Ministero della Pubblica Istruzione

Direzione Generale Istruzione Classica Scientifica e Magistrale

Direzione Generale Istruzione di Primo Grado

Unione Matematica Italiana

QUADERNI 19/1

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

Seminario di formazione per Docenti

Istruzione Secondaria di Primo Grado

Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri" Lucca

Novembre 1995 - Marzo 1996

Formazione Docenti

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione
Direttore: G. Trainito
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinatore editoriale: A. Portolano
Revisione scientifica: E. Bertonelli
Editing: P. Pedace, B. Ramundo, G. Rodano
Grafica: F. Panepinto

Nota editoriale
In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.
Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale
Direzione Generale Istruzione di Primo Grado

Unione Matematica Italiana

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

Seminario di formazione per Docenti
Scuole Istruzione Secondaria I Grado

Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri" - Lucca
Novembre 1995 - Marzo 1996

INDICE

IL RUOLO DELLA GEOMETRIA NELLA DIDATTICA DELLA SCUOLA SECONDARIA

Luigi Catalano
Dirigente Div. IV Direzione Classica, Scientifica e Magistrale, M.P.I.

«Non comunicare agli insegnanti un certo numero di processi e di ricette, ma dare loro una piena coscienza della propria funzione». Questa bella citazione di Émile Durkheim, – che ho letta in una delle tante e interessanti relazioni svolte durante i due Seminari dedicati alla geometria (e che costituiscono appunto la parte più rilevante dei due tomi del *Quaderno 19* – mi sembra sintetizzi felicemente il significato complessivo dei messaggi culturali e didattici emersi nel laboratorio di idee di Lucca.

Il *Quaderno 19*, secondo il consueto compito affidato a questa collana della Dirclassica, non contiene infatti ciò che tradizionalmente si intende per «atti» di un convegno, bensì gli strumenti che il sapiente coordinamento scientifico di Lucia Ciarrapico e di Claudio Bernardi ha identificato come più utili alla pratica del fare scuola. Questo non significa naturalmente che la nostra collana rinunzi ad apporti di livello alto per privilegiare solo la dimensione della quotidianità didattica. I *Quaderni* infatti hanno l'ambizione di coniugare una elaborazione rigorosa dei saperi con la loro ricaduta nei diversi gradi e livelli del processo di apprendimento/insegnamento.

Questa sintesi dialettica mi sembra ben perseguita nella scelta e nel taglio dei temi che di volta in volta contraddistinguono i corsi di aggiornamento organizzati dalla Dirclassica. La scelta dell'argomento coincide generalmente con la problematicità di alcune discipline: essa viene a ritrovarsi tanto nella trasformazione dello statuto epistemologico di ogni singola materia (un fenomeno intimamente legato alla processualità della storia umana), quanto nelle particolari difficoltà che – anche in questo – gli insegnanti possono incontrare nel trasmettere ed elaborare i contenuti disciplinari.

L'insegnamento della geometria rappresenta certamente uno di questi nodi problematici. La didattica di questa disciplina si è inserita in quel generale impulso all'insegnamento scientifico previsto dai programmi della scuola media e in quelli di non poche sperimentazioni della secondaria. L'integrazione tra matematica e scienza finisce non solo con l'esaltare il valore del metodo, ma soprattutto – dando un'immagine più compiuta e dunque più pertinente della disciplina – contribuisce all'equilibrio tra studi letterari e scientifici: un obiettivo che non a caso corrisponde a quella tensione al superamento della separazione tra le due culture che è tipica dei nostri tempi.

Molti degli interventi che qui vengono pubblicati si riferiscono a uno dei problemi più rilevanti del nostro sistema formativo: il raccordo, cioè, tra i diversi ordini di scuola. La questione della continuità infatti, se deve, come ovvio, tenere conto del differente livello di consapevolezza in allievi di età diversa, non può tuttavia non entrare nel merito della specificità dei contenuti, del rigore – pur processuale – della loro formulazione e della irrinunciabile finalità di arricchimento culturale: tre esigenze intrecciate tra loro, che costituiscono nel loro interagire sinergico, la cifra peculiare del fare scuola oggi.

Proprio muovendosi in una cornice siffatta, le relazioni dei due seminari lucchesi hanno dipanato il discorso geometrico nel registro grafico e verbale, insistendo in particolar modo sul problema didattico del nuovo modo di intendere la «dimostrazione». Lungo questa strada, è emersa con limpidezza la necessità di considerare – come ci suggerisce Thomas Kuhn, non a caso puntualmente citato in uno degli interventi – lo spessore particolare e gli inediti risvolti che oggi si vengono finalmente a stabilire nel rapporto tra scienza e storia. Al riguardo, anzi, la geometria presenta una sua peculiarità: essa ha iniziato a svilupparsi molto presto, ben prima del razionalismo euclideo, e offre pertanto lo *specimen* privilegiato per non ridurre ai canoni abituali (e abitudinari) il terreno fascinoso del rapporto tra sapere scientifico e l'avventura faticosa (ma esaltante) dell'uomo su questa nostra terra. Non per nulla, come osserva una delle relazioni, la geometria non si limita a una funzione di rappresentazione del reale, né si riduce alla soluzione dei problemi, ma rivive queste sue caratteristiche fontali nella perenne capacità di dar luogo a modelli matematici in grado di vivere nella storia contribuendo a darle senso.

L'augurio è che il dibattito dei due seminari lucchesi, così densi di stimoli e suggestioni, possa suscitare nel grande mondo della scuola una discussione aperta e fruttuosa.

L'ATTENZIONE PER I CONTENUTI IN UNA FASE DI TRASFORMAZIONE

Sergio Scala
Vice Direttore Generale - Direzione Generale dell'Istruzione Secondaria di Primo Grado.

La scuola italiana è attraversata da tempo da forti tensioni innovative che scaturiscono dai profondi mutamenti intervenuti nella società italiana. Il diverso modo di atteggiarsi del mondo del lavoro e della produzione indotto dalla rivoluzione tecnologica, l'evoluzione dei rapporti fra il cittadino e la pubblica amministrazione, la crisi storica dei tradizionali assetti istituzionali, sono tutti elementi che spingono le istituzioni scolastiche verso una loro diversa collocazione rispetto al contesto. Di particolare rilievo il momento emergente che postula un più saldo radicamento delle scuole rispetto ai problemi del territorio, nel quadro generale della valorizzazione piena delle specificità locali.

Questa la sostanziale base dei processi di autonomia scolastica che stentano a prendere corpo in un rinnovato tessuto normativo, forse per la difficoltà di conciliare i momenti di diversificazione con quelli della sostanziale unitarietà dei percorsi che deve sussistere in un sistema di pubblica istruzione nazionale fondato sul rilascio di titoli di studio aventi valore legale.

In una situazione storica contrassegnata da questi elementi distintivi è pressoché inevitabile che l'attenzione delle forze sociali e politiche sia prevalentemente rivolta al ridisegno degli aspetti organizzatori delle scuole, dovendosi stabilire compiti e confini delle istituzioni autonome rispetto al ridisegno della pregressa struttura centralistica.

Peraltro non bisogna mai perdere di vista la circostanza che la scuola non può essere vista soltanto come un problema che si esaurisce nel momento della determinazione degli assetti strutturali di apparato. Questa è sicuramente una faccia della medaglia che ne presuppone necessariamente un'altra, orientata sul versante dei contenuti dell'insegnamento, quando non anche, addirittura sulla individuazione delle discipline curricolari in sé.

Ritengo, anzi, possa affermarsi che proprio in un momento nel quale l'evoluzione del sistema conduce a superare la concezione della scuola intesa come "apparato" per riguardarla sotto il profilo del "servizio", occorre rivalorizzare anche quegli aspetti di contenuto disciplinare che in definitiva, sono poi quelli che determinano il risultato del servizio stesso e i livelli di qualità dell'intero sistema.

Fra gli innumerevoli seminari di studio e di produzione dedicati agli aspetti strutturali è quindi da rimarcare con piacere la presenza di momenti d'incontro dedicati all'approfondimento dei contenuti disciplinari, nella consapevolezza che il momento centrale della vita scolastica è quello che si risolve nel processo interattivo docenti-discenti, rispetto al quale tutti gli aspetti organizzatori hanno funzione strumentale, finalizzati come sono a creare le migliori condizioni per i processi di apprendimento.

La qualità del servizio non può prescindere da un'aggiornata preparazione del corpo docente che deve certamente passare per la piena consapevolezza di tutte le caratteristiche della funzione ma che, è indubitabile, deve risolversi nella piena ed attuale conoscenza dei contenuti disciplinari.

Il seminario condotto dal Ministero in collaborazione con l'U.M.I., nell'ambito del raporto convenzionale esistente, si inserisce perfettamente in questo quadro di esigenze ed assume interesse ancora maggiore per insistere su un'area tematica appartenente al settore scientifico che tanto spazio, in prospettiva si avvia ad acquisire, all'interno degli odierni percorsi formativi.

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
SEMINARIO DI AGGIORNAMENTO PER DOCENTI DI MATEMATICA
"LA DIDATTICA DELLA GEOMETRIA"

SEZIONE SCUOLA MEDIA

Programma per la prima settimana

Cicli di lezioni:

A Insegnamento-apprendimento della geometria
Nicolina A. Malara - Università di Modena

B Trasformazioni geometriche (classificazione delle figure)
Silvia Dentella - ex Insegnante Scuola Media "G. Mazzini", Pisa

Conferenza per entrambe le sezioni:
Riscoprendo la geometria del triangolo
Benedetto Scimemi - Università di Padova

Programma per la seconda settimana

Cicli di lezioni:

A Insegnamento-apprendimento della geometria
Nicolina A. Malara - Università di Modena

C Geometria dello spazio
Mario Barra - Università di Roma La Sapienza

D Storia ed epistomologia della geometria
Francesco Speranza - Università di Parma

Conferenza per entrambe le sezioni:
Geometria, scienza, tecnologia e nuovi programmi
Mario Fierli - Dirigente superiore per i servizi ispettivi

STAFF DI GESTIONE DEL SEMINARIO

Direttore: Giuseppe Ciri

Comitato tecnico:
– *per il Ministero della Pubblica Istruzione*, Lucia Ciarrapico
– *per l'Unione Matematica Italiana*, Claudio Bernardi

Responsabile Ministero della Pubblica Istruzione: Luigi Catalano

Relatori:
Claudio Bernardi - Unione Matematica Italiana
Lucia Ciarrapico - Ministero della Pubblica Istruzione
Paolo Boieri - Università Torino
Aldo Morelli - Università di Torino
Marta Cazzanelli - Università di Torino
Silvia Dentella - ex Insegnante Scuola Media "G. Mazzini" - Pisa
Fulvia Furinghetti - Università di Genova
Massimo Galuzzi - Università di Milano
Nicolina Malara - Università di Modena
Benedetto Scimemi - Università di Padova

Segreteria:
Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Cesare Matteoni, Maria Luisa Radini, Giovanni Romani.

La revisione scientifica dei testi pubblicati nel presente Quaderno è stata curata da Claudio Bernardi e Lucia Ciarrapico. La curatela complessiva è stata seguita da Giuseppe Ciri.

PRESENTAZIONE

Claudio Bernardi
Presidente della Commissione Italiana della Pubblica Istruzione per l'insegnamento della Matematica (*).

Lucia Ciarrapico
Dirigente superiore per i servizi ispettivi

Questo volume raccoglie materiale elaborato in occasione del Secondo Corso in Didattica della Matematica, organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana. Ricordiamo che, alla fine del 1993, il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un Protocollo d'Intesa, per promuovere "programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni". Nel quadro di una collaborazione fra mondo della Scuola e Università volta a realizzare forme di aggiornamento, il Protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale di due settimane, su temi di didattica della matematica.

Nel 1994 si è svolto il Primo Corso, dal titolo "L'insegnamento dell'Algebra fra tradizione e rinnovamento".

Il Secondo Corso di Didattica della Matematica, dedicato all'"Insegnamento della Geometria", si è svolto a Viareggio in due settimane separate, dal 13 al 17 novembre 1995 e dal 26 febbraio al 1° marzo 1996. Per l'importanza che il tema affrontato riveste a diversi livelli scolari e anche per consentire l'ammissione al Corso di un maggior numero di persone, è stato deciso di articolare il Corso stesso in due Sezioni, una rivolta ai docenti della Scuola Media e l'altra ai docenti delle Scuole Superiori.

Naturalmente, durante il Corso sono stati previsti momenti di confronto ed attività comuni fra i docenti delle due Sezioni. Nella stesura degli Atti, tuttavia, è sembrato preferibile presentare separatamente i testi relativi alla Scuola Media e i testi relativi alle Superiori, in modo da ottenere due volumi tipograficamente più agili e didatticamente più mirati.

Le domande di partecipazione sono state numerosissime, quasi 2500 per le due Sezioni. È stato possibile ammettere solo 40 docenti di ruolo nella Scuola

***(*)** La Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica è una commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana, che si occupa specificamente dei problemi di carattere didattico.*

Media e 40 docenti di ruolo nelle Superiori, scelti sulla base dei titoli presentati e in modo da rappresentare tutte le Regioni; a questi docenti sono stati affiancati 10 neo-laureati.

Nella Sezione “Scuola Media” si sono svolti 4 cicli di lezioni con esercitazioni, conferenze, lavori di gruppo, ed esercitazioni al calcolatore (con la presentazione dei software **GET** e **Cabri- Geometre**). Come appare dai testi, in cui sono sinteticamente riportati i vari momenti di lavoro (lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici), si è cercato di affrontare l’argomento tenendo presenti sia le indicazioni fornite dalla ricerca didattica, sia spunti suggeriti dalla storia e dall’epistemologia della matematica. Sono stati approfonditi due temi che oggi appaiono di particolare interesse: le trasformazioni geometriche e la geometria dello spazio. Naturalmente, è stato dato risalto ai legami che la geometria presenta con altri settori matematici, come la teoria dei numeri e la probabilità.

Questo libro si propone come strumento didattico per attività di studio, di aggiornamento e anche di prima formazione.

L’efficacia di un Corso di didattica si misura dalla sua ricaduta: ci auguriamo che questi libri permettano a molti di coloro che non hanno potuto partecipare al Corso, di usufruirne, sia pure a distanza di tempo, e possano anche costituire una fonte di suggerimenti per Enti e Associazioni che vogliano contribuire con iniziative locali alla formazione dei docenti.

