

**Ministero
della
Pubblica
Istruzione**

**Istruzione Classica
Tecnica,
Professionale
e Artistica**

**Unione Matematica
Italiana**

ANALISI MATEMATICA

Seminario di formazione per Docenti

Istruzione Secondaria Superiore

**Q
U
A
D
E
R
N
I**

24

**Liceo Scientifico Statale
“A. Vallisneri”
Lucca**

Novembre 1996 - Febbraio 1997

**DOCUMENTI
DI
LAVORO**



Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione

Direttore: G. Trainito

Direttore editoriale: L. Catalano

Coordinatore editoriale: A. Portolano

Editing: A. R. Cicala, E. Giansanti, G. Zito, P. Manzioli

Grafica: F. Panepinto

Il presente fascicolo potrà essere riprodotto per essere utilizzato all'interno delle scuole in situazioni di formazione del personale direttivo e docente (Corsi, Collegi, riunioni per materia).

Nota editoriale

In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.

Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione

Istruzione Classica Tecnica

Professionale e Artistica

Unione Matematica Italiana

ANALISI MATEMATICA

Seminario di formazione per
Docenti Scuole Medie Superiori

Liceo Scientifico Statale

“A. Vallisneri” - Lucca

Novembre 1996 - Febbraio 1997

LA SERIE “DOCUMENTI DI LAVORO” DEI NOSTRI QUADERNI

La collana “Quaderni” della Dirclassica si arricchisce di una nuova “serie”: essa porta quali suoi “segni” grafici distintivi il dorso rosso della copertina e la dizione “documenti di lavoro” che vi compare in aggiunta a quelle che contrassegnavano i “tradizionali” fascicoli “verdi” e “grigi”. Ogni nuovo nato è testimonianza di vitalità. E difatti questa nuova serie risponde a una tripla esigenza di sviluppo.

In primo luogo, quella di dare tempestiva comunicazione del lavoro che la nostra Direzione viene compiendo – a ritmi di costante accelerazione – sul terreno della formazione e dell’aggiornamento degli operatori scolastici. Il numero crescente delle nostre iniziative richiede non solo un allargamento degli strumenti, ma pure un utilizzo delle forze e delle risorse disponibili che sappia farsi via via più articolato e diffuso.

In secondo luogo, alcuni seminari – per la loro peculiare natura di essere finalizzati a discutere questioni di pressante attualità – richiedono che gli esiti di lavoro trovino una disseminazione nella nostra realtà scolastica al possibile immediata e richiedono, pertanto, un taglio delle pubblicazioni che sappia privilegiare – rispetto alle altre serie – non solo la rapidità dei tempi, ma anche la caratteristica di indispensabile supporto informativo e documentario.

Infine – last but not least – la scuola dell’autonomia richiederà sempre di più ai nostri presidi e ai nostri docenti la capacità di “volare da soli”: questa terza serie, infatti, continuerà sì a essere il frutto di un dialettico rapporto di collaborazione tra “centro” e “periferia” e potrà ancora contare su un momento di editing teso a uniformare i criteri generali dell’intera collana, ma – in pari tempo – vedrà sempre più accentuato il responsabile ruolo delle singole scuole nella produzione di questo peculiare “prodotto” culturale.

In tal modo, ritengo che non solo aumenteranno le frecce al nostro arco, ma riusciremo pure – questi almeno sono l’impegno e la speranza – a garantire alla collana grigia e a quella verde lo spazio temporale e la disponibilità umana per il lavoro legato alle scansioni necessariamente più dilatate dell’approfondimento tematico di alcune questioni di fondo.

Luigi Catalano

INDICE

Claudio Bernardi - Lucia Ciarrapico

Presentazione Pag. 7

Andrea Bacciotti

Temi nell'insegnamento dell'Analisi: la teoria della misura » 11

Giulio C. Barozzi

Applicazioni informatiche e Analisi numerica » 36

Lucia Grugnetti

Storia ed epistemologia dell'Analisi » 70

Brunetto Piochi

Metodi elementari per la soluzione dei problemi di minimo » 106

Umberto Bottazzini

Definizione di continuità » 113

*Proposte per l'esame di maturità e per prove conclusive di
analisi matematica* » 118

Elenco dei partecipanti » 139

Appendice

1. Elenco delle scuole polo » 140

2. Volumi della collana Quaderni già pubblicati » 143

PRESENTAZIONE

Claudio Bernardi

Presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (*).

Lucia Ciarrapico

Dirigente superiore per i servizi ispettivi.

Questo volume raccoglie materiale elaborato in occasione del Terzo Corso in Didattica della Matematica, organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana.

Alla fine del 1993 il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un Protocollo d'Intesa, per promuovere «programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni». Nel quadro di una collaborazione fra mondo della Scuola e Università volta a realizzare forme di aggiornamento, il Protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale di due settimane, su temi di didattica della matematica. Nel 1994 si è svolto il Primo Corso, dal titolo «L'insegnamento dell'Algebra fra tradizione e rinnovamento» per docenti delle Scuole Superiori; nel 95-96 si è tenuto il Secondo Corso, dedicato all'«Insegnamento della Geometria» e rivolto sia a docenti delle Scuole Medie sia a docenti delle Superiori.

Il Terzo Corso in Didattica della Matematica si è svolto a Viareggio in due settimane separate, dal 18 al 22 novembre 96 e dal 24 al 28 febbraio 97. Per consentire l'ammissione al Corso di un maggior numero di persone, è stato deciso di articolare anche il Terzo Corso in due Sezioni, una rivolta ai docenti delle Scuole Superiori e l'altra, per la prima volta, ai docenti delle Scuole Elementari. Come tema del Corso è stato scelto «Aritmetica» per la Sezione Elementari, e «Didattica dell'Analisi Matematica» per la Sezione Superiori.

Anche se durante il Corso ci sono stati momenti di confronto ed attività comuni fra tutti i docenti (in particolare, una conferenza sui «Progetti Multimediali del MPI» e una tavola rotonda sulle «Innovazioni legislative per la Scuola»), nella stesura degli Atti è sembrato preferibile presentare separatamente i

(*) La Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica è una commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana, che si occupa specificamente dei problemi di carattere didattico.

testi relativi alle Scuole Elementari e i testi relativi alle Superiori, in modo da ottenere due volumi tipograficamente più agili e didatticamente più mirati.

Le domande di partecipazione sono state numerosissime, più di 2000 per le due Sezioni. È stato possibile ammettere solo 40 docenti di ruolo nelle Scuole Elementari e 48 docenti di ruolo nelle Superiori, scelti sulla base dei titoli presentati e in modo da rappresentare le varie Regioni; a questi docenti sono stati affiancati 10 neo-laureati.

Nella Sezione "Superiori" si sono svolti 4 cicli di lezioni con esercitazioni, conferenze, lavori di gruppo, ed esercitazioni al calcolatore. Come appare dai testi, in cui sono sinteticamente riportati i vari momenti di lavoro (lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici), si è cercato di affrontare l'argomento avvalendosi delle indicazioni fornite dalla ricerca didattica e di spunti suggeriti dalla storia e dall'epistemologia della matematica. Naturalmente, è stato dato risalto ai legami che l'Analisi matematica presenta con altri settori matematici, sia per le sue applicazioni, sia per gli aspetti informatici ed algoritmici, facendo anche riferimento alle recenti proposte di programmi.

Nei lavori di gruppo sono stati fra l'altro discussi problemi legati alla valutazione finale dell'apprendimento dell'analisi matematica e alle prove conclusive: alla fine del volume sono riportati alcuni dei temi proposti dai Corsisti.

Questo libro vuole essere uno strumento didattico per attività di studio, di aggiornamento e anche di prima formazione. L'efficacia di un Corso di didattica si misura dalla sua ricaduta: ci auguriamo che il libro permetta a molti di coloro che non hanno potuto partecipare al Corso, di usufruirne, sia pure a distanza di tempo, e possa anche costituire una fonte di suggerimenti per Enti e Associazioni che vogliano contribuire con iniziative locali alla formazione dei docenti.

Un sentito ringraziamento va rivolto a quanti hanno reso possibile la realizzazione dell'iniziativa:

- alla Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale, che ha curato l'organizzazione del Corso,
- alla Direzione Generale dell'Istruzione Tecnica, alla Direzione Generale dell'Istruzione Professionale e all'Ispettorato per l'Istruzione Artistica, che hanno contribuito alla realizzazione del Corso,
- al Preside Giuseppe Ciri del Liceo Scientifico "Vallisneri" di Lucca, che ha diretto il Corso, e al personale dello stesso Liceo, che ha offerto un efficace sostegno amministrativo e di segreteria,
- ai relatori, per la loro competenza e disponibilità,
- ai docenti partecipanti, che hanno dato contributi preziosi grazie alla loro preparazione e alla loro esperienza concreta.

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
3° CORSO MPI-UMI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
“DIDATTICA DELL’ANALISI MATEMATICA”

SEZIONE ISTRUZIONE SECONDARIA DI
SECONDO GRADO

Programma

Cicli di lezioni:

- A Andrea Bacciotti** - Politecnico di Torino
Temi nell’insegnamento dell’Analisi (teoria della misura, calcolo integrale, calcolo differenziale)
- B Franco Conti** - Scuola Normale Superiore - Pisa
Applicazioni e interazioni dell’Analisi nei diversi settori scientifici e tecnici
- C Giulio C. Barozzi** - Università di Bologna
Applicazioni informatiche - Analisi numerica
- D Lucia Grugnetti** - Università di Parma
Storia ed epistemologia dell’Analisi

Conferenze:

Mario Fierli - Dirigente superiore per i servizi ispettivi
Riscoprendo la geometria del triangolo

Brunetto Piochi - Università di Siena
Problemi di minimo e massimo risolti senza derivate

Umberto Bottazzini - Università di Palermo
Definizioni di continuità

STAFF DI GESTIONE DEL SEMINARIO

Direttore: Giuseppe Ciri

Relatori:

Andrea Bacciotti

Giulio C. Barozzi

Umberto Bottazzini

Lucia Grugnetti

Brunetto Piochi

Segreteria organizzativa:

Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Cesare Matteoni, Maria Luisa Radini,
Giovanni Romani.

La curatela del presente volume è stata seguita da Giuseppe Ciri.
La revisione scientifica dei testi è stata curata da Lucia Ciarrapico,
Claudio Bernardi, Paolo Nardini.

TEMI NELL'INSEGNAMENTO DELL'ANALISI: LA TEORIA DELLA MISURA

Andrea Bacciotti

Dipartimento di Matematica del Politecnico, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino

*“Ogni misura di grandezza implica una
nozione approssimativa di numero reale”*

N. Bourbaki

Premesse. Queste pagine non contengono indicazioni didattiche, ma una riflessione critica su alcuni temi di analisi matematica che sono tradizionalmente oggetto di insegnamento in certi tipi di scuole secondarie superiori. Nel condurre tale riflessione, cercherò di limitare al minimo indispensabile gli aspetti tecnici, e di mantenermi su quello che a me sembra il piano del buon senso e della coerenza (attribuendo a questo termine il significato che ha nel linguaggio comune, e non quello con cui talvolta lo si intende nella logica matematica). La questione di fondo, la cui risposta può anche dipendere da docente a docente, da allievo ad allievo, e che vorrei mettere al centro dell'attenzione è se a questo livello di insegnamento ci si debba limitare a fornire *tecniche matematiche* (eventualmente anche sofisticate) per la risoluzione pratica di certi problemi, oppure se si debba anche tentare di trasmettere una *cultura matematica*. E se questo tentativo, almeno in certi casi, s'ha da fare, il buon senso e la coerenza mi sembrano imprescindibili. Insegnare una disciplina significa essenzialmente convincere qualcuno che vale la pena impegnarsi per impararla. Se si è d'accordo su questo, allora bisogna anche convenire che vi saran ben poche speranze di riuscire a convincere anche il soggetto più ingenuo ad impegnarsi a studiare qualcosa che, in fatto di buon senso e di coerenza, lasci un po' troppo a desiderare.

La matematica è un edificio complesso, le cui parti si sostengono a vicenda in virtù di un intricato sistema di legami e di interconnessioni. In questa struttura, uno dei nodi più importanti, anche dal punto di vista storico, è costituito dalla teoria della misura. È dunque ragionevole ritenere che essa possa assumere un ruolo significativo anche nell'insegnamento. Rientra nella teoria della misura, per esempio, il problema di valutare in termini quantitativi (e quindi utilizzabili a fini pratici) le “dimensioni” delle figure geometriche

(lunghezze, aree, volumi), ma anche di enti meno intuitivi come angoli, curve, superfici ecc.. D'altra parte, sono ben noti i legami che intercorrono tra la teoria della misura e il calcolo integrale da un lato, e il calcolo delle probabilità dell'altro, ed è pure ben noto come la nozione di misura intervenga nella teoria dei sistemi dinamici e nell'analisi funzionale.

La prima lezione di questo corso sarà quella più tecnica: le nozioni e le idee di base della teoria della misura verranno introdotte in modo formale ed astratto, sia pur limitandosi allo stretto necessario. Saranno quindi messi in evidenza gli aspetti problematici di queste nozioni, dal punto di vista di un'eventuale trattazione a livello di scuola secondaria superiore. La discussione si sposterà così, nel corso della seconda lezione, sul materiale preliminare. Infine, nella terza lezione, svilupperemo il tema del rapporto tra misura e integrazione.

L'autore, pur assumendosi la piena responsabilità delle opinioni espresse, desidera ringraziare Valeria Andriano, Giannina Beccari, Paolo Boieri, Cristina Gramegna e Grazia Vicario che lo hanno aiutato in vario modo nella realizzazione di questo testo.

Lezione 1. Le teorie matematiche, come tutti i prodotti della cultura umana, sono in continua evoluzione. Ai nostri giorni, la teoria della misura ha raggiunto un assetto basato su un sistema di assiomi abbastanza semplice.

Sia Ω un insieme non vuoto, e sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω . Si dice che $\mathcal{E}$ è un *semi-anello* se gode delle seguenti proprietà:

$$(s_1) \emptyset \in \mathcal{E}$$

$$(s_2) A, B \in \mathcal{E} \implies A \cap B \in \mathcal{E}$$

$$(s_3) \text{ se } A, B \in \mathcal{E} \text{ e } B \subseteq A, \text{ allora esiste un numero finito di elementi di } \mathcal{E}, \\ A_1, \dots, A_n \text{ (} n \geq 1 \text{) due a due disgiunti tali che } A_1 = B \text{ e } A = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Si noti che se $\mathcal{E}$ è un semi-anello e se $A, B \in \mathcal{E}$, può darsi che $A \cup B \notin \mathcal{E}$. Si dice che una famiglia non vuota $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di Ω è un *anello* se per ogni coppia $A, B \in \mathcal{E}$, anche $A \triangle B$ e $A \cap B$ appartengono ad $\mathcal{E}$. Il termine "anello" si riferisce al fatto che nelle condizioni indicate $\mathcal{E}$ ha effettivamente tutte le proprietà di un anello, assumendo la differenza simmetrica come somma, e l'intersezione come prodotto. Dalle proprietà elementari degli insiemi segue che se $\mathcal{E}$ è un anello e se $A, B \in \mathcal{E}$, allora anche $A \cup B$ e $A \setminus B \in \mathcal{E}$.

Se $\mathcal{E}$ è un anello allora è anche un semi-anello. Se $\mathcal{E}$ è un anello e inoltre $\Omega \in \mathcal{E}$, allora si dice che $\mathcal{E}$ è un *anello con unità* (l'insieme Ω viene infatti a

ricoprire proprio il ruolo dell'unità moltiplicativa). Gli anelli con unità i cui elementi sono, come nel nostro caso, sottoinsiemi di un insieme dato, si dicono anche *algebre di Boole*.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una famiglia non vuota $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di Ω sia un'algebra è che si verifichino le seguenti condizioni:

$$(a_1) \quad A \in \mathcal{E} \implies A^c \in \mathcal{E}$$

$$(a_2) \quad A, B \in \mathcal{E} \implies A \cup B \in \mathcal{E}.$$

Un anello contiene tutte le unioni e le intersezioni finite dei suoi elementi. Quando $\mathcal{E}$ contiene tutte le unioni e tutte le intersezioni numerabili di suoi elementi, si dice che $\mathcal{E}$ è un σ -anello (ovvero una σ -algebra, se $\Omega \in \mathcal{E}$).

Se $\mathcal{E}$ è un semi-anello, possiamo considerare la famiglia $\mathcal{E}_0$ costituita da tutti quei sottoinsiemi di Ω che si possono scrivere come unione finita di elementi di $\mathcal{E}$. Si dimostra che $\mathcal{E}_0$ è un anello, e più precisamente il più piccolo anello di sottoinsiemi di Ω contenente $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}_0$ si dice anche l'*anello generato* da $\mathcal{E}$. Si dimostra anche che ogni elemento di $\mathcal{E}_0$ si può scrivere come unione finita di elementi di $\mathcal{E}$ due a due disgiunti.

Una *misura* su un semi-anello $\mathcal{E}$ è una funzione $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$(m_1) \quad \mu(A) \geq 0 \text{ per ogni } A \in \mathcal{E}, (m_2) \quad \text{se } A, B \text{ e } A \cup B \in \mathcal{E} \text{ e se } A \cap B = \emptyset \text{ allora } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

In questa definizione, $\mathbf{R}$ rappresenta l'insieme dei numeri reali. Considerare la conoscenza dei numeri reali quale presupposto alla nozione di misura è una necessità quasi ineludibile. Come vedremo infatti nel seguito, il legame tra numero reale e misura, anche ai livelli più elementari, è estremamente profondo. Non si dimentichi che gli antichi greci giunsero alla scoperta dei numeri irrazionali proprio nel tentativo di risolvere problemi connessi con la misura di certi insiemi, come quello della duplicazione del quadrato.

Osserviamo ancora che nella maggior parte dei trattati si ammette che la misura di un insieme possa essere uguale a $+\infty$: per non complicare inutilmente le cose, noi preferiamo escludere questa possibilità.

La (m_2) è nota come *proprietà di additività finita della misura*. Se $\mathcal{E}$ è un anello, non è necessario richiedere che $A \cup B \in \mathcal{E}$. Se $\mathcal{E}$ è un'algebra e $\mu(\Omega) = 1$, si dice che μ è una *misura di probabilità*. Se $\mathcal{E}$ è un σ -anello, è uso richiedere che la proprietà di additività valga per le unioni numerabili di elementi di $\mathcal{E}$ due a due disgiunti: la formulazione rigorosa fa intervenire, naturalmente, il concetto di serie. Per i nostri scopi, sarà sufficiente limitarsi agli anelli e alle unioni e intersezioni finite.

Se μ è una misura su un semi-anello $\mathcal{E}$, allora $\mu(\emptyset) = 0$; inoltre, se $A, B \in \mathcal{E}$ e $A \subseteq B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Se μ è una misura su un anello $\mathcal{E}$ e se $A, B \in \mathcal{E}$, allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Come sappiamo, si ha l'uguaglianza se A e B sono disgiunti o, più in generale, se $\mu(A \cap B) = 0$. Insiemi che hanno misura nulla si dicono anche *trascurabili*. È facile rendersi conto dell'esistenza di insiemi non vuoti trascurabili. Come vedremo, gli insiemi trascurabili svolgono un ruolo molto importante nella teoria della misura.

Le definizioni assiomatiche hanno carattere descrittivo: l'oggetto da definire non viene identificato in maniera diretta, ma viene caratterizzato attraverso le sue proprietà. Per accettarle, ci vuole sempre un piccolo (o grande) sforzo di astrazione, e sono quindi piuttosto difficili da utilizzare a livello didattico. In realtà, la teoria della misura, nell'impostazione attuale, consente un ragionevole dosaggio tra astrazione e costruttività.

Siano infatti μ_1 e μ_2 due misure definite rispettivamente su due semi-anelli $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$. Si dice che μ_2 è un'estensione di μ_1 se $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ e per ogni $A \in \mathcal{E}_1$, si ha $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Si dimostra che se μ è una misura su un semi-anello $\mathcal{E}$, allora esiste un'unica estensione di μ all'anello $\mathcal{E}_0$ generato da $\mathcal{E}$.

In generale, l'estensione di una misura μ_1 definita su un anello $\mathcal{E}_1$ ad un anello $\mathcal{E}_2$ contenente $\mathcal{E}_1$ può richiedere ragionamenti non banali, non riconducibili a procedure puramente algebriche. Ma su questo torneremo poi. Per il momento, conviene invece soffermarsi e – pur senza perdere di vista la definizione assiomatica, che anzi ci servirà costantemente da riferimento – cercare di scendere un po' di più nel concreto.

Cominciamo con l'osservare che un'impostazione così generale può essere appropriata se si vogliono trattare sistematicamente e ad un certo livello di formalismo questioni attinenti, per esempio, al calcolo delle probabilità.

Ma se il nostro obiettivo principale è quello della costruzione di un concetto di misura applicabile agli oggetti e alle figure del mondo fisico, allora ci si accorge che gli assiomi (m_1) , (m_2) non forniscono tutti i contenuti necessari: per esempio, non escludono la presenza di *atomi*, vale a dire di insiemi composti di un solo punto ma dotati di misura positiva.

Una nozione di misura che corrisponda maggiormente all'intuizione geometrica e alle aspettative acquisite attraverso l'esperienza comune, deve soddisfare ad almeno due ulteriori condizioni: una condizione di *invarianza* ed una condizione di *normalizzazione*. Grosso modo, col primo termine si intende che se una figura viene spostata senza deformarla, la sua misura non deve cambiare. La seconda condizione implica, per esempio, che la misura di un quadrato di lato 1 deve essere uguale a 1.

A questo punto cominciano però ad emergere aspetti problematici che acquistano tanto maggior importanza quanto più si vuol cercare di rendere plausibile e didatticamente coerente la trattazione, e su cui quindi conviene

avviare la nostra riflessione. Cerchiamo di fare un po' di ordine, abbozzando un elenco di quelle che potrebbero essere le varie fasi di un ragionevole approccio al problema.

1. Se vogliamo costruire una teoria applicabile ad oggetti e figure dell'esperienza comune, dobbiamo innanzi tutto crearci dei modelli mentali. Questi modelli costituiscono, per così dire, delle vie di mezzo tra il sistema assiomatico delineato nelle pagine precedenti e la realtà fisica. Il riferimento agli enti della geometria elementare è spontaneo. A seconda della natura dimensionale degli oggetti da misurare, il ruolo dell'insieme ambiente Ω sarà dunque di volta in volta assegnato alla retta, al piano o allo spazio.

2. In secondo luogo, bisogna identificare una famiglia di sottoinsiemi dell'ambiente Ω che siano dotati di una struttura geometrica particolarmente semplice e a ciascuno dei quali possa essere assegnata in modo "naturale" una misura. Nel seguito, ci riferiremo a questo problema come al *problema della misura elementare*. Se Ω è una retta, possiamo per esempio prendere la famiglia di tutti i suoi segmenti. Come si verifica facilmente, con l'accorgimento di includere in ogni segmento solo l'estremo di sinistra, questa famiglia costituisce un semi-anello.

3. Infine, procedendo per ampliamenti successivi, si cerca di passare dalla nozione di misura elementare introdotta nella fase precedente, ad una nozione più generale, che ne conservi le proprietà caratterizzanti e che sia applicabile a sottoinsiemi di Ω di struttura più complicata. Per esempio, se Ω è un piano, dopo aver stabilito come si calcola l'area dei rettangoli bisognerà trovare il modo di passare al calcolo delle aree delle figure curvilinee.

Vale la pena di scendere un po' più nei dettagli e di fare qualche commento. Per quanto riguarda la prima fase, ricordiamo innanzitutto che gli enti geometrici possono essere concepiti o in maniera *sintetica*, oppure immaginandoli immersi in un sistema di riferimento. Nell'approccio sintetico, gli enti geometrici si interpretano come concetti primitivi le cui proprietà vengono stabilite esclusivamente attraverso opportuni assiomi. È questa l'impostazione comunemente ritenuta più elegante e più classica: su di essa ritorneremo nel corso della seconda lezione. Per il momento tuttavia, preferiamo scegliere il secondo punto di vista, che è quello della geometria analitica e che presuppone la conoscenza dei numeri reali.

Fissati convenzionalmente due punti (origine e unità), sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta e l'insieme $\mathbf{R}$. Possiamo dunque pensare di aver introdotto su ogni retta un sistema di ascisse. Similmente, possiamo sempre pensare di aver introdotto sistemi di riferimento cartesiano nel piano e nello spazio.

Si potrebbe essere tentati di attribuire alla fase numero due del nostro approccio un carattere puramente convenzionale e quindi secondario. In realtà, è qui che giocano un ruolo sostanziale le condizioni di invarianza e di normalizzazione che, come abbiamo accennato in precedenza, assicurano la compatibilità tra la nozione matematica che vogliamo definire e l'idea intuitiva di misura. Il fatto è che a volte i concetti più familiari sono i più difficili da formalizzare.

Discutiamo prima il caso in cui Ω sia una retta. Imporre la condizione di normalizzazione equivale a richiedere che la misura del segmento i cui estremi sono l'origine e l'unità sia pari a 1. Tenendo conto della condizione di invarianza, da ciò segue che la misura di un segmento generico dovrà coincidere con la sua lunghezza. Ma la lunghezza è una nozione metrica: per definirla occorre cioè disporre di una distanza. Ricordiamo che una *distanza* su un insieme Ω si definisce assiomaticamente come una funzione $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(d₁) $d(x, y) \geq 0$ qualunque siano $x, y \in \Omega$, e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,

(d₂) $d(x, y) = d(y, x)$ qualunque siano $x, y \in \Omega$,

(d₃) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, qualunque siano $x, y, z \in \Omega$.

La distanza usuale tra due punti P e Q è data dal valore assoluto della differenza tra le ascisse di P e Q . La lunghezza di un segmento non è altro che la distanza tra i suoi estremi. È importante non confondere le nozioni di misura e di lunghezza. Esse coincidono per i segmenti, ma mentre ha senso parlare di lunghezza solo nel caso dei segmenti, la nozione di misura è estendibile a tutti gli elementi dell'anello generato, e quindi si applica anche a insiemi di tipo più generale¹.

Anche la condizione di invarianza si riduce, in sostanza, ad una verifica di tipo metrico. Ricordiamo che un'*isometria* è un'applicazione f di uno spazio metrico Ω in sé, tale che per ogni $x, y \in \Omega$ si abbia

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) .$$

La nozione di isometria offre lo strumento tecnico ideale per rappresentare, in astratto, l'idea di una figura che “si sposta senza deformarsi”. Imporre la condizione di invarianza significa in altre parole richiedere che se $A, B \subset \Omega$ e se esiste un'isometria f tale che $f(A) = B$, allora A e B devono avere la stessa misura.

¹L'idea di lunghezza è a sua volta all'origine del concetto di *norma*, che è fondamentale in analisi matematica; le classi di equivalenza costituite da segmenti equipollenti appartenenti a una stessa retta formano uno spazio vettoriale di dimensione 1, sul quale la lunghezza induce appunto una norma.

Su una retta, la misura definita attraverso la lunghezza soddisfa automaticamente la condizione di invarianza. La verifica è immediata nel caso dei segmenti, e non è poi difficile convincersi che la proprietà si mantiene quando si passa ai sottoinsiemi della retta che fanno parte dell'anello generato.

In definitiva, possiamo concludere questa discussione affermando che le condizioni di invarianza e normalizzazione servono ad assicurare compatibilità, nel caso della retta, tra la nozione di misura e quella di distanza.

Consideriamo adesso il caso in cui Ω è un piano, nel quale sia stato fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Il legame tra misura e distanza è ora meno immediato, ma ugualmente stretto. Cominciamo con l'identificare nell'insieme di tutti i rettangoli aventi i lati paralleli agli assi coordinati, la famiglia di partenza. Usando anche in questo caso l'accorgimento di includere in ciascun rettangolo solo una coppia di lati adiacenti, è facile dimostrare che tale famiglia costituisce un semi-anello $\mathcal{E}$. È poi naturale assegnare ad ogni rettangolo, come misura, il prodotto delle misure dei lati. La distanza usuale, in un piano dotato di un sistema di riferimento cartesiano, si definisce per mezzo del teorema di Pitagora. È immediato convincersi che la misura, definita come sopra indicato su $\mathcal{E}$, rispetto alla distanza usuale è invariante per isometrie.

La terza fase della nostra scaletta si configura come un tipico problema di estensione. Anzi, il problema dell'estensione di una misura generica, così come lo abbiamo descritto all'inizio, non ne è altro che la versione astratta.

L'anello $\mathcal{E}_0$ generato da $\mathcal{E}$ è costituito dai cosiddetti *plurirettangoli*, ovvero da tutte le figure piane decomponibili come unioni finite di rettangoli non sovrappontentisi e con i lati paralleli agli assi coordinati. Ovviamente, l'estensione della misura all'anello $\mathcal{E}_0$ non presenta nessuna difficoltà. In particolare, la proprietà di invarianza rispetto alle isometrie, nel procedimento di estensione, si conserva. I plurirettangoli costituiscono però una classe ancora troppo ristretta di figure piane.

Il problema di come poter effettuare ulteriori estensioni interessò, per le sue ovvie implicazioni utilitaristiche, matematici e filosofi già nei tempi antichi. Il metodo di esaustione di Archimede si può considerare storicamente la prima soluzione proposta: limitatamente a certi tipi di figure, esso risulta particolarmente efficiente e viene usato ancor oggi per calcolare, ad esempio, l'area dei settori parabolici. Archimede concepì il suo metodo esclusivamente come una procedura di calcolo approssimato. L'idea soggiacente, opportunamente generalizzata, può tuttavia essere utilizzata per un'ulteriore estensione della misura ad una classe molto più vasta di insiemi in modo del tutto rigoroso. Cerchiamo di descrivere le varie tappe del ragionamento.

Per semplicità, supponiamo di restringere l'insieme ambiente ad un ret-

tangolo R sufficientemente grande, fissato all'inizio una volta per tutte. Naturalmente possiamo includere anche R nell'anello $\mathcal{E}_0$ e si avrà allora un'algebra.

Come abbiamo già detto, l'ulteriore estensione della misura si basa su un'idea in sé molto naturale e intuitiva, ma che diventa estremamente delicata nella sua realizzazione rigorosa: essa chiama in causa l'infinito e le nozioni di estremo superiore e inferiore. Qui dunque si abbandona decisamente il terreno dell'algebra, e ci si avventura nel reame dell'analisi.

Dato un insieme $A \subset R$, si considerano tutti i plurirettangoli che contengono A e le loro misure. Si ottiene in questo modo un insieme inferiormente limitato di numeri reali. L'estremo inferiore di tale insieme si dice la *misura esterna* di A e si indica col simbolo $\mu^*(A)$. Analogamente, si definisce la misura interna $\mu_*(A)$, tenendo presente che A potrebbe non contenere rettangoli non degeneri (in tal caso si pone $\mu_*(A) = 0$). Infine, si dirà che A è *misurabile* se la sua misura interna e la sua misura esterna coincidono: il valore comune di $\mu_*(A)$ e $\mu^*(A)$ si dice semplicemente la *misura* di A e si indica con $\mu(A)$.

Gli insiemi misurabili formano un'algebra $\mathcal{E}_1$, che contiene l'algebra $\mathcal{E}_0$ dei plurirettangoli come sotto-algebra. Inoltre la misura definita su $\mathcal{E}_1$ costituisce un'estensione della misura originariamente definita su $\mathcal{E}$ e poi estesa su $\mathcal{E}_0$. Infine, la procedura seguita garantisce automaticamente la preservazione della proprietà di invarianza rispetto alle isometrie.

Una costruzione alternativa, ma palesemente equivalente, consiste nel suddividere R in sottorettangoli mediante una "griglia" di rette parallele agli assi coordinati. Possiamo controllare la "finezza" della griglia mediante un opportuno parametro: la distanza tra le rette della griglia funziona egregiamente allo scopo. Si considerano quindi il più piccolo (nel senso dell'inclusione) plurirettangolo contenente A e il più grande plurirettangolo contenuto in A , formati dalla griglia e compatibili con il valore del parametro di volta in volta scelto. Come si vede, questo metodo non differisce, nell'idea di fondo, dal precedente, ma ha il vantaggio che, al variare del parametro, si ottengono successioni monotone di plurirettangoli. Invece che agli estremi superiore e inferiore, si può quindi ricorrere, per il passaggio finale, alla nozione di limite.

Ritorniamo per un momento allo schema assiomatico, per introdurre una nuova definizione che permette di interpretare in astratto la questione dell'invarianza.

Sia $\mathcal{G}$ un gruppo. Si dice che $\mathcal{G}$ *agisce* su Ω se è definita un'applicazione $\mathcal{G} \times \Omega \rightarrow \Omega$. In altre parole, per ogni $g \in \mathcal{G}$ e per ogni $x \in \Omega$ deve esistere uno e un sol $y \in \Omega$ tale che $y = g \cdot x$. Per esempio, se Ω è un piano e $\mathcal{G}$ è il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di Ω in sé (questo gruppo include le trasformazioni più semplici, come le rotazioni e le simmetrie), possiamo dire che $\mathcal{G}$ *agisce* su Ω . Un altro esempio, ancora più immediato, è offerto

dalle traslazioni su una retta. Queste infatti possono essere interpretate come azione esercitata dal gruppo additivo $\mathbf{R}$ su $\mathbf{R}$ stesso.

Sia ora Ω un insieme, e sia $\mathcal{E}$ un anello di sottoinsiemi di Ω . Sia infine $\mathcal{G}$ un gruppo che agisce su Ω . Una *misura di Haar* su $\mathcal{E}$ è una funzione $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ che soddisfa gli assiomi (m_1) , (m_2) e tale che

$$\forall g \in \mathcal{G}, \quad \forall A \in \mathcal{E}, \quad \mu(g \cdot A) = \mu(A).$$

Si dice anche che μ è invariante per $\mathcal{G}$. Le misure che abbiamo definito sulla retta e nel piano non sono quindi altro che delle misure di Haar invarianti per il gruppo delle isometrie.

Concludiamo questa lezione con alcuni commenti. Come vedremo meglio nella terza lezione, i problemi di misura furono a lungo considerati delle applicazioni del calcolo integrale. I primi tentativi di definire la misura in modo diretto, cioè senza far intervenire le funzioni e i loro integrali, risalgono a Cantor ([11]). Tuttavia, le soluzioni più pratiche ed eleganti vennero con Peano (1887) e Jordan (1892) e sono, nella sostanza, quelle che abbiamo descritto poc'anzi. La costruzione che fa uso degli estremi inferiore e superiore è dovuta a Peano (il quale si servì per altro non di plurirettangoli, ma di generici poligoni iscritti e circoscritti), mentre la costruzione basata sulla griglia di rette è quella proposta da Jordan (si veda ancora [11]).

Tra i vari risultati relativi alla misura secondo Peano-Jordan, come la si chiama oggi, vogliamo ricordare solo il seguente:

Teorema

Un insieme è misurabile se e solo se la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla.

La teoria di Peano-Jordan si applica ai sottoinsiemi degli spazi euclidei. Un primo tentativo di sistemazione assiomatica della teoria della misura, sia pure ancora limitato a casi di interesse geometrico, fu compiuto dal matematico francese E. Borel nel 1898. La definizione assiomatica di misura, in tutta la sua generalità, è attribuita al matematico russo A. Kolmogorov (1933). Vi sono molti trattati classici di teoria della misura a livello universitario: il più diffuso di tutti è forse [8], ma si può vedere anche, per esempio, [9].

Nei manuali scolastici è raro trovare una impostazione assiomatica della teoria della misura. Fa eccezione il testo di Prodi e Magenes ([13]) dove, per definire l'area delle figure piane, si utilizza il metodo della griglia.

Da un punto di vista didattico, può non essere necessario introdurre le strutture di semi-anello e di anello, anche se queste aiutano a rendere più

ordinato e chiaro il processo di estensione. In particolare, in questo modo, si evita la complicazione di dover lavorare con segmenti o rettangoli semi-chiusi.

È tuttavia importante insistere sul fatto che la misura è, come si dice anche, una *funzione d'insieme*: e questa è la ragione per cui le sue proprietà sono enunciate facendo riferimento alle operazioni insiemistiche. Il fatto che, nel caso di ambienti particolari, la misura possa essere messa in relazione con altri tipi di operazioni (per esempio, la somma di segmenti consecutivi su una retta) dipende dall'esistenza di strutture matematiche sovrapposte (per esempio, distanza, lunghezza) che interagiscono e talvolta addirittura coincidono con la misura. Per chiarire la questione, può essere opportuno riflettere sull'esistenza di misure diverse da quella tradizionale e che sono in relazione con altri tipi di strutture. Per esempio, data una semiretta sulla quale sia stato stabilito un sistema di ascisse positive a partire dall'origine, si può definire la "misura" di un intervallo $[a, b]$ come $\log_r \frac{b}{a} = \log_r b - \log_r a$ ($r > 0$, $r \neq 1$). Oltre agli assiomi (m_1) e (m_2) , questa "misura" verifica una condizione di invarianza rispetto all'azione di $\mathbf{R}^+$ (pensato come gruppo moltiplicativo) su $\mathbf{R}^+$ stesso. Nel caso in cui la base dei logaritmi venga posta uguale a 2, si ottiene in particolare la misura utilizzata per la rappresentazione degli intervalli musicali.

