalità prima descritte di riconoscimento della forma logica delle premesse, applicazione di una delle regole formali della logica e riconsiderazione del caso particolare. Quando si ragiona fuori dai corsi o dai libri di logica non si ha in mente la correttezza logica del ragionamento, ma al contrario si ragiona proprio sui termini che intervengono nelle proposizioni coinvolte.

Con ciò non si vuol sostenere un'estraneità tra i due aspetti: anche nel linguaggio naturale vi sono passaggi eseguiti usando regole logiche formali, perché queste, essendo valide in ogni interpretazione, lo sono anche nei domini che fanno da sfondo ai casi via via esaminati; si interiorizzano quindi regolarità discorsive corrette che vengono a far parte delle capacità argomentative dei parlanti. Ma ciò non è sufficiente a ridurre le differenze prima evidenziate fra la logica formale e il ragionamento comune. Dove invece il ragionamento logico ha la sua naturale collocazione è proprio in matematica, e quindi appare appropriato l'inserimento della logica proprio nei programmi di questa disciplina.

3. CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Cosa comportano, dal punto di vista didattico, le considerazioni svolte nel paragrafo precedente?

- La logica, come si è detto, studia il nesso di conseguenza logica fra proposizioni. Non è quindi, contrariamente all'opinione comune, lo studio del "ragionamento", dei processi intellettuali con i quali si argomenta. Verso la fine del secolo scorso si è capito che il nesso di conseguenza logica è quello che sussiste fra gli assiomi e i teoremi della matematica. Le dimostrazioni matematiche, da Euclide in poi, hanno il compito di "certificare" il sussistere di tale nesso, anche se la consapevolezza dello "svuotamento di significato" è avvenuto solo in tempi recenti. In sintesi: non è rilevante la natura degli enti matematici, ma l'attività dimostrativa, e le dimostrazioni matematiche sono basate su regole logiche.

- Studiare logica significa quindi studiare le regole "corrette" (in cui la conclusione è conseguenza logica delle premesse). Queste regole sono quelle con cui si conducono, anche se non sempre in modo esplicito, le dimostrazioni matematiche. In questo senso la logica è disciplina autonoma dalla matematica, anche se è nel cuore del metodo matematico, che ormai da tempo si identifica con il metodo assiomatico.
- Ne segue che, se si vogliono trattare argomenti di logica, questi possono benissimo essere esposti in capitoli a sé stanti. Tuttavia, in sintonia con quanto richiesto nei commenti ai programmi, questi capitoli non andrebbero posti all'inizio dei corsi. Come si è accennato, le formule impiegate in logica, a causa della necessità di "prescindere dai contenuti", sono ancora più astratte di quelle matematiche e, ovviamente, nell'attività didattica bisogna procedere dal concreto verso l'astratto. Bisogna quindi prima fare matematica e poi far emergere da essa le regole logiche.
- La logica, nel nostro secolo, è divenuta "logica matematica" anche nel senso che è stata assoggettata al metodo assiomatico. Questo comporta un'ulteriore astrazione: i simboli logici vanno intesi, al pari dei concetti primitivi delle teorie matematiche, come "privi di significato" (e di qui la proliferazione dei sistemi logici). Su questo aspetto possiamo sorvolare, poiché sicuramente (e giustamente) questi temi sono estranei a quanto richiesto dai programmi. Se vi abbiamo accennato è perché, probabilmente, di qui provengono gli inviti alle cautele, gli avvertimenti contro i possibili abusi di formalizzazione che figurano nei commenti ai programmi. In sintesi: la logica va sempre insegnata a stretto contatto con il linguaggio e i procedimenti matematici e l'unica logica qui in gioco è la logica "classica".
- Tirando le somme di quanto finora emerso, a nostro avviso i programmi possono essere così interpretati. L'insegnante, nel biennio delle scuole superiori, dovrà dedicare un certo numero di lezioni ad argomenti logici, sostanzialmente enucleando dal discorso matematico le regole logiche e ponendo in risalto il problema della loro correttezza. Nel triennio si potrà riprendere il discorso facendo convergere l'attenzione su un vero e proprio "calcolo logico" dei predicati del primo ordine con identità, da trattare con l'approfondimento che l'insegnante valuterà più opportuno per i suoi alunni. La semplice "esistenza" dei calcoli logici è quanto basta per rendere culturalmente significativa l'esposizione, nell'ultimo anno, delle tematiche relative alle teorie matematiche.

4. LOGICA E LINGUAGGIO

Diamo per scontato che l'insegnante abbia familiarità con i contenuti di un corso universitario di logica matematica, in particolare per quanto riguarda il calcolo dei predicati del primo ordine con identità.

Esaminiamo in primo luogo gli elementi del suo linguaggio. Nell'alfabeto figurano costanti e variabili individuali, costanti predicative (tra cui =) e funzionali, connettivi e quantificatori. Mediante l'alfabeto, con un procedimento induttivo, si costruiscono i *termini* e le *formule ben formate* (o più semplicemente *formule*). Tra queste ultime sono dette *proposizioni chiuse* (o semplicemente *proposizioni*) o *enunciati* quelle senza variabili libere (e sono tali che, quando si interpreta il linguaggio, divengono vere o false relativamente al dominio della interpretazione). Le formule con almeno una occorrenza libera di una variabile sono dette anche *proposizioni aperte.*

Quando si scrive $x + 2 = 3$ si afferma giustamente che non è né vera, né falsa. Spesso tuttavia diciamo che $x + 2 = 3$ è un'equazione e sottolineiamo che, invece, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ è un'identità. Osserviamo subito che tutte queste formule non appartengono al linguaggio della logica dei predicati in quanto, ad esempio, 2 e 3 non sono affatto simboli privi di significato, ma nomi di numeri naturali. Anche se vengono spesso qualificati come *costanti*, sono diversi dalle costanti logiche, che sono suscettibili di svariate interpretazioni e non nomi di oggetti specifici. Lo stesso dicasi del "+" che, nelle formule precedenti, denota l'addizione fra numeri naturali e non è quindi un simbolo di costante funzionale biargomentale. In altri termini, normalmente le formule matematiche sono già interpretate, tanto è vero che spesso si precisa se stiamo parlando dei numeri naturali, o dei numeri reali, e così via. Il passaggio alla forma logica di una espressione richiede quindi un'ulteriore astrazione rispetto alla formulazione matematica. La presenza della variabile libera x fa sì che esse non si possano dichiarare né vere, né false.

Sarebbe opportuno allora chiamarle sempre proposizioni aperte e, ad esempio, affermare che anche $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ non è né vera, né falsa. L'equazione si ha quando la variabile è vincolata esistenzialmente:

$$\exists x(x + 2 = 3)$$

e questa formula, dato che non ha variabili libere, è vera o falsa nell'interpretazione intesa sul dominio di numeri considerato.

Quando si afferma che $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ è un'identità, ciò che si intende è che è vera la proposizione $\forall x((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$.

Molto spesso, esprimendo le proposizioni matematiche, si lasciano sottintesi i quantificatori. Sarebbe invece opportuno abituarsi a scriverli sempre, magari senza simbolizzarli (ossia scrivendo "per ogni" e "esiste"). In ogni caso non conviene mai sottintendere il quantificatore esistenziale e va fatto notare esplicitamente che, di solito, quando si chiede se è vera o falsa una proposizione aperta, in realtà si sta chiedendo se è vera o falsa la sua chiusura universale. Ad esempio, quando si chiede se vale la proprietà commutativa $x + y = y + x$, si vuol sapere se è vera la proposizione $\forall x\, \forall y(x + y = y + x)$. La risposta è affermativa nei domini numerici, ma è falsa se stiamo parlando di vettori e "+" si interpreta sul prodotto vettoriale o se stiamo parlando di matrici quadrate dello stesso ordine e "+" indica il prodotto righe per colonne.

Così, può generare confusione dire che $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ è un'identità, perché è *sempre* vera. L'insegnante ha chiaro che ciò significa che, comunque si sostituisca un (nome di un) numero alla x, si ottiene una proposizione vera. Però, come è ben noto, se si fa variare il significato di +, di 1, ecc. può capitare che $\forall x((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$ risulti falsa. Questa circostanza non sarebbe da evidenziare se poi in logica non si definissero tautologie o formule valide (il primo termine si riferisce usualmente al calcolo proposizionale, il secondo alla logica dei predicati) le proposizioni sempre vere (in qualsiasi interpretazione di tutti i simboli non logici presenti in esse). $\forall x((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$ non è, al pari di quasi tutte le formule che si incontrano in matematica, valida.

A nostro avviso si può benissimo dire che $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ è una equazione, intendendo che ci si chiede se è vera $\exists x((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$. Nel momento in cui si scopre che è vera $\forall x((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$, ne segue logicamente che è vera anche $\exists x((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$. Le formule del tipo $\forall x\mathrm{A} \rightarrow \exists x\mathrm{A}$, infatti, sono valide. In questo caso, come è noto, si dice che l'equazione è indeterminata.

Tornando all'equazione $\exists x(x + 2 = 3)$, di essa ha quindi senso chiedersi se è vera o falsa. Risolvere l'equazione significa trasformarla in una equivalente del tipo $\exists x(x = a)$. Indipendentemente dalla complessità dell'equazione, ad esempio di primo grado, quando la si risolve si perviene dopo alcuni "passaggi" ad una scrittura quale $x = 1$. Le trasformazioni che si eseguono sono basati sulle regole logiche dell'identità (proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e sostituibilità degli identici). In sostanza si dimostra che è vera la proposizione:

$$\forall x(x + 2 = 3 \leftrightarrow x = 1).$$

L'equivalenza in parentesi non è, per le ragioni già esposte, un'equivalenza logica. Nei "passaggi", infatti, oltre alle leggi logiche relative all'identità, si sfruttano, come assiomi, proprietà algebriche delle operazioni le quali evidentemente non sono valide.

È invece valido lo schema:

$$\forall x(\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}) \rightarrow (\exists x\mathrm{A} \leftrightarrow \exists x\mathrm{B}).$$

Quindi, da $\forall x(x + 2 = 3 \leftrightarrow x = 1)$, segue logicamente:

$$\exists x(x + 2 = 3) \leftrightarrow \exists x(x = 1).$$

In definitiva $\exists x(x + 2 = 3)$ è vera se e solo se lo è $\exists x(x = 1)$. Come si è detto, quest'ultima proposizione è vera e si può concludere che lo è l'equazione di partenza (e tutto ciò si può poi esprimere con l'abituale terminologia dicendo che l'equazione è determinata e ha 1 come unica soluzione).

Per fare un altro esempio, quando si chiede di risolvere l'equazione:

$$x^2 - x = 0,$$

la proposizione in gioco è $\exists x(x^2 - x = 0)$. Mediante alcuni passaggi in cui intervengono proprietà specifiche (ad esempio la legge di annullamento del prodotto), si perviene a: $\forall x(x^2 - x = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = 1)$, da cui, come in precedenza, segue che l'equazione di partenza è determinata e ha le soluzioni 0 e 1.

Nel caso di un sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 7y = 3 \end{cases}$

la proposizione in gioco è: $\exists x \exists y(2x + 3y = 7 \wedge 5x - 7y = 3)$.

I consueti passaggi portano a concludere che è vera:

$$\forall x \forall y(2x + 3y = 7 \wedge 5x - 7y = 3 \leftrightarrow x = 2 \wedge y = 1),$$

da cui la conclusione che il sistema è determinato e ha la soluzione (2,1).

In precedenza abbiamo scritto la formula $\exists x(x = a)$. Che tipo di formula è? A prima vista appare come una proposizione della logica dei predicati, in quanto non ha variabili libere. Come tale, quando la si interpreta, risulta vera o falsa. Tuttavia, nel contesto delle equazioni, non è esattamente questo che si vuole affermare. E infatti si dice che a è un "parametro", ossia una "costante arbitraria". I cosiddetti parametri, che si introducono di solito con troppa disinvoltura, sono "oggetti misteriosi" per la quasi totalità degli studenti. Il punto è che i parametri sono variabili che, a differenza delle incognite, sono quantificate universalmente. In sostanza, quando si introduce un'equazione parametrica, ci si vuole riferire alla proposizione:

$$\forall a \exists x(x = a).$$

A stretto rigore questa non è una formula della logica dei predicati poiché a non è tra le lettere che, in base alle regole di formazione delle formule, possono essere quantificate (in logica si scriverebbe $\forall y \exists x(x = y)$).

Per inciso notiamo che questa proposizione è valida, ossia vera in ogni dominio per ogni interpretazione. Da essa segue logicamente $\exists x(x = a)$

(intesa come proposizione della logica dei predicati) e anche $\exists x(x = a)$ è valida (non può mai risultare falsa).

Chiariamo con un esempio quest'ultima questione. Quando si dice: "risolvere l'equazione parametrica $ax + 1 = a$", abitualmente si sottintende che x è l'incognita e a è il parametro e quindi che si vuole indagare la verità della proposizione:

$$\forall a \exists x(ax + 1 = a).$$

Ciò che si ottiene con gli abituali passaggi è che è vera la proposizione:

$$\forall a \forall x \left(ax+1=a \leftrightarrow \neg a=0 \wedge x=\frac{a-1}{a} \right).$$

Da questa seguono logicamente:

$$\forall a\,(a=0 \rightarrow \neg\exists x(ax+1=a))$$

e $$\forall a \left(\neg a=0 \rightarrow \left(\exists x(ax+1=a) \leftrightarrow \exists x \left(x=\frac{a-1}{a} \right) \right) \right),$$

ossia, traducendo nel linguaggio abituale, se $a = 0$, l'equazione è impossibile, e, se $a \neq 0$, l'equazione è determinata e ha soluzione $x = \dfrac{a-1}{a}$.

Nulla vieta di considerare a come incognita e x come parametro, e quindi la proposizione:

$$\forall x \exists a(ax + 1 = a).$$

Si ottiene allora:

$$\forall x\,(x=1 \rightarrow \neg\exists a(ax+1=a))$$

(se $x = 1$, l'equazione è impossibile)

e $$\forall x \left(\neg x=1 \rightarrow \left(\exists a(ax+1=a) \leftrightarrow \exists a \left(a=\frac{1}{1-x} \right) \right) \right)$$

(se $x \neq 1$, l'equazione è determinata e ha soluzione $\dfrac{1}{1-x}$).

Quanto ora esposto ha volutamente carattere provocatorio: costituisce un bell'esempio di quell'eccesso di formalizzazione dal quale i commenti ai programmi mettono giustamente in guardia. D'altra parte, oltre ad aver chiarito il concetto di parametro, tutto quanto precede fa vedere quanta logica ci sia nella matematica (e se si esplicitassero i passaggi che non abbiamo riportato, ne emergerebbe molta altra). Dal punto di vista didattico cosa rimane? L'insegnante può continuare a trattare gli argomenti tradizionali (equazioni e sistemi) nel modo solito, ma dovrebbe impiegare una terminologia più appropriata a una visione omogenea della matematica. Ciò al fine di preparare la riflessione logica che sarà condotta in seguito fino al grado di approfondimento ritenuto più idoneo nel contesto delle singole classi. L'atteggiamento più comune degli alunni di fronte agli argomenti matematici si sintetizza con la domanda "cosa devo fare?". È bene continuare ad assecondare queste aspettative che sono in linea con l'impostazione costruttiva che la matematica deve avere nei primi anni di scuola. Le applicazioni della matematica alla risoluzione di problemi che accompagnano tutto l'*iter* scolastico non rendono particolarmente sentita l'esigenza di rispondere alla domanda "perché lo si fa?". Tuttavia, ad un certo punto, bisognerà che ci si cominci a chiedere "cosa ho fatto?", e se quello che si è fatto è matematica, allora non si può evitare di parlare di logica.

Nello scrivere le formule precedenti abbiamo usato i connettivi e i quantificatori ed è su di essi che deve iniziare la riflessione logica. Non entriamo nei dettagli di come, a nostro avviso, si dovrebbe procedere nella concreta attività didattica, in quanto possiamo limitarci a riassumere e a integrare quanto esposto in [Palladino, 1996a]. Bisogna in primo luogo evidenziare i principi di base dell'indagine logica che si intende svolgere: il *principio di bivalenza* (una proposizione può assumere uno ed uno solo dei due valori di verità **V** (vero) e **F** (falso)) e *di vero-funzionalità dei connettivi* (il valore di verità di una proposizione composta mediante un connettivo è funzione dei valori di verità delle proposizioni componenti). Quest'ultimo comporta che la "definizione" di un connettivo è nella sua "tavola" di verità. Per introdurre i connettivi e i quantificatori conviene riferirsi, più che al linguaggio, alle situazioni che si intendono descrivere. Come nell'insegnamento delle lingue straniere non si ricorre più, almeno inizialmente, alla traduzione di frasi italiane, ma si usa direttamente la lingua da imparare in contesti familiari – ristorante, stazione, scuola, ecc. –, così il linguaggio logico si può ricavare, come emerge da quanto precede, da quello della matematica già impiegato dallo studente in diverse situazioni.

• Introdotta la negazione $\neg$ come quel connettivo monoargomentale che inverte il valore di verità della proposizione a cui si applica, si possono passare in rassegna i connettivi biargomentali introdotti come funzioni dall'insieme delle coppie di valori di verità all'insieme dei valori di verità, evidenziando, tra i sedici combinatoriamente possibili, quelli significativi.

Ad esempio, vi è il connettivo che ha valore **V** quando le proposizioni componenti hanno entrambe valore **V**, e valore **F** negli altri tre casi. Questo connettivo si indica con $\wedge$ e si chiama *congiunzione*. Il simbolo $\wedge$ si legge "e" in quanto "e" viene impiegato nelle situazioni in cui si vuole asserire la verità congiunta di due proposizioni.

In un secondo momento, soprattutto a titolo di esercizio, si possono fare esempi in cui la "e" del linguaggio naturale (o matematico) non può essere formalizzato con $\wedge$.

- Per quanto riguarda la disgiunzione $\vee$ la situazione è analoga. In linea con l'impostazione suggerita, non è necessario "drammatizzare" la differenza tra la disgiunzione *non esclusiva* (o debole, che corrisponde a $\vee$) e la disgiunzione *esclusiva* (o forte, che indichiamo con $\veebar$), definita dalla tavola:

A	B	A $\veebar$ B
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Nel linguaggio comune vi è "o" che viene usato per entrambe le situazioni ("o" alternativo, *vel*; "o" disgiuntivo, *aut*). Molto spesso però le due proposizioni disgiunte sono incompatibili tra loro e quindi è irrilevante quale formalizzazione si adotta (se si esclude che A e B abbiano entrambe valore **V**, le tavole di $\vee$ e $\veebar$ coincidono). In precedenza, ad esempio, abbiamo scritto:

$$\forall x(x^2 - x = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = 1).$$

Dato che l'essere uguale a 0 è incompatibile con l'essere uguale a 1, non vi è differenza con:

$$\forall x(x^2 - x = 0 \leftrightarrow x = 0 \veebar x = 1).$$

In matematica si usa, se non diversamente specificato, la disgiunzione non esclusiva. Quando si vuole evitare una possibile ambiguità (e ciò può accadere solo quando i due disgiunti possono essere entrambi veri) si può precisare, per la disgiunzione non esclusiva "A o B o entrambi" e per quella esclusiva "A o B e non entrambi". La "o" che si adopera in queste due locuzioni è alternativa o disgiuntiva? Non fa differenza:

$$(A \vee B) \vee (A \wedge B) \qquad \text{e} \qquad (A \veebar B) \veebar (A \wedge B)$$

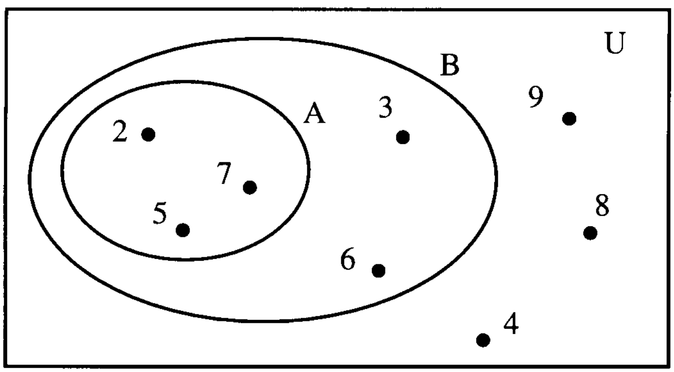
$$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \qquad \text{e} \qquad (A \veebar B) \wedge \neg(A \wedge B)$$

sono logicamente equivalenti.

- Per quanto riguarda il condizionale materiale $\rightarrow$, il connettivo che come è noto riserva più problemi dal punto di vista didattico, conviene osservare che la sua ben nota tavola di verità corrisponde a quella della formula $\neg(A \wedge \neg B)$, ossia significa che non può darsi il caso che si verifichino A e la negazione di B. Questo è il significato che in matematica si attribuisce alle proposizioni del tipo "se A, allora B" (che si possono esprimere in molti altri modi: "se A, B", "B, se A", "da A segue B", "l'ipotesi A implica la tesi B", "A è condizione sufficiente per B", "B è condizione necessaria per A", "A solo se B"). Quando si afferma che "se un quadrilatero è un rombo, allora ha le diagonali perpendicolari" si intende proprio che non può darsi il caso che un quadrilatero sia un rombo e che non abbia le diagonali perpendicolari, mentre quando si afferma che è falso che "se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, allora è un rombo", si intende che possibile la situazione di un quadrilatero che ha le diagonali perpendicolari e che non è un rombo.

Per giustificare ulteriormente la scelta della tavola come corrispondente del "se..., allora...", si può osservare che per dimostrare una proposizione del tipo "se A, allora B" (e la gran parte delle proposizioni matematiche ha, o può essere messa in, questa forma) si può far vedere che non può essere vera $A \wedge \neg B$ in quanto dall'ipotesi A e dalla negazione della tesi B segue una contraddizione, oppure una proposizione che si sa già essere falsa.

Un altro esempio che può essere utile è il seguente:



in cui l'insieme A è contenuto in B. È allora vera la proposizione:

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Sono allora veri tutti i casi particolari ($\forall x A(x) \rightarrow A(a)$ è valida). Non solo:

$$2 \in A \rightarrow 2 \in B$$

in cui antecedente e conseguente sono veri, ma anche:

$$3 \in A \rightarrow 3 \in B$$

in cui l'antecedente è falso e il conseguente vero e:

$4 \in A \rightarrow 4 \in B$

in cui antecedente e conseguente sono entrambi falsi.

- Per quanto riguarda il bicondizionale $A \leftrightarrow B$ ("A se e solo se B"), si può osservare che equivale logicamente a $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ e che il "se" si riferisce al secondo congiunto $(B \rightarrow A)$ e il "solo se" al primo congiunto $(A \rightarrow B)$. Quando si afferma che "A è condizione necessaria e sufficiente per B" si congiungono proprio le proposizioni "A è condizione necessaria per B" $(B \rightarrow A)$ e "A è condizione sufficiente per B" $(A \rightarrow B)$.

Quando è vero il condizionale $A \rightarrow B$ e non vale $B \rightarrow A$, per sottolineare la asimmetria che si instaura fra le proposizioni A e B, si può dire:

"A è condizione sufficiente, ma non necessaria, per B"

"B è condizione necessaria, ma non sufficiente, per A".

- Sui quantificatori si è già detto in precedenza; bisogna in primo luogo abituarsi a non sottintenderli con troppa disinvoltura e a sottolineare le divergenze con il linguaggio naturale: se il quantificatore universale è meno problematico, quello esistenziale può generare fraintendimenti. Quando si dice "almeno un...", "vi è..." si intende in genere che non vale "per ogni..." (se si afferma che "alcuni sono maschi" si ritiene in genere che "non tutti sono maschi", ossia che "vi è un non maschio"); invece $\forall x A \rightarrow \exists x A$ è valida, ossia da "tutti sono maschi" segue logicamente "vi è almeno un maschio" (e "non vi è un non maschio").

Va inoltre osservato che i quantificatori si applicano a proposizioni aperte e bisogna abituarsi a specificare, quando si scrive una formula, se essa è aperta o chiusa e quali delle (occorrenze delle) lettere che compaiono in essa sono libere o vincolate. Si può inoltre evidenziare che in logica si introducono due soli quantificatori (tra l'altro interdefinibili), anche se nel linguaggio comune e matematico se ne impiegano numerosi altri. È interessante esaminare come, mediante i due quantificatori introdotti, si possono definire i quantificatori numerici "esistono almeno n", "esistono al più n", "esistono esattamente n".

In sintonia con quanto riportato dai commenti ai programmi non vanno assegnati prematuramente esercizi di formalizzazione fini a se stessi. Questi aspetti vanno eventualmente approfonditi quando si esaminano le teorie matematiche. Per ulteriori considerazioni, esempi ed esercizi si veda [Bernardi, 1996].

5. LOGICA E DIMOSTRAZIONI

Come si è detto in precedenza, solo quando l'alunno ha già familiarizzato con le dimostrazioni matematiche sia in algebra (si ricordi che anche i calcoli aritmetici e algebrici sono dimostrazioni), sia in geometria, l'insegnante potrà dedicare alcune lezioni alla logica vera e propria.

Al primo anno, auspicabilmente verso il termine, la parte di logica può essere limitata all'illustrazione del linguaggio della logica dei predicati e di alcuni elementi di logica proposizionale.

Dopo aver introdotto i connettivi si può procedere al calcolo delle tavole di verità per le formule proposizionali (fp) e definire il concetto di *tautologia* (una fp A è una tautologia sse assume valore di verità **V** qualsiasi sia il valore di verità attribuito alle lettere proposizionali che occorrono in essa). Questo non dovrebbe essere inteso come fine a se stesso, ma per introdurre i concetti di:

(a) *conseguenza logica* (B è conseguenza logica di A sse per ogni assegnazione di valori di verità alle lettere che occorrono in A e in B, se A ha valore **V**, allora B ha valore **V**, ossia, equivalentemente, sse $A \to B$ è una tautologia);

(b) *equivalenza logica* (due fp A e B sono logicamente equivalenti sse assumono lo stesso valore di verità in corrispondenza di ogni assegnazione di valori di verità alle lettere che occorrono in esse, ossia, equivalentemente, sse $A \leftrightarrow B$ è una tautologia);

(c) *regola corretta*. Una regola è una scrittura del tipo:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \cdots \\ P_n \\ \hline P \end{array}$$

dove $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sono le fp *premesse* e P la fp *conclusione*. Una regola è *corretta* sse P è conseguenza logica delle premesse. Nel caso proposizionale ciò accade se P ha valore di verità **V** per ogni assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali per cui tutte le premesse hanno valore **V**, e ciò equivale a dire che $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to P$ è una tautologia.

Nel primo anno la trattazione può essere limitata ad alcune equivalenze logiche significative (ad esempio le leggi di De Morgan, quelle relative alla interdefinibilità dei connettivi) e ad alcune regole non particolarmente complesse (ad esempio modus ponens, modus tollens, concatenazione, contrapposizione). Si faccia notare esplicitamente che l'equivalenza logica di due fp A e B equivale alla correttezza delle regole:

$$\frac{A}{B} \qquad\qquad \frac{B}{A}$$

e che la correttezza della prima equivale all'essere B conseguenza logica di A e quella della seconda all'essere A conseguenza logica di B.

Le regole possono essere facilmente estratte da dimostrazioni già svolte in precedenza. Ciò che vogliamo sottolineare è che non ci si dovrebbe concentrare sulla formalizzazione di frasi (talvolta stravaganti) della lingua italiana (bastano e avanzano quelle impiegate in matematica) e sulla verifica di tautologie più o meno complesse, ma vanno poste in primo piano le regole logiche. Non si devono affatto formalizzare le dimostrazioni, ma basta esplicitare le regole che sono più comuni e far riflettere su quelle che possono non risultare immediatamente ovvie.

Ci si potrà soffermare sulle inferenze logiche che solo apparentemente sono corrette (e va da sé che quanto stiamo esponendo va evidenziato quando se ne manifesti l'opportunità in qualsiasi momento dello sviluppo del programma di matematica). Ad esempio, il ragionamento di Socrate: "Se io sono colpevole devo essere punito; ma io non sono colpevole, dunque non devo essere punito" appare convincente, ma è scorretto. Infatti, con la stessa forma logica si ha, ad esempio, "se una figura è un quadrato, allora ha quattro lati; ma non è un quadrato, dunque non ha quattro lati", che è palesemente scorretto (da $A \to B$ e $\neg A$ non segue logicamente $\neg B$).

Ad esempio, la dimostrazione di un teorema il cui enunciato è del tipo "$A \vee B \to C$" si affronta dimostrando separatamente $A \to C$ e $B \to C$, ossia sfruttando la regola:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to C \\ B \to C \end{array}}{A \vee B \to C}$$

la cui correttezza equivale all'essere tautologia della fp:

$$(A \to C \wedge B \to C) \to (A \vee B \to C).$$

Oppure si consideri la situazione in cui vale una di due ipotesi, ossia vale $A \vee B$. Allora, se da una terza ipotesi C segue $\neg A$, si può concludere che da C segue B. La regola:

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ C \to \neg A \end{array}}{C \to B}$$

è corretta (equivalentemente $(A \vee B) \wedge (C \to \neg A) \to (C \to B)$ è una tautologia).

Si possono giustificare varie forme di ragionamento per assurdo (in cui si assume la negazione della tesi). Una fp del tipo $A \to B$ è, ad esempio, logicamente equivalente alle seguenti:

$$\neg B \to \neg A$$

$$A \wedge \neg B \to B$$

$$A \wedge \neg B \to (C \wedge \neg C).$$

Un esempio particolare di dimostrazione per assurdo è la *consequentia mirabilis* e si basa sulla seguente regola logica (detta anche di *autofondazione*):

$$\frac{\neg A \to A}{A}$$

che è corretta in quanto $(\neg A \to A) \to A$ è una tautologia.

Molti altri esempi sono facilmente reperibili nella letteratura. Si veda tra gli altri [Bellissima, Pagli, 1993], un bel testo che è in linea con quanto veniamo esponendo. Volendo si può poi analizzare la correttezza di semplici ragionamenti, quali quelli proposti in [Palladino, 1996a] (senza ricorrere a procedure sistematiche, ma nel modo intuitivo descritto nel §6).

Nel secondo (o terzo) anno si può esaminare qualche regola logica o formula (fbf) valida della logica dei predicati. Il problema è che, come è noto (teorema di indecidibilità di Church-Turing), non è disponibile un algoritmo per la validità delle formule della logica dei predicati, in grado di svolgere lo stesso ruolo che le tavole di verità rivestono nel caso proposizionale. Inoltre, la semantica (tarskiana) della logica dei predicati è troppo astratta per poter essere sviluppata a livello di scuola secondaria e quindi bisogna far appello all'intuizione. Ci si deve quindi limitare a giustificare intuitivamente le formule valide e a ricercare controesempi per quelle non valide. In fondo, una riflessione sulle regole logiche che si applicano abitualmente nelle dimostrazioni matematiche ha un suo valore educativo anche se si limita a fornire informazioni che non si possono giustificare rigorosamente.

Ad esempio, oltre alle regole di particolarizzazione universale ed esistenziale:

$$\frac{\forall x A(x)}{A(a)} \qquad \frac{A(a)}{\exists x A(x)}$$

e alla già ricordata:

$$\frac{\forall x A(x)}{\exists x A(x)}$$

si possono studiare in modo più o meno sistematico i rapporti fra i quantificatori e i connettivi formulando esplicitamente le fbf valide (o le corrispondenti regole corrette) e giustificando la non validità di quelle che ammettono controesempi. Esprimendoci per comodità mediante fbf (anche se riteniamo didatticamente preferibile evidenziare le regole), sono valide:

$$\forall x A(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)$$

$$\exists x A(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg A(x)$$

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x\, \forall y\, A(x,y) \rightarrow \forall y\, \exists x\, A(x,y)$$

(nelle fbf in cui il connettivo principale è $\rightarrow$, la fbf con il condizionale inverso non è valida).

Inoltre, i sillogismi forniscono un argomento interessante e ricco di esercizi significativi.

Vediamo ora di trarre qualche breve considerazione relativa ai calcoli logici veri e propri. Noi riteniamo che, contrariamente a quanto indicato nei commenti ai programmi, si possa presentare agli alunni degli ultimi anni, ovviamente senza entrare in troppi dettagli tecnici, un sistema *completo* per la logica dei predicati.

Come è noto, i calcoli logici possono essere sviluppati con modalità assai diverse: col metodo assiomatico, della deduzione naturale, col metodo degli alberi (o *tableaux*) semantici, delle sequenze (o sequenti). Dobbiamo presupporre che l'insegnante abbia familiarità almeno con alcuni di essi (rinviamo ai manuali di logica, a [Marchini, 1996] e alla serie di articoli [Palladino, 1994/95/96]). Pur essendo tra loro equivalenti dal punto di vista delle proprietà metateoriche fondamentali (correttezza, completezza, indecidibilità), i diversi tipi di calcolo presentano caratteristiche diverse dal punto di vista didattico. Se i calcoli assiomatici sono più indicati per lo studio dei singoli principi logici e delle varie logiche alternative o estensioni di quella classica (e quindi per lo studio della logica come disciplina autonoma), e i calcoli delle sequenze per l'esecuzione meccanica delle derivazioni (o per questioni relative ai fondamenti della matematica), e pertanto poco adatti per evidenziare gli aspetti della logica rilevanti ai fini dell'insegnamento secondario, diversa è la situazione per quanto riguarda il calcolo della deduzione naturale e il metodo degli alberi semantici. Noi riteniamo che la comprensione delle regole di questi due calcoli sia alla portata degli studenti della scuola secondaria (non potendo in questa sede illustrarne le caratteristiche e giustificare adeguatamente questa nostra affermazione, rinviamo a [Palladino, 94/95/96]). Ci limitiamo ad osservare che, rispetto al metodo della deduzione naturale, il metodo dell'albero semantico ha il vantaggio di dare spesso risposta anche nel caso di fbf non valide o regole non corrette (si ricordi che, per il teorema di indecidibilità, la risposta non può essere sempre ottenuta in un

numero finito di passi, altrimenti il metodo dell'albero semantico sarebbe un algoritmo per la validità della logica dei predicati).
Considerazioni didattiche. Per evitare fraintendimenti è bene puntualizzare quanto abbiamo inteso suggerire in questo paragrafo. Fino a che si evidenziano formule valide o regole corrette e la validità o la correttezza sono giustificate solo su basi intuitive non si fa ancora propriamente logica, anche se ciò ha risvolti educativi rilevanti. Si fa logica quando si introducono tecniche per dimostrare la validità e la correttezza. Se al livello proposizionale una tecnica non problematica è ad esempio quella delle tavole di verità, al livello predicativo le tecniche sono più sofisticate e si basano sull'applicazione di un calcolo logico. Non crediamo che far svolgere derivazioni nel calcolo della deduzione naturale o col metodo degli alberi semantici sia fuori della portata degli studenti degli ultimi anni della scuola secondaria. È l'insegnante che deve valutare se nelle sue classi può inserire proficuamente questi argomenti di logica vera e propria. In ogni caso riteniamo che sia importante almeno "informare" gli alunni del fatto che un ristretto numero di regole particolarmente semplici, quali quelle del calcolo della deduzione naturale, forma un sistema corretto e completo per la logica dei predicati.

6. LOGICA E TEORIE MATEMATICHE

In questo paragrafo conclusivo ci soffermeremo su quanto previsto nei programmi dell'ultimo anno delle scuole superiori.

Sulle geometrie non euclidee ci limitiamo ad osservare che, oltre al loro interesse intrinseco, esse forniscono, dal punto vista didattico, l'occasione di svolgere dimostrazioni in situazioni in cui le figure possono trarre in inganno, e quindi in cui bisogna "ragionare logicamente" appoggiandosi solo agli assiomi specifici e alle regole logiche. Già nella geometria assoluta bisogna prestare particolare attenzione a non utilizzare nel corso delle dimostrazioni il V postulato di Euclide (o l'unicità della parallela) o proposizioni ad esso equivalenti o la cui dimostrazione fa un uso essenziale di esso. Si noti che quando si parla di "forme equivalenti" del V postulato non si intende l'equivalenza logica. Detta U l'unicità della parallela e P una proposizione ad esso equivalente, non si ha in generale che $U \leftrightarrow P$ è valida, ma che $U \leftrightarrow P$ è conseguenza logica degli assiomi $A_1, A_2, ..., A_n$ della geometria assoluta. Ricordiamo che ciò significa che $U \leftrightarrow P$ è vera in tutte le interpretazioni che rendono vere le proposizioni $A_1, A_2, ..., A_n$ (e non che $U \leftrightarrow P$ è vera in tutte le interpretazioni).

Rimandiamo ad [Agazzi, Palladino, 1997] per quanto riguarda le proposizioni geometriche equivalenti al V postulato e per reperire ciò che può essere utilizzato a livello didattico relativamente alle geometrie non euclidee. Come è noto, la creazione di nuovi sistemi geometrici nell'Ottocento è stato uno dei fattori che ha favorito l'affermarsi della concezione moderna dell'assiomatica. La coerenza di questi nuovi sistemi è stata provata mediante il ricorso a "modelli", ossia a interpretazioni opportune dei concetti primitivi che rendevano veri gli assiomi[2]. La coerenza della geometria iperbolica equivale all'indipendenza del V postulato euclideo. Il programma PNI di quinta può essere limitato all'approfondimento ritenuto più opportuno di queste considerazioni. Il programma Brocca propone ulteriori contenuti legati alla concezione moderna dell'assiomatica e ai sistemi formali. Sono questi aspetti che si ricollegano agli elementi di logica esaminati in precedenza, e ad essi indirizziamo ora la nostra attenzione.

In primo luogo è utile presentare, anche schematicamente, le tre tappe principali dell'evoluzione del metodo assiomatico:

- *Assiomatica classica* (Euclide, Aristotele)
  I concetti primitivi hanno un significato e gli assiomi sono proposizioni vere, anzi proposizioni che esprimono proprietà evidenti degli enti matematici.
- *Assiomatica moderna* (Pasch, Peano, Pieri, Hilbert)
  I concetti primitivi sono privi di significato e gli assiomi sono proposizioni aperte, né vere né false (fino a che non si dia un'interpretazione ai concetti primitivi). Si dice che gli assiomi definiscono implicitamente i concetti primitivi.
- *Assiomatica formalizzata* (Hilbert)
  Uso di un linguaggio formale, assiomi come formule ben formate di un linguaggio logico; esplicitazione dell'apparato deduttivo come complesso di assiomi e regole logiche impiegate nella derivazione dei teoremi.

L'importanza di quest'ultima mossa sta nel fatto che in un teoria formalizzata si può definire sintatticamente il concetto di teorema senza ricorrere al concetto semantico (e infinitario) di conseguenza logica: si dice *teorema di una teoria formale* **T** una proposizione del linguaggio della teoria che si ottiene partendo dagli assiomi applicando le regole dell'apparato deduttivo (**T** si può identificare con l'insieme degli assiomi specifici di **T**, escludendo quindi gli eventuali assiomi logici).

[2] Il reale percorso storico, come quasi sempre accade, è più complicato. Si veda, ad esempio, [Borga, Palladino, 1997]. In questo volume sono illustrate le vicende storiche che hanno determinato gli sviluppi del metodo assiomatico e l'elaborazione dei calcoli logici, le questioni relative ai fondamenti della matematica come si sono configurate dall'inizio del secolo e le caratteristiche delle correnti di pensiero che animano gli attuali dibattiti della filosofia della matematica. Si tratta di temi sicuramente non estranei alla didattica della disciplina e che dovrebbero far parte del bagaglio culturale dell'insegnante.

Se **T** è una teoria elementare (ha come apparato deduttivo una delle possibili varianti della logica dei predicati del primo ordine con identità), il legame tra la sintassi e la semantica è sancito dal fatto che sono teoremi di **T** tutte (completezza) e sole (correttezza) le proposizioni che sono conseguenza logica degli assiomi di **T**.

Con l'affermarsi della concezione moderna dell'assiomatica e di quella formalizzata è nata e si è sviluppata la problematica metateorica, inizialmente rivolta ai problemi di indipendenza e di coerenza (ossia a quelli esplicitamente menzionati nei programmi per l'ultimo anno) e successivamente estesa alla completezza sintattica, alla decidibilità, alla categoricità. Dato che, come abbiamo avuto modo di constatare consultando vari libri di testo, questi concetti sono spesso definiti in modo impreciso, è opportuno, prima di commentarli dal punto di vista didattico, richiamarli brevemente. In particolare è utile distinguere i concetti sintattici da quelli semantici e sottolineare i loro collegamenti.

Come è usuale, indichiamo il fatto che A è un teorema di **T** con $\mathbf{T} \vdash A$ (che si legge anche "A è derivabile da **T**") (concetto sintattico), mentre con $\mathbf{T} \models A$ si indica che A è conseguenza logica di **T**, ossia che A è vera in ogni interpretazione che rende veri gli assiomi di **T** (più brevemente: "A è vera in ogni modello di **T**") (concetto semantico).

Il *teorema di correttezza* afferma che, se A è derivabile da **T**, allora A è conseguenza logica di **T**:

se $\mathbf{T} \vdash A$, allora $\mathbf{T} \models A$.

Il *teorema di completezza* è l'inverso di quello di correttezza:

se $\mathbf{T} \models A$, allora $\mathbf{T} \vdash A$.

Si noti che questi teoremi enunciano proprietà dell'apparato deduttivo della teoria, ossia sono proprietà della *logica*, e *non* dei sistemi formali. La correttezza è un requisito minimale di un calcolo logico (ed è ciò che lo distingue da un mero gioco formale, come gli scacchi). La completezza è un requisito massimale: se un calcolo logico è completo, esso consente di ricavare *tutte* le conseguenze logiche degli assiomi.

Osservazioni. La dimostrazione del teorema di completezza per la logica del primo ordine (Gödel 1930) segna una svolta decisiva degli studi logici. Essa non è proponibile nella scuola secondaria. Tuttavia il fatto che valga il teorema è un'informazione preziosa, non difficile da trasmettere. Anzi, il fatto che poche e semplici regole logiche costituiscano un calcolo corretto e completo è uno dei risultati più significativi della logica contemporanea. Non ci appare del tutto chiaro perché il commento ai programmi per i trienni del PNI ponga l'accento sul fatto che: «Il docente non presenterà una trattazione completa delle regole d'inferenza della logica dei predicati, che risulterebbe troppo astratta, ma sceglierà alcuni tipici schemi di deduzione di uso più frequente in matematica». Le regole della deduzione naturale o dell'albero semantico (una quindicina in tutto, comprendendo quelle dell'identità, quasi tutte ovvie intuitivamente, e in ogni caso da presentare e commentare in classe) formano un calcolo logico completo. È vero che un concetto può essere più facilmente colto se si possono proporre anche dei controesempi (e per fare un esempio significativo di sistema logico incompleto bisogna ricorrere alla logica del secondo ordine), ma dal punto di vista didattico non bisogna sottovalutare anche il puro e semplice contenuto informativo (è giusta la guerra al "nozionismo", ma senza nozioni si fa poca strada).

Definizione. **T** è *coerente*, o *consistente*, o *non contraddittoria* (Coer**T**) se e solo se da essa non si può derivare una contraddizione, ossia *non* esiste A tale che $\mathbf{T} \vdash A \wedge \neg A$ (equivalentemente: $\mathbf{T} \vdash A$ e $\mathbf{T} \vdash \neg A$) (concetto sintattico).

Teorema: Coer**T** se e solo se esiste B tale che *non* $\mathbf{T} \vdash B$ (almeno una proposizione *non* è teorema di **T**).

Osservazioni. La dimostrazione di questo teorema è semplice. Evidentemente, se Coer**T**, allora, per ogni A, *non* $\mathbf{T} \vdash A \wedge \neg A$, e quindi non tutte le B sono teoremi di **T**. Viceversa, per contrapposizione, se *non* Coer**T**, allora esiste A tale che $\mathbf{T} \vdash A \wedge \neg A$; ma allora, per la regola logica in base alla quale da una contraddizione segue qualsiasi formula (in sostanza per la tautologia $A \wedge \neg A \rightarrow B$), per ogni B, $\mathbf{T} \vdash B$.