Un sentito ringraziamento va rivolto a quanti hanno reso possibile la realizzazione dell’iniziativa:
- alla Direzione Generale dell’Istruzione Classica Scientifica e Magistrale, che ha curato l’organizzazione del Corso,
- alla Direzione Generale dell’Istruzione Secondaria di Primo Grado, che ha contribuito alla realizzazione del Corso,
- al Preside Giuseppe Ciri del Liceo Scientifico “Vallisneri” di Lucca, che ha diretto il Corso, e al personale dello stesso Liceo, che ha offerto un efficace sostegno amministrativo e di segreteria,
- al CEDE e all’IRRSAE-Toscana, che hanno fornito utili materiali di lavoro,
- ai relatori, per la loro competenza e disponibilità,
- ai docenti partecipanti, che hanno dato contributi preziosi grazie alla loro preparazione e alla loro esperienza concreta.

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA NELLA SCUOLA MEDIA QUESTIONI TEORICHE E DIDATTICO-METODOLOGICHE

Nicolina A. Malara
Dipartimento di Matematica - Università di Modena

1. LA GEOMETRIA NEI PROGRAMMI SCOLASTICI ITALIANI PER ALLIEVI DAI SEI AI SEDICI ANNI

1.1. Premessa

Come è noto il sistema scolastico italiano prevede l'obbligo scolastico fino ai 14 anni, ma da alcuni anni si parla di elevarlo ai 16 anni, in sintonia ad altri paesi della comunità europea. Dai sei ai sedici anni in Italia i ragazzi incontrano tre differenti tipi di scuola: la scuola elementare (6-10 anni), la scuola media (11-14 anni) il biennio della secondaria superiore (15-16 anni). La trattazione dei programmi di matematica per tali tipi di scuole sarà sviluppata secondo l'ordine con cui questi sono stati redatti nel tempo: scuola media (1979), scuola elementare (1985) e (proposta per il) biennio delle scuole secondarie superiori (1991).

I programmi per la scuola media conseguono alla riforma di istituzione della scuola media unica, realizzatasi nei primi anni 60, con la quale l'obbligo scolastico viene esteso ai 14 anni. A livello di organizzazione degli studi con quella riforma si produce una vera e propria rivoluzione: l'insegnamento della matematica viene associato a quello delle altre scienze ed affidato al medesimo insegnante. I motivi di questa scelta, da un punto di vista politico-sociale sono essenzialmente dovuti al desiderio di dare impulso all'insegnamento scientifico in modo da determinare un nuovo e più giusto equilibrio tra studi letterari e scientifici. Viene promossa l'integrazione tra matematica e scienze ed esaltato il metodo scientifico (raccolta ed esame di dati, formulazione di congetture, verifiche o confutazioni), fermo restando la distinzione tra leggi sperimentali (valide fino a prova contraria) e leggi matematiche (la cui validità va invece dimostrata, ossia assicurata da un ragionamento logicamente corretto che si sviluppa sulla base di fatti matematici già provati o assunti).

Riguardo specificamente la matematica i programmi del '79 puntano a costruire una immagine più pertinente della disciplina, riducendo tecnicismi e regole e dando spazio ad un insegnamento centrato sull'osservazione del reale e lo studio di situazioni problematiche da matematizzare e risolvere. Un'importante novità consiste nel fatto che tali programmi si sviluppano per grandi temi, devolvendo all'insegnante la scelta dello spazio da attribuire a ciascuno di essi e la programmazione delle relative attività didattiche. Si raccomanda un insegnamento con ritorni ciclici di approfondimento su uno stesso argomento che dia spazio negli allievi alla intuizione ed alla riflessione sulle conoscenze già possedute. Come è noto i temi considerati sono: *la geometria come prima rappresentazione del mondo fisico, insiemi numerici, matematica del certo e matematica del probabile, problemi ed equazioni, il metodo delle coordinate, trasformazioni geometriche, corrispondenze e analogie strutturali* e tre di essi sono specificamente rivolti alla geometria. Per la loro concezione tali programmi sono ancora attuali e i loro motivi ispiratori si ritrovano in quelli per gli altri due ordini scolastici.

1.2. La geometria nei programmi scolastici per la Scuola Media

Nei programmi per la scuola media, in linea con la nostra tradizione, alla geometria è dato ampio spazio, ma con un'ottica nuova rispetto al passato, che riflette l'evoluzione storica della disciplina ed è in linea con i movimenti di pensiero, circa il suo insegnamento, emersi dai convegni internazionali di Royaumont (1959), Dubrovnik (1960) e Bologna (1961). I tre temi ad essa dedicati sono collegati a tre momenti significativi della sua storia: l'impostazione classica, l'indirizzo cartesiano, la concezione moderna rappresentata dal programma di Herlangen. Dalla lettura di quanto espressamente previsto all'interno di tali temi riguardo alla geometria (si veda tavola 1) si rileva un ampliamento di orizzonti rispetto alla visione tradizionale. La grossa novità è che in essi l'attenzione viene posta sullo *spazio* anziché, come era tradizione, sulla *figura*, si introduce lo studio dei sistemi di riferimento e lo studio delle trasformazioni geometriche, anche non isometriche. Come sottolineato sia da Prodi (1988) che da Speranza (1989), l'insistenza posta sulle trasformazioni geometriche e sull'uso di sistemi di riferimento è motivata proprio dall'idea di giungere alla descrizione dello spazio. Un ulteriore conferma di ciò si ritrova nelle considerazioni circa i contributi con le altre discipline. In essi i legge infatti: *Possono essere trovati momenti di incontro della matematica con la geografia (metodo delle coordinate, geometria della sfera, ...) e con l'educazione artistica (prospettiva, simmetrie, ecc.).*

TAVOLA 1

LA GEOMETRIA NEI PROGRAMMI ITALIANI PER LA SCUOLA MEDIA

Tema 1. **La geometria come rappresentazione del mondo fisico:**
a) Dagli oggetti ai concetti geometrici: studio delle figure del piano e dello spazio a partire da modelli materiali. b) Lunghezze, aree, volumi, angoli e loro misura. c) Semplici problemi di isoperimetria ed equiestensione. Il teorema di Pitagora. d) Costruzioni geometriche: uso di riga e compasso

Tema 5. **Il metodo delle coordinate:**
a) Uso del metodo delle coordinate in situazioni concrete; lettura di carte topografiche e geografiche. b) Coordinata di un punto della retta; coordinate di un punto del piano. Rappresentazione e studio di semplici figure del piano, ad es. figure poligonali di cui siano assegnate le coordinate dei vertici. c) Semplici leggi matematiche ricavate anche dal mondo fisico, economico, ecc. e loro rappresentazione nel piano cartesiano; proporzionalità diretta ed inversa, dipendenza quadratica, ecc.

Tema 6. **Trasformazioni geometriche:**
a) Isometrie (o congruenze) piane - traslazioni, rotazioni, simmetrie - a partire da esperienze fisiche (movimenti rigidi). Composizioni di isometrie. Figure piane direttamente o inversamente congruenti. b) Similitudini piane, in particolare omotetie, a partire da ingrandimenti ed impicciolimenti. Riduzioni in scala. c) Osservazione di altre trasformazioni geometriche: ombre prodotte da raggi solari o da altre sorgenti luminose, rappresentazioni prospettiche (fotografia, pittura ecc.), immagini deformate, ...

Orientamenti per la "lettura" dei contenuti:
Lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro modificarsi; sarà opportuno utilizzare materiale e ricorrere al disegno. La geometria dello spazio non sarà limitata a considerazioni su singole figure, ma dovrà altresì educare alla visione spaziale. È in questa concezione dinamica che va inteso anche il tema delle trasformazioni geometriche. Il metodo delle coordinate con il rappresentare graficamente fenomeni e legami tra variabili, aiuterà a passare da un livello intuitivo ad uno più razionale. Alcune trasformazioni potranno essere considerate anche per questa via.

Un altro aspetto che questi programmi mettono in luce, come si evince dagli "orientamenti per la lettura dei contenuti", è l'atteggiamento dinamico nel fare geometria (anche per le sole figure molte loro proprietà non si colgono effettivamente se non quando si vedono le figure trasformarsi). Un esempio di ciò si può trovare nel libro di testo di Emma Castelnuovo vol. 1, pag. 432. Ricordiamo per inciso che proprio tale studiosa, ispiratasi come da lei dichiarato all'opera di Clairaut (si veda Castelnuovo1946), ha introdotto in Italia l'aspetto dinamico nello studio della geometria, mentre in paesi di cultura pragmatica, come Inghilterra od Olanda, al dinamismo è dato ampio risalto, basti pensare lo spazio dato allo studio del movimento fisico, e l'attenzione data alla individuazione dei luoghi descritti da elementi di un corpo che si muove secondo certe regole. Questa concezione dinamica della geometria viene comunque ad innestarsi in una tradizione italiana di insegnamento che si limita agli aspetti metrici di particolari classi di figure e le stesse proposte fornite dai testi scolastici risentono ancora, più o meno pesantemente, di ciò.

Occorre inoltre ricordare che la geometria fa parte anche di temi trasversali quali "problemi ed equazioni", (per l'uso del linguaggio algebrico dello studio di fatti geometrici) e "relazioni ed analogie strutturali" (oltre che per gli aspetti strutturali delle varie classi di trasformazioni geometriche, anche per la rivisitazione in termini di relazioni, mettendone a fuoco le proprietà, delle usuali nozioni di parallelismo, ortogonalità, congruenza, ordinamenti, ecc).

1.3. La geometria nei programmi della scuola elementare

Il mutamento di prospettiva sull'insegnamento della geometria, e più in generale della matematica, avvenuto con i programmi del '79 si riflette in modo ancora più marcato nei programmi della scuola elementare. Tali programmi, entrati in vigore nel 1987, vengono concepiti, oltre che sui motivi ispiratori dei precedenti, tenendo conto dei risultati della ricerca didattica fino ai primi anni ottanta.

La concezione della matematica che essi configurano traspare dalla lettura della introduzione, che si apre con la frase "*L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e di deduzione, di controllo e quindi di verifica o di smentita*", in cui viene evidenziato il percorso da seguire per giungere alla costruzione dei concetti matematici, si legge infatti: "*La vasta esperienza compiuta ha però dimostrato che non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione dei problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione*".

Dunque una visione della matematica come disciplina che educa il pensiero attraverso l'attivazione di processi cui concorrono aspetti comunemente considerati estranei ad essa e che si sviluppa attraverso un preciso metodo, basato sullo studio di situazioni problematiche tratte dal reale.

Anche questi programmi sono organizzati per grandi temi, che sono: *I problemi, aritmetica, geometria e misura, logica, probabilità-statistica-informatica*, per ciascuno dei quali vengono elencati i principali contenuti d'insegnamento, gli obiettivi da perseguire nei due cicli scolastici (primo e secondo anno; terzo, quarto e quinto anno) ed una serie di indicazioni didattiche. Dalla lettura di quanto previsto per la geometria in tali programmi (si veda tavola 2) si rilevano interessanti innovazioni e notevoli concordanze con quanto previsto per la scuola media. Innanzi tutto vi è il superamento della visione frammentaria della geometria, prima circoscritta alla presentazione di poche e particolari figure geometriche (piane o solide), e l'emergere di una visione della geometria come esplorazione dell'ambiente in cui si è immersi. In quest'ottica si inquadrano lo studio di percorsi, l'introduzione di sistemi di riferimento (sia in relazione ad un osservatore sia assoluti), l'approccio dinamico al concetto di angolo e l'attenzione alle relazioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette, l'osservazione e la rappresentazione sul piano di posizioni di un oggetto e del risultato di suoi spostamenti rispetto a traslazioni, rotazioni, simmetrie. Particolarmente interessante è lo spazio dato all'attività di manipolazione per la costruzione di modelli di oggetti, attività che precedono quelle di rappresentazione su carta, prima a mano libera poi con l'uso di riga, squadra e compasso. Al riguardo è da rilevare la notevole attenzione data al disegno geometrico, cosa che pone in altra luce il ruolo dello stesso nella scuola media.

Anche i contenuti tradizionali legati alla misura sono visti in una concezione nuova, basti pensare allo studio della equiestensione di figure per scomposizione o ricomposizione e la determinazione approssimata di aree e volumi di superfici irregolari, finalizzata a far cogliere la particolarità dei casi usualmente considerati. È interessante anche lo spazio dato allo studio delle figure geometriche, anche da punti di vista diversi dall'usuale, come appare dal riferimento alla classificazione di triangoli e quadrangoli rispetto le loro simmetrie.

Va infine sottolineata la cura alla proprietà di linguaggio ed il corretto uso di termini specifici.

TAVOLA 2

GEOMETRIA E MISURA NEI PROGRAMMI ITALIANI DELLA SCUOLA ELEMENTARE

Contenuti

La geometria va vista inizialmente come graduale acquisizione delle capacità di orientamento, di riconoscimento e di localizzazione di oggetti e di forme e, in generale, di progressiva organizzazione dello spazio, anche attraverso l'introduzione di opportuni sistemi di riferimento. L'itinerario geometrico elementare, tendendo alla sistemazione delle esperienze spaziali del fanciullo, si svilupperà attraverso la progressiva introduzione di rappresentazioni schematiche degli aspetti della realtà fisica; dallo studio e dalla realizzazione di modelli e disegni si perverrà alla conoscenza delle principali figure geometriche piane e solide e delle loro trasformazioni elementari. Si porrà particolare attenzione ad una corretta acquisizione dei concetti fondamentali di lunghezza, area, volume, angolo, parallelismo, perpendicolarità. Consistente rilievo dovranno avere, altresì, l'introduzione delle grandezze e l'uso dei relativi strumenti di misura, da far apprendere anch'essi in contesi esperienziali e problematici ed in continuo collegamento con l'insegnamento delle scienze.

Obiettivi del primo e secondo anno

- Localizzare oggetti nello spazio, prendendo come riferimento sia se stessi, sia altre persone ed oggetti, e usare correttamente i termini: davanti/dietro, sopra/sotto, a destra/a sinistra, vicino/lontano, dentro/fuori;
- effettuare spostamenti lungo percorsi che siano assegnati mediante istruzioni orali o scritte e descrivere -verbalmente o per iscritto- percorsi eseguiti da altri, anche ricorrendo a rappresentazioni grafiche appropriate;
- riconoscere negli oggetti dell'ambiente e denominare correttamente i più semplici tipi di figure geometriche, piane o solide;

- individuare simmetrie in oggetti e figure date; realizzare e rappresentare graficamente simmetrie mediante piegature, ritagli, disegni, ecc.
- confrontare e misurare lunghezze, estensioni, capacità, durate temporali, usando opportune unità, arbitrarie o convenzionali, e loro successive suddivisioni.

Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno

- Riconoscere in contesti diversi, denominare, disegnare e costruire le principali figure geometriche piane; costruire, con tecniche e materiali diversi, alcune semplici figure geometriche solide e descriverne alcune caratteristiche, come, nel caso dei poliedri, numero dei vertici, degli spigoli, delle facce;
- riconoscere l'equiestensione di semplici figure piane mediante scomposizioni e ricomposizioni;
- misurare e calcolare il perimetro e l'area delle principali figure piane, avendo consapevolezza della diversità concettuale esistente tra le due nozioni;
  trovare il volume di oggetti anche irregolari con strategie e unità di misura diverse, avendo consapevolezza della diversità concettuale esistente tra la nozione di volume e quella di area della superficie di una figura solida;
  individuare, in situazioni concrete, posizioni e spostamenti nel piano (punti, direzioni, distanze, angoli come rotazioni); rappresentare tali situazioni anche con l'uso di reticolati a coordinate intere positive, di mappe, di cartine, ecc;
- usare correttamente espressioni come: retta verticale, orizzontale, rette parallele, incidenti perpendicolari; disegnare con riga, squadra e compasso, rette parallele e perpendicolari, angoli e poligoni;
- riconoscere eventuali simmetrie presenti in una figura piana e classificare triangoli e quadrangoli rispetto alle simmetrie stesse;
- realizzare, anche con l'uso di materiale concreto e con disegni, la corrispondente di una figura geometrica piana sottoposta ad una traslazione, ad una simmetria assiale, ad una rotazione, ad un ingrandimento o impicciolimento in scala;
- conoscere le principali unità internazionali e pratiche per la misura di lunghezze, aree, volumi/capacità, pesi; saperle usare correttamente per effettuare stime e misure;
- scegliere, costruire e utilizzare strumenti adeguati per effettuare le misurazioni;
- passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra ad essa equivalente, limitatamente ai casi più comuni e con aderenza al linguaggio corrente anche in riferimento al sistema monetario;
- effettuare misure: di ampiezze angolari (in gradi), di durate (in ore, minuti primi e secondi); operare con tali unità in casi problematici reali.

Indicazioni didattiche

L'avvio allo studio della geometria va ricollegato in modo naturale, ad una pluralità di sollecitazioni che provengono dalla percezione della realtà fisica. Sarebbe quindi oltremodo riduttivo limitare l'insegnamento di questo settore alla semplice memorizzazione della nomenclatura tradizionale e delle formule per il calcolo dei perimetri, aree, volumi di figure particolari.
Va favorita, invece, un'attività geometrica ricca e variata, prendendo le mosse dalla manipolazione concreta di oggetti e dall'osservazione e descrizione delle loro trasformazioni e posizioni reciproche.

Le nozioni di perimetro, area, volume andranno introdotte - a livello intuitivo - anche per figure irregolari, in modo da svincolare questi concetti dalle formule, le quali vanno viste come semplici strumenti atti a facilitare i calcoli in casi importanti ma particolari.
Il disegno geometrico, inizialmente a mano libera, quindi con riga, squadra e compasso, andrà curato con attenzione, sia per le notevoli abilità operative che esso promuove, sia per favorire l'assimilazione di concetti come «parallelismo», «perpendicolarità».
Oltre ai sistemi di riferimento cartesiano, comunemente usati per individuare posizioni su un reticolato a coordinate intere positive (geopiano, carta quadrettata, mappe o carte geografiche), si potranno introdurre informalmente altri sistemi di riferimento più direttamente collegati alla posizione dell'osservatore.
Per il calcolo dei perimetri e delle aree si raccomanda di non insistere troppo sull'apprendimento dei cosidetti «numeri fissi» (costanti) attraverso la proposizione di nozioni puramente mnemoniche il cui significato, a questo livello di età, risulta difficilmente comprensibile; per quel che riguarda la presentazione del numero π, sarà sufficiente indicare che esso vale approssimativamente 3,14.
(Seguono indicazioni specificamente rivolte alla misura, che qui per brevità omettiamo.)

1.4. I programmi del Biennio della Scuola Secondaria superiore

Come è noto già dal 1986, nell'ambito del piano nazionale informatica (PNI), sono state messe a punto proposte di programma per il biennio della secondaria superiore; a queste nel giro di pochi anni hanno fatto seguito nuove proposte, attualmente da più parti in corso di sperimentazione, dovute alla commissione Brocca, commissione che ha sviluppato il progetto di riordino degli studi dell'intera scuola secondaria superiore. Le due proposte di programma, entrambe organizzate sui medesimi temi, sono abbastanza simili tra loro anche se i primi appaiono più dettagliati e con un diverso spessore culturale, come si rileva dalla lettura del commento ai temi. I temi sono: *geometria del piano e dello spazio, insiemi numerici e calcolo, relazioni e funzioni, elementi di probabilità e statistica, elementi di logica ed informatica.*

Circa la geometria i programmi Brocca (si veda tavola 3) appaiono più schematici di quelli precedenti del PNI, non tanto in riferimento ai contenuti quanto alle modalità della loro trattazione. Ad esempio mentre nei programmi del PNI viene lasciata all'insegnante la scelta del metodo da seguire: assiomatico-deduttivo (di varia natura) o di osservazione e scoperta di proprietà geometriche e di deduzione locale, nei programmi Brocca si privilegia invece espressamente questo secondo approccio in uno spirito di continuità con la scuola media, anche se viene ribadita l'importanza di esplicitare gli assunti iniziali di ogni ragionamento.

Un altro elemento di differenza rispetto a quanto previsto per la scuola media è la diversa attenzione allo spazio, nei programmi Brocca appare una maggiore attenzione allo studio delle figure in sé che non in relazione all'ambiente in cui si considerano immerse. La trattazione della geometria dello spazio viene poi limitata allo studio di esempi significativi di trasformazioni geometriche e di simmetrie in solidi particolari, anche se nel commento ai contenuti si sottolinea la finalità di alimentare ed affinare l'intuizione spaziale. Una visione sintetica delle differenze fra i due programmi è data da Chiarugi ed altri (1992), i quali sottolineano come il primo privilegi il passaggio globale-locale, il secondo viceversa privilegi il passaggio locale-globale.

1.5. La geometria nel raccordo tra i diversi ordini scolastici

Partiamo innanzitutto con il considerare il rapporto tra scuola elementare e scuola media. Dalla lettura in parallelo dei programmi per la scuola elementare e media appare nei primi una maggiore specificazione sia degli argomenti da trattare sia dei relativi obiettivi, argomenti che in massima parte poi si trovano riproposti nei programmi di scuola media. Questo porta a porsi il problema del raccordo tra questi due ordini scolastici.

La maggiore dimestichezza dell'allievo in uscita dalla scuola elementare, anche se a livello intuitivo, con argomenti una volta non trattati a questo livello scolare permette all'insegnante di scuola media di puntare a raggiungere un maggiore livello nella loro concettualizzazione, pur ripercorrendo esperienze già affrontate dagli allievi. Questo pone il problema della differenziazione delle attività, e la specificazione degli approfondimenti da perseguire in questo secondo tipo di scuola.

A nostro avviso un importante elemento di differenza, se pure nella continuità, risiede nell'approccio al linguaggio matematico ed alla argomentazione consequenziale. Come è noto la matematica sviluppa al suo interno un linguaggio proprio. Tale linguaggio è costituito da una parte simbolica, che sintetizza e consente di dominare relazioni tra gli oggetti in studio, e si costruisce per gradi successivi, ed una parte verbale che può vedersi in parte contenuta nel linguaggio naturale ed in parte costruita sulla base di questo per il significato specifico dato a termini di esso (si pensi al significato matematico di termini quali probabilità, misura, ecc).

TAVOLA 3

LA GEOMETRIA NEI PROGRAMMI BROCCA PER IL BIENNIO DELLA SECONDARIA SUPERIORE (*)

Obiettivi di apprendimento specifici della geometria

1. Individuare proprietà invarianti per trasformazioni elementari.
2. Dimostrare proprietà di figure geometriche.

Obiettivi di apprendimento strasversali riguardanti anche la geometria.

4. Riconoscere e costruire relazioni e funzioni.

7. Cogliere analogie strutturali e individuare strutture fondamentali.
8. Riconoscere concetti e regole della logica in contesti argomentativi e dimostrativi.
10. Inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico.

Tema 1. **La geometria del piano e dello spazio**

1.1 Piano euclideo e sue trasformazioni isometriche. Figure e loro proprietà. Poligoni equiscomponibili; teorema di Pitagora.
1.2 *Omotetie e similitudini del piano. Teorema di Talete.*
1.3 Piano cartesiano: retta, parabola, iperbole equilatera.
1.4 *Coseno e seno degli angoli convessi. Relazioni fra lati e angoli nei triangoli rettangoli*.
1.5 Esempi significativi di trasformazioni geometriche nello spazio. Individuazioni di simmetrie in particolari solidi geometrici.

Commento al tema "La geometria del piano e dello spazio"

Lo studio della geometria nel biennio ha la finalità principale di condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale e rappresenta come tale una guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa. A ciò il docente può pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dallo studente nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento.
Al docente compete poi l'impegno di avviare la fase euristica su processi di assiomatizzazione partendo da semplici situazioni assunte nei vari campi. Ciò nella prospettiva di familiarizzare gli studenti col metodo ipotetico-deduttivo e pervenire negli eventuali studi successivi alla costruzione di un sistema di assiomi per la geometria elementare. A tal fine è bene programmare, in un quadro di riferimento organico, una scelta delle proprietà (teoremi) delle figure piane da dimostrare, utilizzando la geometria delle trasformazioni oppure seguendo un percorso più tradizionale.
Un traguardo importante dello studio della geometria è il piano cartesiano, come modello del piano euclideo. Con la sua introduzione sono disponibili, per la risoluzione dei problemi geometrici, sia il metodo della geometra classica che quello della geometria analitica, e lo studente va stimolato ad usare l'uno o l'altro in relazione alla naturalezza, alla espressività e alla semplicità che essi offrono nel caso particolare in esame. *La rappresentazione della parabola e dell'iperbole equilatera va effettuata rispetto a sistemi di riferimento scelti opportunamente.*
Il coseno e il seno di un angolo sono introdotti, limitatamente agli angoli convessi, in relazione allo studio delle proprietà dei triangoli e per le necessità proprie delle altre scienze; lo studio delle funzioni circolari è rinviato al periodo successivo.
Gli elementi di geometria dello spazio hanno lo scopo di alimentare e sviluppare l'intuizione spaziale. È in facoltà del docente presentare prima la geometria piana e poi quella dello spazio, oppure fondere, in relazione agli argomenti comuni, le due esposizioni.

(*) *Il corsivo, presente nei programmi, riguarda contenuti specifici per gli indirizzi scientifico, tecnico ed economico.*

Riguardo alla geometria occorre poi considerare il particolare ruolo svolto dal disegno e dal relativo codice simbolico, sotto-linguaggio che l'allievo deve imparare a controllare.

L'apprendimento e l'uso consapevole del linguaggio matematico si basa sull'analisi e la riflessione critica sia del testo matematico sia delle espressioni enunciate dagli stessi allievi.

Chiarezza e concisione espositiva in questi ultimi possono raggiungersi esercitando un controllo critico su quanto si legge e si dice. Ciò richiede la realizzazione di attività, trasversali e di riflessione su quanto appreso, che non possono trovarsi pianificate sui testi ma di cui deve farsi carico l'insegnante, e che perciò dipendono strettamente dal suo grado di attenzione al riguardo e dalla sua capacità di approfittare delle occasioni offerte dagli stessi allievi.

Va sottolineato che nei programmi della scuola elementare indicazioni relative al linguaggio si trovano sparse nei vari temi, ad esempio in geometria si parla di denominazione di figure e di uso corretto di espressioni come "verticale", "orizzontale", "rette parallele", "rette incidenti", "rette perpendicolari", si raccomanda particolare cura nella conquista di precisione e correttezza linguistica e nell'uso appropriato di termini quali "alcuni", "tutti" (si veda il tema "logica"); si raccomanda poi di non introdurre concetti in modo scorretto e come esempio si considerano i concetti di quadrato e rettangolo proponendo di introdurre il quadrato come caso particolare del rettangolo, per evitare di far credere che un rettangolo sia tale solo se ha, necessariamente, i lati disuguali.

I programmi della scuola media riserbano al linguaggio un'attenzione ancora più forte. Nei suggerimenti metodologici è rivendicato alla matematica il concorso alla formazione della competenza linguistica nell'allievo ed è raccomandata la ricerca costante di chiarezza, concisione e proprietà di linguaggio, anche attraverso il confronto tra linguaggio comune e quello più formale della matematica.

Ricordiamo per inciso che in questa fascia scolare occorre gettare le premesse perché l'allievo possa affrontare, consapevolmente, nel biennio scolastico successivo anche l'approccio alla geometria razionale e pertanto una attenzione particolare va dedicata al concatenamento logico, elemento chiave nella dimostrazione, ed alla economia di pensiero, aspetti entrambi che richiedono tempi lunghi di maturazione. Ricordiamo a tal fine che nei programmi del Biennio è previsto che gli allievi sappiano riconoscere le regole della logica che sottendono argomentazioni e dimostrazioni e ciò non è pensabile si possa raggiungere senza che a livello di scuola media si siano maturate le necessarie esperienze e riflessioni.

Considerando specificatamente il rapporto scuola media-biennio anche in questo caso non sembrano esserci grossi ampliamenti dei contenuti nel passaggio da un tipo di scuola ad un altro, anzi appare un impoverimento riguardo lo studio delle omotetie, similitudini e del teorema di Talete, riservato agli studenti di indirizzo scientifico-tecnico (cosa che potrebbe indurre gli insegnanti di scuola media a lasciare in ombra questi contenuti). Le differenze tra i due ordini scolastici vanno perciò viste principalmente nella specificità dell'approccio, nel biennio più squisitamente razionale e centrato sugli aspetti deduttivi e nello stesso tempo, grazie alle maggiori conoscenze sull'uso del linguaggio algebrico, di più ampio respiro riguardo la geometria analitica.

Lo spirito di continuità nella ciclicità che pervade i tre programmi nasconde tuttavia il pericolo di un appiattimento delle conoscenze, come rilevato in Villani (1992), soprattutto se nella formazione degli insegnanti non si dà spazio a studi di carattere metodologico che diano consapevolezza delle differenti prestazioni degli allievi a seconda dell'età e degli approcci praticati. Tale pericolo pare sia abbastanza diffuso nei paesi di area occidentale, in cui l'insegnamento è concepito con ritorni successivi di ampliamento ed approfondimento sui medesimi argomenti, dal momento che Howson e Wilson (1986) utilizzando la metafora dell'insegnamento a spirale denunciano la possibilità "del collassamento della spirale in un cerchio".