Lezione 2. Quanto visto nella prima lezione suggerisce che lo sviluppo di una teoria della misura applicabile ad una classe ragionevolmente ampia di figure richieda almeno due indispensabili premesse: una teoria della misura a livello elementare e il concetto di numero reale. L'esigenza del ricorso ai numeri reali discende non tanto dal fatto che la misura sia astrattamente definita come un'applicazione a valori reali, ma piuttosto dalla necessità di formalizzare le condizioni di invarianza e normalizzazione, e di portare a completamento il processo di estensione. Vogliamo adesso esaminare come questi argomenti vengono trattati sui manuali scolastici.

Sembra esserci un certo accordo sul fatto che il problema della misura elementare debba essere ritenuto un tema di geometria. Ora, è noto che i trattati di geometria concepiti per l'istruzione secondaria sono stati per lunghi anni influenzati dall'impostazione euclidea (del resto, gli stessi *Elementi* furono utilizzati in Italia per un certo periodo, nel secolo scorso, come libro di testo [15]).

Nella storia della matematica antica, i greci si distinsero per la concezione astratta del numero e degli enti geometrici: i loro importanti progressi furono largamente dovuti al rigore delle deduzioni e alla costruttività dei procedimenti, cui sempre scrupolosamente si attennero. In questo spirito, essi finirono

per privilegiare la geometria rispetto ai metodi computazionali dell'aritmetica sviluppati da altre scuole dell'antichità e di cui pure erano al corrente. Non a caso, negli *Elementi* la geometria piana viene svolta nei primi sei libri, mentre l'aritmetica inizia solo col Libro VII.

In conformità con questa tradizione, nei manuali di geometria la tendenza a non lesinare ogni possibile sforzo per sviluppare l'esposizione da un punto di vista strettamente sintetico, rinviando al più tardi l'introduzione dei numeri, è manifesta. La nostra ricostruzione fa riferimento soprattutto a [6] e [14]: queste opere sono ormai uscite, credo, dal circuito delle adozioni, ma conservano tuttora un indiscusso valore come "classici".

Uno dei nodi più delicati della geometria elementare è quello della definizione dell'uguaglianza delle figure. Il termine uguaglianza viene inteso oggi, per lo più nel significato restrittivo di identità. Ma in geometria quando si dice che due figure sono "uguali" si vuole significare che hanno stessa forma e dimensioni e non, per esempio, che sono orientate nello stesso modo o che occupano la stessa posizione nello spazio. In altre parole, l'uguaglianza non è intesa in senso assoluto, ma relativamente ad alcune specifiche qualità. Si parla allora più propriamente di *congruenza*. Euclide definisce la congruenza come sovrapponibilità, ovvero per mezzo dei "movimenti rigidi", e quindi facendo appello ad un'idea intuitiva. In ciò Euclide è perfettamente in linea col contesto culturale del suo tempo, secondo il quale la geometria era considerata sì una disciplina rigorosa, ma pur sempre con radici saldamente affondate nella realtà del mondo fisico. Era quindi del tutto ragionevole cercarne la giustificazione ultima nell'esperienza comune.

Si noti che, proponendo la definizione di congruenza attraverso la formula del movimento rigido, si suggerisce implicitamente anche un criterio di verifica ideale, ma semplice e operativo.

All'idea del movimento rigido fanno ricorso in effetti, in modo più o meno diretto, la maggioranza dei manuali scolastici. Tuttavia essa è estremamente debole dal punto di vista della coerenza. Infatti, se si volesse precisare il significato del termine "movimento rigido", non si potrebbe far altro che parlare di una trasformazione che conserva le figure uguali a se stesse, facendo così ricorso alla medesima idea che, per mezzo di quello, si intendeva di definire.

Sulla questione della congruenza, allo scopo di conciliare correttezza logica e semplicità espositiva, sono state proposte varie soluzioni: il lettore interessato può consultare, per esempio [4]. Ma il contributo più autorevole si deve indubbiamente a Hilbert che nei *Fondamenti della geometria* (1899) elaborò un rigoroso sistema di assiomi dai quali tutti i risultati della geometria euclidea possono essere correttamente dedotti [1].

Nel sistema Hilbertiano, oltre ad un gruppo di assiomi dedicati alla con-

gruenza, compaiono il postulato di Eudosso-Archimede e il principio di continuità della retta. Come noto, quest'ultimo principio ammette diverse formulazioni. Hilbert lo enunciò attraverso la proprietà di non estendibilità della retta. Altre forme storicamente rilevanti sono quella dovuta a Dedekind (sezioni) e quella dovuta a Cantor (classi separate e contigue).

Non ci interessa qui imbarcarci nella questione dell'equivalenza di questi enunciati, per la quale si rinvia ancora a [1]. Ci importa invece ricordare che il postulato di Eudosso-Archimede e il principio di continuità sono gli ingredienti fondamentali che intervengono nella dimostrazione dell'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra punti di una retta e numeri reali: essi sono dunque il punto di partenza della geometria analitica.

Ma torniamo all'esposizione tradizionale della geometria elementare. Acquisita in qualche modo l'idea di congruenza, si introducono certe operazioni come la *somma* e il *confronto* tra segmenti. Le relative costruzioni sono pressoché immediate eppure, a ben guardare, nascondono anch'esse qualche insidia. Per esempio, quasi nessuno osserva esplicitamente che, siccome la congruenza è una relazione di equivalenza, quelle definite non sono in realtà operazioni su singoli segmenti, ma su classi di equivalenza di segmenti.

Ogni classe di equivalenza di segmenti congruenti identifica una *lunghezza* (e qui bisogna però osservare che il termine "lunghezza" è usato senza far riferimento ai numeri, e quindi con un'accezione diversa da quella con cui lo abbiamo usato nella lezione precedente).

La somma e il prodotto qualificano le lunghezze come una classe di grandezze. In generale, come ben messo in evidenza in [10], si chiama *classe di grandezze* un insieme di oggetti omogenei in cui sia riconoscibile una struttura di *monoide*, ovvero nel quale sia definibile un'operazione di somma associativa. Si richiedono inoltre un certo numero di proprietà aggiuntive (commutatività, esistenza dell'elemento neutro, legge di cancellazione) e l'esistenza di una relazione di ordine compatibile con la somma. Facciamo osservare che in un monoide non viene richiesta l'esistenza degli inversi.

In questo contesto, "misurare" significa stabilire una procedura di carattere generale per mezzo della quale sia possibile assegnare a ciascun elemento di una data classe di grandezze un numero reale non negativo che ne rappresenti la misura rispetto ad un elemento della stessa classe convenzionalmente assunto come "unità".

È naturale pensare che alla somma di due grandezze debba corrispondere la somma delle loro misure. Ci appare allora del tutto chiaro come il ricorso all'apparato delle classi di grandezze sia motivato dall'esigenza di avere a disposizione un contenitore astratto, dotato di una struttura il più possibile analoga a quella dei reali non negativi.

Il lettore si sarà accorto che il termine “misura”, pur presentando contenuti euristici analoghi a quelli già discussi nella prima lezione, trova adesso la sua formalizzazione attraverso un dispositivo tecnico completamente diverso. Infatti, mentre nella prima lezione si faceva riferimento all'algebra booleana degli insiemi (si ricordi in particolare la formulazione della proprietà di additività), adesso la struttura soggiacente è essenzialmente quella del monoide additivo. Questi due apparati non sono del tutto omologabili: per esempio, la somma di due segmenti coincide con la loro unione insiemistica se e solo se questi giacciono sulla stessa retta e sono consecutivi.

Esempi di classi di grandezze omogenee si trovano non solo in geometria, ma anche in fisica: durate (cioè intervalli di tempo), temperature, masse, carica elettrica ecc.. Il passaggio logico attraverso il quale a partire da alcune situazioni semplici si arriva a concepire le classi di grandezze richiede un certo sforzo di astrazione: esso è lecito e anzi opportuno, come tipico esercizio di generalizzazione matematica, a condizione però che ne valga la pena, e cioè che le affinità tra le singole applicazioni siano più significative delle differenze.

Il secondo esempio importante di classe di grandezze che si incontra in geometria è costituito dagli *angoli*. Ci sono vari modi, come ben si sa, di introdurre gli angoli:

a) Come sottoinsiemi del piano (in questo caso sarebbe però forse meglio parlare di *regioni angolari*). Una possibile definizione, in questa ottica, potrebbe essere la seguente: un angolo è costituito dall'intersezione di due semi-piani. In questo modo però si definiscono solo gli angoli minori di un angolo piatto. Meglio forse dire: un angolo è una parte di piano delimitata da due raggi aventi la stessa origine. Gli angoli, così definiti, possono essere sommati giustapponendo, a meno di congruenze, le corrispondenti regioni angolari: ciò ci permette in particolare di riconoscere nella regione dell'angolo somma l'unione delle regioni degli angoli addendi. Ci si accorge subito, tuttavia, che anche in questo modo i vantaggi sono molto limitati. Di fatto, se si insiste nel concepire gli angoli come porzioni di piano, non vi è nessuna possibilità di parlare di angoli maggiori di un giro. Ne consegue che la somma tra due angoli risulta definita solo se gli addendi sono sufficientemente piccoli. Ma se la somma non è sempre definita, allora non si può affermare che gli angoli costituiscono una classe di grandezze. Stesso tipo di problemi si incontrerebbero definendo gli angoli come archi di circonferenze.

Dal momento che gli angoli vengono interpretati come insiemi di punti, si potrebbe pensare di aggirare l'ostacolo definendo la somma direttamente come unione. In questo modo, la somma risulterebbe sempre eseguibile ma presenterebbe caratteristiche alquanto singolari: per esempio, la somma di cinque angoli retti sarebbe uguale ad un angolo giro. È in effetti possibile

definire una misura per gli angoli, soddisfacente agli assiomi (m_1) , (m_2) e invariante per congruenze, che attribuisce all'angolo giro misura finita (e ad ogni altro angolo misura inferiore).

Non sembra tuttavia che tale misura abbia interesse per le applicazioni, almeno da un punto di vista elementare.

b) Un modo simile al precedente, ma più sottile, consiste nel pensare l'angolo come dato dalla coppia ordinata di raggi che ne delimitano i lati (quindi non come una porzione di piano). La somma si esegue riportando consecutivamente i due angoli, e poi cancellando il lato comune. Procedendo in questo modo, la somma di cinque angoli retti sarebbe uguale ad un angolo retto. Evidentemente, neanche in questo modo si ottiene una classe di grandezze.

c) Identificandoli come elementi del gruppo delle rotazioni del piano. È il modo più astratto, ma anche l'unico che consente di interpretare gli angoli (o meglio, quelli che corrispondono a rotazioni positive), come grandezze. Si noti, per inciso, che con questa definizione la somma di cinque retti è effettivamente pari a cinque volte l'angolo retto. D'altra parte, si perde completamente ogni collegamento tra angolo e insieme di punti, e quindi ogni possibilità di interpretare la somma come unione.

Una volta riconosciuto, in questo modo, che gli angoli possono essere interpretati come una classe di grandezze, potremo assegnare loro una misura rispetto ad un'unità prefissata, secondo il punto di vista illustrato in questa lezione. Come ci fa osservare lo Choquet ([5], Cap. V), quando si parla di "misura" degli angoli si intende quasi sempre non una funzione di insieme, ma una sorta di ascissa angolare che si avvolge attorno ad una circonferenza centrata nel vertice dell'angolo.

L'interpretazione degli angoli come rotazioni è anche quella più appropriata ai successivi sviluppi della trigonometria e dell'analisi.

Arriviamo finalmente al problema delle aree. La congruenza, chiaramente, adesso non è più sufficiente: nella sfera dell'esperienza comune si trovano infatti innumerevoli esempi di figure che non sono sovrapponibili, ma cui compete la stessa area. Si fa allora ricorso all'idea di *estensione*.

Possiamo pensare di introdurre l'estensione o come un concetto primitivo, oppure attraverso un certo numero di assiomi che ne stabiliscano le proprietà. Nessuno dei due approcci ci lascia però questa volta completamente soddisfatti.

Sul piano euristico, risulta infatti molto più difficile spiegare l'equiestensione che non la sovrapponibilità, per l'ovvia ragione che non esistono in natura criteri di semplice applicazione per verificare quando due superfici materiali occupano o meno lo stesso spazio. Inoltre, non è affatto chiaro quali figure abbiano diritto ad avere un'estensione. Con la malizia di chi ha già in mente

gli sviluppi successivi della storia, si potrebbe chiedere: i punti a coordinate razionali contenuti in un quadrato, hanno estensione o no? In mancanza di un facile criterio operativo di verifica, è duro accettare la susseguente definizione di equivalenza basata sull'equiestensione (quella che molti autori chiamano anzi l'*equivalenza* per antonomasia), l'introduzione delle operazioni di somma e di confronto e, infine, l'interpretazione delle estensioni come classi di grandezze.

Sul piano assiomatico, a parte l'ulteriore sforzo di astrazione richiesto, bisogna osservare che non è immediato trovare un sistema di assiomi per l'equiestensione che si distingua a prima vista da un sistema di assiomi per la congruenza. Del resto, nemmeno Euclide distingue tra congruenza ed equiestensione. Più precisamente, le sue *nozioni comuni* descrivono regole di comportamento che valgono sia per l'uguaglianza nel senso dei movimenti rigidi, sia per l'uguaglianza nel senso dell'area.

Meno ambiziosa ma più coerente appare la posizione di quegli autori che limitano l'equiestensione alla *equiscomponibilità*, concetto che si riconduce agevolmente alla congruenza. Sulla base della nozione di equiscomponibilità si può sviluppare la teoria dell'equivalenza fino ad arrivare a dimostrare (nelle versioni geometriche, non metriche) i teoremi più importanti per le applicazioni (Teorema di Pitagora, Teoremi di Euclide ecc.) e anche risultati abbastanza sofisticati come il criterio di equiscomponibilità delle figure curvilinee e il teorema di non-equiscomponibilità tra cerchio e quadrato (si veda per esempio [4]).

Riprendiamo la nostra marcia di avvicinamento all'introduzione della misura. Come abbiamo già fatto osservare, la geometria sintetica cerca di evitare, per quanto possibile, il ricorso ai numeri reali. Ma il problema della misura delle figure è legato alle applicazioni pratiche e queste non possono prescindere dalla rappresentazione numerica. La riluttanza degli antichi greci all'impiego dei numeri non era dettata soltanto da ragioni estetiche. Più probabilmente, essi avevano imboccato l'unica via consentita dalla limitatezza delle loro conoscenze e dei loro metodi speculativi. Si tenga conto, tanto per fare un esempio, che essi, operando con riga e compasso, sapevano costruire i sottomultipli di un segmento, ma non tutti quelli di un angolo. Inoltre, non avevano una concezione chiara e formalizzata del numero reale.

Per aggirare questi ostacoli, Euclide è costretto a procedere per vie tortuose. Egli introduce il concetto di *rapporto* tra grandezze omogenee (cioè formate da oggetti della stessa natura) in modo molto astratto e facendo uso della sola nozione di multiplo di una grandezza secondo un numero intero. La misura di una grandezza arbitraria A rispetto ad un'altra grandezza U , fissata una volta per tutte ed assunta come unità di misura, viene quindi determinata

attraverso il “rapporto” $A : U$.

Nei manuali scolastici presi in esame l’approccio è un po’ diverso, ma rimane pur sempre ancorato al punto di vista sintetico. Si presuppone che i numeri reali siano stati introdotti nel contesto dell’insegnamento dell’algebra. Si focalizza quindi l’attenzione sulle *classi di grandezze misurabili e continue*, e cioè quelle che possiedono la proprietà di suddivisibilità indefinita (necessaria a garantire in generale l’esistenza dei sottomultipli), e che soddisfano al postulato di Eudosso-Archimede e al principio di continuità. Si introducono i rapporti tra grandezze, e si discute l’esistenza di grandezze tra loro incommensurabili. Si arriva così ai numeri reali, e si può finalmente attribuire un numero ad ogni grandezza.

Riassumendo, l’introduzione della misura da un punto di vista sintetico passa attraverso la nozione di classe di grandezze ed appare appropriata, anche se concettualmente non banale, nel caso delle lunghezze e degli angoli (questi ultimi, interpretati come rotazioni). Nel caso delle figure piane, il ricorso alle classi di grandezze è decisamente più artificioso: sembra più naturale limitare la teoria elementare ai poligoni equiscomponibili e quindi introdurre il concetto generale di misura in un contesto cartesiano, appoggiandosi alla struttura booleana costituita dalle operazioni insiemistiche, così come abbiamo fatto nella prima lezione. La coerenza nel passaggio tra un approccio e l’altro è garantita dalla condizione di normalizzazione.

Occupiamoci adesso brevemente del problema dell’introduzione dei numeri reali. Come noto, la questione è delicata ma di grande importanza: si tratta infatti di uno dei pilastri (l’altro è il concetto di limite) su cui poggia l’analisi matematica.

Studi approfonditi sulla natura dei numeri reali furono condotti molto tardi, solo nella seconda metà dell’ottocento. Molti matematici di valore si impegnarono nella ricerca di metodi costruttivi per il passaggio dall’insieme dei numeri razionali a quello dei numeri reali. Tutti gli approcci escogitati hanno lasciato una qualche traccia nella cultura matematica e nella tradizione didattica e vengono ancor oggi riproposti con alterno successo.

Prima di tutto, vanno ricordati il metodo delle sezioni di Dedekind e quello delle classi separate e contigue di Cantor. Questi due metodi non sono altro che varianti, applicate all’insieme dei numeri razionali ed usate come strumenti di definizione, delle analoghe forme del principio di continuità della retta.

Un terzo metodo, talvolta riferito ai nomi di Cantor e Meray, è quello delle successioni fondamentali di numeri razionali. Una successione $\{a_n\}$ si dice *fondamentale* se $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tale che $\forall n, m > N$ si abbia

$$|a_n - a_m| < \varepsilon .$$

L'insieme di tutte le successioni fondamentali di numeri razionali può essere ripartito in classi in base alla seguente relazione di equivalenza: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tale che $\forall n > N$ si abbia

$$|a_n - b_n| < \varepsilon .$$

Un numero reale corrisponde ad una e una soltanto di tali classi.

Ovviamente, questo metodo sottintende la definizione di limite, e in ciò costituisce il suo aspetto negativo, almeno dal punto di vista didattico. Esso possiede però anche dei vantaggi: mette infatti bene in evidenza la possibilità di approssimare con precisione arbitraria i numeri reali mediante i razionali.

Un quarto approccio, attribuito a Peano, si basa sulle nozioni di estremo superiore e inferiore, e risulta ancora più sottile ed astratto dei precedenti.

Avendo già accennato in precedenza alla via sintetica, non resta che parlare dell'impostazione assiomatica di Hilbert. Gli assiomi proposti da Hilbert per l'introduzione dei numeri reali si suddividono, per comodità, in quattro gruppi. I primi due gruppi si riferiscono alle operazioni algebriche e alle loro proprietà. Il terzo gruppo di assiomi stabilisce l'esistenza di un ordinamento totale e la sua compatibilità con la struttura algebrica. Ma gli assiomi che veramente caratterizzano i numeri reali sono quelli del quarto gruppo, e cioè il postulato di Archimede (nella forma numerica) e il principio di continuità che, come nel caso della retta geometrica, Hilbert formula come *principio di integrità*: non esiste un insieme numerico contenente $\mathbf{R}$ in senso proprio e che verifichi, come $\mathbf{R}$, tutti gli assiomi precedenti.

Riassumendo, la tradizione scolastica che ha preso forma sull'eredità euclidea e che privilegia l'impostazione sintetica, comporta la separazione dell'insegnamento dell'algebra da quello della geometria, almeno per una lunga fase iniziale. Per quanto perfettamente corretto, questo modo di procedere risulta appesantito dalla necessità di ripetere più volte le delicate questioni attinenti agli assiomi di continuità; inoltre, viene ritardata l'introduzione delle idee che sono alla base della geometria analitica.

Un'alternativa valida, almeno dal punto di vista della coerenza nell'organizzazione logica degli argomenti, è quella proposta in [12]. Qui i numeri reali vengono "costruiti" per via aritmetica assumendo come presupposto la conoscenza dei numeri razionali. Lo studio della geometria inizia successivamente: in particolare, la proprietà di continuità della retta viene enunciata facendo esplicito riferimento all'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali.

Lezione 3. Il metodo di esaustione di Archimede costituì la soluzione più avanzata al problema del calcolo delle aree fino alla seconda metà del XVII secolo. Con questo metodo, il problema viene ricondotto alla determinazione della somma di certe espressioni numeriche, in generale piuttosto complicate: il successo è condizionato dalla disponibilità di formule ad hoc ed è quindi limitato a pochi casi particolari. Inoltre, in mancanza di un esplicito concetto di numero reale, per applicare il metodo di esaustione è necessario prima congetturare il risultato sulla base di qualche considerazione empirica, e infine ricorrere ad un faticoso ragionamento per assurdo.

Un enorme progresso si realizzò con l'invenzione del calcolo infinitesimale, quando ci si rese conto che il problema del calcolo di certe aree poteva essere ricondotto al problema della ricerca delle primitive.

Ricordiamo che se f è una funzione reale definita su un intervallo I , una *primitiva* di f su I è una funzione F continua e derivabile tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Se la funzione f ammette una primitiva, si dice anche che è *integrabile*. Se f ammette una primitiva F su un intervallo I , allora ne ammette infinite, ma tutte sono rappresentabili nella forma $F(x) + k$, dove k è una costante reale arbitraria. L'insieme di tutte le primitive di f su I si indica col simbolo

$$\int f(x) dx, \quad x \in I$$

(la notazione è dovuta a Leibniz) e si chiama l'*integrale indefinito* di f su I . Fissati due punti $a < b$ appartenenti all'intervallo I , il numero $F(b) - F(a)$ non dipende evidentemente dalla particolare primitiva scelta. Tale numero fornisce l'*integrale definito* di f sull'intervallo $[a, b]$ e si indica col simbolo

$$\int_a^b f(x) dx.$$

La scoperta della relazione tra misura dell'area e calcolo delle primitive riposa sull'osservazione seguente. Sia $f(x)$ una funzione positiva sull'intervallo I e siano $a, b \in I$. La regione del piano definita dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ si chiama il *trapezoide* di f sull'intervallo $[a, b]$. Fissiamo un punto $x > a$ e denotiamo con $S(x)$ la misura dell'area del trapezoide di f sull'intervallo $[a, x]$. Ovviamente, si ha $S(a) = 0$. Se $\bar{x}$ e x sono molto vicini, la differenza $S(x) - S(\bar{x})$ rappresenta l'area di una figura di forma approssimativamente rettangolare. Dunque il rapporto

$$\frac{S(x) - S(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

sarà approssimativamente uguale da un lato al valore di $f(\bar{x})$, dall'altro alla derivata di $S(x)$ ².

In conclusione, $S(x)$ risulta essere una primitiva di $f(x)$ e sussiste la formula

$$\int_a^b f(x) dx = S(b) - S(a) = S(b) .$$

Si noti che per calcolare $S(b)$ non è necessario disporre proprio della funzione $S(x)$, ma è sufficiente saper calcolare una primitiva qualsiasi.

Più in generale, sia $A \subset \mathbf{R}^2$ un insieme *verticalmente convesso*: ciò significa che A si può rappresentare come

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\} .$$

dove g e f sono certe funzioni. La misura di A sarà allora data dalla formula

$$\mu(A) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = F(b) - F(a) - G(b) + G(a)$$

dove G e F sono rispettivamente primitive di g e f . Analogamente, possiamo calcolare l'area quando A è *orizzontalmente convessa* e, più in generale ancora, quando A risulta decomponibile nell'unione finita di insiemi, ciascuno dei quali sia verticalmente o orizzontalmente convesso.

Il modo in cui i fondatori del calcolo infinitesimale pensarono di risolvere il problema della misura delle aree è dunque lo stesso nel quale ancor oggi si procede, nella maggior parte dei problemi pratici, quando siamo interessati al calcolo effettivo di un'area.

Tuttavia, dal punto di vista della coerenza, questo modo di procedere presenta alcuni punti deboli: primo, non ci si pone il problema di che cosa sia l'area e, secondo, non ci si chiede quali siano le figure per le quali abbia senso parlare di area, e per quali no. In altre parole, l'interesse è concentrato solo sulla questione del calcolo pratico, e non ci si pone l'importante problema teorico di definire l'area e di caratterizzare la famiglia degli insiemi misurabili.

A prima vista, si potrebbe naturalmente pensare di far coincidere la famiglia degli insiemi misurabili con quella degli insiemi verticalmente o orizzontalmente convessi. Si tratta chiaramente di una soluzione riduttiva, ma

²Il ragionamento non è rigoroso: al tempo di Newton e Leibniz non era stata ancora formalizzata la nozione di limite e le dimostrazioni erano quasi sempre basate sull'uso di non meglio precisate quantità infinite o infinitesime. Il lettore può consultare, a questo proposito, una delle tante monografie sulle origini del calcolo infinitesimale (per esempio, [7])

questo potrebbe anche essere accettabile a livello di scuola secondaria. Il vero problema è il seguente: come possiamo essere sicuri che le funzioni che delimitano questi insiemi abbiano primitiva? La questione è intricata: tra l'altro, si dovrebbe distinguere tra funzioni che ammettono primitiva, e funzioni la cui primitiva è elementarmente esprimibile . . .

Per riuscire a dare una risposta soddisfacente al problema dell'esistenza delle primitive, è necessario modificare il punto di vista e procedere secondo il seguente programma:

- a) introdurre i concetti di integrale definito e di funzione integrabile in maniera diretta, svincolandoli dalla nozione di primitiva;
- b) ristabilire la connessione tra integrale definito e integrale indefinito come teorema.

Qui si allude naturalmente a quello che oggi viene chiamato *teorema fondamentale del calcolo*: ne riportiamo un enunciato per comodità del lettore.

Teorema

Se $f(x)$ è continua su un intervallo aperto (a, b) e se x_0 è un punto di (a, b) , allora la funzione $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ è derivabile nell'intervallo (a, b) e per ogni punto $x \in (a, b)$ si ha $F'(x) = f(x)$.

La funzione $F(x)$ è nota come *funzione integrale* di $f(x)$ (relativa al punto x_0). Nel caso in cui $f(x)$ è positiva, essa coincide con la funzione $S(x)$ che misura l'area del trapezoide a partire dal punto x_0 se $x > x_0$, e con la sua opposta se $x < x_0$.

Uno dei primi tentativi di ricostruzione del calcolo integrale nell'ottica di questo programma viene comunemente attribuito a Cauchy.

Cauchy (1823) si limita a considerare funzioni continue. Indichiamo con Δ una suddivisione finita di un dato intervallo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

e sia $\sigma(\Delta) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{i-1}|$. Consideriamo quindi le quantità

$$S_{\Delta}(f) = f(x_0)(x_1 - x_0) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) .$$

Cauchy dimostra che il limite

$$\lim_{\sigma(\Delta) \rightarrow 0} S_{\Delta}(f)$$

esiste, comunque vengano scelti i punti di suddivisione: ad esso dà il nome di *integrale definito* di f su $[a, b]$. La dimostrazione dell'esistenza del limite richiede in realtà la continuità uniforme, che però è garantita, dal momento che l'intervallo è limitato e chiuso. Cauchy si preoccupa successivamente di estendere la sua definizione, attraverso l'introduzione dell'integrale improprio, alle funzioni aventi asintoti verticali isolati.

La teoria dell'integrazione fa sovente riferimento al nome di Riemann. Egli fu in effetti il primo a porsi il problema dell'integrale in termini moderni, cercando cioè di identificare la classe più generale di funzioni a cui il processo di integrazione può essere applicato. La definizione di integrale dovuta a Riemann non è molto diversa da quella di Cauchy se non per il fatto che le quantità $S_\Delta(f)$ sono ora date da

$$S_\Delta(f) = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

dove i punti $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sono scelti in modo arbitrario. Tuttavia, la prospettiva è completamente rovesciata. Inizialmente non si fa nessuna ipotesi sulla funzione f , ed è il procedimento stesso che determina la classe di funzioni. Si dice infatti che f è *integrabile* (nel senso di Riemann, aggiungiamo oggi) se e solo se il limite delle quantità $S_\Delta(f)$ per $\sigma(\Delta) \rightarrow 0$ esiste comunque siano stati scelti i punti di suddivisione e i punti ξ_i . Riemann si chiede poi quali siano le condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione sia integrabile. La questione non è semplice. Non è difficile dimostrare, come in sostanza aveva già fatto Cauchy, che tutte le funzioni continue sono integrabili, ma Riemann stesso aveva dato l'esempio di una funzione integrabile con un insieme ovunque denso di punti di discontinuità!

Per avere una risposta chiara al quesito, è necessario attendere nuovi sviluppi della teoria della misura: noi oggi sappiamo che f è integrabile nel senso di Riemann su $[a, b]$ se e solo se i suoi punti di discontinuità costituiscono un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.

La memoria di Lebesgue, contenente i fondamenti della teoria dell'integrazione che ha poi preso il suo nome, è del 1901. Tuttavia, già verso la fine dell'ottocento si era già arrivati ad una formulazione del criterio di integrabilità nel senso di Riemann molto prossima a quella summenzionata. Fu anzi probabilmente proprio l'interesse acquisito nell'ambito della teoria dell'integrazione dagli insiemi "trascurabili" dal punto di vista della misura ad attirare l'attenzione dei matematici, ed a convincere dell'esigenza di concepire una definizione formale di area indipendente dall'integrale.

Ma torniamo all'integrale. Nel 1875 Darboux propone un nuovo modo di introdurre l'integrale di Riemann. Data una funzione f e una suddivisione Δ di $[a, b]$, egli considera, per ogni indice $i = 1, \dots, n$, i valori minimo m_i e

massimo M_i di f sull'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Egli prova quindi che la quantità

$$m_1(x_1 - x_0) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

ammette limite per $\sigma(\Delta) \rightarrow 0$. Tale limite coincide con l'estremo superiore delle stesse quantità al variare di tutte le possibili suddivisioni Δ . Esso si chiama l'*integrale inferiore* di f su $[a, b]$ e si indica con $\int_a^b f(x) dx$. In modo analogo si definisce l'*integrale superiore* $\overline{\int_a^b f(x) dx}$. La funzione f risulta integrabile se e solo se i suoi integrali superiore e inferiore coincidono.

L'approccio di Darboux è molto vicino a quello adottato da molti manuali universitari del giorno d'oggi, basato sulle funzioni a scala (che, sembra, siano state usate per la prima volta da Riesz attorno al 1912). Se si usano le funzioni a scala, l'integrale superiore e l'integrale inferiore devono essere definiti come estremi superiore e inferiore rispettivamente, e non come limiti.

La costruzione dell'integrale di Riemann si applica anche alle funzioni con un numero arbitrario n di variabili: è sufficiente considerare funzioni definite su iper-rettangoli, cioè su insiemi della forma $I_1 \times \dots \times I_n$, dove ogni I_i è un intervallo di $\mathbf{R}$. Questa generalizzazione richiede solo poche modifiche, ma è estremamente importante. A questo punto siamo infatti finalmente in grado di procedere alla definizione dei concetti di misurabilità e di misura per i sottoinsiemi generici di $\mathbf{R}^n$. Più precisamente, sia A un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^n$ e sia

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la sua funzione caratteristica. Si dirà che A è misurabile se e solo se χ_A è integrabile su un qualunque rettangolo R che contenga A . In tal caso, la misura di A resta definita per mezzo della formula

$$\mu(A) = \int_R \chi_A(x) dx .$$

Riassumiamo le conclusioni cui siamo pervenuti fino a questo momento. Abbiamo visto che il passaggio attraverso il calcolo delle primitive costituisce una soluzione efficiente al problema del calcolo delle aree, ma non può essere considerato un approccio corretto dal punto di vista teorico. Il passaggio attraverso la definizione diretta dell'integrale risulta, al contrario, perfettamente rigoroso e coerente, ma non sembra raccomandabile dal punto di vista didattico. Cerchiamo di spiegare perché. In primo luogo, la via che porta alla misura partendo dall'integrale definito si prospetta alquanto contorta: per arrivare alla definizione degli insiemi misurabili di $\mathbf{R}^n$ è infatti necessario aver

sviluppato la teoria dell'integrale per funzioni da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$. Come dire che per definire l'area bisogna passare attraverso gli integrali doppi. In secondo luogo, questa via non è indipendente dalla teoria elementare della misura. Bisogna infatti osservare che il trapezoide di una funzione a scala non è altro che un plurirettangolo e l'integrale viene definito proprio in modo da coincidere con la misura di quest'ultimo. Ma c'è di più. Come ci si rende conto facilmente pensando al caso delle funzioni positive, l'integrale inferiore e superiore non sono altro, rispettivamente, che la misura interna ed esterna del trapezoide associato.

Insomma, se si vuol sviluppare la teoria dell'integrazione in modo conveniente, ci si ritrova a dover usare le stesse idee e gli stessi strumenti che ci erano serviti nella prima lezione. Ma allora tanto vale rovesciare definitivamente la prospettiva e intraprendere il percorso in senso inverso, assumendo la misura come punto di partenza e l'integrale come punto di arrivo.

Il primo che intravide la possibilità di procedere in questa direzione, proponendo una definizione dell'integrale per via puramente geometrica, sembra essere stato Peano.

Supponiamo di aver svolto la teoria della misura secondo Peano-Jordan in $\mathbf{R}^n$, per ogni $n \geq 1$, come indicato nella prima lezione e quindi indipendentemente da ogni nozione di integrale. Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbf{R}^n$ misurabile, e una funzione reale f definita su A a valori, per il momento, positivi, introduciamo l'insieme

$$T_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\} .$$

Nel caso $n = 1$, T_f non è naturalmente altro che il trapezoide di f , così come era stato definito poche pagine addietro. Diremo allora che f è integrabile su A se e solo se T_f risulta misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$. L'integrale di f su A resta poi definito dalla formula

$$\int_A f(x) dx = \mu(T) .$$

Se f non è a valori positivi, si considera la decomposizione $f = f^+ - f^-$ e si definisce $\int_A f(x) dx$ come la differenza tra le misure del trapezoide di f^+ e quello di f^- .

Ovviamente anche questo procedimento ha i suoi limiti. Lo sbocco naturale di ogni teoria dell'integrazione è infatti, come abbiamo visto, il teorema fondamentale del calcolo, il quale richiede come premessa la dimostrazione del risultato sull'integrabilità delle funzioni continue. Ma se si vuol fare questa dimostrazione, non vi è altra via che ricorrere ad un qualche procedimento di

approssimazione equivalente, nella sostanza, alla definizione di integrale già proposta da Cauchy.

I libri di testo rivolti alla scuola secondaria si limitano, generalmente, all'introduzione dell'integrale definito nel senso di Cauchy, ovvero per le funzioni continue (si veda per esempio [16]). Come già osservato, non vi è nessun tentativo di definire la misura degli insiemi, e soprattutto la misurabilità: l'attenzione è concentrata sulla determinazione del valore della misura, ovvero sul problema del calcolo.

Ancora una volta fa eccezione il volume di Prodi e Magenes ([13]), dove l'integrale viene definito attraverso l'area secondo l'approccio geometrico di Peano che, in definitiva, almeno dal punto di vista teorico, ci appare il più semplice e convincente.