Il fatto che da una **T** incoerente derivi ogni proposizione giustifica la necessità di cautelarsi dalle contraddizioni. Il fatto che da **T** non derivi ogni B può essere assunto come definizione di coerenza per quei sistemi formali nel cui linguaggio non figura la negazione.

Teorema: *non* $\mathbf{T} \vdash A$ se e solo se Coer$\mathbf{T} \cup \{\neg A\}$.

Osservazioni. Ad esempio, il fatto che il V postulato non sia derivabile dagli assiomi della geometria assoluta è equivalente alla coerenza del sistema ottenuto aggiungendo alla geometria assoluta la negazione del V postulato. Anche la dimostrazione di questo teorema non è difficile. Se non fosse Coer$\mathbf{T} \cup \{\neg A\}$, da $\mathbf{T} \cup \{\neg A\}$ deriverebbe una contraddizione, ossia l'aggiunta a **T** di $\neg A$ porterebbe a contraddizione; ma ciò costituirebbe una dimostrazione per assurdo in **T** di A, contro l'ipotesi *non* $\mathbf{T} \vdash A$. Viceversa, dato che ovviamente $\mathbf{T} \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$, se valesse $\mathbf{T} \vdash A$, e quindi a maggior ragione $\mathbf{T} \cup \{\neg A\} \vdash A$, $\mathbf{T} \cup \{\neg A\}$ sarebbe incoerente.

Definizione. **T** è *dipendente* se e solo se esiste un assioma di **T** che si può derivare dagli altri (concetto sintattico). Si dice anche che A è *indipendente* da **T** se A *non* si può derivare da **T**$-\{A\}$, ossia, in base al teorema precedente, che è Coer(**T**$-\{A\}) \cup \{\neg A\}$.

Definizione. **T** è *soddisfacibile* (Sod**T**) se e solo se esiste una interpretazione che è modello di **T** (concetto semantico).

Teorema di coerenza: se Sod**T**, allora Coer**T**.

Teorema di esistenza del modello: se Coer**T**, allora Sod**T**.

Osservazioni. Il teorema di coerenza è equivalente al teorema di correttezza e il teorema di esistenza del modello è equivalente al teorema di completezza. I due teoremi stabiliscono l'equivalenza tra il concetto sintattico di coerenza e il concetto semantico di soddisfacibilità.
Di solito, per provare l'indipendenza di A da **T**$-\{A\}$, ossia per dimostrare Coer(**T**$-\{A\}) \cup \{\neg A\}$, si dimostra Sod(**T**$-\{A\}) \cup \{\neg A\}$, ossia si trova un'interpretazione che rende veri gli assiomi di **T**$-\{A\}$ e falsa A.

Il ricorso a modelli per provare la coerenza o l'indipendenza è utile quando si trovano modelli finiti. In genere non è ritenuto soddisfacente quando il modello è infinito, e quindi è costituito da enti astratti. Dire che un sistema formale per l'aritmetica è coerente perché ha come modello i numeri naturali può non apparire convincente nella misura in cui presuppone nota la struttura dei numeri naturali.

Che dire delle dimostrazioni di indipendenza del V postulato (o equivalentemente di coerenza della geometria iperbolica) che sono ottenute mediante il ricorso a modelli costituiti da enti matematici? Senza entrare in dettagli, si può dire che i modelli (di Klein, di Poincaré) delle geometrie non euclidee sono costituiti da enti euclidei. Supposta coerente la geometria euclidea, essa ha un modello. In esso, come è noto, si esegue un'interpretazione che soddisfa gli assiomi della geometria iperbolica, la quale è quindi soddisfacibile. Ma se è soddisfacibile, allora la geometria iperbolica è coerente (e il V postulato indipendente dai restanti assiomi della geometria). Questa è la ragione per cui, correttamente, si afferma che, *se la geometria euclidea è coerente, allora lo è anche la geometria iperbolica*.

Per dare all'insegnante un quadro più completo presentiamo altri risultati e concetti relativi alle teorie matematiche formalizzate, avvertendo però che si tratta di argomenti ai quali, nella scuola secondaria, si può solo eventualmente accennare se si ritiene opportuno fornire informazioni su aspetti più approfonditi dell'indagine metalogica.

Teorema di compattezza sintattica: Coer**T** se e solo se ogni sottoinsieme finito di **T** è coerente.

Teorema di compattezza semantica: SodT se e solo se ogni sottoinsieme finito di **T** è soddisfacibile.

Osservazioni. Il teorema di compattezza semantica serve a provare che sono soddisfacibili teorie con infiniti assiomi, dimostrando la soddisfacibilità dei sottoinsiemi finiti. Tra le conseguenze più significative vi è l'esistenza di modelli non standard per le teorie formali dell'aritmetica e dell'analisi (ossia di modelli non isomorfi rispettivamente ai numeri naturali e ai numeri reali).

Definizione. **T** è *sintatticamente completa* se e solo se, per ogni proposizione A del linguaggio di **T**, **T** $\vdash$ A oppure **T** $\vdash \neg$A.

Definizioni. **T** è *assiomatizzata* se e solo se l'insieme dei suoi assiomi è *decidibile* (esiste un algoritmo che consente di determinare se una proposizione del linguaggio di **T** è o non è un assioma di **T**; un *algoritmo* è un procedimento meccanico che risolve un problema in un numero finito di passi, e quindi che può essere eseguito da un calcolatore). **T** è *assiomatizzabile* se e solo se è equivalente (ha gli stessi teoremi) a una teoria assiomatizzata.

Osservazioni. La completezza sintattica di una teoria non va confusa con la completezza (semantica) della logica dei predicati. Ben poche teorie matematicamente significative hanno questa proprietà. L'abbiamo riportata perché l'incompletezza sintattica figura nell'enunciato del primo teorema di incompletezza di Gödel del 1931, ritenuto da molti il più importante risultato della logica matematica: i sistemi formali assiomatizzabili, coerenti e sufficientemente espressivi per l'aritmetica sono sintatticamente incompleti. Se consideriamo la teoria **N** per l'aritmetica i cui assiomi sono *tutte* le proposizioni vere sui numeri naturali (con un linguaggio che comprende l'addizione e la moltiplicazione), allora **N** è banalmente sintatticamente completa (e coerente), per cui, per il teorema di Gödel, non è assiomatizzabile. **N**, pur essendo sintatticamente completa, ha modelli non standard. Di solito le teorie formali sono date elencando gli assiomi, e quindi sono assiomatizzate.

Definizione. **T** è *decidibile* se e solo se è decidibile l'insieme dei suoi teoremi, ossia se e solo se esiste un algoritmo che, data una qualsiasi proposizione A del linguaggio di **T**, consente di stabilire se **T** $\vdash$ A o no.

Osservazioni. Si rifletta sulla differenza tra completezza sintattica e decidibilità. Per teorie coerenti e assiomatizzate la completezza sintattica implica la decidibilità (l'algoritmo è la produzione meccanica dei teoremi), ma non vale il viceversa. Le questioni relative agli algoritmi e alla decidibilità figurano in alcuni programmi relativi ai trienni. I loro collegamenti con le teorie matematiche formalizzate sono tuttavia troppo complessi per un loro inserimento nella scuola secondaria.

Definizione. **T** è *categorica* se e solo se ammette, a meno di isomorfismi, un unico modello.

Osservazioni. È possibile proporre anche a livello di scuola secondaria qualche semplice esempio di teoria categorica e di teoria non categorica. Tuttavia le teorie matematiche significative non sono categoriche (si ricordi quanto prima riportato nelle osservazioni relative all'incompletezza sintattica). Ciò contrasta con l'opinione comune secondo la quale, ad esempio, la teoria dei campi archimedei completi ha come unico modello (sempre a meno di isomorfismi) i numeri reali. Qui entrano in gioco questioni tecniche relative alle differenze fra calcoli logici del primo e del secondo ordine sulle quali qui dobbiamo (e possiamo) sorvolare. Le abbiamo citate perché, a nostro avviso, anche se non proponibili didatticamente, dovrebbero far parte del bagaglio culturale dell'insegnante. Ad esempio, nei programmi figura il principio di induzione: la sua formalizzazione naturale è nella logica del secondo ordine. Su questi aspetti si veda [Rogers, 1978] e, sul principio di induzione (anche al di fuori delle considerazioni più strettamente logiche), [Palladino, 1994] e [Palladino, 1996b].

Conclusione. Le questioni metateoriche relative alle teorie formalizzate sono senza dubbio interessanti e importanti. Quanto proporre nella scuola secondaria può essere deciso solo dall'insegnante, il quale deve comunque avere le idee chiare in proposito. Ignorarle del tutto è sicuramente troppo drastico, anche perché quanto previsto di logica dai programmi può avere una sua naturale motivazione proprio in funzione della presentazione degli sviluppi del metodo assiomatico, in modo che l'alunno, alla fine dei suoi studi secondari, abbia recepito il concetto di teoria matematica. Ribadiamo ancora che quanto previsto sui calcoli logici non deve avere affatto la funzione di sostituire, e nemmeno di integrare, il modo usuale di condurre le dimostrazioni: in primo luogo serve a esplicitare l'impiego delle regole logiche, a riflettere direttamente su di esse, e in secondo luogo a rendere consapevoli che anche l'attività deduttiva può essere, almeno in larga misura, svolta mediante formalismi implementabili al calcolatore. Se da un lato ci si può limitare ai problemi di coerenza e indipendenza in collegamento con le geometrie non euclidee, dall'altro lato è sicuramente almeno possibile introdurre, magari solo a livello informativo, senza pretendere di fornire giustificazioni approfondite, gli altri concetti metateorici relativi alle teorie formalizzate.

7. BIBLIOGRAFIA

E. AGAZZI, D. PALLADINO [1997], *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia.

F. BELLISSIMA, P. PAGLI [1993], *La verità trasmessa. La logica attraverso le dimostrazioni matematiche*, Sansoni, Firenze.

C. BERNARDI [1996], "Il metodo ipotetico-deduttivo: Concetti primitivi, Assiomi, Definizioni, Teoremi, Coerenza e Indipendenza, Modelli di una Teoria", in Ciarrapico, Mundici [1996], pp. 91-105.

M. BORGA, D. PALLADINO [1997], *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia.

L. CIARRAPICO, D. MUNDICI [1966] (a cura di), *L'insegnamento della logica*, Ministero della PI, Direzione Generale Istruzione Classica, Scientifica, Magistrale, in collaborazione con AILA, Atti Lecce (22-26 novembre 1993) - Otranto (21-23 aprile 1994).

G. LOLLI [1988], *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna.

G. LOLLI [1992], *Cos'è la logica matematica*, Franco Muzzio, Padova.

G. LOLLI [1996], *Capire la matematica*, Il Mulino, Bologna.

C. MARCHINI [1996], "Schemi di deduzione", in Ciarrapico, Mundici [1996], pp. 107-132.

D. PALLADINO [1994], "Il principio di induzione e l'aritmetica formalizzata", in *Epistemologia della matematica: seminari 1992-1993*, a cura di M. Ferrari e F. Speranza, Quaderno CNR n. 14, pp. 157-188.

D. PALLADINO [1994/95/96], articoli sui calcoli logici in *Nuova Secondaria* (XII, 3, novembre 94, pp. 71-74; XII, 5, gennaio 95, pp. 78-82; XII, 6, febbraio 95, pp. 65-69; XII, 8, aprile 95, pp. 67-71; XII, 9, maggio 95, pp. 76-79; XIII, 8, aprile 96, pp. 75-77; XIII, 9, maggio 96, pp. 69-73).

D. PALLADINO [1996a], "Linguaggio naturale e formalizzazione, connettivi e quantificatori", in Ciarrapico, Mundici [1996], pp. 27-51.

D. PALLADINO [1996b], "Il principio di induzione", in Ciarrapico, Mundici [1996], pp. 53-77.

R. ROGERS [1978], *Logica matematica e teorie formalizzate*, Feltrinelli, Milano.

PROBABILITÀ: UN'INTRODUZIONE PER LE SCUOLE SECONDARIE

Giorgio Dall'Aglio
Dipartimento di Statistica - Università "La Sapienza" - Piazzale Aldo Moro, 5 00185 Roma

La probabilità, con il calcolo delle probabilità ad essa collegato, si è affermata come componente essenziale della matematica e come strumento indispensabile per la scienza e per la tecnica; essa è entrata da tempo anche nel linguaggio e nell'uso comune.

Eppure in Italia essa stenta ad entrare a pieno titolo nel curriculum della laurea in matematica. Il suo insegnamento poche volte compare tra quelli obbligatori, e spesso è limitato alla parte più formale, trascurando i fondamenti e l'approccio intuitivo ai contenuti sostanziali; uno svolgimento certamente poco rispondente alla formazione dei docenti.

I testi scolastici purtroppo non sono sempre di grande aiuto: essi risentono del clima generale di disinteresse e disinformazione e spesso prestano scarsa attenzione al contenuto sostanziale e all'intuizione.

Mi propongo perciò di presentare quella che io ritengo una corretta e significativa introduzione al concetto di probabilità, che renda più comprensibili e convincenti gli sviluppi matematici

* * *

"Calcolo delle probabilità" è una espressione che si può rendere più chiara aggiungendo "...di certi eventi, partendo da quelle di altri eventi che vengono considerate note". Per esempio nelle estrazioni dall'urna del lotto saremo tutti d'accordo che ciascuno dei 90 numeri ha probabilità 1/90; che, dopo aver estratto il primo numero, ciascuno dei rimanenti ha probabilità 1/89, ecc. . Ci può interessare la probabilità di fare un ambo, o un terno; che un certo numero ritardi più di 35 settimane; che con un dato capitale si possa giocare 30 settimane senza essere ridotti sul lastrico, e così via.

Ma come valutare le probabilità da cui partire? E le regole di calcolo vanno accettate come ce le forniscono gli studiosi che le hanno ricevute a loro volta da altri studiosi? Non devono essere, piuttosto, riscoperte, o almeno discusse prima di accettarle? Non bisogna, in definitiva, cercare di capire che significato si può dare a questa probabilità? Per cercare di rispondere a queste domande vediamo anzitutto alcuni cenni storici.

1 - La nascita della probabilità

La probabilità, pur essendo studiata dal punto di vista filosofico, nei suoi aspetti quantitativi era sconosciuta al mondo antico, a parte qualche confuso accenno. I primi documenti che si conservano risalgono al XVI secolo (una coincidenza non casuale con la nascita della scienza sperimentale) e sono dovuti a Girolamo Cardano, con il suo libro "De ludo aleae", scritto intorno al 1525, e a Galileo, con uno scritto sul gioco dei dadi del 1620 circa. Ma la nascita del calcolo delle probabilità viene comunemente fissata nella corrispondenza tra i due grandi matematici francesi Pascal e Fermat a metà del XVII secolo. E l'interesse di Pascal fu risvegliato dal cavalier de Méré, spirito vivace, matematico almeno discreto, ed accanito giocatore d'azzardo.

De Méré riportò a Pascal vari problemi, tra cui la ripartizione della posta tra due giocatori che debbono interrompere il gioco, ed un altro problema, meno rilevante per gli sviluppi matematici, ma molto interessante per altri versi: egli si lamentò che la matematica lo faceva perdere al gioco, perche aveva calcolato per una combinazione ai dadi una probabilità maggiore di ½, aveva scommesso a lungo su tale combinazione, ma invece di vincere perdeva. Pascal rifece i calcoli e trovò che in realtà la probabilità dell'evento considerato era minore di ½, cosicchè le perdite conseguite concordavano con quanto ci si poteva aspettare.

Dalla corrispondenza tra Pascal e Fermat venne un notevole sviluppo del calcolo combinatorio.

Interessante il collegamento con la filosofia, e in particolare il confronto tra Pascal e Cartesio, che lo precedeva di poche decine di anni. Come in filosofia alle "idee chiare e distinte" di Cartesio egli contrapponeva "le ragioni del cuore, che la ragione non comprende", così, in contrasto con la sistematica e stabile costruzione della geometria cartesiana, egli dava inizio, certo non coscientemente, al processo dirompente del calcolo delle probabilità.

La posizione di Cartesio è alla base dello sviluppo deterministico della scienza, culminante con l'affermazione che, conoscendo con precisione lo stato dell'universo in un dato istante, si dovrebbe poter calcolare la sua evoluzione in tutti gli istanti successivi. La posizione di Pascal è invece la lontana origine della moderna concezione della scienza, specialmente della fisica, secondo cui tutto quello che possiamo fare è costruire dei modelli matematici che descrivono, con una validità approssimata e provvisoria, i fenomeni che osserviamo e i modelli deterministici, sufficienti per una rappresentazione largamente approssimativa, vanno sostituiti, per una comprensione più approfondita, con modelli basati su leggi probabilistiche.

2 - I fondamenti della probabilità: la definizione classica

Credo che tutti i ragazzi abbiano già in mente, e siano pronti ad applicare a semplici casi concreti, la cosiddetta *definizione classica* di probabilità, come *rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili.* In ogni caso dovrebbero recepirla facilmente.

Non è sempre esplicitamente espressa la condizione, ovviamente necessaria, che i casi possibili siano tutti "ugualmente possibili". Questa condizione presta il fianco ad un sospetto di tautologia; perciò alcuni, più che una definizione, la considerano un modo di calcolare la probabilità già sapendo di che si tratta. Comunque i casi risulteranno ugualmente possibili quando si ha una situazione di simmetria fisica: le palline dell'urna del lotto, le carte di un mazzo ben mescolato, le facce di un dado.

La definizione classica si può applicare solo quando si considera un numero finito di casi possibili e valgono le condizioni di simmetria. Ma in questo ambito va sottolineata, oltre alla sua intuitività, la sua efficacia per ricavare in modo semplice le proprietà matematiche della probabilità.

Va detto anzitutto che si parla di "eventi". Nell'ambito della definizione classica questi si presentano abbastanza naturalmente come insiemi di casi possibili; adotteremo in generale tale rappresentazione; è possibile e opportuno un collegamento con la logica. Vanno introdotti (le notazioni che adotto sono abbastanza comuni, ma ovviamente non condivise da tutti) l'evento certo Ω e l'evento impossibile $\varnothing$; il complemento, o negazione $\overline{A}$ di un evento A . Ci sono poi l'unione $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ di più eventi (cioè l'evento consistente nel verificarsi di almeno uno degli eventi dati) e l'intersezione $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ (il verificarsi di tutti gli eventi). Inoltre due eventi A , B si dicono incompatibili se non possono presentarsi insieme, cioè se $A \cap B = \varnothing$, e più eventi si dicono incompatibili se sono incompatibili due a due; due o più eventi si dicono necessari se uno di essi deve necessariamente verificarsi, cioè se $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

È facile verificare che dalla definizione classica seguono le proprietà

$$0 \le P(A) \le 1 ,$$

$$P(\varnothing) = 0 \quad , \quad P(\Omega) = 1 \ . \tag{1}$$

$$\textit{Se } A \textit{ e } B \textit{ sono incompatibili}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ .$$

Le leggi così enunciate hanno una portata che va molto al di là della loro semplicità. In effetti è praticamente su di esse che si basa l'intera teoria matematica della probabilità.

3 - La definizione frequentista

Una volta calcolata la probabilità, il cavalier de Méré la confrontava con i risultati che otteneva effettivamente nel gioco, aspettandosi che la *frequenza relativa dei successi*, cioè il rapporto tra il numero delle volte in cui l'evento si verifica e il numero delle prove effettuate, si avvicinasse alla probabilità calcolata. E Pascal, correggendo l'errore di Méré, rafforzava questa aspettativa.

Aspettativa naturale all'intuizione, che veniva poi affermata esplicitamente con la *legge empirica del caso*, secondo cui *in un gran numero di prove fatte nelle stesse condizioni la frequenza relativa dei successi si avvicina alla probabilità, e l'approssimazione in genere migliora con l'aumentare del numero delle prove*. È un'affermazione forzatamente vaga, perchè l'aleatorietà delle prove non permette di precisare entro quanto tempo ed entro quali limiti l'approssimazione è valida, restando sempre possibile, anche se con probabilità bassissima, che ad esempio 100 lanci di un dado diano tutti il 6.

L'aspetto frequentista si presenta come un'altra delle facce del concetto di probabilità. E' possibile basarsi proprio su questo aspetto per definire la probabilità come *la frequenza relativa dei successi, in un gran numero di prove fatte nelle stesse condizioni*. In altre parole, accettando l'ipotesi, implicita nella legge empirica del caso, che la frequenza relativa si vada stabilizzando intorno ad un certo numero, è proprio questo numero che va preso come probabilità, senza alcuna valutazione preventiva.

E' evidente che la definizione frequentista, basata su un rapporto come quella classica, dà luogo per la probabilità alle stesse leggi (1) già trovate sopra. Anche la definizione frequentista presenta aspetti criticabili, anzitutto perchè resta imprecisato il numero di prove necessario per arrivare ad un valore abbastanza stabilizzato che ci fornisca la probabilità. La definizione più diffusa è quella di *limite della frequenza*, che presenta difficoltà ancora più gravi, e secondo me non va proposta agli studenti.

Ma soprattutto l'esigenza che le prove successive siano fatte nelle stesse condizioni presenta problemi. A rigore una simile condizione non è mai perfettamente verificata (ed è anche difficile darle un significato rigoroso); e ci sono situazioni in cui essa platealmente non vale (si pensi agli incontri di due squadre di calcio o di due tennisti). A volte non esiste neanche una successione di prove in cui inserire il nostro evento.

4 - L'impostazione soggettiva

Si impone insomma in molti casi l'esigenza di considerare l'evento singolo, e di riferire a questo la probabilità. Da questa esigenza è nata la concezione soggettiva, sviluppata soprattutto da Bruno de Finetti (1906-1985). In questa impostazione la probabilità è *il grado di fiducia nel verificarsi dell'evento*. Essa dipende allora dalla persona che la valuta e dalle informazioni disponibili, dando così ragione della sua denominazione.

È necessaria una definizione più precisa. Uno dei modi per arrivarci è attraverso le scommesse, definendo la probabilità come *il prezzo equo da pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica (e niente nel caso contrario)*, con una qualsiasi unità di misura (una lira, un dollaro, un milione, ecc.). Si pensi ad esempio ad una lotteria tra amici, fatta mediante i numeri della tombola. Ognuno paga una certa quota, diciamo 1.000 lire, e chi vince (avendo il numero estratto) prende le 90.000 lire raccolte. Allora il prezzo pagato, riferito al "piatto" di 90.000 lire come unità di misura, è 1/90 , cioè proprio la probabilità di vittoria secondo la definizione classica, che in questo caso appare appropriata.

Si è parlato di "prezzo equo", e questo richiede una precisazione, che viene data dalla condizione di equità (si dice anche di *coerenza*): *non si devono valutare le probabilità in modo tale che sia possibile ottenere una vincita certa o una perdita certa*.

Chiariamo subito questo punto. Io presento una moneta dicendo che è truccata in modo tale che la probabilità $P(T)$ di ottenere Testa in un lancio è ½ mentre quella di Croce, $P(C)$, è ¼. Molti obietteranno subito che non può andare, perchè la somma di $P(T)$ e $P(C)$ deve essere 1. È questa una esigenza intuitiva, alla quale la condizione di coerenza dà una giustificazione convincente. Infatti facendo contemporaneamente due scommesse, una su T e una su C , si pagherebbe ½ per la prima più ¼ per la seconda, ricevendo comunque 1, con un guadagno netto, *non aleatorio*, di ¼, in contraddizione con la condizione di coerenza. Questo perchè la somma $P(T) + P(C)$ è minore di uno; se fosse maggiore si avrebbe una perdita certa: la condizione di coerenza impone che sia $P(T) + P(C) = 1$. Lo stesso ragionamento vale in presenza di più di due alternative: un dado può essere asimmetrico, ma in ogni caso la somma delle probabilità delle facce deve valere 1 . Insomma se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi necessari e incompatibili, deve essere

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \qquad (2)$$

Questa relazione richiama la legge delle probabilità totali vista sopra; in effetti, come vedremo, sono ricavabili matematicamente l'una dall'altra. Insomma anche la definizione soggettiva porta alle stesse leggi (1) già derivate dalle altre definizioni.

Un breve inciso per osservare che in generale c'è qualcuno che organizza il gioco (si pensi alle lotterie, al totocalcio, ecc.), che trattiene una parte della somma raccolta, ed entro certi limiti è giusto: la condizione matematica di equità in queste condizioni sarebbe in realtà iniqua. Nella teoria delle assicurazioni (che dal punto di vista matematico equivalgono a scommesse) si parla di un "premio puro", calcolato in base alle probabilità, al quale va aggiunto un "caricamento" per arrivare a quanto deve pagare l'assicurato.

Questa divaricazione tra i valori formale e realistico rende incerto il concetto di prezzo equo alla base della definizione soggettiva. Ma la critica più diffusa a questa impostazione è proprio di essere soggettiva, cioè di fondare la probabilità sull'opinione dei singoli. Si è sviluppato un lungo confronto, spesso polemico, con gli "oggettivisti" che accusano l'impostazione soggettiva di rendere impossibile la comunicazione tra persone diverse, e i "soggettivisti" che denunciano l'illusorietà della pretesa oggettività della altre impostazioni.

5 - Un confronto tra le diverse concezioni - L'impostazione assiomatica

L'impostazione soggettiva è a mio avviso quella più convincente. La definizione classica fornisce un valore che non presenta alcun contenuto al di là della sua definizione numerica; e ciò è chiaramente connesso al sospetto di tautologia di cui soffre. Quella frequentista ha un significato sostanziale convincente, ma è troppo legata ad una situazione di prove ripetute. L'impostazione soggettiva è valida in ogni situazione, ha un significato chiaro, e la giustificazione fornita dalla condizione di coerenza è convincente: non accettare le regole che ne derivano significa ammettere la possibilità di una scommessa certamente vincente, che annulla il concetto stesso di aleatorietà. Ovviamente la traduzione in termini monetari spesso non è possibile, ma resta il concetto di fondo della condizione di coerenza: va esclusa la possibilità di trasformare in certezza, con una opportuna combinazione, quello che certamente risente di una variabilità aleatoria.

Va sottolineato il fatto che un soggettivista per una seria valutazione delle probabilità deve tenere conto delle informazioni in suo possesso: in particolare, se è il caso, delle frequenze del passato o delle condizioni di simmetria delle alternative possibili; ma senza accettarle acriticamente. D'altra parte anche l'oggettivista sa bene che l'uguale possibilità dei casi, o l'uguaglianza delle condizioni nella ripetizione delle prove, sono ipotesi che non possono sfuggire ad una sua valutazione critica, necessariamente, almeno entro certi limiti, soggettiva. E, come abbiamo osservato, le leggi matematiche della probabilità sono comuni alle tre impostazioni.

Può sembrare a questo punto che la differenza tra i diversi punti di vista, a parte le condizioni di applicabilità, sfumi fino a diventare inessenziale. In realtà rimane la profonda distanza concettuale. Essa si manifesta con notevoli differenze operative nell'*induzione statistica* e nella *teoria statistica delle decisioni*. Ma anche nelle valutazioni pratiche si può cogliere spesso la divergenza delle interpretazioni.

Per un giocatore regolare del lotto la concezione frequentista è sòddisfacente: quello che gli interessa sono i risultati a lungo andare, e la frequenza in un gran numero di prove risponde alle sue esigenze. Ben diversa è la situazione di chi deve sottoporsi ad un intervento chirurgico. Se egli sa che nel passato il 95% delle operazioni ha avuto pieno successo, può ragionevolmente aspettarsi che, anche tra le prossime 100 operazioni, 95, più o meno, andranno bene; ma a lui interessa il suo intervento, non gli altri 99. Certamente la frequenza registrata nel passato gli dà anche per la sua, unica, operazione, una certa fiducia, con una chiara interpretazione di tipo soggettivo. E questo grado di fiducia gioca un ruolo determinante nella decisione, quando questa è consentita.

* * *

Il calcolo delle probabilità, in particolare nella concezione soggettiva, può essere interpretato come logica dell'incerto. Considerando equivalenti, in queste considerazioni sommarie, proposizioni (o enunciati) ed eventi (o fatti), la logica (classica) assegna ad essi dei valori di verità che possono essere *vero* o *falso*; la probabilità invece introduce una graduazione tra i due estremi, con un valore p compreso tra 0 (= falso) e 1 (= vero), che misura, potremmo dire, la *quantità di verità* attribuita all'evento o, nell'impostazione soggettiva, il grado di fiducia nel verificarsi dell'evento.

Allora il calcolo delle probabilità si presenta ancora come lo studio delle relazioni tra valori di verità, però con l'ampliamento, rispetto alla logica, di considerare in generale dei valori p invece dei soli valori 0 e 1.

Questo aspetto viene studiato dall'*impostazione logicista* della probabilità che ne dà anche diverse formalizzazioni.

Sul piano pratico, il calcolo delle probabilità si propone allora come guida al ragionamento, e conseguentemente all'azione. È una pretesa ambiziosa, che però certamente ha un fondamento. Quando vediamo un cielo nuvoloso e dobbiamo decidere se prendere l'ombrello, è certamente una valutazione di probabilità che, implicitamente e senza calcoli, ci muove nella scelta; la formalizzazione e le elaborazioni si propongono naturalmente in circostanze di diverso livello.

* * *

L'*impostazione assiomatica*, o ipotetico-deduttiva, è largamente preferita in ogni campo della matematica perchè permette di ottenere un livello accettabile di rigore logico. Il calcolo delle probabilità non poteva sfuggire a questa esigenza di sistemazione. E il fatto già notato che le diverse impostazioni arrivano tutte alle stesse leggi matematiche espresse dalle formule (1) rende naturale prendere tali leggi come base per una costruzione assiomatica. Su questa ritorneremo.

* * *

Come presentare la probabilità agli studenti? Questo ovviamente dipende dal docente, e in particolare dal suo giudizio sulle possibilità della classe.

La definizione classica è certamente quella che più naturalmente porta alle regole di calcolo, ed in questo senso io la utilizzerei, quando essa è applicabile, senza presentarla come definizione. È importante, a mio avviso, dare un contenuto più sostanziale al concetto di probabilità, cercando di chiarirne gli aspetti intuitivi più rilevanti, come emergono dalla discussione con gli studenti. Dovrebbe emergere in particolare quello di "propensione" o "attitudine" dell'evento a presentarsi o manifestarsi; e secondariamente, con l'aiuto del docente, quello soggettivo. Dopo di che in una esposizione elementare si possono estendere euristicamente alle altre situazioni le regole di calcolo emerse dall'impostazione classica.

Si può anche partire dalla moneta asimmetrica, come si è visto sopra, e accettare la (2) senza altre giustificazioni che quella intuitiva.

La presentazione delle diverse impostazioni è necessaria ad un livello meno elementare, con l'approfondimento che si ritiene opportuno, fino all'impostazione assiomatica.

Come per il concetto di probabilità, così anche per le valutazioni concrete bisogna partire dalla situazione che ci si trova davanti, individuando gli eventi che interessano e le relazioni che si possono ipotizzare tra di essi, per arrivare al modello matematico.

6 - Le leggi della probabilità totale e della probabilità composta

Dall'ultima delle (1) si ottiene facilmente, per induzione, la *legge delle probabilità totali:* se gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono incompatibili, si ha

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) \qquad **$$

Da questa e da $P(\Omega) = 1$ segue immediatamente la (2); viceversa se vale la (2) si ottiene per due eventi A e B incompatibili

$$P(A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) = 1$$

$$P(A) + P(B) + P(\overline{A \cup B}) = 1$$

da cui l'ultima delle (1), confermando l'equivalenza di cui si è detto.

È opportuno a questo punto ritornare sull'assiomatizzazione. Il sistema di postulati più seguito, dovuto a A. N. Kolmogorov, è il seguente:

1) Gli eventi sono sottoinsiemi di un insieme Ω e formano una σ-algebra $\mathcal{A}$
2) $P(A)$ è definita per $A \in \mathcal{A}$, e $P(A) \geq 0$.
3) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ sono eventi (due a due) incompatibili, si ha
$$P(A_1 \cup A_2 \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Come si vede l'assioma 3) estende ad una infinità numerabile di addendi la legge delle probabilità totali. È un'estensione che alcuni non accettano; un problema che qui non può essere affrontato. Mi limito ad osservare che con questa impostazione il calcolo delle probabilità si inserisce nelle teoria della misura dell'analisi matematica, permettendo di sfruttarne i metodi ben sviluppati e collaudati.

È dubbio che questi dettagli vadano presentati agli studenti, anche se una presentazione rigorosa degli sviluppi successivi li richiederebbero.

* * *

Per studiare la probabilità dell'intersezione di due eventi occorre introdurre la *probabilità condizionata* (o *condizionale*) $P(A|B)$, cioè la probabilità di A valutata sapendo che si è verificato l'evento B. Essa si presenta immediatamente all'attenzione in certe situazioni. Se ad esempio si estraggono successivamente due carte da un mazzo di quaranta carte, le probabilità relativa alla seconda estrazione dipendono dalla prima carta estratta, se questa è nota. Così considerando gli assi, si ha, con notazioni che dovrebbero essere chiare,

$$P(A_1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{3}{39} \quad ; \quad P(A_2 | \overline{A_1}) = \frac{4}{39}$$

Per calcolare in generale la probabilità condizionata ricorriamo alla concezione classica (gli stessi risultati si possono ottenere con le altre). Sapere che si è verificato l'evento B equivale a sapere che si è verificato uno degli n_B casi favorevoli a B: il condizionamento si traduce nel fatto che ora i casi possibili non sono più n ma n_B e i casi favorevoli sono, tra questi, quelli favorevoli anche all'evento A, cioè sono $n_{A\cap B}$. Quindi

$$P(A|B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{n_{A\cap B} : n}{n_B : n} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (4)$$

È necessario, ovviamente, che sia $P(B) \neq 0$. Si ottiene allora

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot (PA|B) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot \qquad (5)$$

È opportuno sottolineare la differenza tra probabilità condizionata e probabilità "assoluta", che non sempre si avverte facilmente. Nell'estrazione della seconda carta, nell'esempio sopra, si pensa immediatamente alla probabilità condizionata, ed occorre uno sforzo per considerare $P(A_2)$, cioè la probabilità che la seconda carta sia un asso senza conoscere la prima estratta. Gli stessi motivi di simmetria utilizzati per valutare $P(A_1)$ ci dicono che $P(A_2) = 1/10$, e tale valore è confermato dal seguente calcolo.

Dalla nota relazione per gli insiemi $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$ mediante le leggi della probabilità totale e composta si ottiene

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \overline{A_1}) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 | \overline{A_1})$$

che fornisce, come si vede subito, il valore 1/10

* * *

Dalla legge delle probabilità composte si passa facilmente al concetto di indipendenza. Dire che A è indipendente da B (dal punto di vista della probabilità) equivale a dire che il verificarsi (o non verificarsi) di B non influenza la probabilità di A, cioè $P(A) = P(A|B)$. Allora dalla legge delle probabilità composte si ottiene facilmente la condizione di indipendenza

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (6)$$

Aggiungiamo, per completezza, che tre eventi A, B, C si dicono indipendenti quando valgono tutte le relazioni

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Sono necessari, a questo punto, alcuni commenti.

1) La (6) viene presentata abitualmente senza (o prima di) parlare di probabilità condizionata. Dovrebbe essere chiaro quanto la sua derivazione sia invece importante e significativa; credo che essa sia senz'altro da preferire non appena le circostanze lo permettano.

2) Siamo partiti dall'indipendenza di A da B, arrivando ad una relazione simmetrica: in probabilità l'indipendenza di A da B equivale all'indipendenza di B da A e all'indipendenza reciproca dei due eventi. Sarebbe interessante il confronto con un concetto logico di indipendenza, che però abitualmente non viene sviluppato.

3) La condizione di indipendenza (6) può essere usata nei due sensi: se possiamo calcolare le probabilità che vi figurano e vale l'uguaglianza,

diremo che gli eventi sono indipendenti. Viceversa se sappiamo, dallo svolgimento concreto della prova, che i due eventi non si influenzano a vicenda, possiamo concludere che vale la (6). Sono due percorsi diversi per formalizzare la situazione allo studio, cioè per formulare un modello matematico del fenomeno; si veda anche, a questo proposito, l'Esempio 6.1.

4) La (6) si riferisce anche ad eventi che non sono "fisicamente" indipendenti. Per esempio se, nel lancio di un dado, A = "numero pari" e B = "numero inferiore a 3" , si vede facilmente che, in base alla definizione, A e B sono indipendenti.

È questo un punto delicato, perchè l'intuizione difficilmente va al di là dell'indipendenza "fisica". Eppure anche l'indipendenza esemplificata sopra è rilevante, nelle previsioni e nelle scelte che ne seguono.

**Esempio 6.1 - L'estrazione senza ripetizione

Consideriamo un'urna contenente sei palline, di cui tre bianche e tre nere, contrassegnate rispettivamente con b_1, b_2, b_3 e n_1, n_2, n_3. Estraiamo a caso successivamente due palline, senza rimettere la prima nell'urna. Si parla allora nella teoria dei campioni di *estrazione senza ripetizione* , o *in blocco*. Se vogliamo calcolare le probabilità dei vari eventi di questa prova, possiamo prendere in considerazione i casi possibili che, tenendo conto dell'ordine di estrazione, sono 36, tutti con la stessa probabilità 1/36:

$$
\begin{array}{cccccc}
b_1b_2 & b_2b_1 & b_3b_1 & n_1b_1 & n_2b_1 & n_3b_1 \\
b_1b_3 & b_2b_3 & b_3b_2 & n_1b_2 & n_2b_2 & n_3b_2 \\
b_1n_1 & b_2n_1 & b_3n_1 & n_1b_3 & n_2b_3 & n_3b_3 \\
b_1n_2 & b_2n_2 & b_3n_2 & n_1n_2 & n_2n_1 & n_3n_1 \\
b_1n_3 & b_2n_3 & b_3n_3 & n_1n_3 & n_2n_3 & n_3n_2
\end{array}
$$

Se indichiamo con B_1 l'evento "alla prima estrazione la pallina risulta bianca" (ed analogamente per gli altri) si ottiene dai rapporti tra casi favorevoli e casi possibili:

$$P(B_1) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = P(B_2) = P(N_1) = P(N_2)$$

$$P(B_1 \cup B_2) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = P(N_1 \cup N_2)$$

$$P(B_1 \cap N_2) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = P(N_1 \cap B_2)$$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = P(N_1 \cap N_2)$$

$$P(B_2|B_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = P(N_2|N_1) = P(B_1|B_2)$$

La validità delle regole di calcolo in questo caso può essere immediatamente controllata.

* * *

Nelle stesse condizioni, per valutare le probabilità si può seguire un procedimento diverso. Considerando solo la prima estrazione si ha:

$$P(B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(N_1)$$

Nella seconda estrazione le probabilità dipendono dal risultato della prima, che modificano la composizione dell'urna; si ha perciò

$$P(B_2|B_1) = \frac{2}{5} = P(N_2|N_1)$$

$$P(N_2|B_1) = \frac{3}{5} = P(B_2|N_1)$$

e da queste

$$P(B_2) = P[(B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap N_1)] = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) =$$

$$= P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2|N_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

Questo esempio è importante per sottolineare il fatto che di fronte ad una situazione concreta bisogna studiare il modo di rappresentarla in termini matematici riflettendo sulle informazioni disponibili ed estraendone quelle che sono significative per raggiungere il risultato. In questo caso lo studio del problema può portare ai due diversi percorsi descritti sopra; entrambi sono validi, e arrivano alle stesse probabilità. **

7 - Il teorema di Bayes

Consideriamo un evento E e certi altri eventi $A_1 \dots A_n$ che siano incompatibili e, se si verifica E, anche necessari (cioè uno di essi si deve necessariamente verificare). Il teorema di Bayes afferma che:

$$P(A_r|E) = \frac{P(A_r) \cdot P(E|A_r)}{\Sigma_s P(A_s) \cdot P(E|A_s)}$$

$$\frac{P(A_r|E)}{P(A_s|E)} = \frac{P(A_r)}{P(A_s)} \cdot \frac{P(E|A_r)}{P(E|A_s)}$$

Per la dimostrazione, va osservato che la condizione che gli eventi A_r sono necessari quando E si verifica equivale a

$$E = E \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n) = (E \cap A_1) \cup \dots \cup (E \cap A_n)$$

e il risultato segue dalle leggi della probabilità totale e composta.

La prima formula dà le probabilità condizionate dei vari eventi A_r ; si noti che il denominatore è la somma di tutti i numeratori, cosicchè la somma delle probabilità condizionate è uguale a 1. Ciò corrisponde al fatto che se si verifica E necessariamente uno degli eventi A_r deve essersi verificato.

Se E rappresenta un'osservazione o un risultato sperimentale, e $A_1, \dots A_n$ le ipotesi o cause che lo possono spiegare, $P(A_r)$ è *probabilità a priori*, cioè la probabilità che l'ipotesi sia vera , indipendentemente dall'osservazione E , e $P(A_r|E)$ la *probabilità a posteriori* , cioè la probabilità di A_r valutata dopo aver osservato l'evento E ; in altre parole la probabiità che abbia agito proprio la causa A_r . Il teorema di Bayes mette in relazione le due probabilità, facendo intervenire anche le *verosimiglianze* $P(E|A_r)$. Dovrebbe essere chiara a questo punto l'importanza del teorema nel problema dell'induzione statistica.

La seconda formula scritta sopra mette a confronto due fra le ipotesi, e mostra come il rapporto tra le probabilità a priori venga modificato dal *rapporto di verosimiglianza*, portando al rapporto tra le probabilità a posteriori. Essa mette in evidenza come le verosimiglianze, che a prima vista danno una risposta al problema dell'induzione, in realtà non sono sufficienti perchè è necessario basarsi anche sulle probabilità a priori.

Una difficoltà per l'applicazione del teorema di Bayes sta nel fatto che le probabilità a priori non sono facilmente individuabili. Spesso esse sono di natura soggettiva (perchè mancano le condizioni per applicare le altre definizioni) e perciò il terorema è utilizzato soprattutto da chi segue tale impostazione.

** Esempio 7.1

Per capire la portata del teorema di Bayes, ecco una esemplificazione, ovviamente schematizzata, tratta da uno scritto di Giuseppe Pompilj. Un medico riscontra in un paziente una serie di sintomi che (supponiamo gli sia noto) è sempre presente nel colera, ma che accompagna anche, con probabilità ¼, il tifo. Abbiamo quindi un evento osservato, E, con due possibili cause, C e T , e nelle nostre ipotesi è $P(E|C) = 1$, $P(E|T) = 1/4$. Una reazione immediata a tali informazioni potrebbe portare a dire che si tratta di colera; ma certamente un medico nel formulare la diagnosi terrà conto delle circostanze ambientali, propendendo per il colera solo in presenza di specifiche informazioni sulle possibilità di presenza di tale malattia.

Tale conclusione trova una giustificazione probabilistica ed una precisazione numerica nel teorema di Bayes. Nel nostro caso abbiamo:

$$\frac{P(C|E)}{P(T|E)}=\frac{P(C)}{P(T)}\cdot\frac{P(E|C)}{P(E|T)}=\frac{P(C)}{P(T)}\cdot\frac{1}{1/4}=4\cdot\frac{P(C)}{P(T)}$$

cosicchè il rapporto tra le probabilità a posteriori dipende, oltre che dal rapporto di verosimiglianza, da quello tra le probabilità a priori: il colera è la causa più probabile dei sintomi osservati quando l'ultimo membro è maggiore di 1, cioè quando $P(C) > P(T)/4$. In circostanze normali questa ipotesi è poco credibile, e diventa accettabile solo in casi particolari, ad esempio in presenza di un'epidemia di colera. **

** Esempio 7.2

Abbiamo tre scatole, contenenti rispettivamente due biglie bianche, una biglia bianca e una nera, due biglie nere. Ne prendiamo una a caso, e da questa estraiamo una biglia, che risulta bianca. Qual è la probabilità che la seconda biglia della scatola sia anch'essa bianca?