Riferimenti Bibliografici

CASTELNUOVO E., 1946, Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva, *Periodico di Matematiche*, serie IV, XXIV, n. 3, 129-140

CHIARUGI I., FURINGHETTI F., MARTINI D., PAOLA D., 1992, Geometria nel Biennio: modi diversi di avvicinarsi al problema, in MARCHINI C., SPERANZA F., VIGHI P., (a cura di) *La geometria da un glorioso passato ad un brillante futuro*, Atti 3° incontro Internuclei Scuola Secondaria Superiore, Università di Parma

HOWSON A.G., WILSON B., 1986, *School Mathematics in the 1990s*, ICMI Study series, Cambridge University Press, Cambridge

UMI (Notiziario), 1979, *Sui programmi di Matematica della scuola media - Alcune tracce didattiche*, suppl. n. 10

UMI (Notiziario), 1986, *Nuovi programmi per il Biennio della Scuola Secondaria Superiore*, anno XIII, n. 2

PRODI G., 1988, Un esame comparativo dei nuovi programmi di Matematica, relazione scritta *L'Educazione Matematica nella Scuola Media: problemi esperienze prospettive,* IV ciclo, Modena

MPI (a cura di), 1985, *Programmi didattici della scuola primaria*, La Nuova Italia 1986

MPI (a cura di), 1991, Studi e Documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, n. 56, *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni. Le proposte della commissione Brocca*

SPERANZA F., 1989, La razionalizzazione della geometria, *Periodico di Matematiche*, serie VI, vol.65, n. 1, 29-45

SPERANZA F., 1990, Nuove prospettive per la geometria nelle scuole superiori, 1 e 2, *Nuova*

Secondaria, anno VII, n. 8, 77-75, n. 9, 65-67
VILLANI, 1992, Vecchio e Nuovo nell'insegnamento della Matematica, *Annali della Pubblica Istruzione*, anno XXXVIII n. 5/6, 568-577

2. ALCUNE INDICAZIONI SUL TEMA GEOMETRIA DEI PROGRAMMI SCOLASTICI PER ALLIEVI DAI 6 AI 16 ANNI IN FRANCIA, REGNO UNITO, SPAGNA ED UNGHERIA

Quanto esposto è una breve sintesi di quanto riportato in Malara (1994), cui rinviamo per la descrizione analitica di ciò che i programmi di Francia, Regno Unito, Spagna ed Ungheria prevedono per la geometria. Ci limitiamo qui ad alcuni aspetti dei singoli programmi e ad alcune considerazioni comparative. Riferimento implicito nella lettura saranno i programmi italiani.

2.1 Francia

Dalla lettura dei programmi francesi, da un punto di vista generale, si rileva sin dalla primaria la promozione di aspetti enfatizzati dalla ricerca didattica degli ultimi dieci anni, quali la riflessione linguistica e l'argomentazione circostanziata. In particolare è interessante l'attenzione rivolta alla costruzione di un vocabolario geometrico attraverso processi che diano motivo e giustificazione di termini e definizioni. Appare globalmente un certo scollamento tra l'impostazione pedagogica e ciò che i programmi prescrivono riguardo ai contenuti: la scansione di questi per anno dà una visione frammentaria della trattazione dei vari temi e non consente di coglierne appieno le sottostanti linee culturali. Analizzando i contenuti appare trascurato lo studio della geometria come rappresentazione del mondo fisico (coordinate geografiche, mappe, ecc.). Lo studio matematico delle trasformazioni geometriche risulta alquanto ridotto e non contempla lo studio analitico di esse, tranne qualche accenno in riferimento alla traslazione. Non c'è riferimento alla similitudine né alla omotetia (l'insegnamento di quest'ultima è previsto nel primo anno del secondo ciclo superiore, nell'ottica dell'impostazione algebrico-formale di matrice bourbakista, tipica nella scuola francese degli anni '70).

2.2. Regno Unito

Dalla lettura dei programmi inglesi si può rilevare -al di là del grosso spazio dato alle attività manipolative ed esperienziali, tipiche della scuola inglese- una prevalente concezione della geometria come studio dello spazio fisico, si pensi ad esempio all'attenzione data sin dai primi anni alle attività di orientamento nello spazio (uso della bussola, studio delle direzioni dei venti), o all'inserimento della trigonometria come strumento per lo studio geometrico del reale (rotte di navigazione, calcolo di aree per triangolazione) ma ancor più ad argomenti per noi tipici della fisica quali: risultante di forze agenti su un oggetto, studio del moto di parti di meccanismi, problemi di moto relativo, ecc. Anche lo studio empirico delle forme geometriche, che è enfatizzato sin dai primi anni, è incentrato sull'osservazione dei corpi solidi. Per quanto riguarda la geometria euclidea sono presenti argomenti elementari classici ma figurano molto posticipati rispetto alla nostra tradizione, si pensi ad esempio che la classificazione dei quadrilateri o il teorema di Pitagora sono previsti tra i 15-16 anni, e la comprensione delle condizioni di congruenza di triangoli sono considerate solo per studenti di elevate capacità; inoltre non vi è riferimento esplicito al teorema di Talete ed a teoremi elementari classici di geometria euclidea. Anche le trasformazioni geometriche, utilizzate e studiate empiricamente sin dai primi anni, non sono considerate da un punto di vista matematico se non a livello molto avanzato ed attraverso le matrici. In accordo ad Howson e Wilson (1986, p. 58) ci sembra che questi programmi, che pure propongono interessanti e varie esperienze geometriche, lasciano aperto il problema di "*come realizzare il passaggio dalle attività pianificate per dare un 'senso' dello spazio – e che da un punto di vista filosofico possono essere viste più come parte della fisica che della matematica – al 'pensiero geometrico' in senso classico*".

2.3. Spagna

I programmi spagnoli si differenziano molto dagli altri per la grande attenzione data ai *metodi della matematica*, visti come oggetto di insegnamento. I contenuti di ciascuna area sono classificati distinguendo tra *concetti, procedimenti e attitudini* per sottolineare esplicitamente e dare indicazione analitica dei diversi generi di contenuto su cui l'insegnante è chiamato ad operare. Inoltre nei programmi per la secondaria obbligatoria per gli ultimi due aspetti è presente una ulteriore specificazione, per i *procedimenti* si distingue tra: *utilizzazione dei diversi linguaggi, algoritmi ed abilità, strategie generali*, mentre per le *attitudini* si distingue tra quelle riferentesi all'*apprezzamento della matematica* e quelle riferentesi alla *organizzazione e costume di lavoro*. Tale classificazione è estremamente innovativa e richiede nell'insegnamento lo spostamento di accento dai fatti matematici ai *processi* che li determinano ed alla consapevolezza di questi ultimi. Ciò tra l'altro è particolarmente significativo poiché pone l'insegnante di fronte alla necessità di rivedere profondamente la propria didattica nel caso egli si limiti, come nella tradizione, all'insegnamento di soli concetti e tecniche. Da un punto di vista generale vi è una forte attenzione verso la costruzione di una immagine della matematica, non solo come lingua per descrivere e studiare la realtà nei suoi molteplici aspetti (fisici, economici, sociali), quanto come scienza con una valenza culturale propria (importanza dello studio sugli oggetti matematici -concetti, procedimenti, rappresentazioni, etc.- al di sopra dei contesti da cui essi vengono generati, importanza della simbolizzazione e della astrazione per la ricchezza e molteplicità dei significati che racchiude, apprezzamento e gusto per l'economia di pensiero e per la bellezza insita nella matematica).

Circa la geometria le scelte spagnole appaiono nel solco della tradizione e puntano più che sulla quantità di elementi di contenuto (solitamente inteso) sulla qualità del loro apprendimento e sugli effetti di questo in senso educativo generale. Ad esempio, nei programmi della primaria, a differenza di programmi di altre nazioni, non vi è cenno allo studio degli effetti su particolari figure di traslazioni, rotazioni, simmetrie, rimpicciolimenti e ingrandimenti. L'unico cenno alle trasformazioni può considerarsi lo studio di regolarità e simmetrie in figure piane o solide. Nella secondaria obbligatoria è dominante lo studio delle figure piane e dei solidi geometrici in termini di proprietà e ciò può indurre a mettere in ombra la visione della geometria come organizzazione dello spazio, inoltre è completamente assente la geometria vettoriale. Poco spazio è dato alle trasformazioni: si introducono le isometrie ma non si parla di omotetie e similitudini (ci si limita allo studio di figure simili) né tantomeno si parla di altri tipi più generali di trasformazioni. Interessante è invece l'attenzione data allo studio delle rappresentazioni di oggetti e parti dello spazio mediante plastici, oltre che sul piano.

2.4. Ungheria

Per quanto riguarda la geometria nei programmi ungheresi sin dalla scuola elementare appare la presenza di due componenti principali: a) la componente tradizionale incentrata su contenuti elementari di geometria euclidea con enfasi particolare sulle costruzioni geometriche; b) la geometria delle trasformazioni che appare più approfondita rispetto ad altri programmi (si propone lo studio di tutte le trasformazioni isometriche piane, di isometrie nello spazio, delle omotetie e delle similitudini). Appare invece in ombra la geometria analitica anche se vi sono semplici elementi di geometria vettoriale. Interessante è l'enfasi data alla visualizzazione nello spazio, capacità in cui appaiono eccellere gli allievi nei paesi dell'est (si veda Watson, 1993). È da sottolineare inoltre lo spazio dato allo studio esplicito di questioni di tipo logico, presenti nel tema "Metodi di pensiero", tipiche in geometria (individuazione di relazioni, definizioni, dimostrazioni, ecc.).

2.5. Considerazioni conclusive

Dalla lettura comparata dei programmi di Francia, Regno Unito, Spagna e Ungheria si rileva un ampio nucleo comune di stessi contenuti riguardante: lo studio dei corpi solidi e delle figure geometriche, i problemi di rappresentazione di oggetti dallo spazio al piano, i sistemi di riferimento e la geometria analitica. Per quanto riguarda le trasformazioni geometriche vi sono differenze anche notevoli tra i vari paesi: si va dalla Spagna che si limita allo studio delle principali isometrie e da un punto di vista essenzialmente intuitivo, alla Francia che ne studia le composizioni, all'Ungheria che oltre a ciò affronta anche le similitudini, all'Inghilterra che ne considera lo studio mediante matrici. In tutti i programmi esaminati sono presenti problemi di costruzione con riga e compasso ma una maggiore enfasi su tali argomenti si trova nei programmi ungheresi e francesi. Inoltre in Francia, sin dalla scuola elementare, si presentano problemi a carattere geometrico che l'allievo deve farsi carico di risolvere con strumenti di tipo informatico. L'utilizzo del computer in attività analoghe è previsto anche in Inghilterra ma ad età più avanzata (14-15 anni). Abbastanza nebulosi rimangono gli aspetti della geometria euclidea legati alla dimostrazione. Non è possibile comprendere quale spazio è dato ad essa nonostante alcuni paesi come Francia ed Ungheria ne sottolineino l'importanza.

A parte le differenze indicate, riteniamo con Villani (1991) che al livello scolare considerato per quanto riguarda i contenuti di geometria sostanzialmente vi sia una certa uniformità. La diversità sta invece nell'impostazione didattico-metodologica dei programmi che riflette diversità nelle scelte politiche educative e nel retroterra politico-sociale dei paesi considerati. Ad esempio si passa dall'Ungheria, in cui l'insegnante riceve prescrizioni oltre che sugli argomenti da trattare, sulla loro classificazione (essenziali o complementari) e sul tempo da dedicare loro, alla Francia in cui si raccomanda all'insegnante una attenta, e per certi versi rigida, pianificazione dell'attività, dei suoi obiettivi, delle fasi e tempi in cui si articola, e di tenere presente il progressivo avanzamento dell'intero gruppo classe (ed in entrambi i paesi la scansione dei programmi è annuale), a poi a paesi come la Spagna, i cui programmi non sono annuali ma riguardano gli interi cicli scolari, dove all'insegnante viene data una ricca serie di indicazioni e suggerimenti culturali ma è lasciata grande autonomia nelle scelte e culturali e metodologiche e dove gli si raccomanda di operare in modo differenziato con gli allievi e per gruppi di livello, ed infine all'Inghilterra, i cui programmi sono per l'intero ciclo dell'obbligo e sono concepiti e scanditi in relazione al livello di appendimento raggiunto dagli allievi.

Riferimenti bibliografici

HOWSON A. G., WILSON B., 1986, *School Mathematics in the 1990s*, ICMI Study series, Cambridge University Press, Cambridge

HOWSON A. G., 1991, *National Curricola in Mathematics*, The Mathematica Association, University of Southampton

MALARA N.A., 1994, Analisi dei programmi Spagnoli di Matematica per la scuola primaria

e secondaria obbligatoria, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 17A, n. 4, 1994, 307-333
MALARA N.A., 1994, La geometria nei programmi di alcuni paesi europei per allievi dai 6 ai 16 anni, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 1994, vol. 17A-B, n. 6, 676-700
VILLANI V., 1991, Quale matematica per l'Europa del 1992, *Archimede*, n. 4, 163-175
WATSON A, 1993, Russian Expectations, *Mathematics Teaching*, 145, December, 5-9

3. LO SVILUPPO DELLA CONOSCENZA GEOMETRICA

Le principali teorie circa lo sviluppo delle concezioni e del pensiero geometrici sono due, la prima fa capo a Piaget (1948), la seconda è dovuta ai coniugi Van Hiele (1957).

Gli studi di Piaget riguardano lo sviluppo della rappresentazione dello spazio nel bambino, rappresentazione intesa come immagine mentale dello spazio reale in cui questo agisce, dovuta non ad un semplice richiamo di memoria ma ad una ricostruzione attiva di oggetti a livello simbolico. Schematizzando al massimo si può dire che Piaget era interessato alle rappresentazioni mentali del bambino dallo spazio reale a quello di rappresentazione ed alla enucleazione di quegli attributi che venivano conservati in queste trasformazioni ed inoltre all'osservazione di come questi variavano al variare dell'età. Secondo i suoi studi le prime trasformazioni prodotte dal bambino conservano proprietà topologiche degli oggetti (interno ed esterno, confine di un insieme, apertura e chiusura di curve). Solo più tardi questi riesce a trasferire al suo spazio di rappresentazione attributi euclidei dell'oggetto (lunghezza di segmenti e ampiezza di angoli) che lo portano alla conquista di concetti di lunghezza, area, volume, e così via (8-9 anni di età). È solo da questo momento che il bambino può riuscire a misurare e a compiere compiti di più alto livello. Occorrerà tuttavia attendere gli 11-12 anni perchè egli sia capace di sviluppare ragionamenti che non abbiano come punto di partenza i dati dell'esperienza concreta ma realtà puramente ipotetiche, aprendosi al pensiero ipotetico-deduttivo.