Bibliografia

- [1] Agazzi E., Palladino D., *Le geometrie non euclidee*, Mondadori, 1978, Cap. I e II
- [2] Bourbaki N., *Elementi di storia della Matematica*, Feltrinelli, 1963, Cap. XI e XVI
- [3] Boyer C.B., *Storia della Matematica*, Mondadori, 1980
- [4] Chiellini A., Giannarelli R., *L'esame orale di matematica nei concorsi a cattedre di scuole secondarie*, Veschi, 1962
- [5] Choquet G., *L'insegnamento della geometria*, Feltrinelli, 1969
- [6] Enriques F., Amaldi U., *Elementi di geometria*, Zanichelli, (parte prima, 1957), (parte seconda, 1968)
- [7] Galli M.G., *Le origini del calcolo infinitesimale*, Ed. Cremonese, 1970
- [8] Halmos P.R., *Measure theory*, Van Nostrand, 1950
- [9] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Introductory Real Analysis*, Prentice Hall, 1970
- [10] Morin U. e Busulini F., *Elementi di geometria*, parte seconda, CEDAM, 1966
- [11] Pesin I.N., *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press, 1970

- [12] Prodi G., *Matematica come scoperta*, vol. 1 e 2, D'Anna, 1988 (si veda anche la *Guida al progetto d'insegnamento della Matematica*, esperienze di nuclei di ricerca didattica, a cura dell'UMI)
- [13] Prodi G., Magenes E., *Elementi di analisi matematica*, D'Anna, 1982 (si veda anche la *Guida al volume Elementi di Analisi Matematica*, a cura di L. Bazzini, A. Pesci e M. Reggiani)
- [14] Rosati C., Benedetti P., *Geometria*, Soc. Ed. Dante Alighieri, Vol. I e II, 1962
- [15] Vita V., *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unità d'Italia al 1986*, Pitagora, 1986
- [16] Zwirner G., *Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica*, CEDAM, 1963

APPLICAZIONI INFORMATICHE E ANALISI NUMERICA

Giulio C. Barozzi

Università di Bologna

1. Rappresentazione dei numeri negli elaboratori elettronici

Per un uso consapevole degli strumenti informatici nel campo dell'Analisi Matematica, con particolare riguardo agli aspetti computazionali, è importante una conoscenza sufficientemente approfondita del modo con cui i numeri reali (in realtà soltanto un numero finito di razionali) sono rappresentati nella memoria di un computer. Una comprensione dei fenomeni noti come errore di arrotondamento, cancellazione, *overflow* e *underflow* (tentativamente: sovraesponenziazione, sottoesponenziazione) è necessaria per spiegare comportamenti apparentemente anomali che si manifestano quando si utilizza un computer come ambiente di laboratorio dell'Analisi Matematica.

Tutti i computer costruiti negli ultimi anni si conformano ad una normativa emanata congiuntamente dall'ANSI e dall'IEEE nel 1985, nota come ANSI/IEEE Standard 754-1985 for Binary Floating Point Arithmetic. Nel seguito di queste note descriveremo in dettaglio lo standard che va sotto il nome di *doppia precisione*, indicando le varianti per la *semplice precisione* e la *precisione estesa*.

È ben noto che tutti i numeri vengono archiviati internamente utilizzando la base due. Ciò significa che ciò che viene fisicamente memorizzato è un numero del tipo

$$x = \pm m \cdot 2^e \tag{1}$$

dove m è la *mantissa* ed e l'*esponente*; la mantissa è un razionale non negativo esprimibile come frazione binaria (= avente come denominatore una potenza di due) mentre l'esponente e è un intero. La mantissa viene di regola *normalizzata*: ciò significa che essa viene espressa nella forma

$$m = 1 + f \quad (2)$$

dove la *frazione* f è assoggettata alla limitazione

$$0 \leq f < 1$$

e deve essere rappresentabile in base due usando al più 52 bit (= cifre binarie).

La rappresentazione binaria della mantissa m è dunque del tipo

$$m = 1.b_1b_2 \dots b_{52}; \quad (3)$$

il fatto che la parte intera della mantissa sia sistematicamente 1 (e dunque possa anche non essere fisicamente memorizzata) costituisce precisamente la normalizzazione a cui accennavamo precedentemente. Fa eccezione la rappresentazione dello 0 su cui torneremo nel seguito.

La rappresentazione della frazione è dunque del tipo

$$f = 0.b_1b_2 \dots b_{52}; \quad (4)$$

ciò che viene memorizzato è la sequenza di 52 bit $b_1b_2 \dots b_{52}$.

In termini equivalenti: il numero $2^{52}f$ deve essere un intero che verifica le condizioni

$$0 \leq 2^{52}f < 2^{53}. \quad (5)$$

Una prima (sconcertante) conseguenza delle limitazioni per la mantissa è che soltanto (alcuni) razionali esprimibili come frazioni binarie sono memorizzabili esattamente; un numero come

$$0.1 = \frac{1}{10} = (0.00011)_{2^{\infty}} = (0.0001100)_{2^{\infty}}$$

non può essere memorizzato esattamente: ciò che viene scritto nella memoria del computer è un'approssimazione (per difetto o per eccesso), che differisce dal valore “vero” per un errore che non supera

$$2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}.$$

Torneremo su questo punto nel seguito.

Per l'esponente sono disponibili 11 bit. I valori che sono accettabili per l'esponente sono tutti (e soltanto) quelli che verificano la condizione

$$-1022 \leq e \leq 1023,$$

dunque in tutto $2 \cdot 1023 = 2046$ valori.

Il fatto di disporre di un numero finito di bit per la frazione costituisce una limitazione sulla precisione, mentre la circostanza analoga per l'esponente limita il campo di variabilità (in inglese: *range*) dei numeri di macchina.

Quanto abbiamo detto poco sopra sui valori accettabili per l'esponente sembra in contraddizione col fatto che disponendo di 11 bit si possono rappresentare $2^{11} = 2048$ interi. Diciamo innanzitutto che i valori che vengono archiviati nel campo di 11 bit riservato all'esponente sono i numeri $e+1023$ (appartenenti all'intervallo da 1 a $2^{11}-2 = 2046$); ciò per evitare di memorizzare il segno dell'esponente. I due valori estremi memorizzabili nel campo riservato all'esponente, cioè 0 e 2047 (che corrispondono a valori dell'esponente pari a -1023 e 1024) sono riservati a valori eccezionali di cui diremo più oltre.

Il tutto viene memorizzato in una "parola" di 64 bit, secondo quanto mostra la figura seguente, dove il primo bit serve per archiviare il segno s della mantissa, secondo la convenzione: $s = 1$ significa segno positivo, $s = 0$ significa segno negativo.



FIGURA 1. Utilizzazione dei bit per la memorizzazione di un numero in doppia precisione.

Per una migliore comprensione di quanto abbiamo detto, si considerino i numeri positivi rappresentabili con esponente $e = 0$, dunque numeri del tipo rappresentato dalla formula (3). Essi appartengono all'intervallo $[1, 2)$, sono in numero di $2^{52} \approx 4.5 \times 10^{15}$ e sono equispaziati della quantità $2^{-52} \approx 2.220 \times 10^{-16}$. I numeri rappresentabili con l'esponente $e = 1$ sono ancora 2^{52} , sono compresi nell'intervallo $[2, 4)$ e sono equispaziati in tale intervallo.

In breve: tra due potenze consecutive della base due sono contenuti 2^{52} numeri equispaziati; dunque la distanza tra due numeri di macchina raddoppia se l'esponente e viene aumentato di un'unità (ci allontaniamo dall'origine), mentre si dimezza se e viene diminuito di un'unità (ci avviciniamo all'origine). La figura 2 mostra un insieme "giocattolo" di numeri di macchina (limitatamente ai numeri positivi), corrispondente

alla scelta di tre bit tanto per f quanto per e . I valori “regolari” che può assumere l’esponente e sono dunque $2^3 - 2 = 6$.

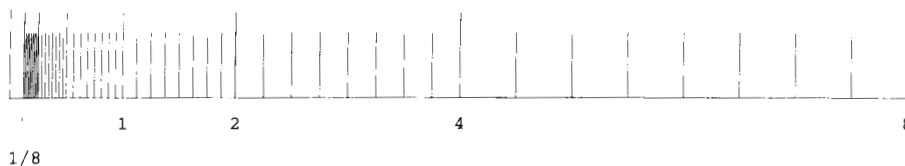


FIGURA 2. I numeri di macchina sono distribuiti linearmente “in piccolo” (tra due potenze consecutive di 2) e logaritmicamente “in grande”.

La quantità 2^{-52} è il più piccolo numero di macchina (cioè un numero effettivamente memorizzabile nel computer) che, sommato a 1, fornisca un risultato più grande di 1. Essi viene spesso chiamato precisione di macchina ed indicato con il simbolo **eps** (oppure **macheps**, cioè *machine epsilon*):

$$\text{eps} = 2^{-52}.$$

Una conoscenza esatta di **eps** non è necessaria, ma una valutazione del suo ordine di grandezza, su un computer di cui non si conoscano le caratteristiche, si rende indispensabile per evitare di richiedere limiti troppo ristretti (o al contrario troppo generosi) nel fissare criteri di arresto per un procedimento iterativo ed in altre simili situazioni.

Il seguente algoritmo, consente di valutare **eps**:

0. $k \leftarrow 0, \quad x \leftarrow 1$
1. finché $1 + x > 1$, ripetere:
 - 1.1 $x \leftarrow x/2$
 - 1.2 $k \leftarrow k + 1$
2. stampare $2x, k - 1$
3. fine

In breve: si sommano alla costante 1 addendi via via dimezzati (a partire da un valore iniziale posto anch'esso uguale a 1) fino a trovare la più grande potenza con esponente negativo di 2 che non viene “sentita” dall’unità aritmetica quando viene addizionata ad 1; tornando un passo indietro si trova la più piccola potenza di 2 che, sommata

ad 1, dà un numero > 1 . Il contatore k valuta il numero di iterazioni compiuto, dunque fornisce il numero di bit disponibili per la frazione con un errore, al più, di un'unità. Ciò è dovuto al fatto che, in alcuni computer, la somma $1 + x$ viene in un primo tempo calcolata in un registro con un bit in più, e poi arrotondata al numero standard di bit.

Nella descrizione dell'algoritmo precedente abbiamo utilizzato il simbolo

$< \text{variabile} > \leftarrow < \text{espressione} >$

per l'operatore di assegnazione. È quello che in Pascal viene indicato con il simbolo $:=$ ed in molti altri linguaggi semplicemente con il simbolo $=$. Al contrario, in alcune calcolatrici scientifiche (ad es. la TI-92) si preferisce scrivere $< \text{espressione} > \rightarrow < \text{variabile} >$, dove il simbolo di assegnazione (freccia da sinistra a destra) viene attivato dal comando STO (abbreviazione di *store*, cioè: memorizza).

Per comprendere appieno l'algoritmo descritto, occorre tenere presente che la moltiplicazione tra due numeri rappresentati in virgola mobile, cioè nella forma (1), è piuttosto semplice: basta fare il prodotto delle mantisse e la somma algebrica degli esponenti, salvo eventualmente normalizzare il risultato, in quanto il prodotto delle mantisse, che sono due numeri dell'intervallo $[1, 2)$, non è necessariamente una mantissa. Al contrario la somma tra due numeri rappresentati in virgola mobile è un'operazione complessa. Consideriamo per semplicità due numeri positivi:

$$x_1 = m_1 \cdot 2^{e_1}, \quad x_2 = m_2 \cdot 2^{e_2};$$

se i due esponenti e_1 ed e_2 non sono tra loro uguali, si richiede che uno dei due addendi, e precisamente l'addendo minore, venga "denormalizzato", cioè scritto nella forma

$$x_2 = (m_2 \cdot 2^{e_2 - e_1}) \cdot 2^{e_1},$$

dopodiché si procede all'addizione, raccogliendo a fattor comune la potenza 2^{e_1} . È precisamente quello che accade quando si somma 1 con $1/2$. Le relative rappresentazioni in virgola mobile sono

$$1 = 1.000 \dots 000 \cdot 2^0, \quad 1/2 = 1.000 \dots 000 \cdot 2^{-1},$$

ma per poterli sommare occorre scrivere

$$1/2 = 0.100 \dots 000 \cdot 2^0.$$

Quando si addizionano si ha

$$\begin{aligned} &1.000 \dots 000 \cdot 2^0 + \\ &0.100 \dots 000 \cdot 2^0 = \\ &1.100 \dots 000 \cdot 2^0, \end{aligned}$$

cioè 1.5. Ogni volta che il secondo addendo, quello denominato x nel precedente algoritmo, viene dimezzato, l'unico bit uguale a 1 nella forma denormalizzata si sposta a destra di una posizione: ecco la situazione quando si somma 1 e 1/4:

$$\begin{aligned} &1.000 \dots 000 \cdot 2^0 + \\ &0.010 \dots 000 \cdot 2^0 = \\ &1.010 \dots 000 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

È chiaro che dopo un numero finito di dimezzamenti tale bit “esce” dal campo disponibile per la mantissa, e il risultato è 1. A parole: se due addendi sono troppo diversi tra loro, la somma tra il maggiore e il minore è semplicemente uguale al maggiore. In ogni caso, se gli esponenti e_1 ed e_2 nella rappresentazione normalizzata degli addendi sono tra loro diversi, un certo numero di bit finali (“poco significativi”) della mantissa dell’addendo minore vanno perduti.

Il numero **eps** è di grande importanza: esso fornisce la “spaziatura relativa” tra due numeri di macchina consecutivi. Se da tastiera viene introdotto un numero $x > 0$, e indichiamo con $\mathbf{fl}(x)$ il valore effettivamente archiviato nella memoria di un computer che proceda per arrotondamento, allora

$$\frac{|x - \mathbf{fl}(x)|}{x} < \mathbf{eps}/2, \quad (6)$$

sempre che x sia nel contenuto nel campo di variabilità dei numeri di macchina. Se la macchina procede per semplice troncamento, allora al posto di $\mathbf{eps}/2$ a secondo membro di (6) avremo semplicemente **eps**. In ogni caso **eps** ci dà un’informazione sul massimo errore relativo che vien commesso all’atto dell’introduzione di un numero reale x nella memoria di un computer.

Per comprendere a fondo quanto abbiamo detto poco sopra, consideriamo che cosa accade per $x = 0.1 = 1/10$. Abbiamo

$$\frac{1}{10} = 1.1001\ 1001\ 1001\ 1001\ \dots \cdot 2^{-4};$$

il numero di macchina più prossimo a x si ottiene considerando la frazione di 52 bit

$$f = \underbrace{1001\ 1001\ \dots\ 1001\ 1010}_{13\ \text{blocchi di 4 bit}}. \quad (7)$$

L'ultimo blocco è 1010 e non 1001 in quanto il 53-esimo bit (cioè il primo che non viene considerato) sarebbe 1, e dunque l'arrotondamento del 52-esimo avviene per eccesso, vale a dire sommando 2^{-52} e tenendo conto del riporto ($1 + 1 = 10$ in base due). Se i blocchi di 4 bit a secondo membro vengono letti come singole cifre, abbiamo la rappresentazione *esadecimale* (= in base sedici) della frazione f). Questa trasformazione è piuttosto facile perché $(1001)_2 = 9$, $(1010)_2 = 10$, dunque il valore effettivamente memorizzato per x è dato da

$$x = \left(1 + \frac{9}{16} + \frac{9}{16^2} + \dots + \frac{9}{16^{12}} + \frac{10}{16^{13}}\right) \cdot 2^{-4}; \quad (8)$$

un numero leggermente superiore a $1/10$.

Il sistema MATLAB dispone di un utile comando, `format hex`, che consente di “fotografare” il contenuto della memoria. Nel caso del numero x in esame, esso fornisce l'output `3fb999999999999a`. Le prime tre cifre esadecimali forniscono $e + 1023$, le restanti 13 forniscono la frazione. Se si tiene conto che in base sedici le lettere `a, b, c, d, e, f` rappresentano i numeri da 10 a 15, allora

$$3fb = 3 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16 + 11 = 1019 = 1023 - 4,$$

mentre l'interpretazione della frazione coincide con quanto è fornito dalla (8).

Quanto abbiamo appena detto sembra in contrasto col fatto che se facciamo stampare il valore di x il computer ci fornisce nuovamente 0.1. Inoltre sembra esserci una contraddizione col fatto che un qualunque numero che possa essere rappresentato con un numero finito di cifre binarie è certamente rappresentabile con un numero finito di cifre decimali (mentre proprio l'esempio che stiamo considerando mostra che non è necessariamente vero il contrario).

Il guaio è che per rappresentare in base dieci un numero rappresentato in binario con 52 bit potrebbero essere necessarie più di 52 cifre decimali, un numero insopportabilmente alto. Per soddisfare la curiosità del lettore diciamo che il secondo membro della (8) si scrive

$$\frac{3602879701896397}{3602879701896398} = 1.00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 82702\ 11815\ 83404\ 54101\ 56250$$

Il denominatore della frazione appena scritta è 2^{55} ; dunque basta moltiplicare numeratore e denominatore per 5^{55} per ottenere il risultato in forma decimale esatta.

Il progettista del computer decide il numero di cifre decimali da mostrare (spesso viene lasciata una certa discrezionalità all'utente, ma viene comunque fissato un numero massimo di cifre). All'atto della stampa di un valore contenuto in memoria, il computer compie una funzione in qualche modo inversa dell'operazione $x \mapsto \mathbf{fl}(x)$. Se chiamiamo **pr** la funzione che trasforma un numero di macchina (dunque il contenuto di una parola della memoria) in un numero di schermo, allora $\mathbf{pr}(\mathbf{fl}(x)) = x$, sempre x sia stato introdotto con un numero di cifre non superiore a quello fissato dal progettista.

La discussione precedente spiega perché se facciamo stampare il valore del prodotto $n \cdot (1/n)$ otteniamo 1, ma se chiediamo al nostro computer di stampare il valore di verità dell'uguaglianza $n \cdot (1/n) = 1$, per alcuni valori di n (variabili da computer a computer) otteniamo il valore logico **false**. È chiaro che in questo secondo caso costringiamo il computer a confrontare i valori memorizzati, e non ci accontentiamo di constatare che il valore stampato del prodotto $n \cdot (1/n)$ è ancora 1.

Il numero **eps** viene talvolta chiamato “zero di macchina”. Si tratta di una denominazione del tutto impropria; esso non ha nulla a che fare con il più piccolo numero positivo di macchina. Quest'ultimo si ottiene prendendo $f = 0$ ed $e = -1022$. Il più grande numero positivo di macchina ha f leggermente inferiore a 1 (si tratta della frazione rappresentata da 52 bit tutti uguali a 1) ed $e = 1023$. Alcuni sistemi di calcolo chiamano questi numeri **realmin** e **realmax**. La tabella seguente mostra i valori delle tre costanti che caratterizzano un sistema di calcolo in virgola mobile.

Nome	Binario	Decimale
eps	2^{-52}	$\approx 2.2204 \cdot 10^{-16}$
realmin	2^{-1022}	$\approx 2.2251 \cdot 10^{-308}$
realmax	$(2 - \text{eps}) \cdot 2^{1023}$	$\approx 1.7977 \cdot 10^{308}$

Quando un calcolo produce un numero in valore assoluto maggiore di **realmax** si ha un *overflow* (letteralmente: un traboccamento). Normalmente un overflow provoca un messaggio di errore e l'arresto del calcolo. Un valore che provoca un overflow viene memorizzato convenzionalmente attribuendo all'esponente e il valore 1024, dunque memorizzando nel campo riservato all'esponente l'intero $1024 + 1023 = 2047 = 2^{11} - 1$; si tratta del massimo intero rappresentabile con 11 bit.

Quando un calcolo produce un numero in valore assoluto minore di **realmin** si ha un *underflow*. Il valore che viene sostituito in questo caso è 0 e il calcolo prosegue (in alcuni casi con un messaggio di avvertimento). Con riferimento alla figura 2, i numeri (positivi) che producono *underflow* sono quelli che si trovano nella "terra di nessuno" compresa tra 0 e **realmin**, nel caso in figura $1/8$. Occorre tener presente che sostituire $x \in (0, \text{realmin})$ con 0 comporta un piccolo *errore assoluto*, ma un *errore relativo* del 100 % !

Il comando **format hex** del sistema MATLAB consente di fotografare come viene memorizzata una variabile posta uguale a 0: si ottiene una sequenza di sedici bit uguali a 0. La terna 000 iniziale significa che $e + 1023 = 0$, cioè $e = -1023$. Lo zero viene dunque memorizzato convenzionalmente dando il valore -1023 all'esponente.

Completiamo la discussione mostrando i valori del numero di bit per l'esponente e la frazione per le rappresentazioni in *semplice precisione* e in *precisione estesa*.

	semplice	doppia	estesa
e	8	11	15
f	23	52	62

In precedenza abbiamo discusso i problemi che nascono quando si addizionano tra loro numeri aventi ordini di grandezza molto diversi

tra loro. Un fenomeno assai più pericoloso, noto come *cancellazione*, accade quando si sottraggono numeri quasi uguali tra loro. Supponiamo di sottrarre due numeri positivi aventi uguale esponente:

$$x_1 = m_1 \cdot 2^e, \quad x_2 = m_2 \cdot 2^e;$$

non è restrittivo supporre $m_1 \geq m_2$. Per la differenza tra tali numeri abbiamo

$$x_1 - x_2 = (m_1 - m_2) \cdot 2^e.$$

La quantità $m_1 - m_2$, in quanto differenza tra due numeri dell'intervallo $[1, 2)$, è un numero inferiore a 1, dunque si ha

$$x_1 - x_2 = (0.b_1b_2 \dots b_{52}) \cdot 2^e,$$

vale a dire una rappresentazione in virgola mobile non normalizzata. Per normalizzarla dobbiamo esaminare in sequenza la cifre binarie $b_1, b_2, \dots, b_{52}$ fino a trovare la prima cifra non nulla, dunque uguale a 1. Sia la cifra b_t : se $t = 1$, per avere una rappresentazione normalizzata basta moltiplicare per 2 la mantissa appena considerata (cioè spostare tutti i bit a sinistra di un posto aggiungendo uno zero in coda) e diminuire di un'unità l'esponente:

$$x_1 - x_2 = (1.b_2b_3 \dots b_{52}0) \cdot 2^{e-1}.$$

Se $t > 1$, dunque $b_1 = b_2 = \dots = b_{t-1} = 0$, $b_t = 1$, allora per avere una rappresentazione normalizzata occorre spostare a sinistra di t posizioni le cifre della mantissa aggiungendo t zeri in coda, e diminuire l'esponente di t unità:

$$x_1 - x_2 = (1.b_{t+1}b_{t+2} \dots b_{52} \underbrace{0 \dots 0}_{t \text{ zeri}}) \cdot 2^{e-t}. \quad (9)$$

È chiaro che gli zeri finali della frazione non hanno alcun significato, in quanto sono semplicemente il risultato dell'operazione di normalizzazione. In altri termini: l'*informazione* sulla differenza $x_1 - x_2$ è soltanto quella fornita dai primi $52 - t$ bit. Ora, se t è abbastanza grande rispetto a 52, la precisione relativa con cui viene calcolata la differenza $x_1 - x_2$ è ridotta. Se $x_1 - x_2$ è il risultato finale di un calcolo, l'inconveniente può essere limitato, ma non è così se tale differenza è un risultato intermedio, che deve essere ulteriormente elaborato, ad esempio deve essere moltiplicato per un fattore "grande".

Gli esempi che forniremo nel paragrafo seguente sono volti ad illustrare gli inconvenienti dovuti alla “cancellazione” di bit che si presenta facendo la differenza tra numeri “quasi uguali”, e le strategie che, in molti casi, possono essere poste in atto per evitare tali inconvenienti.

2. Problemi di cancellazione

2.1 IL CALCOLO DI π (CON UNO SGUARDO AI POLINOMI DI TAYLOR)

Il metodo più antico per la stima di π risale ad Archimede (c.287-212 a.C.) e consiste nell’inscrivere e circoscrivere poligoni regolari ad una circonferenza. Possiamo considerare la semicirconferenza di raggio 1, ed inscrivere e circoscrivere ad essa poligoni di $2^k \cdot 3$ lati, vale a dire iniziare da poligoni di tre lati e raddoppiare progressivamente il numero dei lati. Il numero π sarà il limite (e l’estremo superiore) della successione delle lunghezze delle poligoni inscritte ed anche il limite (e l’estremo inferiore) della successione delle lunghezze delle poligoni circoscritte.

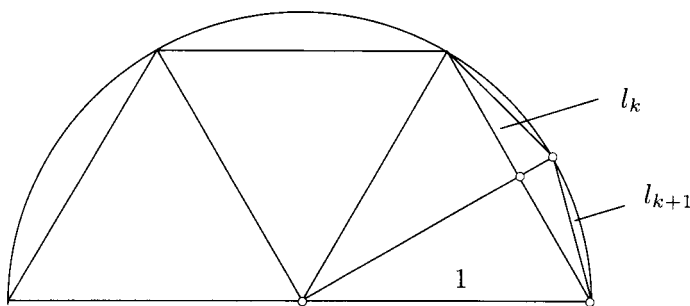


FIGURA 3. Il lato della poligonale regolare di $3 \cdot 2^{k+1}$ lati inscritta nella semicirconferenza unitaria può essere calcolato a partire dal lato dell’analoga poligonale di $3 \cdot 2^k$ lati.

Indichiamo con l_k la lunghezza del lato della poligonale inscritta alla k -esima iterazione; una doppia applicazione del teorema di Pitagora conduce facilmente alla formula ricorsiva

$$l_{k+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - l_k^2}. \quad (1)$$

L'applicazione di questa formula conduce al seguente algoritmo, in cui si utilizza una variabile di servizio s per il quadrato di l_k , ed n è il numero dei lati della poligonale inscritta nella semicirconferenza unitaria:

0. $s \leftarrow 1, n \leftarrow 3$
1. ripetere per $i = 1, 2, \dots, \text{maxiter}$
 - 1.1 $n \leftarrow 2n$
 - 1.2 $s \leftarrow 2 - \sqrt{4 - s}$
 - 1.3 $p \leftarrow n \cdot \sqrt{s}$
 - 1.4 stampare p
2. fine

Se si tiene conto del fatto che i valori successivamente assunti da s costituiscono una successione decrescente che tende a 0, ci si rende subito conto del fatto che l'applicazione della (1) conduce ad una cancellazione catastrofica nel calcolo della differenza $2 - \sqrt{2 - s}$ (il sottraendo tende crescendo a 2) e l'imprecisione con cui viene calcolata s viene amplificata dalla successiva moltiplicazione $n \cdot \sqrt{s}$.

La sperimentazione numerica mostra che, in effetti, dopo un numero abbastanza elevato di iterazioni, i valori assunti dalla variabile p , che dovrebbero tendere crescendo a π , sono del tutto inaffidabili.

In questo caso il rimedio è semplice: basta riscrivere la (1) nella forma

$$l_{k+1}^2 = \frac{l_k^2}{2 + \sqrt{4 - l_k^2}} \quad (1')$$

per avere una formula ricorsiva che non comporta cancellazione. Di conseguenza l'istruzione 1.2 del precedente algoritmo diventa

$$1.2 \quad s \leftarrow s / (2 + \sqrt{4 - s})$$

e l'algoritmo corrispondente è numericamente stabile.

Un metodo alternativo consiste nell'esprimere la lunghezza delle due poligonali, inscritta e circoscritta, siano a_k e b_k , mediante l'apotema del poligono inscritto, sia c_k .

Partendo dalla poligonale di tre lati, indicando con c_0 la relativa apotema, si ha subito $c_0 = \sqrt{3}/2$, $a_0 = 3$, e lo schema ricorsivo

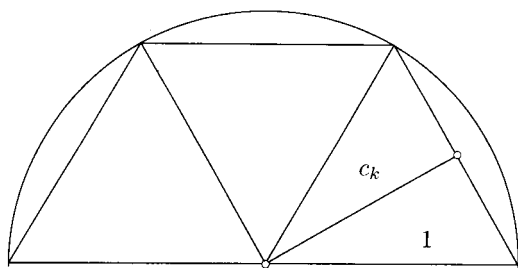


FIGURA 4. Le lunghezze delle poligonali inscritte e circoscritte possono essere espresse in funzione dell'apotema della poligonale inscritta.

$$c_{k+1} = \sqrt{(1 + c_k)/2}, \quad a_{k+1} = a_k/c_{k+1}, \quad b_{k+1} = a_{k+1}/c_{k+1}.$$

[Per i dettagli dimostrativi rimandiamo, ad esempio, a G.C. Barozzi, *Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli (Bologna), cap. 6. par. 1.]

Tanto i lati della poligonale inscritta quanto quelli della poligonale circoscritta sono visti sotto un angolo al centro che tende a 0 al tendere di k all'infinito. Sia $2x_k$ la misura di tale angolo.

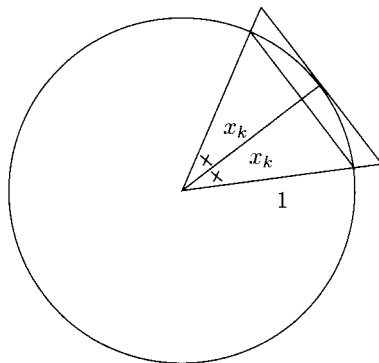


FIGURA 5. L'angolo al centro che sottende i lati delle poligonali regolari, inscritte e circoscritte alla semicirconferenza unitaria, di $3 \cdot 2^k$ lati viene indicato con $2x_k$.

Si trova subito

$$x_k = \pi/(3 \cdot 2^{k+1})$$

e

$$a_k = 3 \cdot 2^{k+1} \sin x_k, \quad b_k = 3 \cdot 2^{k+1} \tan x_k,$$

in quanto i lati delle poligonalı considerate hanno lunghezza $2 \sin x_k$ e $2 \tan x_k$ rispettivamente. Dunque $b_k - a_k = 3 \cdot 2^{k+1} [\tan x_k - \sin x_k]$.

Se si conosce lo sviluppo di Taylor delle funzioni seno e tangente si può valutare l'ordine di convergenza a 0 della quantità entro parentesi quadre; come riconosceremo strada facendo, la conoscenza dei polinomi del quinto ordine è sufficiente. Per quanto riguarda la funzione seno, è ben noto che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7).$$

Per quanto riguarda la funzione tangente, si può ricorrere ad un sistema di calcolo simbolico (Derive, *Mathematica*, ...) e trovare (*)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7).$$

La differenza entro quadre tende dunque a 0 come il cubo di x_k , più precisamente come $x_k^3/2$:

$$\tan x_k - \sin x_k = \frac{x_k^3}{2} + O(x_k^5).$$

Poiché $n_k = 3 \cdot 2^k$ è inversamente proporzionale a x_k , si arriva alla conclusione che la differenza $b_k - a_k$ tende a 0 con la stessa velocità del quadrato di x_k :

$$b_k - a_k = O(x_k^2).$$

Il calcolo dei polinomi di Taylor di suggerisce un'idea migliore: anziché accontentarsi di a_k e b_k come stime per difetto e per eccesso di π , cercare una media pesata tra le due stime in modo da ottenere una successione di approssimazioni di π convergente ad esso più rapidamente.

Poiché la tangente e il seno hanno in comune i termini di primo grado nei rispettivi sviluppi di Taylor, ci chiediamo se è possibile determinare una media pesata delle due funzioni, sia $p \sin x + (1-p) \tan x$, in modo da avere uno sviluppo di Taylor del tipo $x + O(x^5)$ e dunque

(*) Per il calcolo dello sviluppo di Taylor della funzione tangente, si veda l'osservazione al termine di questo paragrafo.

per la differenza tra tale funzione e x uno sviluppo che abbia nulli tutti i coefficienti di ordine minore di 5.

Partiamo di nuovo dai polinomi di Taylor del seno e della tangente:

$$p_s(x) := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad p_t(x) := x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}.$$

Calcoliamo una media pesata di tali polinomi, con i pesi p e $1 - p$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} p_m(x) &= p \cdot p_s(x) + (1 - p) \cdot p_t(x) = \\ &= x + \left(\frac{1}{3} - \frac{p}{2}\right) x^3 + \left(\frac{2}{15} - \frac{p}{8}\right) x^5. \end{aligned}$$

Vogliamo calcolare il parametro p in modo che il coefficiente del termine di terzo grado sia nullo:

$$\frac{1}{3} - \frac{p}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{3}.$$

Con tale scelta del peso p il polinomio p_m si scrive

$$p_m(x) = x - \frac{1}{20} x^5.$$

Ciò significa che lo sviluppo della funzione $(2/3) \sin x + (1/3) \tan x$ è del tipo $x + (1/20) x^5 + O(x^7)$, o ancora che $(2/3) \sin x + (1/3) \tan x - x = (1/20) x^5 + O(x^7)$.

Come si vede, con questa scelta di p si ottiene una media pesata che approssima (per eccesso) x con un errore dell'ordine di x^5 , mentre separatamente p_s e p_t approssimano x con un errore del terzo ordine. Ne segue che la successione di medie pesate

$$d_k := \frac{2}{3} a_k + \frac{1}{3} b_k = \frac{2a_k + b_k}{3}$$

converge (decrecendo) a π con un errore che è $O(x_k^4)$. Infatti

$$d_k = 3 \cdot 2^{k+1} [(2/3) \sin x_k + (1/3) \tan x_k].$$

La media pesata entro parentesi tende a π come la quinta potenza di x_k , più precisamente come $(x_k)^5/20$, e $n_k = 3 \cdot 2^k$ è inversamente proporzionale a x_k .

La sperimentazione numerica conferma i calcoli precedenti. Si consideri la seguente funzione, scritta nel linguaggio di *Mathematica*:

```

pigreco[nmax_] :=
Module[
{a = 3, b, c = N[Sqrt[3]]/2, d},
Do[c = N[Sqrt[(1+c)/2]];
a = a/c; b = a/c; d = (2a+b)/3;
Print[N[a,15], " ", N[b,15], " ", N[d,15]],
{nmax}]
]

```

Si osservi la struttura dell'*iteratore* che in questo caso assume la forma più semplice possibile : {nmax}. La sequenza di espressioni all'interno del comando Do (separate l'una dall'altra dal segno ;) viene valutata nmax volte. La funzione pigreco, così come è stata scritta, stampa una sequenza di nmax terne del tipo: (a_k, b_k, d_k) . La prima è una stima per difetto di π , le due restanti sono stime per eccesso. La terza stima è migliore delle due stime precedenti. Ad esempio:

```
In[1]:= pigreco[14]
```

```
Out[1]=
```

```

3.10582854123025 3.21539030917347 3.14234913054466
3.13262861328124 3.1596599420975 3.14163905621999
3.13935020304687 3.14608621513143 3.14159554040839
3.14103195089051 3.14271459964537 3.1415928338088
3.14145247228546 3.14187304997982 3.14159266485025
3.14155760791186 3.14166274705685 3.14159265429352
3.14158389214832 3.14161017660469 3.14159265363378
3.14159046322805 3.14159703432153 3.14159265359254
3.14159210599927 3.14159374877135 3.14159265358997
3.14159251669216 3.1415929273851 3.1415926535898
3.14159261936538 3.14159272203861 3.14159265358979
3.14159264503369 3.141592670702 3.14159265358979
3.14159265145077 3.14159265786784 3.14159265358979
3.14159265305504 3.14159265465931 3.14159265358979

```

Nei dati della tabella precedente l'ultima cifra decimale non viene stampata quando vale 0. Controllo: $\pi = 3.14159265358979323846 \dots$

Osservazione. Lo sviluppo di Taylor della tangente di punto iniziale $x_0 = 0$ (sviluppo di MacLaurin) è del tipo

$$\tan x = \sum_{h \geq 0} c_h \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!},$$

avendo posto

$$c_h := D^{2h+1} \tan x \Big|_{x=0}.$$

Si tenga presente che si tratta di una funzione dispari. Per il calcolo dei coefficienti c_h vale la formula ricorsiva (v. bib. [3] e [6], pag. 208)

$$c_0 = 1, \quad c_h = \sum_{r=0}^{h-1} \binom{2h}{2r+1} c_r c_{h-r-1}.$$

Per un'interpretazione combinatoria dei coefficienti c_n si veda: M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Protasi: *Elementi di Matematica Discreta*, Zanichelli (Bologna), 1988, p. 103.

2.2 SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

Consideriamo un'equazione di secondo grado con discriminante positivo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0. \quad (1)$$

La formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

comporta pericolo di cancellazione per una delle due radici (a seconda del segno di b) quando il prodotto ac è “piccolo” rispetto a b^2 (dunque $\sqrt{\Delta} \approx |b|$). In termini geometrici ciò significa che uno dei due punti d'intersezione tra la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e l'asse delle ascisse è molto vicino all'origine.

Un metodo semplice per evitare la cancellazione consiste nell'utilizzare la (1) per calcolare quella, delle due radici, che ha valore assoluto maggiore, cioè quella che fornisce l'ascissa del punto d'intersezione (tra

parabola e asse delle ascisse) più distante dall'origine. Sia x_1 tale soluzione; per il calcolo di x_2 si può utilizzare l'uguaglianza $x_1 x_2 = c/a$.

Tutto ciò conduce al seguente frammento di algoritmo:

0. ...
1. $r \leftarrow \sqrt{b^2 - 4ac}$
2. se $b \geq 0$,
 allora: $x_1 \leftarrow -(b + r)/(2a)$
 altrimenti: $x_1 \leftarrow (-b + r)/(2 \cdot a)$
3. $x_2 \leftarrow c/(a \cdot x_1)$
4. ...

2.3 RADICE QUADRATA IN CAMPO COMPLESSO

Sia $w = u + iv$ un numero complesso diverso da 0. L'equazione (in z) $z^2 = w$ ammette due soluzioni tra loro opposte. Conveniamo di chiamare *radice quadrata principale* di w quella che ha parte reale > 0 , oppure parte reale nulla e parte immaginaria > 0 . In termini equivalenti, possiamo dire che se l'*argomento principale* di un numero complesso $\neq 0$ è quella determinazione dell'argomento che è compresa nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, allora la radice quadrata principale di w è quella, delle due radici, che ha come argomento principale la metà dell'argomento principale di w . Con questa definizione si ha che $y = \text{Im}(z)$ ha lo stesso segno di $v = \text{Im}(w)$.