Se indichiamo con S_1, S_2, S_3 le tre scatole, e con E l'evento "la pallina estratta è bianca", la probabilità richiesta è $P(S_1|E)$, e si ha

$$P(S_1)=P(S_2)=P(S_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(E|S_1)=1 \quad P(E|S_2)=\frac{1}{2} \quad P(E|S_3)=0$$

Dalla formula di Bayes si ottiene

$$P(S_1|E)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{2}{3}$$

Calcolando anche le altre probabilità si ha

$$P(S_1|E)=\frac{2}{3} \quad P(S_2|E)=\frac{1}{3} \quad P(S_3|E)=0$$

Questo esempio mi sembra significativo perchè salta agli occhi che la conoscenza dell'evento E modifica la probabilità delle diverse scatole: non si può trattare della terza scatola. E questo costringe a prendere in considerazione la probabilità a posteriori. **

**Esempio 7.3

Se un'urna contiene H palline, di cui h bianche, estraendo una pallina la probabilità che sia bianca è $p = h/H$. E se conosciamo H ma non h?

Per gli eventi B_h = "h palline nell'urna sono bianche" (h = 0, 1,...., H) possiamo ipotizzare delle probabilità; per esempio, in mancanza di informazioni, tutte uguali a $1/(H+1)$. Estraiamo ora una pallina; se questa è bianca (evento E) per il teorema di Bayes avremo le probabilità a posteriori

$$P(B_h|E) = \frac{P(B_h)\cdot P(E|B_h)}{\Sigma_r P(B_r)P(E|B_r)} = \frac{h\cdot P(B_h)}{\Sigma_r rP(B_r)}$$

e analogamente, se la pallina non è bianca,

$$P(B_h|\overline{E}) = \frac{(H-h)\cdot P(B_h)}{\Sigma_r (H-r)P(B_r)}$$

Se si estraggono successivamente più palline (rimettendole nell'urna) le probabilità vanno ripetutamente "aggiornate", sempre con la formula di Bayes. E' intuitivo (e si dimostra) che la distribuzione delle probabilità si va concentrando sul numero effettivo di palline bianche nell'urna.

Il prof. Prodi ha preparato un programma che permette di svolgere facilmente questo esperimento. **

8 - La media

Alla probabilità è strettamente legato il concetto di media, che anzi storicamente è emerso ancora prima di quello di probabilità. Esaminiamolo anzitutto dal punto di vista soggettivo. Come abbiamo visto, la probabilità $P(A)$ dell'evento A è il prezzo equo per ricevere 1 se l'evento A si verifica, e $xP(A)$ è il prezzo equo per ricevere un premio di valore x. Se vi è anche un altro premio di valore y, in corrispondenza ad un evento B, e gli eventi A e B sono incompatibili (cioè non si possono verificare entrambi) sarà giusto pagare $x\cdot P(A) + y\cdot P(B)$ per aspirare ad entrambi i premi. Più in generale consideriamo una lotteria in cui si possono vincere più premi, di valore $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rispettivamente con probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$. La vincita è allora un *numero aleatorio* o *variabile aleatoria*, che indicheremo con X, cioè un numero che per il momento è ignoto e si conoscerà solo dopo una prova aleatoria. Il discorso fatto sopra equivale a dire che il prezzo equo da pagare per ricevere la v.a. X è $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$; e questa è per definizione la media di X, che viene indicata con $M(X)$ o μ :

$$\mu = M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n \qquad (7)$$

La media di una v.a. X è quindi, nell'impostazione soggettiva, il prezzo equo da pagare per ricevere in cambio la v.a. X. Si dice anche che la media è l'equivalente certo del valore aleatorio X ; ma l'equivalenza va presa con molta cautela, perchè un valore aleatorio non può mai essere del tutto assimilato ad un valore certo: è questo un aspetto già notato.

Vale la pena di osservare che la probabilità si presenta ora come un caso particolare della media. Una scommessa sull'evento A equivale a pagare per ricevere in cambio una v.a. che può assumere i valori 1 e 0 con probabilità $P(A)$ e $1 - P(A)$; e la sua media risulta $1 \cdot P(A) + 0 \cdot [1 - P(A)] = P(A)$.

* * *

Anche nell'impostazione classica (e, si potrebbe vedere, in quella frequentista) si può dare un significato alla media generalizzando il concetto di probabilità di un evento A , che è il rapporto tra il numero n_A dei casi favorevoli e il numero totale dei casi n . A ciascuno dei casi assegnamo il numero 1 se il caso è favorevole ad A, e il numero 0 in caso contrario; abbiamo così n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che caratterizzano i diversi casi possibili: allora esattamente n_A degli n numeri x_r sono uguali a 1 (e gli altri a 0), cosicchè $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Di conseguenza

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Questa formula è quella, ben nota, della media aritmetica, e può sorprendere vederla ora presentata per la probabilità. In realtà ciò mette in evidenza il fatto già osservato che la probabilità è un caso particolare della media. Nella formula sopra i numeri x_r possono essere 1 o 0 (caso favorevole e caso contrario); se invece attribuiamo agli x_r dei valori qualsiasi otteniamo la media, cioè:

$$\mu = M(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{8}$$

Se ad esempio i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le altezze di n persone, la formula (8) dà l'altezza media. Quando invece interessa sapere solo se l'altezza è superiore, diciamo, a 170 cm, possiamo assegnare a ciascuna persona il numero $x = 1$ se la sua altezza è superiore a tale valore, e il numero $x = 0$ altrimenti; la stessa formula fornisce allora il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, cioè la probabilità che una persona scelta a caso nel gruppo abbia l'altezza desiderata.

9 - Statistica e probabilità - La varianza

La formula (8) per la media è usata anche in statistica, ed è in tale ambito che è più conosciuta. Vale la pena di accennare alle relazioni tra probabilità e statistica. La statistica ha una prima parte che viene detta *descrittiva* che cerca di sintetizzare una serie di dati con uno o diversi numeri per metterne in rilievo gli aspetti che più interessano. Le formule e i procedimenti matematici in questa parte sono comuni alle due discipline, perchè alla base c'è una formalizzazione comune, più evidente nella concezione classica della probabilità. In questa infatti si considerano n casi, che la statistica considera come n unità statistiche di una *popolazione*. Si può rilevare per ciascuna unità statistica il valore di una caratteristica (come l'altezza per un insieme di persone), ottenendo n valori x_r .

Supponiamo anzitutto questi valori tutti distinti. Allora, se si procede all'estrazione a caso di un'unità della popolazione, ciascuno di essi ha la probabilità $1/n$, e la (8) viene a coincidere con la (7). Quando i valori x_r non sono tutti distinti, ve ne saranno n_1 uguali ad un certo valore y_1 , e così via, fino a n_k uguali a y_k . In statistica n_r viene detta *frequenza assoluta* e $f_r = n_r / n$ *frequenza relativa* di y_r . Anche ora, in una estrazione a caso, la probabilità p_r di y_r coincide con la frequenza relativa f_r (per definizione nella concezione classica, più in generale per somma).

L'insieme dei valori y_r e delle relative frequenze f_r costituisce una *distribuzione statistica*, del tutto analoga alla distribuzione di probabilità che vedremo tra poco; anche gli sviluppi matematici, a cominciare dalla media, sono comuni alle due discipline. La differenza è concettuale, e dipende dall'introduzione dell'operazione di scelta casuale, che fa passare dalla variabile statistica, "fotografia" di una popolazione, alla variabile aleatoria, descrizione potenziale dei valori assumibili nella scelta.

La statistica ha una seconda parte, *induzione* o *inferenza statistica*, che mira ad ottenere informazioni generali da dati parziali, e che si basa in modo sostanziale sulla probabilità; ne fa parte la *teoria dei campioni.*

* * *

Una celebre poesia di Trilussa ridicolizza la statistica: se tu mangi due polli e io nessuno, per la statistica abbiamo mangiato un pollo ciascuno. La critica è fondata, nel senso che spesso la media viene utilizzata indiscriminatamente in sostituzione di un'insieme di dati, o di una variabile aleatoria, con risultati a volte molto distorti.

<u>Esempio 9.1 - Un paradosso della media</u>

In un intervallo di lunghezza 1 scegliamo a caso, indipendentemente tra loro, n punti; l'intervallo viene diviso in $n + 1$ intervallini, e la lunghezza media di ciascuno di essi è, intuitivamente, $1/(n+1)$. Se aggiungiamo ora un altro punto, questo cadrà in uno degli $n + 1$ intervallini e, sempre da un punto di vista intuitivo, lo dividerà in due sottointervallini di lunghezza media uguale tra loro, pari quindi a $1/2(n+1)$.

Ma in questo modo noi abbiamo scelto a caso $n + 1$ punti, e la lunghezza media degli $n + 2$ intervallini risultanti, come abbiamo visto sopra, dovrebbe essere $1/(n+2) > 1/2(n+1)$. Come stanno in realtà le cose?

La soluzione sta nel fatto che nella prima operazione abbiamo confuso le v.a. con la loro media. Le lunghezze degli $n + 1$ intervallini ottenuti scegliendo n punti sono $n + 1$ v.a. , e si può dimostrare che effettivamente esse in media sono uguali (e quindi uguali a $1/(n+1)$), ma non sono uguali nella effettiva realizzazione. Cosicchè l'$(n+1)$-simo punto si troverà davanti intervallini diversi, e la lunghezza media dell'intervallino in cui va a finire sarà diversa dalla lunghezza media $1/(n+1)$ del generico intervallino; anzi è chiaro che essa sarà maggiore, perchè il punto cadrà con probabilità più alta negli intervallini più lunghi.

Da notare le ricadute concrete di questo paradosso. Un esempio fra tanti: durante il ventennio fascista la propaganda demografica mostrava, dati alla mano, che i genii erano più frequenti nelle famiglie numerose. Ma scegliendo a caso una persona, qualunque siano le sue caratteristiche, è più probabile che essa appartenga ad una famiglia numerosa! **

Per rispondere alla critica di Trilussa è necessario approfondire lo studio, e in particolare vedere di quanto i diversi valori differiscono tra loro o dalla media, di studiare cioè la loro *variabilità.* Ci si basa per questo sugli *scarti dalla media* $x_r - \mu$. Per misurare la variabilità si può pensare di calcolare la loro media, cioè $\Sigma_r(x_r - \mu)p_r$; ma ci si rende subito conto che tale media risulta sempre nulla, perchè gli scarti positivi e negativi si compensano; per superare questa difficoltà bisogna rendere tutti gli scarti positivi. Si può usare la media dei valori assoluti, che però rende difficili i calcoli; si preferisce calcolare la media dei quadrati, che viene chiamata *varianza* :

$$\sigma^2 = \sum_1^n{}_r \ (x_r - \mu)^2 p_r$$

La varianza è il più comune indice di variabilità; chiaramente si annulla se e solo se i valori x_r sono tutti uguali. Essa ha l'inconveniente di avere dimensioni (fisiche, e di conseguenza anche quantitative) diverse dai dati di partenza; accanto ad essa si considera quindi anche la sua radice quadrata σ , detta *scarto quadratico medio.*

10 - Le variabili aleatorie

Le v.a. sono già emerse nella presentazione delle media. Ripeto che una v.a. X è un numero che si ottiene come risultato di una prova aleatoria; va sottolineato che si tratta di un numero ben definito, anche se al momento ignoto, relativo ad una prova che deve essere preventivamente precisata. Cosicchè lanciando due volte un dado si hanno due v.a. X e Y, ciascuna ben identificata, e diverse tra loro.

Consideriamo per ora v.a. che possono assumere un numero finito di valori, come nel lancio di un dado, o anche un'infinità numerabile: queste v.a. sono dette discrete. Per studiare una v.a. X dobbiamo conoscere la sua *distribuzione di probabilità*, caratterizzata dai valori x_r e dalle relative probabilità $p_r = P(X = x_r)$; nel dado si ha x_r = r ; r = 0, 1,...., 6 e (se è un buon dado) p_r = 1/6 .

Per le probabilità p_r valgono ovviamente le relazioni

$$p_r \geq 0 \quad ; \quad \Sigma_r\, p_r = 1.$$

Nel caso di due dadi le due v.a. X e Y costituiscono una *v.a. doppia* o a due dimensioni (X,Y). In questo caso le due v.a. componemti della v.a. doppia sono indipendenti , cioè le probabilità relative ad una di esse sono indipendenti dai valori assunti dall'altra: con una notazione usuale

$$p_{r,s} = P(X = x_r, Y = y_s) = P(X = x_r)P(Y = y_s) = p_{r,\bullet}\,p_{\bullet,s}$$

Ma l'indipendenza ovviamente non è che un caso particolare.

Naturalmente ci sono v.a. *multiple* a più di due dimensioni. Ci sono poi i *processi aleatori*, che sono famiglie di v.a. , e possono essere in particolare *a parametro discreto* (successioni) o *continuo* .

Per ogni insieme B della retta la probabilità che la v.a. X assuma un valore in B si può calcolare sommando le probabilità dei valori di X che appartengono a B ; lo stesso per le v.a. multiple:

$$P(X \in B) = \sum_{x_r \in B} P(X = x_r) = \sum_{x_r \in B} p_r \quad ; \quad P[(X,Y) \in B)] = \sum_{(x_r, y_r) \in B} p_{r,s}$$

* * *

Per lo studio delle v.a. e per le applicazioni è essenziale il concetto di funzione di v.a. . Se X è il lato di una mattonella scelta a caso tra più mattonelle quadrate, anche X^2 è una v.a. , e precisamente l'area della mattonella scelta.

Anche la v.a. $(X\text{-}\mu)/\sigma$ è una funzione della v.a. X : è la v.a. *standardizzata* o *ridotta* , e viene utilizzata per il confronto delle distribuzioni, eliminando l'influenza dell'origine e dell'unità di misura.

Importanti sono anche le funzioni di più v.a. , e in particolare la somma.

**Esempio 10.1 - Somma di dadi

Se X e Y sono i risultati di due dadi, nei giochi quello che conta è la somma $S = X + Y$. La sua distribuzione di probabilità si può ricavare facilmente se si fa riferimento ai 36 possibili risultati, tutti con la stessa probabilità 1/36. Per esempio

$$P(S=4)=P(X=1)P(Y=3)+P(X=2)P(Y=2)+P(X=3)P(Y=1)=\frac{3}{36}$$

Si ottiene in tal modo

Valori	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Probabilità	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	/36

Per la somma di tre dadi si ricava

Val.	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Prob.	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	/216

Come si vede, si hanno distribuzioni di probabilità molto diverse da quella relativa ad un singolo dado.

Il problema della somma di tre dadi è quello trattato da Galileo. Il procedimento da lui seguito è interessante, e potrebbe costituire un utile spunto didattico.

Galileo rispondeva ad una richiesta di chiarimenti sul fatto che, benché il 9 e il 10 si ottengano da un ugual numero di combinazioni, "si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggioso" il 10 del 9. Egli chiarisce che alcuni punti sono più vantaggiosi di altri per "il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi". Osserva poi che le "scoperte" di tre dadi sono 216, "tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16, cioè 3, 4, 5 etc. sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcune di esse ne tocchino molte."

Galileo continua facendo osservare che una combinazione formata da tre numeri uguali si ottiene da una sola scoperta, una combinazione di tre numeri di cui due uguali da tre scoperte, una di tre numeri tutti diversi da sei scoperte, arrivando ai risultati scritti sopra.

Notare la chiarezza del discorso di Galileo, e come in esso emergano i concetti oggi usuali: la valutazione della probabilità mediante il numero dei casi favorevoli e l'accenno alla legge empirica del caso. E' sorprendente poi l'accuratezza con cui i giocatori rilevavano le frequenze dei risultati, arrivando a notare una differenza inferiore a 0,01. **

* * *

Tra le distribuzioni discrete la più nota è la *distribuzione binomiale* o *di Bernoulli*. Viene anche utilizzata la *distribuzione discreta uniforme* che assume valori equidistanti tutti con la stessa probabilità, come nel lancio di un dado (Vedere l'esempio 11.3). Ecco altre distribuzioni notevoli.

**Esempio 10.2 - La distribuzione geometrica e i ritardi nel lotto

Consideriamo l'estrazione in una data settimana, su una data ruota. Qual'è la probabilità dell'evento E = "esce il numero 7" ?

Indichiamo con $B_1, \ldots, B_5$ l'uscita del numero 7 come primo,....quinto estratto. Si ha $E = B_1 \cup \ldots \cup B_5$. Gli eventi B_r sono chiaramente incompatibili e ciascuno di essi ha probabilità 1/90. Sommando si ottiene $P(E) = 5/90 = 1/18$.

Ci si può arrivare anche mediante il calcolo combinatorio. Tra i 90 numeri del lotto i 5 estratti si possono scegliere in $\binom{90}{5}$ modi diversi. Tra questi quelli che contengono il 6 sono $\binom{89}{4}$ (per formare la cinquina bisogna scegliere, tra gli 89 numeri diversi dal 6, 4 numeri da aggiugere al 6). Allora $P(E) = \binom{89}{4} : \binom{90}{5} = \frac{1}{18}$

Consideriamo ora il ritardo del numero 7, cioè il numero di settimane che bisogna aspettare per l'uscita del 7. Si tratta ovviamente di una v.a. X, che può assumere i valori r = 1, 2,... indefinitamente. La probabilità $p_r = P(X = r)$ è la probabilità che il numero 7 non esca nelle prime r-1 estrazioni e compaia invece nella r-sima, cioè che si verifichino tutti gli eventi $\overline{E_1}, \ldots, \overline{E_{r-1}}, E_r$, dove E_r rappresenta l'uscita del numero 7 nella r-sima settimana. Questi eventi sono indipendenti e quindi

$$p_r = P(\overline{E}_1 \cap \ldots \cap \overline{E}_{r-1} \cap E_r) = P(\overline{E_1}) \ldots P(\overline{E_{r-1}}) P(E_r)$$

Ponendo $p = P(E_r) = 1/18$ si ottiene

$$p_r = pq^{r-1} \qquad \text{r} = 1, 2, \ldots\ldots$$

A questa distribuzione si dà il nome di *distribuzione geometrica.*

* * *

La probabilità che il ritardo superi n settimane si può calcolare sommando le probabilità p_r per r da n+1 in poi. Si può anche ottenere osservando che essa è la probabilità che nelle prime n settimane non esca il numero 7, cioè $P(X > n) = P(\overline{E}_1 \cap \ldots \cap \overline{E}_{n-1} \cap \overline{E}_n) = q^n$.

Un numero che non si vede da parecchie settimane ha probabilità maggiore degli altri? Si può dare una risposta immediata: il meccanismo di scelta pone ogni volta tutti i numeri nelle stesse condizioni, indipendentemente da quello che è successo in passato. Quindi tutti i numeri, compreso quello in ritardo, hanno la stessa probabilità.

Ma qualcuno obietta che a lungo andare un numero deve uscire per forza, e dopo tanto tempo c'è da aspettarsi che finalmente si faccia vedere, perciò ha probabilità maggiore degli altri. Che c'è di sbagliato?

La risposta è data dalla probabilità condizionata. È vero che la probabilità di un ritardo molto elevato è inizialmente molto bassa, ma non si può non tener conto del ritardo già accumulato. Questa informazione influisce sulla valutazione della probabilità, ci obbliga quindi a considerare la probabilità condizionata che il ritardo X sia uguale a n+1 sapendo che esso è maggiore di n . E con queste osservazioni si ha

$$P(X = n+1 | X > n) = \frac{P[(X = n+1) \cap (X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X = n+1)}{P(X > n)} = \frac{pq^n}{q^n} = p$$

Per sottolineare il fatto che un numero in ritardo non ha probabilità maggiore degli altri si dice a volte che "il caso non ha memoria". Questa frase non fa altro che esprimere in altro modo la condizione di indipendenza. Ma non sempre si ha l'indipendenza. In particolare si possono ottenere v.a. dipendenti partendo da v.a. indipendenti, come si è già visto.

Una situazione analoga a quella vista sopra (che può servire anche per chiarirla) si ha in una successione di scommesse, o di puntate alla roulette. Il guadagno (con segno) in ogni puntata è indipendente dalla puntate precedenti, ma il capitale del giocatore dopo ogni puntata ovviamente dipende da quello precedente. Se $X_1, X_2, \ldots.$ sono i guadagni successivi (ovviamente aleatori), il capitale del giocatore assume successivamente i valori aleatori $Y_n = A + X_1 + X_2 + \ldots. X_n$ (dove A è il capitale iniziale). **

**<u>Esempio 10.3 - La distribuzione di Poisson</u>

Si tratta di una distribuzione molto importante nella teoria e per le applicazioni, che gioca un ruolo centrale tra le distribuzioni discrete come la distribuzione normale tra quelle continue. I valori che essa può assumere sono un'infinità numerabile:

$$p_r = e^{-\mu} \frac{\mu^r}{r!} \qquad ; \qquad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots$$

dove μ è una costante positiva , ed è la media della distribuzione. Ci sono molti modi per ricavare la distribuzione di Poisson partendo da situazioni concrete o da altre distribuzioni, tutti piuttosto complicati. In particolare essa si ottiene come limite della distribuzione binomiale.

Si supponga di avere una successione di urne contenenti biglie bianche e nere in proporzione variabile; più precisamente nell'urna r-sima la probabilità di estrarre una biglia bianca sia $p = \mu/n$, con μ parametro positivo costante. Da essa si estraggano n biglie: il numero di biglie bianche estratte sarà una v.a. binomiale, con distribuzione

$$p_r^{(n)} = \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-r} \quad ; \qquad r = 0, 1, \ldots, n$$

Se tenendo fisso r si fa tendere n a $+\infty$, si ottiene, sfruttando la formula di Stirling, la probabilità scritta sopra .

La distribuzione di Poisson approssima quindi la distribuzione binomiale quando p è molto piccolo. Per questo tale distribuzione di probabilità, e la corrispondente v.a., vengono dette *dei piccoli numeri* o *degli eventi rari*. Ma tale nome non rende giustizia a questa distribuzione, perchè sono innumerevoli, e disparatissime, le situazioni in cui la distribuzione di Poisson si ritrova statisticamente nella pratica. **

11 - Le variabili aleatorie continue.

Accanto alle v.a. discrete e alle relative distribuzioni ci sono le v a. continue. Per esse ogni punto ha probabilità nulla, e per rappresentarne *la* distribuzione si fa ricorso alla *funzione di densità* $f(x)$, del tutto analoga alla densità della fisica. In una trattazione più approfondita, la distribuzione di una generica v.a. viene caratterizzata mediante la *funzione di distribuzione*, o *di ripartizione*, definita da

$$F_X(x) = P(X < x) \qquad\qquad x \in R$$

che per v.a. discrete ha soltanto incrementi dovuti alle discontinuità; la funzione di densità esiste solo se F è sufficientemente regolare (per la precisione, assolutamente continua), ed è la derivata di F . La funzione di densità ha proprietà analoghe alle probabilità p_r delle distribuzioni discrete, con la sostituzione dell'integrale alla somma: essa soddisfa alle condizioni

$$f(x) \geq 0 \quad ; \quad \int_R f(x)dx = 1$$

e valgono le relazioni

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx \quad ; \; P((X,Y) \in B) = \int_{(x,y)\in B} f(x,y)dxdy$$

$$M(X) = \int_R xf(x)dx$$

L'importanza delle v.a. continue è rilevante dato che in grande maggioranza i fenomeni naturali vengono trattati come continui. Tra di esse, il ruolo di gran lunga più importante è quello della distribuzione normale.

**Esempio 11.1 - Distribuzione normale

La celebre *distribuzione normale* o *di Gauss* o *di Laplace* o *degli errori* ha la funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

dove μ e σ sono parametri reali, con $\sigma > 0$; μ è la media e σ^2 la varianza di X. La distribuzione normale ha una tipica forma "a campana" tanto più stretta quanto più σ è piccola. Per $\sigma \to 0$ la distribuzione tende a concentrarsi in un solo punto, si arriva cioè al caso limite di *distribuzione degenere* o *v.a. costante*; quando $\sigma \to +\infty$ la curva della densità si appiattisce e la probabilità si disperde all'infinito, senza alcuna distribuzione limite.

La distribuzione normale fu anzitutto introdotta perchè descriveva con buona approssimazione la distribuzione degli errori di osservazione in astronomia. Naturalmente considerazioni teoriche inducevano alla scelta di una rappresentazione così poco elementare ed immediata (vedere il paragrafo 12). Col tempo la sua utilizzazione si è estesa non solo ad ogni genere di misurazione, ma anche ai diversi valori che una grandezza assume in una popolazione: si ipotizza che essi si distribuiscano normalmente intorno ad un valore centrale. Questa ipotesi è stata utilizzata ampiamente, a volte con pretesa quasi di universalità, ovviamente infondata: basti pensare che se i lati di una mattonella si distribuiscono normalmente non può accadere lo stesso per le relative aree.

Vale la pena di osservare che la distribuzione normale assume anche valori negativi, ma a volte con probabilità così piccola che anche per grandezze necessariamente positive l'approssimazione può essere ottima. **

**Esempio 11.2 - Distribuzioni derivate dalla normale

Ecco alcuni cenni sulle elaborazioni della distribuzione normale, usate in particolare nella teoria dei campioni. Un campione bernoulliano consiste in n v.a. $X_1, \dots, X_n$ indipendenti e aventi tutte la stessa distribuzione.

Se tale distribuzione è normale, con media μ e varianza σ^2, anche la v.a $M = (X_1 + \dots + X_n)/n$ detta *media campionaria* è ancora normale, con media ancora uguale a μ e varianza σ^2/n. All'aumentare di n diminuisce così la variabilità di M, e aumenta la sua precisione: questo spiega il ricorso alla media di più misurazioni, per esempio in fisica.

La distribuzione delle v.a. $Y = X^2$ è chiamata di tipo *chi quadro* ; ha la stessa distribuzione la somma $X_1^2 + \ldots + X_n^2$.

Se Y_1 e Y_2 sono due v.a. indipendenti del tipo chi quadro, il loro rapporto $F = Y_1 / Y_2$ ha *distribuzione di Fisher* , da Sir Ronald Fisher, che è stato chiamato "il padre della statistica moderna". Se X e Y sono indipendenti, di tipo rispettivamente normale e chi quadro, il loro rapporto viene detto *T di Student* , pseudonimo di Samuel Gossett.

A riprova delle strette relazioni tra probabilità, statistica e applicazioni, va detto che Student lavorava in una stazione sperimentale di agricoltura e Fisher presso la birreria Guinness.

Le distribuzioni di queste v.a. , ampiamente usate nelle elaborazioni statistiche, furono ben presto tabulate, e compaiono attualmente come subroutine in tutti i programmi statistici. **

**<u>Esempio 11.3 - Distribuzione uniforme</u>

Dire che una v.a. assume tutti i punti di un intervallo con la stessa probabilità ha certamente un chiaro significato intuitivo, ma in realtà non dà informazioni, perchè ciascuna distribuzione continua assume ogni punto con probabilità nulla, quindi uguale per tutti i punti.

Si può dare una caratterizzazione più precisa dicendo che intervalli di uguale lunghezza hanno probabilità uguale; oppure (è una conseguenza) che la probabilità dei diversi intervalli è proporzionale alla loro lunghezza; o ancora (facendo tendere a zero la lunghezza dell'intervallo) che la densità è costante. Si parla allora di distribuzione *uniforme* o *rettangolare* . Se a, b sono gli estremi dell'intervallo si ha

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

Sono dette uniformi (discrete) anche le v.a. discrete che assumono con la stessa probabilità valori equidistanziati, come quella del lancio di un dado. È uniforme discreta in particolare la v.a. che assume i valori $1/n$, $2/n$,..., 1 con la stessa probabilità $1/n$. Se n tende all'infinito questa distribuzione tende alla distribuzione uniforme continua nell'intervallo (0,1). **

**<u>Esempio 11.4 - Distribuzione esponenziale</u>

Si tratta di una distribuzione continua, con funzione di ripartizione e funzione di densità date da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

dove λ è un parametro positivo. Per la media e la varianza si ottiene

$$E(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda}$$

Si vede che la v.a. X è più grande in media quando il parametro λ è più piccolo.

Se la v.a. X è la durata di vita o di funzionamento (ovviamente aleatoria) di un oggetto (per esempio un macchinario o un suo componente), ha interesse la sua *vita residua*, cioè la durata X_a che rimane al pezzo dopo che esso ha funzionato per un tempo a.

La v.a. X_a si ottiene da X sottraendo il tempo trascorso a. Per la sua distribuzione di probabilità bisogna tener presente l'informazione in nostro possesso che il pezzo ha già funzionato per un tempo a, cioè che è $X \ge a$; dobbiamo quindi calcolare una probabilità condizionata:

$$F_{X_a}(x) = P(X_a < x) = P(X - a < x | X \ge a) =$$

$$= \frac{P(X < a + x, X \ge a)}{P(X \ge a)} = \frac{P(a \le X < a + x)}{P(X \ge a)} = \frac{F(x+a) - F(x)}{1 - F(a)}$$

Nel caso che la X abbia distribuzione esponenziale si ottiene

$$F_{X_a}(x) = \frac{1 - e^{-\lambda(x+a)} - 1 + e^{-\lambda a}}{1 - 1 + e^{-\lambda a}} = 1 - e^{-\lambda x}$$

arrivando così sorprendentemente ad una distribuzione uguale a quella della durata di vita iniziale, ovviamente con la stessa media, come se il pezzo considerato non fosse stato già in funzione per un certo tempo.

Questa proprietà è caratteristica della distribuzione esponenziale, e viene detta *mancanza di memoria* o, nella sua interpretazione tecnologica, *mancanza di usura*. Quindi la distribuzione esponenziale v.a bene solo per descrivere il comportamento di oggetti particolari, come certi componenti elettronici semplici, per i quali si pensa appunto che non ci sia usura: si potrebbe dire che ad ogni istante, indipendentemente dal passato, il pezzo muore con una certa probabilità p oppure continua a vivere con probabilità $q = 1\text{-}p$. Da notare l'analogia con il ritardo nel gioco del lotto, che in ogni settimana termina o continua con probabilità rispettivamente p e q . Tale analogia viene rispecchiata dalla funzione di densità che ha, nel continuo, una forma analoga alla probabilità della distribuzione geometrica: in entrambe la variabile compare all'esponente. **

12 - Il teorema centrale di convergenza e la legge dei grandi numeri

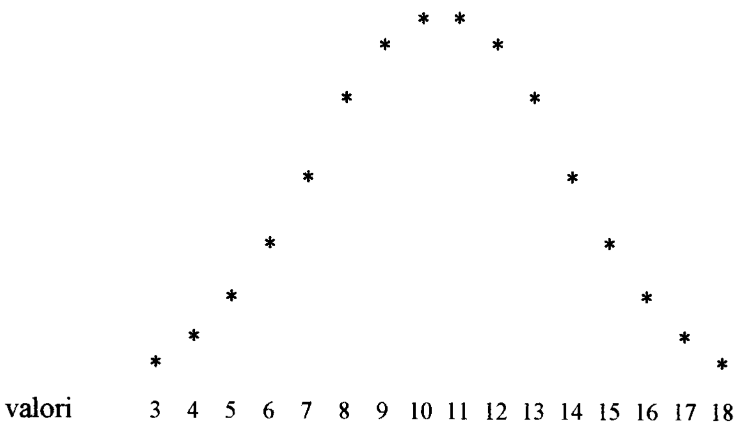
Abbiamo già visto qualche esempio di convergenza in distribuzione: la distribuzione di probabilità delle v.a. X_n di una successione tende ad essere uguale a quella di una v.a. X. Ciò è spesso utile nelle applicazioni, perchè per n grande si può approssimare la distribuzione di X_n con quella di X, o viceversa, con notevoli vantaggi. Il caso più importante, ed anche più utile nelle applicazioni, è dato dal

Teorema centrale di convergenza - Si consideri una successione di v.a. indipendenti X_n aventi tutte la stessa distribuzione, con media μ e varianza σ^2 finite. La v.a.

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

tende allora ad avere distribuzione normale con media μ e varianza σ^2, qualunque sia la distribuzione delle X_n. La stessa conclusione si ottiene anche sotto ipotesi molto meno restrittive.

Questo risultato teorico fa comprendere l'importanza della distribuzione normale e la sua diffusione. Un risultato casuale viene considerato intuitivamente come la risultante di numerosi fattori di lieve entità non controllabili. Se tali fattori si combinano additivamente e valgono le condizioni del teorema, la v.a. risultante ha distribuzione normale.



È interessante osservare la rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità della somma di tre dadi. Si vede che in questo caso già la somma di tre sole variabili assume una forma che fa intravedere quella tipica, a campana, della distribuzione normale.

* * *

Un'altra importante legge di convergenza è la

Legge dei grandi numeri - Se le v.a. X_n sono indipendenti e hanno la stèssa distribuzione, con media μ finita, la v.a.

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

tende ad essere uguale a μ ,cioè ad avere la distribuzione di una v.a. costante uguale a μ . Anche questo risultato è molto utile nelle applicazioni. Nella teoria dei campioni per stimare certe grandezze della popolazione si incontrano delle funzioni delle osservazioni che sono v.a. del tipo della Z_n . Si sa allora che per n grande la stima avrà con probabilità molto alta un valore vicino alla grandezza da stimare. Un caso particolarmente importante si ha quando le v.a. sono i successi in una serie di prove, se cioè la v.a. X_r relativa alla prova r-sima è uguale a 1 in caso di successo, a 0 in caso di insuccesso. Il numeratore dà allora il numero di successi in n prove e la v.a. Z_n è la frequenza relativa dei successi e tende a p. La legge dei grandi numeri diventa così la controparte teorica della legge empirica del caso.

Occorre notare la profonda differenza concettuale tra le due leggi: la legge dei grandi numeri è un risultato teorico nell'ambito della teoria matematica della probabilità, mentre la legge empirica del caso si riferisce a quello che succede nella realtà. Considerando l'evento $|Z_n - p| < \varepsilon$, la legge dei grandi numeri afferma che tale evento ha probabilità grande quanto vogliamo per n sufficientemente grande; la legge empirica del caso dice che esso si verifica effettivamente. Detto così, la legge empirica del caso afferma più banalmente la nostra aspettativa che un evento di probabilità molto alta si verifichi senz'altro: diventa più chiara la validità intuitiva della legge empirica del caso, il fatto che il più delle volte essa sia effettivamente rispettata, ed il fatto che essa può essere accettata solo come affermazione imprecisa e senza validità assoluta.

STATISTICA
Linee guida e spunti didattici per un insegnamento interdisciplinare

Carla Rossi
Università di Roma "Tor Vergata" - Dipartimento di Matematica

Premessa

Il presente contributo, dato il piccolo spazio disponibile, non può contenere una trattazione disciplinare degli argomenti di statistica inseriti nei nuovi programmi di matematica, ma soltanto alcune note generali sull'insegnamento della disciplina e spunti didattici basati su esempi. Per i contenuti più metodologici si può fare riferimento ai libri ed articoli citati nella bibliografia.

1. Concetti di base e terminologia: guardarsi dalle improprietà di linguaggio.

La statistica senza altri attributi, o anche indicata come "descrittiva" o analisi dei dati, è un insieme di metodi matematici per lo studio di fenomeni collettivi. In generale, a prima vista, le tecniche statistiche, almeno quelle descrittive, appaiono "semplici" dal punto di vista dell'elaborazione matematica e questo può indurre a sottovalutare la necessità di utilizzare rigore e correttezza terminologica. Esempi eclatanti di tale superficialità si ritrovano in moltissimi dei nuovi testi per la scuola superiore prodotti a seguito dell'inizio delle sperimentazioni legate al Piano Nazionale Informatica e al progetto "Brocca". Questo fatto, purtroppo, induce una serie di errori di impostazione, difficilmente correggibili nel seguito, che portano ad un uso improprio delle tecniche, molto spesso banale e nello stesso tempo arzigogolato, indubbiamente noioso e per nulla interessante, né formativo.

E' allora opportuno soffermarsi un po' sulla terminologia di base e sui concetti fondamentali su cui si fonda il metodo statistico.

La statistica trae la sua ragion d'essere nella necessità di elaborazione di pluralità di dati forniti da un insieme di casi osservati o di risultati sperimentali che sono la manifestazione di un fenomeno sul quale si intende indagare.

I fenomeni che possono essere analizzati con metodi statistici sono detti fenomeni collettivi, e sono conoscibili solo attraverso una pluralità di osservazioni.

Ci troviamo ad elaborare insiemi di dati se vogliamo analizzare, nella nostra scuola, i risultati degli esami di maturità, se vogliamo studiare la distribuzione territoriale di una certa malattia o di una certa specie di animali o di piante, se intendiamo confrontare i prezzi di un certo bene in più supermercati e in tempi diversi e così via.

Le metodologie statistiche sono metodi logici su basi matematiche che consentono di interpretare i dati raccolti e, anche, di fare valide induzioni dall'insieme dei dati osservati, considerati come campione (sottoinsieme) di un insieme più ampio e, in genere, non osservabile direttamente (la popolazione). L'intento è quello di penetrare più a fondo nel meccanismo o nei fattori che determinano il presentarsi del fenomeno in esame con diverse modalità.

Si distingue la statistica descrittiva (o semplicemente statistica), tendente ad evidenziare le caratteristiche di interesse dei fenomeni collettivi direttamente descritte dai dati, siano questi relativi ad osservazioni sull'intera popolazione o su un campione, e la statistica inferenziale (o statistica matematica), tendente a interpretare le osservazioni in termini di modelli teorici esplicativi del meccanismo secondo il quale si producono i fenomeni collettivi esaminati, in modo da poter riferire il risultato relativo all'insieme di dati osservati all'intera popolazione di provenienza valutando anche, probabilisticamente, gli errori di attibuzione.

L'indagine statistica, ossia lo studio di un qualsiasi fenomeno collettivo, si può articolare in quattro fasi fondamentali: RILEVAZIONE, ELABORAZIONE, PRESENTAZIONE ed INTERPRETAZIONE.

Descriviamo ora più nel dettaglio le caratteristiche principali delle diverse fasi.

La RILEVAZIONE è quel complesso di operazioni attraverso le quali si acquisiscono le informazioni sulle caratteristiche (o caratteri) che interessano per ciascun caso (o unità statistica) del collettivo considerato; da questa fase scaturiscono i dati statistici elementari (o dati grezzi).

E' possibile distinguere essenzialmente tra due tipi di rilevazione: osservazioni statistiche ed esperimenti statistici.

L'osservazione statistica (o anche indagine statistica in senso proprio) è caratterizzata dall'esistenza di una popolazione ben individuabile di unità sulle quali effettuare la rilevazione della caratteristica o delle caratteristiche di interesse. La popolazione è costituita, almeno in linea teorica, da un numero finito di elementi, anche se spesso, data l'ampiezza di tale numero, è opportuno considerare la popolazione come costituita da un numero infinito di elementi (si pensi a rilevazioni su microorganismi, su cellule, su particelle ecc.). E' possibile, comunque, effettuare osservazioni su tutta la popolazione (si pensi per esempio ai vari censimenti).

Nel caso di un esperimento statistico i dati riguardano il risultato di prove programmate o di esperimenti di laboratorio, la popolazione è costituita da prove, potenzialmente in numero infinito, di conseguenza è possibile osservare solo un sottoinsieme finito (campione) della popolazione di interesse.

In ogni caso è necessario predisporre un piano di rilevazione o un protocollo di indagine per procedere poi alla raccolta vera e propria dei dati.

L'informazione può essere acquisita ad esempio sulla base di statistiche correnti (registri specifici, bollettini e annuari ISTAT ecc.) o tramite la preparazione di appositi questionari o effettuando studi sperimentali mirati (analisi dell'influenza di fattori ambientali su una particolare risposta, esperimenti di fisica, ecc.).

Quando si pianifica e dirige una rilevazione di dati bisogna innanzitutto conoscere lo scopo, l'obiettivo della rilevazione stessa, ovvero deve essere chiaramente stabilito quale sia il complesso di informazioni che la rilevazione deve fornire, valutare la fattibilità in relazione ai mezzi finanziari e umani di cui si dispone, nonché alla utilità dello studio stesso.

Bisogna pertanto predisporre la rilevazione nei minimi dettagli in modo che non vi siano ambiguità di nessun genere. Occorre, in particolare, badare attentamente ai seguenti punti:

1) definire con precisione la popolazione, l'unità di rilevazione e l'unità statistica;

2) stabilire i caratteri quantitativi e qualitativi che interessa rilevare per il perseguimento dell'obiettivo dell'indagine;

3) indicare i mezzi tecnici per raccogliere le informazioni su detti caratteri;

4) fissare l'estensione della rilevazione in ordine al territorio, al tempo, allo spazio, alle disponibilità di mezzi tecnici e finanziari.

Osserviamo che, per quanto riguarda il punto 1), la popolazione di riferimento scaturisce direttamente nella fase di definizione degli obiettivi. L'unità di rilevazione e l'unità statistica possono non coincidere. Questo avviene se l'unità di rilevazione è costituita da più unità elementari, su ciascuna delle quali interessa raccogliere informazioni. Ad esempio, nel corso del censimento della popolazione residente in Italia, l'unità di rilevazione è la famiglia, infatti, in sede di raccolta delle informazioni, ad ogni famiglia viene fornito un modulo da compilare.

Nel modulo, però, si richiedono al capofamiglia le notizie su ciascun componente del nucleo familiare. Pertanto ciascun componente è una unità statistica.

Per quanto riguarda il punto 2), specifichiamo che si chiama carattere ciascuna delle caratteristiche dell'unità statistica che si intende rilevare. Il carattere è qualitativo se si esprime con una proposizione o attributo, quantitativo se si esprime con un numero. Ad esempio se vogliamo studiare l'ambiente familiare dei nostri studenti, abbiamo che:

- ogni studente è una unità statistica a cui possiamo chiedere:

- il sesso (carattere qualitativo);
- l'età del padre al matrimonio (carattere quantitativo);
- l'età della madre al matrimonio (carattere quantitativo);
- il titolo di studio del padre (carattere qualitativo);
- il titolo di studio della madre (carattere qualitativo) e così via.

L'ELABORAZIONE è quell'insieme di operazioni attraverso le quali i dati rilevati (dati originari o grezzi) vengono opportunamente classificati e sintetizzati al fine di ottenere dati derivati di più facile interpretazione, evidenziando le caratteristiche di interesse per gli scopi dello studio e sui quali applicare, eventualmente, ulteriori appropriate metodologie statistiche.

Una buona fase di programmazione dell'indagine indicherà essa stessa le metodologie più opportune da adottare per fornire risposte coerenti ed attendibili.

La PRESENTAZIONE consiste nell'esposizione dei dati opportunamente sintetizzati in tabelle, grafici, indici, funzioni.

Infine l'INTERPRETAZIONE consiste nella spiegazione dei risultati dell'indagine che può essere effettuata inquadrandoli nella fenomenologia di cui sono espressione, avvalendosi, eventualmente, di considerazioni teoriche e, se necessario, di altre indagini collegate, in modo da poter monitorare il fenomeno e, se necessario, assumere decisioni riguardanti, per esempio, insiemi più vasti (la popolazione di riferimento) rispetto ai quali si ritiene che le osservazioni costituiscano un campione.

E' opportuno sottolineare che le suddette fasi costituiscono una semplice schematizzazione del processo di svolgimento di una indagine statistica. I confini tra le varie fasi non sempre sono netti, né le suddette fasi si susseguono sempre nell'ordine elencato. Spesso invece i vari momenti delle diverse fasi si sovrappongono e si intersecano tra loro.

Nella tabella 1 è riportato un insieme di dati grezzi utili per chiarire quanto detto.

Osserviamo che i dati della tabella permettono di chiarire il significato corretto di carattere (ogni informazione di interesse che compare nelle colonne 2-5 della tabella) e che può anche essere denotata come "variabile statistica" e di modalità assumibili da un carattere qualitativo sconnesso come "Residenza": Nord, Centro, Sud, o da un carattere qualitativo ordinato come "Titolo di studio del Capo Famiglia": Elementare, Media Inferiore, Media Superiore, Laurea. Permette anche di parlare di variabili statistiche o caratteri quantitativi come il numero dei componenti della famiglia (quantitativo discreto che assume valore nei naturali) o il reddito (quantitativo continuo approssimato in modo discreto perché misurato in milioni trascurando i sottomultipli).

Tabella 1. Dati grezzi relativi ad un'indagine sulle famiglie.