I lavori di Piaget, tradotti anche in lingua Italiana, hanno determinato una marea di ricerche, e come riportato da Herskowitz (1990), alcune hanno dato conferma alle sue teorie altre invece ne hanno confutato i risultati

Gli studi dei Van Hiele sono più specificamente rivolti alla geometria come sistema deduttivo, pur partendo dallo studio dello spazio-ambiente. I Van Hiele sostengono uno sviluppo progressivo del pensiero geometrico che essi scandiscono nei seguenti livelli:

PRIMO LIVELLO: *Visualizzazione*
L'allievo percepisce concetti geometrici in termini della loro apparenza fisica; le figure sono riconosciute dalla loro forma come un tutto, non dalle loro proprietà (ad esempio egli può dire triangolo, quadrato, cubo ecc. ma non identificare esplicitamente loro proprietà).
SECONDO LIVELLO: *Analisi-descrizione*
L'allievo può analizzare proprietà di figure, ad esempio "i rettangoli hanno le diagonali uguali", o "i rombi hanno tutti i lati uguali" , ma non collega tra loro figure e/o proprietà.
TERZO LIVELLO: *Classificazione*
L'allievo può collegare figure e proprietà, può seguire una semplice deduzione ma non un'intera dimostrazione. Ad esempio può giustificare che un quadrato è un rettangolo ma non sa organizzare una sequenza di proposizioni per giustificare altre osservazioni.
QUARTO LIVELLO: *Deduzione*
L'allievo sviluppa sequenze logiche per dedurre una proposizione da un'altra, ad esempio prova come dal postulato della parallela segue che la somma degli angoli in un triangolo è uguale ad un angolo piatto. Egli può allora "reinventare" le dimostrazioni o almeno riprodurle. Comprende il significato di deduzione ed il ruolo dei differenti elementi nella struttura deduttiva.
QUINTO LIVELLO: *Rigore e metacognizione*
L'allievo analizza vari sistemi assiomatici con alto grado di rigore, paragonabile al sistema fondazionale di Hilbert per la geometria. Egli comprende proprietà dei sistemi deduttivi quali coerenza, indipendenza e completezza dei postulati.

Per aiutare l'allievo nel passaggio attraverso i livelli i Van Hiele specificano una sequenza di fasi attraverso cui organizzare l'apprendimento, che sono:
FASE 1: *Ricerca*
L'insegnante coinvolge gli allievi in discussioni riguardanti gli oggetti di studio. L'insegnante impara come gli allievi interpretano le parole e dà loro una certa comprensione dell'argomento da studiare. Vengono poste domande e fatte osservazioni che usano vocabolario e oggetti dell'argomento in gioco e stabiliscono la base per ulteriori indagini.
FASE 2: *Orientamento diretto*
L'insegnante struttura con attenzione il lavoro di esplorazione in sequenze attraverso la quale gli allievi cominciano a capire che direzione sta prendendo l'indagine e acquistano dimestichezza con le strutture caratteristiche. Molte delle attività di questa fase sono compiti ad un passo di deduzione che mirano a specifiche risposte.
FASE 3: *Esplicitazione*
Traendo frutto da esperienze precedenti e con minimi interventi da parte

dell’insegnante, gli allievi raffinano l’uso del loro vocabolario ed esprimono le loro opinioni in merito alle strutture interne allo studio. Durante questa fase, gli allievi cominciano a formare il sistema di relazioni dello studio.

FASE 4: *Libero orientamento*

Gli allievi hanno ora a che fare con compiti a più passi di concatenazione o che possono essere risolti in più maniere. Acquisiscono esperienza nel trovare il proprio modo di risolverli. Grazie al loro orientarsi nel campo dell’indagine, molte delle relazioni fra gli oggetti di studio diventano a loro chiare ed esplicite.

FASE 5: *Integrazione*

A questo punto gli allievi rivedono i metodi a loro disposizione e formano uno sguardo d’insieme. Oggetti e relazioni vengono unificati ed interiorizzati in un nuovo ambito del pensiero. L’insegnante incoraggia questo processo fornendo osservazioni globali su ciò che gli allievi già sanno, avendo molta cura a non intodurre ora idee nuove o discordanti.

In relazione a ciascuno di tali livelli i Van Hiele suggescono percorsi di insegnamento che aiutino gli studenti a progredire da un livello all’altro.

Altri caratteri della teoria dei Van Hiele sono espressi nei seguenti punti:

- la memorizzazione non è considerata propria di alcun livello;
- lo studente avanza tra i livelli senza salti;
- i livelli sono globali, ossia lo studente è allo stesso livello in tutti i contesti;
- lo studente che agisce ad un livello non può interagire o comprendere l’insegnamento ad un livello successivo;
- lo sviluppo del pensiero da un livello al successivo è dovuto ad esperienze di insegnamento-apprendimento e non dipende molto dalla maturità dello studente.

Quest’ultimo punto segna una differenza fondamentale tra i due modelli di sviluppo del pensiero geometrico: per Piaget l’apprendimento matematico e lo sviluppo intellettuale sono intimamente connessi allo sviluppo biologico, per i Van Hiele non è tanto l’età dell’allievo che conta quanto l’esperienza da lui compiuta nel processo insegnamennto-apprendimento e l’età interviene in quanto indica il tempo necessario al compiersi del processo stesso. Conseguenza importante di questa differenza di concezione riguarda la possibilità dell’insegnante di intervenire per migliorare/accelerare l’apprendimento.

La teoria dei Van Hiele ha attratto molti educatori in matematica ed in un primo tempo è stata molto studiata in Russia, dove sulla sua base è stato varato e sperimentato un piano di rinnovamento dell’insegnamento della geometria sin dalla scuola elementare (si veda Hoffer, 1968). I risultati raggiunti, diffusi in USA, hanno spinto molti ricercatori americani a fare altrettanto in varie parti d’America e studi sono stati avviati sin dai primi anni settanta sia sul versante dell’insegnamento che della ricerca. Tuttora nell’area occidentale vengono sviluppati affinamenti e approfondimenti della teoria (si veda Jaime e Gutierrez, 1990). Tuttavia aspetti particolari di essa sono stati messi in crisi o confutati da ricerche successive, in particolare si è contestata la collocazione del quinto livello e la concezione della globalità dei livelli (riguardo a questo punto Herskowitz (1990) cita studi dai quali è emerso che uno studente può agire a livelli diversi a seconda del contesto).

I livelli di Van Hiele sono stati usati da ricercatori per stabilire la capacità in geometria di alcune categorie di allievi. Ad esempio in vari paesi si sono condotti studi su futuri insegnanti elementari e si è visto che generalmente la loro abilità non andava oltre il secondo livello.

Per la realizzazione di questi studi, che si basavano generalmente su test, gli studiosi erano indotti a scegliere degli argomenti e graduarne le attività, in modo funzionale ai vari livelli.

Particolarmente interessanti per la scuola media sono i punti considerati da De Villiers e Njisane (1987) in relazione alle figure geometriche, punti che investono essenzialmente i primi tre livelli con qualche proiezione sul quarto livello. Essi sono: *1) riconoscimento e rappresentazione di tipi di figure; 2) riconoscimento visivo di proprietà; 3) uso e comprensione della terminologia; 4) descrizione verbale di proprietà di una figura o suo riconoscimento da una descrizione verbale; 5) deduzione ad un passo; 6) piccole catene di deduzioni; 7) relazioni tra figure; 8) lettura ed interpretazione di date definizioni*. I punti 1 e 2 riguardano il primo livello, i punti 3 e 4 il secondo; i successivi riguardano il terzo livello. Riportiamo in tavola 4 esempi di attività in relazione a ciascuno di tali punti. Dalla ricerca di De Villiers e Njisane i punti 7 e 8 sono risultati di più difficile raggiungimento, probabilmente perché richiedono un controllo ad ampio raggio delle proprie conoscenze.

A nostro avviso la scansione dei quattro punti relativi al terzo livello non è sequenziale, a meno che gli ultimi due non si intendano riferiti ad attività di tipo metacognitivo. I punti sopraelencati possono però essere utili, ai fini della programmazione didattica, ad un insegnante che privilegi nell'insegnamento della geometria l'affinamento logico-linguistico e l'avvio alla deduzione.

TAVOLA 4

ESEMPI DI ATTIVITÀ SECONDO I PUNTI INDICATI DA DE VILLIERS E NJISANE

Punto 1

(Sono date diverse figure allo studente). Contrassegna con una T ogni triangolo e con una Q ogni quadrilatero. Spiega come hai fatto a sapere quali sono triangoli (o quadrilateri) e quali no. Scrivi il numero di figure che non sono triangoli (o quadrilateri) e spiega per ciascuna di esse perché non è un triangolo (quadrilatero).

Punto 2
(Sono date diverse figure allo studente tra cui almeno un rettangolo o un rombo, un quadrato). Per ciascuna figura, scrivi tutti i nomi che sono appropriati per la figura: quadrato, rettangolo, rombo, parallelogrammo e romboide. Spiega l'assegnazione che tu hai fatto per ciascuno.

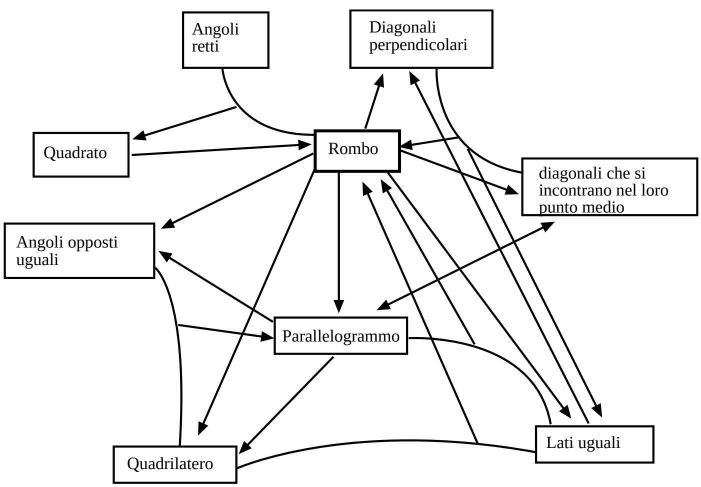
Punto 3
Cosa vuol dire "angoli consecutivi" in un quadrilatero? Spiega con parole tue. Cosa vuol dire "angoli opposti" in un quadrilatero? Spiega con parole tue.

Punto 4
Esprimi una proprietà delle diagonali di un rombo, una proprietà delle diagonali di un rettangolo. Esprimi una proprietà per gli angoli in un rombo, in un rettangolo.
Di un quadrilatero si sa che le diagonali si dimezzano scambievolmente, Che tipo di quadrilatero può essere?

Punto 5
Di un certo quadrilatero Luigi dice che ha le diagonali perpendicolari. Che tipo di quadrilatero può essere? Mario dice che è un rombo. Cosa sa in più Mario sulle diagonali?

Punto 6
1. Disegna un parallelogramma ABCD. H è il piede della perpendicolare condotta da A sulla diagonale BD e K è il piede della perpendicolare condotta da C sulla diagonale BD. Che cosa determina la spezzata AKCH? Perché?
2. Dato un quadrilatero considera la figura ottenuta congiungendo i punti medi delle coppie di suoi lati consecutivi. Di che tipo di quadrilatero si tratta? Giustifica la risposta.

Punto 7
Commenta il seguente diagramma (Jaime e Gutierrez 1990 pag. 327)



Punto 8

1. Considera le seguenti affermazioni:

A: È un quadrilatero avente due coppie di lati paralleli

B: È un quadrilatero in cui la somma di due qualsiasi angoli consecutivi è pari ad un angolo piatto. Si tratta dello stesso tipo di quadrilatero? Perché? Perché no? Giustifica la risposta.

2. In un esame di geometria è stato chiesto di definire un rettangolo

Alla domanda sono state date queste risposte:

a) *Un rettangolo è un parallelogrammo che ha tutti gli angoli retti*

b) *Un rettangolo è un parallelogrammo che ha almeno un angolo retto*

c) *Un rettangolo è un quadrilatero che ha tre angoli retti*

d) *Un rettangolo è un quadrilatero i cui lati opposti sono uguali e tutti i suoi angoli sono retti*

L'insegnante decide di dare 10 alla risposta assolutamente corretta. Supponi di essere l'insegnante, quanti punti daresti per ciascuna definizione? Giustifica la tua risposta (supponi di dover spiegare a ciascun studente valutato meno perché gli hai dato un voto più basso).

Riferimenti Bibliografici

HERSHKOWITZ R., 1990, Psychological Aspects of Learning Geometry, in Nesher P., Kilpatrik J. (eds), *Mathematics and Cognition*, 70-95

CLEMENT D.H., BATTISTA M.T., 1992, Geometry and Spatial Reasoning, in Grouws D. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NY, 420-464

DE VILLIERS M, NJISANE, 1987, The development of geometric thinking among high school pupils in Kwazulhn, in Proc. *PME XI*, vol. 3, 117-123

HOFFER A., 1983, Van Hiele-based Research, in Lesh R., Landau M. (eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, NY, 205-27

JAIME A, GUTIERREZ A., 1990, Una propuesta de fundamentation para la enseñanza de la geometria, in Linares S., Sanchez M.V. (a cura di), *Teoria y prática en educación matemáctica*, Alfar Siviglia

PIAGET J., INHELDER B., SZEMISKA A., 1948, *La Géométrie spontanéé de l'enfant*, (tr. it. 1978, La Geometria spontanea del bambino, Giunti Barbera, Firenze)

4. CARATTERI DELLA GEOMETRIA E DEL DISCORSO GEOMETRICO

4.1. Caratteri della geometria

Una delle principali caratteristiche della geometria risiede nei legami complessi che essa ha con lo spazio fisico che ci circonda. In effetti essa si costituisce inizialmente come modellizzazione di questo spazio, ma poi viene ad acquisire, con la sistemazione euclidea, una struttura intrinseca, di tipo logico-deduttivo. In tale sistemazione gli enti di cui la geometria si occupa sono oggetti ideali che vengono definiti a partire da alcuni prefissati (gli elementi primitivi) e studiati nei loro mutui rapporti secondo certe "regole del gioco" (nozioni comuni e assiomi). Con tale sistemazione la geometria viene così a prescindere da quegli aspetti esperienziali che ne hanno determinato la genesi.

Nell'insegnamento l'impostazione euclidea della geometria ha dominio incontrastato fino agli anni sessanta, anche se accanto ad essa si viene a considerare la geometria cartesiana, ambiente in cui i fatti geometrici sono opportunamente tradotti, elaborati ed interpretati mediante il linguaggio algebrico.