Ci proponiamo di calcolare per via algebrica la radice quadrata principale di w .

Dall'uguaglianza

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = u + iv \quad (1)$$

possiamo trarre il sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases} \quad (1')$$

Dalla prima equazione deduciamo $x^2 = u + y^2$; sostituendo nella seconda equazione elevata al quadrato, otteniamo

$$4(u + y^2)y^2 = v^2 \quad \Rightarrow \quad 4y^4 + 4uy^2 - v^2 = 0.$$

Da questa si ottiene

$$y^2 = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 + v^2}}{2},$$

ma dovendo essere $y^2 \geq 0$, dobbiamo scartare la soluzione col segno meno davanti alla radice, cioè

$$y^2 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2} = \frac{|w| - u}{2}.$$

A questo punto, tenendo conto di quanto abbiamo detto sul segno di y , abbiamo

$$y = \begin{cases} \sqrt{\frac{|w| - u}{2}}, & \text{se } v \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{|w| - u}{2}}, & \text{se } v < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Sostituendo il valore ottenuto per y^2 nella formula $x^2 = u + y^2$ otteniamo poi

$$x = \sqrt{\frac{|w| + u}{2}}. \quad (3)$$

Il problema è risolto. Tuttavia anche in questo caso, se v è “piccolo” rispetto ad u , abbiamo $u \approx |w|$, ed una delle due addizioni $|w| - u$ oppure $|w| + u$, a seconda del segno di u , comporta cancellazione.

La soluzione consiste, come per la soluzione dell'equazione di secondo grado, nel calcolare innanzitutto x oppure y , utilizzando quella della due formule che non comporta cancellazione, e successivamente ricavare l'altra incognita dalla relazione $2xy = v$.

Tutto ciò conduce al seguente frammento di algoritmo:

0. ...
1. $a \leftarrow \sqrt{u^2 + v^2} \quad (= |w|)$
2. se $u \geq 0$,
 allora:

$$x \leftarrow \sqrt{(a + u)/2},$$

$$y \leftarrow v/(2 \cdot x)$$
 altrimenti:

$$\begin{aligned}
y &\leftarrow \sqrt{(a-u)/2}, \\
\text{se } v < 0, \text{ allora: } y &\leftarrow -y \\
x &\leftarrow v/(2 \cdot y)
\end{aligned}$$

3. ...

2.4 RAPPORTO INCREMENTALE DI UNA FUNZIONE ESPONENZIALE

Il calcolo del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

per valori decrescenti di h comporta un pericolo evidente di cancellazione, a meno che non si ricorra a qualche artificio. Un caso interessante si presenta per le funzioni esponenziale, $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, x reale. Possiamo limitarci a considerare il caso $a > 1$.

Il numero e , detto spesso *numero di Nepero* (John Napier, 1550-1617), ma che più propriamente dovrebbe chiamarsi *numero di Eulero* (Leonhard Euler, 1707-1783), in onore del quale si utilizza la lettera e , deve il proprio ruolo privilegiato alla seguente circostanza: per $a = e$, e soltanto con tale scelta della base, si ha $De^x = e^x$; per ogni altra scelta della base si trova $Da^x = c(a)a^x$, dove la costante (rispetto a x) $c(a)$ altro non è che la derivata della funzione $x \mapsto a^x$ calcolata per $x = 0$:

$$c(a) = D a^x \Big|_{x=0}. \quad (1)$$

In termini geometrici: soltanto per $a = e$ il grafico della funzione esponenziale taglia l'asse delle ordinate con una pendenza pari a 1.

Ora può essere interessante determinare sperimentalmente tale numero e , stimando numericamente il limite del rapporto incrementale della funzione $x \mapsto a^x$

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

per valori decrescenti di h . Sfruttiamo il fatto che la funzione esponenziale è un isomorfismo tra il gruppo additivo dei reali e il gruppo moltiplicativo dei reali > 0 , per scrivere una formula ricorsiva che consenta di calcolare, senza pericolo di cancellazione, il rapporto incrementale sull'intervallo $[0, h/2]$ in funzione dell'analogo rapporto incrementale sull'intervallo $[0, h]$.

Abbiamo

$$\frac{a^{h/2} - 1}{h/2} = 2 \frac{(a^{h/2} - 1)(a^{h/2} + 1)}{h(a^{h/2} + 1)} = \frac{2}{a^{h/2} + 1} \frac{a^h - 1}{h}. \quad (2)$$

Utilizzando questa formula a partire da $h = 1$, dunque da un rapporto incrementale che vale semplicemente $a - 1$, possiamo ottenere una successione monotona decrescente di rapporti incrementali che tende alla derivata per $x = 0$.

Un ragionamento del tutto analogo può essere fatto per i rapporti incrementali “a sinistra dello zero”, cioè per i rapporti

$$\frac{a^{-h} - 1}{-h} = \frac{1 - a^{-h}}{h}.$$

Se indichiamo con il simbolo r_n^+ il rapporto incrementale sull'intervallo $[0, 1/2^n]$ e con il simbolo r_n^- il rapporto sull'intervallo $[-1/2^n, 0]$, non è difficile trovare la relazione

$$r_n^- = \frac{1}{a^{1/2^n}} r_n^+. \quad (3)$$

Nel programma seguente in Pascal si utilizzano le variabili **rp** e **rm** per la memorizzazione dei rapporti incrementali r_n^+ e r_n^- rispettivamente.

```

program esp(input, output);
var
k, kmax: integer;
a, rp, rm, s: real;
begin
repeat
begin
write('Introdurre la base: a = ');
readln(a);
end;
until (a > 0) and (1 <> a);
writeln;
write('Quante iterazioni?');
readln(kmax);
writeln;
rp := a - 1; {rapp.incrementale su [0, 1]}

```



```

s := a;
for k := 1 to kmax do
begin
  s := sqrt(s); rp := 2 * rp/(s + 1); rm := rp/s;
  writeln(k:2, ' ', rm:10:6, ' ', rp:10:6);
end;
end.

```

3. Approssimazione delle funzioni elementari

Fino a questo punto ci siamo occupati di aritmetica in virgola mobile. In questa sezione ci vogliamo occupare di algoritmi per l'approssimazione delle funzioni elementari. I moderni sistemi di calcolo simbolico (in gergo: *Computer Algebra Systems*) possiedono tutti, a diversi livelli di sofisticazione, la cosiddetta *aritmetica in precisione infinita*. Si tratta ovviamente di un'iperbole (nel senso letterario del termine), ma si intende dire che, a differenza di quanto accade nei linguaggi di programmazione di tipo procedurale (FORTRAN, Pascal, BASIC, ecc.), in cui esiste una precisione predefinita per i vari tipi di variabili (reali, intere, ecc.), in tali linguaggi ogni intero viene allocato dinamicamente nella quantità di memoria necessaria, l'unico limite invalicabile essendo quello dalla memoria totale disponibile.

Quanto abbiamo detto vale per tutti i sistemi più diffusi: DERIVE, *Mathematica*, Maple, Macsyma, ecc., ed anche per alcune calcolatrici scientifiche (ad es. la TI-92).

Ciò apre le porte ad un capitolo interessantissimo di calcolo automatico, il calcolo in *aritmetica razionale esatta* (cioè entro l'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali) lasciando al computer l'onere bruto dei calcoli. Tutti i calcoli vengono eseguiti manipolando frazioni in quanto tali, e soltanto alla fine di essi i risultati finali vengono convertiti nella rappresentazione decimale per poter essere resi leggibili.

3.1 LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Per il calcolo approssimato della funzione $f(x) = e^x$, cominciamo osservando che l'uguaglianza

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

ci consente di limitarci ai valori positivi di x . Inoltre abbiamo, per le note proprietà della funzione esponenziale,

$$e^x = e^n \cdot e^y, \quad \text{con } n := [x], \quad y := x - [x]. \quad (1)$$

Abbiamo indicato col simbolo $[x]$ la parte intera di x (il massimo intero che non supera x) e con y la sua parte frazionaria. Dalla (1) segue che la conoscenza della funzione esponenziale sull'intervallo $[0, 1]$ è sufficiente ai nostri scopi.

La serie esponenziale

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

si presta al calcolo. Poniamo

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}; \quad (2)$$

la diretta trasposizione della (2) in un algoritmo non è conveniente né dal punto di vista della complessità (numero eccessivo di moltiplicazioni richieste dai fattoriali), né dal punto di vista della precisione, se il calcolo viene effettuato in virgola mobile. Infatti, per n “abbastanza grande”, il valore calcolato di $s_{n+1}(x)$ coincide col valore calcolato di $s_n(x)$, e precisamente quanto il rapporto tra $x^{n+1}/(n+1)!$ e $s_n(x)$ scende al disotto della precisione di macchina.

Una buona soluzione ad entrambi i problemi è costituita dal seguente algoritmo

0. $s \leftarrow x/n + 1$
1. ripetere per $k = n - 1, n - 2, \dots, 1$
 - 1.1 $s \leftarrow s \cdot x/k + 1$
2. stampare s
3. fine

Per una corretta comprensione del precedente algoritmo (una sorta di variante dello schema di Ruffini-Horner per il calcolo del valore di un polinomio), può essere utile considerare la seguente identità, relativa al caso $n = 3$:

$$s_3(x) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = \left(\left(\frac{x}{3} + 1 \right) \frac{x}{2} + 1 \right) \frac{x}{1} + 1.$$

Una soluzione alternativa sfrutta la formula ricorsiva

$$\frac{x^k}{k!} = \frac{x}{k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

che consente di calcolare ogni termine della serie esponenziale a partire dal precedente. Prima di tradurre il tutto in un algoritmo, stimiamo l'errore di cui è affetta la somma $s_n(x)$. Si ha

$$\begin{aligned} e^x &= s_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots = \\ &= s_n(x) + \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) < \\ &< s_n(x) + \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \dots \right) = \\ &= s_n(x) + \frac{x^n}{n!} \frac{x}{n+1-x}, \end{aligned}$$

dove abbiamo sommato la serie geometrica scritta entro parentesi nella penultima riga.

In definitiva, per ogni $x > 0$, si ha

$$s_n(x) < e^x < s_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n! (n+1-x)} \quad (3)$$

Il tutto può essere tradotto nell'algoritmo seguente, in cui vengono calcolate, nell'ordine, un'approssimazione per difetto e un'approssimazione per eccesso di e^x .

0. $s \leftarrow 1, t \leftarrow 1$
1. ripetere per $k = 1, 2, \dots, n$
 - 1.1 $t \leftarrow x \cdot t / k$
 - 1.2 $s \leftarrow s + t$
2. stampare s
3. $t \leftarrow x \cdot t / (n+1-x)$ { stima dell'errore }
4. $s \leftarrow s + t$
5. stampare s
6. fine

La traduzione del precedente algoritmo in un linguaggio che consenta l'aritmetica razionale esatta fornisce valori razionali approssi-

mati per difetto e per eccesso di e^x , che possono successivamente essere tradotti in valori decimali.

Ecco una funzione scritta nel linguaggio del sistema *Mathematica*:

```
exp[x_,n_]:=
Module[{s = 1, t = 1, k},
Do[t = x*t/k; s = s+t, {k,1,n}];
s1 = s; Print[s1];
t = t*x/(n+1-x); (* stima dell'errore *)
s2 = s+t; Print[s2];
]
```

La variabili `s1` e `s2` forniscono le approssimazioni per difetto e per eccesso rispettivamente. Ecco i valori forniti dal comando `exp[1,10]`:

$$s1 = \frac{9864101}{3628800} = \underline{2.7182818011} \dots,$$

$$s2 = \frac{4697191}{1728000} = \underline{2.7182818287} \dots$$

Sono sottolineate le cifre coincidenti nei due valori approssimati.

Possiamo sfruttare l'identità $e^{p/q} = (e^{1/q})^p$ per "tabulare" la funzione esponenziale con passo $1/q$. Possiamo anche sfruttare la formula precedente nella versione

$$e = (e^{1/q})^q \quad (4)$$

per calcolare e , soprattutto scegliendo come q una potenza di 2 : $q = 2^k$. Si tenga presente che la potenza di esponente 2^k si calcola con k moltiplicazioni, mediante successivi elevamenti al quadrato. A titolo di esempio, forniamo i valori calcolati per e scegliendo $[s_{10}(1/2^k)]^{2^k}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

k	$[s_{10}(1/2^k)]^{2^k}$	$[s_{10}(1/2^k)]^{2^k} + \text{errore}$
0	<u>2.7182818011</u> ...	<u>2.7182818287</u> ...
1	<u>2.7182818284</u> 169...	<u>2.7182818284</u> 592...
2	<u>2.7182818284</u> 5899...	<u>2.7182818284</u> 5904...
3	<u>2.7182818284</u> 59045178...	<u>2.7182818284</u> 59045235...
4	<u>2.7182818284</u> 590452353018...	<u>2.7182818284</u> 590452353603...

Come si vede, con un modesto incremento della complessità, la sfruttamento della formula (4) consente di migliorare sensibilmente la precisione del calcolo.

3.2 LA FUNZIONE LOGARITMO

Consideriamo la funzione $f(x) := \ln(1+x)$, $x > -1$. Dalle proprietà del logaritmo segue che se f è nota sull'intervallo $[1, a]$, con $a > 1$, allora essa è nota su ogni intervallo del tipo $[a^k, a^{k+1}]$ con k intero.

È ben noto lo sviluppo di Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad (1)$$

valido per $x \in (-1, 1]$. Trattandosi di una serie a termini di segno alterno per $x > 0$, le somme parziali forniscono stime per difetto o per eccesso a seconda della parità dell'indice. La convergenza è poco soddisfacente, quando x è prossimo agli estremi dell'intervallo di convergenza. Poniamo

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Volendo stimare $\ln 2$, calcoliamo le somme $s_{20}(1)$ e $s_{21}(1)$ ottenendo

$$s_{20}(1) = \frac{155685007}{232792560} = 0.668771\dots,$$

$$s_{21}(1) = \frac{166770367}{232792560} = 0.716390\dots$$

Non si ha alcuna cifra decimale certa: $\ln 2 = 0.693\dots$. La convergenza migliora se si esegue il calcolo analogo per $x = 1/2$, cioè se si stima $\ln 1.5$:

$$s_{20}(1/2) = \frac{8247859122731}{20341724282880} = \underline{0.405465092\dots},$$

$$s_{21}(1/2) = \frac{2749286528207}{6780574760960} = \underline{0.405465115\dots}$$

Scrivendo $-x$ al posto di x si ottiene

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (1')$$

Sottraendo le due serie abbiamo

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right). \quad (2)$$

La serie scritta converge per $|x| < 1$. Scriviamo t al posto di x :

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2 \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots \right). \quad (2')$$

Possiamo porre

$$x = \frac{1+t}{1-t} \iff t = \frac{x-1}{x+1}. \quad (3)$$

La variabile x descrive l'intervallo $[1, 2]$ quando t descrive l'intervallo $[0, 1/3]$.

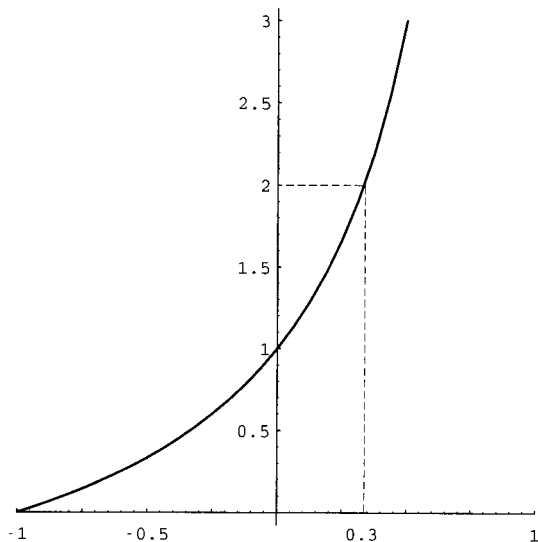


FIGURA 6. L'equazione $x = (1+t)/(1-t)$ descrive un'iperbole equilatera.

Ovviamente, per $t > 0$ le somme parziali della (2') forniscono stime per difetto del logaritmo a primo membro. Poniamo

$$sd_n(t) := 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Per valutare l'errore da cui è affetta $sd_n(t)$ osserviamo che

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1+t}{1-t} &= sd_n(t) + 2 \left(\frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} + \dots \right) = \\
&= sd_n(t) + 2 \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \left(1 + \frac{2n+3}{2n+5} t^2 + \frac{2n+3}{2n+7} t^4 + \dots \right) < \\
&< sd_n(t) + 2 \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \left(1 + t^2 + t^4 + \dots \right) = \\
&= sd_n(t) + \frac{2}{2n+3} \frac{t^{2n+3}}{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Indichiamo con $se_n(t)$ l'ultima quantità considerata. Per stimare $\ln 2$ possiamo usare $sd_n(1/3)$ e $se_n(1/3)$. Si ottengono, ad esempio, i valori

$$\begin{aligned}
sd_{10}(1/3) &= \underline{0.6931471805589163} \dots \\
se_{10}(1/3) &= \underline{0.6931471805589955} \dots
\end{aligned}$$

3.3 LE FUNZIONI CIRCOLARI

Possiamo limitarci a considerare la funzione seno sull'intervallo $[0, \pi/2]$, in quanto ogni altro valore reale x si può riportare ad un valore appartenente a tale intervallo. Si ha lo sviluppo di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

Anche in questo caso abbiamo una somma a termini di segno alternato. Poniamo

$$s_n(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (1)$$

Per il calcolo dei termini successivi di tale somma si può utilizzare lo schema ricorsivo

$$\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^2}{2k(2k+1)} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Possiamo dunque considerare l'algoritmo

- 0. $s \leftarrow x, t \leftarrow x$
- 1. ripetere per $k = 1, 2, \dots, n$
 - 1.1 $t \leftarrow -x^2 \cdot t / (2k(2k+1))$

- 1.2 $s \leftarrow s + t$
3. stampare s
4. fine

Per ogni x razionale possiamo calcolare valori razionali per difetto e per eccesso di $\sin x$. Ad esempio, per il calcolo di $\sin 1$ abbiamo

$$s_2(1) = \frac{101}{120} = \underline{0.841666} \dots \quad s_3(1) = \frac{4241}{5040} = \underline{0.841468} \dots$$

Possiamo sfruttare la migliore convergenza della serie di Taylor quanto più piccolo è x , utilizzando l'identità

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4(\sin t)^3. \quad (2)$$

Questo riporta il calcolo di $\sin x$ con $x \in [0, \pi/2]$ al calcolo di $\sin t$ con $t \in [0, \pi/6]$. Si osservi che $\pi/6 = 0.523 \dots$. Si osservi ancora che il polinomio $p(s) = 3s - 4s^3$ è crescente nell'intervallo $[0, 1/2]$. Dunque valori per difetto (risp. per eccesso) di $\sin t$ vengono trasformati dalla (2) in valori per difetto (risp. per eccesso) di $\sin x$.

Ad esempio, per il calcolo di $\sin 1$, cominciamo stimando $\sin(1/3)$. Utilizzando le stesse somme di prima abbiamo

$$s_2(1/3) = \frac{9541}{29160} = \underline{0.327194787} \dots$$

$$s_3(1/3) = \frac{3606497}{11022480} = \underline{0.327194696} \dots$$

Applicando alle due frazioni ottenute la funzione polinomiale p si ottengono le stime (ci limitiamo ai valori decimali) $\underline{0.84147114} \dots$, $\underline{0.84147098} \dots$ rispettivamente per eccesso e per difetto di $\sin 1$.

3.4 LA FUNZIONE ARCOTANGENTE (CON UN ALTRO SGUARDO A π)

Per la funzione arcotangente possiamo innanzitutto limitarci a considerare valori positivi dell'argomento, trattandosi di una funzione dispari. Abbiamo poi l'identità

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

che ci consente di limitarci a valori $x \in [0, 1]$; basta osservare che la derivata della funzione a primo membro è nulla mentre la funzione stessa vale $\pi/2$ per $x = 1$.

Per tutti gli x con $|x| \leq 1$ vale lo sviluppo di Taylor

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (1)$$

Per tale sviluppo si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte nel paragrafo precedente per lo sviluppo della funzione seno. In particolare, per $x = 1$ si ottiene

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (2)$$

L'idea di utilizzare la serie appena scritta per la stima di π si scontra contro l'estrema lentezza di convergenza della stessa serie. Posto

$$s_n(x) := x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (3)$$

si ha ad esempio $s_{19}(1) = 3.091\dots$, $s_{20}(1) = 3.189\dots$, vale a dire 21 termini della serie (2) non consentono nemmeno di stabilire con certezza la prima cifra decimale di π .

Un'idea simile a quella che abbiamo visto nel precedente paragrafo, consente di riportare il calcolo di un sottomultiplo intero di π al calcolo della funzione arcotangente per argomenti prossimi a 0, e dunque tali da dar luogo ad una serie rapidamente convergente.

Un'identità dovuta allo scozzese John Machin (1706) è

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \Rightarrow \pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

Una formula simile, dovuta a C.F. Gauss, è

$$\pi = 48 \arctan \frac{1}{18} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 20 \arctan \frac{1}{239}.$$

Osserviamo che le somme $s_n(x)$, per x positivo, forniscono approssimazioni per difetto di $\arctan x$ per n dispari, per eccesso per n pari. Per ottenere una stima per difetto di π dovremo dunque sottrarre da una somma $s_n(1/5)$ con n dispari una somma $s_n(1/239)$ con n pari. Il contrario occorrerà fare per avere una stima per eccesso. Tenendo conto della diversa velocità di convergenza della serie (1) per $x = 1/5$ e per $x = 1/239$, possiamo, ad esempio, calcolare

$$\begin{aligned}
16s_7(1/5) - 4s_2(1/239) &= \underline{3.1415926535886} \dots, \\
16s_8(1/5) - 4s_1(1/239) &= \underline{3.1415926535908} \dots; \\
16s_9(1/5) - 4s_4(1/239) &= \underline{3.14159265358979169} \dots, \\
16s_{10}(1/5) - 4s_3(1/239) &= \underline{3.14159265358979329} \dots.
\end{aligned}$$

3.5 LA RADICE QUADRATA

Consideriamo la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ per $x > 0$. Scriviamo x in virgola mobile

$$x = m \cdot 2^e, \quad \text{con } 1 \leq m < 2,$$

come abbiamo visto nel primo paragrafo. Se l'esponente e è pari, $e = 2n$, abbiamo $\sqrt{x} = \sqrt{m} \cdot 2^n$; se e è dispari, possiamo “denormalizzare” la mantissa m dividendola per 2, cioè scrivere

$$x = m \cdot 2^e = (m/2) \cdot 2^{e+1}, \quad \text{con } 1/2 \leq m/2 < 1.$$

In ogni caso possiamo dunque scrivere

$$x = m^* \cdot 2^{2n}, \quad \text{con } 1/2 \leq m^* < 2, \tag{1}$$

ed avere $\sqrt{x} = \sqrt{m^*} \cdot 2^n$.

In altri termini: per calcolare la radice quadrata di un qualsivoglia numero positivo è sufficiente saper calcolare la radice quadrata dei numeri compresi tra $1/2$ e 2 .

Ribattezziamo a un numero dell'intervallo $[1/2, 2)$; calcolare la radice quadrata di a equivale a risolvere l'equazione

$$f(x) = x^2 - a = 0. \tag{2}$$

A partire da un conveniente x_0 , il metodo delle tangenti di Newton fornisce lo schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right). \tag{3}$$

Poiché la funzione f è convessa, tutte le stime x_k (tranne al più x_0) sono per eccesso: $x_k \geq \sqrt{a}$, dove x_k tende decrescendo a $\sqrt{a}$. La successione di approssimazioni (x_k) può essere arrestata quando la differenza tra due termini successivi scende al disotto di una tolleranza relativa `toll`:

$$x_k - x_{k+1} < \text{toll} \cdot x_k,$$

dove `toll` deve essere scelto non inferiore alla precisione di macchina `eps` (si riveda il primo paragrafo). In pratica sarà conveniente scegliere `toll` di qualche ordine di grandezza maggiore di `eps`.

Il punto delicato sta nella scelta dell'approssimazione iniziale x_0 con cui innescare il processo iterativo. La convergenza sarà tanto più rapida quanto più la stima iniziale è prossima a $\sqrt{a}$. Il problema diventa dunque: come costruire una funzione “semplice” che, applicata ad $a \in [1/2, 2)$, ci fornisca una buona approssimazione di $\sqrt{a}$?

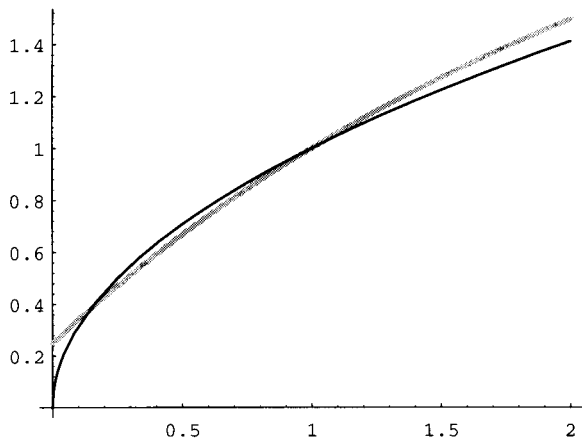


FIGURA 6. L'iperbole equilatera di equazione $t \mapsto (4t+1)/(t+4)$ (grafico in grigio) approssima la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ nell'intervallo $[0.5, 2]$.

Un esame del grafico della funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ ci suggerisce di cercare la funzione richiesta tra le funzioni razionali fratte

$$t \mapsto g(t) := \frac{\alpha t + \beta}{t + \gamma}.$$

Si potrebbe imporre la condizione che la funzione scritta interpoli esattamente la funzione $\sqrt{a}$ per $t = 1/2$, $t = 1$, $t = 2$. Volendo determinare valori dei parametri α , β e γ nell'ambito razionale, possiamo imporre le tre condizioni

$$g(1/2) = 2/3, \quad g(1) = 1, \quad g(2) = 3/2,$$

assumendo $3/2 = 1.5$ come stima di $\sqrt{2} = 1.414\dots$ e $2/3 = 0.666\dots$ come stima di $1/\sqrt{2} = 0.707\dots$. Si ottengono i valori $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 4$, cioè la funzione approssimante

$$g(t) = \frac{4t + 1}{t + 4}. \quad (3)$$

Lo schema iterativo (3) viene dunque completato dalla scelta dell'approssimazione di innesco

$$x_0 = \frac{4a + 1}{a + 4}. \quad (4)$$

L'esperienza numerica conforta la scelta compiuta: bastano poche iterazioni del procedimento (4)-(3), di solito tre o quattro, per ottenere una stima sufficientemente accurata della radice di $a \in [1/2, 2)$.

Bibliografia

- [1] P. Antognini, G.C. Barozzi: *Matematica & Mathematica*, Zanichelli (Bologna), 1995, pp. viii + 280;
- [2] G.C. Barozzi: *Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli (Bologna), 1989;
- [3] G.C. Barozzi: Alcune osservazioni sullo sviluppo di Taylor della tangente, *Didattica delle Scienze*, n. 154, 1991, pp. 49-52;
- [4] G.C. Barozzi, S. Cappuccio: *Schede di lavoro guidato per il corso di Matematica 1*, Pitagora Editrice (Bologna), 1993;
- [5] P. Boieri: Rappresentazione dei numeri e operazioni in virgola mobile: un'applicazione del calcolatore nell'insegnamento della matematica, *Periodico di matematiche*, n.4 (1986);
- [6] P. Boieri, *Laboratorio di Matematica*, Loescher (Torino), 1990;
- [7] S. Campi, M. Picardello, G. Talenti: *Analisi Matematica e calcolatori*, Bollati Boringhieri (Torino), 1990;
- [8] I. Capuzzo Dolcetta, M. Falcone: *L'analisi al calcolatore*, Zanichelli (Bologna), 1990;
- [9] F. Conti: *Calcolo*, McGraw-Hill Libri Italia (Milano), 1993;
- [10] A. Engel, *Mathematisches Experimentieren mit dem PC*, Klett (Stuttgart), 1991;
- [11] G. Geymonat: *Lezioni di Matematica*, vol. 1, Levrotto & Bella (Torino), 1990;
- [12] C. Moler: Floating Points, *MATLAB News & Notes*, Fall 1996, pp. 11-13;
- [13] G. Prodi, E. Magenes: *Elementi di analisi matematica*, G. D'Anna (Messina-Firenze), 1982;
- [14] L. Serotti, A. Sturlese, A. Chili: *Informatica con il Pascal*, Zanichelli (Bologna), 1966.

STORIA ED EPISTEMOLOGIA DELL'ANALISI

Lucia Grugnetti

Dipartimento di Matematica - Università di Parma

1. Introduzione. La creazione del calcolo (differenziale, nella terminologia leibniziana, flussionale in quella di Newton) si può assumere come l'evento che, nella seconda metà del Seicento, ha segnato il passaggio dalla matematica classica a quella moderna, almeno in un certo senso.

Obiettivo di questo corso è una analisi storica e epistemologica della questione del rigore e della 'metafisica' del calcolo infinitesimale che tenga conto dei metodi degli antichi (ad esempio, del metodo di esaustione di Archimede), nonché delle interpretazioni di Leibniz e Newton e dei loro successori. Il problema della ricerca di un fondamento sicuro su cui basare il calcolo infinitesimale, intravisto da D'Alembert nella teoria dei limiti e ripreso da Lagrange con la teoria delle serie infinite e quella delle funzioni derivate, trova in Cauchy il pioniere di un nuovo modo di ricercare il rigore in analisi. Il suo *Cours d'Analyse*, così come le lezioni date agli studenti dell'Ecole Polytechnique sul calcolo differenziale e integrale, ne rappresentano in un certo senso il manifesto. L'impostazione di Cauchy sarà resa rigorosa da Weierstrass nella seconda metà dell'ottocento con la definizione di limite, col metodo dell'epsilon-delta, che a sua volta si basa su definizioni concernenti i numeri reali. In questo senso si parla di "aritmetizzazione" dell'analisi.

1.1. Storia della matematica e didattica. Trattandosi di un corso in didattica della matematica mi sembra opportuno premettere alcune considerazioni sul ruolo della storia della matematica nell'insegnamento e nell'apprendimento.

In questi ultimi anni la consapevolezza dell'importanza di un dibattito sul ruolo della storia della matematica nell'educazione matematica è andata maturando. L'interesse degli insegnanti dei diversi ordini scolari in questa direzione è andato crescendo. I programmi di matematica, in particolare quelli per la scuola superiore, fanno un cenno ad un processo di tipo storico (per esempio a proposito del calcolo infinitesimale).

Dai Nuclei di ricerca didattica italiani, dagli IREM francesi e da altri gruppi e autori stranieri vengono interessanti proposte didattiche.

Il dibattito è molto aperto. Però, al di là delle possibili strade che si potrebbero percorrere, delle scelte che si potrebbe pensare di fare, il grosso problema è quello della formazione degli insegnanti. Se, da un lato, da qualche tempo gli insegnanti mostrano interesse per la problematica connessa alla storia della matematica nella didattica, dall'altro, poco si fa per metterli in condizione di agire su larga scala in questa direzione.

Un aspetto prioritario in questa discussione è quello connesso ai possibili rischi di una tale operazione.

Secondo L. Pepe (1990) l'incontro tra storia e didattica della matematica deve essere consapevole delle influenze negative che possono avere l'una sull'altra, come, ad esempio, *l'accrescimento dell'ambito nozionistico*, con riferimenti curiosi e interessanti, ma di fatto inessenziali.

Un altro rischio è quello dell'anacronismo. Come dice Weil (1978) "C'è una notevole differenza tra il riconoscere in Archimede il precursore del calcolo integrale e il vedere in lui, come talvolta viene fatto, un primo utilizzatore del calcolo differenziale e integrale." L'anacronismo si accompagna spesso ad una non contestualizzazione di un certo personaggio o di un certo problema storico. Al contrario, quando si introduce a scuola un matematico, o, in generale, uno scienziato, è fondamentale analizzare il contesto storico, sociale, economico in cui è vissuto. Solo così si potrà arrivare, da un lato, a capirne l'importanza (ed eventualmente l'influenza sui successori) e, dall'altro, le condizioni che hanno permesso il raggiungimento dei risultati. E' pertanto importante capire le motivazioni, non solo matematiche, dello sviluppo della matematica e le conseguenze, non solo nella matematica, di tale sviluppo.

Ma tutto ciò non è facile. Un insegnamento di tipo interdisciplinare, che coinvolga, ad esempio, matematica, storia, filosofia, storia dell'arte, potrebbe fornire in maniera più evidente ed efficace un ambiente propizio all'uso della storia ed, in particolare della storia della matematica. Il problema della contestualizzazione sarebbe così più facilmente risolvibile.

Per quanto riguarda l'insegnamento dell'aritmetica, della geometria, dell'analisi, etc. la storia della matematica - sottolinea Pepe (1990) - fornisce diversi esempi di argomenti che guadagnano molto da una trattazione interdisciplinare. Eccone alcuni: 1) I sistemi di numerazione dei popoli più antichi; 2) La geometria nel mondo greco: Talete, Platone, Aristotele, Euclide, Archimede, ecc.; 3) L'aritmetica nel medioevo in relazione allo sviluppo dei commerci; 4) Arte e geometria nel Rinascimento; Le scoperte geografiche, la forma della terra, l'astronomia matematica; 5) Galileo, la matematizzazione, il metodo sperimentale; 6) Descartes e il metodo delle coordinate; 7) Leibniz e il

calcolo differenziale; 8) Newton, la meccanica razionale e il sistema del mondo.

Questa lista non vuol essere esaustiva. Tenendo conto delle proposte della Commissione Brocca si potrebbero, ad esempio, prendere in considerazione argomenti connessi ad una revisione degli assiomi della geometria euclidea, nonché alla geometria non euclidea.

Il passaggio da un insegnamento disciplinare ad un insegnamento interdisciplinare può ottemperare a diverse esigenze.

Il considerare aspetti storici nella didattica della matematica non deve diventare ancora un altro argomento da insegnare, un "peso" in più che "ruba" tempo. Un approccio di tipo interdisciplinare, se ben programmato, diventa un modo per "economizzare" il tempo; laddove sia possibile, la compresenza potrebbe essere finalizzata proprio ad una scelta di questo tipo.

Ma al di là di una programmazione nell'ambito di tutto il consiglio di classe, raramente attuabile, al di là anche di una possibile collaborazione con almeno qualche collega che insegna discipline diverse dalla matematica, si può "organizzare" un'attività di tipo storico, con una visione di tipo interdisciplinare, anche restando nell'ambito del proprio insegnamento. Naturalmente non si diventa esperti in storia ed epistemologia della matematica e del suo uso nella didattica dall'oggi al domani, né possiamo pensare di diventare tutti degli esperti.

Un modo costruttivo e non troppo rischioso per cominciare, potrebbe essere quello di fare riferimento al materiale che alcuni nuclei di ricerca didattica stanno mettendo a punto sull'argomento e, perché no, ad un buon libro di testo che si occupi di questo aspetto. In bibliografia vengono segnalati articoli che si riferiscono a ricerche dei Nuclei.

1.2. I programmi (Commissione Brocca) e la storia della matematica. Dai Piani di Studio della Scuola Secondaria Superiore e Programmi dei primi due anni.

Matematica e Informatica:

Biennio

La matematica, parte rilevante del pensiero umano ed elemento motore dello stesso pensiero filosofico, ha in ogni tempo operato su due fronti: da una parte si è rivolta a risolvere problemi ed a rispondere ai grandi interrogativi che via via l'uomo si poneva sul significato della realtà che lo circonda: dall'altra, sviluppandosi autonomamente, ha posto affascinanti interrogativi sulla portata, il significato e la consistenza delle sue stesse costruzioni culturali.

ASPETTI STORICI

alla fine del biennio lo studente deve *dimostrare* di essere in grado di: (...)

10. Inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico.

Il problema didattico centrale che si pone al docente nell'attuazione dei programmi risiede nella scelta di situazioni particolarmente idonee a far insorgere in modo naturale congetture, ipotesi, problemi. Per una pratica didattica così finalizzata, offrono prioritaria ispirazione i risultati delle ricerche

- in campo storico-epistemologico,
- in quello psico-pedagogico,
- nonché in quello metodologico-didattico

Matematica:

Triennio. Nel corso del triennio superiore l'insegnamento della matematica prosegue ed amplia il processo di preparazione scientifica e culturale dei giovani già avviato nel biennio; concorre insieme alle altre discipline allo sviluppo dello spirito critico alla loro promozione umana e intellettuale.

In questa fase della vita scolastica lo studio della matematica cura e sviluppa in particolare: (...)

5. L'interesse sempre più penetrante a cogliere aspetti genetici e momenti storico-filosofici del pensiero matematico.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Alla fine del triennio l'alunno dovrà possedere, sotto l'aspetto concettuale, i contenuti prescrittivi previsti dal programma ed essere in grado di: (...)

9. inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali;

10. cogliere interazioni tra pensiero filosofico e pensiero matematico.

INDICAZIONI DIDATTICHE (COMUNI A TUTTI GLI INDIRIZZI)

[...] Si ricorda che il termine problema va inteso nella sua accezione più ampia, riferito cioè anche a questioni interne alla stessa matematica; in questa ipotesi potrà risultare didatticamente proficuo storicizzare la questione presentandola come una successione di tentativi portati a livelli di rigore e di astrazione sempre più spinti; sono stati a riguardo ricordati il processo che portò alle geometrie non euclidee e quello che sfociò nel calcolo integrale.

* indirizzo classico:

a proposito del tema n. 7: analisi infinitesimale:

«Il problema della misura sarà affrontato con un approccio molto generale, con particolare riferimento al calcolo della lunghezza della circonferenza e dell'area del cerchio, e va inquadrato preferibilmente sotto il profilo storico».

1.3. L'appoggio all'analisi fra intuizione e rigore. In un'ottica di ripartizione non più rigida degli argomenti da introdurre nei trienni, è possibile prevedere, per costruire l'analisi, percorsi diversi da quello 'tradizionale' inteso come approccio ottocentesco alla Weierstrass fondato sul concetto di limite. Come ricorda Speranza (1996) «L'esposizione attuale è inquadrabile sia nell'ordine positivistico contiano delle discipline (la matematica pura precede le "applicazioni"), sia in una visione della matematica che tenda a isolarla dalle altre discipline (al modo di Bourbaki). Il positivismo ha influenzato indirettamente l'insegnamento della matematica in Italia fino alla metà del secolo, per essere sostituito dall'impostazione bourbakista, di tipo idealistico. Storicamente invece, l'analisi è iniziata con il problema delle aree (metodo di esaustione nell'antichità, e metodo degli indivisibili nell'età moderna), per proseguire con il problema delle tangenti, e come strumento per affrontare la necessità della fisica matematica: il concetto di limite è arrivato per ultimo.» Una sistemazione rigorosa dell'analisi è stata possibile solo nel diciannovesimo secolo, a duemila anni da Archimede.

La concezione intuitiva che avevano i Greci del 'continuo', di 'infinito matematico' e di 'limite' e, soprattutto, le loro difficoltà a formulare esplicitamente tali nozioni costituiscono la spinta ad 'aggirare l'ostacolo' dell'infinito mediante il ricorso al metodo di esaustione. Tale metodo, permetterà ai Greci, ad Archimede in particolare, di dimostrare *rigorosamente* i risultati ottenuti per altra via nel risolvere problemi di misura.

Ma cosa significa "misurare" per i geometri greci?

Incapaci di trovare una misura comune alle grandezze incommensurabili i Greci non misurano le grandezze geometriche: le confrontano stabilendo quando due coppie di grandezze sono proporzionali (noi diremmo: quando il rapporto delle prime due è uguale al rapporto delle altre due)¹. *Rettificano* le curve e *quadrano* le superfici. E' il metodo di esaustione, sviluppato da Eudosso, Euclide e Archimede che permette di confrontare l'area di una superficie A (di un segmento di parabola, ad esempio, come si vedrà) con l'area di una superficie nota S (di un quadrato o di un triangolo, ad esempio).

¹ La teoria delle proporzioni nella sua forma definitiva si trova nel quinto libro degli *Elementi* di Euclide. Per comune ammissione tale teoria è dovuta a Eudosso, che ha riunito in una trattazione unificata precedenti procedimenti costruiti ad hoc per le diverse grandezze geometriche. Alla base della teoria stanno le tre nozioni fondamentali di *grandezza*, di *rapporto* e di *proporzione*. Dal gioco relativo di queste tre nozioni avranno origine le incomprensioni e le discussioni teoriche che accompagneranno la teoria delle proporzioni per tutta la sua esistenza (Cfr. E. Giusti, Teoria delle proporzioni e numeri reali, in *Argomenti di Storia della Scienza: Matematica e Fisica*, Quaderno CNR, Pavia 1986, 3-31).

2. Intuizione e rigore in Archimede. Figlio dell'astronomo Fidia che aveva calcolato il rapporto esistente tra le grandezze del Sole e della Luna, Archimede (287-212 a.C.) nacque a Siracusa e studiò ad Alessandria. Cultore di geometria e di meccanica, dedicò a studiosi alessandrini, ai quali era legato da profonda amicizia, gran parte delle sue opere, tra le quali ricordiamo: "Il Metodo, Sulla sfera e il cilindro, Sulle spirali, L'Arenario". A Siracusa diresse importanti lavori portuali, navali e militari. Assediata Siracusa da parte dei Romani, partecipò alla difesa della città, costruendo specchi ustori e macchine per lanciare dardi e pietre. Morì durante quello stesso assedio.

2.1. Il metodo di esaustione. E' un metodo che affonda le sue radici nelle considerazioni di tipo infinitesimale dei filosofi del V secolo a.C. Anassagora e Democrito e nelle critica di Zenone di successioni finite ed infinite: Zenone: argomento di Achille; Sofisti; le considerazioni sui poligoni inscritti e circoscritti alla circonferenza.

Non va dimenticato che la matematica greca rifiuta l'infinito attuale e accetta solo l'infinito potenziale. Nella risoluzione di problemi di misura si instaura una metodologia che prevede due fasi:

1) la ricerca del risultato, con le tecniche più disparate, anche quelle non molto affidabili né rigorose [fase euristica];

2) la dimostrazione del risultato per via rigorosa [fase dimostrativa].

Il metodo di esaustione interviene proprio nella seconda fase. Si tratta infatti di un metodo dimostrativo rigoroso che si utilizza però quando già si intravede o si conosce il risultato. Riposa su un'argomentazione indiretta e su costruzioni puramente finite.

Questo metodo venne proposto da Eudosso di Cnido (408 - 355 a.C.) del quale però non ci sono rimaste se non testimonianze indirette.

Eudosso era nativo di Cnido, ma pare avesse viaggiato molto durante la sua vita: in Egitto, nella Magna Grecia, in particolare a Taranto, dove ebbe contatti con Archita; ad Atene dove frequentò la scuola di Platone ed infine a Cizico, sulle coste dell'Asia Minore, dove fondò la sua scuola.

Il metodo di esaustione si basa su una proposizione detta "Postulato di Eudosso" o anche "assioma di Eudosso-Archimede", essendo stata molto sfruttata da Archimede nelle sue opere: *"Date due grandezze omogenee A, B con $A < B$, esiste un numero intero n tale che $nA > B$ cioè un multiplo di A maggiore di B"*.

Oppure, espresso sotto altra forma: *"Date due grandezze omogenee A, B, con $A < B$, esiste sempre un sottomultiplo di B minore di A, cioè esiste m tale che $\frac{1}{m} B < A$ "*.

Versione Euclidea:

"Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, separarsi reciprocamente".

Per dimostrare che due grandezze U e V sono uguali tra loro, si procede col metodo di esaurimento ad una doppia riduzione all'assurdo.

Si supponga U maggiore di V . Si immagini una successione $T_1, T_2, T_3, \dots$ di grandezze omogenee con U e V , la quale soddisfi alle condizioni seguenti:

a) la successione possa essere sempre prolungabile, cioè non possieda un ultimo termine (ecco-come osserva A. Frajese- l'infinito che si affaccia pur sempre: qualunque numero si fissi, per quanto grande, gli elementi della successione sono ancora di più);

b) tutti i termini della successione siano, ad esempio, minori sia di U che di V , ossia rappresentino valori approssimati per difetto tanto dell'una quanto dell'altra grandezza;

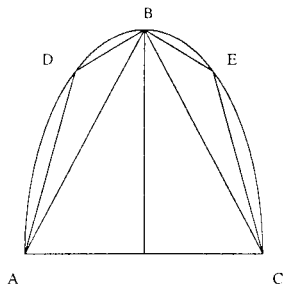
c) i termini della successione siano tali da approssimare, nel loro succedersi, tanto bene quanto si voglia la grandezza supposta maggiore (U nel nostro caso).

Se si riesce a trovare una successione di grandezze $T_1, T_2, T_3, \dots$ che soddisfi a tali condizioni, viene senz'altro dimostrato che U non può essere maggiore di V . E se similmente si riesce a dimostrare che non può essere neppure U minore di V , risulterà dimostrato che $U = V$.

Infatti, comunque si fissi la differenza tra le due grandezze $D = U - V$, la condizione c) consente di trovare un elemento T_h della successione che differisca da U per meno di D : questo significa che tale elemento T_h si 'infiltrerebbe' tra U e V , cioè sarebbe maggiore di V , contro la condizione b). Dunque non è possibile che tra U e V sussista una qualsiasi differenza D .

E' proprio il postulato di Eudosso-Archimede che consente di ammettere che una grandezza T possa avvicinarsi quanto si vuole ad una grandezza U .

2.2. Il segmento parabolico



Per calcolare l'area del poligono inscritto nel segmento parabolico, Archimede deve sommare le aree dei triangoli inscritti; deve cioè calcolare la somma di una serie geometrica di ragione $1/4$ dove il primo termine è l'area del triangolo ABC .

Archimede evita di calcolare la somma della serie, ma calcola la somma dei primi n termini alla quale aggiunge il resto $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A$ [Prop. 23] e ricorre all'identità:

$$A + \frac{1}{4} A + \frac{1}{4^2} A + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A = \frac{4}{3} A$$

Se il numero dei lati del poligono inscritto, cioè il numero dei termini della serie, aumenta, il resto $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A$ diventerà piccolo a piacere e l'area cercata varrà $\frac{4}{3} A$.

Oggi, avendo una serie geometrica di ragione $1/4$ faremmo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + \frac{1}{4} A + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} A \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} \right) = \frac{4}{3} A, \text{ che è il risultato di Archimede.}$$

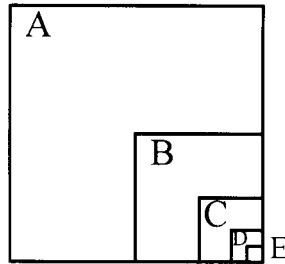
Archimede non esprime l'idea che il resto sparisca (non esegue passaggi al limite) e che la somma della serie sia uguale a $\frac{4}{3} A$; dimostra invece per assurdo che l'area K del segmento parabolico non può essere né inferiore né superiore a $\frac{4}{3} A$.

Vediamo, quindi, che nell'applicazione concreta del metodo, Archimede evita di utilizzare una nozione così oscura come quella di poligono con un numero infinito di lati che, al limite, coinciderebbe con il segmento parabolico. Egli aumenta il numero dei lati del poligono fino a che la quantità residua sia piccola quanto si vuole, ma ci sarà sempre un residuo. Contrariamente a ciò che succederà con i metodi del XVII secolo, le aree approssimate non *esauriscono* l'area cercata (Gregoire de Saint-Vincent (1647) ha dato il nome di "esaustione" al metodo in questione).

Il metodo antico, con il suo doppio ragionamento per assurdo, evita ingegnosamente le considerazioni infinitesimali.

Proposizione 23

"Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [cioè se ciascuna è quadrupla della successiva] tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i $\frac{4}{3}$ della maggiore".



$$\begin{aligned} \text{Hp)} \quad & A=4B \\ & B=4C \\ & C=4D \\ & D=4E \end{aligned}$$

Vengono introdotte le grandezze ausiliarie

$$F = \frac{1}{3} B, G = \frac{1}{3} C, H = \frac{1}{3} D, I = \frac{1}{3} E$$

$$\text{Ths)} A + B + C + D + E + \frac{1}{3} E = \frac{4}{3} A$$

$$\text{Dim: } F + B = B + \frac{1}{3} B = \frac{4}{3} B = \frac{4}{3} A; G + C = C + \frac{1}{3} C = \frac{4}{3} C = \frac{1}{3} B; H + D = D + \frac{1}{3} D = \frac{4}{3} D = \frac{1}{3} C$$

$$I + E = E + \frac{1}{3} E = \frac{4}{3} E = \frac{1}{3} D$$

Sommando membro a membro:

$$(1) B + C + D + E + F + G + H + I = \frac{1}{3} (A + B + C + D)$$

$$\text{Ma: } F + G + H = \frac{1}{3} (B + C + D)$$

Togliendo da (1) ad ambo i membri $F+G+H$ avrò:

$$B + C + D + E + I = \frac{1}{3} A \text{ e aggiungendo } A \text{ ad ambo i membri si}$$

$$\text{avrà la tesi: } A + B + C + D + E + I = \frac{4}{3} A$$

A, B, C, D, E sono in progressione geometrica.

Il "Deus ex machina" di Archimede è lo slittamento:

$$B + C + D + E = \frac{1}{4} A + \frac{1}{4} B + \frac{1}{4} C + \frac{1}{4} D = \frac{1}{4} (A + B + C + D)$$

Perché si prende proprio $F = \frac{1}{3} B$?

La posizione si giustifica così:

$$F = x B; G = x C; H = x D; I = x E,$$

per cui:

$$A + B + C + D + E + x E =$$

$$\begin{aligned}
&= A + B + x B + C + x C + D + x D + E + x E - x (B + C + D) = \\
&= A + \frac{1+x}{4} A + (B + C + D) \frac{1+x}{4} - x (B + C + D) = \\
&= A + \frac{1+x}{4} A + (B + C + D) \frac{1+x-4x}{4} .
\end{aligned}$$

Se $\frac{1+x}{4} - x = 0$ (cioè per $1 + x - 4x = 0$, $x = \frac{1}{3}$),

si ha $A + \frac{1+x}{4} A = A + \frac{1}{3} A = \frac{4}{3} A$

2.3. Il metodo dei teoremi meccanici. Nelle opere di Archimede le dimostrazioni sono rigorose, ma viene tenuto nascosto il procedimento per ottenere effettivamente il risultato. L'opera "Sulla sfera e sul cilindro" rispecchia bene l'atteggiamento nei confronti dei trattati scientifici. In essa vengono dimostrati i risultati relativi all'area della superficie sferica e al volume della sfera e sembra che tutte le proposizioni precedenti siano studiate in vista di queste.

È un'esposizione che parte da principi semplici per giungere mano a mano, a proposizioni più complesse.

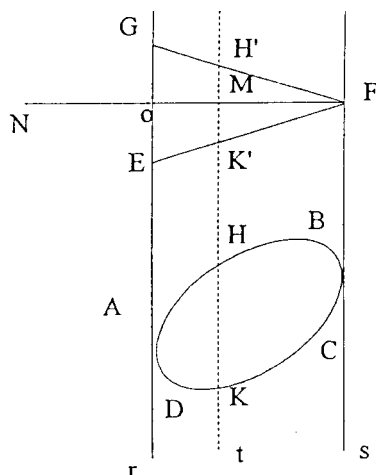
Nelle dimostrazioni finali e nella stessa struttura dell'opera si vede però che Archimede già conosceva il risultato, ottenuto per altra via. È questo un modo di procedere comune a molti matematici, non solo greci.

Fino a questo secolo non si conosceva il metodo euristico utilizzato da Archimede per ottenere i suoi risultati. Nel secolo XVII si parlava spesso di una "via segreta" di Archimede. Sia Torricelli che Wallis ed altri ancora erano infatti convinti che il matematico di Siracusa avesse volutamente occultato questa "via". È soltanto nel 1906, col ritrovamento da parte di Heiberg d'una lettera di Archimede a Eratostene che tale via si è palesata. Nel "Metodo sui teoremi meccanici" il termine meccanico è semplicemente derivato dal fatto che vengono utilizzati concetti di meccanica, quali *la leva in equilibrio, la posizione del baricentro, ...*. Archimede sceglie opportunamente le figure note da confrontare con quelle 'ignote' (di cui deve cercare l'area).

2.3.1 In che cosa consiste il metodo meccanico di Archimede.

Per determinare l'area di una superficie piana limitata da una curva chiusa ABCD si cerca una seconda figura da confrontare con essa. La curva viene pensata contenuta entro due rette parallele e tangenti la curva, mentre la seconda figura deve essere tale che:

1) se ne conosca l'area; 2) si conosca la posizione del baricentro.



La seconda figura sia per esempio un triangolo EFG. Si immagina di sezionare le due figure con una retta t parallela ad r ed s e siano HK ed $H'K'$ i segmenti intercettati. Mediante proprietà geometriche della figura si determina il rapporto $HK : H'K'$.

Nel caso dell'esempio $H'M = MK'$, $GO = OE$. Congiungo O con M e prolungo il segmento fino al punto N tale che:

$$HK : H'K' = MO : ON$$

$$\text{da cui: } HK \cdot ON = H'K' \cdot MO$$

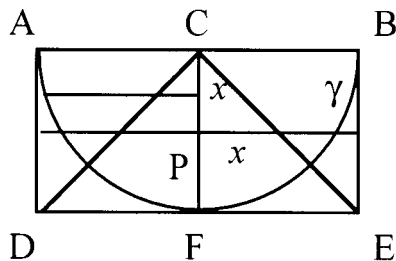
che si legge come il *principio della leva*. Poiché t era una retta generica si immaginano tutte le rette intersezione che, secondo una concezione ardita, costituiscono la figura e si pensa di "bilanciare" da un lato la prima figura e dall'altro la seconda figura: $\text{area } ABCD \cdot ON = \text{area } EFG \cdot OW$, se W è il baricentro del triangolo.

3. Luca Valerio, il 'Novello Archimede'. Nato a Napoli da padre ferrarese, allievo dell'editore veneto delle opere archimedee, Federigo Commandini, Luca Valerio (1552-1618) "algebrizza" il metodo di esaustione, generalizzandolo. Alla doppia riduzione all'assurdo, egli sostituisce un teorema generale al quale fa riferimento. Insegna al Collegio Romano (dei Gesuiti). E' dei primi membri dell'Accademia dei Lincei (1610), ma ne viene espulso nel 1616 per aver criticato l'appoggio dato dall'Accademia alla teoria galileiana del moto terrestre.

Le sue opere *De centro gravitatis solidorum libri tres* (1604) e *Quadratura parabolae per simplex falsum* (1606) gli valgono, da parte di Galileo, l'appellativo di «novello Archimede».

Consideriamo il metodo di Luca Valerio nella ricerca del "volume di un emisfero" (*De centro gravitatis solidorum* - Lib. II, 12).

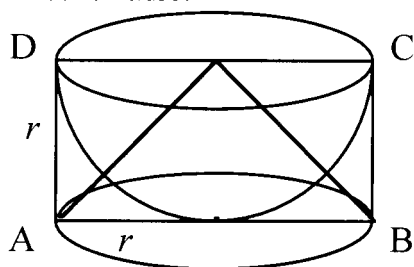
Consideriamo (in notazione moderna): γ semicirconferenza di diametro $AB=2r$; ABED parallelogramma; $CP=x$



Ruotando di 2π intorno a CF, si ottengono un cilindro e una semisfera: si tolga dal cilindro la semisfera; si ottiene una scodella. Valerio dimostra che il volume del cono (di sezione verticale DCE) e quello della scodella sono uguali.

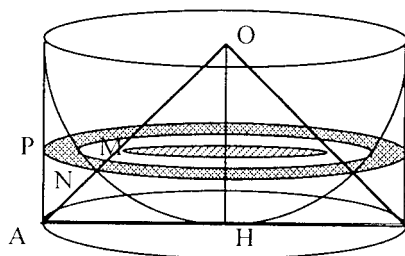
Tale "scodella" viene ricordata come "scodella di Galilei" perché compare in una sua opera: nella prima giornata del dialogo "Discorsi e dissertazioni matematiche intorno a due nuove scienze".

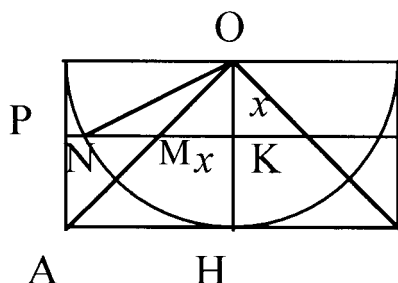
Il procedimento usato è il seguente: si considera una semisfera, il cilindro ad essa circoscritto, ed il cono che ha il vertice nel centro della sfera e per base quella del cilindro:



Vale allora il seguente **teorema**:

Sezionando, con piani paralleli alla base del cilindro, il cono e la scodella (intendendo per scodella la parte del cilindro che resta quando si toglie la semisfera), si ottengono sezioni corrispondenti con la stessa area (sezioni equivalenti).





Il triangolo OHA è isoscele per costruzione; quindi anche il triangolo OMK è isoscele perché è ad esso omotetico.

Se indichiamo con x la distanza del piano dal centro della sfera, è ancora x il raggio del cerchio-sezione del cono e l'area di questa sezione è πx^2 .

L'area della corona circolare è data invece da:

$$\pi(PK)^2 - \pi(NK)^2$$

o anche:

$$\pi(NO)^2 - \pi(NK)^2 = \pi[(NO)^2 - (NK)^2]$$

dove NO è il raggio della sfera.

Per il Teorema di Pitagora il risultato dell'espressione precedente è:

$$\pi(OK)^2 = \pi x^2$$

come volevamo dimostrare.

Dalla validità di questo teorema Luca Valerio deduce che la scodella ed il cono hanno lo stesso volume e che quindi il volume della semisfera si può ottenere dalla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono, cioè:

$$\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^3$$

dove $(2/3)\pi r^3$ è il volume della semisfera.

La dimostrazione di Luca Valerio è resa rigorosa, con un ragionamento per esaurimento.

Dietro il procedimento però c'è una affermazione di carattere intuitivo e cioè che due solidi che risultano dalla somma di infinite aree equivalenti di spessore "infinitesimo" occupano lo stesso volume. A queste aree di spessore infinitesimo si darà poi il nome di *indivisibili*.

Galileo osserva che quando il piano secante, parallelo al piano di base del cilindro, passa per il centro della sfera, taglia il cono in un punto, il vertice, mentre taglia la scodella in una circonferenza.

Lo colpisce il fatto che vadano considerati equivalenti, ai fini dell'area, un punto e una circonferenza, e finisce con questo commento:

"queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso sia inconveniente, perché stimo che quegli attributi di maggioranza, minorità e ugualità non convenghino agli infiniti, dei quali non si può dire uno essere maggiore, uguale o minore dell'altro".

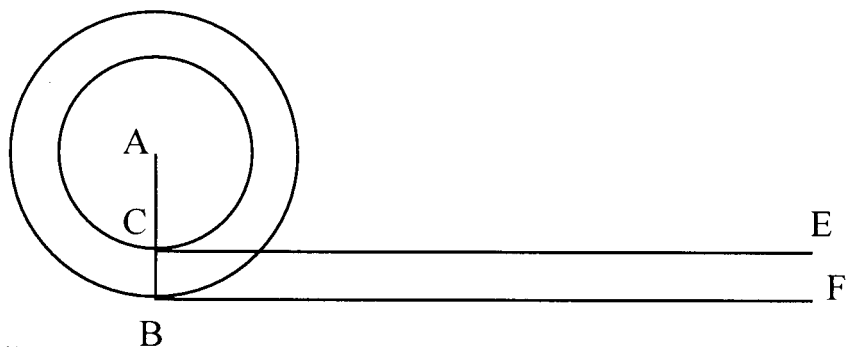
4. Galileo Galilei. Nasce a Pisa il 15 febbraio 1564. Da giovane studia le opere di Archimede. Nel 1589 diventa professore a Pisa, nel 1592 a Padova. Si lega a Marina Gamba dalla quale ha numerosi figli. Nel 1610 scopre i tre satelliti di Giove e nello stesso anno viene chiamato a Firenze come "primario matematico e filosofo". Nel 1616 viene ammonito a non sostenere il copernicanesimo. Nel 1632 pubblica il "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" in cui fa intervenire tre personaggi: Sagredo, dilettante di scienza, ma piuttosto intelligente e curioso; Salviati, lo scienziato (che impersona l'autore) e Simplicio, un aristotelico. Nel 1633 arriva la condanna del Sant'Uffizio e Galileo abiura. Nel 1638 pubblica in Olanda, a Leyda, i "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze". Muore l'8 gennaio 1642, assistito negli ultimi anni, nel suo esilio ad Arcetri, dai suoi discepoli e dalla figlia Suor Maria Celeste.

4.1 Questioni infinitesimali. Galileo si occupa di questioni infinitesimali soprattutto nei suoi problemi cinematici, statici e dinamici. Si occupa anche di indivisibili, ma non mette a punto alcun metodo pratico per la loro manipolazione; la teoria è rimasta puramente speculativa sia in fisica che in geometria.

Galileo introduce gli indivisibili nel corso della prima giornata dei "Discorsi". La questione è la seguente: quale è la causa che permette di tenere insieme le parti dei corpi solidi? Egli distingue diverse ipotesi. Fra le altre, Galileo considera quella secondo cui ci potrebbero essere nella materia dei vuoti molto piccoli e molto numerosi. È la ripugnanza verso il vuoto che tiene uniti i pezzetti di materia. Ma quanti piccoli vuoti ci saranno? Se ce ne sono infiniti, come concepire che tale infinito sia contenuto in una porzione finita di materia? È qui che si inserisce una tesi di portata più generale: in una porzione finita, ci può essere una infinità di vuoti. Per dimostrarlo, Galileo ricorre ad un esempio geometrico preso dalla "Meccanica" attribuita ad Aristotele. Si tratta di un paradosso noto come "La ruota di Aristotele".

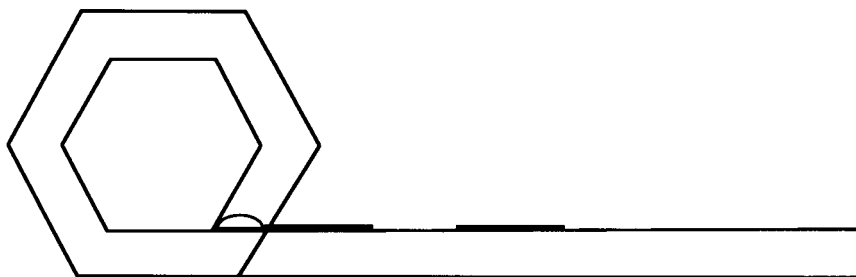
Se un grande cerchio rotola senza scivolare lungo una base orizzontale il punto B ritornerà sulla base orizzontale dopo un giro completo. Se si considera un cerchio più piccolo tracciato all'interno della ruota, con lo stesso centro A e che rotola con la stessa velocità angolare, il punto C di questo secondo cerchio ritornerà anch'esso alla

posizione iniziale dopo un giro completo. Peraltro la lunghezza di tali cerchi è differente:



il cerchio grande, che è rimasto appoggiato alla base BF, ha percorso una lunghezza uguale alla sua circonferenza; che dire allora del movimento del cerchio piccolo? Come è possibile che anche lui abbia percorso la lunghezza CE uguale a BF?

Per rispondere a tale paradosso, Galileo considera dapprima un esagono al posto del cerchio; e poi un esagono più piccolo al suo interno.



L'esagono grande, piuttosto che rotolare, si sposta appoggiando volta per volta uno dei suoi lati sulla base. Nel frattempo, l'esagono piccolo appoggia i suoi lati su una retta orizzontale parallela alla base, ma lasciando degli spazi non occupati, a intervalli regolari.

Ciò che succede per gli esagoni indica la via per capire ciò che succede per i cerchi: è sufficiente moltiplicare il numero di lati, e non considerare più degli esagoni, bensì dei poligoni con venti o mille lati. Allora il poligono piccolo si appoggerà mille volte sulla base e ogni volta lascerà un piccolo segmento orizzontale "non toccato". La retta sarà costituita da mille piccoli segmenti separati da mille piccoli vuoti. Così, il cerchio può essere considerato come un poligono con infiniti lati: possiamo pertanto pensare che il cerchio piccolo percorra la linea CE facendo un numero infinito di salti infinitamente piccoli. La linea

orizzontale sarà costituita da punti vuoti e da punti pieni (infiniti punti parte pieni e parte vuoti).

5. Bonaventura Cavalieri. Si conosce molto poco sui primi anni di vita di Cavalieri. Anche la data di nascita lascia ancora adito a dubbi, benché un suo allievo (Urbano D'Aviso o Daviso) dica *"Nacque il P. Bonaventura Cavalieri l'anno 1598 nella nobilissima città di Milano di honorati parenti"*. Il 20 settembre 1615, dopo due anni di noviziato, Cavalieri prende gli Ordini (e forse il nome di Bonaventura) di Gesuato di S. Gerolamo e viene inviato al monastero di S. Gerolamo a Pisa (verso la prima metà del 1616). A Pisa incontra Benedetto Castelli, all'epoca lettore di matematica all'Università (di Pisa). Castelli dà a Cavalieri le prime lezioni di geometria e avendone individuate le grandi capacità lo presenta a Galilei. Passa circa un anno a Firenze e torna poi a Pisa per sostituire Castelli come lettore di matematica.

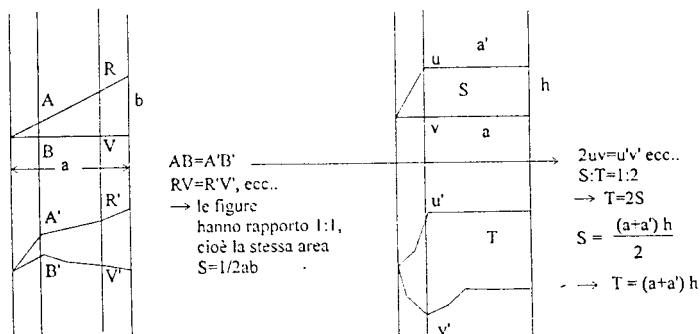
Nel 1617 Cavalieri cerca di ottenere la cattedra di Bologna, molto ambita, che prima era stata ricoperta da Magini, ma non ci riesce (forse anche perché non ha l'appoggio di Galileo). Nel 1620 ritorna a Milano dove incomincia a vedere la luce la sua teoria degli indivisibili. A Milano prende gli ordini maggiori. Spedisce a Galileo alcuni studi sulle spirali. Galileo comincia allora ad apprezzarlo e nel 1629 ne appoggia la candidatura alla cattedra di Bologna che finalmente gli viene concessa. Muore nel 1647.

5.1. Gli indivisibili di Cavalieri. Per quanto riguarda le opere di Cavalieri, ci soffermiamo solo sulla maggiore: la *"Geometria Indivisibilibus continuorum nova quodam ratione"*, di cui i primi sei libri sono composti già nel 1627, ma che viene pubblicata solo nel 1635, perché negli anni 1632-35 scrive altri due libri: il 7° e l'8° che trattano le possibili obiezioni al suo metodo; obiezioni che già allora prevedeva. Furono infatti molti i matematici dell'epoca che lo osteggiarono in questo suo metodo; ricordiamo fra gli altri i Padri Gesuiti Guldino (1577-1643), Tacquet e Bettini. Per rispondere alle obiezioni mossegli, Cavalieri scriverà negli anni 1643-1647 le *"Exercitationes Geometriae Sex"*. L'idea base della teoria degli indivisibili consiste nel paragonare due continui, paragonando i loro indivisibili. Quali sono questi indivisibili cavalieriani? Sono tutte le linee in cui si può scomporre, per una figura piana; tutte le superficie, per un solido [diverso da Leibniz: rettangoli infinitesimi].

Il Principio di Cavalieri: *"Figurae planae quaecumq; in eisdem parallelis constitutae in quibus, ductis quibuscumq; eisdem parallelibus aequidistantibus rectis lineis, conceptae cuiuscumq; rectae lineae portiones sint inter se, ut cuiuslibet alterius in eisdem figuris conceptae portiones (homologis tamen in eadem figura semper existentibus)"*

eandem inter se proportionem habebunt, quam dictae portiones".
[Geometria, libro II Exercitatio II, Propositio II].

Se due aree piane tagliate da un sistema di rette parallele, intercettano, sopra ognuna di queste, due corde uguali, le due aree sono uguali; se le corde corrispondenti hanno un rapporto costante, lo stesso rapporto passa fra le aree.

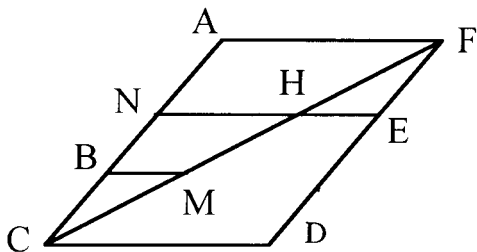


Il processo del pensiero cavalieriano è un processo di tipo analitico e non sintetico: non parte dal punto, dalla linea, dal piano, per arrivare, mediante una somma impossibile, a linee, a piani, a corpi. Al contrario, parte da corpi, da piani, dalla retta per arrivare a scoprire, come elementi determinanti ed al contempo costitutivi - ma non componenti - il piano, la retta e il punto. L'impiego degli indivisibili al posto degli infinitamente piccoli è destinato, dal punto di vista di Cavalieri, a liberarci dal passaggio al limite, con le sue difficoltà, o più esattamente, le sue impossibilità logiche, rimpiazzandolo con l'intuizione geometrica della cui legittimità non si può dubitare. È inoltre ben più economica del lungo giro delle dimostrazioni archimedee.

La terminologia di Cavalieri non deve indurci in errore. Quando parla di "tutte le linee" (*omnes lineae*) e di "tutti i piani" (*omnia plana*) di una figura geometrica, non intende 'fare la somma di tali linee o di tali piani'. Al contrario egli dichiara che l'insieme di un numero indefinito (infinito) di elementi è, in generale, egli stesso indefinito (infinito) e che degli insiemi di questo tipo non possono dunque essere messi in rapporto. Cavalieri pensa però che tale proposizione non sia universalmente valida; si ammette che nel continuum (una superficie) non ci sono che linee, o che, se ci sono altre cose oltre alle linee, non possiamo non riconoscere il fatto evidente e "indubitabile" che le troviamo **ovunque** e che, attraversando una superficie le incontriamo **tutte**. Inoltre Cavalieri reputa che sia impossibile negare l'equivalenza di una superficie (figura) data con tutte le sue linee' e la constatazione che il rapporto dell'insieme di tutte le linee di una figura all'insieme di tutte le linee di un'altra figura è lo stesso rapporto che si stabilisce tra le

figure stesse. Si può quindi sostituire allo studio dei rapporti tra le figure, lo studio delle relazioni tra i suoi elementi, a condizione tuttavia che si sappia stabilire una opportuna corrispondenza univoca e reciproca tra quegli elementi. È a questo, principalmente, che serve il metodo detto della regola comune (*regula communis*). L'idea essenziale del suo metodo è quella di confrontare due figure piane (o solide) paragonando gli indivisibili di queste figure, indivisibili che sono i segmenti (o i piani) tagliati su queste figure da un piano parallelo ad un piano dato, chiamato regola. Il fondamento del metodo si trova nella espressione seguente: *"Le grandezze continue verificano la stessa proporzione dei loro indivisibili"*. Dopo aver proceduto ad un confronto attraverso gli indivisibili e aver stabilito l'esistenza di uno stesso rapporto tra due indivisibili corrispondenti, si può concludere che esista lo stesso rapporto tra le figure messe a confronto. La nozione di elementi (indivisibili) corrispondenti gioca un ruolo di primo piano nel pensiero di Cavalieri; egli insiste anche sulla necessità di mettere in rapporto solo gli elementi omologhi delle figure studiate.

In effetti, se si trascura questa esigenza fondamentale e si mettono in relazione degli elementi non omologhi, si arriva a delle conclusioni paradossali, addirittura false. Non bisogna dimenticare che l'applicazione della tecnica della regola (piano mobile che traccia gli elementi corrispondenti delle figure confrontate) è, essa stessa sottomessa alle condizioni di "omologia":



Quando si studia il rapporto tra un triangolo ed il parallelogramma che lo completa (il rapporto tra i due triangoli tagliati nel parallelogramma dalla diagonale) o, che è la stessa cosa, quando si vuole determinare l'area di un triangolo, ci si rende conto che il piano mobile traccia nei triangoli affiancati le linee HE, NH che, essendo completamente legate da una coordinazione univoca e reciproca, non si corrispondono in alcun modo (non sono omologhi).

In compenso, le linee HE e BM che sono reciprocamente alla stessa distanza dai vertici e dalle basi dei due triangoli AFC e CDF si corrispondono (sono omologhe). La loro uguaglianza implica l'uguaglianza dei triangoli in questione e dunque il fatto che l'area di un triangolo (l'insieme delle sue linee) è esattamente uguale alla metà di quella di un parallelogramma avente la stessa base e la stessa altezza.

Si può ora andare più lontano ed esaminare non più l'insieme delle linee (indivisibili) tracciate o segnate rispettivamente nel triangolo AFC e nel parallelogramma AFCD, dal piano mobile (Cavalieri non parla esplicitamente del piano mobile, ma è presupposto nella nozione della regola) che si sposta da AF in CD, ma l'insieme dei quadrati costruiti sulle linee. Uno di questi insiemi sarà, con tutta evidenza, un parallelepipedo (prisma a base quadrata), l'altro una piramide a base quadrata uguale a quella del parallelepipedo.