Fam.	Componenti	Reddito annuo (milioni)	Titolo di studio del CF	Residenza
1	2	28	Elem.	Nord
2	1	35	M.inf.	Centro
3	3	50	M.inf.	Nord
4	1	45	M.sup.	Nord
5	1	40	Laurea	Sud
6	2	30	M.inf.	Sud
7	3	55	M.inf.	Centro
8	4	80	M.sup.	Centro
9	5	60	Laurea	Sud
10	6	85	Laurea	Nord
11	7	90	Laurea	Nord
12	1	52	M.sup.	Centro
13	2	62	M.sup.	Sud
14	3	75	M.sup.	Sud
15	5	60	Elem.	Nord
16	4	45	M.inf.	Nord
17	3	42	M.inf.	Centro
18	2	28	Elem.	Nord
19	8	70	M.sup.	Sud
20	2	38	Laurea	Sud

E' anche possibile fare alcune prime elaborazioni per sintetizzare i dati contenuti nelle varie colonne in modo appropriato alla loro natura: distribuzioni statistiche e calcolo delle classi modali per i caratteri qualitativi; calcolo della distribuzione empirica o cumulata per quelli quantitativi, con le relative rappresentazioni grafiche. E' anche possibile iniziare a parlare di indici statistici di posizione (media, mediana) e di dispersione (scarto standard, coefficiente di variazione) per variabili statistiche quantitative e vedere alcune prime proprietà.

Può sembrare superfluo, ma è opportuno sottolineare quanto sia importante non confondere i concetti sopra citati: carattere, modalità, distribuzione statistica. Il concetto di distribuzione è un concetto fondamentale ed è importante acquisirlo correttamente, anche per le connessioni con il calcolo delle probabilità. E' importante ricordare che una distribuzione statistica per qualunque tipo di carattere, sia data in forma di frequenze assolute o percentuali (relative), è sempre costituita da una coppia di insiemi: l'insieme delle modalità o dei valori assumibili dal carattere considerato e, in corrispondenza, l'insieme costituito dal numero di volte (frequenza assoluta) o proporzione di volte (frequenza relativa) che ogni modalità o valore si presenta nella matrice dei dati considerati. Uno solo dei due insiemi non rappresenta mai la distribuzione, come erroneamente riportato in alcuni testi ad ampia diffusione. A partire dai dati della tabella 1 si ottengono, per esempio, le seguenti distribuzioni statistiche:

- Per il numero dei componenti (variabile quantitativa):

valori:	1	2	3	4	5	6	7	8
fr.ass.:	4	5	4	2	2	1	1	1
fr.rel.:	1/5	1/4	1/5	1/10	1/10	1/20	1/20	1/20; valore modale "2";

- Per la residenza (variabile qualitativa sconnessa):

modalità:	Nord	Centro	Sud
fr.ass.:	8	5	7
fr.rel:	2/5	1/4	7/20; classe modale "Nord".

2. Rilevazione, codifica, archiviazione di dati: sinergie con altri settori della matematica (logica, insiemistica, informatica).

Si è già detto che nella fase di rilevazione si procede in modo diverso in relazione al tipo di fenomeno che si sta studiando, al tipo di variabili, agli obiettivi dello studio. La fase di pianificazione e archiviazione è molto importante e permette l'utilizzo di strumenti matematici legati ad altri campi.

Consideriamo, per esempio, i dati della tabella 1. Si tratta di un insieme assai limitato (solo 20 unità statistiche), che non pone alcun problema particolare di archiviazione. In generale, però, quando si deve trattare con insiemi molto più ampi di dati (si pensi ai censimenti), occorre porsi il problema dell'archiviazione, ragionevolmente su supporto magnetico, della matrice dei dati grezzi. In questo caso, si procede, generalmente, a modificare la matrice attraverso opportuna codifica delle informazioni.

Una procedura di codifica, in particolare per le variabili qualitative, consiste nello stabilire una corrispondenza biunivoca tra le modalità del carattere considerato e un opportuno insieme di numeri, in genere naturali abbastanza piccoli, in modo da tradurre la tabella dei dati grezzi, che contiene informazioni sotto forma di attributi e sotto forma di numeri (i valori delle variabili quantitative), in una tabella completamente numerica, più semplice da trattare. Una possibile codifica per le variabili qualitative di tabella 1 potrebbe prevedere:

- Per il carattere residenza:

modalità:	Nord	Centro	Sud
codice:	1	2	3

- Per il carattere titolo di studio del capofamiglia:

modalità:	Elem.	M.inf.	M.sup.	Laurea
codice:	1	2	3	4.

E' opportuno, nel caso di caratteri qualitativi ordinati come il titolo di studio, conservare lo stesso ordinamento gerarchico nell'assegnazione dei codici. E' evidente che non ha senso codificare le variabili quantitative, che sono già espresse su una scala numerica.

Altre interazioni importanti con la logica e l'insiemistica si riscontrano in sede di pianificazione di un questionario per la rilevazione di dati, sia da archivi già esistenti, sia attraverso vari tipi di interviste. E' importante predisporre effettivamente dei questionari, anche attraverso lavoro di gruppo, perché, anche per questa fase, si riscontra, nei testi in uso, una generale sottovalutazione delle difficoltà, delle implicazioni e dei collegamenti con altri settori della matematica, che possono offrire importanti sinergie, per esempio la logica. Non è possibile approfondire ulteriormente l'argomento, ma si riporta, in tabella 2, un questionario predisposto per un'indagine sulla lettura tra gli alunni di un liceo scientifico, tutto basato su domande strutturate a risposta singola chiusa, eccetto la 4 e la 7 che prevedono anche una risposta aperta. La codifica delle risposte in questo caso è immediata e può coincidere con l'ordine della risposta segnata in corrispondenza di ogni domanda. Osserviamo che, per semplificare la rilevazione e l' elaborazione, si è anche provveduto a raggruppare in classi le variabili quantitative come l'età e il numero medio di libri letti annualmente.

Tabella 2: questionario per la rilevazione dei dati sulle letture utilizzato presso un Liceo scientifico di Roma.

1. Età
   - ☐ 13-20 anni
   - ☐ oltre 20 anni

2. Sesso
   - ☐ M
   - ☐ F

3. Quanti libri leggi, in media, in un anno
   - ☐ 0-3
   - ☐ 4-6
   - ☐ 7-10
   - ☐ oltre 10

4. Che tipo di lettura preferisci
   - ☐ romanzi
   - ☐ avventura
   - ☐ gialli
   - ☐ fantascienza
   - ☐ saggistica
   - ☐ altro .... (specificare)

5. Cosa ti influenza nella scelta di un libro
   - ☐ la recensione
   - ☐ la copertina
   - ☐ l'autore
   - ☐ il prezzo

6. Qual è il periodo dell'anno in cui dedichi più tempo alla lettura
   - ☐ vacanze scolastiche
   - ☐ estate
   - ☐ periodo scolastico
   - ☐ indifferentemente durante tutto l'anno

7. Dove acquisti più frequentemente i libri
   - ☐ libreria
   - ☐ grandi magazzini
   - ☐ edicole
   - ☐ altro .... (specificare)

8. Qual è il momento della giornata in cui leggi più volentieri
   - ☐ dopo pranzo
   - ☐ nel tardo pomeriggio
   - ☐ la sera (prima di dormire)
   - ☐ è indifferente

3. Elaborazione e presentazione di dati statistici: analisi univariate e bivariate.

La fase di elaborazione, e presentazione, dei dati grezzi deve essere volta a mettere in luce le caratteristiche di interesse per lo studio del fenomeno collettivo considerato e preparare la strada per la successiva fase di interpretazione. E' assolutamente sbagliato, fuorviante e per nulla formativo, ridurre questa importante fase a puri calcoli, più o meno meccanici, di formule di cui non si comprende il significato e l'utilizzo per la conoscenza del fenomeno. Questa, invece, purtroppo, è la linea seguita dalla maggior parte dei testi sul mercato, in cui si propongono esercizi e applicazioni di calcolo, anche abbastanza banali, di medie e indici di vario tipo, nonché di distribuzioni statistiche con relative rappresentazioni grafiche, magari introducendo in queste anche una terza dimensione distorcente. Purtroppo molti pacchetti statistici per PC consentono di rappresentare i diagrammi a barre o a torta considerando le barre come prismi e le torte come cilindri, con rappresentazioni prospettiche che falsano l'informazione sulle dimensioni delle aree, che sono l'unica cosa che ha un significato.

Le analisi statistiche consistono essenzialmente nell'applicazione di metodologie appropriate per sintetizzare le informazioni contenute nella matrice dei dati. Nel caso univariato si tratta di analisi basate su una sola colonna della matrice alla volta, nel caso delle analisi bivariate si prendono in considerazione due colonne congiuntamente con lo scopo di analizzare possibili connessioni e relazioni tra le variabili statistiche corrispondenti.

E' opportuno anche in questa fase prestare attenzione alla terminologia corretta.

Consideriamo, per esempio, le possibili sintesi univariate. Occorre procedere in modo diverso per caratteri qualitativi o quantitativi. Le distribuzioni statistiche sono l'unico strumento assolutamente generale applicabile, sia pure con piccole differenze tecniche, a tutti i tipi di variabili, come anche visto sopra.

Nel caso di caratteri quantitativi continui è importante stabilire il grado di accuratezza delle misure rilevate; nella tabella 1 il reddito, per esempio, è rilevato con un'accuratezza di 0.5 milioni, essendo misurato in milioni senza utilizzare i sottomultipli. Di questo si terrà conto, per esempio, nelle rappresentazioni grafiche. Volendo rappresentare la distribuzione cumulata, occorrerà rappresentare la funzione a gradini corrispondente alla quarta colonna della tabella 3.

Osserviamo che utilizzando la tabella 3 è possibile introdurre molti concetti importanti: intervallo di variazione delle misure, mediana, quartili e scarto interquartile, distribuzioni multimodali, funzione di concentrazione e indice di concentrazione; e rappresentazioni grafiche come: istogrammi, diagrammi a barre e a torta (areogrammi circolari), boxplot, ogiva e spezzata delle frequenze, curva di concentrazione e area di concentrazione.

E' anche possibile passare alle distribuzioni per dati raggruppati in classi di reddito, opportunamente definite, per produrre un migliore sintesi della tabella considerata.

Tabella 3: Distribuzioni statistiche relative alla variabile reddito di tabella 1.

Valori	fr.ass.	fr.rel.	fr.cum.	dist.emp.
28	2	2/20	2	2/20
30	1	1/20	3	3/20
35	1	1/20	4	4/20
38	1	1/20	5	5/20
40	1	1/20	6	6/20
42	1	1/20	7	7/20
45	2	2/20	9	9/20
50	1	1/20	10	10/20
52	1	1/20	11	11/20
55	1	1/20	12	12/20
60	2	2/20	14	14/20
62	1	1/20	15	15/20
70	1	1/20	16	16/20
75	1	1/20	17	17/20
80	1	1/20	18	18/20
85	1	1/20	19	19/20
90	1	1/20	20	1

E' possibile anche introdurre gli indici statistici di posizione e di dispersione come la media, lo scarto standard e il coefficiente di variazione.

Per i redditi riportati sopra risulta:

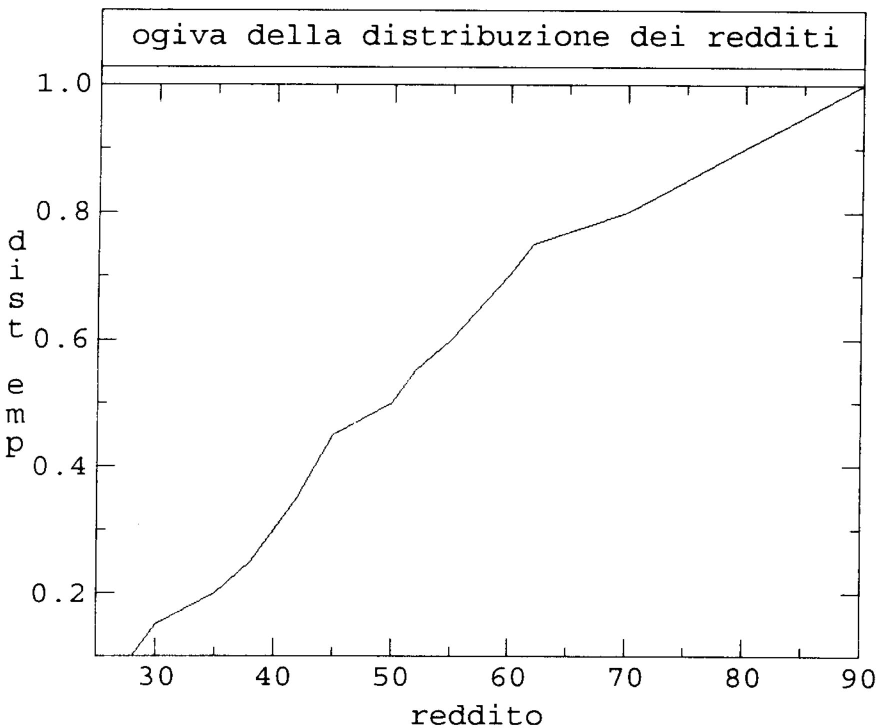
- media=53.5;
- mediana=51;
- scarto standard=18.96;
- coefficiente di variazione=media/scarto standard=0.35.

Dall'ogiva, riportata in figura 1, è possibile determinare graficamente i quantili della distribuzione, in particolare la mediana e i quartili, che si ottengono dalle relazioni:

- mediana$=F^{-1}$ (0.5);
- primo quartile$=F^{-1}$ (0.25), e così via, avendo indicato con F il valore dell'ogiva (ordinata nella figura 1).

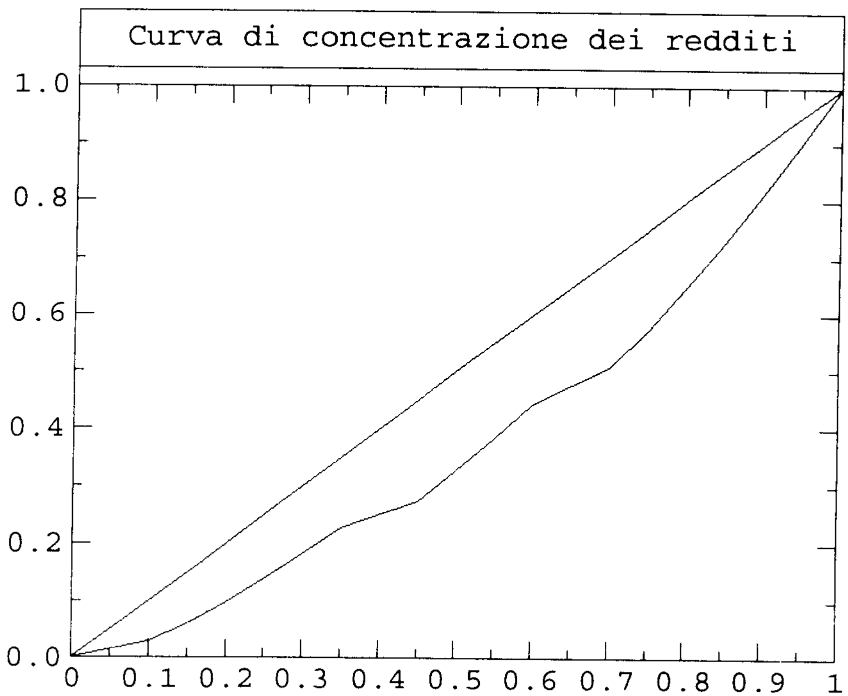
E' importante che l'analisi non si limiti ai calcoli e alle rappresentazioni grafiche, ma preveda anche l'interpretazione di quanto elaborato. Per esempio, senza entrare troppo nel dettaglio, si può osservare che la mediana è inferiore alla media e questo implica che più della metà dei capofamiglia guadagna meno del guadagno medio. L'analisi può essere approfondita utilizzando i quartili (38 e 62) e rappresentando i dati mediante un boxplot.

Figura 1



Si può poi passare alla rappresentazione della curva di concentrazione (figura 2), che mostra in ordinata la proporzione di reddito posseduta dalla proporzione (in ascissa) di redditieri posti in ordine crescente di reddito: dai più poveri ai più ricchi. Se il reddito fosse uniformemente distribuito tale curva coinciderebbe con la diagonale (rappresentata in figura). In generale questo non accade e la curva di concentrazione si pone al di sotto della retta. Tanto più se ne discosta, tanto più è sbilanciata la distribuzione. Nel nostro caso si osserva un non eccessivo scostamento dall'uniformità. Di tale scostamento si può fornire una misura rapportando l'area tra la diagonale e la curva di concentrazione con l'area del triangolo sotto la diagonale (1/2). Nel nostro caso tale rapporto vale circa 1/4.

Figura 2



E' importante anche studiare le proprietà formali dei diversi indici di posizione e di dispersione utilizzati. In particolare, è importante verificare che tutti gli indici di posizione utilizzati sono traslativi ed omogenei (ovvero cambiando l'origine e l'unità di misura dei dati secondo una trasformazione lineare l'indice subisce le stesse modifiche), come è opportuno che sia dovendo essi fornire una qualche idea del valore attorno a cui si "concentra" la distribuzione statistica. Mentre è opportuno che gli indici di dispersione siano solo omogenei, ma invarianti per traslazione, dato che misurano la concentrazione della distribuzione statistica attorno ad un indice di posizione che "funziona" come origine intrinseca per tale scopo. Per questo motivo la varianza non è ben utilizzabile come indice di dispersione (varia quadraticamente al variare dell'unità di misura) ed è preferibile utilizzare lo scarto standard che è un indice omogeneo. Da quanto detto segue che il coefficiente di variazione è un indice invariante per ogni trasformazione lineare dei dati e rappresenta una misura della variabilità che permette di confrontare situazioni anche molto diverse come ordine di grandezza della misure.

Come si vede anche nello studio degli indici statistici è possibile trovare sinergie con altri settori della matematica tradizionale, come le trasformazioni e i cambiamenti del sistema di riferimento.

Una volta effettuate le analisi univariate si pone il problema di studiare congiuntamente due variabili statistiche effettuando analisi bivariate.

La più generale sintesi bivariata è fornita dalla distribuzione congiunta dei caratteri, che si può fornire in diversi modi.

Consideriamo prima i caratteri qualitativi (entrambi) come, per esempio, il "titolo di studio" e la "residenza" di tabella 1.

Un modo sintetico di riportare le informazioni relative alla distribuzione dei due caratteri è quello di considerare tutte le possibili coppie di modalità (una per ogni carattere) e fornire assieme la frequenza assoluta e relativa corrispondente.

Un modo efficace di presentare tale informazione è sotto forma di tabella a doppia entrata (o anche tabella di contingenza). Nel nostro caso la distribuzione dei due caratteri considerati è in tabella 4, dove, oltre alla distribuzione congiunta, che compare all'interno della tabella in forma assoluta e relativa, sono riportate anche le cosiddette distribuzioni marginali, che rappresentano le due distribuzioni univariate dei caratteri considerati già viste in precedenza. Sul margine di colonna la distribuzione del "titolo di studio" e su quello di riga la distribuzione della "residenza".

Le distribuzioni che si trovano nelle diverse colonne all'interno della tabella sono le distribuzioni condizionate del titolo di studio al variare della residenza, e, viceversa, le distribuzioni sulle righe sono le distribuzioni condizionate della residenza dato il titolo di studio.

Tabella 4: distribuzione congiunta (doppia) dei caratteri "titolo di studio" (righe) e "residenza" (colonne), relativa ai dati di tabella 1.

Frequenze assolute

Titolo di studio	Residenza: Nord	Centro	Sud	Marg.
Elem.	3	0	0	3
M.inf.	2	3	1	6
M.sup.	1	2	3	6
Laurea	2	0	3	5
Marg.	8	5	7	20

Frequenze relative

Titolo di studio	Residenza: Nord	Centro	Sud	Marg.
Elem.	0.15	0.0	0.0	0.15
M.inf.	0.1	0.15	0.05	0.3
M.sup.	0.05	0.1	0.15	0.3
Laurea	0.1	0.0	0.15	0.25
Marg.	0.4	0.25	0.35	1.0

La tabella 4 permette di fare alcune considerazioni su possibili legami tra i due caratteri considerati, anche se la numerosità dei dati è troppo esigua per andare in profondità.

Una prima osservazione riguarda il fatto che le distribuzioni condizionate, sia di riga che di colonna, non sono tra loro proporzionali. In alcune righe sembrano privilegiate alcune modalità della residenza, in altre righe altre modalità, e analogamente per le colonne. Nella prima riga la moda è "Nord", nella seconda "Centro", nella terza e nella quarta "Sud". Ci possiamo allora chiedere se questo andamento potrebbe indicare che c'è maggior frequenza di capofamiglia con licenza elementare al Nord, rispetto al Centro e al Sud?

Naturalmente abbiamo a disposizione troppo pochi dati per poter andare avanti nell'interpretazione, ma, in casi in cui si hanno a disposizione insiemi di dati più numerosi, è possibile tentare di rispondere a domande come quella posta sopra.

Consideriamo, allora, una tabella doppia relativa a un insieme più ampio di dati, come quella che segue, in cui si analizzano i due caratteri "titolo di studio del marito" (righe) e "titolo di studio della moglie" (colonne).

Tabella 5: dati osservati relativi al titolo di studio del marito (righe) e della moglie (colonne), per 1000 coppie.

Dati Osservati

Titolo di studio del marito	Titolo di studio della moglie				
	Elem.	MI	MS	L	Marg.
Elem.	172	44	10	1	227
M.inf.	70	105	65	3	243
M.sup.	18	72	195	35	320
Laurea	1	7	110	92	210
Marg.	261	228	380	131	1000

Anche in questa tabella le distribuzioni condizionate non sembrano proporzionali. Possiamo allora, a partire dai margini, ovvero dalle due distribuzioni univariate, calcolare una tabella, da confrontare con la precedente, con le righe (e le colonne) tra loro proporzionali. Effettuati gli ovvii calcoli, si ottiene la cosiddetta tabella attesa che troviamo sotto.

Si vede subito che le due distribuzioni delle tabelle 5 e 6 sono molto diverse tra loro. Vogliamo, allora, misurare con un opportuno indice statistico, questa diversità.

Un primo indice che è possibile considerare è il cosiddetto indice :

$$\chi^2 = \quad (\text{frequenze osservate-frequenze attese})^2 / \text{frequenze attese}$$

dove la somma è estesa a tutte le caselle interne della tabella.

Tabella 6: distribuzione congiunta dei due caratteri, calcolata a partire dalle distribuzioni marginali, nell'ipotesi di indipendenza o omogeneità tra le modalità di riga e di colonna (proporzionalità delle distribuzioni condizionate).

Tabella Attesa

	Elem.	MI	MS	L	Marg.
Elem.	59	52	86	30	227
M.inf.	63	55	92	33	243
M.sup.	84	73	122	41	320
Laurea	55	48	80	27	210
Marg.	261	228	380	131	1000

Effettuando il calcolo nel caso in esame si ottiene:

$$\chi^2 = 737.4$$

L'indice considerato può creare dei problemi perché, come si vede subito, dipende dall'unità di misura e risulta proporzionale alla numerosità dei dati. E', pertanto, difficilmente interpretabile. Per ottenere un indice più adeguato si può, allora, dividere il precedente per la numerosità dei dati.

Nel nostro caso (1000) si ottiene:

$$\chi^2 = 0.737$$

E' anche facile verificare che tale indice assume come possibile massimo valore il minimo tra il numero di modalità di riga e il numero di modalità di colonna -1. E', pertanto, possibile ottenere un indice relativo, utilizzando il precedente diviso per il suo valore massimo assumibile, ottenendo un indice compreso tra 0 e 1, interpretabile come proporzione di "connessione" tra i due caratteri considerati.

Nel caso in esame si ottiene per tale indice il valore:

$$\chi^2 = 0.25.$$

Osserviamo che la più adeguata rappresentazione grafica di una distribuzione congiunta si ottiene attraverso i diagrammi a barre multipli che affiancano diversi diagrammi a barre, uno per ogni distribuzione condizionata di riga o di colonna.

Lo spazio a disposizione non consente di approfondire ulteriormente l'argomento della connessione statistica; passiamo, invece, a considerare le analisi bivariate per caratteri quantitativi.

Le distibuzioni congiunte per caratteri quantitativi possono essere fornite in diversi modi a seconda che i caratteri siano discreti o continui e, nel caso di caratteri discreti, possiedano un numero abbastanza piccolo di valori assumibili oppure no.

Se siamo nel caso meno complesso (pochi valori discreti), possiamo procedere in completa analogia con le tabelle a doppia entrata come nel caso di caratteri qualitativi. Se dobbiamo, per esempio, fornire la distribuzione congiunta del numero di componenti della famiglia materna e paterna dei nostri alunni, basterà elencare sul margine di colonna le possibilità per uno dei due caratteri e sul margine di riga quelle per l'altro e fornire nelle caselle della tabella le diverse frequenze. Nel caso di caratteri discreti con un numero elevato di valori possibili (si pensi a una conta di cellule) o caratteri continui, ogni eventuale tabella a doppia entrata, dovrà essere basata sulle classi per dati raggruppati. Per avere esempi di tali tabelle si può far riferimento a dati ISTAT per caratteri quantitativi come età, reddito, alunni iscritti a diversi tipi di scuole ecc., pubblicati nel Compendio Statistico.

Le corrispondenti rappresentazioni grafiche possono essere analoghe a quelle citate per i caratteri qualitativi (diagrammi a barre multipli).

Per i caratteri continui sulle cui misure si intenda lavorare con buona accuratezza (si pensi a esperimenti di fisica sulla caduta dei gravi o altro), non è opportuno procedere a raggruppare le misure e utilizzare tabelle doppie.

Le analisi statistiche più appropriate per tale tipo di dati, in cui generalmente si cerca di evidenziare possibili relazioni (statistiche) tra le misure, dovranno, pertanto, essere basate sulle misure effettive, ottenute con la maggior accuratezza possibile. Una prima analisi può partire dalla più semplice rappresentazione grafica dei dati.

Vogliamo farci un'idea circa le età degli sposi in un certo numero di matrimoni (per esempio quelli celebrati lo scorso anno in Italia in un certo comune). Poniamo su un piano un punto per ogni matrimonio, in ascissa l'età dello sposo e in ordinata quella della sposa. Vogliamo confrontare il peso e l'altezza di individui. Possiamo utilizzare un'analoga rappresentazione grafica: il diagramma di dispersione (scatter diagram).

In esempi di questo genere (statistici) non si ravvisano, in genere, relazioni rigide di tipo funzionale per le quali in certe circostanze i punti devono stare su una linea, ma solo "tendenze" medie. Si veda, per esempio, il diagramma di dispersione, riportato in figura 3, dei redditi (ordinata) sul numero dei componenti (ascissa), relativi ai dati di tabella 1.

E' opportuno confrontare questo tipo di dati con quelli provenienti da esperimenti per la verifica di leggi fisiche che, invece, a meno di errori di misura, portano a relazioni esatte (si vedano gli articoli citati in bibliografia sulla regressione).

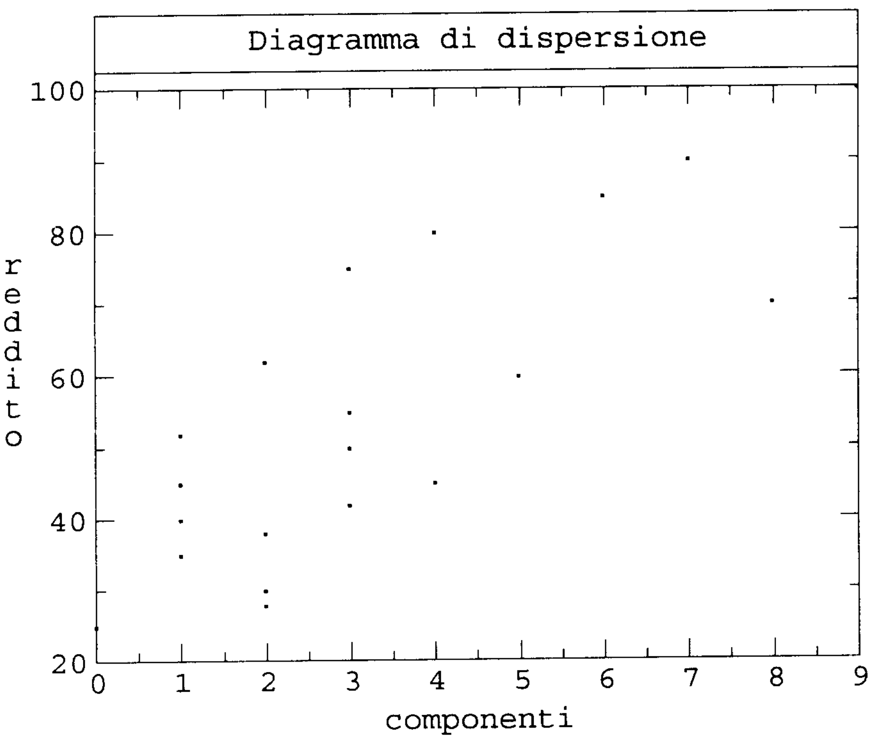
In questo modo è possibile introdurre discorsi generali sulle misure, sulle curve interpolanti, sulla correlazione e dipendenza statistica e via di seguito.

Nell'esempio di figura 3 non è evidentemente possibile stabilire una relazione funzionale esatta tra le due variabili, ma si osserva una tendenza media monotona crescente del reddito in funzione del numero di componenti e viceversa.

In questo caso si dice che le due variabili statistiche X e Y sono correlate positivamente e si misura il grado di correlazione utilizzando l'indice di Pearson (o coefficiente di correlazione lineare):

r(X,Y)=covarianza(X,Y)/scarto standard(X)scarto standard(Y).

Figura 3



Osserviamo che il segno di r è dato dal segno della covarianza mentre la divisione per il prodotto degli scarti permette di passare da un indice (la covarianza) di tipo quadratico (in caso di trasformazione lineare dei dati l'indice varia quadraticamente con l'unità di misura) difficilmente interpretabile ad un indice invariante per traslazione (come la covarianza) e, anche, per cambiamento dell'unità di misura. Inoltre, tale coefficiente varia tra -1 (se i dati sono allineati con coefficiente angolare negativo) e +1 (se sono su una retta con coefficiente angolare positivo). Pertanto, quanto più il valore assoluto di r è vicino a 1, tanto più i punti osservati sono concentrati attorno ad una retta (da qui l'attributo di lineare).

Per i dati di figura 3 risulta $r=0.72$, che è abbastanza elevato, anche se lontano da 1.

Il confronto tra dati provenienti da esperimenti di tipo fisico e dati di altro genere, demografico, biologico, economico, permette di evidenziare gli aspetti più peculiari del mondo investigato generalmente dagli statistici.

La difficoltà delle analisi statistiche, su dati non fisici, proviene da quella che è la diversità essenziale delle relazioni che occorre mettere in luce in generale, in confronto a quelle dei fisici. Questi, infatti, hanno sempre a che fare in pratica con relazioni di dipendenza funzionale, perché, anche quei casi in cui l'interpretazione teorica deve ricorrere a schemi probabilistici, le misure effettive (macroscopiche) derivano da masse innumerevoli e conducono a relazioni funzionali, attraverso le leggi limite del Calcolo delle Probabilità (leggi dei grandi numeri, teorema centrale), mentre, in generale, la popolazione di riferimento dello statistico, a volerla suddividere secondo tutti i caratteri che la differenziano, verrebbe ripartita in classi sempre più ristrette fino a ridursi ai singoli individui.

Il fisico, qualunque teoria o modello proponga, sa sempre che dovrà risultare che i fatti sperimentali futuri vanno come l'esperimento ha dimostrato. In tutti gli altri campi di applicazione della statistica non esistono fatti osservati che si possano ripetere identici, né che abbiano, quand'anche fossero identici, necessariamente identico svolgimento.

Da questa considerazione nasce naturalmente l'esigenza di far riferimento, per la descrizione di tali tipi di fenomeni o popolazioni, a schemi matematici più generali (di tipo probabilistico) cui gli schemi e i modelli legati a fenomeni fisici possono ricondursi come casi limite.

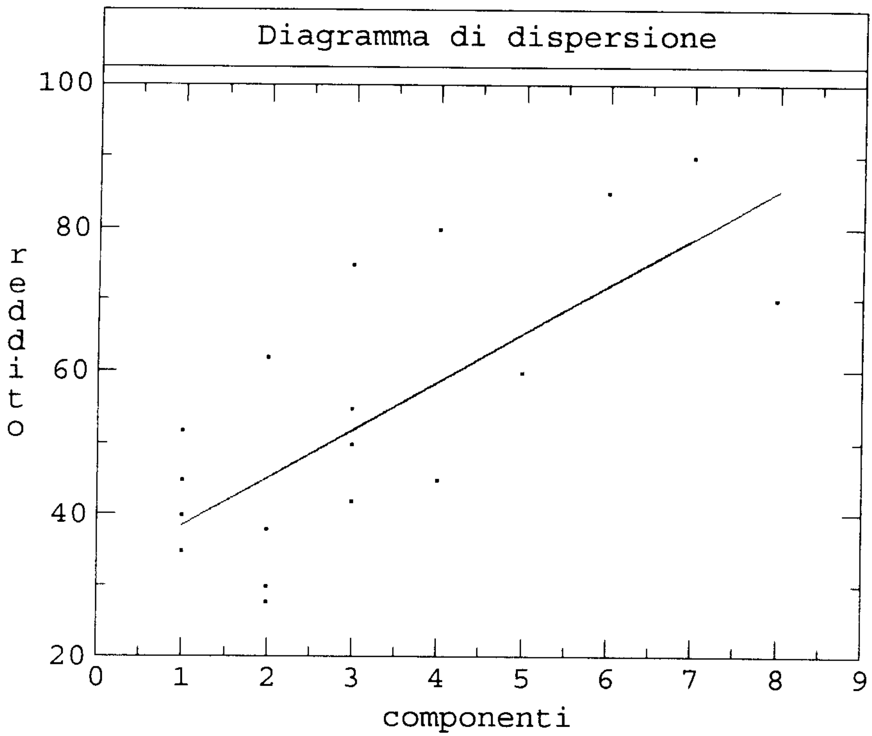
Nell'ambito dell'analisi di tali problemi si inserisce il capitolo molto importante della regressione che fornisce spunti interessanti per lavoro interdisciplinare e per l'utilizzo stimolante di nozioni e tecniche geometriche e analitiche. Lo spazio non consente di approfondire la trattazione della regressione che, però, può essere studiata a partire dai tre articoli sul tema pubblicati su INDUZIONI e citati in bibliografia.

Nella figura 4 si riporta il grafico della retta di regressione, che, ricordiamo, è solo quella ottenuta dall'interpolazione dei dati con una retta i cui coefficienti sono determinati con il metodo dei minimi quadrati, per i dati di figura 3.

E' importante sottolineare che l'aver individuato una funzione che, con buona approssimazione, permette di prevedere il valore medio del reddito in funzione del numero dei componenti non autorizza alcuna interpretazione di tipo causale, sia pure di tipo statistico, tra le due variabili. Sembra, semmai, più ragionevole supporre che possa essere il livello di reddito a determinare in media il numero di componenti e non il viceversa.

Per approfondire i concetti relativi alla dipendenza causale e dipendenza stocastica (e statistica) si può far riferimento al volume di Ottaviani ed altri citato in bibliografia.

Figura 4



4. Inferenza statistica: problemi di stima per modelli semplici.

La statistica inferenziale consiste nella modellizzazione del processo di produzione dei dati, più o meno parametrica, e nell'identificazione del relativo modello attraverso la stima dei coefficienti incogniti (parametri), che compaiono nelle relazioni generali, mediante l'ottimizzazione di opportuni indicatori che misurano l'adeguatezza del modello a rappresentare i dati effettivamente osservati.

Se il problema si risolve nella valutazione dei parametri del modello stiamo risolvendo un problema di stima, se è prevista la possibilità di "cambiare" modello, stiamo risolvendo un problema di verifica di ipotesi.

Si possono proporre diversi metodi matematici per risolvere questi problemi, che possono essere studiati e "valutati" sulla base delle proprietà generali dei risultati che producono.

Non c'è discussione nella fase "diretta" dell'inferenza, che consiste nel lavoro di tipo modellistico e obbedisce ad uno schema logico-deduttivo, mentre nell'approccio alla soluzione del problema inverso di stima o di verifica delle ipotesi è possibile, anche se non equivalente, procedere secondo diverse impostazioni.

L'impostazione più antica si basa su modelli di osservazione che producono dati scambiabili, ovvero su misure o osservazioni che si possa supporre avvenute sempre nelle stesse situazioni sperimentali o osservazionali e indipendentemente una dall'altra. Si dicono scambiabili perché, nella situazione considerata, l'ordine in cui si presentano le osservazioni non contiene informazione rilevante per il problema in studio. In generale, in questa impostazione, i diversi metodi di soluzione del problema di stima o verifica vengono valutati attraverso le proprietà probabilistiche che possiedono quando si pensi di ripetere la procedura di osservazione un numero rilevante di volte sempre nelle stesse situazioni (schema del campionamento ripetuto).

Una seconda impostazione (attraverso la teoria della verosimiglianza) basa le sue conclusioni sui dati osservati massimizzandone la probabilità calcolata in base al modello utilizzato e fornendo così la valutazione dei parametri incogniti. Anche in questo caso si studiano in generale le proprietà dei metodi e dei modelli utilizzati attraverso lo stesso schema del campionamento ripetuto.

L'impostazione bayesiana, invece, formalizza il problema induttivo mediante modelli che esprimono direttamente l'incertezza sui parametri in forma di valutazioni probabilistiche e procede all'aggiornamento delle valutazioni, utilizzando la formula di Bayes, via via che nuove osservazioni sul fenomeno di interesse diventano disponibili.

E' importante sottolineare che il problema dell'inferenza nasce, in generale, dall'impossibilità di poter effettuare direttamente delle osservazioni su una quantità che si considera importante per la soluzione di un certo problema, per motivi tecnici, per costi troppo elevati o tempi di rilevazione troppo lunghi. Così, non è possibile misurare direttamente, con mezzi semplici, l'accelerazione di gravità, allora si utilizza un modello di produzione di dati osservabili: l'equazione che esprime lo spazio in funzione del tempo per la caduta dei gravi, o il periodo di oscillazione nelle piccole oscillazioni di un pendolo in funzione della lunghezza del filo, o altro, in cui il parametro "g" (accelerazione di gravità) compare come coefficiente incognito. Sulla base dei dati di laboratorio, rilevati sotto ben fissate condizioni sperimentali e con errori di misura casuali (non sistematici), è possibile determinare la migliore stima del parametro incognito g, secondo qualche fissato criterio di ottimizzazione, utilizzando, per esempio, l'analisi della regressione, come mostrato negli articoli in proposito, citati in bibliografia, in cui sono riportati i dettagli tecnici.

In questo caso le variabili statistiche osservabili sono variabili legate funzionalmente al parametro e la loro conoscenza ci permette di "stimare" g.

In altre situazioni l' impossibilità di osservare direttamente la quantità di interesse può derivare da questioni pratiche o temporali. Per esempio, se si vogliono fare previsioni sulla vittoria al ballottaggio di un certo candidato sindaco, solo a posteriori, quando non è più di interesse, è possibile osservare la proporzione di cittadini che lo ha effettivamente votato (parametro di interesse), a priori è solo possibile osservare alcuni fatti legati alle intenzioni di voto dei cittadini, per esempio la proporzione di cittadini che, intervistata, dichiara di voler votare quel candidato. Non è, però, possibile intervistare tutti i votanti, ma solo un sottoinsieme, che si cerca di scegliere in modo più possibile rappresentativo, ovvero con caratteristiche generali (età, sesso, situazione lavorativa ecc.) più possibile simili a quelle dell'insieme totale dei votanti, in modo da non introdurre distorsioni sistematiche. Dai risultati dell'indagine parziale (o a campione) si cerca poi di "stimare" la vera percentuale di votanti favorevoli al candidato.

Ogni altra situazione generale in cui occorre risolvere problemi di stima è più o meno schematicamente riconducibile alle due situazioni considerate:

- popolazione infinita e campionamento casuale dalla popolazione (potenziali infinite prove sperimentali di caduta dei gravi di cui se ne osservano un certo numero n) ed esistenza di un modello matematico che lega il parametro incognito ai dati osservabili, utilizzo quindi di opportuni metodi di stima per la determinazione del parametro;
- popolazione finita (eventualmente approssimabile per semplicità con una infinita) e campionamento casuale dalla popolazione, osservazione diretta

della quantità di interesse sul campione e utilizzo di metodi inferenziali per l'estensione del risultato osservato sul campione all'intera popolazione.

Da quanto detto è evidente come sia importante premettere, allo studio dei problemi di stima, alcune nozioni sui problemi di campionamento e sulle relative tecniche. Non possiamo affrontare l'argomento in questa sede e rinviamo senz'altro all'ampio paragrafo in proposito in Ottaviani ed altri.

Cercheremo ora di introdurre i concetti fondamentali legati ai problemi di stima di parametri e mostrare alcune importanti differenze metodologiche legate alle diverse impostazioni, seguendo un esempio di applicazione.

Consideriamo il caso in cui si voglia valutare la proporzione di individui di una certa popolazione che possiede un determinato attributo: può essere la proporzione delle lavoratrici nell'industria che possiedono una laurea, che sono sposate, che hanno almeno un figlio ecc..

Non è possibile, se non al censimento avere le informazioni su tutta la popolazione di interesse, si procede pertanto a campione.

Determinato un sottoinsieme della popolazione rappresentativo, scelto seguendo uno degli schemi di campionamento che fornisce dati osservabili scambiabili, tale sottoinsieme risulterà in generale abbastanza piccolo rispetto alla popolazione di provenienza che può, al confronto, essere considerata infinita, semplificando il modello da utilizzare. Codifichiamo con 1 la risposta affermativa alla domanda sul possesso dell'attributo di interesse e con 0 la risposta negativa. La sequenza di risultati ottenuti è matematicamente modellabile mediante una variabile aleatoria binomiale H con probabilità di successo p incognita. L'insieme dei dati osservati è la realizzazione di una sequenza di n (se n è la numerosità del campione) prove bernoulliane. Sappiamo, allora, esprimere, mediante la formula della distribuzione binomiale, la probabilità di ottenere un certo numero H (variabile aleatoria) di risposte affermative, in funzione di p (parametro incognito da stimare) per ogni tipo di rilevazione effettuata nelle condizioni sopra descritte. Per ogni campione effettivamente osservato, H assume un ben preciso valore h. Procediamo allora a valutare p secondo le diverse impostazioni.

La regola più antica di valutazione di p consiste nell'utilizzare la stima statistica di p, che è una probabilità, fornita dalla frequenza relativa di successo, per cui si pone semplicemente $p=h/n$, che sembra molto ragionevole.

Questo metodo di stima, così semplice, si chiama "metodo dei momenti" e consiste semplicemente nel determinare il parametro incognito mediante l'uguaglianza dei momenti teorici, espressi in funzione del parametro incognito, ai momenti statistici, calcolati sul campione osservato. Nel nostro caso il risultato si ottiene uguagliando la media dei successi np, al valore empirico osservato h.

Lo schema generale del campionamento ripetuto studia poi le proprietà della regola considerata al variare del campione osservato. Questo implica la necessità di studiare le proprietà probabilistiche della variabile aleatoria o "stimatore" $P=H/n$, al variare del campione, tenendo fissa la numerosità n.

E' facile verificare che tale variabile aleatoria P ha media p e varianza inversamente proporzionale ad n. Pertanto si dice che lo stimatore (ovvero la regola di stima, o variabile aleatoria utilizzata per stimare) è corretto, perché in media fornisce il valore voluto, e consistente, perché al crescere del campione tende in probabilità al parametro che si vuole stimare, dato che la sua varianza tende a zero.

Impostando il problema con la teoria della verosimiglianza, occorre definire tale funzione.