Le revisioni critiche dei libri di Euclide sviluppatesi nella seconda metà dell'ottocento mettono in luce lacune di tipo logico la cui sistemazione richiede un livello di rigore non trasferibile nell'insegnamento medio, nello stesso tempo la nascita delle geometrie non euclidee e successivamente lo sviluppo della concezione strutturalista della matematica ne circoscrivono l'importanza, e aprono la strada ad altre impostazioni per lo studio della geometria stessa.

Tale evoluzione della geometria si riflette oggi nell'insegnamento e da un punto di vista didattico si pone il problema dei raccordi dei suoi diversi aspetti, tuttavia il maggior problema rimane il raccordo tra geometria come scienza descrittiva dello spazio in cui viviamo e quello più generale di geometria come sistema ipotetico-deduttivo. Questo problema si pone principalmente nella scuola media e appare di difficile soluzione proprio per la difficoltà di ripercorrere, o anche solo giustificare nell'evoluzione storico-culturale, il passaggio dal momento della matematizzazione – costruzione di un modello dall'osservazione degli oggetti dell'ambiente ed in relazione ai problemi concreti che essi pongono – a quello dello studio teorico del modello stesso.

Tale problema viene affrontato nei diversi paesi in sintonia con il proprio retroterra socio-culturale. Come è noto, nei paesi di cultura pragmatica, quali l'Inghilterra e altri di sua influenza, viene dato maggior spazio allo studio empirico-induttivo, basato sull'osservazione degli oggetti che ci circondano; invece nei paesi di cultura greco-latina, come la Francia o l'Italia, il richiamo all'osservazione è visto funzionale alla costruzione di concetti geometrici che andranno successivamente a studiarsi da un punto di vista logico-relazionale.

Caratteristico in geometria è l'uso delle rappresentazioni grafiche, elementi di mediazione tra realtà e idealizzazione matematica, che hanno un duplice volto, uno astratto in relazione agli oggetti reali, ed uno concreto rispetto ai concetti astratti. Così il disegno di un parallelogrammo può rappresentare un certo quadrato visto in prospettiva nella trasposizione grafica della visione di un soggetto (contesto reale) ed in questo caso la rappresentazione è una astrazione dall'oggetto concreto, come può rappresentare, per evocazione, una classe di oggetti della geometria piana (contesto teorico) ed in questo caso la rappresentazione è una concretizzazione di oggetti ideali.

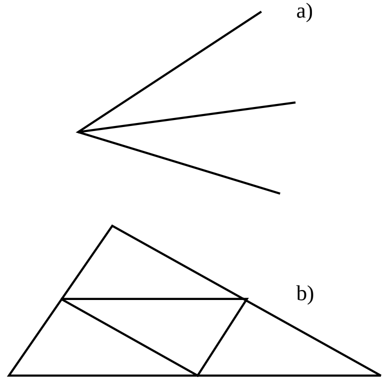
Alcuni studiosi della psicologia dell'apprendimento (si veda ad esempio Fishbein 1992) sostengono che i concetti geometrici, almeno quelli della geometria elementare, presentano una duplice natura: concettuale e figurale. La componente concettuale riguarda la rappresentazione mentale, che caratterizza una classe di oggetti o di fatti in base a proprietà comuni, frutto del processo di astrazione; la componente figurale invece si riferisce alle immagini come rappresentazioni sensoriali degli oggetti, espresse dalla rappresentazione grafica e che riflettono la loro provenienza d'origine: lo spazio reale. Per sottolineare questa duplice natura dei concetti geometrici essi parlano di concetti figurali.

Il legame che viene a determinarsi tra oggetti ed esperienze reali e relative concettualizzazioni geometriche viene ad essere alla base dell'interazione tra aspetto figurale ed aspetto concettuale ed il ragionare su figure geometriche dunque può essere visto come un modo di facilitare l'interazione tra le due componenti dei concetti figurali. Lo sviluppo corretto ed efficiente del pensiero geometrico dipende dalla capacità di armonizzare queste due componenti, mettendo in luce il contributo di ciascuna delle due, tuttavia in certi casi esse agiscono in modo contrastante cosa che produce difficoltà ed errori negli allievi. Mariotti (1992) sostiene che da un punto di vista didattico questa visione implica sin dall'inizio una attenzione agli aspetti concettuali ed un mutamento di atteggiamento nell'approccio alla geometria: in un approccio centrato sulla manipolazione ed osservazione di oggetti il ragionamento spesso viene mantenuto sotto l'influenza prevalente degli aspetti figurali e l'armonizzazione con gli aspetti concettuali, che viene considerata spontanea ed intuitiva, non è per nulla scontata. La mancata attenzione agli aspetti concettuali rende difficile se non impossibile il passaggio graduale alla formalizzazione.

4.2. Il discorso geometrico

Il discorso geometrico si sviluppa principalmente sull'interazione coordinata di differenti registri, il figurativo e il discorsivo-testuale, quest'ultimo comprendente anche il linguaggio simbolico, ed importante per tale interazione è il ruolo implicato dalla percezione (capacità di leggere ed interpretare rappresentazioni grafiche) e dalla visualizzazione (capacità di rappresentare visivamente concetti, fatti geometrici o l'elaborazione di percezioni). C. Laborde (1988), attenta studiosa del linguaggio matematico ed in particolare geometrico, sostiene che è proprio della geometria l'utilizzo di più sistemi di significanti: i differenti sistemi di rappresentazione grafica; la lingua naturale ed un codice semiologico proprio; le scritture simboliche impiegate spesso incastrate all'interno del discorso geometrico.

L'impiego di questi sistemi di significanti, dal funzionamento diverso, dà luogo a possibilità di interpretazioni diverse nel passaggio da un sistema ad un altro. Inoltre una figura può essere interpretata in modi diversi, ad esempio la figura riportata in a) può essere interpretata nel piano come due angoli consecutivi, o come un angolo con evidenziata la sua bisettrice o addirittura può essere vista nello spazio come un triedro; ancora la figura riportata in b) può essere vista in modo diverso o come generata da quattro triangoli congruenti giustapposti, o da tre parallelogrammi intersecantesi in un triangolo.



Data poi una figura geometrica di accompagnamento al testo verbale di un problema, notevole importanza ha, rispetto al trattamento che viene indotto sulla figura per la risoluzione del problema, la congruenza semantica tra essa e il testo (Duval, 1988): si è rilevata infatti una forte l'incidenza sulla risposta degli allievi della concordanza semantica o non concordanza tra tali elementi.

Occorre inoltre tenere presente che anche nel discorso verbale si riflettono punti di vista molteplici con l'espressione di enunciati linguistici diversi, non equivalenti rispetto alle implicazioni matematiche che si possono trarre e che orientano il discorso, come si rileva dalle seguenti espressioni, riportate da C. Laborde nel citato articolo, circa l'incidenza di tre rette in uno stesso punto: "tutte e tre passano per lo stesso punto", "esiste un stesso punto appartenente ad ognuna di esse", "il punto di intersezione di due di esse giace sulla terza retta".

Riguardo l'aspetto discorsivo/testuale sempre C. Laborde (1995) fa presente l'enorme economia di espressione consentita dall'uso di simboli ma evidenzia la difficoltà della loro decodifica nella lettura, prezzo da pagare per tale concisione. Sottolinea la complessità linguistica del discorso geometrico, i cui enunciati condensano più relazioni tra gli elementi in gioco, cosa che si riflette in gruppi nominali complessi, quali ad esempio:
- il cerchio di centro O e di raggio r;
- il cerchio di centro O e passante per il punto A;
- il piede della perpendicolare condotta da A alla retta s;
- la tangente nel punto P del cerchio C.

La studiosa sostiene che l'analisi linguistica dei testi debba far parte delle attività di formazione insegnanti e sottolinea l'importanza che nell'insegnamento si sviluppino attività specifiche rivolte all'apprendimento e uso del linguaggio matematico.

Nell'insegnamento della geometria occorre pertanto promuovere negli allievi non solo l'uso dei vari sistemi di rappresentazione, ma anche il coordinamento tra i registri verbale, grafico e simbolico, attraverso specifiche attività di conversione da un registro ad un altro.

Oggi nella pratica didattica, anche per lo spazio dato ai problemi, il passaggio dal testo verbale alla rappresentazione grafica è abbastanza usuale ma spesso è sottovalutato nelle difficoltà, dovute anche all'intrecciarsi del linguaggio simbolico. Al riguardo basta considerare il seguente esempio:

Disegna una circonferenza e due suoi diametri perpendicolari. Indica con a e p le rette che contengono questi diametri e con A ed A' le intersezioni della retta a con la circonferenza. Disegna poi due rette r ed s tra loro perpendicolari e passanti per A; scegli un punto B su r. Disegna la retta r' per B ed A' e la retta s' per A' e perpendicolare ad r'. Indica con B' l'intersezione di s con s'. Disegna il rettangolo ABCD che ha il lato AB sulla retta r.

Meno praticato è il passaggio dal registro grafico a quello verbale, anche se oggi sono presenti sui libri di testo esercizi in cui si chiede di descrivere al telefono ad un amico una data figura in modo che l'altro la ricostruisca. In tavola 5 sono riportati due di tali esercizi tratti dal libro di testo di F. Speranza (vol. 1, p. 85). Questa attività risulta particolarmente difficile quando richiede da parte dell'allievo l'operazione di assegnazione e gestione dei nomi degli elementi in gioco. Si consideri ad esempio il problema, ampiamente studiato da C. Laborde (1982) nella sua tesi di dottorato, di descrivere la figura qui a lato.

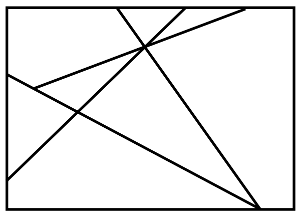
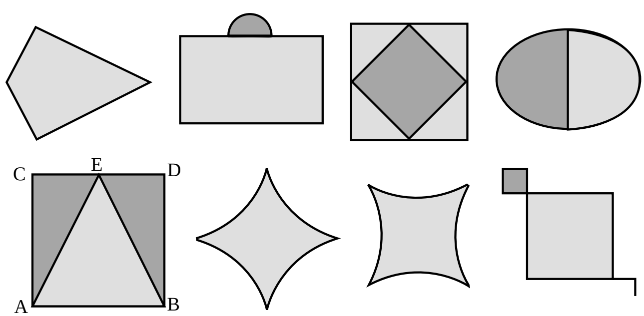


TAVOLA 5

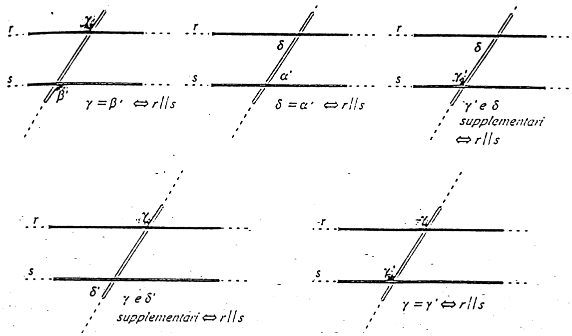
Descrivi le seguenti figure ad un tuo amico in modo che egli possa riprodurle (F. SPERANZA, *La Matematica: parole, cose, numeri e figure*, Zanichelli, 1984, vol. 1, pag. 85)



Assolutamente trascurate sono invece le attività volte alla interpretazione di rappresentazioni grafiche accompagnate da codifiche simboliche di relazioni tra gli elementi in gioco, come quelle sotto riportate, che risultano invece essenziali per la comprensione e sviluppo del discorso geometrico, come sottolineato da R. Iaderosa (1995).

TAVOLA 6

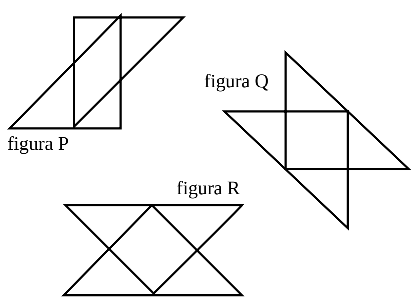
Rappresentazioni (tratte da A.M. ARPINATI, M. MUSIANI, *Corso di Matematica*, Zanichelli, 1994, vol. 1, pag. 112)



Interessanti ricerche sugli aspetti coinvolti nel passaggio dal registro grafico a quello verbale e viceversa sono state realizzate da E. Gallo (1984, 1993) con allievi dai 14 ai 16 anni. Tali ricerche riguardano l'analisi di comportamenti e produzioni di allievi coinvolti in attività di:

a) formulazione di messaggi orali e/o scritti di descrizione di una data figura per la sua riproduzione e loro interpretazione;
b) costruzione di figure geometriche soddisfacenti condizioni espresse verbalmente e graficamente (compresenza dei registri verbale e grafico).

Riguardo il passaggio dal registro grafico al registro verbale, passaggio che implica per l'allievo la percezione della figura, la riorganizzazione percettiva e cognitiva della stessa e la costruzione del messaggio, in uno degli studi viene proposto agli allievi, in tempi diversi, di descrivere le figure riportate a lato. La scelta delle figure viene dettata dalle seguenti esigenze: ogni figura utilizzata è bene che sia: a) percettivamente chiara, b) costituita da elementi geometrici noti al soggetto,



c) descrivibile in più modi (sia pensandola in estensione, come parte di piano, sia pensandola come percorso) ed inoltre percettivamente diversa se disegnata in diverse posizioni.

La studiosa sostiene che l'analisi dei messaggi scritti dagli allievi e delle figure disegnate nella decodifica di tali messaggi ha permesso di osservare:

- il ruolo della percezione nella visualizzazione delle figure e nella organizzazione di tale visione (centrazione su figure o parti di figura percettivamente rilevanti per forma o posizione);
- la presenza di stereotipi geometrici, o modelli standard, nelle rappresentazioni mentali di figure e di relazioni geometriche e di stereotipi linguistici (che bloccano le attività più evolute sulle figure geometriche, come l'analizzare o il confrontare, a favore dell'attività più elementare, costituita dal riconoscimento);
- la necessità di ordine e regolarità (la cui mancanza produce lacune nella comunicazione).

Quanto osservato risulta evidente dalle strategie di descrizione delle figure messe in atto dagli allievi ma anche dalla costruzione del messaggio. In particolare, l'uso di termini geometrici per denotare le figure o parti di esse è rivelatore di una relazione antagonista tra il livello della percezione e quello della conoscenza. Il linguaggio diviene quindi rivelatore di conflitti tra la figura che il soggetto vede ed il modello attivato dalla figura stessa. I conflitti sono sia interni ad un medesimo soggetto, e riguardano le interferenze tra una figura ed il suo modello standard o tra una figura ed il modello standard di un'altra da essa evocato, sia tra due soggetti che interagiscono e che hanno in atto modelli diversi nella stessa situazione.