È possibile dimostrare che il rapporto di questo secondo insieme con il primo sarà uguale ad $1/3$. Questa proposizione che, da un punto di vista strettamente geometrico non apporta evidentemente niente di nuovo, occupa però un posto molto importante nell'opera di Cavalieri, e lui stesso non manca d'insistere sulla sua portata ed i progressi che essa permette di compiere. In questo Cavalieri ha perfettamente ragione perché la sua proposizione, che egli giunge d'altro canto ad estendere a delle potenze superiori a 2, andando oltre così facendo l'ambito della geometria propriamente detta, ha anche validità generale che è, come l'ha detto così bene Zeuthen (1903), l'equivalente esatto della formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3 \quad \left(\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot a^{n+1} \right)$$

*Si le calcul infinitésimal représente la maturité, alors les indivisibles sont les découvertes dell'adolescence*². (Barbin, 1987)

L'integrale definito, che noi oggi scriviamo: $\int L(x)dx$ (tra estremi di integrazione determinati), venne indicato a lungo con un simbolo cavalieriano: *omn. L.* abbreviazione di *omnes lineae*. Solo con Leibniz abbiamo la notazione moderna: il grande filosofo e matematico tedesco la sostituisce in modo esplicito alla notazione di Cavalieri.

Si può stabilire una corrispondenza tra le denominazioni cavalieriane e le notazioni integrali.

6. René Descartes. Nato nel 1596, si diploma in diritto all'Università di Poitiers e studia matematica a Parigi. Nel 1617 entra nell'armata del principe d'Orange e successivamente presta servizio in diversi eserciti, alternando alle battaglie periodi di baldoria a Parigi. Nel 1634 termina un'opera dal titolo *Le monde* che doveva essere testo scientifico sulla creazione dell'universo, con una precisa esposizione del sistema copernicano; giuntagli nel frattempo la notizia dell'abiura di Galileo davanti all'inquisizione il 22 giugno 1633, distrugge quasi tutto il suo

²Se il calcolo infinitesimale rappresenta la maturità allora gli indivisibili sono le scoperte dell'adolescenza.

lavoro e ne pubblica, nel 1637, solo una parte, il *Discours sur la méthode*, del quale *La géométrie* è un'appendice.

Trascorre gli ultimi anni della sua vita in qualità di docente di matematica della regina Cristina di Svezia. Muore nel 1650.

Anche se una prima anticipazione della **geometria analitica** si avverte nel "Tractatus de latitudini formarum" di Nicola Oresme (1323-1382), dove è presentata in forma embrionale la rappresentazione grafica di alcune funzioni senza, però, una effettiva "quantificazione" dei concetti, generalmente si riconosce la gloria della scoperta di questa branca della matematica a René Descartes e a Pierre de Fermat (1601-1665). Presupposto per il costituirsi di questa disciplina è l'interesse che nel secolo XVII venne ad avere lo studio delle curve, interesse nato dal fatto che le opere greche, particolarmente rivalutate in questo periodo, in seguito alle molteplici edizioni che di esse vennero fatte, non mettevano a disposizione metodi matematici di generale applicazione per conseguire le conoscenze desiderate sulle proprietà di alcune curve. I greci si limitavano infatti a risolvere i loro problemi, per caso, con ingegnosi accorgimenti, ma senza produrre una impostazione generale.

Fu questo il motivo principale che spinse Descartes a studiare e a costruire una nuova geometria. A questo di deve inoltre aggiungere che, a quell'epoca (inizio 1600), l'algebra era disciplina molto popolare ed importante, dopo i grandi successi ottenuti nel secolo precedente nella risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, ma era completamente slegata dalla geometria. Come evidenzia Giusti (1988), un'analisi storica del calcolo infinitesimale non può che cominciare dalla geometria cartesiana. In effetti è solo nell'ambito dei problemi aperti dall'opera di Descartes e nel linguaggio elaborato nella *Géométrie* che le idee che porteranno al calcolo potranno essere formulate e sviluppate. (...) Il problema geometrico delle tangenti viene ridotto a quello puramente algebrico delle radici multiple, ma il metodo cartesiano è applicabile solo alle curve la cui equazione è data mediante un polinomio $P(x, y) = 0$. Ad esso sfuggono invece non solo le curve trascendenti, ma anche quelle algebriche nella cui equazione entrano dei radicali, che devono essere eliminati prima di porre in moto la macchina cartesiana.

Quello che conta non è tanto il carattere qualitativo della funzione, quanto la sua maggiore o minore complessità: funzioni che contengono un numero rilevante di radici. Nel problematica della tangente, la scelta della sottotangente come parametro per la descrizione della tangente, benché la più naturale dal punto di vista geometrico (intersezione con l'asse delle ascisse), dal punto di vista analitico presenta l'inconveniente di una completa rigidità rispetto alle relazioni algebriche: quando l'ordinata di una curva si scrive come somma di quelle di due o più curve, non c'è nessuna relazione semplice che permetta di risalire dalle sottotangenti di queste a quella della curva di partenza. In altre parole, non c'è nessun modo semplice per esprimere la

sottotangente della somma : $t = (f(x) + g(x) / (f'(x) + g'(x))$ in termini di $t_1 = f(x)/f'(x)$ e $t_2 = g(x)/g'(x)$.

Se il problema della quadratura ha un'origine molto antica, le tangenti non verranno studiate che verso la metà del XVII secolo. La concezione di tangente nell'antichità - una retta che tocca la curva in un solo punto - è di portata pratica ristretta e, salvo qualche costruzione isolata come quelle della tangente alla spirale di Archimede e quelle delle tangenti alle coniche di Apollonio, non è basata su un metodo generale.

7. Gottfried Wilhelm Leibniz. Nasce a Leipzig (Lipsia) nel 1646. Compie in questa città i suoi studi e nel 1666 gli viene rifiutato il titolo di dottore in legge solo a causa della sua giovane età. Da quel momento pubblica numerose opere sui più vari argomenti. Nel 1672 fa parte di una missione diplomatica alla corte di Luigi XIV.

Durante il suo soggiorno a Parigi, Leibniz fa la conoscenza di Christian Huygens (1629-1695) che lo introduce allo studio delle opere di Cavalieri, Roberval, Pascal, Descartes, Gregory e Wallis.

Nel 1676, Leibniz lascia Parigi per seguire la carriera politica al servizio dell'elettore di Hannover. Troppo preso dalla politica per avere il tempo di scrivere lunghi trattati di matematica, Leibniz pubblica il suo calcolo differenziale in una serie di brevi articoli apparsi a partire dal 1684 sugli "Acta Eruditorum", giornale scientifico fondato con il suo appoggio nel 1682 a Lipsia. Molti dei suoi risultati non sono mai stati pubblicati ed è piuttosto difficile seguire l'evoluzione delle sue idee sul calcolo differenziale. Nel 1684 Leibniz pubblica la prima esposizione del suo calcolo differenziale dal titolo:

"Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus". (Acta Eruditorum, Mens. Octobr. 1684, pp. 467-473 e tab. XII)

"Un nuovo metodo per la determinazione dei massimi e dei minimi, nonché delle tangenti, che non è ostacolato né dalle quantità fratte, né dalle irrazionali, e un particolare sistema di calcolo per quelli (cioè per massimi, minimi, tangenti)".

7. 1. Curve e sistemi di riferimenti. "Siano dati (tab. XII) l'asse AX e più curve come VV, WW, YY, ZZ, le cui ordinate VX, WX, YX, ZX, normali all'asse, siano chiamate rispettivamente v , w , y , z . Il segmento AX, tagliato sull'asse sia chiamato x ."

a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili.

Sono queste differenze (o differenziali) che Leibniz prende come parametri principali al posto della sottotangente, una scelta che gli permette di superare le difficoltà, grazie alle regole di differenziazione che egli enuncia in dettaglio all'inizio della sua famosa memoria. (...) La differenziazione assume la posizione centrale nell'elaborazione leibniziana, una chiave che da una parte apre la strada alle molteplici scoperte successive, ma allo stesso tempo richiede una notevole dose di coraggio intellettuale, dato che attraverso di essa le quantità evanescenti fanno il loro ingresso in geometria."

7. 2. Tangenti alla curva. L'atteggiamento di Leibniz, nei confronti della retta tangente, per la mentalità odierna è piuttosto singolare ma tipico dell'epoca. Egli parla infatti di tangente ammettendo già noto il concetto e non ponendosi il problema dell'esistenza o meno di tale retta. Egli scrive: *"...purché si ritenga in genere che trovare la tangente è condurre una retta, che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola [infinite parvam], o tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo, che per noi equivale alla curva."*

Leggendo questo passo si potrebbe restare perplessi, a meno di avere presente la *filosofia-matematica* di Leibniz. Se, per esempio, g è una parabola e se consideriamo due punti qualsiasi P_0 e P_1 di g , la retta passante per questi due punti sarà sempre una retta secante, per prossimi che possono essere i due punti. La perplessità però si attenua osservando che Leibniz non parla di punti vicinissimi o prossimi, bensì di punti infinitamente vicini [*puncta distantiam infinite parvam habentia*]. È perciò necessario fare una netta distinzione fra le due locuzioni: "punti vicinissimi" e "punti infinitamente vicini". Con la prima la retta passante per i due punti è una retta secante. Con la seconda, invece, si entra nel mondo degli infinitesimi. In tale contesto la curva viene concepita come un *poligono infinitangolo* e la retta tangente come il *prolungamento del lato infinitesimo di questo poligono*. I due concetti, di "punti infinitamente vicini" e di "retta tangente" devono essere accettati come *enti primitivi [modus dicendi]* e si potrebbe definire l'uno mediante l'altro e viceversa.

7.3. La definizione leibniziana del differenziale dx . *"Ora si indichi con dx un certo segmento preso arbitrariamente ..."*. Il dx è il nome dato ad un certo *segmento*, preso arbitrariamente sull'asse. Ciononostante si può anche considerare come la *lunghezza* euclidea di quel segmento.

Più avanti, dal contesto della "Nova Methodus", il dx apparirà invece come *variabile*, come *differenza* fra due successivi valori della x e si vedrà come (soprattutto nelle applicazioni) esso dovrà essere

interpretato come *infinitesimo*. Alle origini della scoperta Leibniziana del calcolo infinitesimale, negli anni 1673-76, si trovano gli studi sulle successioni numeriche e sulle successioni differenze e somme di tali successioni. Nel passaggio dall'aritmetica alla geometria, le successioni numeriche diventano successioni di ascisse, di ordinate, ecc... e, in generale, successioni di tutte le variabili inerenti la curva considerata.

Se tale curva fosse concepita come un poligono a lati finiti, le ascisse, le ordinate e le altre variabili della curva formerebbero ovviamente delle successioni finite e le differenze fra due valori successivi di queste variabili, costituirebbero anch'esse delle successioni finite. In tale ipotesi, il differenziale dx , pensato come differenza fra due valori successivi della x , è un incremento della x , coincidente col nostro Δx (In Leibniz, però, esso è pensato sempre positivo). Poiché però Leibniz concepisce la curva come un poligono infinitangolo, le successioni delle ascisse, delle ordinate e delle altre variabili sono costituite da *infiniti termini*, che hanno fra loro una distanza *infinitamente piccola*. Poiché inoltre la variabile considerata, per esempio x , assume solo i valori della successione (nel nostro esempio i valori della successione delle ascisse), si può parlare di una coincidenza fra la variabile e la successione. Ecco dunque che la successione delle differenze di ascisse infinitamente vicine coincide con la variabile dx .

Un fatto singolare è: 1) l'introduzione del differenziale dx come un ente finito: un segmento fissato arbitrariamente a priori, ma poi 2) questa definizione sarà accantonata e sostituita con un'altra (dx infinitesimo), molto meno rigorosa, ma molto più feconda dal punto di vista operativo.

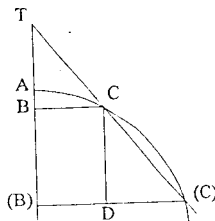
Esaminando gli scritti di calcolo infinitesimale di Leibniz e dei suoi allievi e continuatori ci si accorge che fu la seconda definizione ad essere costantemente usata, e ancora per tutto il XVIII secolo. Successivamente invece, a partire da Cauchy, si avverte un cambiamento di rotta: sarà la definizione con gli infinitesimi ad essere considerata anomala (salvo nella moderna analisi non standard) e la prima definizione potrà essere vista come una conseguenza della definizione del differenziale con la derivata.

Ciò che costituisce la forza del metodo leibniziano è la semplicità del suo algoritmo, la sua notazione elegante, il suo formalismo operativo che permette di effettuare quasi automaticamente i calcoli, mascherando la natura degli oggetti in gioco. Laddove Leibniz aggiunge al sistema delle grandezze usuali gli infinitesimi il loro status resta comunque molto flessibile. Leibniz oscilla tra una attitudine formale e un appoggiarsi ad analogie geometriche. Desideroso di eliminare la natura metafisica degli infinitesimi, li considera come dei semplici annessi, alla stessa stregua degli immaginari. L'idea fondamentale è la inconfontabilità. Per Leibniz, punti, linee, superficie non sono

confrontabili: non si aggiunge nulla ad una retta, aggiungendo, ad esempio, un punto. Così, nei riguardi di x , dx "si comporta" come un punto in rapporto ad una retta. Si noti che Leibniz lavora in un insieme di quantità - formate da numeri reali ai quali ha aggiunto i differenziali - che *non* è più archimedeo. Egli "suggerisce" che le quantità infinitesime sono minori di tutte le quantità date, che sono quantità private di grandezza che, grazie ad un vago principio di continuità, conservano il carattere delle relazioni tra le quantità finite dalle quali provengono. Come Newton, Leibniz è tentato di non considerare gli elementi infinitesimali, bensì i loro rapporti. L'identificazione dei rapporti con numeri non è sempre attuata; tale concezione è in parte responsabile del fatto che il concetto di limite non può scaturire dalle teorie leibniziane e newtoniane.

È necessario aspettare i numeri reali per poter definire i differenziali come limiti di serie infinite di numeri.

7.4. Il triangolo caratteristico di lati infinitesimi. Siano dx (elemento di ascissa), dy (elemento di ordinata), ds (elemento di curva) quantità inassegnabili (locuzione questa usata per contrapporre i medesimi ai lati corrispondenti di un triangolo simile di lati "assegnabili", cioè non infinitesimi).



La retta TC taglia la curva AC(C) in due punti C e (C) dai quali si abbassino le perpendicolari CB e (C)(B) all'asse. Ora da C si tracci la normale CD a (B)(C), è evidente che CD è la differenza delle ascisse AB e A(B) e, analogamente, D(C) è la differenza delle ordinate BC e (B)(C). E se la retta TC incontra l'asse AB in T, è evidente che i triangoli TBC e CD(C) sono simili.

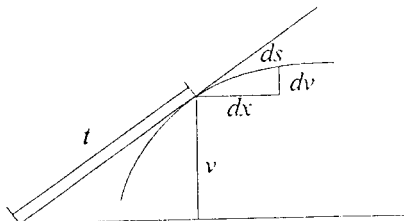
Ma nel caso del contatto, la retta TC non seca la curva AC(C), ma la tocca; ossia i punti C e (C) coincidono, essi distano di un intervallo infinitamente piccolo (ossia infinitesimo) è evidente che il triangolo CD(C) diventa inassegnabile, essendo formato da lati infinitamente piccoli e che CD è un elemento di ascissa e D(C) è un elemento di ordinata e C(C), come anche si farà vedere a suo tempo e luogo, è un elemento di curva. E soprattutto è evidente che questo triangolo inassegnabile CD(C) è simile al triangolo assegnabile e ordinario TBC, anzi con l'aiuto di questo triangolo inassegnabile, ossia con l'intervento del rapporto tra quantità inassegnabili CD e D(C) (che il nostro calcolo

differenziale presenta tramite quantità ordinarie o assegnabili), si trova il rapporto fra le quantità assegnabili TB e BC e quindi il modo di condurre la tangente TC.

7.5. Sulla retta tangente. Dice Leibniz: "È pure evidente che il nostro calcolo si estende alle linee trascendenti che non si possono ricondurre al calcolo algebrico, o che non sono di grado determinato.

E ciò in modo generalissimo, senza ricorrere ad alcuna particolare ipotesi, che non sempre si verifica, purché si ritenga in genere che trovare la tangente è condurre una retta che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola, ossia tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo, che per noi equivale alla curva. Quella distanza infinitamente piccola, poi, può sempre essere espressa mediante un certo differenziale noto, ad esempio dv , o mediante una relazione con questo, cioè per mezzo di una certa tangente nota."

Soltanto ora Leibniz sente il bisogno di chiarire che cosa intende per retta tangente e quest'unico fatto potrebbe essere portato come esempio della disorganicità dell'esposizione leibniziana, così lontana dai nostri usuali modi di procedere.



$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dv)^2$$

$$ds = \frac{t}{v} dv$$

Leibniz fonda il suo calcolo sulla nozione di differenziale. Questo approccio non è estraneo alla sua ricerca in filosofia delle monadi. Il calcolo dei differenziali è dunque l'operazione fondamentale del calcolo Leibniziano.

7.6. Alle origini del "calcolo sublime". L'importanza del "nuovo metodo" viene ribadita da Leibniz nel passo che segue:

"In tutti questi casi e in altri assai più complicati la facilità del nostro metodo è molto maggiore di quanto generalmente si creda e veramente straordinaria. E questi, invero, sono soltanto gli inizi di una certa Geometria, molto più sublime [di quella comune], che si estende ai problemi più difficili e più belli, anche della Matematica mista.

Leibniz, era consapevole, fin dall'inizio, del carattere rivoluzionario della sua scoperta.

8. Isaac Newton. Nasce a Woolsthorp. Nel 1661 entra nel Trinity College di Cambridge, dove segue le lezioni tenute da Barrow che lo invita a leggere i classici greci (Euclide e Archimede). In questi anni studia anche, fra le altre, le opere di Viète e la "Géométrie" di Descartes nell'edizione latina curata da Van Schooten.

L'opera dalla quale viene forse maggiormente influenzato è l' "Arithmetica infinitorum" di Wallis. Nel 1666 Londra e i dintorni sono colpiti dalla peste, per cui Newton lascia Cambridge e si ritira in campagna. Il biennio 1666-1667 è il più fecondo di risultati, sia per la fisica, che per la matematica. Risale infatti a quest'epoca l'intuizione della legge di gravitazione universale, la formula del binomio, l'elaborazione del metodo delle flussioni e la teoria sulla natura dei colori. Nel 1669 ottiene la cattedra di Matematica che prima aveva Barrow. I più importanti lavori matematici li fa prima della crisi depressiva del 1692, ma verranno pubblicati solo molto dopo, in occasione della disputa con Leibniz per la priorità della scoperta del calcolo infinitesimale. Muore nel 1727.

Le sue opere principali sono:

- *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 1687 (fondamento della Meccanica classica);

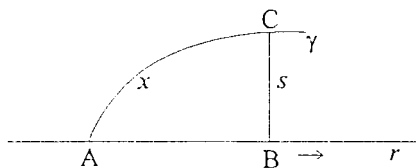
- *Tractatus De Quadratura curvarum* (appendice all'Optiks) 1704 (ma scritta nel 1676);

- *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* 1711 (ma del 1669);

- *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* 1736 (ma del 1671).

Tutte le sue opere, ad eccezione dei "Principia", rivelano un indirizzo di tipo empirista e pragmatico: la matematica ha un valore essenzialmente strumentale nei confronti della fisica.

8.1. Fluenti e flussioni. Newton fonda la sua analisi della cinematica sul concetto di flussione: sia x una grandezza matematica generata dal movimento di un altro ente, per esempio: r e g date (fisse), x area del trilineo ABC, descritta da s che trasla da sinistra verso destra.



Newton chiama x fluente; la flussione è invece indicata con $\dot{x}$ ed è definita come la velocità di accrescimento di x .

Nel "Tractatus de quadratura curvarum" (1704) scrive:

"Considero in questo lavoro le grandezze matematiche come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte per moto continuo di punti, le superfici per moto di linee, chiamando flussioni queste velocità di accrescimento e fluenti le quantità generate.

Per Newton la flussione è una velocità di accrescimento. Bisogna però tenere presente che egli non la definisce come limite del rapporto incrementale; in tutte le sue opere non c'è, neanche a parole, il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Occorre dunque precisare tre punti:

1) Newton considera solo grandezze dipendenti dal tempo; un tempo che possiamo pensare convenzionale. Egli dice nel "Methodus fluxionum": *"... questa parola tempo si deve assumere non come se io avessi voluto considerare il tempo nel suo significato letterale, ma per indicare quelle quantità, diverse dal tempo, mediante il cui aumento o flusso uniforme, si rappresenta o si misura il tempo"*.

Per noi, ad esempio, $y = x^2$ è una relazione fra due variabili: x indipendente e y funzione di x . Per Newton, invece, x è una fluente, funzione del tempo e y è ancora una fluente, funzione del tempo.

$\dot{x}$ è la flussione, la velocità di accrescimento, secondo le parole di Newton; anche se egli non definisce la velocità istantanea, tuttavia la concepisce come quantità fisica.

2) Newton non calcola mai delle flussioni, ma solo rapporti fra flussioni, come ad esempio $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Come Barrow parte da relazioni del tipo $F(x, y) = 0$ e con regole ben precise passa alla relazione fra flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Ad esempio, di fronte a $x^3 - xy^2 - a^3 = 0$ noi consideriamo x e y come funzioni del tempo e deriviamo rispetto al tempo:

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} = 0$$

$$\text{dove} \quad \dot{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad \text{e} \quad \dot{y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Newton giunge alla stessa relazione fra $\dot{x}$ e $\dot{y}$, ma queste non sono per lui, su un piano teorico, delle derivate come le intendiamo noi, anche se operativamente coincidono.

In generale Newton calcola i rapporti $\frac{y}{\dot{x}}$, ma talvolta pone $\dot{x} = 1$, per cui $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}$ e ciò operativamente è vicino al nostro $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$.

Va rilevato che nei Principia, Newton non usa esplicitamente il calcolo ma "maschera" tutto sotto uno stile euclideo.

8. 2. Sviluppi in serie. I risultati ottenuti da Newton sugli sviluppi in serie si trovano in manoscritti risalenti al 1665 (ed anche in opere pubblicate; ad esempio nel "De Analysis") e si possono considerare come derivati da studi sulle opere di Wallis, in particolare sulla "Arithmetica infinitorum" (1656). Il più famoso di questi risultati è quello passato alla storia come "il binomio di Newton":

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n-h} b^h, n \in \mathbf{N} \quad (1)$$

Questo è quanto di solito si ricorda. In realtà va detto che Newton trovò anche la formula:

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1) \dots (r-n+1)}{n!} x^n, \quad (2)$$

per $r \notin \mathbf{N}$ (cioè $r > 0, r < 0, r \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{Q}$, ma non $r \in \mathbf{R}$).

Oggi, di fronte a $(1+x)^\alpha$ si pensa allo sviluppo in serie di Mac Laurin $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, cioè: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ e sappiamo che si ottiene

una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è 1. Se vogliamo chiamare la (2) serie di Newton, riconoscendo al nostro autore il merito di avere esteso la (1) al caso (2), dobbiamo precisare che Newton ha operato questa generalizzazione, ma non per $\alpha \in \mathbf{R}$; che egli ha trovato questa estensione non con il calcolo di derivate (come noi), ma con svariati metodi (per esempio divisione, estrazione di radice, ecc.); che Newton non si poneva il problema della convergenza o meno della serie.

Le serie non potevano non convergere. Newton afferma esplicitamente: *"Se nella pratica un problema reale conduce ad una serie che non converge, ciò può dipendere soltanto dal fatto che il problema è stato mal impostato: si cerchi di rielaborarlo meglio, restando più aderenti alla realtà fisica e la serie trovata cesserà di essere divergente."*

Gli sviluppi in serie sono per Newton la chiave per affrontare e risolvere nella loro massima generalità i principali problemi del calcolo. Non essendo stato ancora introdotto il concetto di funzione, il seno, la tangente, il logaritmo, ecc., vengono piuttosto considerati come quantità variabili le une in relazione alle altre. Il fatto che tutte queste quantità possano essere espresse con delle serie, rende queste ultime un sostituto delle funzioni, di cui, per così dire, assumono la rappresentanza. (Giusti, 1988).

8.3 Analogie e differenze tra il calcolo leibniziano e quello Newtoniano. Analogie: è sufficiente sostituire le flussioni con i differenziali per ottenere il metodo di Leibniz per le tangenti.

Differenze: la formulazione leibniziana del calcolo opera una vera e propria rivoluzione epistemologica con l'introduzione di quantità evanescenti, con la formulazione newtoniana si resta nell'ambito delle quantità finite (almeno in apparenza), le velocità.

I due problemi classici del calcolo infinitesimale, le **tangenti** e le **quadrature**, assumono un'importanza diversa nell'opera dei due grandi scienziati. Per Newton l'aspetto principale del calcolo è quello legato agli sviluppi in serie i quali appartengono all'ambito dei problemi di quadratura, mentre per Leibniz l'aspetto nodale è quello legato alla differenziazione che risolve il problema delle tangenti.

9. Fuga in avanti. Le vivaci controversie tra Newton e Leibniz sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale spingono i matematici dell'epoca a schierarsi in due opposte fazioni, o potremmo dire, in due scuole: quella inglese e quella continentale.

La scuola inglese: • Berkeley George (1684-1753); • Mac Laurin Colin (1698-1746); allievo di Newton. Scrisse il trattato "Treatise of Fluxions" nel quale compare la formula dello sviluppo in serie di una funzione. • Taylor Brook (1685-1731). Tale scuola tenta con tenacia di chiarire le nozioni che servono da base al metodo delle flussioni, di eliminare le difficoltà filosofiche legate all'ambiguità dello status degli elementi infinitesimi, talvolta nulli, talvolta inassegnabili, sovente confusi con le flussioni e giudicati inconciliabili con l'intuizione geometrica, alla quale gli analisti inglesi danno la preminenza. Gli interventi in questo senso sono talvolta molto duri e polemici, come, in particolare, quello di Berkeley che nel 1734 (mentre è vescovo a Cleyne) pubblica un'opera nella quale tenta di dimostrare che il calcolo newtoniano conduce a verità solo grazie a una compensazione di errori: chi crede in tale calcolo è quindi un miscredente.

La scuola continentale (i Bernoulli e i Bernoulliani) si caratterizza piuttosto per una tendenza a legare il calcolo differenziale all'idea di funzione che con Eulero (1707-1783) diventa un concetto fondamentale in matematica.

La compattezza delle nozioni leibniziane, l'efficacia dei suoi algoritmi favoriscono, sotto l'impulso del punto di vista formalista di Eulero, uno sviluppo quasi automatico del calcolo differenziale anche se i matematici fanno talvolta ancora appello alla filosofia per giustificare la nozione di infinitesimo. Il calcolo differenziale si diffonde rapidamente, grazie in parte alla vasta corrispondenza di Leibniz con i suoi contemporanei (i Bernoulli in particolare).

La matematizzazione progressiva della fisica, l'uso del calcolo infinitesimale nell'analisi dei fenomeni naturali, sono all'origine del fiorire di nuove branche della matematica: • lo studio di fenomeni meccanici e fisici si traducono in generale in equazioni differenziali, la cui integrazione sarà l'oggetto di un nuovo ambito dell'analisi; • la matematizzazione della meccanica, dell'idrodinamica e della teoria dell'elasticità è l'impulso principale allo sviluppo del calcolo delle variazioni; • lo studio delle curve e delle superfici necessita di tecniche differenziali che sono all'origine della geometria differenziale.

Tutte queste branche si dipartono da un tronco comune: il calcolo infinitesimale ed il suo sviluppo costituirà l'oggetto delle ricerche matematiche del XVIII secolo. Il calcolo si amplia tramite il ramificarsi delle sue applicazioni, ma la difficoltà di definirne le nozioni fondamentali rimane. Quasi tutti i matematici di questo secolo provano a superare tali difficoltà, ma i loro tentativi rimarranno vani. Uno dei punti del calcolo infinitesimale soggetto alle critiche più violente è quello sulla natura degli "infinitamente piccoli". I matematici del XVII secolo cercano di legittimare l'esistenza di tali quantità "evanescenti" mediante considerazioni metafisiche. Leonardo Eulero, che è il matematico dominante del secolo, rigetta però la metafisica nonché la geometria, come base del nuovo calcolo. Agli inizi del XIX secolo, il desiderio di basare la matematica su fondamenti solidi diventa quasi generale e la necessità di mettere in chiaro i concetti basilari dell'analisi si fa pressante. Gli analisti riconoscono i meriti, in tal senso, delle idee lagrangiane³. Benché lo sviluppo delle funzioni in serie di Taylor sia generalmente rigettata come base del calcolo differenziale e integrale, il trattato di Lagrange contribuisce a fare, insieme ai lavori di Eulero, della funzione il concetto centrale del calcolo. I matematici si interrogano sulla natura delle funzioni in generale e delle funzioni continue in particolare. Il logico e matematico di Praga Bernard Bolzano (1781-1848) ha per primo una concezione chiara delle nozioni di base del calcolo infinitesimale (continuità, legame tra continuità e derivabilità) ma i suoi lavori passano inosservati per mezzo secolo.

³ Per considerazioni relative all'importante apporto allo sviluppo dell'analisi non solo da parte di Eulero, ma anche di D'Alembert, Lagrange e Fourier si fa riferimento alla conferenza di Umberto Bottazzini.

È il matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789-1857) che sarà il principale artefice dell'introduzione del rigore nel calcolo infinitesimale.

10. Augustin Louis Cauchy. Nasce a Parigi nel 1789 e studia all'École Polytechnique e all'École des Ponts et Chaussées.

Dopo aver iniziato la carriera di ingegnere a Cherbourg, nel 1813 torna a Parigi e dal 1815 insegna all'École Polytechnique. Nel 1816 viene nominato socio all'Accademia delle Scienze, al posto di G. Monge che si era rifiutato di giurare fedeltà a Luigi XVIII. Insegna anche al Collège de France e alla Sorbona. A seguito della Rivoluzione del luglio 1830, Cauchy lascia volontariamente la Francia per trasferirsi, in un primo momento a Torino e poi a Praga, dove è precettore del Duca di Borgogna, nipote di Carlo X. Tornato a Parigi nel 1838, dal 1848 ottiene nuovamente una cattedra alla Sorbona. Muore nel 1857.

Opere principali: • Cours d'analyse (1821); • Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal (1823); • Leçons sur le calcul différentiel (1829).

Il concetto di limite appare come fondamentale. La sua definizione, che riprende l'idea di D'Alembert, rompe definitivamente con la concezione geometrica che era ancora soggiacente. Fa del limite un concetto aritmetico: *"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres"*. [Quando i valori successivamente attribuiti ad una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fisso, in modo che ne differiscano poco quanto si vuole, quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri.]

"On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. [Si dice che una quantità variabile diviene infinitamente piccola quando il suo valore numerico decresce indefinitamente fino a convergere verso il limite zero]. Alla luce dei concetti di limite, di variabilità e di funzione, Cauchy chiarisce la nozione di infinitamente piccolo che non è altro che una successione convergente avente zero come limite. La derivata di una funzione continua $y = f(x)$ è definita anch'essa in termini di limite. È il limite, quando esiste, del rapporto

delle differenze $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ quando i si avvicina al limite zero.

Sappiamo che una funzione derivabile in un punto è ivi continua, ma che l'inverso non è vero. Il legame fra continuità e derivabilità non verrà esplicitato nei lavori di Cauchy. Il problema non sarà chiaramente formulato se non a partire dalla memoria di Dirichlet (1829) sullo sviluppo delle funzioni trigonometriche. Dopo aver definito la derivata,

Cauchy stabilisce il suo legame con i differenziali di Leibniz: se dx è una quantità finita qualunque, il differenziale dy di una funzione $y = f(x)$ sarà semplicemente $f'(x) dx$. Le quantità dx e dy sono dunque definite mediante la sola proprietà di avere un rapporto uguale alla derivata $f'(x)$.

10.1. Una prima teoria dell'integrazione. Newton e Leibniz avevano elaborato due concezioni differenti di integrale. Quella di Newton aveva soprattutto fatto uso dell'integrale indefinito e considera l'integrazione come operazione inversa della differenziazione. Questo punto di vista aveva prevalso nel corso di tutto il XVIII secolo. Leibniz aveva interpretato le aree e i volumi come somme di rettangoli e di cilindri, ciò che aveva portato ad utilizzare l'integrale definito. Cauchy, che darà per primo una definizione precisa di integrale (1823), aderirà a questa seconda concezione. Cauchy sottolinea la necessità di dimostrare l'esistenza degli integrali "prima di far conoscere le loro diverse proprietà". Il suo punto di partenza è una funzione f reale, continua in un intervallo $[x_0, x]$. Gli elementi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ dell'intervallo lo suddividono in n sotto-intervalli. Cauchy forma allora la somma:

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

poi dimostra che il limite di S , quando la lunghezza del più grande dei sotto-intervalli tende a zero, esiste [la dimostrazione rigorosa esige la nozione di uniforme continuità, che Cauchy non possedeva]. Ma una funzione reale continua in $[a, b]$, a e b reali, è uniformemente continua in $[a, b]$, se f è continua in $[x_0, x]$, "*limite qui dépendra uniquement de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, x attribuées à la variable x . Cette limite est ce qu'on appelle une intégrale définitive*". Utilizza la notazione $\int_{x_0}^x f(x) dx$, "*imaginée par M. Fourier*". Cauchy definisce

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \text{ dove } x \text{ appartiene all'intervallo } [x_0, x] \text{ e mostra che}$$

$$F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \text{ dell'intervallo } [x_0, x].$$

Questa proposizione stabilisce il legame tra l'integrazione e la derivazione ed è dunque ancora in Cauchy che troviamo una prima dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo infinitesimale. Nel 1823, in una memoria sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, Cauchy scriveva: "*In questa memoria consideriamo ogni integrale definito come la somma dei valori*

indefinitamente piccoli delle espressioni differenziali poste sotto $\int$, che corrispondono ai diversi valori della variabile compresi tra i limiti in

questione. Se adottiamo questa maniera di considerare gli integrali definiti proviamo facilmente che ogni siffatto integrale ha un unico valore finito ogni volta che, essendo i due limiti della variabile finiti, l'integranda si mantiene finita e continua tra questi limiti". In un poscritto a quella memoria, egli osservava: *"Noi siamo naturalmente portati dalla teoria delle quadrature a considerare ogni integrale definito, preso tra due limiti reali, come la somma dei valori infinitesimi*

della espressione differenziale sotto il segno $\int$ che corrispondono ai diversi valori reali della variabile che sono compresi tra i limiti in questione.

Ora a me sembra che questo modo di considerare un integrale definito debba essere preferibilmente adottato ... perché è ugualmente adatto, in ogni caso, anche a quelli in cui non possiamo generalmente

passare dalla funzione sotto il segno $\int$ alla funzione primitiva ... "

Con Cauchy si ha il momento di svolta, dal considerare l'integrazione come operazione inversa della derivazione verso una moderna teoria della misura, dove l'oggetto primario di interesse è l'integrale.

Rendendo rigorosa l'originaria concezione di Leibniz dell'integrale come somma di elementi infinitesimi, Cauchy si allontana in modo netto dalla pratica allora usuale di assumere in primo luogo l'esistenza dell'integrale indefinito e, da questo, far discendere l'integrale definito, secondo la formula classica:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ dove } F'(x) = f(x).$$

Egli dice: *"è sembrato necessario dimostrare generalmente l'esistenza degli integrali o funzioni primitive prima di far conoscere le loro diverse proprietà. A questo scopo si è reso indispensabile anzitutto stabilire la nozione di integrale preso entro limiti dati o integrale definito".* Nella trattazione dell'integrazione Cauchy non si limita a considerare l'integrale come l'inverso della derivata, ma al contrario lo definisce in maniera indipendente, salvo poi confrontare tra loro le due operazioni.

Con l'introduzione di questo nuovo punto di vista, il teorema fondamentale del calcolo integrale, che nella teoria di Leibniz e Newton serviva essenzialmente per la definizione di integrale, assume ora il ruolo di un vero teorema, in quanto asserisce che le due operazioni di integrazione e derivazione, definite indipendentemente, sono (a meno di costanti additive) l'una l'inversa dell'altra. Un serio inconveniente della definizione di integrale di Cauchy è che esso vale solo per le funzioni continue, una limitazione particolarmente grave per la trattazione delle serie di Fourier. È proprio questa la ragione che spinge Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) a definire l'integrale per arbitrarie funzioni limitate.