Consideriamo il modello probabilistico che esprime la distribuzione dei possibili risultati su n prove in funzione del parametro incognito p. Una volta osservato il campione, sostituito h nella formula generale, si ottiene una funzione del solo parametro p, che al variare di questo, esprime la probabilità, in funzione di p, del risultato effettivamente osservato, anche detta "verosimiglianza" di p. E' abbastanza ragionevole, allora, scegliere per p il valore più verosimile, ovvero quello che massimizza la sua funzione di verosimiglianza. Massimizzando la probabilità binomiale su n prove, con h fissato, in funzione di p, si ottiene ancora lo stimatore $p=h/n$, che continua, pertanto, a godere delle proprietà generali già viste.

Occupiamoci, infine, dell'impostazione bayesiana.

L'impostazione bayesiana consiste semplicemente nella formalizzazione probabilistica del problema di incertezza legato alla non conoscenza del parametro di interesse. In tale impostazione ogni valore non noto, quindi anche il paramentro di interesse, viene formalizzato attraverso una variabile aleatoria, dotata di una certa distribuzione "a priori", che sintetizza tutta l'informazione disponibile sul fenomeno in studio prima dell'effettuazione delle osservazioni (rilevazione dei dati): ordine di grandezza del parametro incognito, incertezza su tale ordine di grandezza e così via, e da una distribuzione "a posteriori", ottenuta dalla precedente mediante aggiornamento con la formula di Bayes, dopo la rilevazione e l'osservazione dei dati. Ogni decisione in merito alla stima del parametro incognito viene assunta utilizzando esclusivamente tale distribuzione aggiornata. Se è necessario arrivare ad una valutazione numerica è possibile, per esempio, considerare lo stimatore (bayesiano) dato dal valor medio della distribuzione a posteriori o, anche, se il problema specifico lo richiede, da un altro parametro di posizione opportunamente scelto, per esempio la moda.

Nel caso considerato, supponiamo di sapere che un precedente campione, su cui non abbiamo molte informazioni, abbia fornito una proporzione di successi a. E' possibile utilizzare questa informazione e sintetizzarla in una distribuzione a priori di tipo beta sull'intervallo (0,1), con massimo in a. A seconda di quanto riteniamo affidabile l'informazione disponibile prenderemo una beta più o meno concentrata attorno al suo massimo. Supponiamo di aver scelto una beta con parametri l ed m $((l-1)/(l+m-2)=a)$.

Se osserviamo h successi su n prove, possiamo aggiornare la distribuzione mediante la formula di Bayes ottenendo una nuova distribuzione beta con parametri $l+h$ e $m+n-h$, che ha il suo massimo in $(l+h-1)/(l+m+n-2)$. Le rispettive medie, della distribuzione a priori e a posteriori risultano, invece: $l/(m+l)$ e $(l+h)/(l+m+n)$. In definitiva, formalmente, la formalizzazione della distribuzione a priori è equivalente a considerare già effettuate $m+l$ prove con l successi. Questa semplice osservazione permette l'utilizzo dello schema bayesiano anche per combinare risultati provenienti da esperimenti o osservazioni dello stesso tipo, ma di fonte diversa.

Il ragionamento può essere applicato alle situazioni più svariate, ma per maggiori dettagli siamo costretti a rinviare a Ottaviani ed altri e al più recente articolo in proposito per l'International Statistical Institute.

5. Considerazioni didattiche conclusive.

L'aspetto primo e più concreto della statistica è quello di una descrizione di fatti mediante dati quantitativi opportunamente raccolti, e tale aspetto presenta naturalmente un interesse tanto più grande quanto maggiore è l'interesse che destano i fatti investigati. Così la proverbiale aridità dei dati statistici viene prevenuta dall'interesse già apparso del problema cui risponde la loro analisi.

Un possibile itinerario per l'introduzione dei concetti di base può partire da una rilevazione semplice effettuata dagli stessi alunni. Prendendo spunto dall'opportunità di rappresentare graficamente certi dati è anche possibile "approfittare" per introdurre altri concetti di tipo geometrico o analitico che permettono di approfondire meglio gli aspetti del fenomeno attraverso lo studio, per esempio, degli andamenti di curve interpolanti.

L'importante è saper "approfittare" di tutti gli spunti provenienti dalle altre "materie" di studio (fisica, biologia, chimica, economia, musica, arte ecc.) per introdurre e subito utilizzare gli strumenti matematici più idonei nel campo considerato, senza eccedere nel tecnicismo non funzionale, ma senza rinunciare mai al rigore utilizzando "solo" l'intuizione.

La migliore Matematica è un "cocktail" di intuizione e rigore: entrambi sono funzionali per affrontare in modo proficuo problemi significativi.

Per entrare nel campo più specifico della statistica e probabilità è fondamentale l'utilizzo della logica deduttiva e induttiva ben armonizzate.

Il passaggio dall'osservazione particolare (risultato di osservazioni o esperimenti) ad una regola generale (schema induttivo) che permetta di descrivere, eventualmente mediante un modello probabilistico, e magari approssimato, risultati attesi in futuro nell'ambito di un certo fenomeno è altrettanto importante della capacità di verificare le proprietà formali di un modello proposto (deduttivamente).

A questo proposito possiamo concludere con le parole di Federigo Enriques, che tante energie ha dedicato a problemi di didattica.

"Il significato scientifico generale delle teorie matematiche ci riporta alla considerazione delle forme immanenti nella natura o delle intuizioni dello spirito che esprimono una realtà universale umana.

Respingere le idee che hanno rapporto con l'occhio, o con l'orecchio, o col tatto, vedendo nelle sensazioni non la porta della conoscenza, ma soltanto l'occasione di errori peccaminosi, questo strano pudore dei logici matematici ci richiama alla memoria Plotino e quegli asceti cristiani del Medio Evo che si vergognavano di avere un corpo." (F. Enriques, da Le Matematiche nella storia e nella cultura, Lez. pubbl. a cura di A. Frajese, ed. Zanichelli, Bologna, 1938, pag. 145).

Per ogni approfondimento e chiarimento tecnico si rinvia ai riferimenti bibliografici e alla bibliografia ivi contenuta.

Bibliografia

1) Rossi C., Serio G., "La metodologia statistica nelle applicazioni biomediche", Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990;

2) Ciarrapico L., Rossi C., "I programmi di matematica per il triennio della scuola media superiore nel progetto Brocca: le proposte per la probabilita' e la statistica", INDUZIONI, 1992, 45-51;

3) Rossi C., "Un "percorso" didattico per l'introduzione delle prime nozioni di probabilita' e statistica", INDUZIONI, 1992, 99-108;

4) Rossi C, Scozzafava R., "Sull'uso distorto dei dati statistici nei Media", INDUZIONI, 1993, 45-53;

5) Rossi C., "La Probabilità e la Statistica alla base di un insegnamento interdisciplinare", EPSILON, 1993, 14-16;

6) Rossi C., "La Matematica: questa sconosciuta", ARCHIMEDE, 1993, 91-94;

7) Rossi C., "Problemi di classificazione e diagnosi", INDUZIONI, 1993, 95-107;

8) Rossi C., Lombardo E., Zuliani A., "L'insegnamento della probabilità e della statistica nella scuola: spunti per una riflessione interdisciplinare", Scuola e città, 12, 525-531, 1993;

9) Rossi C., "Ragionamento deduttivo - ragionamento induttivo: problemi e interazioni nell'insegnamento della probabilità e della statistica", Convegno UMI-CIIM: Probabilità e Statistica, a cura di Adele Repola Boatto, UMI Bologna, 1994, 27-42;

10) Lombardo E.,Rossi C., Zuliani A., "L'insegnamento di Probabilità e Statistica nella scuola: rilanciamo il dibattito", Convegno UMI-CIIM: Probabilità e Statistica, a cura di Adele Repola Boatto, UMI Bologna, 1994, 45-55;

11) Rossi C., "La formazione statistica nella società moderna", Atti della Seconda Conferenza Nazionale di Statistica, ISTAT, Rome, 389-393, 1995;

12) Rossi C., "Sul significato della probabilità e le sue valutazioni: errori ed ambiguità nei testi scolatici", INDUZIONI, 1995, 145-154;

13) Ottaviani M.G., Rossi C., Scalia Tomba G., "Lezioni sulla statistica, sulla probabilità e sui problemi di stima con spunti didattici", in "L'insegnamento di Probabilità e Statistica nella scuola liceale", MPI Quaderni Formazione Docenti, n.8, 1995;

14) Ciarrapico L. e Rossi C., "La Statistica nel Tema di Maturità Scientifica", INDUZIONI, 1995, 157-169;

15) Rossi C., "La formazione statistica nella scuola superiore liceale", INDUZIONI, 1996, 241-252;

16) Rossi C. "Parliamo di regressione (lineare) a scuola. Vademecum per superare indenni i principali errori proposti dai testi scolastici", INDUZIONI, 1996, 55-81;

17) Ciarrapico L., Leli S., Rossi C., "I temi di Probabilità nel compito di maturità 1996 (Piano Nazionale Informatica), INDUZIONI, 1996, 145-159;

18) Rossi C., "Bayesian Statistics in School: basic Elements through Examples", in Proceedings of the 51st Session of the International Statistical Institute, Invited Papers, 1997, in press;

19) Rossi C. "Parliamo di regressione (lineare) a scuola. Approfondimenti e analisi dell'adattamento, INDUZIONI, 1997, in press;

20) Rossi C. "Parliamo di regressione (lineare) a scuola. Complementi e Aspetti Avanzati, INDUZIONI, 1997, in press;

21) Autori Vari "Insegnare la Statistica", La Nuova Italia, 1997, in press;

Pubblicazioni ISTAT consigliate: Compendio Statistico, Le Regioni in cifre, Conoscere l'Italia, Note Rapide.

I NUOVI TEMI E LA PROGETTAZIONE DEI CURRICOLI

Gabriele Anzellotti
Dipartimento di Matematica - Università di Trento

Indice

1 Introduzione

Le questioni che intendo considerare sono:

- Come si collegano i temi nuovi dei programmi con i temi tradizionali? Come interagiscono con gli obiettivi dell'apprendimento, sia per quanto riguarda l'acquisizione di specifici contenuti e metodi disciplinari, sia per quanto riguarda lo sviluppo di generali capacità cognitive e metacognitive?

- Come possiamo tenere conto dei nuovi temi nella progettazione di un curricolo per la scuola secondaria superiore? In base a quali obiettivi e con quali criteri?

Tali questioni sono assai complesse e credo non abbiano risposte esaustive. Per essere trattate in modo adeguato richiederebbero molto tempo e competenze assai maggiori delle mie. Cercherò comunque di fare in modo che si possa insieme fare qualche discorso utile.

Cominceremo con una riflessione sugli obiettivi dell'insegnamento della matematica nella scuola e sulla relazione che c'è fra tali obiettivi e l'idea stessa di matematica.
Successivamente rifletteremo su alcuni aspetti metodologici dell'insegnamento, e vedremo che c'è una stretta relazione fra le innovazioni negli obiettivi e le indicazioni metodologiche delle proposte Brocca, e la presenza dei temi nuovi.
Poi cercheremo di individuare dei criteri utili per la progettazione dei curricoli, senza però scendere nella specifica indicazione di ricette didattiche.
Infine considereremo alcuni esempi di situazioni didattiche che possono aiutare a realizzare le indicazioni che sono state viste in precedenza, nell'ambito di un curricolo per il primo anno della scuola secondaria superiore.

2 Gli obiettivi dell'educazione matematica e i nuovi temi nei programmi

Tradizionalmente l'obiettivo dell'educazione matematica *elementare* è stato l'apprendimento della capacità di far di conto, e cioè quello di fornire delle tecniche elementari per la rappresentazione dei numeri, per la misura delle grandezze e per il calcolo, utili in diversi contesti pratici della vita quotidiana.
Gli obiettivi tradizionali dell'educazione matematica nella scuola *superiore* italiana sono invece essenzialmente legati all'acquisizione di aspetti *formali* e di capacità *logico-deduttive*, e sono stati a lungo fortemente legati all'insegnamento della *geometria euclidea* e ad una mentalità generale di tipo *algebrico*. È abbastanza chiaro che tale tradizionale concezione è associata ad una assunzione implicita, e cioè che l'acquisizione delle capacità formali in

ambito geometrico e algebrico generi automaticamente una capacità di *ragionare* e di risolvere problemi in altri contesti. Che questa assunzione sia vera è però discutibile.
In ogni modo, l'insegnamento tradizionale della matematica, non solo in Italia, presenta diversi problemi, di cui elenco quelli che a mio parere sono i più gravi:

- una elevata percentuale di studenti non raggiunge i livelli minimi, pur presentando capacità cognitive generali apparentemente adeguate, e sviluppa tipicamente una avversione profonda per la disciplina;
- i soggetti che hanno concluso i percorsi educativi dimenticano molto rapidamente ciò che hanno imparato;
- anche le cose che si ricordano sono solo parzialmente disponibili per essere utilizzate per risolvere problemi, soprattutto in contesti che non siano del tutto standard.

Al fine di migliorare questa situzione ed anche per tenere conto dello sviluppo delle conoscenze e delle richieste, i programmi della scuola media (1979), e ancor più quelli della scuola elementare (1985) e la proposta della commissione Brocca [Bro] per la scuola superiore, aggiungono agli obiettivi tradizionali, anche molti altri obiettivi e finalità. Inoltre sono indicati temi nuovi e sono date significative indicazioni metodologiche. Fra i nuovi obiettivi e finalità desidero sottolineare i seguenti:

- saper utilizzare la matematica come strumento per descrivere e per *pensare* il mondo;
- favorire lo sviluppo di generali capacità *euristiche* e *strategiche* per affrontare i problemi
- sviluppare capacità *induttive*, per passare da una serie di esempi alla formulazione di congetture.

Fra i nuovi argomenti, troviamo la *probabilità, la statistica, la logica, l'informatica, il calcolo automatico.*

Per quanto riguarda le indicazioni metodologiche, credo sia sufficiente riportare la seguente citazione dalla proposta Brocca:

> Non ci si può illudere di partire dalla disciplina già confezionata... È invece importante partire da situazioni didattiche che favoriscano l'insorgere di problemi matematizzabili, la pratica di procedimenti euristici per risolverli, la genesi dei concetti e delle teorie, l'approccio a sistemi assiomatici e formali. Le fonti naturali di queste situazioni sono il mondo reale, la stessa matematica e tutte le altre scienze.

A questo punto si pongono naturalmente diversi ordini di domande.

a. E' proprio necessaria questa aggiunta di obiettivi e di argomenti? Non sarebbe forse meglio accontentarsi di fare *bene* gli argomenti tradizionali?

b. Occorre, alle solite cose fatte nel solito modo, aggiungerne molte altre, e dedicare quindi molto più tempo all'insegnamento della matematica? Oppure, cosa dobbiamo *togliere* degli argomenti tradizionali?

c. L'indicazione metodologica è davvero affidabile, o rischia di produrre risultati anche inferiori a quelli attuali?

In questa sezione darò una mia risposta alla prima domanda. Alle domande b. e c. cercherò di dare qualche risposta in seguito.

A ben vedere gli obiettivi che abbiamo chiamato 'nuovi' sono in realtà assai vecchi ed erano presenti da gran tempo all'attenzione almeno degli insegnanti più sensibili. Come abbiamo detto essi venivano in passato considerati impliciti: imparando la geometria di Euclide e le dimostrazioni degli "Elementi", nonché il calcolo algebrico e le coniche, si riteneva che, *come conseguenza naturale*, si imparasse anche a 'ragionare'. A me pare che i molti obiettivi che sono oggi esplicitati nei programmi siano in qualche modo un tentativo di descrivere in modo più articolato e consapevole quel saper ragionare che si è sempre ritenuto importante acquisire. E' necessario che gli insegnanti abbiano in mente, nel corso del loro lavoro quotidiano, *la molteplicità di competenze e di conoscenze, cognitive e metacognitive, che concorrono a formare l'abilità complessiva dell'allievo*, e che possono essere presenti, e devono essere sviluppate, in modo differenziato.

Per quanto riguarda la seconda parte della questione, è poi opportuno riflettere sul fatto che il possesso del sistema formale della matematica e delle competenze logico-deduttive, per molte persone, sembra essere non una premessa, ma una *conseguenza*, della capacità di usare la matematica per descrivere la realtà e per risolvere problemi. Pertanto, anche se si fosse interessati soltanto al raggiungimento di capacità logico-deduttive, comunque non sarebbe opportuno organizzare l'insegnamento della matematica in modo soprattutto formale, come è invece uso assai diffuso nella scuola superiore in Italia.
Naturalmente queste affermazioni non sono da prendere per buone acriticamente e richiedono come si è detto una riflessione. In ogni modo mi pare però che ci siano ottimi motivi per perseguire consapevolmente e attentamente tutti gli obiettivi e le finalità indicati nei nuovi programmi.
E i nuovi *temi*? Non costituiscono forse un aggravio ingiustificato della disciplina? non si potrebbe organizzare l'insegnamento già dei temi tradizionali in modo da tener conto delle nuove finalità, e lasciare i nuovi temi agli anni superiori, per gli studenti veramente interessati di alcuni indirizzi specializzati, o all'università, dove potrebbero essere svolti assai rapidamente utilizzando la maturità raggiunta dagli studenti con un buon curricolo tradizionale?
Questa obiezione potrebbe avere un senso. Infatti a me pare che siano soprattutto cruciali gli obiettivi nuovi e le indicazioni metodologiche, più che gli argomenti specifici che vengono trattati. Tuttavia mi pare anche innegabile che i nuovi temi (probabilità e statistica, calcolo numerico, informatica) siano tutti collegati in modo particolare proprio allo sviluppo della capacità di usare la matematica come strumento per descrivere fenomeni e risolvere problemi concreti, una capacità *modellistica* e *linguistico-comunicativa* della matematica che mi pare si possa considerare come grande *nuovo tema* trasversale dei nuovi programmi.

Pertanto, la presenza dei nuovi temi nella proposta Brocca costituisce un unico corpo con le finalità e con le indicazioni metodologiche.

3 Considerazioni sul modo di vedere la matematica.

Come ho detto, le considerazioni che precedono relativamente agli obiettivi ed ai temi importanti dell'educazione matematica sono legate ad un certo modo di vedere e di concepire la matematica come scienza e come corpo di saperi, e credo sia opportuno dedicare un po' di spazio a questo. Quello che segue non ha alcuna pretesa di essere una posizione epistemologica, ma è semplicemente un tentativo abbastanza ingenuo di descrivere uno stato d'animo, che però ritengo sia abbastanza diffuso fra i matematici e quindi abbastanza significativo.

La matematica è costituita da *oggetti*, da un *linguaggio* che descrive tali oggetti e le loro proprietà e che diventa esso stesso oggetto matematico, e da una *rete di catene deduttive* che collegano insiemi di enunciati ad altri insiemi di enunciati.

Spesso è utile considerare un certo insieme di enunciati come insieme di assiomi e mostrare che un'ampia classe di proposizioni si deducono da quegli assiomi, costruendo così una teoria assiomatica.
Ma la scelta degli assiomi è un fatto arbitrario.
Personalmente vedo la matematica come una grande rete di oggetti collegati fra loro e che galleggia da qualche parte. Questo grande corpo può essere appoggiato da una parte o dall'altra se si vuole o se fa comodo, ma di per sé non ha un basso o un alto, una base e un vertice.
Ritengo inoltre che degli oggetti matematici e delle loro proprietà si debba avere una percezione come di oggetti *concreti* che si possono manipolare e osservare, e che le loro proprietà debbano essere percepite ("viste", "sentite"), per quanto possibile, come immediate ed evidenti.
Naturalmente, questa capacità di *vedere* gli oggetti matematici, ciascuno all'interno della sua rete di relazioni, va conquistata gradualmente, e una guida importante per arrivare ad essa è la costruzione di sistemi formali rigorosi. I due aspetti quindi si completano a vicenda.

Quali conseguenze allora per il nostro insegnamento?
La sistemazione assiomatica della matematica costituisce un sapere importante e utile, la cui conquista è senz'altro un obiettivo essenziale della formazione degli studenti. Il perseguimento di questo obiettivo comporta lo sviluppo di capacità di rappresentazione simbolica e di deduzione logica e in particolare la capacità di valutare la correttezza di una catena di deduzioni.
Tuttavia questo studio non è di per sé sufficiente e si deve accompagnare ad una ampia *esperienza degli oggetti matematici* e di diversi loro modelli intuitivi e quindi ad una conoscenza intuitiva delle loro proprietà e delle loro

relazioni reciproche, percepite come fatti evidenti ed interiorizzati, indipendentemente dalla scelta di alcuni di questi fatti come assiomi. Per arrivare a questa conoscenza sembra necessario operare e sperimentare a lungo con gli oggetti della matematica e con diversi oggetti reali di cui essi sono l'astrazione. Occorre abituarsi a procedere induttivamente dall'osservazione all'identificazione di proprietà di classi di oggetti, e quindi a *dare definizioni*. Inoltre è di grande utilità abituarsi a usare la matematica per costruire *modelli* di fenomeni naturali e sociali, cercando di trovare quali oggetti matematici sono le *parole*, i *termini*, migliori per *dire* quello che vogliamo pensare.

In questo modo la matematica diviene uno strumento per scoprire nuove conoscenze, e non viene percepita solamente come un edificio statico nel quale ci si preoccupa principalmente di definire oggetti astrusi e di dimostrare faticosamente risultati evidenti (ad esempio l'esistenza della radice di 2), a partire da assiomi misteriosi (ad esempio l'assioma dell'estremo superiore).

4 L'attività didattica

In questa sezione vedremo alcune conseguenze delle considerazioni che precedono sul modo di organizzare l'attività didattica e le lezioni di matematica. La didattica della matematica può essere organizzata in molti modi. Un modo tradizionale è certamente quello di presentare sistematicamente un argomento, partendo da qualche semplice esempio, introducendo alcune definizioni, poi derivando dei teoremi e infine affrontando esercizi appropriati. Questo modo di procedere è in genere attuato attraverso lezioni di tipo frontale, nelle quali è sempre il docente a esporre la disciplina. Questo sistema ha diversi pregi. In particolare consente una presentazione chiara e ordinata, in tempi ragionevolmente contenuti. L'insegnante ha la sensazione di avere svolto egregiamente il proprio lavoro. Inoltre, lo studente, anche se non capisce bene, ha la sensazione che le cose siano tutte al loro posto.
Tuttavia, il modo tradizionale ha anche svantaggi: la partecipazione dello studente alla costruzione della conoscenza non è incoraggiata. Lo studente tende a percepire la matematica come un edificio cristallizzato e dogmatico. Non si abitua a procedere induttivamente dagli esempi alle classi di oggetti che hanno proprietà interessanti e quindi alle definizioni. Non si abitua a partire dai problemi e dai fenomeni e a prendere decisioni su quali oggetti

sono appropriati a descriverli, quali tecniche sono utili a risolverli. Provando e sbagliando.

È quindi opportuno che accanto al modo tradizionale di fare lezione si aggiungano altri modi che favoriscano un coinvolgimento maggiore degli studenti nella costruzione della conoscenza. In particolare, interpretando le indicazioni metodologiche della proposta Brocca, che abbiamo citato in precedenza, l'insegnamento dovrebbe essere quanto più spesso possibile organizzato partendo da *situazioni* nelle quali gli studenti, ognuno singolarmente ed anche come gruppo sociale, siano coinvolti e siano investiti di un problema. Naturalmente, come vedremo meglio più avanti, una parte significativa dell'attività didattica deve comunque rimanere destinata allo sviluppo sistematico della conoscenza ed alla costruzione di abilità di calcolo.

La *situazione didattica* deve essere *significativa*, comprensibile e controllabile dagli studenti, in modo da mantenere alta la motivazione. Gli studenti devono interpretare e affrontare la situazione utilizzando le conoscenze che essi possiedono già, mettendo alla prova le loro conoscenze, i loro paradigmi interpretativi, le loro tecniche per la descrizione, la visualizzazione e la rappresentazione verbale e grafica dei fenomeni, rendendosi conto (ma senza ansia) dei limiti delle proprie conoscenze e tecniche e della *necessità* di nuove idee e nuovi strumenti. Opportune domande ed esercizi aiutano gli studenti a rendersi conto di ciò che sta accadendo e a comprendere i problemi che si pongono.

È bene che gli studenti siano incoraggiati a identificare oggetti matematici significativi e a *proporre definizioni* ed enunciati di proprietà. In questo processo gli studenti sono stimolati ad accorgersi di come sia importante utilizzare un linguaggio non ambiguo e completo, facendo attenzione alle confusioni che possono nascere dal linguaggio naturale, ed alle eventuali preconcezioni errate. È bene anche che gli studenti tentino da soli di ricavare alcune conseguenze delle definizioni e considerino definizioni equivalenti. Così essi diventano *padroni* degli oggetti che hanno costruito.

Certamente questo modo di organizzare l'apprendimento ha anche degli svantaggi. Uno di questi è il fatto che richiede molto tempo. Un altro problema è che vi sono studenti che si trovano a disagio: non vogliono porsi problemi, vogliono essere informati esattamente delle cose che devono sapere, delle regole da applicare e di tutti i tipi di esercizi che devono saper fare. Essi vivono con uno stato di ansia, che può essere anche grave, le situazioni didattiche nelle quali non si danno certezze immediate, in cui si chiede di pensare e di prendere decisioni. Questo tipo di risposta ad una didattica basata sulle situazioni problematiche e sul coinvolgimento dello studente va tenuto nella giusta considerazione. Ossia:

- non si deve prendere come motivo per abbandonare del tutto l'approccio problematico e costruttivista, tornando ad una tranquillizzante teoria preconfezionata e magari ad una dettatura di appunti e all'assegnazione di esercizi di ogni tipo possibile;
- non deve d'altra parte essere sottovalutato come sintomo di disagio.

Quindi occorre mantenere nei curricoli significativi periodi di ordinata sistemazione della conoscenza e di sviluppo di capacità di calcolo, e occorre portare gradualmente lo studente a sviluppare la capacità di sostenere anche *emotivamente* la situazione psicologica di chi cerca di capire una situazione nuova, di risolvere un problema, avanzando faticosamente nella costruzione della conoscenza. Questa capacità di sostenere emotivamente la situazione di incertezza che si ha nella *ricerca*, che manca spesso anche ai nostri laureati, può essere uno dei contributi importanti della nostra disciplina alla costruzione delle competenze metacognitive degli studenti.

5 Criteri per la progettazione dei curricoli

La nozione di curricolo è piuttosto complessa. In generale si può dire [Ber] che "investe i problemi dell'organizzazione delle conoscenze all'interno dei singoli gradi scolastici" e "attraversa vari piani dell'esperienza scolastica: dagli obiettivi cognitivi (teorie dell'apprendimento, strategie dell'istruzione), ai contenuti culturali (il sapere scolastico e la sua distribuzione disciplinare), alle metodologie dell'apprendimento (per singole materie; per pools e aree disciplinari; per formule interdisciplinari), alle tecniche di valutazione (formativa; sommativa, o altro)". Possiamo anche dire [Pon] che il nodo della discussione sul curricolo consiste nell'"interazione fra modalità dell'acquisizione delle conoscenze e contenuti-metodi della trasmissione culturale".
Noi useremo la parola *curricolo* per intendere una cosa più specifica e semplificata:

- la definizione del punto di partenza (approssimativo) e degli obiettivi di un percorso formativo (tipicamente un anno di scuola), per quanto riguarda la disciplina matematica e alcune capacità cognitive e metacognitive generali;

- la determinazione delle situazioni didattiche, dell'ordine degli argomenti, dei materiali di lavoro, delle diverse fasi di attività e dei processi di monitoraggio e di valutazione del processo di apprendimento.

Definizione degli obiettivi La definizione degli obiettivi di apprendimento è il punto di partenza di ogni attività educativa e anche di ogni progetto di curricolo. Spesso gli insegnanti non sono completamente consapevoli o comunque non esplicitano completamente gli obiettivi. Effettivamente non è semplice definirli, e definirli in modo *oggettivo*, *operativo* e *misurabile*! Per una discussione generale di questo problema si rimanda a [Lan]. Ai nostri fini è già significativo che l'insegnante di matematica individui (meglio se nell'ambito di una discussione collegiale, ma anche un lavoro individuale è comunque importante) gli obiettivi cognitivi specifici che ritiene debbano essere raggiunti mediante il percorso formativo. Un modo per cominciare questa individuazione può essere quello di preparare

- un insieme di prove scritte di verifica finale complessiva per tutto il percorso, costituite da domande a risposta multipla, a risposta aperta, esercizi e problemi;

- una griglia standard di osservazione e di valutazione di comportamenti e di produzioni orali conseguenti a stimoli opportuni.

Tali prove complessive devono definire e accertare le abilità e le conoscenze che si vuole rimangano presenti in modo permanente come risultato dell'apprendimento, dunque anche indipendentemente da una preparazione specifica recente, e non possono perciò insistere troppo sui dettagli. Se possibile, sarebbe opportuno che questi apprendimenti permanenti fossero collegati con quelli di altre discipline. In questo modo ci si sforza di definire gli obiettivi di apprendimento in termini di *comportamenti che ci si aspettano dagli allievi in determinate situazioni.* Sebbene io non creda che gli obiettivi siano

completamente definibili in questo modo, ritengo comunque che tale lavoro sia assai utile.
Si può poi continuare individuando un insieme di contenuti più dettagliati, e un insieme di comportamenti più specifici, che sono da sviluppare al fine di ottenere gli apprendimenti permanenti stabiliti precedentemente. A questo fine è opportuno avere prove scritte e griglie di valutazione per singoli argomenti, graduate per livelli di approfondimento.

Oltre agli obiettivi cognitivi specifici occorre determinare degli obiettivi cognitivi e metacognitivi generali. Ad esempio è ben nota la relazione reciproca fra le competenze linguistiche e comunicative e l'apprendimento della matematica (e di tutto il resto, peraltro). E così è ben nota l'importanza del monitoraggio e controllo dei processi cognitivi, delle capacità strategiche, di autovalutazione, e così via [Cor], [Zan]. Questi obiettivi costituiscono un complesso assai articolato. Per cominciare è opportuno concentrarsi su alcuni di essi, utilizzando le attività didattiche quotidiane per sviluppare negli studenti la consapevolezza dei processi cognitivi e per migliorare alcune competenze. In questo momento a me pare cruciale insistere, oltre che sulle competenze comunicative, sulla capacità di autoosservazione e autovalutazione (anche in relazione all'orientamento), e sulla capacità di assumersi la responsabilità dell'apprendimento.

Concludo questo punto sugli obiettivi con tre osservazioni.
Gli studenti devono conoscere e sostanzialmente condividere gli obiettivi, disciplinari e generali. Ad esempio, è bene che gli standard di valutazione finale siano portati a conoscenza degli studenti durante il percorso e discussi con loro. Questo è fondamentale se si vuole che lo studente impari ad autovalutarsi e assuma pienamente la responsabilità del proprio apprendimento, il che sembra essere una sicura premessa di buoni risultati.
Gli obiettivi devono essere ragionevoli per la media degli studenti. Dipendono dunque dal contesto e dalle condizioni di partenza. Nella progettazione di un curricolo l'insegnante deve fare delle assunzioni sul tipo di studenti che seguiranno il percorso. Normalmente l'esperienza dell'insegnante dovrebbe essere sufficiente a fare delle previsioni sufficientemente buone, tuttavia occorrerà comunque una verifica della situazione di fatto. Tale verifica potrebbe portare a dover modificare in parte gli obiettivi.
È inevitabile che gli obiettivi siano raggiunti in grado diverso e in tempi di-

versi da studenti diversi. Questo richiede un monitoraggio in itinere e la possibilità di avere attività di recupero, consolidamento e approfondimento. Non entro in questo difficile problema, che potrebbe portare (ma non è chiaro come) all'introduzione di descrizioni di situazioni individuali e alla possibile presenza, in una stessa classe, di studenti con conoscenze e abilità alquanto differenziate, che dovranno anche essere considerati in modi parzialmente differenziati.

Organizzazione del percorso I curricoli possono, e dovrebbero, essere progettati per percorsi anche lunghi, come un intero ciclo scolastico pluriennale. Come ho anticipato, qui vorrei però considerare curricoli per il percorso di un solo anno scolastico, diviso in due quadrimestri. Mi pare che uno schema possibile di organizzazione del percorso sia il seguente:

1. Modulo iniziale di ambientamento. Individuazione delle necessità di consolidamento e recupero, da attuare poi parallelamente alle altre attività.

2. Situazioni didattiche A, B,...

3. Esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento.

4. Sistemazione degli argomenti e autovalutazione.

5. Valutazione intermedia del raggiungimento degli obiettivi, disciplinari e generali, e individuazione delle necessità di consolidamento e recupero.

6. Situazioni didattiche C, D,...

7. Esplicitazione e condivisione di ulteriori obiettivi di apprendimento.

8. Sistemazione degli argomenti e autovalutazione.

9. Valutazione finale e individuazione delle necessità di consolidamento e recupero.

Ritengo che ogni insegnante debba avere un proprio schema, magari che cambia ogni anno. Non credo sia tanto importante *quale* schema si usa. È invece importante il fatto di *avere* uno schema, che si è formulato coerentemente ad un insieme di obiettivi e ad un modo di lavorare, e il fatto di riflettere alla fine su quello che è accaduto.

Ed ora alcuni commenti.
Per quanto riguarda il modulo iniziale di ambientamento, esso è soprattutto importante quando si forma un gruppo nuovo, in particolare all'inizio di un ciclo o quando cambia l'insegnante. Tuttavia mi pare si debba prevedere, magari ridotto, in ogni caso. La funzione di questo modulo è quella di cominciare la formazione del gruppo sociale e la conoscenza reciproca, di stabilire i modi della comunicazione e la fiducia, di individuare eventuali situazioni di difficoltà o di particolare abilità, di avviare il consolidamento e il recupero dei prerequisiti. Tutto questo si dovrebbe realizzare affrontando problemi e situazioni nel vivo della disciplina, che diano una motivazione elevata e che però non pongano difficoltà cognitive ed emotive troppo elevate.
In questa fase è opportuno utilizzare il linguaggio e le conoscenze che gli studenti già possiedono per introdurre problemi e situazioni che richiedono ulteriori strumenti e per illustrare gli (almeno alcuni) obiettivi del lavoro dell'anno. Occorre stabilire la continuità con il percorso precedente e però bisogna saper sfruttare le possibilità offerte anche dalla discontinuità: si tratta di un nuovo inizio.

6 Un esempio schematico di curricolo per il primo anno

Prenderò ora in esame il problema particolare del curricolo per il primo anno della scuola secondaria superiore e descriverò una possibile proposta, che si muove nell'ambito dei programmi Brocca, sia dal punto di vista degli obiettivi che dei contenuti e delle indicazioni metodologiche. Naturalmente si tratta solamente di *una* possibile proposta, che non ha alcuna pretesa di essere *il* modo necessario di procedere.

Mi pare che un tale curricolo si possa organizzare conservando il tradizionale contenuto disciplinare del calcolo algebrico, delle equazioni e dei sistemi, opportunamente dimensionato e interpretato, insieme ad alcuni contenuti geometrici e ad alcuni aspetti formali e logico-deduttivi. Rispetto alla tradizione si operano però alcuni spostamenti di accento, e, appunto seguendo le proposte Brocca, si introducono il tema delle funzioni e dei grafici ed alcuni elementi di statistica e di probabilità. Inoltre si insiste particolarmente sulla modellizzazione di problemi e fenomeni. Per vari motivi, soprattutto per mancanza di tempo e di spazio, non darò qui tutti i dettagli, ma mi limiterò ad alcune indicazioni generali su alcune situazioni didattiche e sulla scelta degli argomenti.

Mòdulo iniziale: organizzazione e rappresentazione di dati.
Si tratta di partire da insiemi di dati, ad esempio dati numerici (ma non solo numerici) ottenuti da rilevamenti statistici o da misure di fenomeni di varia origine (meglio se i rilevamenti sono fatti dagli studenti stessi su fenomeni di loro interesse). Si tratta poi di organizzare e rappresentare questi dati in modo da ottenere dei parametri sintetici significativi e delle visualizzazioni. Attività di questo tipo sono in genere abbastanza familiari agli studenti, che possono controllare il significato delle manipolazioni che fanno con i dati. Si tratta di attività che richiedono di operare in modo semplice con numeri interi, frazioni, decimali, e che richiedono anche un certo uso del linguaggio degli insiemi e delle funzioni, linguaggio che può essere ricordato o introdotto all'occorrenza, *senza sviluppare una "teoria" degli insiemi* (gli studenti possono avere un quaderno sul quale scrivono il vocabolario che viene introdotto). Occorre stare sempre molto attenti con le definizioni: per mia esperienza il rischio che si diano "definizioni" che non definiscono niente (con risultati diseducativi tremendi) è assai elevato.
In questa fase si possono vedere "in opera":

- le competenze di calcolo numerico, scritto, mentale e con calcolatrice;
- le capacità di rappresentazione dei numeri sulla retta e dei punti nel piano mediante coordinate;
- le competenze linguistiche.

Inoltre si cominciano ad osservare i comportamenti metacognitivi ed emotivi dei singoli e le dinamiche di gruppo, e si cominciano a mettere in atto i primi interventi di recupero.

Situazione didattica A: problemi sulle percentuali, sconto, interesse.
Ad esempio:

- Ho comprato un paio di sci con il 15% di sconto e li ho pagati 140.000 lire. Quanto costavano senza sconto?

- Ho depositato in banca 2 milioni con un interesse del 3% annuo. Se non ritiro gli interessi, quanto avrò dopo tre anni?

- Un oggetto che costa un milione viene aumentato del 10%, poi viene diminuito del 20%. Quanto costa alla fine?

Se l'insegnante lo ritiene opportuno, questi problemi possono essere fortemente contestualizzati simulando una specie di piccolo commercio in classe, con denaro vero o facsimile circolante.
Questo tipo di problemi richiede innanzitutto una discreta capacità di modellizzazione e di rappresentazione, insieme ad una certa competenza linguistica, ed è utile a costruire tali competenze, se non sono presenti in misura sufficiente. Richiede inoltre una capacità di passare da rappresentazioni decimali dei numeri a rappresentazioni come frazioni e viceversa, mantenendo il controllo semantico. Infine consente di usare in modo elementare lettere per indicare incognite, e di scrivere e trasformare semplici formule ed equazioni algebriche, sempre mantenendo un controllo semantico.
Il punto metodologico cruciale di ogni situazione didattica è che *le soluzioni dei problemi devono essere costruite dagli studenti.* Al più l'insegnante può suggerire formulazioni semplificate dei problemi, arrivando a scomporre il lavoro risolutivo in passi abbastanza piccoli da essere alla portata degli allievi. Inoltre l'insegnante può, se opportuno, aiutare gli allievi che hanno trovato una soluzione a chiarificarla. Ma non può dare lui le soluzioni, perché il lavoro importante è proprio quello di accompagnare gli studenti nei loro tentativi, anche infruttuosi, analizzando i motivi dell'insuccesso, le strategie messe in atto, le cause di errore, sostenendoli psicologicamente ed emotivamente.
La cosa non è semplice, richiede tempo e richiede all'insegnante una grande pazienza e capacità di aspettare (a questo proposito una lettura di [Her] può sempre essere utile). In genere l'insegnante fatica a trattenersi dal dare lui le soluzioni e deve anche convincere gli allievi che pretendono la soluzione e la *regola*, che lui non è un sadico, e che sta solo facendo il suo lavoro.
Se proprio non c'è niente da fare alla fine la soluzione si può anche dare, ma è chiaro che si tratta di una sconfitta.

situazione didattica B: 2, 4, 8, 16...
la funzione esponenziale sui naturali e sugli interi
Si tratta di una situazione che consente di osservare sperimentalmente le proprietà della funzione esponenziale discreta e di sviluppare conoscenze e abilità operative sulle potenze, sui calcoli approssimati, sulle strutture algebriche e la nozione di isomorfismo, sulle funzioni e i grafici, sulla modellizzazione di fenomeni naturali.
Non ho spazio qui per descriverla in dettaglio e rimando ad un quaderno di prossima pubblicazione [ACO] nella serie del Laboratorio LRM^3D^2 del Dipartimento di Matematica di Trento.

situazione didattica C: misura di un angolo e pendenza di una retta
La situazione consiste nel presentarsi in classe con un fascio di "angoli" sottobraccio. Per "angoli" intendiamo pezzi di legno compensato o di cartone o di lamiera con due lati rettilinei che si incontrano individuando un angolo. Si prendono poi due di questi "angoli" e si chiede alla classe quale è il maggiore. Probabilmente la classe suggerisce di risolvere la questione sovrapponendoli. Si prendono allora altri due angoli, si mettono in due punti opposti della stanza e si chiede di dire quale è il maggiore senza poterli spostare, e si vede cosa accade. L'obiettivo è quello di portare gli allievi a proporre diversi modi di misurare gli angoli. In genere la cosa produce risultati interessanti e consente una notevole varietà di osservazioni sulla misura delle grandezze. Gli studenti propongono in genere misure in gradi e in radianti, ma, opportunamente stimolati, producono misure che noi riconosciamo essere (senza dirlo loro) $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, 2\sin\frac{\alpha}{2}$ ed anche altre. La necessità di tradurre una misura in un altra porta a introdurre funzioni e grafici assai interessanti (le funzioni trigonometriche e le loro inverse) e formule algebriche significative, ottenute col teorema di Pitagora (questo teorema può essere opportunamente assunto come proprietà fondamentale, senza dimostrazione).
La situazione didattica si completa con il problema di misurare la pendenza di una retta, problema che va formulato opportunamente. Questo problema si può introdurre chiedendo: cosa vuol dire che una strada ha una pendenza del 12%? Successivamente il problema si ambienta in un piano cartesiano e si lega alla relazione che c'è fra le due coordinate di ogni punto che appartiene ad una data retta. Questo si collega poi ai polinomi di primo grado e ai loro grafici.

Il materiale contenuto nelle situazioni didattiche descritte sopra, con una serie di espansioni e sistemazioni, è sufficiente a riempire tutto il primo anno della scuola superiore. Fra le espansioni possibili, sicuramente c'è un certo sviluppo del calcolo algebrico e delle equazioni. A mio parere questo dovrebbe essere fatto senza mai usare le parole *monomio*, *binomio*, *trinomio*, che, affermo, non servono a nulla e sono anzi fonti probabili di guai. Si può invece parlare di espressioni algebriche, senza mai tentare di definire *in generale* cosa è una espressione algebrica. Naturalmente è opportuno che lo studente si abitui a riconoscere che certe scritture sono espressioni algebriche, e cioè a riconoscere diversi modi di generare espressioni, ma è meglio evitare di dargli "definizioni" che di solito non definiscono alcunché. La nozione di polinomio (non come *somma di monomi*) è invece necessaria, e al primo anno si può cominciare con il definire i polinomi di grado uno, due, tre, osservando le difficoltà che sorgono quando si vuole definire un polinomio di grado qualunque. I polinomi, e i polinomi a tratti, producono ottimi esempi di funzioni e di grafici. Le questioni di divisibilità di polinomi si possono presentare come esempi, ma i teoremi mi pare si possano rimandare senza alcun problema, a meno di approfondimenti per studenti molto abili.
Le trasformazioni di espressioni algebriche dovrebbero essere affrontate attraverso esempi graduali, legati a problemi concreti e modelli di fenomeni, mantenendo un controllo semantico continuo dei "passaggi" e dei risultati delle trasformazioni.
Lunghe espressioni dovrebbero essere costruite solamente dagli studenti stessi, essenzialmente come gioco e sfida (magari con il vincolo di trovare alle espressioni un significato). Interessanti anche i problemi linguistici collegati.

Un'altra espansione e sistemazione opportuna riguarda il linguaggio degli insiemi. Questa può aver luogo nel secondo quadrimestre, eventualmente in connessione (se si trova il tempo) con una riflessione su problemi elementari di calcolo delle probabilità, come ad esempio il lancio di una moneta e di un dado. Il tutto si può però, a mio parere, rimandare anche al secondo anno.

Una sistemazione che considero invece necessaria al primo anno, anche per i legami interdisciplinari con altre materie, riguarda le funzioni e i grafici, la descrizione di sottoinsiemi del piano, l'interpretazione grafica delle soluzioni di equazioni, sistemi e disequazioni. Sistemi e disequazioni non credo dovrebbero essere studiati sistematicamente, ma per esempi, legati a problemi concreti ed alla descrizione di fenomeni.