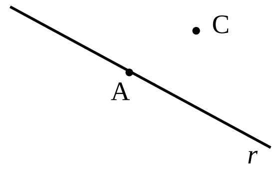
Nel processo di decodifica si è invece osservato che :

- vi è la tendenza, di fronte a messaggi lacunosi od errati, a colmare i vuoti di informazione sulla base del messaggio globale, utilizzando tutti i fenomeni della percezione e della regolarizzazione;
- la visualizzazione iniziale della figura, generata dalle prime informazioni sul messaggio, può costituire un blocco e non uno stimolo alla comprensione delle informazioni successive a causa del fenomeno della rigidità e fissità dei modelli mentali;
- un forte blocco al passaggio della comunicazione è creato anche dai modelli standard e dai conflitti tra i modelli attivati dalla figura.

Inoltre si è rilevato che in situazione interattiva di comunicazione si verificano delle trasformazioni nelle strategie di descrizione: si passa dalle strategie per parti, per poligoni parziali (più oggettuali e concrete) ad una strategia per segmenti (più lineare e legata alla visione del piano come insieme di punti e rette, regolati nei loro reciproci comportamenti da appartenenze ed allineamenti).

Gli studi relativi al punto b) sono invece incentrati su problemi grafici, con l'obiettivo di analizzare la strutturazione dei modelli geometrici posseduti dagli allievi e la loro utilizzazione in situazione di risoluzione di un problema. Uno dei problemi grafici proposti è il seguente: *Disegna il rettangolo ABCD che ha il lato AB sulla retta r.*

Sono assegnati una retta r, obliqua rispetto l'orizzontale, un suo punto A ed un punto C fuori di essa, come nella configurazione a lato. Agli allievi viene fornito un foglio su cui gli elementi assegnati sono ripetuti più volte e viene detto loro di non ritornare sulla figura cancellando i vari tentativi di soluzione ma di ricominciare ogni volta ex novo.



Nel problema interagiscono i registri verbale grafico e simbolico attraverso:

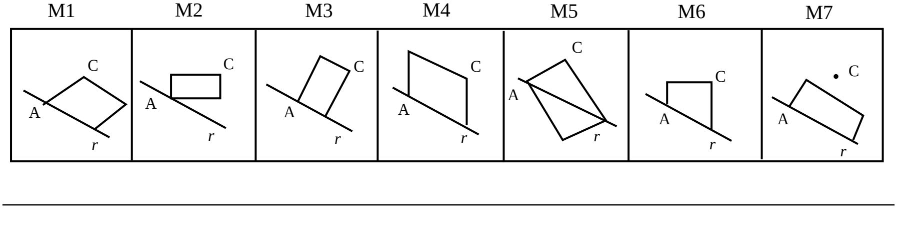
- *parole chiave* che quantificano (il, la) o che specificano (rettangolo, lato, retta);
- *posizione dei dati geometrici* (posizione sul foglio e posizione reciproca);
- *collocazione dei simboli* (nel testo, nei dati grafici).

L'analisi delle produzioni degli allievi, le più frequenti delle quali sono riportate in tavola 7, evidenzia come la rigidità dei modelli mentali permetta a pochi soggetti di raggiungere la soluzione corretta, a volte con molte difficoltà. Il processo necessario a ciò richiede in ciascun allievo la capacità di trasformare i propri modelli, più o meno formati, in un modello adeguato allo scopo e tale trasformazione avviene attraverso un duplice controllo, discendente e ascendente, che si sviluppa dinamicamente dal polo soggettivo a quello oggettivo.

C'è da osservare che studi finalizzati a mettere a fuoco le dinamiche che intervengono nel coordinamento dei diversi registri con particolare riferimento al grafico e verbale sono attualmente sviluppati anche in altri paesi (si veda ad esempio Lopes-Real, 1995).

TAVOLA 7

Soluzioni più frequenti prodotte dagli allievi al problema: *Disegna il rettangolo ABCD che ha il lato AB sulla retta r*, sulla base dei dati grafici sopra indicati



Riferimenti bibliografici

DUVAL R., 1988, Pour una approche cognitive des problèmes de géométrie en tres de congruence, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Université L. Pasteur et IREM de Strasburg, vol. 1, 57-74

FISHBEIN E., 1993, The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162

GALLO E., 1985, Geometria, percezione, linguaggio, *L'Educazione Matematica*, VI, 61-103

GALLO E., 1993, Modellizzazione e geometria in soggetti di 14-16 anni: presentazione e analisi di ricerche, X Seminario Nazionale di Ricerca in didattica della matematica "*Geometria: epistemologia, metodologie di ricerca, tendenze attuali*", Pisa, dicembre 1993

IADEROSA R., 1995, Indagare - verificare - argomentare - dimostrare: un'opportunità didattica da non trascurare nella scuola media soprattutto in vista della scuola secondaria superiore, comunicazione al XV *Convegno dell'Unione Matematica Italiana*, Padova, settembre 1995

LABORDE C., 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathematique*, thèse Université J. Fourier, Grenoble

LABORDE C., 1988, L'Enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomenes didactiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, n. 3, 337-364

LABORDE C., 1995, Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?, *La Matematica e la sua Didattica*, 2, 121-135

LOPES-REAL F., 1995, Describing Geometric Diagrams as a Stimulus for Group Discussion, *Proc. PME XIX* Recife, luglio 1995, vol. 2, 342-349

MARIOTTI M.A., 1992, Immagini e concetti in geometria, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 15, sez. A, n. 9, 863-885

5. L'ANGOLO: UN CASO PARADIGMATICO DI CONCETTO IRTO DI OSTACOLI

5.1. Il concetto di angolo

L'angolo è uno dei concetti geometrici tra i più delicati e complessi, per gli aspetti diversi ad esso concorrenti ma discordanti che ne rendono problematico l'apprendimento.

Solitamente in paesi come l'Italia, in cui l'insegnamento della geometria euclidea ha una tradizione consolidata, l'approccio alla geometria avviene a partire dagli elementi fondamentali e sin dall'inizio viene data la definizione di angolo come "parte di piano delimitata da semirette aventi la stessa origine", di tipo statico, prescindendo dal considerare esperienze che possano giustificare agli occhi dell'allievo l'introduzione di questo concetto matematico. Questa introduzione formale ed il tipo di rappresentazioni cui si fa ricorso producono spesso nell'allievo un'acquisizione del concetto, e di altri ad esso relativi, oscura o distorta, come testimoniato da studi di area franco-tedesca su cui ci soffermeremo più avanti.

In paesi di area inglese, che promuovono una matematica “realistica”, ossia che punta alla matematizzazione del reale a partire dall’osservazione di situazioni pratiche, ed in cui la concezione stessa di geometria è differente (basti pensare allo spazio dato allo studio del moto), si ha un approccio al concetto di angolo centrato sull’osservazione di corpi in movimento rotatorio e sulla rappresentazione grafica di tali movimenti. L’aspetto di tale concetto che prevale e di tipo dinamico ed allude a quello di angolo orientato.

Le due impostazioni, entrambe fortemente poggiate sull’intuizione, riflettono due aspetti diversi del concetto di angolo, uno statico che prescinde dall’orientamento nel piano, l’altro dinamico che viceversa è legato ad esso. Nel primo caso, proprio per la mancanza dell’orientamento nel piano, ci si scontra con la difficoltà, date due semirette concorrenti, di avere individuati nel piano due angoli e questo comporta l’immediata definizione di angolo convesso o concavo (concetti su cui ritorneremo più avanti). Nel secondo caso si determina un angolo che è unicamente individuato dal verso con cui si suppone la retta ruoti.

5.2. Studi sull’insegnamento-apprendimento del concetto di angolo

Gli studi nell’ambito della psicologia dell’educazione matematica relativi al concetto di angolo sono pochi, anche se recentemente da parte dei ricercatori si rileva una certa attenzione ai problemi di insegnamento-apprendimento che questo concetto comporta ed è interessante osservare come tali ricerche siano correlate alla cultura geometrica del paese in cui sono realizzate. Ad esempio l’austriaco Krainer (1991) sostiene che da un punto di vista intuitivo si rilevano diverse concezioni di angolo: “angolo come una figura”, “angolo come uno spazio”, “angolo come un’inclinazione”, “angolo come una rotazione”, concezioni che, egli sostiene, non possono essere incluse tutte in una definizione. Ciò implicitamente rivela in Austria una situazione nell’insegnamento di tipo tradizionale. Così Mitchelmore (1989), ricercatore di scuola tedesca, sottolinea l’incapacità degli allevi di confrontare angoli in posizioni diverse nel piano e raccomanda sin dalla scuola elementare un approccio operativo agli angoli, facendo ad esempio realizzare agli allievi tassellazioni, che portano ad attività di confronto tra angoli mediante sovrapposizione o congiunzione di tessere di vario genere. Sostiene l’importanza di prendere in considerazione figure con anche angoli non convessi e di introdurre rappresentazioni che suggeriscano l’idea di angolo come regione piana illimitata. Sottolinea la necessità di affrontare nello stesso tempo esperienze informali sulla rotazione e suggerisce l’uso di rappresentazioni di angoli di rotazione sul modello dell’orologio ma che non si limitino a partire dalle ore 12. Anche in questo studio traspare, per contrasto, un insegnamento tradizionale del concetto di angolo e basato sul

libro di testo. Magina e Hoyles (1991), seguendo la tradizione inglese, studiano lo sviluppo del concetto di angolo nei bambini dai 6 ai 15 anni sulla base di un piano di lavoro che comprende sia l'aspetto dinamico che l'aspetto statico di esso attraverso una serie di situazioni centrate su navigazione e rotazione (aspetto dinamico) e confronto di angoli (aspetto statico). Matos (1994) in uno studio condotto su allievi americani di 10-11 anni rileva diversi modelli cognitivi del concetto di angolo, alcuni anche insoliti, quali angolo come "punto di convergenza", come "sorgente di due traettorie", come "percorso", come "linee che si congiungono", come "punto di incontro", come "figura", che rivelano approcci esperienziali diversi degli allievi al concetto, propri dell'insegnamento di tipo empirico.
Difficoltà generalmente rilevate nelle citate ricerche riguardano:

- la mancanza di riconoscimento di angoli retti se in posizione obliqua e più in generale l'influenza della posizione sul riconoscimento di angoli di stessa ampiezza;
- la presunta dipendenza dell'ampiezza di un angolo dalla lunghezza dei segmenti di retta che lo rappresentano.

5.3. La trattazione degli angoli nei testi scolastici italiani

Dall'esame di libri di testo italiani per la scuola media si rileva il prevalere di testi in cui il concetto di angolo è introdotto ex abrupto attraverso definizione e presentato nell'aspetto statico ("parte di piano delimitata da semirette aventi la stessa origine", se pure in due varianti) e successivamente come "regione piana descritta da una semiretta che ruota intorno alla sua origine". Marginalmente, in due o tre di essi, si trovano evidenziati aspetti complementari, alcuni di approfondimento, quale la caratterizzazione dell'angolo come intersezione o unione di semipiani, altri a sfondo esperienziale per l'approccio al concetto, quali l'accenno all'angolo come "pendenza di una retta rispetto alla orizzontale" (visione riduttiva ma che prelude a successivi utilizzi in geometria analitica) o l'accenno all'angolo come "mutamento di direzione" in un percorso.

C'è da osservare che generalmente nei testi non sono presenti riflessioni, neppure in fase di approfondimento, tra l'aspetto statico e dinamico dell'angolo e comunque nelle successive attività prevale pesantemente il primo aspetto. Da un punto di vista didattico è opportuno un approccio al concetto da diversi punti di vista. Il problema che si pone è quello di concordare tali aspetti, mettendone in luce le diversità, per evitare fratture o "buchi neri" nelle concezioni degli allievi.

Ci sembra importante rilevare come vi siano testi, anche se non tra i più recenti, in cui si abbandona l'impostazione tradizionale: inizialmente si esaminano solidi o figure piane, si opera su/con gli angoli presupponendoli noti, se pure a livello intuitivo, e solo in un secondo momento si ritorna su di essi per chiarirne il concetto, solitamente non vi è una definizione esplicita di angolo, ma si esaminano uno o più aspetti di esso che implicitamente lo caratterizzano.

5.4. Sulle definizioni di angoli particolari

Nei testi scolastici una volta introdotto il concetto di angolo si danno le definizioni di angoli speciali (nullo, giro, piatto, retto) e di angoli concavi e convessi.

Alcuni testi introducono contemporaneamente agli angoli la loro misura, concetto attraverso il quale vengono definiti gli angoli speciali. Non ci soffermiamo qui sull'analisi delle varie definizioni che si incontrano, desideriamo però fare presente che questa scelta, anche se da un punto di vista didattico appare economica, in realtà è culturalmente scorretta, essendo tali concetti indipendenti dalla misura. Un aspetto che andrebbe curato, a livello didattico, riguarda il controllo metacognitivo di quanto si legge ed apprende per mettere in luce eventuali improprietà o elementi tacitamente assunti (ad esempio in un testo come definizione di angolo retto abbiamo letto "*Quando le due semirette sono perpendicolari formano un angolo retto*" ma scorrendo il testo all'indietro alla ricerca della definizione di rette perpendicolari abbiamo letto "*Due rette si dicono perpendicolari quando dividono il piano in quattro angoli retti*.") Questà attività di analisi critica, interessante anche da un punto di vista logico-linguistico, risulta preparatoria alla geometria razionale.

Per quanto riguarda in particolare i concetti di angolo nullo e angolo giro occorre rilevare che se da un punto di vista statico possono ritenersi plausibili visti come caso limite, dal punto di vista dinamico non lo sono più tanto, se non si vuole sconfinare nel cosiddetto angolo generalizzato, ossia l'angolo che tiene conto e "conserva memoria" del movimento compiuto da una delle due semirette per sovrapporsi all'altra. Da un punto di vista matematico ciò che conta non è il movimento compiuto della semiretta che lo genera ma le sue posizioni iniziale e finale e pertanto nei due casi ci si trova di fronte al medesimo angolo.