11. L'arimetizzazione dell'analisi. Col tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) la ricerca del rigore intrapresa da Cauchy si spinge ancora più lontano. Interrogandosi sul senso da annettere ad un'espressione quale «una variabile si avvicina indefinitamente ad un valore dato», che suggerisce il tempo e il movimento, egli cerca di tradurla in espressione aritmetica. Arriva in tal modo alla definizione in termini di ε e δ della variazione infinitamente piccola della variabile e della funzione: «Se è possibile determinare un intorno δ tale che, per tutti i valori di h minori in valore assoluto di δ , $f(x + h) - f(x)$ sia minore di una quantità ε , piccola quanto si vuole, allora si dirà che si è fatto corrispondere ad una variazione infinitamente piccola della variabile una variazione infinitamente piccola della funzione». Ne derivano immediatamente le definizioni moderne di limite e di continuità. Per chiarire i metodi dell'analisi, Weierstrass preconizza l'introduzione di un formalismo aritmetico, di cui, peraltro, mancano ancora i fondamenti logici. E' Weierstrass stesso che cerca la via per porre rimedio a tale carenza. La sua costruzione dei numeri reali che si situa intorno al 1863 non resta isolata; l'anno 1872 vede la pubblicazione dei risultati in questo campo di Georg Cantor (1845-1918), di Eduard Heine (1821-1881) e di Richard Dedekind (1831-1916).

Fra i contributi di Weierstrass al programma di arimetizzazione dell'analisi si conta, oltre ad una definizione soddisfacente del concetto di numero reale, anche un perfezionamento della definizione del concetto di limite. La concezione di Cauchy faceva infatti uso di espressioni come "valori successivi" o "avvicinarsi indefinitamente" o "così piccolo quanto si vuole". Per quanto suggestive e pedagogicamente convincenti, queste definizioni sono, però, prive di rigore. Nelle sue lezioni, Weierstrass poneva l'accento su quella che alcuni hanno definito la "teoria statica della variabile". Heine, nei suoi *Elemente* del 1872, che risentono dell'influenza delle lezioni di Weierstrass, definisce il limite della funzione $f(x)$ nel punto x_0 nel modo seguente: "Se, data una qualsiasi grandezza ε , esiste un η_0 tale che per $0 < \eta < \eta_0$ la differenza $f(x_0 \pm \eta) - L$ è minore di ε in valore assoluto, allora L è il limite di $f(x)$ per $x = x_0$ ".

In questa fredda e precisa definizione non viene fatto alcun cenno a entità che 'fluiscono', non vi è alcun ricorso a punti e linee in movimento, né si parla di quantità che diventano infinitamente piccole. Tale definizione non contiene altro che numeri reali, oltre all'operazione di addizione (e all'operazione reciproca di sottrazione) e alla relazione "minore di". Il linguaggio e il simbolismo non equivoci di Weierstrass e di Heine estromettono dal calcolo infinitesimale la nozione di variabilità.

12. Riferimenti bibliografici

- Barbin, E., 1987, *Heuristique et démonstration en mathématiques*, in *Fragments d'histoire des mathématiques*, n. 2, A.P.M.E.P.
- Bos, H. J. M., 1974 *differentials*, *Higher-Order Differentials and the Derivatives in the Leibnizian Calculus*, *Archive for History of Exact Sciences*, 14.
- Bottazzini, U., 1981, *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Boringhieri, Torino.
- Bottazzini, U., Freguglia, P., L. Toti Rigatelli, 1992, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
- Boyer, C. B., 1980, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.
- Dahan- Dalmedico, A., Peiffer, J., 1987, *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Editions du Seuil.
- Dupont, P., Roero, C. S., 1983, *Leibniz 1684*, Quaderno n. 56, Università di Torino.
- Giusti, E., 1986, *Teoria delle proporzioni e numeri reali*, in *Argomenti di Storia della Scienza: Matematica e Fisica*; Quaderno CNR, Pavia, 3-31.
- Giusti, E., (1988), *Il calcolo infinitesimale tra Leibniz e Newton*, *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino*, Vol. 46, 1.
- Grugnetti, L., (1988), *The Role of the History of Mathematics in an Interdisciplinary Approach to Mathematics Teaching*, *Atti del primo simposio bilaterale italo-tedesco sulla didattica della matematica*, editi da Bazzini L. & Steiner H. G., pp. 9-23.
- Koyré, A., 1973, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Gallimard, .
- Lombardo Radice, L. & Mancini Proia, L., *Il metodo matematico*,
- Pepe, L., (1990), *Storia e Didattica della matematica*, *L'Educazione Matematica*, Suppl. al n. 2, Anno XI, Serie III, vol. 1, pp. 23-33.
- Sitia, C., (1983), *Storia, epistemologia e didattica della matematica*, *L'Educazione Matematica*, Suppl. IV - 1, pp. 3-18.
- Collection maths pour tous, (1993), *La magie du Calcul*, vol. 4, Paris..
- IREM, (1990), *Mathématiques: approche par des textes historique* (tomo 2), Univ.- Paris VII.
- Maths & malices (le magazine de mathématiques pour tous, (1991), n. 1, a cura di A. Deledicq, ACL-Editions, Paris.
- Speranza, F., *I fondamenti epistemologici della matematica*, Congresso MATHESIS, Verona, 28 novembre 1996, (in stampa).
- Weil, A., 1978, *History of Mathematics: why and how*, in *Proc. of the International Congress of Mathematicians, Helsinki I*, 227-236.

METODI ELEMENTARI PER LA SOLUZIONE DI PROBLEMI DI MINIMO

Brunetto Piochi

Dipartimento di Matematica dell'Università, via del Capitano 15, 53100 Siena

La proposta di “apprendimento per problemi” appare come un atteggiamento didattico consolidato per quanto riguarda il lavoro matematico con gli alunni della scuola dell’obbligo. Essa fa ormai parte della prassi didattica ed è anche esplicitamente richiamata nei programmi della scuola elementare; in [2] si è anche motivata l’affermazione che questa possa essere una strada maestra per l’insegnamento della matematica ad allievi con difficoltà di apprendimento (la posizione è stata del resto fortemente supportata da molte delle comunicazioni effettuate al convegno Matematica e Difficoltà dedicato a questo argomento, [4]).

Nella scuola secondaria tale metodologia è meno diffusa, per vari motivi; fra questi la convinzione di una non immediata applicabilità degli argomenti insegnati, dovuta al fatto che la maggior parte dei problemi interessanti coinvolgono tecniche matematiche almeno al livello di derivate e integrali, e questi sono affrontati (e non in tutti i tipi di scuola) solo al termine del ciclo di studi.

Eppure anche nella scuola secondaria ci si confronta con allievi che presentano difficoltà di apprendimento in vario grado; ebbene, da una ricerca attualmente in corso sembra emergere come uno dei fattori che discriminano gli alunni con un buon rendimento da quelli con un rendimento basso sia la convinzione sul rapporto fra matematica e realtà (anche se i dati sono tuttora parziali, tuttavia nei test elaborati finora la percentuale di coloro che ritengono che “la matematica ha poco a che fare con la realtà” è inferiore al 25% fra i primi e sale a oltre il 50% nei secondi).

Diventa allora di estremo interesse ricercare dei problemi che possano essere stimolanti per degli adolescenti e che li motivino ad apprendimenti significativi. Secondo le indicazioni che ci vengono dalla psicologia infatti un problema nasce in presenza di una motivazione e di un ostacolo (Kanitz) da cui nasce l’esigenza di fermarsi a riflettere, sviluppando le vie di soluzione (Dewey) che permettano di superare l’ostacolo.

Alcuni libri di testo attualmente in adozione propongono su questa linea l’approccio a problemi di programmazione lineare, che hanno anche l’indubbio vantaggio di offrire una significativa “palestra” per l’apprendimento e l’uso di

tecniche relative allo studio dei parametri nelle equazioni, mediante il disegno di grafici di rette (ma non soltanto, poiché in alcuni casi si fanno intervenire anche curve diverse).

Un altro settore interessante è certamente quello dei problemi di massimo e minimo; si tratta in gran parte di problemi “storici” su cui esistono soluzioni algebriche molto belle (si veda [3]) che hanno anche una significativa interpretazione geometrica elementare (storicamente anzi sono spesso nate da quest’ultima) ma forse poco significative per il discorso che stiamo sviluppando, in quanto molto formali ed astratte. Problemi di massimo e minimo si prestano tuttavia bene ad essere presentati agli alunni di una scuola secondaria, all’interno di una proposta didattica che parta dalla realtà; sorge allora la necessità di trovare modi per la ricerca degli estremi di una funzione, diversi da quelli classici basati sull’uso delle derivate o dello studio di quadriche, in quanto il primo viene trattato (e non sempre) al termine del ciclo degli studi secondari, ed il secondo addirittura non viene affrontato. Esistono problemi, di indubbio interesse per le applicazioni, i quali sono risolvibili anche con tecniche elementari; mediante questi si può tentare di coinvolgere anche gli alunni della scuola secondaria in una ricerca matematica reale. Ne voglio qui proporre tre esempi, tratti da [1] e da [5]

Problema A *“Una tipografia deve stampare dei fogli di simboli, in cui il testo occupa un’area rettangolare W (da disporre a piacere, in quanto priva di direzioni privilegiate). Conoscendo i margini da lasciare in alto, in basso, a destra e a sinistra, si determinino le dimensioni ottimali del foglio per minimizzare l’impiego di carta”.*

Problema B *“Si determinino le proporzioni fra le dimensioni di una lattina cilindrica, in modo che risulti minimo il consumo di metallo, a parità di volume V di contenuto”.*

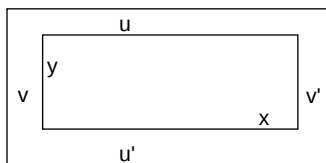
Problema C *“Si deve costruire un oleodotto che porti il petrolio da una piattaforma A in mezzo al mare ad un porto B sulla costa. Sapendo che le spese di costruzione sono pari a N \$/m sulla terraferma ed M \$/m in mare, si determini il percorso di minor costo”.*

Tutti questi problemi conducono alla ricerca del minimo di una funzione $y=F(x)$; tale minimo è immediatamente calcolabile con l’uso delle derivate. Supponiamo però di non aver ancora introdotto tale strumento matematico e cerchiamo una soluzione per via elementare, in particolare per via algebrica o

analitica, poiché ancora una volta la via geometrica (si veda in [1] una via di questo tipo per la soluzione del problema C) risulterebbe astratta, mentre le altre ci permettono di conservare, come vedremo, una interessante aderenza alla situazione considerata.

A mio parere, i vari metodi qui presentati hanno il vantaggio di richiamare costantemente lo studente alla necessità di applicare in modo corretto le diverse definizioni, guidandolo ad un ragionamento che ha tutte le caratteristiche di una dimostrazione applicata ad un caso reale. È proprio la “trasparenza” di questi metodi che a mio avviso li rende preferibili (nel senso fin qui richiamato, naturalmente) ad altri più sintetici, quali sono ad es. quelli esposti in [3], da cui pure si possono ricavare con notevole eleganza i risultati che seguono.

Problema A



La superficie stampata risulta pari a

$$\begin{aligned} S &= (x + v + v')(y + u + u') = xy + x(u + u') + y(v + v') + (u + u')(v + v') = \\ &= x(u + u') + \frac{W}{x}(v + v') + W + (u + u')(v + v') \end{aligned}$$

La funzione da minimizzare risulta pertanto del tipo $F(x) = ax + b/x$ (dove $a, b > 0$). Questo problema permette una soluzione per via algebrica ed una per via analitica.

Posto $F(x) = z$, l'equazione $z = ax + b/x$, cioè $ax^2 - zx + b = 0$, è risolvibile rispetto a x (cioè permette di realizzare il foglio desiderato) se il discriminante $z^2 - 4ab$ è positivo o nullo, cioè (poiché $z \geq 0$) se $z = 2\sqrt{ab} = F(x)$.

Questo valore minimo della funzione corrisponde a $x = \frac{z}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

Un approccio forse più proficuo per lo studente può venire da considerazioni sul grafico della funzione $F(x)$, vista come somma (per $x > 0$) della retta $y = ax$ e dell'iperbole equilatera $y = b/x$. È “ragionevole” aspettarsi che il minimo della somma lo si trovi nel punto di incontro, dove ciascuna delle due funzioni for-

nisce un “contributo piccolo” al totale.

Tale intuizione viene effettivamente confermata da un semplice calcolo, notando che per $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ (soluzione positiva di $ax=b/x$) si ha

$$F(x) = 2\sqrt{ab} \text{ e davvero } F(x) - 2\sqrt{ab} = ax + \frac{b}{x} - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{ax} - \sqrt{\frac{b}{x}})^2 \geq 0, \forall x > 0.$$

Problema B

Si indichi con x il raggio di base del cilindro, di volume noto V , e sia h la sua altezza. L'area della superficie totale sarà pari a:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + 2\frac{V}{x}$$

e dunque dovremo minimizzare una funzione del tipo: $F(x) = ax^2 + b/x$ ($a, b > 0$).

Qui i metodi indicati per il problema precedente non funzionano; risulta però estremamente istruttivo l'esame dell'analogo meccanismo di geometria analitica, alla ricerca del “perché” esso non funziona, nonostante in modo altrettanto “ragionevole” si possa dedurre che un punto di minimo per la nostra funzione deve esistere: la somma delle due funzioni infatti decresce in un “intorno” del punto di intersezione, per poi tornare a crescere indefinitamente; tuttavia un semplice calcolo mostra che il punto di intersezione non è il punto di minimo cercato. L'intuizione dell'esistenza del punto di minimo tuttavia ci può portare alla soluzione effettiva, con il semplice aiuto del metodo di scomposizione secondo Ruffini.

Sia infatti t il valore della x corrispondente al minimo e sia $F(t)$ ($=at^2+b/t$) il valore della funzione in tale punto; dovrà allora essere $F(x)=ax^2 + b/x \geq F(t)$, ovvero $ax^3 - xF(t) + b \geq 0$ per ogni x (>0).

Poiché per definizione $ax^3 - xF(t) + b = 0$ per $x = t$, allora $x - t$ dovrà dividere il trinomio $ax^3 - xF(t) + b$. Scomponendo mediante il metodo di Ruffini otterremo:

$$ax^3 - xF(t) + b = (x - t)(ax^2 + atx - F(t) + at^2).$$

Ora, se il secondo fattore non fosse divisibile per $(x - t)$, il trinomio dato non potrebbe essere sempre ≥ 0 . Perciò t deve essere anche soluzione di

$$ax^2 + atx - F(t) + at^2 = 0, \text{ cioè dovrà essere } 3at^2 = F(t) (=at^2 + b/t) \text{ da cui } t = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}.$$

Per tale valore di t si ottiene infatti

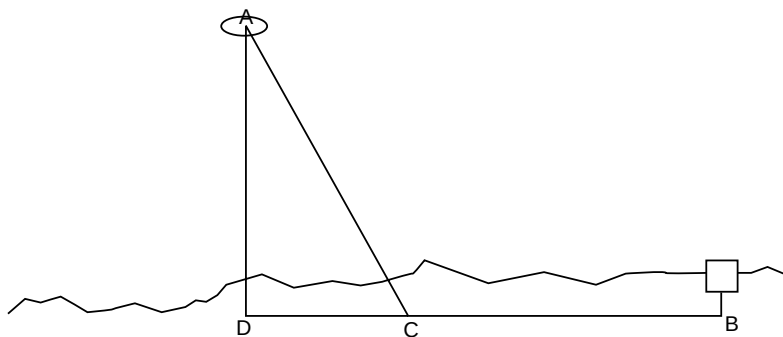
$ax^3 - xF(t) + b = (x - t)(ax^2 + atx - F(t) + at^2) = (x - t)^2 (ax + 2at) \geq 0$ per ogni x positiva.

(Il metodo qui proposto è generalizzabile senza difficoltà alla ricerca del minimo di una funzione $F(x) = ax^n + b/x^m$, con $a, b > 0$ ed m, n interi positivi).

Sostituendo i valori del problema alle costanti a e b , si ricava che la superficie totale del cilindro è minima quando il raggio di base x è pari a $\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}$, ovvero quando l'altezza è uguale al diametro di base.

Questa scoperta può facilmente prestarsi a considerazioni sulle forme dei contenitori più comuni in commercio, confrontando una lattina di bibita, per cui si preferisce privilegiare la forma anatomicamente più maneggevole, ed un barattolo di pomodori pelati, per cui invece la forma segue la formula di ottimizzazione trovata per via teorica.

Problema C



Se $AD = h$, $DB = g$, posto $DC = x$, il percorso $AC + CB$ avrà un costo pari a:

$$S = M\sqrt{h^2 + x^2} + N(g - x).$$

Minimizzare il costo significa precisamente minimizzare una funzione del tipo:

$$y = \sqrt{h^2 + x^2} - kx \quad (*).$$

In [1] abbiamo considerato questo problema proponendone anche una soluzione per via geometrica elementare, che coinvolge l'uso di un "modello" geometrico che interpreta le grandezze in gioco come lunghezze e aree di opportu-

ni parallelogrammi, sviluppando quindi alcune considerazioni a partire dai criteri di equivalenza fra questi ultimi. Tuttavia la ricerca del minimo per tale classe di funzioni si presta anche ad uno studio per via algebrica o per via analitica.

Per quanto riguarda la via algebrica, in [1] sono proposte due diverse strade; di queste, una (che segue l'analoga proposta per la soluzione del Problema A) mi sembra essere particolarmente interessante poiché presenta una applicazione concreta della tecnica di discussione delle equazioni irrazionali.

Osserviamo anzitutto che (dovendo essere $x > 0$ e $k > 0$), la ricerca del minimo per la funzione ha un senso se $k \leq 1$ (da cui segue facilmente $y > 0$).

Altrimenti si prova facilmente che y assume valori positivi solo per $x \leq \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$, mentre al crescere della x , la y assume valori negativi sempre crescenti in valore assoluto (come è facile verificare con un semplice esame della disuguaglianza coinvolta) e pertanto il minimo non può esistere. Si noti come questa informazione su k corrisponda nel nostro problema alla ovvia supposizione che il costo per la posa di un tratto di oleodotto in mare è superiore a quello della posa di un tratto corrispondente sulla terraferma, mentre nel caso opposto si avrebbe addirittura un costo "negativo".

Ciò detto, si trasformi la funzione (*) in equazione e la si razionalizzi, in modo da ottenere: $x^2(k^2 - 1) + 2kxy + y^2 - h^2 = 0$, che risolveremo rispetto ad x . Dovendo essere x reale, il discriminante di tale equazione dovrà essere positivo o nullo, il che è vero (ricordando che $y > 0$) solo per $y \geq h\sqrt{1 - k^2}$. Ne segue che tale valore di y rappresenta il minimo valore possibile per la funzione ed esso (annullando il discriminante) corrisponde al valore cercato della variabile $x = \frac{ky}{1 - k^2} = \frac{kh}{\sqrt{1 - k^2}}$, ascissa del punto di minimo per la nostra funzione.

Assai interessante è comunque ancora una volta la via grafica alla ricerca del minimo. La funzione (*) può essere vista come la misura della distanza fra un ramo della iperbole equilatera $y^2 - x^2 = h^2$ e la retta $y = kx$. Di nuovo è immediato dedurre che, perché abbia senso la ricerca del minimo per tale distanza, deve essere $k \leq 1$ (1 è precisamente il coefficiente angolare dell'asintoto destro dell'iperbole); in questo caso la distanza sarà minima nel punto di contatto fra il ramo di iperbole e la retta di coefficiente angolare k e tangente all'iperbole stessa. Un semplice calcolo permette di nuovo di trovare il valore di x corrispondente.

Bibliografia

- [1] R. Bianchi, B. Piochi - Una via geometrica elementare per la ricerca del minimo su una famiglia di funzioni, *Archimede*, Fasc. 1, 1992, pp. 30-35
- [2] A. Contardi, M. Pertichino, B. Piochi, Apprendimento della matematica: insegnamento per problemi e alunni con handicap, *Psicologia e Scuola*, 71 (XV) (1994), pp. 3-8
- [3] D. Palladino - Massimi e minimi per via elementare, *Nuova secondaria*, vol V (5), 1988, pp. 67-69
- [4] AA.VV., *Problemi e alunni con problemi*, Pitagora Ed., Bologna 1997
- [5] B. Piochi - Problemi di minimo risolvibili con metodi elementari, in B. Micale e G. Pluchino (a cura di), *Atti XV Convegno sull'insegnamento della matematica: Aritmetica, informatica, logica nell'educazione matematica*, Grosseto, 29-31 ottobre 1992, Notiziario Unione Matematica Italiana, suppl. n. 5, maggio 1993, pp. 137-140

DEFINIZIONI DI CONTINUITÀ

Umberto Bottazzini

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, via Archirafi 34 - I - 90123 Palermo e
Centro Linceo Interdisciplinare 'B. Segre', Accademia dei Lincei, via della Lungara 10
I - 00165 Roma

1. “La continuità è ancora un’idea confusa, afferma Kronecker, che definisce in iscuola come continua una funzione reale $\phi(x)$ d’una variabile x quando, fissata una quantità δ piccola quanto si vuole, si possa rendere

$$\phi(x) - \phi(x') < \delta$$

e questa disuguaglianza sussista poi ponendo in luogo di x' qualunque altro valore che più di esso si accosti a x ” (Bottazzini [1981], 216).

Così, con la sbrigatività di un appunto, nell’autunno del 1864 Felice Casorati annota il contenuto di una conversazione con il matematico di Berlino Leopold Kronecker. In particolare, confusi sono i rapporti tra continuità e derivabilità. “Ma è necessario perché una funzione s’abbia a dire continua, - chiede infatti Casorati - che

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\phi(x) - \phi(x')}{x - x'}$$

sia finito?” In altri termini, la derivabilità è una condizione necessaria per la continuità? E’ dunque vero il ‘teorema di Ampère’, che una funzione continua è sempre derivabile (salvo al più in punti ‘eccezionali’)?

Casorati non è matematico di secondo piano, è uno dei protagonisti del grande sviluppo che la matematica italiana conosce nella seconda metà del secolo scorso. Tanto più significativi sono dunque i dubbi e le questioni che emergono nei suoi incontri coi matematici berlinesi, con Kronecker e con Weierstrass, poiché rivelano quanto precari fossero, ancora in quegli anni, concetti fondamentali in analisi come quello di continuità. Un concetto di cui abbiamo evidenza immediata e intuitiva. Ma forse proprio per questo riesce così difficile darne una definizione rigorosa, libera da circoli viziosi, che non faccia implicitamente appello

al concetto da definire, come invece avveniva in molti dei manuali e degli articoli pubblicati fin verso la metà dell'Ottocento.

Nel suo monumentale *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* in tre volumi (1797-1800), la cui terza ristampa era apparsa nel 1837, Lacroix (1837, I, 88) per esempio aveva definito *legge di continuità* “quella che si osserva nella descrizione delle linee mediante il movimento e secondo cui i punti consecutivi di una stessa linea si succedono senza alcun intervallo”.

Né molto più rigorosa era la definizione data nello stesso anno da Dirichlet, in un celebre articolo sulla convergenza delle serie di Fourier. “Si pensino con a e b due valori fissati e con x una grandezza variabile che debba assumere gradatamente (*nach und nach*) tutti i valori che giacciono tra a e b . Ora, se ad ogni x corrisponde un unico y finito e tale che, mentre x percorre con continuità (*stetig*) l'intervallo da a a b , $y = f(x)$ vari in maniera altrettanto graduale, allora y si dice una funzione continua (*stetig*) di x su questo intervallo” (Dirichlet 1837, 135).

Dopo aver precisato che non era affatto necessario che la dipendenza di y da x fosse data da una stessa legge su tutto l'intervallo e neppure che fosse esprimibile mediante operazione matematiche, Dirichlet faceva appello all'immagine di una curva connessa (*zusammenhängende*) per fornire un'interpretazione geometrica del concetto di continuità di una funzione.

2. Per chiarire il senso delle precisazioni di Dirichlet occorre ricordare che, ancora nei primi decenni dell'Ottocento, la nozione di continuità largamente accettata era quella che Euler aveva definito nel 1748, nell'*Introductio in analysin infinitorum*.

Nel secondo volume di quel trattato Euler aveva associato l'idea di continuità di una funzione a quella di una curva. Giacché le curve sono “il risultato di funzioni”, scriveva Euler, la “natura” di una linea curva sarà determinata dalla funzione che la definisce. Ora, una linea curva continua “è quella la cui natura è espressa da una sola funzione determinata della x ”. “Discontinua” o “mista” o “irregolare” è invece, per Euler, una curva composta da differenti parti continue, determinate da più funzioni della x .

Dal punto di vista moderno, la classificazione euleriana sembra riconducibile alla distinzione tra curve (e funzioni) differenziabili e

curve (e funzioni) continue. Alle prime corrispondono le curve (le funzioni) continue secondo Euler, alle seconde quelle ‘discontinue’, ‘miste’ o ‘irregolari’. Per Euler la continuità è dunque una proprietà ‘globale’ di una funzione, una proprietà che ne denota la “natura” su tutto il dominio di esistenza.

Sorprendentemente, in questo panorama di continuità “globale” si affaccia un’idea “puntuale” della continuità in un passo della *Theorie des fonctions analytiques* (1797) di Lagrange passato spesso inosservato. Il punto di partenza della teoria lagrangiana era l’idea che ogni funzione $f(x)$ si può sviluppare in serie

$$f(x+i) = f(x) + ip + i^2q + i^3r + \dots$$

dove i è una indeterminata e $p, q, r, \dots$ sono funzioni di x “derivate” dalla funzione $f(x)$. Infatti, osserva Lagrange, in primo luogo $f(x+i) = f(x) + iP$ dove $P = P(x, i)$. Chiamata p la parte di P che non si annulla per $i = 0$, si ha $P = p + iQ$. Ragionando in maniera analoga si ottiene $Q = q + iR$ e così via, generando la serie di partenza dove i resti iP, iQ, iR etc sono uguali a zero per $i = 0$. Ne segue, osservava Lagrange (1797 [1813], 28) che “si può sempre prendere i abbastanza piccolo in modo tale che un termine qualunque [della serie] sia maggiore della somma di tutti i termini che lo seguono, e che ciò avvenga anche per tutti i valori più piccoli di i ”.

Nella dimostrazione di questa “proposizione fondamentale” Lagrange fa appello ad un’immagine geometrica, “considerando la curva di cui i sarà l’ascissa e una di queste funzioni [iP, iQ, iR , etc] l’ordinata”. Tale curva passa per l’origine e il suo andamento, afferma Lagrange, “sarà necessariamente continuo a partire da questo punto”. Il suo ragionamento si lascia immediatamente tradurre in termini moderni. Sia per es. $f(i) = iP$ la funzione considerata, continua nell’intorno dell’origine e tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $i (> 0, \text{ diciamo})$ tale che $f(i) < \varepsilon$ e, per ogni $j, 0 < j < i, f(j) < \varepsilon$. Questa era per Lagrange una conseguenza della continuità.

Anche se nella *Théorie* Lagrange non definisce cosa egli intenda per curva (o funzione) continua, nel passo citato egli non sembra avere in mente la continuità euleriana. e neppure l’idea - che sarà anche di Cauchy - che la continuità di una funzione esprime il fatto che ad una piccola variazione della variabile indipendente corrisponde una

variazione altrettanto piccola del valore assunto dalla funzione. Lagrange sembra piuttosto pensare a quella che oggi chiamiamo continuità puntuale di una funzione.

3. Fin dal 1817 nelle sue lezioni all'Ecole Polytechnique Cauchy aveva presentato ai suoi studenti la definizione di continuità di una funzione poi pubblicata nel *Cours d'analyse*. “Sia $f(x)$ una funzione della variabile x , e supponiamo che, per ogni valore di x compreso tra due limiti dati, questa funzione ammetta costantemente un unico valore finito. Se, partendo da un valore di x compreso tra questi limiti, si attribuisce alla variabile x un incremento infinitesimo α , la funzione stessa riceverà per incremento la differenza

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile α e dal valore di x . Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, tra i due limiti assegnati alla variabile x , funzione continua di questa variabile, se, per ogni valore di x compreso tra questi limiti, il valore numerico [assoluto] della differenza

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

decresce indefinitamente con quello di α ”.

O, “in altri termini”, nel linguaggio degli infinitesimi generalmente preferito da Cauchy, “la funzione $f(x)$ resterà continua rispetto ad x entro limiti dati, se, entro questi limiti, un incremento infinitesimo della variabile produce sempre un incremento infinitesimo della funzione stessa” (Cauchy 1821 [1992], 34-35).

L'interpretazione della definizione di Cauchy ha diviso le opinioni degli storici. L'analisi dell'uso che ne fa Cauchy e il confronto con il testo delle contemporanee lezioni tenute da Ampère, suo amico e collega all'Ecole Polytechnique, sembra legittimare una lettura in termini di continuità ‘uniforme’. Del resto, è quest'ultima la nozione che definisce ad esempio anche Riemann, in apertura della sua *Inauguraldissertation* (1851).

4. Il passo essenziale da compiere per uno studio rigoroso dei fenomeni della continuità è la definizione della continuità della retta. Questa, per Cauchy e ogni altro matematico del suo tempo, era semplicemente data, stava davanti agli occhi. Non c'era alcuna necessità di definirla. La definizione 'aritmetica' della continuità della retta (in altri termini, la costruzione del campo dei numeri reali) fu presentata da Weierstrass nelle sue lezioni prima ancora che Dedekind e Cantor la pubblicassero in due articoli contemporanei e indipendenti.

Come ebbe a dire Felix Klein, con la loro opera si affermò un nuovo modello di rigore, secondo una tendenza che lo stesso Klein propose di chiamare "aritmetizzazione della matematica". Se per Weierstrass la costruzione del campo reale rappresentava il fondamento 'aritmetico' dell'intero edificio dell'analisi (reale e complessa), per Dedekind e Cantor quella costruzione costituì invece, pur con prospettive diverse, il primo passo nello studio del problema dei fondamenti della matematica.

BIBLIOGRAFIA

BOTTAZZINI, U., *Il calcolo sublime. Storia della matematica da Euler a Weierstrass*, Boringhieri, Torino 1981

BOTTAZZINI, U., FREGUGLIA P., TOTI RIGATELLI, L., *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze 1992

CAUCHY, A.-L., *Cours d'analyse algebrique*, Paris 1821 [reprint CLUEB, Bologna 1992]

DIRICHLET, P.G.L., 'Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen', *Repertorium der Physik* (1837), 152-174 (= *Werke*, I, 133-160)

LAGRANGE, J.-L., *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797 [2ème ed. 1813 = *Œuvres de Lagrange*, IX)

PROPOSTE PER L'ESAME DI MATURITÀ E PER PROVE CONCLUSIVE DI ANALISI MATEMATICA

Parte dei lavori di gruppo che si sono svolti durante il Corso è stata dedicata alla valutazione finale dell'apprendimento dell'analisi matematica e alle prove di maturità. I corsisti hanno in primo luogo cercato di individuare gli obiettivi principali e gli obiettivi minimi da raggiungere, quindi hanno esaminato e confrontato le diverse possibili strutture di una prova finale (problemi con varie domande, dipendenti o indipendenti fra loro, oppure quesiti multipli, eventualmente a risposta chiusa), e hanno discusso i metodi di valutazione. Infine, ciascun corsista ha elaborato una proposta per una prova conclusiva di un corso di studi.

Riportiamo alcuni dei temi proposti, precisando che:

- i temi seguenti presentano strutture e tipologie diverse, anche perché sono stati pensati in relazione ai diversi ordini scolastici (Liceo Scientifico, Liceo Classico, Istituto Magistrale, Istituti Tecnici, Istituti Professionali);
- in alcuni casi, per motivi di spazio, è riportata solo una parte di un tema proposto;
- la difficoltà varia notevolmente da tema a tema: alcuni appaiono più semplici dei temi usualmente proposti alla maturità, altri decisamente più complessi; alcuni compiti possono forse risultare più adatti per una prova in corso d'anno, mentre altri possono essere ragionevolmente assegnati solo ad una classe che abbia seguito un particolare itinerario didattico;
- in alcuni casi la terminologia è discutibile, o diversa da quella adottata comunemente, ma, in generale, abbiamo preferito non modificarla; inoltre non sono state uniformate le notazioni (ad esempio l'abbreviazione per indicare i logaritmi);
- alcuni dei temi proposti si riferiscono ai programmi di ordinamento, altri ai programmi sperimentali (PNI e Brocca), mentre in qualche caso sono citati argomenti che non rientrano nei programmi né di ordinamento né sperimentali.

I temi riportati presentano molti spunti interessanti sia dal punto di vista matematico, sia sul piano didattico; ci auguriamo che, nella loro diversità, possano costituire un punto di riferimento concreto ed interessante per una discussione al riguardo.

1. Prova di Maturità per indirizzi Scientifici

In una circonferenza di diametro AB , la cui misura è uguale a 2, è data la corda AC tale che l'angolo $\hat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.

Si consideri nella semicirconferenza di estremi A e B , non contenente C , un'altra corda DE con E contenuto nell'arco AD , la cui misura sia uguale a 1.

- a) Dimostrare che il quadrilatero $ACDE$ è un trapezio le cui diagonali si incontrano formando un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$.
- b) Determinare il luogo geometrico descritto dal punto P intersezione delle diagonali, al variare della posizione della corda DE e scrivere la sua equazione con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali opportunamente scelto.
- c) Posto $\hat{DAB} = \alpha$, determinare in funzione di α il perimetro p del quadrilatero $ACDE$ e disegnare il grafico della funzione $p(\alpha)$.
- d) Esprimere poi il perimetro in funzione di $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ e disegnare il grafico della funzione $p(x)$.
- e) Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , determinare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = p(x)$, dall'asse delle x e dalle parallele all'asse delle y passanti per gli estremi dell'insieme di definizione.

2. Prova di Maturità per indirizzi Scientifici

- a) Studiare la funzione $f(x) = x - 2\ln|x|$ e disegnarne il grafico C insieme alla retta di equazione $y = x$. Trovare, tra l'altro, un'approssimazione (dell'ordine di $1/100$) dell'ascissa del punto di intersezione della curva C con l'asse x .

- b) Dimostrare che tutte le rette di equazione $y = x + k$ (con k reale qualsiasi) tagliano la curva C in due punti M ed N e trovare le coordinate di tali punti. Determinare il luogo geometrico dei punti descritto dal punto medio di MN al variare di k . Calcolare la lunghezza u_k del segmento MN .
- c) Quando k descrive l'insieme dei numeri naturali, le lunghezze u_k formano una successione di primo termine u_0 . Dimostrare che la successione è una progressione geometrica e ricavarne la ragione. Calcolare la somma $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$.

d) Calcolare

$$\int_1^m \ln x \, dx \quad \text{con } m > 1$$

e l'area $A(m)$ dell'insieme dei punti del piano tali che

$$1 \leq x \leq m$$

$$f(x) \leq y \leq x$$

Determinare infine il valore di m per cui $A(m) = 2$.

3. Prova conclusiva per Istituti Professionali

Sezione A (prova oggettiva)

1. Il dominio della funzione $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ è:

A) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

C) $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

D) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

2. La funzione $y = \frac{3x}{x-2}$ è continua in:

A) $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

B) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

C) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

D) $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

3. La funzione $y = \frac{2x^3 + 3}{x^3 + 8}$ non ha:

A) asintoti orizzontali

B) asintoti verticali

C) asintoti obliqui

D) asintoti di alcun tipo

4. La funzione $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ ha un asintoto di equazione:

A) $y = x$

B) $y = 2x$

C) $y = 2x + 2$

D) $y = x + 2$

5. Il valore dell'integrale indefinito $\int (x-3)^2 dx$ è:

A) $\frac{x^3}{3} + 9x + c$

B) $\frac{x^3 - 9x^2 + 27x}{3} + c$

C) $\frac{(x-3)^3}{3} + c$

D) $\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 9x + c$

6. Il valore medio della funzione $y = x^3 + 1$ nell'intervallo $[1, 2]$ è:

A) $\frac{19}{4}$

B) $\frac{15}{4}$

C) $\frac{23}{4}$

D) $\frac{27}{4}$

7. Data la funzione $y = -x^2 + 4x$ nell'intervallo $[0, 3]$

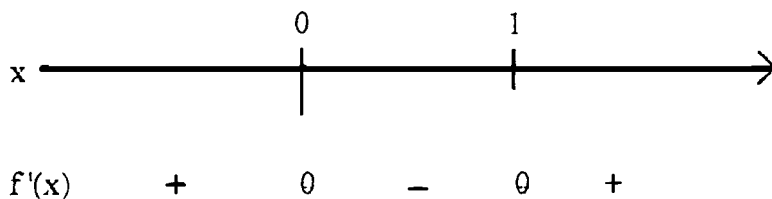
A) il punto $x = \frac{3}{2}$ soddisfa la tesi del teorema di Lagrange;

B) il punto $x = \frac{1}{2}$ soddisfa la tesi del teorema di Lagrange;

C) il punto $x = 1$ soddisfa la tesi del teorema di Lagrange;

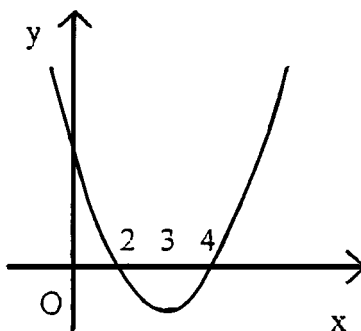
D) le ipotesi del teorema di Lagrange non sono soddisfatte.