Delicata è la questione dell'espansione dei contenuti geometrici, sulla quale sono particolarmente impreparato. Personalmente trovo poco utili le assiomatiche della geometria euclidea sintetica, che mi lasciano di solito insoddisfatto, se non peggio. Tuttavia, sia l'idea di sistema assiomatico, sia gli aspetti logico-deduttivi, sia la potenza intuitiva che la geometria euclidea sintetica contiene sono assai grandi e credo non si possa semplicemente abbandonarla. Mi pare però che dovrebbe essere possibile dimostrare un sacco di proposizioni significative a partire ad esempio dai teoremi di Pitagora e Talete e dai criteri di uguaglianza dei triangoli, e questo potrebbe essere un percorso didattico utile per sistemare diversi concetti e abilità geometriche. Naturalmente c'è anche l'approccio via trasformazioni geometriche, che non conosco a sufficienza per poterne parlare.

In tutta questa sezione manca completamente un aspetto importantissimo, e cioè la *definizione degli obiettivi in termini di comportamenti attesi da parte degli studenti*. Questo aspetto non è incluso perché occorrerebbe molto spazio ed una discussione molto approfondita e non ho in realtà tutta la soluzione già pronta in testa. Ritengo però che una soluzione ragionevole non dovrebbe essere così difficile da trovare. E la cosa importante è che ciascun insegnante trovi la *sua* strada per arrivare alla meta comune.

7 Conclusioni

In questo scritto ho attinto largamente dalle proposte della commissione Brocca, che mi pare contengano indicazioni di grande interesse, anche se vi sono aspetti dei programmi Brocca che pongono diversi problemi. Voglio qui sottolineare uno di questi problemi, che sembra particolarmente acuto oggi, nella prospettiva di una riforma dei cicli scolastici e dell'introduzione di un sistema di crediti e debiti formativi. Il programma Brocca del biennio è dato per temi, il cui sviluppo dovrebbe avvenire nell'arco dei due anni, con un percorso intrecciato che dovrebbe riprendere i temi e collegarli più volte. Nella costruzione di un tale percorso ogni insegnante dovrebbe avere una grande libertà, all'interno di un progetto didattico autonomo della scuola, con il vincolo di arrivare nei due anni ai risultati previsti. Questo è un metodo ottimo se ogni studente mantiene il proprio insegnante nel corso del biennio, se cioè non si hanno trasferimenti di allievi o del docente. Inoltre presuppone una certa omogeneità nella classe e nei tempi di raggiungimento degli obiettivi. Se si va invece verso una scuola nella quale ogni studente viene in qualche modo seguito secondo il proprio livello con un sistema di crediti formativi, e se si vuole un sistema che consenta una elevata mobilità, potrebbe essere necessario introdurre diversi livelli preordinati, e moduli di attività, forse per argomenti distinti, il che si pone in contraddizione con il respiro biennale delle proposte Brocca e sembra limitare a segmenti brevi la progettazione autonoma dei curricoli da parte dei singoli insegnanti e delle singole scuole. Si tratta di una questione su cui occorre riflettere.

8 Bibliografia

[Bro] Autori Vari: Proposta della Commissione Brocca per i programmi delle scuole secondarie superiori. Annali della Pubblica Istruzione. Le Monnier.

[Ber] Piero Bertolini: Dizionario di psico-socio-pedagogia, Edizioni scolastiche Bruno Mondadori (1992).

[Pon] Clotilde Pontecorvo e Maurizio Pontecorvo: Psicologia dell'educazione - conoscere a scuola. Società editrice il Mulino (1986).

[Lan] Gilbert De Landsheere, Viviane De Landsheere: Definire gli obiettivi dell'educazione. La Nuova Italia (1977).

[Her] Eugen Herrigel: Lo Zen e il tiro con l'arco. Adelphi.

[Cor] Cesare Cornoldi: Metacognizione e apprendimento. Il Mulino.

[Zan] Rosetta Zan: Un intervento metacognitivo di "recupero"..., La matematica e la sua didattica, 1, 1996.

[ACO] Gabriele Anzellotti, Marta Cazzanelli, Elisabetta Ossanna: 2, 4, 8, 16... - una situazione didattica per la funzione esponenziale. Fascicolo del Laboratorio LRM^3D^2, in preparazione.

LOGICA E COMPUTER DAI FONDAMENTI ALLE APPLICAZIONI

Daniele Mundici
Dipartimento di informatica - Università di Milano - Via Comelico 39-41 20135 Milano

Evoluzione dei concetti

Anche se da molti secoli l'umanità sa costruire figure geometriche, solo nel 1801 Gauss trovò una condizione necessaria e sufficiente su n affinché il poligono regolare di n lati sia costruibile con riga e compasso. Per questo risultato non basta avere familiarità con le costruzioni geometriche: occorre invece un livello di evoluzione intellettuale che renda concepibile la stessa formulazione del problema di *esistenza* della costruzione.

Analogamente, benché fin dal principio fosse chiaro che funzioni come l' addizione e la moltiplicazione sono effettivamente calcolabili, solo a partire dagli anni trenta del ventesimo secolo fu fatto il salto concettuale necessario per circoscrivere la nozione di calcolabilità. In pochi decenni questa nozione ha avuto uno sviluppo rapido e si è concretizzata in strumenti di calcolo sempre più flessibili e potenti. Perché questa accelerazione ?

Per rispondere dobbiamo partire dalla logica. Infatti la nozione di calcolabilità è figlia del problema di come dedurre verità riposte da verità evidenti, mediante un unico e globale *calculus ratiocinator* che, invece di numeri, manipoli espressioni linguistiche formalizzate. La formalizzazione logica ha comportato un lavoro millenario di distillazione e selezione di parti del discorso, modi verbali, simboli, regole. Fonte ispiratrice è stata la geometria, attraverso l' esperienza acquisita nel raccogliere in assiomi e teoremi una congerie di osservazioni frammentarie sulle figure concrete.

Ogni insegnante sa quale crescita intellettuale occorra tra la constatazione che un triangolo di lati 3, 4, 5 è rettangolo, alla comprensione del teorema di Pitagora. Altrettanta ne occorre per passare dalla osservazione che se Pico è uomo, visto che gli uomini sono mortali, anche Pico è mortale, alla comprensione dei teoremi logici fondamentali.

Meccanizzare la matematica

Benché il metodo assiomatico e la formalizzazione del ragionamento sillogistico risalgano entrambi ai greci, e nonostante le anticipazioni e le intuizioni di Leibniz, Boole, Peano e altri, la prima costruzione di un linguaggio logico formale aderente ai moderni requisiti di espressività e precisione si deve a Frege. Egli, nella sua opera di trascrizione concettuale, la *"Begriffsschrift"* del 1879, assimila il procedimento dimostrativo a un calcolo, le cui regole sono in numero finito e tutte esplicitate a priori, e la correttezza dei cui risultati prescinde dal contenuto delle formule. Ciò non significa che la realtà di cui parlano le formule non abbia alcun ruolo; basti dire che le regole sono dettate dall'esigenza di buon funzionamento del calcolo in riferimento a tale realtà. Tuttavia questo ruolo è come quello di un'assemblea costituente che, dovendo scrivere la costituzione di un paese ideale, ne produce una così perfetta che per il resto della storia di quel paese rimane inconcepibile la stessa idea di revisione costituzionale.

Tutti abbiamo imparato a manipolare formule logiche, per esempio, nella risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Un'equazione lineare con n incognite è un tipo molto semplice di formula logica con n variabili. Un sistema di equazioni è una congiunzione di tali formule. E la loro risoluzione è data da un pacchetto finito e definitivo di regole, garantite da un teorema che ne certifica la perfetta rispondenza alla finalità di risolvere sistemi lineari: nessun ingegno brillante aggiungendo nuove regole riuscirà a trovare nuove soluzioni; lo stesso insegnamento di queste regole appare standardizzato in tutti i paesi del mondo; la loro meccanicità è tale che la risoluzione di sistemi di equazioni lineari è ormai principalmente affidata alle macchine, come la precompilazione delle bollette della luce.

Uno dei programmi della logica è sempre stato quello di ricondurre tutto il processo di deduzione a un vasto sistema di equazioni risolvibili in base a regole costituzionali definitive. Come voleva Frege, il calcolo deduttivo può essere presentato senza curarsi del significato delle formule ma solo del loro aspetto esteriore. Non è detto che questo sia il modo migliore per introdurre gli studenti all'idea di *calculus ratiocinator*: dal punto di vista della didattica della logica, presentare un calcolo che manipola formule senza preoccuparsi del loro significato è un'impresa dubbia. Ogni insegnante è giustamente prevenuto verso tutti i meccanicismi perché ne conosce bene gli effetti diseducativi. Come se non bastasse il problema didattico, dal punto di vista storico e culturale si stenta a credere che uno dei risultati di più di duemila anni di ricerca sul vero e il falso possa essere un criterio di verità basato sull'esame esteriore degli enunciati, senza entrare nel merito del loro contenuto: che verità significative si potranno mai accertare esaminando gli enunciati, ad esempio, del codice della strada, solo in quanto successioni di simboli ? A chi dare più credito: ai logici che, dermatologicamente, scrutano i segni calligrafici degli enunciati, o agli aruspici che scrutano le interiora degli animali ? E come potrà non ridere un logico che incontra un altro logico ?

Per questa caratteristica di non sporcarsi mai le mani coi contenuti, nei secoli passati la logica veniva talora vista come irrimediabilmente cavillosa, o scientificamente vacua, o molestamente formalistica. Varie ragioni hanno spinto i logici alla politica delle mani pulite: nelle intenzioni di Frege la *scrittura concettuale* doveva servire a far trasparire i concetti e le relazioni tra di loro, come il denaro serve ad esprimere beni e risorse e la loro scambiabilità; può essere successo che il simbolismo abbia preso la mano, visto che le manipolazioni formali hanno sempre una certa fisicità, mentre i riferimenti oggettivi talora divengono incerti. Per esempio, alla fine del secolo diciannovesimo la logica fronteggiava il seguente dilemma, su cui Frege ed Hilbert avevano idee opposte: è l'esistenza di un modello matematico M soddisfacente una teoria Θ ragione sufficiente per garantire la consistenza logica di Θ, oppure, è la consistenza logica di Θ ragione sufficiente per garantire l'esistenza di un modello M che la soddisfi ?

Fatto sta che si è definitivamente affermato il principio secondo cui le regole di inferenza debbano far riferimento solamente alla struttura esteriore delle formule e non al loro significato, così da poter essere applicabili anche da chi è totalmente digiuno di matematica, e persino dalle macchine calcolatrici. Riprendendo l'analogia coi sistemi di equazioni lineari, e pensando alle regole di inferenza come metodi di risoluzione di sistemi di equazioni universali, si pone subito il problema fondamentale, l'*Entscheidungsproblem*, o—meno onomatopeicamente—problema della decisione, che enunciamo seguendo Hilbert:

> L'*Entscheidungsproblem* è risolto quando si conosca una procedura per decidere la validità o la soddisfacibilità di una data espressione logica, mediante un numero finito di operazioni.

Qui la frase chiave è *procedura mediante un numero finito di operazioni*, che useremo come sinonimo di algoritmo, procedura meccanica, metodo effettivo, e simili.

La prospettiva di una matematica interamente meccanizzata portava von Neumann nel 1927 a prefigurare una risposta negativa al problema della decisione; ma come definire *procedura meccanica* ? Ripensiamo a un risultato come quello di Gauss, sui poligoni regolari non costruibili con riga e compasso. Pur riferendosi a metodologie di costruzione assai circoscritte, questo risultato limitativo presuppone la definizione rigorosa di *figura non costruibile con riga e compasso*, definizione che deve catturare l'essenza di ogni possibile e immaginabile costruzione con riga e compasso. Su scala ben più vasta, per rispondere negativamente all'*Entscheidungsproblem* occorreva predisporre una nozione di metodo di calcolo così ampia da includere ogni ragionevole procedura meccanica passata, presente e futura. Una tale nozione fu data da Turing nel 1936.

Turing e il compito

Prima di Turing molti autori avevano ideato ed anche costruito strumenti di calcolo; ricordiamo i progetti di calcolatori meccanici di Pascal e Leibniz e la macchina analitica costruita da Babbage. Le macchine introdotte da Turing si differenziano da quelle precedenti per la loro universalità: almeno sulla carta esse sono in grado di eseguire ogni algoritmo immaginabile. Turing pervenne a una nozione universale di algoritmo analizzando e stilizzando il modo di procedere di uno scolaro mentre fa i compiti di matematica sul suo quaderno a quadretti. Infatti una macchina di Turing $\mathcal{T}$ è fatta di quattro parti, come segue:

1. Un insieme A, detto *alfabeto*, costituito dai due simboli $|$, detto *asticella*, e $\oslash$, detto *vuoto*.

2. Un insieme finito S i cui elementi sono chiamati *stati* (mentali) di $\mathcal{T}$; per bandire ogni psicologismo, S viene identificato con l'insieme dei primi $r+1$ numeri naturali $0, \ldots, r$; il numero 0 viene chiamato lo stato iniziale di $\mathcal{T}$. Più schematici di così !

3. Un *nastro* costituito da una fila di celle, o quadretti, finita ma estendibile a piacere in entrambe le direzioni, come la retta di Euclide, che ammetteva solo l'infinito potenziale; ogni cella può contenere uno e un solo simbolo di A. Per non interrompere il nostro filo rigoroso identifichiamo il nastro con l'insieme $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ degli interi.

4. Un *pennino ottico* che può leggere e scrivere sul nastro—lavorando su una cella per volta—seguendo il *programma* di $\mathcal{T}$. Matematicamente, tale programma è un elenco di istruzioni, ove ogni istruzione è una

quintupla del tipo $\langle a, s, a', D, s' \rangle$ (oppure, $\langle a, s, a', S, s' \rangle$) che il pennino ottico interpreta in questo modo:

> se nel quadretto in esame leggi il simbolo a e sei nello stato s, allora scrivi a' al posto di a e poi passa al quadretto a Destra (oppure, rispettivamente, passa al quadretto a Sinistra), e finalmente vai nello stato s'.

Mentre la bidimensionalità del quaderno a quadretti non è ritenuta da Turing elemento cruciale per la calcolabilità, decisive sono invece la finitezza dell' alfabeto e dell' insieme di stati di ogni macchina $\mathcal{T}$; visto che il nastro e l' alfabeto sono sempre gli stessi per tutte le macchine, possiamo *identificare $\mathcal{T}$ con l' elenco delle sue quintuple.*

Per definizione, ogni cella di un nastro vuoto contiene il simbolo $\oslash$. Noi comunichiamo l' input a $\mathcal{T}$ scrivendo su un nastro vuoto una certa successione di asticelle $|$, un simbolo per quadretto. Poi posizioniamo il pennino ottico sul primo di tali simboli e mettiamo $\mathcal{T}$ nello stato iniziale. A questo punto il pennino ottico di $\mathcal{T}$ non può prendersi molte licenze: la computazione si svolge attraverso una successione di piccole modifiche della posizione del pennino, del simbolo stampato, dello stato di $\mathcal{T}$, sempre secondo quanto prescritto dalle quintuple di $\mathcal{T}$. Per evitare che il pennino ottico faccia la fine dell'asino di Buridano eviteremo di dargli la possibilità di scelta: cosí, per ogni simbolo e per ogni stato, faremo in modo che tra le quintuple di $\mathcal{T}$ ce ne sia al più una che comincia con quel simbolo e quello stato. La computazione si interrompe, per mancanza di istruzioni, quando il pennino si trova a leggere un simbolo a, in uno stato s, e nessuna quintupla di $\mathcal{T}$ comincia con $\langle a, s, \cdots \rangle$.

Per capire come una macchina di Turing $\mathcal{T}$ possa calcolare una funzione, occorre ora definire la semplice nozione di passo di calcolo; questo utile esercizio serve per vedere quanto si è capita la definizione di macchina di Turing. Un modo per risolverlo è di definire la nozione di configurazione, ossia una fotografia istantanea del nastro in cui si veda anche la posizione del pennino ottico, e il numero dello stato mentale della macchina in quell'istante. Poi tenendo conto delle quintuple di $\mathcal{T}$ si definisce la configurazione immediatamente successiva; infine si definisce il passo di calcolo come un paio di configurazioni in cui la seconda è immediatamente successiva alla prima.

Una funzione f definita sui numeri naturali, e a valori naturali, è detta *Turing-computabile* se esiste una macchina di Turing $\mathcal{T}$ che avendo in input n asticelle consecutive, posta in stato 0 col pennino ottico sul primo di tali simboli, si ferma dopo un numero finito di passi, lasciando scritte sul nastro $f(n)$ asticelle consecutive. Per esempio, la macchina di Turing costituita dalle due quintuple

$$\langle \emptyset, 0, |, D, 1\rangle, \langle |, 0, |, D, 0\rangle$$

calcola la funzione successore.

Un po' prosaico, no ? Eppure sulla definizione di Turing-computabilità è passata una sorta di rivoluzione intellettuale. La generalizzazione a funzioni a due o più variabili è una rielaborazione di questa, e non aggiunge nulla di sostanziale; e così è il passaggio a macchine di Turing che lavorano con alfabeti meno striminziti del nostro $\{\emptyset, |\}$, per esempio, scrivendo i numeri in notazione binaria o decimale, invece delle nostra trita notazione *unaria*, ormai usata solo dagli studenti per contare i giorni che mancano alle vacanze.

E siccome per le macchine di Turing non fa differenza che l' input rappresenti cifre numeriche o lettere alfabetiche, con la stessa tecnica si definisce la calcolabilità di funzioni definite su insiemi di parole, anziché di numeri: per esempio esiste una macchina di Turing $\mathcal{K}$ che avendo in input una parola scrive in output la parola rovesciata. Se fossimo Turing-programmatori ci potrebbe capitare un esercizio che chiede di scrivere le quintuple per $\mathcal{K}$. Un metodo pratico per convincerci della esistenza di $\mathcal{K}$ verrà descritto nella prossima sezione.

Church thesis (tesi di Chiesa ?)

Gödel, che aveva per anni cercato una nozione onnicomprensiva di *passo di calcolo deduttivo*, scrisse che con le macchine di Turing si era ottenuta una definizione precisa e indiscutibilmente adeguata del concetto generale di sistema formale. Come giustificare questa affermazione ? Che portata ha la nozione di Turing-computabilità ? Non c' è dubbio che una funzione Turing-computabile sia effettivamente calcolabile. Semmai ci può venire il dubbio che, stante la modestia delle operazioni del pennino ottico, certe funzioni complicate, benché computabili in un numero finito di passi, non siano alla portata di nessuna macchina di Turing.

Chi intraprenda lo studio della Turing-computabilità passa inizialmente per una fase di apprendistato, scrivendo le quintuple di macchine che calcolano funzioni come il successore $x + 1$ (esercizio già svolto), o l' addizione $x+y$. Uno degli effetti collaterali di questo tirocinio è di mostrare la macchinosità della Turing-programmazione. Tuttavia riusciremo a scrivere (programmi di) macchine di Turing per un piccolo numero di funzioni *basilari* come il successore, la costante zero, la funzione identità $I(x) = x$. (Messa in guardia: la maggioranza degli studenti non vede a cosa possa servire la funzione identità.) In una fase successiva cercheremo tecniche che permettano di vivere di rendita, garantendo l'esistenza di nuovi programmi a partire da programmi già scritti. Queste tecniche sono scimmiottature delle operazioni che permettono di passare da funzioni ad altre funzioni. Familiare a tutti è l'operazione di composizione, come in $(x+y)^2$; meno familiare è la *ricorsione primitiva*, che per funzioni a una variabile suona così.

> Sia c un numero e $g(x, y)$ una funzione. Sia f data da $f(0) = c; f(n+1) = g(n, f(n))$. Allora f è ottenuta per ricorsione primitiva a partire da c e dalla funzione g.

Ad esempio, la funzione $f(n) = n!$ definita da $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)n!$, è ottenuta per ricorsione primitiva dal numero 1 e dalla funzione $g(x, y) = (x+1)y$.

Quando una funzione è ottenibile dalle funzioni basilari mediante composizioni o ricorsioni primitive, allora è detta *primitiva ricorsiva.* Abbiamo appena abbozzato il pedigree della funzione fattoriale; il pedigree completo chiede di far risalire la funzione g agli antenati basilari. Pochi esercizi standard mostrano che tutte le funzioni dell'aritmetica elementare sono primitive ricorsive. Dunque tutte le funzioni dell'aritmetica elementare sono Turing-calcolabili. Trovare funzioni effettivamente calcolabili che non siano primitive ricorsive è così difficile che si arrivò a congetturare che non ce ne fossero, finché Ackermann e, indipendentemente, Sudan, ne costruirono una. Ackermann usò una procedura di diagonalizzazione, di cui diamo una versione semplificata qui di seguito.

Per cominciare notiamo che, per definizione, le funzioni primitive ricorsive a una variabile possono essere elencate, cominciando dalle funzioni successore, identità e costante zero, poi procedendo con funzioni di complessità crescente, in base al numero di composizioni o ricorsioni necessarie per scriverne il pedigree. Pensiamo ora a una interminabile enciclopedia, che a pagina 1 contiene il pedigree della prima funzione, a pagina 2 la seconda funzione, ..., a pagina x la x-ma funzione p_x. Definiamo ora la funzione r^* in questo modo:

> per ogni $x = 1, 2, \ldots$, aperta l'enciclopedia a pagina x, r^* calcola il valore di $p_x(x)$ e aggiunge 1, in simboli: $r^*(x) = p_x(x) + 1$.

La nozione di *procedura meccanica* che abbiamo innata ci porta a dire che il calcolo di $p_x(x)+1$ è eseguibile meccanicamente. Dunque r^* è effettivamente calcolabile. D'altra parte abbiamo che r^* non è primitiva ricorsiva, come si può vedere con un argomento di diagonalizzazione, assai simile all'argomento usato da Cantor per mostrare che l'insieme dei numeri reali non è numerabile. Questo è un caso in cui una nozione imprecisa, quella di *effettivamente calcolabile*, risulta non equivalente a una nozione precisa, al di là di ogni ragionevole dubbio. Prontamente si dimostrò che la funzione di Ackermann è Turing-computabile.

La scoperta di r^* poneva un delicato problema, che ottimisticamente poteva essere formulato così : per catturare tutte le funzioni Turing-computabili basterà aggiungere alla composizione e alla ricorsione primitiva qualche operazione che ci è momentaneamente sfuggita? Fortunatamente la risposta è positiva: basta aggiungere l'operazione di *minimizzazione*, che è definita in questo modo:

> Data una funzione Turing-computabile $g(x, y)$, per ogni x sia $\zeta(x)$ l' insieme dei numeri y tali che $g(x, y) = 0$. Si supponga che ogni $\zeta(x)$ sia non vuoto. Allora per minimizzazione di g si ottiene la funzione $f(x)$ data da $f(x) =$ minimo elemento di $\zeta(x)$. La generalizzazione al caso di più variabili è semplice.

Kleene nel 1938 definì le funzioni parziali ricorsive abrogando la condizione che $\zeta(x)$ non sia mai vuoto, e ammettendo così anche funzioni definite non per tutti gli x. Giustificò l' introduzione di queste funzioni nel miglior modo possibile, provando che una funzione f è Turing-calcolabile se e solo se è parziale ricorsiva. (Il numero x sta nel dominio di f se e solo se la macchina di Turing che calcola f avendo in input x si ferma in un numero finito di passi.)

Dunque con la minimizzazione si completa il quadro delle operazioni necessarie e sufficienti per ottenere le funzioni Turing-computabili. Molti approcci alla nozione di computabilità effettiva risultarono equivalenti alla Turing-computabilità. A lungo andare si affermò l'aspettativa che, per quanto imprecisa sia la nozione di calcolabilità, nessuno più sarebbe stato capace di mostrarne la differenza rispetto alla Turing-computabilità, come invece Ackermann ne aveva mostrato la differenza dalla calcolabilità primitiva ricorsiva.

La tesi di Church sostiene che questa aspettativa non andrà mai delusa: per ogni funzione f effettivamente computabile c'è una macchina di Turing che calcola f. L' imprecisione della nozione di *effettivamente computabile* produce strani effetti: da un lato pochi hanno dubbi sull'effettiva calcolabilità delle funzioni Turing-computabili. Più opinabile è il viceversa: non potrebbe l'evoluzione umana fare un balzo verso l'alto e portare a metodi di computabilità effettiva così potenti da far apparire le macchine di Turing come oggetti di antiquariato ? Per la riga e il compasso nessuno ha avanzato la tesi che essi esauriscano tutte le possibili e immaginabili metodologie di costruzione geometrica. Invece la tesi di Church asserisce che i passi delle macchine di Turing sono il non plus ultra delle procedure effettive. Se la tesi di Church è vera, l'Entscheidungsproblem, che, come vedremo, Turing mostrò essere insolubile rispetto alla Turing-calcolabilità risulta insolubile anche rispetto alla formulazione data da Hilbert, che fa riferimento a non meglio precisate procedure con un numero finito di passi.

Nella trattazione della Turing-computabilità i riferimenti alla tesi di Church sono sempre eliminabili, ma spesso a prezzo di noiose puntualizzazioni. Così per esempio, vale il seguente teorema: la funzione che fornisce l'n-ma cifra decimale di π è Turing-computabile. La dimostrazione che c'è una macchina di Turing che avendo in input un numero n, dopo un numero finito di passi scrive sul nastro l'n-ma cifra di π non è tra le più difficili, ma non è neanche tra le più istruttive. Molti di coloro che non hanno mai seguito in tutti i dettagli tale dimostrazione si convincono pienamente della validità del teorema, e di molti altri del genere, usando una scorciatoia non rigorosa ma molto spiccia: la tesi di Church.

La macchina universale, sul tavolo

Utilizzando l'equivalenza tra funzioni parziali ricorsive e funzioni Turing-computabili, e procedendo per analogia con quanto fatto per le funzioni primitive ricorsive, si ottiene un'enumerazione effettiva delle funzioni parziali ricorsive a una variabile. Siano dunque $f_1, f_2, \ldots,$ le funzioni così enumerate. Il *teorema di enumerazione di Kleene* dice che la funzione

$$\mathcal{U}(x, y) = f_x(y)$$

è parziale ricorsiva. Siccome le funzioni parziali ricorsive coincidono con le funzioni Turing-computabili, possiamo realizzare $\mathcal{U}$ come un programma di macchina di Turing, a cui meritatamente daremo il nome di macchina di Turing universale. $\mathcal{U}$, avendo in input un arbitrario programma $\mathcal{X}$ di macchina di Turing e un numero y, simula il calcolo di $\mathcal{X}$ su input y e produce in output il valore $\mathcal{X}(y)$. Qui nessun argomento di diagonalizzazione riesce a minare alla radice la macchina $\mathcal{U}$: infatti, quando il valore di $\mathcal{U}(y, y)$ non è definito, evapora ogni rischio di contraddizione nello scrivere $\mathcal{U}(y, y) = \mathcal{U}(y, y) + 1$.

Il programma $\mathcal{X}$ altro non è che un elenco finito di quintuple: pur contenendo tutta l'essenza di una macchina di Turing, $\mathcal{X}$ è una successione di simboli. La concezione pitagorica secondo cui tutto è numero ha qui un indubbio riscontro, anche se la riduzione della macchina $\mathcal{X}$ a numero è chiamata *gödelizzazione* invece che pitagorizzazione. Una volta ridotta alla stregua di un numero, la macchina può essere messa in input ad una altra macchina, oppure anche a se stessa. Questo processo prefigura la metamorfosi dell'hardware nel software: mentre la programmazione assomigliava alla attività di un centralinista, von Neumann e Turing capirono che i programmi possono essere trascritti e conservati come successioni di simboli, esattamente come qualsiasi dato. Nacque così un nuovo tipo di macchina calcolatrice, incarnazione della macchina universale di Turing, e prefigurazione del nostro personal computer.

Accanto ai risultati positivi, assai importanti sono anche certi risultati negativi. Ad esempio, non esiste una macchina di Turing $\mathcal{H}$ con questa proprietà: avendo in input una coppia ordinata $(\mathcal{Y}, y)$ ove $\mathcal{Y}$ è un elenco di quintuple ed y è un numero, $\mathcal{H}$ si ferma se e solo se la macchina $\mathcal{Y}$ si ferma avendo in input y. Anche questo risultato si ottiene con un argomento di diagonalizzazione. Abbiamo appena mostrato l'*insolubilità del problema della fermata.* Ebbene, questo risultato ha una portata così grande da risolvere l'Entscheidungsproblem. Infatti, ragionando per assurdo e trascrivendo i passi di calcolo di un'ipotetica macchina $\mathcal{H}$ mediante espressioni della logica dei predicati, Turing ridusse il problema della fermata al problema della decisione. E concluse che se il secondo fosse risolvibile da macchine di Turing, anche il primo lo sarebbe. Dunque l'Entscheidungsproblem è insolubile. Questo è il teorema di Turing-Church sulla indecidibilità della logica dei predicati, il più importante calculus ratiocinator elaborato finora dall'umanità.

Un Garante per l'editoria software

Anno dopo anno nel secolo ventesimo le relazioni tra logica e informatica si sono andate sviluppando come le relazioni tra analisi matematica e fisica nel secolo diciannovesimo. Molti settori dell'informatica non avrebbero potuto esistere senza le idee e gli strumenti della logica: la dimostrazione automatica di teoremi, le forme di rappresentazione ed elaborazione della conoscenza e del linguaggio naturale fornite da svariate logiche non classiche, la programmazione logica, la verifica della correttezza dei programmi (ivi compresi i programmi di macchine di Turing). Ci soffermeremo brevemente solo su questi ultimi due temi.

CERTIFICAZIONE DEI PROGRAMMI Purtroppo non basta collaudare e ricollaudare un programma per certificarne la correttezza: il software commerciale di buona qualità è stato ampiamente collaudato, ma spesso contiene errori. Quando i primi programmi cominciavano a girare nessuno si preoccupava di questioni di correttezza. Col diffondersi del fenomeno di cattivo funzionamento dei programmi si ebbe la *crisi del software* accompagnata dalla nascita di una nuova disciplina anticrisi: la verifica (della correttezza) dei programmi. La correttezza di un programma, come la correttezza di un enunciato matematico, va provata in maniera formale. La logica dei predicati è lo strumento principale per intervenire nel merito dei programmi. Ad esempio l'analisi di Turing sull'ipotetica macchina $\mathcal{H}$ ha come effetto pratico quello di smascherare ogni millantatore che tenti di venderci software per decidere se un programma vada in loop. In generale, la certificazione di una macchina di Turing $\mathcal{T}$ si fa in due tempi: prima si scrive un enunciato E che dice che, fissato l'input, dopo un numero finito di passi $\mathcal{T}$ si ferma su un certo output; poi si dimostra E, utilizzando le definizioni della Turing-computabilità, assieme a tutti gli strumenti matematici disponibili: non solo la teoria dei numeri, o l'analisi combinatoria, ma anche—se il caso—la geometria algebrica o l'analisi complessa. Ecco una delle ragioni per cui un informatico non può non avere anche una buona formazione matematica.

Dato che i passi di calcolo di ogni macchina di Turing $\mathcal{T}$ sono definiti matematicamente, non vi è altro modo di descrivere le proprietà input-output di $\mathcal{T}$ se non mediante affermazioni matematiche. E non vi è altro modo per certificare la veridicità di questi comportamenti se non dimostrando queste affermazioni. L'analogia tra teorema/dimostrazione e programma/certificazione è suggestiva, benché percentualmente siano più i teoremi con dimostrazione corretta che i pacchetti software con certificazione valida. Certe scuole di pensiero sostengono che la certificazione dei programmi quando serve è impossibile, e quando è possibile o non serve o è fasulla; anche qui vi è una certa analogia con l'atteggiamento di alcuni (non solo studenti alle prime armi con la geometria euclidea) nei riguardi delle dimostrazioni matematiche.

LOGICA PER FARE CALCOLI In che *modo* parlano le voci dei verbi usati per fare i calcoli ? Mentre le frasi principali degli enunciati dei teoremi e delle dimostrazioni usano quasi solamente l'indicativo (con un pizzico di congiuntivo nelle ipotesi e di condizionale nelle argomentazioni per assurdo), nelle quintuple delle macchine di Turing le istruzioni parlano con verbi all'imperativo. Lo svolgimento di un calcolo o di una costruzione geometrica viene così verbalizzato come successione di passi in ciascuno dei quali viene dato ed eseguito un ordine: l'imperativo è il modo tipico dell' insegnante quando cerca di aiutare uno studente incerto alla lavagna. Che altro modo ci dovrebbe essere per suggerire un calcolo o una costruzione ?

Eppure negli assiomi della geometria euclidea i verbi sono all'indicativo: per due punti distinti *passa* una sola retta; analogamente, nel definire qualsiasi funzione, per esempio, il fattoriale, si usano verbi all'indicativo: $0!$ *è* eguale a 1 e $(n+1)!$ *è* eguale a $(n+1)$ moltiplicato per $n!$ Se poi dovessimo calcolare il valore di $2!$, lo faremmo applicando successivamente le definizioni, continuando a leggere i passaggi all' indicativo. E anche per la moltiplicazione, ogni casella delle tabelline stampate nelle pagine di copertina dei quaderni di aritmetica si legge e si può calcolare utilizzando verbi all'indicativo: due per due *fa* quattro.

La prima idea di ogni sistema per calcolare basato sulla logica è che ogni funzione Turing-computabile f può essere trattata allo stesso modo del fattoriale: scrivere un programma per il calcolo di f significa assiomatizzare f, con verbi all' indicativo. Una macchina di Turing $\mathcal{R}$ preventivamente istruita con le regole del calculus ratiocinator si incaricherà di calcolare $f(x)$, non appena noi le forniamo, oltre che l'input x, anche la definizione di f. $\mathcal{R}$ procederà per deduzioni successive, al modo di una dimostrazione matematica. Se per caso $\mathcal{R}$ sbagliasse a dedurre il valore di $f(x)$ dovremo prendercela solo con noi stessi, per aver sbagliato qualcosa nel dettare a $\mathcal{R}$ la definizione di f o l'input x. Infatti, alla luce del teorema di completezza di Gödel non possiamo dubitare dell'infallibilità delle regole deduttive della logica dei predicati: *ogni* conseguenza logica della definizione di f, ad esempio, $f(37) = 377$, è alla portata del pallottoliere ratiocinator di questa logica, e prima o poi verrà dimostrata. D'altro lato, alla luce dell'indecidibilità dell'Entscheidungsproblem non possiamo farci illusioni sulle possibilità di sburocratizzare i tempi, geologicamente lenti, con cui $\mathcal{R}$ ci dà le sue dimostrazioni, se e quando esistono. Per la cronaca, le esigenze di sveltire tali tempi di calcolo portano a decurtare il potere espressivo del calculus ratiocinator, e persino a introdurre di proposito elementi di illogicità nelle realizzazioni pratiche.

Per cominciare

Proporzionalmente all'efficienza che chiediamo alle macchine, esse ci chiedono di stringare al massimo il nostro modo di rivolgersi a loro, abolendo tutte quelle invenzioni simboliche, immagini geometriche, figurazioni retoriche che caratterizzano il linguaggio della scienza, nell' insegnamento e nella ricerca. Le macchine non apprezzano la nostra capacità di ragionare per analogie, non capiscono che la loro stessa esistenza deriva dal respiro di una felice metafora: una scolaretta che fa i compiti di matematica sul suo quaderno a quadretti.

In fondo, tutti i risultati descritti nei capitoli precedenti sono una celebrazione della vitalità dell'immaginazione umana impegnata a

(i) mettere in simboli porzioni sempre più significative della conoscenza, mai perdendo di vista le ragioni di fondo per ogni formalizzazione, ossia la possibilità di

(ii) elaborare ed espandere conoscenza manipolandone le espressioni simboliche con algoritmi sempre più potenti.

Appare sempre una proporzionalità inversa tra grado di espressività e grado di efficacia del calcolo deduttivo. L' equilibrio tra (i) e (ii) realizzatosi nella logica dei predicati ha ridimensionato il sogno di una *ars magna*, fatto da molti logici dei secoli passati. Difficilmente una logica L arriverà a dimostrare l'esistenza di enti più importanti della stessa L. Ma, come e di più che per la scala musicale finalmente temperata in dodici semitoni, l' equilibrio raggiunto è un punto di partenza per la costruzione di strumenti meglio intonati, precisi e potenti, su cui si è copiosamente riversata l'intuizione creatrice.

IL PENSIERO RELAZIONALE NELL'EDUCAZIONE MATEMATICA

Margherita Fasano
Università della Basilicata

Premessa

Le ricerche nel campo della psicologia cognitiva e i risultati del continuo sviluppo dell'informatica e delle sue applicazioni hanno fornito alcune indicazioni utili per una riflessione e una rivisitazione dei fondamenti e dei processi in ambito pedagogico-didattico. In particolare, ci sembra importante focalizzare l'attenzione sui seguenti aspetti:

– la costruzione della conoscenza poggia sull'osmosi tra due processi mentali: quello procedurale (organizzazione in successione di eventi) e quello relazionale (organizzazione reticolare di informazioni possedute, esperienze,...);
– l'esistenza di una analogia tra l'organizzazione reticolare delle conoscenze nella nostra mente (mappe cognitive) e quella delle informazioni in un ipertesto.

Nel caso delle mappe cognitive, si tratta di un insieme di conoscenze, di informazioni, in continua evoluzione, messo in relazione con tutti gli stimoli provenienti dall'esterno. La qualità della relazione è influenzata dal numero e dalla significatività dei collegamenti tra quanto posseduto e il nuovo. Per esempio, la profondità e la significatività del concetto di solido è determinata dalle connessioni che esso ingloba: piramidi, prismi, solidi a superficie curva,… e tutte le proprietà, calcoli di superfici e volumi relativi a ciascun solido considerato.

Negli ipertesti l'insieme delle informazioni relative ad un determinato tema è strutturato in modo reticolare, secondo una logica fissata dal progettista. La preparazione della struttura reticolare che è alla base di un progetto ipertestuale, parte dalla organizzazione logica di tutti i collegamenti tra le informazioni, rappresentata mediante una mappa concettuale.

Gowin e Novak precisano che le mappe cognitive sono personali,quelle concettuali dovrebbero rappresentare un'area disciplinare nel modo che gli esperti della materia ritengono valido (Gowin-Novak, 1989, pag.139). In generale, è oramai condivisa l'indicazione che il passaggio dalla mappa cognitiva a quella concettuale favorisce la costruzione di una rete di concetti meglio selezionati e organizzati.

Per quanto riguarda la scuola, questo nuovo scenario stimola e favorisce la realizzazione di nuove attività di apprendimento per l'alunno, nuove metodologie didattiche per il docente, nuove risorse per il sistema formativo in generale (laboratori, competenze tecniche, nuove organizzazioni di lavoro,…).

Attualmente, e non è un caso, le applicazioni ipertestuali multimediali e le reti telematiche costituiscono un motivato e significativo supporto a quell'innovazione del processo di insegnamento/apprendimento promossa e sostenuta anche dal Ministero della Pubblica Istruzione.

Certamente si tratta di una innovazione che ha iniziato a farsi strada nella scuola già da anni: a volte in ambito di ricerche e sperimentazioni, a volte grazie ad iniziative di singoli o piccoli gruppi di insegnanti che sensibili a ciò che l'informatica e le sue applicazioni offrivano e avrebbero offerto, hanno avviato e realizzato attività che hanno spesso concorso a chiarire ed indicare possibili ricadute e sviluppi dal punto di vista didattico e curriculare.

Indubbiamente quanto il Ministero oggi propone è una risposta ad un bisogno di nuova formazione dei giovani ma anche degli insegnanti.

Non è questa la sede per affrontare analiticamente le problematiche relative alla formazione degli insegnanti sui temi sopra esposti. Quello che è possibile fare è avviare una riflessione che aiuti, per quanto attiene l'oggetto di questa relazione, ad individuare alcune indicazioni metodologiche e didattiche, relative allo sviluppo del pensiero relazionale e alle applicazioni multimediali nella didattica della matematica.

2 Perché multimedialità e reti telematiche

La multimedialità è un insieme di risorse, coordinate tra di loro, finalizzate alla produzione di uno strumento efficace (per motivazione, tempi di concentrazione, interattività,..) per la comunicazione/acquisizione di informazioni basata su esperienze percettive e cognitive non limitata ad un unico canale sensoriale.

La rete telematica è una applicazione multimediale, potenziata dalla possibilità di comunicare in tempo reale con altre persone, di acquisire informazioni, di immetterne di nuove o scambiarne, di avviare una discussione su temi di interesse comune, etc.

Ciò che sta alla base di questo tipo di applicazioni, è l'organizzazione delle informazioni testuali, sonore, grafiche, iconiche. Si tratta, infatti, di una organizzazione tipo ragnatela in cui le informazioni sono messe in relazione tra loro ogni volta che esiste un legame concettuale o funzionale. La navigazione in una rete o in un ipermedia, cioè la possibilità di accedere a nuove videate che permettono di approfondire l'informazione di partenza, è data dall'attivazione dei legami previsti dal progettista nella relativa mappa.

Ma, in concreto, che cosa è questa mappa, come si costruisce e, soprattutto, quale ricaduta didattica offre?

Procediamo con ordine.

2.1 La mappa concettuale: una rappresentazione grafico - dinamica

Le mappa concettuale nasce nel campo di ricerca dell'intelligenza artificiale e costituisce la rappresentazione più astratta della conoscenza di un individuo in un determinato momento. È composta da nodi (cerchi) in cui si scrivono le parole-concetto (informazioni significative ai fini dell'oggetto di studio) e da linee che li collegano dall'alto verso il basso e, se esistono relazioni che accomunano due o più concetti che appartengono a rami diversi di una stessa mappa, anche trasversalmente.

Dal punto di vista teorico, la mappa concettuale è prevalentemente gerarchica: questo vuol dire che il concetto più generale si scrive in alto e, da questo, si fanno partire tante linee per quanti sono i nodi di livello (importanza) subito inferiore ai quali deve essere collegato. Da ciascuno di questi ultimi nodi, possono partire altre linee, verticali od orizzontali, che contribuiscono a formare e far crescere la mappa concettuale

Un'altra caratteristica di questa rappresentazione grafica è che, per sua natura, è soggettiva e mutabile nel tempo. Infatti, essa rispecchia l'organizzazione delle informazioni che una persona ha nella propria mente rispetto ad un dato argomento in un determinato momento. Nulla toglie che, a seguito di una discussione, dell'ascolto di un commento, della vista di un cartellone pubblicitario, di una lettura, ecc., la sistematizzazione delle conoscenze possedute possa subire modifiche, rimozioni, rafforzamenti.

Questo nuovo assetto delle conoscenze corrisponde ad una nuova mappa concettuale che sarà pertanto diversa dalla precedente.

Il carattere dinamico della mappa concettuale risiede proprio nella possibilità di intervenire per ampliare, modificare, rimuovere i concetti e la loro organizzazione, in qualunque momento. Per questo è importante favorire successivi ritorni, riflessioni sulle mappe elaborate: oltre ad incrementare la capacità di organizzare graficamente lo spazio del foglio e approfondire le proprie conoscenze relative ai nodi concettuali, è possibile ricostruire le diverse fasi della strutturazione cognitiva dell'autore. È una sorta di monitoraggio del processo in atto dal quale sarà possibile rilevare difficoltà di produzione linguistica (soprattutto nella scelta delle parole legame), di tipo spaziale, di individuazione delle parole concetto e dei relativi legami. Inoltre, sarà possibile rilevare l'abbandono progressivo di stereotipi di tipo grafico come mappe radiali o schemi prevalentemente procedurali.

Iniziano ad affiorare le possibili ricadute didattico/formative che si possono avere da un uso opportuno ed oculato di questa particolare rappresentazione grafica quando è l'alunno a costruirla.

3. Pensiero relazionale nell'educazione matematica

Smontare uno stereotipo, una conoscenza consolidata, è più difficile e faticoso che non rimuovere o adattare ad una nuova concezione/situazione un anello di un intero processo. Questo è possibile se si ha consapevolezza di come si è arrivati alla costruzione di una determinata conoscenza.

Sviluppare la consapevolezza dei propri processi mentali può aiutare ad affrontare con maggior efficacia il cambiamento, il "nuovo" che irrompe e che, spesso, urta, contrasta con i propri stereotipi, credenze, convinzioni radicati.

Un modo per prendere consapevolezza di ciò che avviene nella nostra mente quando essa costruisce pensiero, conoscenza, è quello di esteriorizzare i processi con cui associamo idee, concetti e le intuizioni sviluppate anche a livello spontaneo. Non è facile, anche perché siamo più abituati a sviluppare e a consolidare automatismi.

L'importanza della consapevolezza dei propri processi mentali, oggi, è sotto gli occhi di tutti, ed è proprio la produzione di applicazioni ipertestuali multimediali a fornirne le condizioni ottimali per questo scopo. Queste, infatti, sollecitano continui cambiamenti di stato: da quello di autore (progettista) a quello di lettore (fruitore). Questo andare e tornare tra i due stati induce un decentramento mentale/psicologico che rafforza le capacità valutative ed autovalutative, estetiche, funzionali e creative.

Attualmente, l'organizzazione, la gestione e il controllo di molte situazioni culturali, socio-economiche, ecc., richiedono al cittadino capacità valutative e di autonomia di azione. Tutto ciò non può prescindere da un atteggiamento culturale di apertura all'innovazione.

La riflessione su come costruiamo conoscenza e l'uso consapevole di risorse tecnologiche possono concorrere a sviluppare tali comportamenti.

Quanto detto è di particolare rilievo nell'educazione matematica dove l'organizzazione procedurale (vedi, per esempio, la costruzione di algoritmi) ha tradizionalmente occupato un posto di primaria importanza.

In realtà, la capacità di associare, mettere in relazione, proprietà con figure, assiomi con teoremi, geometrie non euclidee con quella euclidea, ecc., porta ad una visione più unitaria e strutturata del sapere matematico. Inoltre, a seconda del livello scolastico e della programmazione didattica, si potrà analizzare l'interazione della matematica, o parti di essa, con le diverse fasi dello sviluppo storico e scientifico delle civiltà.

Questo approccio, mostrando un volto nuovo, inusuale di questa disciplina, come evidenziato in molte esperienze, risulta particolarmente motivante per gli alunni, abituati a pensare alla matematica soltanto in termini di formule e numeri.

BIBLIOGRAFIA

A.A.V.V., *Controllo e autocontrollo nell'apprendimento scolastico. Orientamenti pedagogici*, anno XXXVII, n.3(219) mag.-giu. (numero monografico), Roma, 1990

ANTINUCCI, F., “Apprendere con gli ipermedia a scuola”, in IF,3, Milano, Giorgio Mondadori, 1996

AUSBEL, D.P., *Educazione e processi cognitivi Guida psicologica per gli insegnanti*, Milano, Franco Angeli,1994

FASANO, M., (a cura di), “Concetti in rete. Dalla costruzione della mappa concettuale alla produzione di un ipermedia”, Milano, Masson, 1998

LÉVY, P., *Le tecnologie dell'intelligenza. L'avvenire del pensiero nell'era informatica*, Milano, A/Traverso, 1992.

LAVORI DI GRUPPO

ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DIDATTICO DI STATISTICA, RIFERITO ALL'INTERO QUINQUENNIO

Raffaella Ceci
Istituto Professionale Statale per i Servizi Commerciali Turistici e Sociali "Paolo Frisi" - Milano
Cristina Mocchetti
Liceo Scientifico Statale "Ettore Majorana" - Rho (Milano)

Il percorso che presentiamo è sintesi dei lavori effettuati da due gruppi di docenti, l'uno costituito dagli insegnanti dell'Istituto Professionale, l'altro da insegnanti di Istituti Tecnici e di Liceo Scientifico. Pur avendo presente la differenza in termini sia di obiettivi che di contenuti, abbiamo ritenuto che, a livello di biennio, fosse possibile delineare un percorso didattico comune ai vari indirizzi, anche nell'ottica di un prolungamento dell'obbligo scolastico.

La costruzione di un percorso quinquennale realmente fattibile sulla Statistica deve tener conto, innanzitutto, degli obiettivi che si vogliono raggiungere e della metodologia con cui si vogliono proporre agli allievi gli specifici contenuti.

I programmi Ministeriali P.N.I. e Brocca stabiliscono già finalità e obiettivi sia per il biennio che per il triennio e suggeriscono la metodologia con cui affrontare non solo la statistica, ma tutti gli argomenti di matematica; il confronto tra le esperienze dei componenti dei gruppi di lavoro ha permesso di rielaborare gli obiettivi generali in relazione alla materia trattata, di suggerire la metodologia che è sembrata più idonea al raggiungimento di quegli obiettivi e infine di dimensionare in modo realmente fattibile i contenuti.

Finalità e Obiettivi:

Lo studio della statistica al biennio può essere finalizzato a far recepire e considerare criticamente le informazioni provenienti dai mezzi di comunicazione di massa e a sviluppare atteggiamenti fondati sulla collaborazione interpersonale e di gruppo; al triennio concorre, con altre parti della matematica e con le altre discipline, a sviluppare capacità critiche, a far acquisire un corpo organico di metodi e contenuti finalizzati ad una adeguata interpretazione della natura, a sviluppare capacità di usare modelli matematici in situazioni reali.

Sarà altamente fattiva la collaborazione dei docenti di tutte le discipline affinchè l'alunno acquisisca i criteri di analisi e gli strumenti di giudizio critico che gli permettano di gestire la complessità dell'ambiente che lo circonda.

In questa ottica gli obiettivi che riteniamo possano essere perseguiti con lo studio di tale disciplina sono:

BIENNIO	TRIENNIO
1. Conoscere il rilievo storico dell'approccio statistico alla risoluzione dei problemi	1. Inquadrare storicamente l'evoluzione delle metodologie statistiche
2. Acquisire la capacità di reperire informazioni anche in ambito territoriale	2. Saper reperire documenti anche in ambito territoriale
3. Operare con modelli deterministici	3. Operare con il simbolismo matematico riconoscendo le regole sintattiche di trasformazione di formule
4. Acquisire la capacità di risolvere semplici problemi mediante l'uso di strumenti informatici o di calcolo	4. Costruire procedure di risoluzione di un problema e, ove sia il caso, tradurli in programmi per il calcolatore
5. Acquisire chiarezza espositiva e precisione grafica	5. Saper utilizzare un linguaggio specifico in modo corretto e rigoroso
6. Matematizzare semplici situazioni tratte da vari ambiti disciplinari	6. Affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi di modelli matematici atti alla loro rappresentazione
7. Sviluppare la capacità di rappresentare e interpretare i dati	7. Potenziare la capacità di rappresentare ed interpretare i dati
8. Valutare la significatività di dati e indici statistici	8. Valutare la significatività di dati e indici statistici
	9. Valutare la significatività e la correttezza di metodi statistici

Collocazione temporale:

Dal momento che i programmi del biennio non presentano una suddivisione annuale dei contenuti ci è sembrato opportuno che la collocazione temporale degli argomenti di statistica del biennio fosse l'inizio della classe prima.

Benchè l'analisi della situazione iniziale sia un momento fondamentale per la programmazione annuale del singolo Docente, soffermandoci sugli argomenti di statistica stabiliti dal programma, abbiamo ritenuto che i prerequisiti per poter affrontare lo studio della statistica fossero minimi: proporzioni, calcolo con numeri decimali, frazioni generatrici, calcolo della radice quadrata, piano cartesiano.

La compilazione di un semplice questionario relativo a dati personali, proprio il primo giorno di scuola, permette agli allievi, a nostro avviso, di avviare la conoscenza reciproca e di sentirsi parte di un gruppo-classe finalizzato alla collaborazione; i semplici calcoli per determinare gli indici statistici di posizione e per costruire grafici corretti e significativi, facilita l'eventuale recupero sul calcolo con numeri frazionari, decimali, percentuali.

Contenuti:

BIENNIO	TRIENNIO
Statistica descrittiva univariata	Statistica descrittiva bivariata
1. Rilevazione statistica dei dati	1. Matrice dei dati
2. Sistemazione dei dati in tabelle	2. Tabelle a doppia entrata
3. Frequenze: assoluta, relativa, cumulata; densità di frequenza	3. Distribuzioni statistiche: congiunte, condizionate e marginali
4. Rappresentazioni grafiche: diagrammi a barre, areogrammi, istogrammi	4. Relazione tra due variabili quantitative e due qualitative: connessione, regressione e correlazione
5. Medie analitiche e di posizione: media aritmetica, moda, mediana	5. Inferenza statistica:stima dei parametri per modelli semplici[1]
6. Misura della variabilità: varianza, scarto quadratico medio	

[1] L' argomento compare inserito tra due asterischi nelle indicazioni programmatiche inviate dalla Direzione Generale del M.P.I. con circolare n.615 del 27 settembre 1996 relativa alle modalità di attuazione dei programmi sperimentali P.N.I.; per la sperimentazione Brocca si rimanda al commento al Tema 4, contenuto nei programmi stessi.

Metodologia:

Cogliendo i suggerimenti contenuti nelle indicazioni metodologiche dei programmi ministeriali, si privilegerà un "insegnamento per problemi", procedendo all'apprendimento per scoperta guidata allo scopo di portare gradualmente gli allievi a scoprire le relazioni matematiche ed il loro significato. In questo contesto acquista particolare significato il lavoro di gruppo articolato in fasi quali il lavoro secondo il compito assegnato, la discussione in intergruppo e la sistematizzazione finale dell'insegnante con lezione frontale o dialogata.

La trattazione dei contenuti seguirà un percorso "a spirale" al fine di far cogliere la reciproca relazione e connessione degli argomenti e di realizzare un apprendimento per approfondimenti successivi.

Allo scopo di motivare l'alunno e farlo sentire partecipe del proprio processo di apprendimento e di fargli cogliere l'importanza dei metodi statistici nei vari ambiti scientifici e nella realtà in generale, si possono effettuare, anche dal biennio, piccoli studi in ambito territoriale su problematiche di tipo economico e sociale.

Strumenti:

Stabiliti gli obiettivi e descritta la metodologia con cui verranno presentati i contenuti, sono validi ed efficaci strumenti schede di lavoro appositamente preparate per introdurre problemi e schede di verifica dell'apprendimento; tabelle ufficiali di dati (ISTAT, ASL), dati grezzi rilevati dagli studenti stessi attraverso un semplice questionario, dati raccolti nel laboratorio di fisica o di chimica, tabelle compilate dalla segreteria della scuola saranno strumenti per costruire tabelle e per introdurre problematiche legate alla connessione e correlazione. Anche il laboratorio di informatica verrà utilizzato sia per introdurre e analizzare dati in software predisposti o in un foglio elettronico, sia per introdurre, approfondire ed usare le strutture di un linguaggio di programmazione. Infine nel momento della sistematizzazione sarà utile il libro di testo, la lavagna luminosa per presentare le sintesi e i concetti cardine dell'argomento da trattare.

Verifiche:

Il conseguimento degli obiettivi fissati verrà valutato con verifiche formative e sommative e sarà "strettamente correlata e coerente, nei contenuti e nei metodi, con il complesso di tutte le attività svolte durante il processo di insegnamento-apprendimento"[2]

Le verifiche comprenderanno, oltre alle prove orali, le prove scritte articolate sia sotto forma di problemi ed esercizi di tipo tradizionale, sia sotto forma di test a risposta multipla, sia in forma di brevi relazioni su argomenti specifici proposti dal docente.

Al triennio si potranno utilizzare ai fini valutativi anche relazioni individuali o di gruppo inerenti alla soluzione di un problema con strumenti informatici.

Un percorso minimo nel biennio:

Il lavoro presentato nelle pagine seguenti dà un possibile sviluppo, per il biennio, del tema di Statistica, facendo soprattutto riferimento agli obiettivi 5 e 7 indicati in precedenza. Lo schema del percorso è di tipo ciclico:

dove per "TESTO" si intende, a seconda dei casi, un semplice insieme di dati o una tabella riepilogativa o un testo discorsivo.

Rilevato che il passaggio dal grafico al testo finito non può essere immediato, si possono indicare fasi successive gradualmente più complesse, come:

1.Approccio intuitivo guidato: partire da un grafico e da un "TESTO" per individuare termini specifici e correlazioni

2.Approccio guidato/autonomo: partire da un "TESTO" per far individuare termini specifici e successivamente costruire un grafico

3.Approccio autonomo: partire da un grafico, farlo interpretare e costruire un testo che descriva la situazione considerata.

Il grafico finale presenta i possibili collegamenti interdisciplinari.

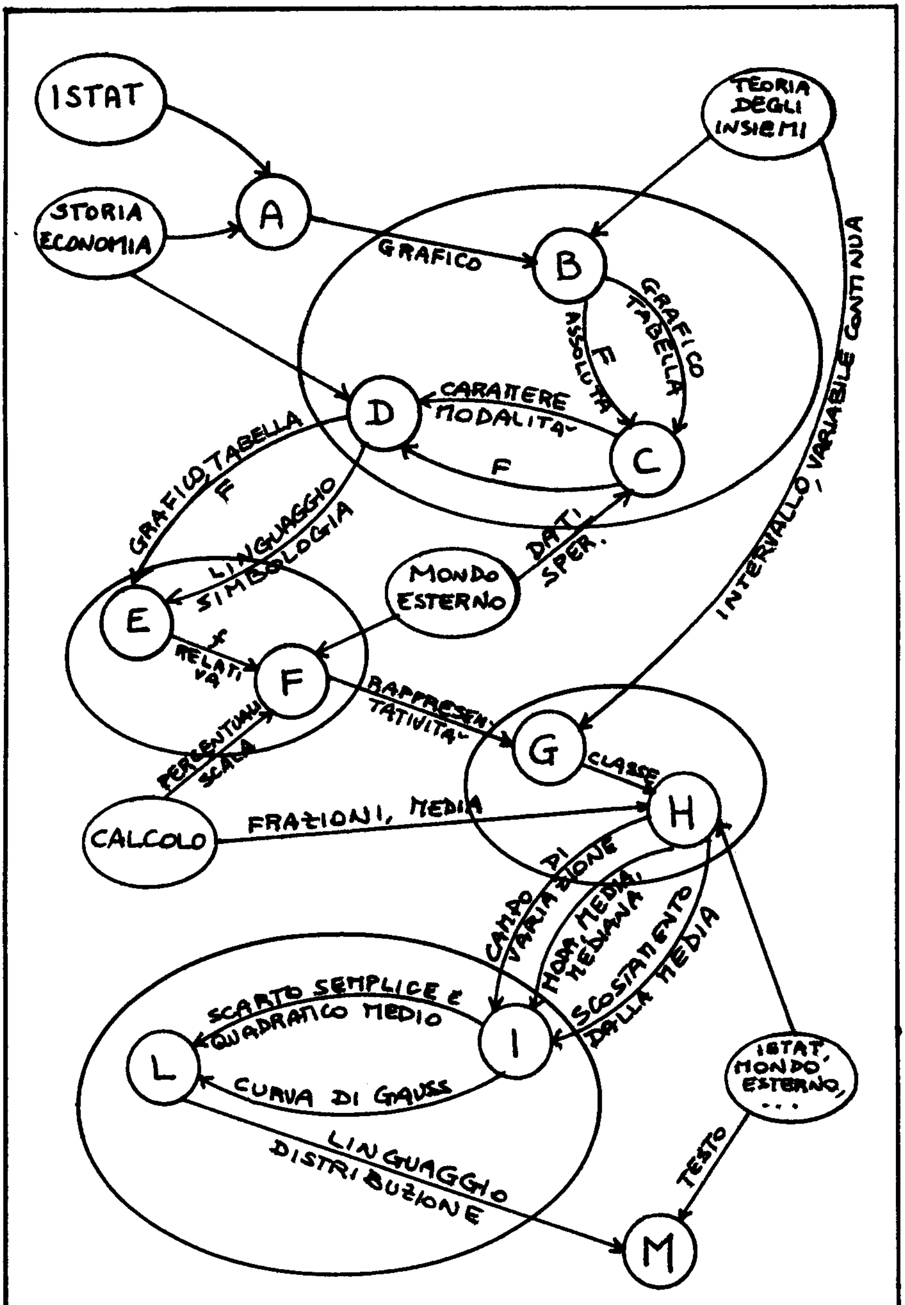
[2] dai programmi ministeriali formulati dalla Commissione Brocca

PERCORSO MINIMO DI STATISTICA NEL BIENNIO

(le lettere indicate nella prima colonna fanno riferimento al grafico finale)

	SITUAZIONE (da cosa partire)	**OPERAZIONI** (cosa far fare)	**CONCETTI** (da definire)	**ABILITA'** (da sviluppare)
A	grafici di statistica descrittiva	leggere e descrivere i grafici	grafico, modalità	osservare, leggere un grafico
B	grafico e tabella o grafico e dati grezzi (relativi a una variabile discreta)	confrontare grafico e tabella oppure grafico e dati grezzi ed individuare relazioni	frequenza assoluta (*F*), tabella, unità di misura, grafico, $\sum F = n$	osservare, mettere in relazione
C	questionario già compilato	dai dati grezzi costruire tabella e grafico		saper costruire
D	testo/articolo	individuare i dati, costruire tabella e grafico		decodificare testo, rilevare dati
E	raccolte dati con stesso carattere ma popolazioni diverse	costruire tabelle e grafici con *F*, poi con le frequenze relative	frequenza relativa (*f*), percentuale, $\sum f = 1$	osservare, mettere in relazione
F	istogramma e tabella (relativa a una variabile continua)	confrontare grafico e tabella ed individuare relazioni	intervallo, variabile, classe, insieme continuo di valori, distribuzione di frequenza	osservare, interpretare, mettere in relazione, analizzare

G	dati grezzi relativi a una variabile continua	dai dati alla costruzione della tabella e dell'istogramma	criteri di scelta dell'ampiezza delle classi, rappresentatività	decodificare testo, osservare, mettere in relazione, analizzare e sintetizzare
H	testo	dal testo alla costruzione della tabella e dell'istogramma, poi alla costruzione di un testo che descriva la distribuzione	moda, media, mediana, campo di variazione, scostamento dalla media, dispersione intorno alla media	elaborare dati, relazionare
I	testo/dati grezzi	dagli scarti alla teoria, calcolo e costruzione del grafico, significato degli indici, confronto fra grafico e curva di Gauss	scarto semplice medio, scarto quadratico medio (o deviazione standard), curva di Gauss	analizzare fenomeni statistici
L	testi/dati grezzi	confronto fra due distribuzioni diverse con gli stessi indici, osservazioni sull'andamento e posizione delle curve		cogliere analogie e differenze
M	dati grezzi (misurazioni)	dopo aver tracciato il grafico e calcolato gli indici statistici, costruzione di un testo che descriva la distribuzione	costruzione curva di Gauss	analizzare, sintetizzare



ISTAT
STORIA ECONOMIA
A
GRAFICO
B
TEORIA DEGLI INSIEMI
GRAFICO TABELLA
F ASSOLUTA
CARATTERE MODALITA'
D
C
F
GRAFICO TABELLA F
LINGUAGGIO SIMBOLOGIA
DATI SPER.
MONDO ESTERNO
INTERVALLO, VARIABILE CONTINUA
E
f RELATIVA
F
RAPPRESENTATIVITA'
PERCENTUALI SCALA
G
CLASSE
H
CALCOLO
FRAZIONI, MEDIA
CAMPO DI VARIAZIONE
MODA, MEDIA, MEDIANA
SCOSTAMENTO DALLA MEDIA
SCARTO SEMPLICE E QUADRATICO MEDIO
L
I
CURVA DI GAUSS
ISTAT, MONDO ESTERNO, ...
LINGUAGGIO DISTRIBUZIONE
TESTO
M

PROBLEMI NEL RACCORDO MEDIE-SUPERIORI PER I TEMI TRATTATI

Michele Boffa, Fabio Brunelli, Raffaella Ceci, Loretta Ferrante,
Rosa Iaderosa, A. Cristina Mocchetti, Domingo Paola, Silvano Rossetto

I problemi di raccordo fra scuola media e scuola superiore costituiscono una seria sfida per chi opera nel campo dell'educazione, quella matematica in particolare. Si tratta innanzitutto di prendere coscienza che ogni vero apprendimento richiede discontinuità, ristrutturazione del modo in cui le conoscenze sono organizzate; al tempo stesso è necessario rendere la discontinuità sopportabile, gestirla in modo sapiente e non traumatico per lo studente.
In [Ferrari, 1996] ci si riferisce alla continuità didattica come a un'*utopia possibile*: *utopia*, perché manca l'omogeneità culturale fra insegnanti di differenti livelli scolari e, in genere, non c'è la conoscenza dei programmi di livelli scolari diversi da quello nel quale si opera; *possibile*, perché vi sono alcune condizioni che dovrebbero aiutare a realizzare la continuità didattica. Per esempio, i nuovi programmi offrono a tutti i livelli un'immagine unitaria della matematica come disciplina culturale e formativa; i contenuti procedono a spirale, favorendo percorsi orientati alla continuità; le indicazioni metodologiche sono comuni: vi è l'insegnamento per problemi e la richiesta di una sempre maggiore consapevolezza che gli studenti devono raggiungere sugli argomenti che studiano e sulle operazioni che effettuano.

La mancanza di omogeneità culturale fra insegnanti della scuola media e insegnanti della scuola superiore è senza dubbio uno dei problemi più delicati per quel che riguarda il raccordo medie-superiori. Il fatto stesso che nella scuola media inferiore la maggioranza degli insegnanti abbia una laurea in scienze biologiche o naturali, mentre nel biennio di scuola superiore quasi tutti gli insegnanti possiedano la laurea in matematica, favorisce una differente impostazione della didattica che potrebbe anche causare allo studente qualche problema nel passaggio al livello scolare successivo [Paola, 1997].

Paradossalmente il problema della mancanza di omogeneità culturale dovrebbe essere meno sentito per quel che riguarda i nuovi temi dei programmi (logica, informatica, probabilità e statistica), sui quali gli insegnanti, sia delle medie, sia delle superiori si sentono impreparati. D'altra parte, per quel che riguarda tali argomenti, gli insegnanti di scuola media si trovano spesso nell'imbarazzante situazione di doverli proporre agli studenti, perché fanno parte del programma della scuola media, ma di non poter insistere quanto vorrebbero e quanto sarebbe necessario perché i programmi (o gli insegnanti!) tradizionali della scuola superiore non li prevedono. Tra l'altro, da un'indagine effettuata sugli insegnanti di scuola media della Liguria, risulta che la maggior parte degli insegnanti di scuola media inferiore non conosce i programmi sperimentali della scuola superiore, proprio quelli che sono stati pensati in continuità con la scuola media [Paola, 1996].

Oltre alla mancanza di omogeneità culturale e alla reciproca non conoscenza dei programmi, gli insegnanti di scuola media inferiore e di scuola media superiore che hanno partecipato ai lavori di gruppo hanno evidenziato alcuni problemi che possono essere suddivisi nelle due seguenti categorie:

1. problemi di carattere metodologico e psicopedagogico
2. problemi legati ai contenuti proposti nei due ordini di scuola

Come emerge dall'indagine sopra menzionata e riportata in [Paola, 1996], i problemi di cui al punto 1. sono soprattutto sentiti dagli insegnanti di scuola media inferiore, che tengono in maggiore considerazione dei loro colleghi della superiore i problemi di carattere psicopedagogico che sorgono nel rapporto con gli studenti. Gli insegnanti di scuola media superiore, invece, sono maggiormente interessati dei loro colleghi delle medie inferiori alla definizione dei contenuti minimi, ossia di quei contenuti che uno studente che si iscrive al primo anno di scuola secondaria di secondo grado dovrebbe possedere.

Tutti gli insegnanti che hanno partecipato ai lavori di gruppo sono stati d'accordo nell'evidenziare che l'avvio precoce alla formalizzazione può essere considerato una delle principali cause della perdita di senso e di controllo, da parte degli studenti, delle operazioni effettuate. In altri termini, pur convenendo sull'opportunità di avviare gli studenti all'uso di un linguaggio sempre più preciso e rigoroso e alla graduale conquista di livelli di astrazione sempre più elevati, gli insegnanti hanno paventato che l'avvio precoce alla formalizzazione possa pregiudicare la comprensione, da parte degli studenti, dell'attività matematica svolta. Se, d'altra parte, formalizzare significa liberarsi da un contenuto, allora si deve convenire che non ha senso formalizzare prima che tale contenuto sia stato fatto proprio dagli studenti. Non tenere conto di ciò può portare a generare negli studenti "atteggiamenti formali ignari, ma non sofisticati" [Prodi,1977, p. 145]. Le indicazioni dei programmi, sia della scuola media, sia della scuola superiore avvertono, più o meno esplicitamente, del rischio che si può correre con una precoce formalizzazione e suggeriscono di *condurre gradualmente a verificare la validità delle intuizioni e delle congetture con ragionamenti via via più organizzati*; di far *ricorso ad osservazioni, esperimenti, problemi, tratti da situazioni concrete*; di *condurre progressivamente lo studente dall'intuizione e scoperta di proprietà (geometriche) alla loro descrizione razionale*; di far *leva sulle conoscenze intuitive apprese dallo studente nella scuola media...* Sia gli insegnanti di scuola media, sia quelli di scuola superiore dovrebbero preoccuparsi di stimolare l'interesse dello studente, di farlo sentire protagonista del proprio apprendimento. Il laboratorio di informatica, i problemi di probabilità e statistica, la riflessione a cui invita la logica quando viene utilizzata per meglio comprendere ed effettuare attività di matematica, dovrebbero aiutare l'insegnante in questo compito. Non si deve commettere l'errore, però, di pensare che una nuova tecnologia o un nuovo campo di problemi o un nuovo argomento possano, di per sé, portare significativi cambiamenti nella didattica, risolvendo di colpo annosi problemi. È il modo in cui si usa una nuova tecnologia, è come si pongono problemi e argomenti che può consentire di rendere più efficace l'azione didattica. In altri termini, fare della probabilità o della statistica altre piccole teorie matematiche, sostituire il calcolo letterale con le "patate di Eulero-

Venn" o con le tavole di verità, o con un qualsiasi calcolo logico sarebbe solo un modo di introdurre i nuovi temi nello stesso modo in cui si trattavano (e si trattano) quelli più tradizionali. Un cambiamento effettivo si potrà avere solo quando si riuscirà a guardare anche gli argomenti classici da una nuova prospettiva. André Chénier lanciò il motto "antica sia l'arte con cui vibri il tuo stral, ma nuovo l'oggetto cui miri"; è auspicabile che, per l'insegnante della scuola moderna, il motto sia convertito in "antico sia pure l'oggetto cui miri, ma nuova sia l'arte con cui vibri il tuo stral".

Un aspetto su cui riflettere attentamente è il seguente: la causa di maggior insuccesso per gli studenti nel biennio della scuola secondaria superiore è il calcolo letterale. Sembra che la valutazione e la selezione si giochino quasi esclusivamente su questo argomento: non si giudicano gli studenti sul possesso di abilità linguistiche, sulla capacità di verbalizzazione, di congetturare e di validare congetture, ma su abilità di tipo più meccanico, come eseguire correttamente la semplificazione di un'espressione letterale. La discontinuità evidenziata dalla forte selezione nel biennio della scuola secondaria superiore sembra quindi in gran parte da imputarsi alle difficoltà degli studenti nel calcolo letterale: ma che ne è delle altre abilità come saper leggere un testo; rappresentare, ordinare e correlare dati; produrre congetture; modellizzare; argomentare e dimostrare; lavorare in piccoli gruppi; sintetizzare ed esporre posizioni ....? Quali strumenti sono stati pensati e adottati per valutare i progressi degli studenti nell'acquisizione di tali competenze?

Tutti gli insegnanti che hanno partecipato ai lavori di gruppo si sono trovati d'accordo nel sostenere che non vi sono rimedi semplici e generali per i problemi di raccordo tra medie e superiori. Si possono fornire indicazioni di massima, come suggerire di impostare attività in cui gli studenti possano condurre esperimenti in prima persona; invitare e aiutare gli studenti a lavorare confrontandosi in piccoli gruppi; far loro produrre congetture e richiedere di validarle anche con l'aiuto di strumenti di calcolo automatici; richiedere loro di scoprire da soli regole e semplici formule; aiutarli nella costruzione di modelli di alcune situazioni reali... Queste indicazioni e suggerimenti non possono, però, sostituire un lavoro di confronto, di chiarimento di posizioni e di programmazione comune fra insegnanti delle medie e delle superiori. Per favorire la gestione accorta ed efficace della continuità, ovvero per rendere le necessarie discontinuità sopportabili dagli studenti, sono necessari frequenti momenti di confronto fra insegnanti di scuola media e di scuola secondaria superiore su problemi che si incontrano nella prassi didattica. Un suggerimento interessante è stato fornito, in questa direzione, da una partecipante ai lavori di gruppo, la prof. Maria Chimetto, che ha riferito di un'esperienza che è stata avviata in alcune scuole medie e superiori di Vicenza: all'atto della conferma dell'iscrizione alla scuola superiore, agli studenti è stato consegnato un quaderno contenente proposte di esercitazioni, guidate e no, risultato da un lavoro di progettazione comune tra insegnanti di scuola media e di scuola superiore. Anche a Vado, in provincia di Savona, insegnanti delle scuole medie e delle scuole superiori hanno avviato, ormai da più di dieci anni, a livello provinciale, un'iniziativa di aggiornamento e di confronto periodico, di progettazione comune. Si tratta di due fra le tante esperienze che fioriscono a livello locale, ma che non sono ancora sufficientemente diffuse. La speranza è che iniziative di questo tipo possano avere una sufficiente risonanza, per poter servire da punto di partenza per la nascita di altre forme di collaborazione, che potrebbero servirsi delle esperienze, sia di quelle negative, sia di quelle positive già maturate.

BIBLIOGRAFIA

Ferrari, M.: 1996, Continuità: utopia possibile, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 19A, 3, 207-222.

Paola, D.: 1996, *Analisi delle risposte al questionario sulla continuità nella didattica della matematica nel passaggio dalle medie alle superiori*, suppl. Boll. IRRSAE Liguria (da pubblicare).

Paola, D.: 1997, I nuovi temi dei programmi: è realistico parlare di continuità tra medie e superiori?, Micale, B. & Pluchino, S. (a cura di), *NUMI, XVIII convegno nazionale sull'insegnamento della matematica*, supplemento al n. 7, Campobasso, 49-62.

Prodi G.: 1977, *Guida al progetto d'insegnamento della matematica*, vol. 1 D'Anna, Firenze-Messina

GLI ERRORI PIÙ FREQUENTI NEI TEMI PREVISTI DAL CORSO

Raffaella Ceci, A. Cristina Mocchetti, Domingo Paola, Silvano Rossetto

Alan Turing ha detto che l'errore è un segno di intelligenza; Rodari ha parlato dell'errore come di un atto di creatività. Più frequentemente l'errore indica un disagio cognitivo o, talvolta, emotivo. In ogni caso una seria e attenta analisi degli errori commessi dagli studenti può essere fonte di indicazioni e suggerimenti molto significativi per l'insegnante.

Nella ricerca didattica la valenza educativa dell'errore è stata ampiamente discussa e precisata (Goupille, Thérien & others, 1987; Ferreri, Spagnolo, 1994). Un'attenta analisi degli errori commessi dagli studenti può offrire indicazioni sui loro schemi concettuali, sul modo di porsi nei confronti della disciplina, sul come organizzano le conoscenze, sugli eventuali fraintendimenti relativi ad alcuni argomenti oggetto di studio e, anche, su certe inopportunità didattiche di cui non sempre l'insegnante è consapevole.

Lo studio delle ragioni che stanno all'origine degli errori richiede competenze assai diversificate: da quelle di carattere storico-epistemologico, a quelle di carattere cognitivo e psico-pedagogico, a quelle più specificamente relative ai principi e alle tecniche della disciplina. Questa analisi può portare l'insegnante a riflettere più a fondo sulle attività didattiche programmate, prevedendone i limiti e le potenzialità e riducendo il rischio di errori didattici che non aiutano gli studenti a superare gli ostacoli e le difficoltà che incontrano nell'apprendimento, in quello della matematica in particolare.

Allo scopo di esemplificare alcune modalità di analisi degli errori commessi dagli studenti ci proponiamo di:

- elencare alcuni errori commessi dagli studenti e discussi durante i lavori di gruppo, in particolare quelli relativi ai temi di logica, di probabilità e di statistica

- effettuare ipotesi sulle origini di alcuni degli errori elencati

Elenco di alcuni degli errori discussi nei lavori di gruppo

Ci sono sembrati di particolare rilevanza, sia per la frequenza con cui si presentano, sia per le loro implicazioni didattiche, i seguenti errori:

1. uso scorretto dei connettivi logici e dei quantificatori, con particolare riferimento alle difficoltà degli studenti di fronte alla negazione di proposizioni contenenti quantificatori
2. confusione tra ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema e, più in generale, tra dati e domanda in un problema
3. utilizzazione, nell'attività dimostrativa, di regole di inferenza non valide
4. errato calcolo degli indici centrali (media, moda e mediana) e confusione nella loro interpretazione
5. impiego della legge delle probabilità totali in situazioni che vanno riferite a probabilità composte
6. utilizzazione delle sole frequenze assolute in problemi e contesti che richiedono l'uso delle frequenze relative

Esempio di analisi di alcuni errori del tipo di quelli evidenziati nei punti 1. *e* 3.

Si può ipotizzare che una delle principali cause di errori del tipo 1.e 3. sia l'utilizzazione di termini, di parole e di regole che, nel linguaggio comune, hanno modalità di impiego talvolta contrastanti con l'uso che se ne fa nell'attività matematica.

Per esempio, la disgiunzione *o* è spesso utilizzata nella lingua italiana in senso esclusivo, mentre nell'attività matematica il senso è prevalentemente quello inclusivo della logica. Inoltre gli studenti tendono a evitare di ricavare da un insieme di premesse conclusioni che siano banalmente contenute nelle premesse stesse; in alcuni casi addirittura rifiutano tali conclusioni. Per esempio, non accettano che dalla proposizione

p: *per ogni x reale* x^2+1 *è maggiore di* 0

si possa dedurre la proposizione

q: *per ogni x reale* x^2+1 *è maggiore o uguale a* 0

La deduzione viene ritenuta "scorretta" o "senza senso" o "inutile e come tale da rifiutare". Sembra che lo studente non sia disposto ad accettare di affermare semplicemente la *verità* quando può dire *tutta la verità*: si noti che questa posizione è quella che viene in genere auspicata non solo in un'aula giudiziaria, ma anche nelle situazioni comuni! Nella vita quotidiana si tendono ad escludere conclusioni nelle quali parte dell'informazione contenuta nelle premesse viene persa [Johnson-Laird, 1994]: la proposizione p contiene maggiore informazione della proposizione q, pertanto il *senso comune* è quello di non accettare che da p si possa derivare q, nonostante ciò sia coerente con le leggi della logica classica e, in particolare, con l'uso della disgiunzione *o* nella logica proposizionale.

Le difficoltà legate all'uso del condizionale, come noto, sono ancora maggiori. A questo proposito riportiamo quanto è detto in [Ferro, 1993, p. 32]: "Per non dire poi delle difficoltà della parola *implica*, del *se ... allora*, del *ogniqualvolta succede.... accade anche.* E se la frase al posto dei puntini, cioè l'antecedente, non è vera, l'intera affermazione è vera o no, o non ha significato? In matematica si fa una scelta precisa: se l'antecedente è falso la frase è vera comunque; ma questa convenzione non è per niente usuale nel linguaggio comune".

Spesso gli studenti ritengono di poter concludere, dalle due premesse $p \rightarrow q$ e q, la proposizione p. Questo errore viene in genere spiegato ipotizzando che gli studenti confondano l'implicazione semplice con la doppia implicazione. Esiste, però, almeno un'altra interpretazione delle origini dell'errore, che fa riferimento all'uso, da parte degli studenti, di regole inferenziali diverse da quelle della logica deduttiva. Secondo tale punto di vista, più che di errore, si dovrebbe parlare di un uso inopportuno di regole caratteristiche del pensiero induttivo. Nella *ricerca delle cause* si parte molto spesso da osservazioni; supponiamo che si sia osservato che *tutte le volte che si verifica l'evento* p *si verifica anche l'evento* q. L'osservazione di q porta a ipotizzare che possa essersi verificato p. In altri termini si utilizza uno schema di inferenza del tipo

$$\frac{p \rightarrow q\,,\quad q}{\text{forse } p}$$

L'errore dello studente consisterebbe, in tal caso, non tanto nel confondere implicazione semplice e doppia implicazione, quanto nell'estendere alla logica deduttiva regole inferenziali utilizzate in ambiti differenti.

È probabile che nell'esperienza didattica di un insegnante sia capitato almeno una volta di vedere uno studente che rifiuta di considerare falsa una proposizione quantificata universalmente e che cade in difetto solo in "pochi" casi. Per esempio, la proposizione

Ogni numero primo è dispari

viene considerata "vera tranne che per 2" e non falsa (come richiede la logica classica). In tal caso si può ipotizzare che il quantificatore universale non sia tenuto nella dovuta considerazione, ma anche che vengano (inconsapevolmente) utilizzate logiche diverse da quella classica, per cui una proposizione o è vera o è falsa e non si danno altre alternative. Forse gli studenti utilizzano logiche più sfumate, in cui quella proposizione è *quasi vera* o, meglio, *vera tranne che per un caso* [Zazkis, 1995]. Questo è anche quello che si fa, per esempio, nelle scienze fisiche e nella loro didattica, dove un'affermazione come *i liquidi riscaldati si dilatano* non viene considerata *falsa*, ma *vera tranne che per alcune eccezioni*, (p.e. l'acqua in particolari condizioni).

L'uso appropriato dei quantificatori nella pratica matematica è inoltre reso assai problematico dal fatto che nella lingua italiana (di cui usiamo le parole per parlare degli oggetti della matematica!) sono presenti vari modi di esprimere i quantificatori, spesso con accezioni diverse da quelle della matematica. Per esempio, se dico che *alcuni milanesi portano gli occhiali*, sottintendo anche che *alcuni milanesi non portano gli occhiali*. Nella logica classica (e in matematica) affermare che $\exists x\ P(x)$ (esiste x che gode della proprietà P) non equivale ad affermare che $\exists x \neg P(x)$ (esiste x che non gode di P).

Quando si devono combinare negazione e quantificazione le difficoltà aumentano. A quelle della quantificazione si aggiungono le difficoltà legate alla negazione. Dovrebbe essere sufficiente pensare che nella lingua italiana si negano, oltre alle proposizioni, anche aggettivi, avverbi, nomi; che nella lingua italiana non sempre due negazioni affermano; che dal punto di vista insiemistico negare un predicato P vuol dire passare al complementare dell'insieme di verità di P e, in alcuni casi, l'esplorazione estensiva e il controllo di tale insieme possono rivelarsi impossibili. Consideriamo, per esempio, la seguente proposizione

p: Tutti i veneti sono italiani

che, allo stato attuale, è una proposizione vera. Se si chiede a una classe di studenti di negare la proposizione p, si ottengono, in genere, almeno due proposizioni:

q: Non tutti i veneti sono italiani *r: Nessun veneto è italiano*

entrambe false. Se si obietta semplicemente che r non è corretta possiamo ricevere come risposta che sia q sia r cambiano il valore di verità di p e quindi possono ritenersi entrambe una negazione di p. Si può avere maggiore successo facendo notare che in una proposizione falsa come *tutti i numeri naturali sono dispari*, la prima strategia utilizzata per negare una proposizione funziona. Infatti *non tutti i numeri naturali sono dispari* è vera. Invece la seconda strategia non ha successo: infatti *nessun numero naturale è dispari* è falsa come la proposizione che si voleva negare.

Quanto detto suggerisce di fare molta attenzione nell'utilizzare il linguaggio naturale per parlare degli oggetti della matematica: evidentemente non se ne può fare a meno, ma l'analisi ora condotta suggerisce che si debbano anche precisare ed evidenziare le differenze tra la lingua naturale e il linguaggio matematico, tra le regole del senso comune e quelle della logica deduttiva.

BIBLIOGRAFIA

Ferreri, M. & Spagnolo, F.: 1994, *L'apprendimento tra emozione e ostacolo*, Quaderno n.4 del G.R.I.M., Palermo.

Ferro, R.: 1993, Alcune osservazioni per l'insegnamento della logica, in Franco Di Cataldo (a cura di) *L'insegnamento della matematica nei nuovi programmi per il biennio della scuola secondaria superiore*, IRRSAE del Veneto, Mestre.

Goupille, C., Thérien, L & others (editors): 1987, *Proceedings of the CIEAEM 39*, Sherbrooke, Québec.

Johnson-Laird, P.N.: 1994, *Deduzione. Induzione. Creatività*, Il Mulino, Bologna.

Zaskis, R.: 1995, Fuzzy thinking in non-fuzzy situations: understanding students' perspective, *For the learning of mathematics*, v.15, n.3, 39-41.

ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DI LOGICA RELATIVO ALL'INTERO QUINQUENNIO

Domingo Paola
Liceo Scientifico "G. Bruno", Albenga, Savona

La logica compare nei nuovi programmi di matematica a due livelli:

- come logica matematica
- come logica nella matematica o per la matematica

Nel primo caso conoscenze, concetti e strumenti della logica sono oggetto di studio a sé; nel secondo, invece, essi vengono utilizzati per meglio effettuare e comprendere attività di matematica. Per esempio, *riconoscere concetti e regole della logica in contesti argomentativi e dimostrativi*, oltre a comparire esplicitamente fra gli obiettivi di apprendimento dei programmi Brocca per il biennio, è un'attività di logica *nella* o *per* la matematica. Lo studio esplicito delle regole di deduzione, che compare nel commento al tema 5 dei programmi Brocca del biennio, è un'attività di logica matematica.

Gli insegnanti appartenenti al gruppo di lavoro che si è occupato di elaborare un percorso di logica relativo all'intero quinquennio si sono trovati d'accordo, in particolare, sui seguenti punti:

- le attività di logica *nella* o *per* la matematica sono quelle da privilegiare nell'insegnamento secondario, in quanto aiutano lo studente ad acquisire consapevolezza delle proprie conoscenze
- gli elementi di logica devono pervadere tutto il curriculum quinquennale; è quindi opportuno presentarli come una riflessione man mano che si arricchisce l'esperienza matematica dello studente
- è opportuno, in continuità con la scuola media, evidenziare i legami tra logica e linguaggio comune; in seguito, senza abbandonare questo "filone", collegare la logica all'attività deduttiva e, alla fine del quinquennio, e con quegli alunni che avranno raggiunto una buona esperienza matematica, legare le attività di logica allo studio delle teorie matematiche, intese come sistemi ipotetico-deduttivi

• l'opportunità di trattare la logica in modo trasversale rende poco significativa la definizione di un vero e proprio percorso; è preferibile fornire le linee generali della proposta e trattare in modo più approfondito due esempi di possibili attività didattiche

La proposta che di seguito viene presentata è stata elaborata da insegnanti di licei scientifici, classici e di istituti tecnici; non si può negare, quindi, che sia stata pensata in particolare per alunni di questo tipo di scuole. Nonostante ciò ritengo che la maggior parte delle attività e degli argomenti proposti siano adatti anche a studenti di altri istituti.

Le linee generali della proposta

Biennio: logica e linguaggio.

L'obiettivo principale è quello indicato nel commento al tema 5 dei programmi Brocca del biennio: *fin dall'inizio bisogna abituare lo studente all'uso appropriato del linguaggio e delle formalizzazioni, a esprimere correttamente le proposizioni matematiche...*

Triennio: logica e dimostrazioni; logica e teorie matematiche

L'obiettivo principale è quello di utilizzare l'esperienza nell'attività dimostrativa effettuata dallo studente durante il biennio, in vari campi della matematica (aritmetica, algebra, probabilità, oltre alla geometria), per fare della dimostrazione un oggetto di studio e di didattica. Ciò porta, gradualmente, alla precisazione delle nozioni di assioma, definizione, teorema, regola inferenziale e consente di approfondire le relazioni tra piano sintattico e piano semantico, spesso confusi nella prassi didattica. Il passo finale, quando l'interesse e la preparazione degli studenti lo consentano, è quello di affrontare lo studio di una teoria matematica, enunciando alcuni risultati di carattere metateorico che la caratterizzano.