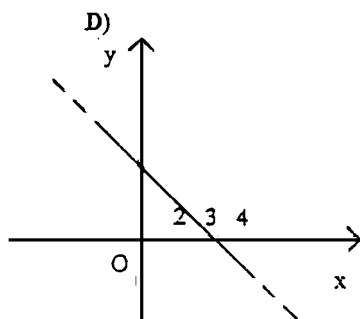
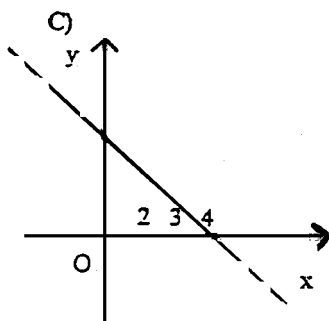
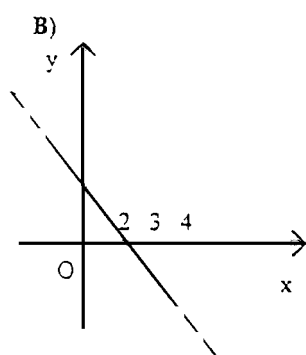
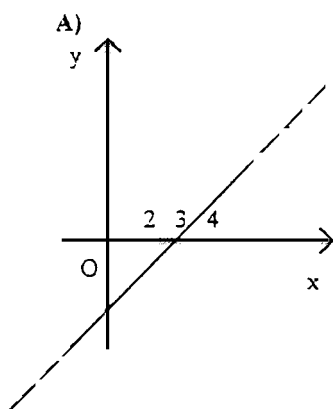
8. Assegnato il seguente schema riassuntivo, relativo alla derivata della funzione $y = f(x)$



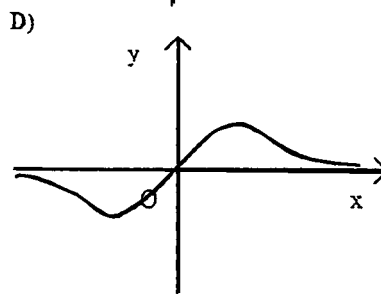
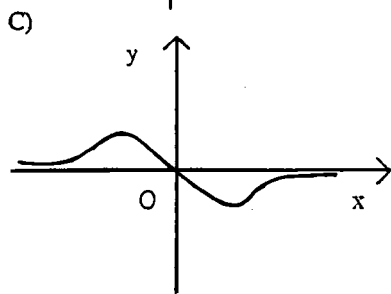
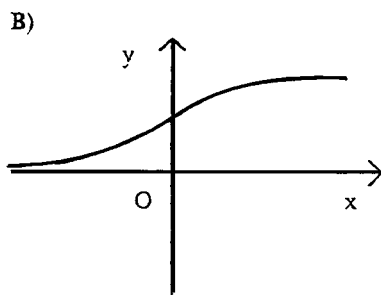
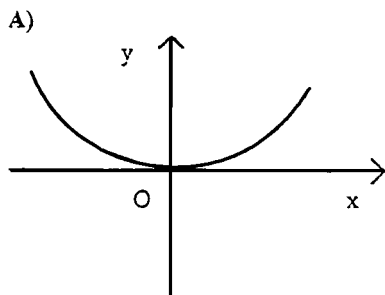
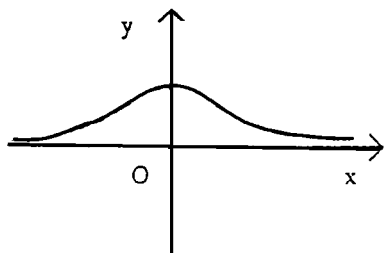
- A) i punti $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di massimo relativo per la funzione;
- B) il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo per la funzione; il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo per la funzione;
- C) il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo per la funzione; il punto $x = 1$ è un punto di massimo relativo per la funzione;
- D) i punti $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di minimo relativo per la funzione

9. Quale dei seguenti grafici rappresenta il grafico della funzione derivata di



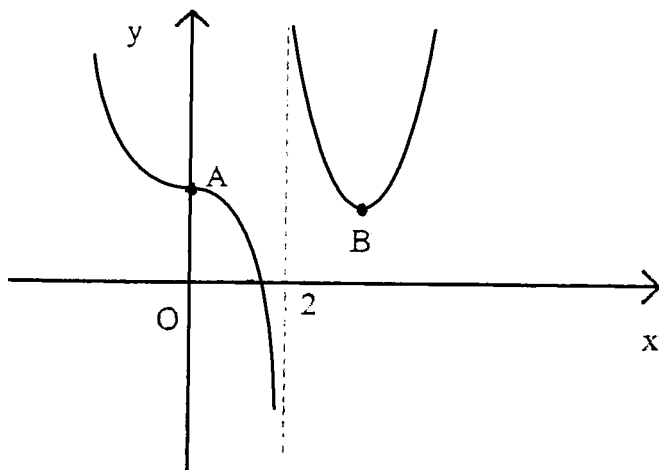


10. Quale dei seguenti grafici rappresenta il grafico di una primitiva della funzione qui raffigurata?



Sezione B

1. Assegnato il seguente grafico:



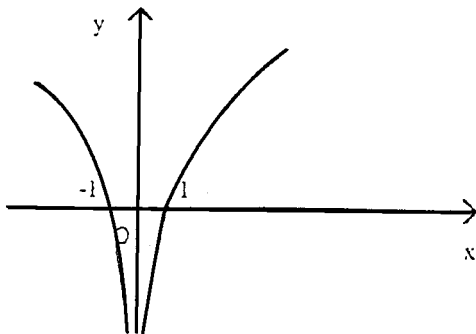
completare le seguenti affermazioni:

- La retta $x = 2$ è per la funzione un _____
- Il punto A rappresenta per la funzione un _____
- Il punto B rappresenta per la funzione un _____
- La concavità della curva è rivolta verso l'alto per $x \in$ _____
- La concavità della curva è rivolta verso il basso per $x \in$ _____

2. Assegnati i seguenti grafici, completare le affermazioni scritte a fianco:

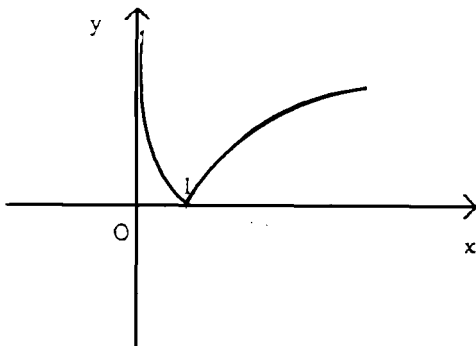
la funzione è continua per
 $x \in$ _____

la funzione è derivabile per
 $x \in$ _____



la funzione è continua per
 $x \in$ _____

la funzione è derivabile per
 $x \in$ _____



3. Assegnata la funzione $y = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$, determinare il suo massimo assoluto nell'intervallo $[0, 1]$.

4. Applicando il teorema di Torricelli, calcolare l'integrale definito $\int_0^3 e^x dx$ interpretando geometricamente il risultato ottenuto.
5. Assegnata l'equazione differenziale $y' + xe^x = 0$:
- classificare l'equazione data;
 - verificare che $y = e^x - xe^x + c$ è l'integrale generale dell'equazione data;
 - nell'ipotesi che venga assegnata la condizione $y(0) = 1$, determinare il corrispondente integrale particolare.

4. Prova conclusiva per Liceo Classico ed Istituto Magistrale

1° gruppo - Obiettivo: Conoscenza di concetti fondamentali

- a) Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ ed inoltre tale che $m \leq f(x) \leq M$ con m ed M costanti, dimostrare che

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ed interpretare geometricamente il risultato.

- b) Si enunci il teorema di Cauchy e si verifichi che esso è valido per le funzioni:

$$f(x) = 3x + 2, \quad g(x) = x^2 + 1$$

nell'intervallo $[1, 4]$.

- c) Si dimostri la regola di De L'Hospital nel caso in cui le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ abbiano ambedue, nel punto x_0 , per limite l'infinito.
- d) Data la cubica di equazione $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ verificare che il suo punto di flesso coincide con il suo centro di simmetria.

2° gruppo - Obiettivo: Utilizzo consapevole di tecniche di calcolo

- a) Si studi come varia la differenza fra il quadrato di un numero reale ed il suo cubo.
- b) Si studi la funzione $y = 8/(4 + x^2)$ e se ne disegni il grafico.
- c) Si studi la funzione $y = (x^2 + x)/(x - 2)$ e se ne disegni il grafico.
- d) La funzione $f(x)$ sia rappresentata

$$\text{per } x \leq 1 \text{ da } y = x^2$$

$$\text{per } x > 1 \text{ da } y = -2x^2 + hx + k$$

Determinare le costanti h e k in modo che la funzione $y = f(x)$ risulti continua e derivabile in $x = 1$.

Rappresentare la funzione così ottenuta.

3° gruppo - Obiettivo: Applicazione dell'analisi a problemi vari

- a) Fra tutti i trapezi inscritti nell'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ ed aventi per base l'asse maggiore dell'ellisse, determinare quello di perimetro massimo.
- b) Sia O il centro del cerchio di base di un cono circolare retto. Su due diametri del cerchio di base, ortogonali tra loro, si segnino quattro punti A, B, C, D equidistanti da O e da essi si innalzino le perpendicolari al piano di base, sino ad incontrare la superficie laterale del cono in A', B', C', D' . La figura $ABCD A'B'C'D'$ individua un parallelepipedo retto a base quadrata. Fra tutti i parallelepipedi che in tal modo si possono ottenere, con riferimento ad un dato cono di raggio r e altezza h , determinare quello di volume massimo.
- c) Calcolare il volume del solido generato con una rotazione completa attorno all'asse y dalla regione di piano limitata dalla curva di equazione $y = x^2 - 10x + 25$ e dalle rette di equazione $x = 0, y = 0$.
- d) Un punto P si muove nel piano xOy e descrive una traiettoria γ . Sapendo che il suo moto è determinato dalle leggi orarie $x = 3t, y = 9t - 3t^2$, determinare l'equazione $y = f(x)$ della traiettoria γ , il modulo della velocità e della accelerazione nell'istante $t = 2 \text{ sec}$.

5. Prova conclusiva per Licei Classici

- a) Rispetto ad un segmento unitario $(3x-4)$ e $(5-2x)$ sono le misure delle dimensioni di un rettangolo. Esiste un valore della x per cui il rettangolo ha area massima?

In caso di risposta affermativa calcolarne il valore, in caso di risposta negativa esporne una conveniente motivazione.

Risolvere il medesimo problema nell'ipotesi le misure delle dimensioni del rettangolo siano $(5x-6)$ e $(3-7x)$.

- b) Determinare le coordinate dei punti comuni alle curve di equazione $y = (x-1)^2 - 4$ ed $y = (x+3)(1-x)$ e calcolare l'area della parte finita di piano limitata dagli archi delle due curve che hanno per estremi tali punti.
- c) Trovare l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano tali che il rapporto delle distanze dai due punti $A(2, -1)$ e $B(-2, 1)$ sia uguale a m/n ; si esamini, in particolare, il caso $m = n$. Calcolare l'area della regione di piano delimitata da tale curva chiusa nel caso $m = 2$ e $n = 1$.

6. Prova di Maturità per indirizzi Scientifici

E' data la funzione reale di variabile reale $f(x) = -x^2 + 2x$. Sia γ , in un sistema Oxy , la parabola di equazione $y = f(x)$ e sia r la retta di equazione $y = mx$ che interseca γ in un punto P , distinto da O , appartenente al I quadrante.

- a) Determinare r in modo che l'area del segmento parabolico individuata da γ ed r e l'area del segmento parabolico individuato da γ e l'asse x siano nel rapporto 1:4.

- b) Stabilire per quali valori di x la funzione $g(x) = \frac{[f(x)]^2}{|f(x)|}$ è continua, per quali valori è derivabile e calcolare $g'(x)$.

- c) Studiare la funzione $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ e tracciarne il grafico.

- d) Calcolare il valor medio della funzione $y = h(x)$ nell'intervallo $[3; 4]$

- e) Verificare che la curva di equazione $y = h(x) - 1$ taglia l'asse x in un punto di ascissa x_0 interno all'intervallo $(0;1)$.
- f) Indicare un algoritmo per calcolare x_0 fino alla terza cifra decimale e tradurlo in programma utilizzando un opportuno linguaggio.

7. Prova di Maturità per indirizzi Scientifici

Sia dato un solido C costituito da un cilindro circolare retto, di raggio ed altezza r , e da una semisfera il cui cerchio massimo coincide con una base del cilindro. Si consideri un cilindro di raggio ρ anch'esso circolare retto, inscritto nel solido C .

- a) Esprimere il volume V del cilindro inscritto in funzione di ρ e di r ;
- b) studiare la relazione tra volume e raggio del cilindro inscritto mediante lo studio della funzione $y = f(x)$, avendo posto $x = \frac{\rho}{r}$ e $y = \frac{V}{\pi r^3}$, e verificare in particolare che la funzione è dotata di un flesso;
- c) approssimare l'ascissa del flesso a meno di 10^{-6} indicando un programma che consenta tale operazione mediante l'elaboratore;
- d) calcolare l'area della parte di piano racchiusa tra la curva di equazione $y = f(x)$, l'asse delle ascisse e la retta parallela all'asse delle ordinate e passante per il punto della curva per cui ρ assume il valore massimo.

8. Prova conclusiva per Istituti d'Arte

- a) Dei limiti che seguono il candidato calcoli quelli esistenti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2(x+1); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+3},$$

scrivendo, inoltre, la definizione di limite destro e limite sinistro di una funzione in un punto.

- b) Dare la definizione di funzione continua in un punto.
- c) Calcolare, laddove è derivabile, la derivata della seguente funzione:

$$y = |x^3 - 3|$$

- d) Considerata la funzione:

$$y = \begin{cases} x & \text{se } x < 3 \\ 4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

il candidato dica se essa è derivabile in $x = 3$, giustificando la risposta.

- e) Specificare la differenza tra punto di massimo relativo e punto di massimo assoluto di una funzione. Il candidato scriva, inoltre, una condizione sufficiente affinché un punto sia di massimo relativo o di minimo relativo per una funzione.
- f) Il candidato studi la funzione $y = \sqrt{x-1}^2$ disegnandone il grafico e specificando il codominio.

9. Prova conclusiva per Istituti d'Arte

E' ammesso l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

- a) Trovare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x^2-x+6}};$$

$$f(x) = \sqrt{\ln(2-x)\ln(x+2)}$$

b) Date $f(x) = 1 - x^2$ e $g(z) = \sin z$, determinare:

$$f[g(z)]; \quad g[f(x)].$$

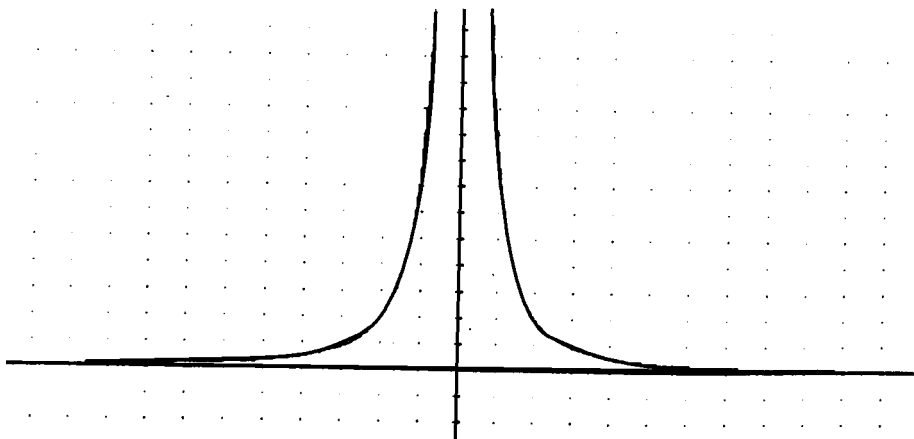
c) Indicare l'eventuale parità o disparità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin x \cos x;$$

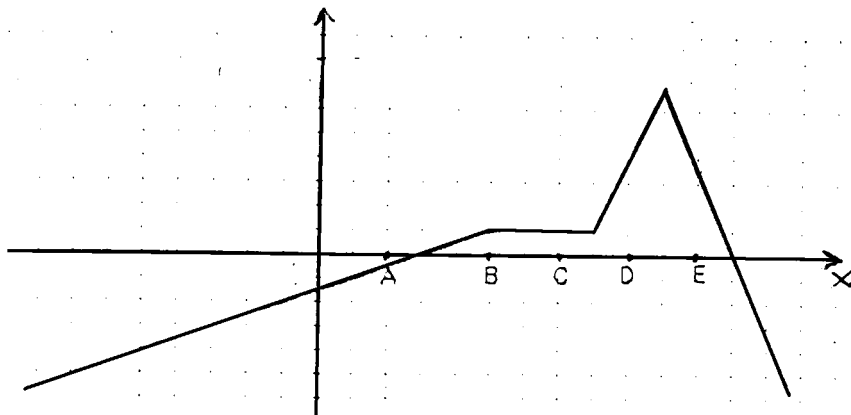
$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 - x^3};$$

$$f(x) = 6x^3 + 4x.$$

d) Dire, motivando la risposta, a quale delle precedenti funzioni il seguente grafico potrebbe essere relativo:



- e) Facendo riferimento al seguente grafico, stabilire la derivabilità nei punti indicati e determinare il valore dell'eventuale derivata.



in A , $x = 2$; in B , $x = 5$; in C , $x = 7$; in D , $x = 9$; in E , $x = 11$.

- f) Trovare i punti di massimo e minimo relativo delle seguente funzione
 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 4$.

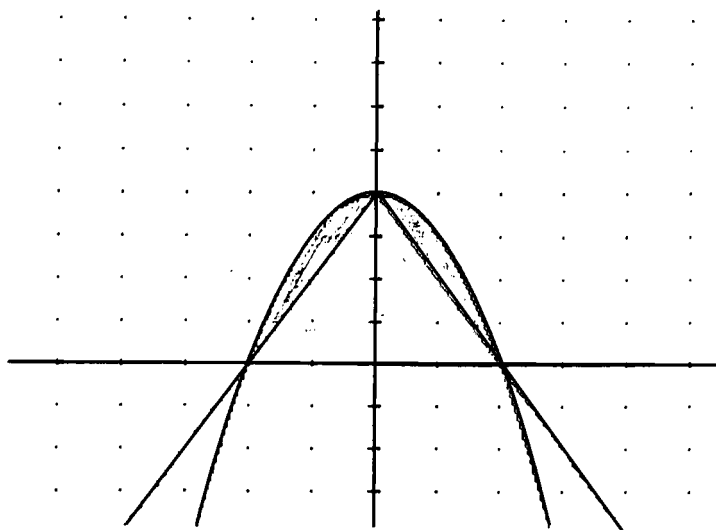
- g) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int (\sin x + \cos x) dx;$$

$$\int (2x^2 + 3x) dx;$$

$$\int \ln x dx.$$

- h) Trovare l'area compresa tra la spezzata e la parabola di equazione $y = 4 - x^2$ come in figura.



10. Prova per esame di maturità

Per ogni numero intero positivo n , sia f_n la funzione reale di variabile reale così definita:

$$f_n(x) = xe^{nx}.$$

Sia C_n il grafico della f_n in un sistema di riferimento.

Mostrare che ognuno dei grafici presenta un minimo e un flesso; studiare l'andamento della C_n per x tendente a meno infinito.

Mostrare che la curva C_{n+1} , grafico della funzione $f_{n+1}(x)$, è l'immagine della curva C_n in un'omotetia di centro l'origine e rapporto da determinare.

Tracciare la curva C_2 grafico di $f_2(x)$ e determinare l'area $s(a)$ della regione finita di piano delimitata dalla curva, dall'asse delle x e dalle rette di equazione $x = -\frac{1}{2}$, $x = a$ con $a < -\frac{1}{2}$.

Calcolare $\lim_{a \rightarrow -\infty} s(a)$.

11. Prova di Maturità per indirizzi Scientifici

A) Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$. Trovare i coefficienti a, b, c in modo tale che il punto $(-1, 0)$ appartenga al grafico di $f(x)$ e la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(2, 3)$ abbia equazione $y - 4x + 5 = 0$.
Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 - y > 0\}$.
Rappresentare graficamente gli insiemi $A, B, A \cap B$ e $A \cup B$. Inoltre calcolare l'area dell'insieme $A \cap B$.

B) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$ (specificando massimi e minimi relativi e assoluti, punti di flesso, ...).
Calcolare massimo e minimo della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[-10, 10]$.

Calcolare il seguente integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

C) Trovare quante sono le soluzioni dell'equazione $e^x = ax$ al variare del parametro a .

D) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta data:

1. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$.
2. $\int x e^x dx = \int x dx \int e^x dx$
3. $x^3 > x^2$ in $[1, +\infty)$
4. $Df(x_0) = 0$ implica che x_0 sia un punto di massimo o di minimo relativo per f .
5. x_0 punto di flesso per f implica $D^2 f(x_0) = 0$

6. $\frac{x}{x^2-1} > 0$ per $x > 0$

7. $\sqrt{x^2} = x$

8. La funzione $\log_2 x$ è la funzione inversa di 2^x

9. La funzione $e^{(x^2)}$ è crescente in R .

12. Prova conclusiva per Istituti Tecnici

Data una funzione $y = f(x)$ si possono considerare le funzioni:

1. $y = f(x) + c$
2. $y = cf(x)$
3. $y = f(x + c)$
4. $y = f(cx)$
5. $y = |f(x)|$
6. $y = f(|x|)$

Studiata la funzione $y = \frac{e^{(x^2)}}{x}$ tracciare il grafico delle sei trasformate della funzione, indicando in particolare le simmetrie di ciascun grafico.

13. Prova conclusiva per Istituti Tecnici

1. Si consideri la funzione così definita:

$$y = \begin{cases} \log_2 x & 0 < x \leq 1 \\ mx + q & x > 1 \end{cases}$$

- a) Si determini l'equazione della retta in modo che la funzione precedente sia continua e derivabile.
- b) Si tracci il grafico della funzione.

2. Dimostrare che nell'intervallo $[0, +\infty)$ la funzione $f(x) = x^2 + x - 6$ è invertibile; se ne determini la funzione inversa e se ne tracci il grafico.
Calcolare l'area della parte di piano compresa fra i grafici delle due funzioni f e f^{-1} e gli assi coordinati.

3. a) Considerata la funzione $y = \frac{x(x+6)}{x+3}$, si verifichi che, pur essendo $f(0) = f(-6) = 0$, non è valida la tesi del teorema di Rolle. Si spieghi quali sono le ragioni.

- b) Considerata la funzione $y = \frac{x(x+6)}{x+k}$, si determini per quali valori di k la curva ammette punti a tangente orizzontale e per quali valori di k sono verificate, nell'intervallo $[0, -6]$, le condizioni del teorema di Rolle.

14. Prova di Maturità

Esprimere l'area di un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio unitario, come funzione della metà dell'angolo al vertice. Quando questa area è massima?

15. Prova di Maturità per indirizzi Scientifici

Indichiamo con C_m il grafico della funzione seguente:

$$y = f_m(x) = (m-2)x^3 - mx + 2$$

dove m è un parametro reale.

- a) Dire per quale valore di m la curva C_m è una retta.
- b) Studiare le due funzioni ottenute attribuendo ad m i valori di 0 e -1. Tracciare le curve C_0 e C_{-1} determinando in particolare le coordinate dei loro punti comuni.

- c) Dimostrare che per $0 < m < 2$ la funzione $f_m(x)$ non ammette né massimo né minimo relativo.
- d) Provare che le curve C_m passano, qualunque sia il valore di m , per tre punti fissi allineati.
- e) Mostrare che per $0 \leq x \leq 1$ si ha $f_0(x) \leq f_{-1}(x)$.
- f) Calcolare l'area della regione del I quadrante delimitata dalle curve C_0 e C_{-1} .

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Donata Angioli	<i>Direzione Classica</i>	Arezzo
Tiziana Bindo	Lic. Scientifico Redi	Grottaglie TA
Giovanni Bratina	Lic. Scientifico Moscati	Gorizia
Bruno Antonio Cifra	Lic. Classico P. Trubar	Latina
Rosario Greco	Lic. Scientifico Majorana	Caltagirone CT
Michele Impedovo	Lic. Scientifico Majorana	Gavirate VA
Nicoletta Nolli	Lic. Scientifico	Cremona
Paolo Pendenza	Lic. Scientifico Aselli	Trento
Giorgia Pidello	Lic. Scient. Leonardo da Vinci	Grugliasco TO
Michele Piraino	Lic. Scientifico Marie Curie	Vibo Valentia
Marco Quondamcarlo	Ist. Magistrale Patriarca Capialbi	Terni
Maria Ragagni	Lic. Scientifico Donatelli	Casalecchio di Reno BO
Angela Rizza	Lic. Scient. Leonardo da Vinci	Parma
Ferruccio Rohr	Ist. Magistrale S. Vitale	Roma
Donato Rossi	Lic. Scientifico Nomentana	Isernia
Giovanna Rovero	Lic. Ginnasio Facibelli	Torino
Riccardo Rugani	Lic. Scientifico G. Bruno	Pistoia
Sandra Schiavoni	Lic. Classico Forteguerra	Ancona
Anna Laura Trampetti	Lic. Scientifico L. Di Savoia	Napoli
Caterina Vespià	Lic. Scientifico Sbordone	Verona
	Lic. Classico Ed. Femm. Angeli	
	<i>Direzione Professionale</i>	
Marziano Allegrone	IPSCT Carbone	Tortona AL
M. Pia Candelieri	IPSIA Galilei	Gravina BA
Ernesto Catara	IPSIA Giorgi	Treviso
Raffaella Ceci	IPSCT	Bresso MI
Anna Lo Presti	IPSIA E. Medi	Palermo
Fabrizio Monari	IPSSCT	Monghidoro BO
Bruno Rosaia	IPA Pacinotti	La Spezia
Letterio Scopelliti	IPSSCT Flora	Pordenone
	<i>Direzione Artistica</i>	
Graziella Camera	Liceo Artistico Paul Klee	Genova
Domenico Carpinò	ISA	Siracusa
Francesco Damico	Liceo Artistico	Lecco
M. Rosaria Di Napoli	Istituto d'Arte Scola	Calitri AV
Susanna Fabbri	ISA	Pisa
Anna Michelazzi	Istituto d'Arte Russoli	Pisa
Franca Piacci	Liceo Artistico Nervi	Ravenna
Rosanna Rizzo	Liceo Artistico	Firenze
Fabrizio Russo	ISA Vittoria	Trento
	<i>Direzione Tecnica</i>	
Vincenzo Aieta	ITC Pitagora	Castrovillari CS
Michele Baldassarre	ITC Dell'Andro	Santeramo C. BA
Ferdinando Casolaro	ITG Della Porta	
Maria Clerico	ITIS Giorgi	Roma
Luigi Fracciotto	ITIS Q. Sella	Biella
Dorotea Jacona	ITIS Marconi	Catania
Enrico Lamanna	ITC Corridori	Osimo AN
M. Aurora Mangiarotti	ITCT Bordoni	Pavia
Angela Merello	ITIS Calvino	Genova
Paolo Oliva	ITG Pascal	Reggio Emilia

APPENDICE

1. ELENCO DELLE SCUOLE POLO

Le scuole polo, di cui si pubblica l'elenco, hanno assunto il compito di distribuire i *Quaderni* agli istituti che rientrano nel territorio loro affidato.

I Presidi che non avessero ricevuto tutti i numeri della collana possono pertanto richiederne l'invio alla scuola polo dell'area provinciale di appartenenza.

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - A

LM SLATAPER	Corso Verdi, 17	Gorizia
LS TORRICELLI	Via Udine 7	Maniago (PN)
LC PETRARCA	Via Rossetti, 74	Trieste
IM PERCOTO	Via Pier Silverio Leicht, 4	Udine
IM GOBETTI	Via Istituto Tecnico, 1	Genova-Sampierdarena
IM AMORETTI	Piazzetta G.B. De Negri, 2	Imperia
IM MAZZINI	Viale Aldo Ferrari, 37	La Spezia
IM G. DELLA ROVERE	Via Monturbano, 8	Savoia
IM G. FALCONE	Via Dunant, 1	Bergamo
LS CALINI	Via Monte Suello 2	Brescia
LS GIOVIO	Via P. Paoli, 38	Como
LC MANIN	Via Cavallotti, 2	Cremona
IM TENCA	Bastioni Porta Volta, 16	Milano
LS MAJORANA	Via Ratti, 88	Rho (MI)
IM PARINI	Via Gramsci, 17	Seregno (MI)
LC VIRGILIO	Via Ardigò, 13	Mantova
IM CAIROLI	Corso Mazzini, 7	Pavia
LS NERVI	Piazza S. Antonio	Morbegno (SO)
LS LUINO	Via Lugano, 24	Luino (VA)
IM SALUZZO	Via E. Faà di Bruno, 85	Alessandria
IM MONTI	Piazza Cagni, 2	Asti
IM LEONARDO DA VINCI	Piazza S. Francesco, 1	Alba (CN)
IM BELLINI	Baluardo La Marmora	Novara
LS GRAMSCI	Colle Bella Vista	Ivrea (TO)
LS GOBETTI	Via M. Vittoria, 39 bis	Torino
IM ROSA STAMPA	Corso Italia, 48	Vercelli
IM PASCOLI	Via M. Longon, 3	Bolzano
LC VON DER VOLGELWIDE	Via A. Diaz, 34	Bolzano
LS LEONARDO DA VINCI	Via Giusti, 1/1	Trento
IM BINEL	Via Franchetè, 111	Verres (AO)
LC TIZIANO	Via Cavour, 2	Belluno
IM AMEDEO DI SAVOIA	Via del Santo	Padova

IM ROCCATI	Via Carducci, 8	Rovigo
LC CANOVA	Via Mura S. Teonisto, 16	Treviso
IM STEFANINI	Via Miglio	Venezia - Mestre
LC G. B. BROCCHI	Via Beata Giovanna, 67	Bassano del Grappa (VI)
IM VERONESE	Via Fiume, 61/B	San Bonifacio (VR)

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - B

LC D. COTUGNO	Portici del Liceo	L'Aquila
IM ISABELLA GONZAGA	Via dei Celestini	Chieti
IM MARCONI	Via M. Da Caramanico, 6	Pescara
IM MILLI	Via G. Carducci	Teramo
LS COPERNICO	Via F. Garavaglia, 11	Bologna
LC ARIOSTO	Via Arianuova, 19	Ferrara
LS RIGHI	Piazza Aldo Moro, 76	Cesena (FO)
LS FANTI	Viale Peruzzi, 7	Carpi (MO)
LC GIOIA	Viale Risorgimento, 1	Piacenza
LC C/O C.N. MARIA LUIGIA	Via Lalatta, 14	Parma
LS RICCI CURBASTRO	Viale degli Orsini, 8	Lugo (RA)
LS MORO	Via XX Settembre, 5	Reggio Emilia
IM REGINA MARGHERITA	Viale Regina Margherita	Anagni (FR)
LS MAJORANA	Via Sezze	Latina
IM ELENA PRINC. NAPOLI	Piazza Mazzini, 2	Rieti
LC MAMIANI	Via delle Milizie, 30	Roma
LS PEANO	Via Morandini, 38	Roma
SM MONTESSORI	Via Livenza, 8/Roma	
IM S. ROSA DA VITERBO	Via S. Pietro, 27	Viterbo
LS LEONARDO DA VINCI	Viale G. Verdi, 23	Jesi (AN)
IM MERCANTINI	Via Emidio Consorti, 28	Ripatransone (AP)
IM VARANO	Via Pieragostino, 18	Camerino (MC)
LC MAMIANI	Via Gramsci, 2	Pesaro
IM PRINCIPESSA ELENA	Via Trieste, 1	Campobasso
IM CUOCO	Via G; Leopardi	Isernia
LS REDI	Via Leone Leoni, 38	Arezzo
LS C/O C.N. CICOGNINI	Piazza del Collegio, 13	Prato
IM ROSMINI	Viale Porciatti, 2	Grosseto
IM PALLI BARTOLOMEI	Via Maggi, 50	Livorno
LS VALLISNERI	Via delle Rose, 68	Lucca
IM MONTESSORI	Via Lunense, 39/B	Marina di Carrara (MS)
LS BUONARROTI	Via Betti	Pisa
IM LORENZINI	Via Sismondi, 7	Pescia (PT)
LC PICCOLOMINI	Prato S. Agostino	Siena
LS LEONARDO DA VINCI	Via Tusicum	Umbertide (PG)
LC TACITO	Viale Fratti, 12	Terni

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - C

IM T. STIGLIANI	Via Lenera, 61	Matera
IM GIANTURCO	Via Zara	Potenza
LS FERMI	Via Molinella, 30	Cosenza
LC GALLUZZI	Via De Gasperi	Catanzaro
IM GRAVINA	Via Foscolo	Crotone
IM ALVARO	Via Campanella	Palmi (RC)
IM CAPIALBI	Via S. Ruba	Vibo Valentia
IM IMBRIANI	Viale Italia, 2	Avellino
IM GUACCI	Via Nicola Calandra, 138	Benevento
IM SALVATORE PIZZI	Piazza Umberto I	Capua (CE)
LC VICO	Via Salvator Rosa, 117	Napoli
LS CALAMANDREI	Via Comunale Maranda, 84	Napoli - Barra
IM SERAO	Via Carducci, 18	Pomigliano d'Arco (NA)
IM ALFANO I	Via dei Mille	Salerno
LC TROYA	Via R. Sanzio	Andria (BA)
LS E. MAJORANA	Via A. Moro, 19	Mola (BA)
IM PALUMBO	Via A. Grandi, 17	Brindisi
IM RONCALLI	Piazza Europa	Manfredonia (FG)
LC CAPECE	Piazza Moro, 37	Maglie (LE)
LC ARISTOSSENSO	Viale Virgilio, 15	Taranto
LS PACINOTTI	Via Liguria	Cagliari
LS FERMI	Via Veneto, 45	Nuoro
IM CROCE	Via G. D'Annunzio	Oristano
IM CASTELVÌ	Via Manno, 58	Sassari
LS LEONARDO	Via della Vittoria	Agrigento
LC RUGGERO SETTIMO	Via Rosso di San Secondo	Caltanissetta
LC C/O C.N. CUTELLI	Via V. Emanuele II, 56	Catania
IM CRISPI	Via Padova, 50	Piazza Armerina (EN)
LS ARCHIMEDE	Viale Regina Margherita, 3	Messina
IM DE COSMI	Via L. Ruggieri, 15	Palermo
IM MAZZINI	Via Curtatone	Vittoria (RG)
IM RAEI	Via Matteo Raeli, 9	Noto (SR)
IM SALVO	Via Marinella, 1	Trapani

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

- 1 – Gestione e innovazione*
- 2 – Lo sviluppo sostenibile
- 3 – La valenza didattica del teatro classico
- 4 – Il postsecondario per la professionalità* (2 tomi)
- 5 – Dalla memoria al progetto
- 6 – La sperimentazione della sperimentazione*
- 7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
- 8 – Probabilità e statistica nella scuola liceale
- 9 – L'Italia e le sue isole
- 10– Lingua e civiltà tedesca
- 11– La scuola nel sistema polo** (manuale guida)
- 12– La “città” dei filosofi
- 13– Le città d'Europa
- 14– Dal passato per il futuro
- 15– Gestione, innovazione e tecnologie*
- 16– Per non vendere il cielo
- 17– Briser la glace: la dinamica della comunicazione francese
- 18– Dalla lingua per la cultura: la didattica del latino
- 19– L'insegnamento della geometria (2 tomi)
- 20– La lingua del disegno: al crocevia fra scienza e arte
- 21– Insegnare storia**
- 22– Problemi della contemporaneità.
Tomo primo: Unità e autonomie nella storia italiana
- 23– Aritmetica**
- 24– Analisi matematica**

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco (*) si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei Presidi; gli altri sono dedicati alla formazione dei Docenti. I titoli segnalati col doppio asterisco (**) si riferiscono alla serie “Documenti di lavoro”

VOLUMI IN CORSO DI PUBBLICAZIONE

- 25– Logica, probabilità, statistica
- 26– Se hace camino al andar: didattica della comunicazione spagnola
- 27– Gli IDEI nel progetto formativo
- 28– Il linguaggio dei linguaggi

matteoni stampatore Lucca
marzo 1998



«Io non credo che si renda omaggio alla verità e alla giustizia, che della verità è compagna inseparabile, se non si riconoscono accanto ai limiti e alle carenze, non lievi, certamente non marginali, che a volte toccano la vita della scuola, anche i meriti e l'impegno, sempre umile e qualche volta eroico, dei tanti che nella scuola ci stanno con fermezza di propositi, con chiarezza di obiettivi, con sincerità di convinzioni socio-culturali.»

Romano Cammarata