Nella prima colonna della tabella, che riporta sinteticamente la proposta elaborata dal gruppo di lavoro, vengono suggeriti alcuni esempi di attività; nella seconda colonna sono riportati gli argomenti di logica che possono essere introdotti durante le attività, proprio allo scopo di meglio precisare e far comprendere gli argomenti di matematica che caratterizzano quelle attività.

Esempi di attività di matematica	Contenuti di logica
Definizione di un'espressione numerica; espressioni letterali come schemi di calcolo o come funzioni. Studio della sintassi di un linguaggio di programmazione	Alfabeto e formule ben formate; sintassi e semantica; linguaggio e metalinguaggio
Calcolo della probabilità di eventi composti; algebra degli eventi e algebra degli insiemi. Analisi dell'enunciato di un teorema; individuazione delle ipotesi, della tesi e della relazione di conseguenza logica che le collega. Strutture di controllo di un linguaggio di programmazione	Logica proposizionale Connettivi logici Valore di verità di una proposizione
Insiemi e proprietà. Equazioni e disequazioni; equazioni parametriche	Variabili, predicati e quantificatori
Analisi logica di segmenti di dimostrazioni Analisi di alcuni tipi di dimostrazione (diretta, per assurdo, per induzione, dimostrazioni di esistenza costruttive e non costruttive, dimostrazioni che sono calcoli, dimostrazioni che sono correttezza di calcoli ....). Analisi di come varia la tesi al variare delle ipotesi di un teorema (l'attività è particolarmente significativa con i teoremi dell'analisi matematica)	Regole di inferenza nella logica dei predicati Conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria
Cenni alle geometrie finite. Cenni alle geometrie non euclidee. Assiomatizzazione di una parte della matematica nota agli studenti (a scelta tra: probabilità, aritmetica, geometria elementare)	Assiomi e modelli di sistemi di assiomi Risultati metateorici relativi ai sistemi formali

A scopo esemplificativo presento, più in particolare, due delle attività che sono state proposte. I riferimenti bibliografici possono offrire spunti più numerosi e significativi al lettore interessato.

1. *Definizione di un'espressione numerica*

Uno dei più frequenti e persistenti errori commessi dagli studenti riguarda il controllo della correttezza delle operazioni eseguite nella semplificazione di espressioni numeriche o letterali. In effetti difficilmente si dà, nella prassi didattica, una definizione soddisfacente di espressione: in genere si auspica che lo studente, dopo aver visto svolgere e aver svolto egli stesso molte espressioni, sia in grado di riconoscere o prevenire errori di sintassi nella semplificazione di un'espressione. Alcune tecniche della logica matematica, come per esempio quella delle definizioni induttive, potrebbero essere utilizzate per meglio definire e comprendere la nozione di espressione, nel caso qui preso in esame, quella di espressione aritmetica. Al tempo stesso l'esperienza degli studenti raggiunta nel campo delle espressioni aritmetiche potrebbe essere utile per far comprendere loro le potenzialità di alcuni argomenti della logica matematica.

Immaginiamo che gli studenti sappiano che cosa è un numero naturale, nel senso che supponiamo che gli studenti sappiano riconoscere se un dato numero è o non è un numero naturale. Il seguente sistema di regole definisce, induttivamente, che cosa si intende per espressione aritmetica (si sono prese in considerazione solo le espressioni in cui intervengono unicamente addizioni e moltiplicazioni):

- ogni numero naturale è un'espressione aritmetica
- se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono espressioni aritmetiche, anche $(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ e $(\mathcal{A}\mathcal{B})$sono espressioni aritmetiche
- nient'altro è un'espressione aritmetica

Si può far notare la presenza, nelle regole, di segni del linguaggio e del metalinguaggio: le lettere calligrafiche $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ stanno per qualunque espressione del linguaggio oggetto. Si può far notare che, secondo le regole date, 2^3 non può essere considerata un'espressione aritmetica. L'esigenza di considerare anche espressioni del tipo 2^3 porta a due possibilità: o dare nuove regole o definire il nuovo oggetto nei termini di quelli che si hanno a disposizione. Così 2^3 può essere definito come $((2\cdot 2)\cdot 2)$. Si può poi notare che la proprietà associativa, di cui vogliamo che goda la moltiplicazione porta all'identificazione di $((2\cdot 2)\cdot 2)$ con $2\cdot 2\cdot 2$, il che può essere fatto tramite un'altra definizione. In tal modo la logica contribuisce a precisare il concetto di espressione aritmetica, ma al tempo stesso l'esperienza che gli studenti hanno acquisito nel calcolo delle espressioni può essere utile per una prima introduzione di nozioni come quelle di sintassi, semantica, linguaggio, metalinguaggio, regola...

2. *Analisi logica di segmenti di dimostrazioni*

Consideriamo il seguente cenno di dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$:

supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2}$ sia razionale, ossia che $2n^2 = m^2$ con m e n naturali primi fra loro. Considerando i possibili casi (n pari e m dispari, n dispari e m pari, m e n entrambi dispari) si ottiene sempre una contraddizione. Allora possiamo concludere che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

L'analisi logica della dimostrazione consiste nell'evidenziarne la struttura. Ciò può essere effettuato ricorrendo a un opportuno calcolo logico. Qui viene utilizzato quello della deduzione naturale:

$$
\begin{array}{lcccl}
 & & [\neg p] & & \\
 & [a] & [b] & [c] & \\
a \vee b \vee c & \perp & \perp & \perp & \\
\hline
 & & \perp & & (\vee\ \text{Elim.}) \\
\hline
 & & p & & (\text{Abs}_C)
\end{array}
$$

Legenda. p: $\sqrt{2}$ è irrazionale; a: n è pari e m è dispari; b: n è dispari e m è pari; c: m e n sono entrambi dispari; $\perp$ è il simbolo per l'assurdo. Tra parentesi quadrata sono state indicate le premesse scaricate, mentre alla destra della riga che separa le premesse dalle conclusioni sono state riportate le regole inferenziali utilizzate nei segmenti della dimostrazione presi in considerazione ("eliminazione della *o*" e "assurdo classico")

Bibliografia

Bellissima, F. & Pagli, P.: 1993, *La verità trasmessa*, Sansoni, Firenze.

Ciarrapico, L. & Mundici, D. (a cura di): 1995, *L'insegnamento della logica*, atti seminario AILA-MPI.

Ciceri, C., Furinghetti, F. & Paola, D.: 1996, Analisi logica di dimostrazioni per entrare nella logica della dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol 19B, n.3, 209-234

UN PERCORSO DIDATTICO SULLA PROBABILITÀ PER IL QUINQUENNIO DI SCUOLA MEDIA SUPERIORE

Silvano Rossetto
Istituto Tecnico per il Turismo "G. Mazzotti" - Treviso

Flavio Agostinis	I.T.C.S. 'Mattiussi' - Pordenone
Teresa Boccia	I.S.A. 'Palizzi' - Napoli
Liliana Curcio	I.S.A. - Monza (MI)
Ugo Di Meglio	Liceo Artistico 'P. Aldi' - Grosseto
Licia Di Silvestre	I.T.C.S. 'Manthone' - Pescara
Giovanni Florio	I.T.A. 'Cuppari' - Messina
Giorgio Pietrocola	I.T.C.S. 'Botticelli' - Roma
Enrico Smargiassi	I.T.G. 'Pacinotti' - Bologna
Carlo Tosone	I.T.C.S. 'Torrente' - Casoria (NA)
Ferruccio Veglio	Liceo Artistico 'Bianchi' - Cuneo
Gabriella Vencia	I.T.C.S. 'Serra' - Cosenza
Maria Zanarini	I.S.A. - Roma

coordina il gruppo:
Silvano Rossetto I.T.T. 'G. Mazzotti' - Treviso

1. PREMESSA

Nel gruppo di lavoro che ha avuto il compito di analizzare il tema della probabilità, nel suo sviluppo durante tutto il quinquennio di scuola superiore, sono presenti insegnanti provenienti da istituti che prevedono nel triennio questo tema anche nel programma di matematica dei corsi ordinari (istituti tecnici commerciali) e insegnanti di istituti (licei, istituto d'arte) nei quali il tema è presente solo nei corsi sperimentali in particolare al biennio.

Si è stabilito di procedere ad un'analisi del tema nei programmi sperimentali, in particolare del Progetto 'Brocca' e del PNI dell'intero ciclo di studi con l'intento di evidenziare alcuni caratteri comuni. Ci si è inoltre proposti di strutturare, per grandi linee, un possibile percorso didattico sulla probabilità per il biennio, mentre, per il triennio, si è cercato di sviluppare in modo più dettagliato un argomento che presenta elementi di criticità di approccio per gli allievi ai quali è rivolto.

Al gruppo è sembrato interessante notare le seguenti caratteristiche nei programmi del biennio e del triennio:

contenuti: al biennio i contenuti si presentano omogenei per tutti gli indirizzi di studio, mentre sono ben differenziati fra le scuole in cui la matematica è presente nell'area d'indirizzo e quelle in cui non lo è;

metodologia: al biennio viene in ogni caso privilegiato un approccio intuitivo, che fa riferimento alle esperienze della vita reale e che offre un contesto di problemi di applicazione degli strumenti di calcolo studiati. Al triennio invece l'approccio è formale. La trattazione si limita al discreto negli istituti che non hanno la matematica nell'area di indirizzo per passare anche al continuo nelle altre scuole. Si fa infine osservare che, mentre al biennio si evidenziano le correlazioni della probabilità con gli altri temi disciplinari, al triennio il tema ha un carattere più autonomo e viene generalmente trattato separatamente.

2. UN POSSIBILE PERCORSO DIDATTICO AL BIENNIO

Durante il corso del biennio, in particolare nel primo anno, la probabilità offre un contesto di problemi utili a motivare e a consolidare gli strumenti matematici che si studiano. Indichiamo nel seguito un possibile percorso didattico che evidenzia queste correlazioni.

- frazioni - percentuali - numeri decimali	- valutazione intuitiva della probabilità di un evento
- insiemi e loro operazioni - calcolo delle proposizioni	- eventi disgiunti - principio della somma
- prodotti notevoli - triangolo di Tartaglia - coefficienti binomiali	- eventi indipendenti - probabilità incondizionata - principio del prodotto

La probabilità, come pure gli altri temi del programma del biennio, deve trovare un supporto all'intuizione nell'uso di strumenti grafici quali tabelle, diagrammi ad albero, grafi.

In questo possibile percorso, si può presentare la probabilità di due eventi indipendenti nel modo che segue.

Prerequisiti:

- concetto di evento elementare
- insieme degli eventi possibili
- probabilità e misura di probabilità
- principio della somma.

L'argomento può essere introdotto a partire dal problema:

partecipando ai due seguenti giochi, con quale probabilità si vincerà contemporaneamente in entrambi?

1) estrarre una carta da un mazzo di quaranta: vinco se la carta è maggiore di 7;
2) lanciare un dado a sei facce: vinco se viene più di 4.

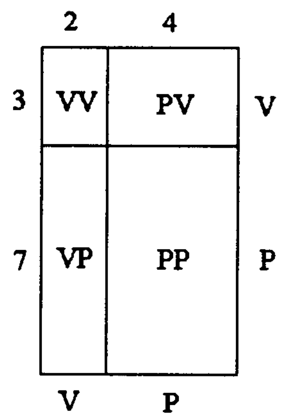


fig. 1

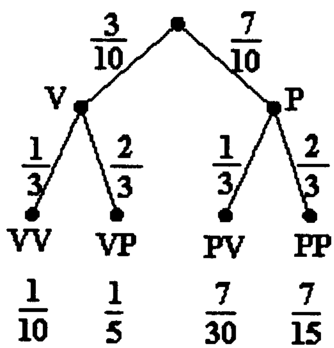


fig. 2

Il problema permette di introdurre le rappresentazioni grafiche di fig. 1 e fig. 2. Le fig. 1 è di più facile interpretazione, mentre la fig. 2 può essere estesa a situazioni più complesse (fig. 3a e fig. 3b). Problema e rappresentazioni possono trovare ulteriori sviluppi e applicazioni (potenze di un binomio, calcolo combinatorio, ...).

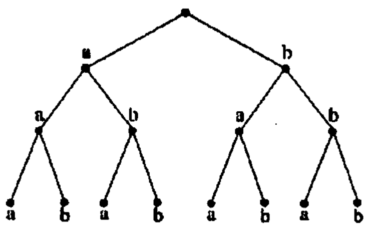


fig. 3a

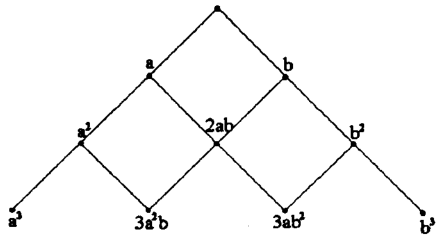


fig. 3b

3. LA PROBABILITÀ AL TRIENNIO

La trattazione della probabilità al triennio è fortemente caratterizzata dall'indirizzo di studi. Nel triennio, in tutti gli indirizzi, si dovrà procedere ad una sistematizzazione rigorosa dei concetti che sono stati introdotti in modo intuitivo al biennio. Sono stati individuati i seguenti nodi concettuali comuni a tutti gli indirizzi. Il loro sviluppo è condizionato dalla disponibilità di strumenti matematici adeguati.

<u>Nodi concettuali</u>:

- calcolo combinatorio: nel programma debole è presente nel triennio; è comunque opportuno riproporlo anche negli istituti a programma forte, dove viene previsto al biennio;
- definizione di probabilità in relazione ai vari approcci anche attraverso riferimenti storici, proponendo una sintesi attraverso la formalizzazione assiomatica della teoria; vanno ripresi i concetti proposti al biennio fino al Teorema di Bayes;
- variabile aleatoria discreta ad una dimensione, valor medio della v.a., speranza matematica e gioco equo; si può presentare il caso di variabile aleatoria a due dimensioni: uno sviluppo dell'argomento può essere proposto negli indirizzi specifici;

- variabili aleatorie discrete: distribuzione binomiale, geometrica, di Poisson; in tutti gli indirizzi si possono presentare esempi di queste distribuzioni, mentre un approccio formale è possibile solo negli indirizzi specifici;
- distribuzioni continue e inferenza stocastica: sono argomenti previsti solo nel programma forte e negli istituti specifici.

Il gruppo sviluppa, come esempio significativo, il passaggio dalla variabile aleatoria binomiale alla variabile di Poisson. L'argomento viene scelto perché si può collocare alla conclusione dei programmi ad approccio "debole" e nel programma "forte" può essere un punto di partenza per approfondimenti ed applicazioni (teoria delle code nell'indirizzo 'Programmatori').

Prerequisiti:
- variabili aleatorie;
- problema delle prove indipendenti ripetute;
- calcolo dei limiti, il numero e.

Viene proposto il problema della distribuzione di probabilità nell'estrazione con reimbussolamento di palline da un'urna.

In un'urna ci sono n_1 palline rosse e n_2 palline blu: totale palline = n. Si estraggono, con reimbussolamento, n palline: si chiede qual è la probabilità della variabile aleatoria X = {numero di palline rosse estratte nella sequenza di n estrazioni}.

<u>Situazione 1</u>: Palline nell'urna: $n_1 = 5$ (palline rosse), $n_2 = 5$ (palline blu), $n = 10$ totale palline.

V.A. binomiale:

$$P(x;10) = \binom{10}{x}\left(\frac{5}{10}\right)^x\left(\frac{5}{10}\right)^{10-x} \qquad x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$M(x) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{5}{10} = 5; \qquad p = \frac{5}{10}$$

<u>Situazione 2</u>: Si fa diventare più raro l'evento "estrazione di una pallina rossa". Si aumentano le palline blu nell'urna in modo che la nuova situazione sia:

Palline nell'urna: $n_1 = 5$ (palline rosse),
$n_2 = 20$ (palline blu),
$n = 25$ totale palline.

$$P(x;25) = \binom{25}{x}\left(\frac{5}{25}\right)^{x}\left(\frac{5}{25}\right)^{25-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$M(x) = n \cdot p = 25 \cdot \frac{5}{25} = 5; \qquad p = \frac{5}{25}$$

Possiamo aumentare ancora le palline blu, ad esempio in modo che $n = 100.005$: possiamo ancora applicare la distribuzione binomiale, ma il calcolo diventa sempre più oneroso anche usando strumenti informatici. Ci si pone il problema di cercare una funzione limite che esprima la distribuzione di probabilità quando n tende all'infinito.

Si può osservare che, aumentando nell'urna il numero delle palline blu, cambia la probabilità dei singoli eventi, ma che rimane invariata la media della variabile aleatoria.

<u>Formalizzazione</u>: Palline nell'urna: $n_1 = \lambda$ (palline rosse),
$n_2 = n-\lambda$ (palline blu),
n numero estrazioni;

$$p = \frac{\lambda}{n} \qquad \text{probabilità dell'evento singolo}$$

$$P(x;n) = \binom{n}{x}\left(\frac{5}{n}\right)^{x}\left(\frac{5}{n}\right)^{n-x}$$

$$M(x) = \lambda$$

si dimostrerà che, il limite per $n \rightarrow \infty$ è:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$M(x) = \lambda$$

e quindi il parametro significativo non è più p (probabilità dell'evento singolo), ma λ (valor medio dei successi).

Questo risultato si può applicare per approssimare tutte le situazioni in cui la probabilità di un evento è molto piccola e il numero delle prove è molto elevato. In quest'ottica la variabile aleatoria 'numero di successi' delle situazioni introduttive avrebbe la distribuzione:

$$P_x = \frac{5^x}{x!} e^{-5}$$

espressione che può essere calcolata in modo più semplice.

L'argomento si può concludere illustrando vari casi di applicazioni che si possono descrivere con la distribuzione di Poisson. Si tratta di fenomeni nei quali il numero n di prove è elevato, e la probabilità di successo del singolo evento p è piccola (anche non nota), mentre è nota (da dati sperimentali) $\lambda = n\,p$, valor medio della variabile aleatoria (ad esempio il decadimento radioattivo, la teoria delle code).

ESPERIENZE MULTIMEDIALI IN MATEMATICA

Silvano Rossetto
Istituto Tecnico per il Turismo "G. Mazzotti" - Treviso

1. MULTIMEDIALITÀ E MATEMATICA

La recente evoluzione delle nuove tecnologie e l'impegno del Ministero della Pubblica Istruzione nel promuovere il loro utilizzo nell'attività didattica (dal primo PNI del 1985 al più recente PSTD) rendono inevitabile affrontare il tema del loro uso nelle attività didattiche riguardanti in particolare, per quanto ci interessa, la matematica.

In questo mio intervento intendo presentare alcuni esempi di 'oggetti' multimediali, mostrandone qualche aspetto che a me è sembrato rilevante per la didattica della matematica. Soltanto alla fine cercherò di esporre qualche considerazione sul loro uso a scuola, tenendo conto anche delle discussioni nate tra i colleghi durante il seminario. I materiali presentati, naturalmente esclusi i due prodotti commerciali, sono disponibili su CD-ROM presso l'Istituto dell'autore.

2. NUMERI E STRUMENTI

Il primo esempio presentato è un ipertesto realizzato in ambiente MS-DOS con strumenti più semplici rispetto a quelli oggi disponibili.

L'ipertesto si propone di presentare la numerazione secondo quattro momenti della sua evoluzione: la nascita della numerazione, le rappresentazioni simboliche dell'antichità, la rappresentazione polinomiale in epoca moderna, le rappresentazioni finite nel calcolatore.

Ciascuna sezione presenta una scheda introduttiva e un menù con le voci 'informazioni', 'approfondimenti', 'glossario', 'tecniche', 'esercizi' che danno accesso ad altre schede sull'argomento e ad attività interattive.

Pur nella sua semplicità, l'ipertesto presenta gli elementi tipici di questi strumenti di comunicazione ed anche una certa interattività nella risoluzione di esercizi sul tema. L'ipertesto è stato realizzato da insegnanti nell'ambito di un corso di aggiornamento.

2. MATEMATICA E ...

Questo ipertesto è scritto con il programma Toolbook, o meglio con un'interfaccia, che ne facilita l'uso, diffusa nella scuola perché proponibile anche per attività con gli allievi: si tratta del programma Amico distribuito dalla Casa Editrice Garamond di Roma. Anche questo ipertesto è stato scritto da insegnanti nell'ambito di un corso di aggiornamento.

L'ipertesto descrive collegamenti tra la matematica e altre discipline: storia, arte, musica e natura. Può essere visto come un esempio di presentazione di argomenti tra loro connessi che si possono leggere attraverso percorsi non sequenziali.

3. CALCULUS CONNECTION

Calculus Connection è un testo di analisi in tre CD-ROM di D. Quinney e Robert Harding, pubblicato dalla casa editrice John Wiley & sons.

Il testo è strutturato in capitoli, ciascuno dei quali contiene tre moduli: concepts, applications, exercices. Sia il modulo espositivo (concepts) che le applicazioni hanno un buon livello di interattività: vi sono diverse animazioni ed è possibile intervenire in molte figure modificando valori o punti. Vi sono inoltre filmati, che presentano situazioni connesse ai temi proposti, e esposizioni in audio. Nel modulo degli esercizi sono disponibili una sofisticata calcolatrice grafica e inoltre è possibile stabilire un collegamento con programmi di calcolo come Derive o Mathematica se questi sono installati sul computer. In questo modo, nel risolvere un esercizio, si può temporaneamente uscire dal testo per sviluppare il calcolo nell'altro ambiente e rientrare eventualmente con i risultati. Gli esercizi cono controllati ed è possibile, in alcuni casi, richiedere suggerimenti.

Si tratta di un prodotto commerciale confezionato, naturalmente, con adeguate risorse. E' interessante osservare come sia interpretata in questo caso la disponibilità del computer non solo come strumento per presentare in modo vivace e accattivante argomenti anche complessi di matematica, ma soprattutto per consentire attività di studio e di verifica proprie di uno strumento di calcolo.

4. ESCHER INTERACTIVE

Il CD-ROM "ESCHER INTERACTIVE", distribuito da Thames and Hudson *digital* di Londra, presenta il lavoro di Maurits Cornelis Escher con particolare attenzione per gli aspetti che lo rendono interessante per la matematica. L'opera infatti è curata da due matematici, Dan Seymour e Doris Schattschneider, quest'ultima autrice del libro "Visioni della Simmetria, i disegni periodici di M.C. Escher", edito da Zanichelli.

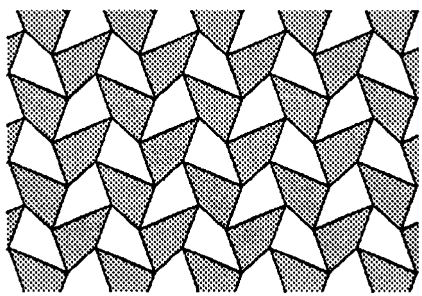
L'apertura del CD propone, con una gradevole animazione, il menù principale che consente di accedere alle sezioni del 'testo'.

La prima sezione è dedicata alla vita di M.C. Escher: accanto agli avvenimenti più significativi per l'evoluzione della sua produzione artistica, ci sono commenti in voce, filmati e collegamenti con le altre sezioni presenti nel CD.

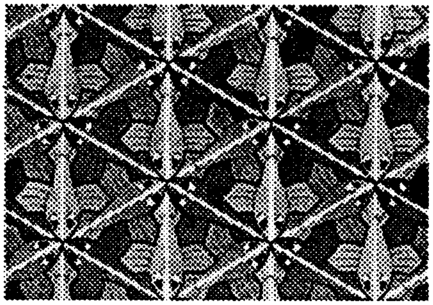
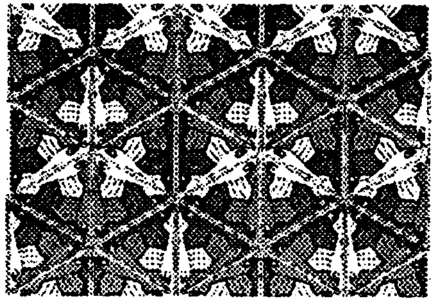
La seconda sezione raccoglie in ordine cronologico buona parte dei disegni di Escher, con una risoluzione grafica molto buona sul video e accettabile anche su stampa. Spesso i disegni sono accompagnati da commenti sulle proprietà geometriche che vi soggiacciono. A volte si rimanda ad altre sezioni per collegamenti o attività che possono essere connesse.

Seguono poi alcune sezioni con giochi grafici ispirati all'attività di Escher: animazioni di figure come le formiche sul nastro di Moebius, una lente mobile che ingrandisce particolari dei disegni, stereogrammi (così di moda qualche anno addietro) applicati a disegni, trasformazioni in continuo tra due figure (morfing).

Una sezione è dedicata alla costruzione di figure alla 'Escher': si tratta di un programma grafico semplice da usare, che permette però di fare interessanti attività sulle tassellazioni (ci si può chiedere, ad esempio, quali quadrilateri possono tassellare un piano: la figura seguente è stata ottenuta con questo programma).



Oppure si possono confrontare le proprietà geometriche di figure di Escher con altre simili ottenute, ad esempio, con un caleidoscopio:

Infine ci sono due accattivanti giochi, sempre riferiti a famosi disegni di Escher, che hanno lo scopo di esercitare l'intuizione spaziale.

Il primo gioco è riferito alla ambiguità concavo/convesso in figure in tre dimensioni. E' dato un oggetto da mettere all'interno di una figura in modo coerente con gli altri elementi. Il gioco non è, come può sembrare, sempre semplice e obbliga ad una riflessione sulla geometria dello spazio per leggere correttamente la figura.

Il secondo propone la ricostruzione di figure partendo da componenti date in ordine sparso: anche in questo caso è un bel esercizio di lettura di figure in tre dimensioni che richiede una certa intuizione per interpretare correttamente la concavità e la convessità.

5. INTERACTIVE REAL ANALYSIS

Parlando di multimedialità non si può omettere INTERNET. All'interno della *rete* si possono trovare molti *siti* dedicati alla matematica e alla sua didattica. Anche per questa opportunità presento alcuni casi che mi sembrano significativi.

Il primo è un corso di analisi matematica, scritto da Bert G. Wachsmuth all'indirizzo www.shu.edu/~wachsmut/, nell'ambito di un progetto della Seton Hall University. Può essere usato da studenti degli ultimi anni del liceo o del primo anno di università.

Il testo ha una struttura sostanzialmente sequenziale, simile ad un manuale cartaceo, anche se utilizza i collegamenti ipertestuali nell'approfondimento di alcuni temi ed esempi, nello sviluppo di dimostrazioni, nella risoluzione di esercizi proposti. Affianco al testo sono disponibili, come aggiunta piuttosto che integrati, un glossario molto esteso, le biografie dei principali matematici riferibili al testo in qualche caso con la pronuncia del nome in audio, alcuni programmi per lo studio delle funzioni.

Come gli altri documenti *web*, il testo è scritto nel linguaggio html. Questo linguaggio è di riferimento per i documenti disponibili in internet, ma permette anche di produrre documenti ipertestuali e multimediali, leggibili con i diffusi programmi per il *mondo web*, senza necessità di software specifico. Inoltre questo tipo di documenti è facilmente smontabile, a differenza dei materiali mostrati in precedenza, e consente di scegliere parti e di ricomporle in altri documenti che possono servire come supporto per una lezione o per attività di laboratorio con gli allievi.

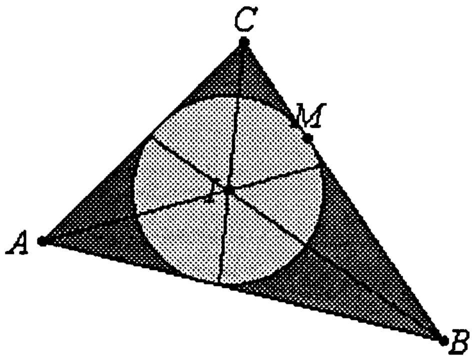
5. EUCLID'S ELEMENTS

Il documento riproduce integralmente gli Elementi di Euclide con tutti i riferimenti alle definizioni, proposizioni e teoremi realizzati come collegamenti ipertestuali. Il testo è curato da D.E.Joyce, della Clark University, e si trova al seguente indirizzo:

aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html.

Il testo si caratterizza più ancora che per i *link* ipertestuali, per le figure geometriche che sono modificabili. Gli elementi di base delle figure (punti, segmenti, archi, ...) sono legati tra loro da relazioni (appartenenza, perpendicolarità, ...). Quando si modifica un elemento di base della figura, le relazioni sono conservate e quindi si possono osservare figure diverse che descrivono la stessa definizione o proposizione.

Le figure sono ottenute con un unico programma (applet) che interpreta *parametri* che ne definiscono gli elementi. Secondo l'ottica già indicata della scomponibilità e ricomponibilità degli elementi di un documento html, questo *applet* può essere ripreso e usato in un proprio testo. Come esempio, ho scritto qualche pagina che presenta il Teorema di Ceva di cui riporto solo la prima figura con i relativi parametri:




```
<applet code=Geometry codebase="../Geometry" archive=Geometry.zip
 height=250 width=300>

<param name=background value="white">
<param name=title value="Incentro">
<param name=e[1] value="A;point;free;50,150">
<param name=e[2] value="B;point;free;250,200">
<param name=e[3] value="C;point;free;150,50">
<param name=e[4] value="t;polygon;triangle;A,B,C;0;0;black;green">
<param name=e[5] value="a;line;angleBisector;B,A,C;0;0;0">
<param name=e[6] value="c;line;angleBisector;B,C,A;0;0;0">
<param name=e[7] value="b;line;angleBisector;A,B,C;0;0;0">
<param name=e[8] value="I;point;intersection;a,b;0">
<param name=e[9] value="M;point;foot;I,B,C">
<param name=e[10] value="CI;circle;radius;I,M;0;0;black;yellow">
<param name=e[11] value="N;point;foot;I,A,B">
<param name=e[12] value="P;point;foot;I,A,C">
<param name=e[13] value="AM;line;connect;A,M;0;black;blue">
<param name=e[14] value="BP;line;connect;B,P;0;black;blue">
<param name=e[15] value="CN;line;connect;C,N;0;black;blue">
<param name=e[16] value="E;point;intersection;AM,BP;black;red">
</applet>
```

3. CONCLUSIONI

In INTERNET si possono trovare molti altri materiali riguardanti la matematica, ad esempio altri *applet* sicuramente utili ad attività di introduzione ad argomenti anche complessi di matematica che permetta di visualizzare situazioni e di condurre qualche manipolazione che faciliti almeno il primo approccio intuitivo. Alcuni di questi esempi sono stati mostrati per indicare la possibilità che la multimedialità si caratterizzi per la matematica come strumento soprattutto di manipolazione di oggetti che favoriscano l'intuizione oltre che la curiosità e l'interesse: alcune dimostrazioni animate del teorema di Pitagora (Gian Marco Tedesco: www.galileo.webzone.it; Jim Morey:www.math.ubc.ca/~morey/morey.html) e una dimostrazione visuale sullo scioglimento di nodi di Tedesco.

Per concludere, cito due siti internet, tra i molti possibili, che possono essere buoni punti di partenza per un *viaggio virtuale* nella matematica:
www.cut-the-knot.com di Alexander Bogomolny
eulero.ing.unibo.it/~barozzi/www.did.html del Prof.Giulio Cesare Barozzi.

I colleghi, soprattutto della scuola media, hanno espresso l'opinione che la multimedialità può essere proposta come strumento per motivare i ragazzi a scrivere di matematica attivando in questo modo una riflessione sui contenuti che porti a strutturarne la presentazione e a stabilire relazioni tra i diversi temi affrontati. E' questa certamente una valenza positiva dello strumento e sono opportune le diverse esperienze che, con questo punto di vista, si stanno conducendo. Credo che questo approccio sia comune con altre discipline che introducono la multimedialità in classe. Mi chiedo tuttavia se, oltre a questo, c'è qualche altra possibilità specifica della matematica. La costruzione di oggetti interattivi richiede in qualche modo la programmazione e questo sembra un elemento che limita le possibili applicazioni in classe: sarebbe opportuno valutare la disponibilità di strumenti che da una parte consentano di descrivere algoritmi e dall'altra non richiedano un bagaglio di conoscenze tecniche troppo complesse.

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Accomazzo Pierangela	LS Einstein	Torino
Agostinis Flavio	ITCS Mattiussi	Pordenone
Baccini Filippo	LS Cicognini	Prato
Baldoni Corrado	ITIS	Gubbio (PG)
Bianchini Monica	LS Vallisneri	Lucca
Boccia Teresa	ISA Palizzi	Napoli
Calabrese Crocetta	IPSIA Faranda	Patti (ME)
Calderone Venera	LS Meucci	Milazzo (ME)
Caputi Antonio	LS Colonna	Galatina (LE)
Carboni Paolo	LS Galilei	Ancona
Castelli Fabio	ITIS Marconi	Verona
Celentano Adriana	LS Peano	Roma
Chirnetto Maria	LS Quadri	Vicenza
Colagrande Vittorio	LS Galilei	Lanciano (CH)
Cozza Pasquale	LS	Acri (CS)
Curcio Liliana	ISA	Monza (MI)
Dell’Uomo Guido	LS Severi	Frosinone
Di Lascio Luigi	LS Gatto	Agropoli (SA)
Di Meglio Ugo	L.Art. Aldi	Grosseto
Di Silvestre Licia	ITCS Manthone	Pescara
Favia Lidia	IPSS De Lilla	Bari
Florio Giovanni	ITA Cuppari	Messina
Foà Ottavia	LS Galilei	Livorno
Marotta Corrado M.	IPAAS	Cirella di Diam. (CS)
Marrazzo Davide	IPIA Fiocchi	Lecco
Melej Alessandra	ITI L. Da Vinci	Parma
Michelini Roberta	ITIS Volta	Lodi
Pietrocola Giorgio	ITCS Botticelli	Roma
Pinto Pasquale	LS	Matera
Rinaldi Floriana	ITN Caracciolo	Bari
Ruggeri Enrico	LS Michelangelo	Cagliari
Sferra Carmelina	IPSSAR	Fiuggi (FR)
Smargiassi Enrico	ITG Pacinotti	Bologna
Sorichetti Anna	IPSIA Bernardi	Padova
Sprega Maria	ITIS Merloni	Fabriano (AN)
Tosone Carlo	ITCS “Torrente”	Casoria (NA)
Veglio Ferruccio	L.Art. Bianchi	Cuneo
Vencia Gabriella	ITCS Serra	Cosenza
Zanarini Maria	ISA	Roma

APPENDICE
1. ELENCO DELLE SCUOLE POLO

Le scuole polo, di cui si pubblica l'elenco, hanno assunto il compito di distribuire i *Quaderni* agli istituti che rientrano nel territorio loro affidato.
I Presidi che non avessero ricevuto tutti i numeri della collana possono pertanto richiederne l'invio alla scuola polo dell'area provinciale di appartenenza.

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - A

LM	SLATAPER	Corso Verdi, 17	Gorizia
LS	TORRICELLI	Via Udine 7	Maniago (PN)
LC	PETRARCA	Via Rossetti, 74	Trieste
IM	PERCOTO	Via Pier Silverio Leicht, 4	Udine
IM	GOBETTI	Via Istituto Tecnico, 1	Genova-Sampierdarena
IM	AMORETTI	Piazzetta G.B. De Negri, 2	Imperia
IM	MAZZINI	Viale Aldo Ferrari, 37	La Spezia
IM	G. DELLA ROVERE	Via Monturbano, 8	Savona
IM	G. FALCONE	Via Dunant, 1	Bergamo
LS	CALINI	Via Monte Suello 2	Brescia
LS	GIOVIO	Via P. Paoli, 38	Como
LC	MANIN	Via Cavallotti, 2	Cremona
IM	TENCA	Bastioni Porta Volta, 16	Milano
LS	MAJORANA	Via Ratti, 88	Rho (MI)
IM	PARINI	Via Gramsci, 17	Seregno (MI)
LC	VIRGILIO	Via Ardigò, 13	Mantova
IM	CAIROLI	Corso Mazzini, 7	Pavia
LS	NERVI	Piazza S. Antonio	Morbegno (SO)
LS	LUINO	Via Lugano, 24	Luino (VA)
IM	SALUZZO	Via E. Faà di Bruno, 85	Alessandria
IM	MONTI	Piazza Cagni, 2	Asti
IM	LEONARDO DA VINCI	Piazza S. Francesco, 1	Alba (CN)
IM	BELLINI	Baluardo La Marmora	Novara
LS	GRAMSCI	Colle Bella Vista	Ivrea (TO)
LS	GOBETTI	Via M. Vittoria, 39 bis	Torino
IM	ROSA STAMPA	Corso Italia, 48	Vercelli
IM	PASCOLI	Via M. Longon, 3	Bolzano
LC	VON DER VOLGELWIDE	Via A. Diaz, 34	Bolzano
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Giusti, 1/1	Trento
IM	BINEL	Via Francheté, 111	Verres (AO)
LC	TIZIANO	Via Cavour, 2	Belluno
IM	AMEDEO DI SAVOIA	Via del Santo	Padova

IM	ROCCATI	Via Carducci, 8	Rovigo
LC	CANOVA	Via Mura S. Teonisto, 16	Treviso
IM	STEFANINI	Via Miglio	Venezia - Mestre
LC	G. B. BROCCHI	Via Beata Giovanna, 67	Bassano del Grappa (VI)
IM	VERONESE	Via Fiume, 61/B	San Bonifacio (VR)

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - B

LC	D. COTUGNO	Portici del Liceo	L’Aquila
IM	ISABELLA GONZAGA	Via dei Celestini	Chieti
IM	MARCONI	Via M. Da Caramanico, 6	Pescara
IM	MILLI	Via G. Carducci	Teramo
LS	COPERNICO	Via F. Garavaglia, 11	Bologna
LC	ARIOSTO	Via Arianuova, 19	Ferrara
LS	RIGHI	Piazza Aldo Moro, 76	Cesena (FO)
LS	FANTI	Viale Peruzzi, 7	Carpi (MO)
LC	GIOIA	Viale Risorgimento, 1	Piacenza
LC	C/O C.N. MARIA LUIGIA	Via Lalatta, 14	Parma
LS	RICCI CURBASTRO	Viale degli Orsini, 8	Lugo (RA)
LS	MORO	Via XX Settembre, 5	Reggio Emilia
IM	REGINA MARGHERITA	Viale Regina Margherita	Anagni (FR)
LS	MAJORANA	Via Sezze	Latina
IM	ELENA PRINC. NAPOLI	Piazza Mazzini, 2	Rieti
LC	MAMIANI	Via delle Milizie, 30	Roma
LS	PEANO	Via Morandini, 38	Roma
SM	MONTESSORI	Via Livenza, 8Roma	
IM	S. ROSA DA VITERBO	Via S. Pietro, 27	Viterbo
LS	LEONARDO DA VINCI	Viale G. Verdi, 23	Jesi (AN)
IM	MERCANTINI	Via Emidio Consorti, 28	Ripatransone (AP)
IM	VARANO	Via Pieragostino, 18	Camerino (MC)
LC	MAMIANI	Via Gramsci, 2	Pesaro
IM	PRINCIPESSA ELENA	Via Trieste, 1	Campobasso
IM	CUOCO	Via G; Leopardi	Isernia
LS	REDI	Via Leone Leoni, 38	Arezzo
LS	C/O C.N. CICOGNINI	Piazza del Collegio, 13	Prato
IM	ROSMINI	Viale Porciatti, 2	Grosseto
IM	PALLI BARTOLOMEI	Via Maggi, 50	Livorno
LS	VALLISNERI	Via delle Rose, 68	Lucca
IM	MONTESSORI	Via Lunense, 39/B	Marina di Carrara (MS)
LS	BUONARROTI	Via Betti	Pisa
IM	LORENZINI	Via Sismondi, 7	Pescia (PT)
LC	PICCOLOMINI	Prato S. Agostino	Siena
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Tusicum	Umbertide (PG)
LC	TACITO	Viale Fratti, 12	Terni

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - C

IM	T. STIGLIANI	Via Lenera, 61	Matera
IM	GIANTURCO	Via Zara	Potenza
LS	FERMI	Via Molinella, 30	Cosenza
LC	GALLUZZI	Via De Gasperi	Catanzaro
IM	GRAVINA	Via Foscolo	Crotone
IM	ALVARO	Via Campanella	Palmi (RC)
IM	CAPIALBI	Via S. Ruba	Vibo Valentia
IM	IMBRIANI	Viale Italia, 2	Avellino
IM	GUACCI	Via Nicola Calandra, 138	Benevento
IM	SALVATORE PIZZI	Piazza Umberto I	Capua (CE)
LC	VICO	Via Salvator Rosa, 117	Napoli
LS	CALAMANDREI	Via Comunale Maranda, 84	Napoli - Barra
IM	SERAO	Via Carducci, 18	Pomigliano d’Arco (NA)
IM	ALFANO I	Via dei Mille	Salerno
LC	TROYA	Via R. Sanzio	Andria (BA)
LS	E. MAJORANA	Via A. Moro, 19	Mola (BA)
IM	PALUMBO	Via A. Grandi, 17	Brindisi
IM	RONCALLI	Piaza Europa	Manfredonia (FG)
LC	CAPECE	Piazza Moro, 37	Maglie (LE)
LC	ARISTOSSENO	Viale Virgilio, 15	Taranto
LS	PACINOTTI	Via Liguria	Cagliari
LS	FERMI	Via Veneto, 45	Nuoro
IM	CROCE	Via G. D’Annunzio	Oristano
IM	CASTELVÌ	Via Manno, 58	Sassari
LS	LEONARDO	Via della Vittoria	Agrigento
LC	RUGGERO SETTIMO	Via Rosso di San Secondo	Caltanissetta
LC	C/O C.N. CUTELLI	Via V. Emanuele II, 56	Catania
IM	CRISPI	Via Padova, 50	Piazza Armerina (EN)
LS	ARCHIMEDE	Viale Regina Margherita, 3	Messina
IM	DE COSMI	Via L. Ruggieri, 15	Palermo
IM	MAZZINI	Via Curtatone	Vittoria (RG)
IM	RAELI	Via Matteo Raeli, 9	Noto (SR)
IM	SALVO	Via Marinella, 1	Trapani

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

1 – Gestione e innovazione*
2 – Lo sviluppo sostenibile
3 – La valenza didattica del teatro classico
4 – Il postsecondario per la professionalità* (2 tomi)
5 – Dalla memoria al progetto
6 – La sperimentazione della sperimentazione*
7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
8 – Probabilità e statistica nella scuola liceale
9 – L'Italia e le sue isole
10 – Lingua e civiltà tedesca
11 – La scuola nel sistema polo** (manuale guida)
12 – La "città" dei filosofi
13 – Le città d'Europa
14 – Dal passato per il futuro
15 – Gestione, innovazione e tecnologie*
16 – Per non vendere il cielo
17 – Briser la glace: la dinamica della comunicazione francese
18 – Dalla lingua per la cultura: la didattica del latino
19 – L'insegnamento della geometria (2 tomi)
20 – La lingua del disegno: al crocevia fra scienza e arte
21 – Insegnare storia**
22 – Problemi della contemporaneità.
Tomo primo: Unità e autonomie nella storia italiana
23 – Aritmetica**
24 – Analisi matematica**
25 – Logica, probabilità, statistica**
26 – "I temi 'nuovi' nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica, …) e il loro inserimento nel *curriculum*"** (2 tomi)

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco (*) si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei Presidi; gli altri sono dedicati alla formazione dei Docenti. I titoli segnalati col doppio asterisco (**) si riferiscono alla serie "Documenti di lavoro"

matteoni stampatore Lucca
settembre 1998

MALGRÉ TOUT

«Io non credo che si renda omaggio
alla verità e alla giustizia, che della
verità è compagna inseparabile,
se non si riconoscono accanto ai limiti
e alle carenze, non lievi, certamente non
marginali, che a volte toccano la vita
della scuola, anche i meriti e l'impegno,
sempre umile e qualche volta eroico,
dei tanti che nella scuola ci stanno con
fermezza di propositi, con chiarezza di
obiettivi, con sincerità di convinzioni
socio-culturali.»

Romano Cammarata