Come già detto, le prime proprietà che si considerano in riferimento agli angoli sono la convessità e la concavità, e anche in tal caso, si trovano sui testi definizioni diverse. Riteniamo interessante in generale, per promuovere la riflessione negli allievi, lavorare sul confronto di definizioni diverse di una stessa cosa, analizzando su quali elementi si poggiano e le relative implicazioni. Consideriamo le definizioni da noi incontrate riportate in tavola 8. Ci si rende conto che la prima definizione elencata è la più "economica" in termini linguistici e di pensiero e per questo forse è la più frequente; la seconda utilizza il confronto con l'angolo piatto, cosa funzionale ma richiede una conoscenza aggiuntiva; la terza è più complessa, concettualmente e linguisticamente, e può indurre fraintedimenti (il “non contiene tutti i ...” può essere interpretato “non contiene nessuno dei ......”, errore logico frequente nella negazione della quantificazione universale); la quarta è decisamente la più raffinata ma anche la più generale. Per inciso facciamo presente che in uno dei testi esaminati si affronta in generale lo studio delle figure convesse e concave e successivamente si rivede l’angolo sotto questa luce.

C’è da sottolineare inoltre che lo studio condotto nei testi e le rappresentazioni usate si riferiscono sempre ad angoli convessi e generalmente ciò è tacitamente assunto. Questa scelta se pure limita le difficoltà dell’allievo di fatto produce un apprendimento parziale e poco consapevole dei casi generali.

TAVOLA 8

DEFINIZIONI DI ANGOLI CONVESSI O CONCAVI TRATTE DA LIBRI DI TESTO

1. L’angolo che contiene i prolungamenti dei suoi lati si dice concavo, quello che non li contiene si dice convesso.
2. Un angolo è convesso se è minore di un angolo piatto, concavo se è maggiore.
3. Angolo concavo: un angolo che non contiene tutti i segmenti che congiungono due punti del suo contorno. Angolo convesso: un angolo che contiene tutti i segmenti che congiungono due punti del suo contorno .
4 Come tutte le figure geometriche gli angoli possono esser convessi o concavi. Ricordate? Una figura geometrica si dice convessa se comunque si prendano due punti appartenenti ad essa, tutto il segmento congiungente questi punti è contenuto nella figura. Una figura non convessa si dice concava.

Da un punto di vista educativo, in accordo con Mitchelmore, ci sembra opportuno non trascurare con gli allievi di esaminare situazioni in cui siano coinvolti angoli concavi, sia per dare loro una idea delle eventuali maggiori difficoltà che comportano, sia perché in certe situazioni possono essere ottimo strumento di controesempi.

Sempre nell’ottica di esercitare un controllo metacognitivo sulle cose in studio, sul versante delle implicazioni, ci sembra interessante affrontare con gli allievi discussioni sul tipo della seguente:

Cosa si può dire di un angolo piatto in relazione a ciascuna delle definizioni precedenti? Occorrerà ovviamente riferirsi anche alla definizione incontrata di angolo piatto. Supponendo sia la classica “un angolo è piatto quando le semirette che lo delimitano sono una il prolungamento dell’altra”, ci si rende conto che per la prima definizione l’angolo piatto è concavo, per la seconda non è né concavo né convesso, per la terza e la quarta è convesso.

Ovviamente quest’attività, raffinata da un punto di vista linguistico, assume significato in un insegnamento che proceda per ritorni successivi sulle cose studiate, dia spazio alla riflessione e punti alla comprensione dei motivi che stanno dietro a certe definizioni studiate ed ai vantaggi o limiti che ciascuna comporta.

5.5. Confronto e congruenza di angoli. Ampiezza di un angolo e sua misura

Una delle questioni più importanti e spesso confusa nei testi riguarda il confronto e la congruenza (uguaglianza) di angoli, il concetto di ampiezza di un angolo e la relativa misura. Questo problema si riaggancia al più generale problema della congruenza in geometria che ha visto a cavallo del secolo studi e dibattiti approfonditi. Da un punto di vista teorico oggi si concepisce l'ampiezza di un angolo come classe di equivalenza di angoli congruenti, assumendo come primitivo il concetto di congruenza (che viene caratterizzata assiomaticamente), e si definisce una misura sulle ampiezze che risulta essere additiva, ordinata ma il cui ordinamento non conserva l'additività per effetto dell'azzeramento dell'angolo giro. Secondo questa impostazione si comprende come, contrariamente a quanto sostenuto una volta, gli angoli non costituiscano una classe di grandezze (ricordiamo che in una classe di grandezze, date tre grandezze omogenee a, b, c, se mis a < mis b allora mis a + mis c < mis b + mis c).

Da un punto di vista didattico, a questo livello scolare, la strada che ci sembra più pertinente da percorrere sia quella di assumere come primitivo il concetto di ampiezza, il che vuol dire usarlo nel significato intuitivo senza tentarne una definizione (in qualche testo abbiamo letto la definizione di ampiezza come "comune grandezza di angoli congruenti"), ed introdurre il concetto di angoli congruenti come angoli aventi la stessa ampiezza, dopo aver presentato il confronto di angoli ricorrendo alla sovrapponibilità (ideale) ottenuta per trasporto mediante movimento rigido. Solitamente nei testi si ricorre a rappresentazioni grafiche opportune e si suggeriscono concretizzazioni di ciò utilizzando angoli ottenuti per ritaglio da fogli di carta trasparente. Difficilmente si sottolineano le differenze tra le operazioni concrete, le rappresentazioni ed i concetti astratti. Facciamo osservare che da un punto di vista astratto l'uguaglianza per sovrapposizione si scontra con il principio intuitivo "una parte è minore del tutto" (vi sono angoli uguali di cui uno è parte dell'altro), cosa che solitamente rimane nell'ombra, anche per il micro spazio in cui solitamente si opera (tutto si sviluppa a livello di rappresentazioni sui testi, al riguardo si veda Berthelot e Salin 1994). Una riflessione di questo tipo tuttavia evidenzia come la congruenza (uguaglianza in geometria) sia diversa dall'uguaglianza insiemistica.

Può essere didatticamente utile mostrare come assegnato un angolo sia possibile costruirne con riga e compasso un altro di uguale ampiezza e, per l'arbitrarietà degli elementi inizialmente considerati, far osservare che di angoli uguali ad uno assegnato ve ne sono “quanti se ne vogliono” (approccio al concetto di infinito).

Facciamo osservare per inciso come l’idea del trasporto mediante movimento rigido, ossia della uguaglianza per sovrapponibilità, contiene in sé, o meglio riflette, l’uguaglianza a meno di isometrie, questa osservazione può essere importante da effettuare con gli allievi quando si sviluppi un percorso di tipo tradizionale, in cui le isometrie spesso finiscono con l’apparire “altra cosa” rispetto a quanto studiato.

Nella maggioranza dei testi, che ricalcano l’insegnamento tradizionale, si parla di somma di angoli sarebbe invece più opportuno parlare di somma delle ampiezze (così come sarebbe più appropriato parlare di somma di lunghezze e non di somma di segmenti). Qui ci si trova di fronte ad un ostacolo epistemologico, teoricamente la somma di ampiezze non può superare il giro, tuttavia tradizionalmente a questo riguardo si operava nell’ottica dell’angolo generalizzato, tenendo conto del numero dei giri che potevano ottenersi e questo consentiva di trattare l’angolo come una grandezza.

La misura dell’ampiezza di un angolo è, ovviamente, legata alla misura della circonferenza: l’osservazione dell’invarianza del rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza rispetto al raggio porta ad assumere questo rapporto come misura dell’angolo che insiste sull’arco, questo porta ad esprimere le misure degli angoli in termini di numeri reali dell’intervallo $[0, 2\pi)$; per il principio di continuità si ha che, viceversa, dato un numero reale di questo intervallo esiste un angolo che ha ampiezza espressa da tale numero. È nota tuttavia la delicatezza della determinazione della misura di circonferenze ed archi, perché coinvolge un processo al limite.

Comunemente tuttavia la misura degli angoli viene espressa in gradi, sistema di antichissima origine, nato dall’osservazione del moto apparente del sole. Da un punto di vista didattico è opportuno giustificare agli allievi la genesi di tale sistema di misure, data la sua particolarità, ma è bene non soffermarsi troppo sull’aritmetica in tale sistema, più opportuno può essere fare presente che sistemi complessi di misura erano in uso fino a poco tempo fa anche per lunghezze, superficie e capacità (si veda, ad esempio, Arzarello e Altri, 1992, vol. 1, pag. 116-117). Aspetti concettuali legati alla proporzionalità stanno alla base della conversione tra i due sistemi di misura, e sono note le difficoltà che gli allievi incontrano nel loro coordinamento. Tuttavia ci sembra adeguato soffermarsi sulle misure di angoli espresse in radianti visti i conflitti che si generano negli allievi nel prosieguo degli studi nell’affrontare lo studio delle funzioni trigonometriche (si veda Porcaro, 1993).

Strumento di misura degli angoli rispetto al sistema sessagesimale è il goniometro e di esso ne esistono varie versioni, le più economiche non vanno oltre l'angolo piatto e per di più sono graduate da sinistra a destra, sottointendendo, come riferimento, il verso orario di rotazione. Questo cozza con le usuali rappresentazioni degli angoli che sottointendono il verso antiorario di rotazione e non fa che aggiungere ostacoli al già difficile problema del controllo della giusta collocazione dello strumento.

Riferimenti Bibliografici

ARZARELLO E ALTRI, 1992, *Matematica-Problemi*, Morano, Napoli

BERTHELOT R., SALIN M.H., 1994, Common Spatial Representations and their Effects upon Teaching and Learning of Space and Geometry, *Proc. PME XVIII*, Lisbona, vol. 2, 72-79

BIANCHI R., PEDRAZZOLI L., 1987, La nozione di angolo - Cenni teorici, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol 10, Sez. A, n. 7, 637-649

BRACCHI I., COSTA A., L'angolo, 1987, Un possibile itinerario didattico, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 10, Sez. A, n. 7, 650-674

KRAINER K, 1991, Consequences of a Low Level of Acting and Reflecting in Geometry Learning - Findings of Interviews on the Concept of Angle, *Proc. PME XV*, Assisi, vol. 2, 254-261

MAGINA S., HOYLES C., Developing a Map of Children's Conceptions of Angle, *Proc. PME XV*, vol. 2, 358-364

MATOS J.M., 1994, Cognitive Models of the Concept of Angle, *Proc. PME XVIII*, vol. 2, 263-269

MITCHELMORE M. 1989, The Development of Children's Concepts of Angle, *Proc. PME XIII*, Parigi, vol. 2, 304-311

PORCARO R., 1993, Angolo: un problema didattico aperto, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 16, n. 8, 689-712

6. IL PROBLEMA DELL'AVVIO ALLA DIMOSTRAZIONE IN GEOMETRIA

6.1. Introduzione

La dimostrazione è elemento cardine dello sviluppo della conoscenza matematica. Davis ed Hersh nel loro famoso libro *L'esperienza matematica* (1981, *tr. it.* 1985) sostengono addirittura che la dimostrazione caratterizza univocamente la matematica e che non vi è matematica se non vi è dimostrazione. Indicano come prima dimostrazione data quella relativa alla proprietà di un cerchio di essere diviso in due parti uguali da un suo diametro, che dicono risalente a Talete di Mileto (600 a.C.) del quale sottolineano la genialità per aver capito della possibilità e necessità di una dimostrazione, pur trattandosi di una proprietà semplice ed ovvia. Rilevano tuttavia che, rispetto ad un dato argomento, la dimostrazione determina la validità di enunciati, in genere non evidenti ed a volte insospettati, ed aumenta la comprensione dell'argomento stesso. Richiamano poi il valore sociale della dimostrazione, per il costante processo di critica e di conferma cui è sottoposta, che ne suggella la rispettabilità e l'autorità.

Tradizionalmente in Italia l'iniziazione dell'allievo alla dimostrazione avviene all'ingresso della scuola secondaria superiore con lo studio della geometria euclidea. Il passaggio dalla scuola media, dove lo studio della geometria è essenzialmente di tipo operativo e basato sull'intuizione, alla scuola secondaria, dove lo studio si concentra sulle proprietà delle figure geometriche che si desumono per inferenza logica da un sistema di assiomi (o meno rigorosamente da un insieme di proprietà elementari assunte come vere), determina negli allievi un grosso disorientamento.

Questo non è solo un fenomeno italiano ma investe tutti i paesi di cultura greco-latina e particolarmente la Francia, dove il curricolo degli studi è quello più fortemente centrato sugli aspetti assiomatico-deduttivi. Basta considerare al riguardo problemi proposti ad allievi francesi di 13-14 anni (alcuni esempi sono riportati in tavola 9). Questa situazione è ben espressa da Balacheff (1987) che scrive:

> «In Francia la quarta classe [equivalente alla nostra terza media, n.d.r.] offre attualmente, in geometria, un buon esempio di passaggio dal pratico al teorico. La demarcazione sta proprio nella esigenza di produrre prove (dimostrazioni). La rottura tra geometria pratica (quella della riga e del compasso e della produzione di figure) e la geometria (deduttiva) non è in effetti soltanto quella di un cambiamento di stato epistemologico, ma soprattutto quella di un cambiamento di contratto [didattico, n.d.r.]... Questo cambiamento di contratto si manifesta nel cambiamento di stato dell'attività matematica, nel suo cambiamento di funzioni. Dall'allievo pratico, tutto orientato verso la padronanza del saper fare, si passa all'allievo teorico la giustificazione della cui attività è quella di conoscere».

Tuttavia è ancora più problematica la realtà dei paesi di cultura anglosassone dove gli aspetti logico-culturali della matematica sono messi in ombra da un insegnamento notevolmente sbilanciato sul versante della matematizzazione e del problem solving operativo (si vedano Hanna 1995, Schoenfeld 1994).

TAVOLA 9

PROBLEMI DI GEOMETRIA PER ALLIEVI FRANCESI DI 13-14 ANNI
(Almouloud 1992)

1. Si consideri un triangolo ABC. Si indichi con I il punto medio del segmento [AC]. La parallela alla retta BC passante per A incontra la retta BI in D. Dimostrare che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.
2. ABCD è un parallelogrammo. La parallela alla retta BD passante per A incontra la retta DC in M. La parallela a BD passante per C taglia la retta AB in N. Dimostrare che il quadrilatero BNDM è un parallelogrammo.

3. ABC è un triangolo ed M un suo punto interno. I e J sono i punti medi rispettivamente dei lati [AB] e [AC]. I punti D ed E sono tali che I è il punto medio di [ME] e J è il punto medio di [MD]. Dimostrare che DCBE è un parallelogrammo.
4. ABC è un triangolo ed I è il punto medio di [BC]. J è il simmetrico di A rispetto ad I; il punto K è il simmetrico di J rispetto a C; il punto L è il simmetrico di K rispetto ad I. Dimostrare che il punto B è il punto medio di [AL].
5. Si consideri un triangolo ABC e si indichino rispettivamente con D ed E i punti medi di [AB] e [CA]. Sia G il punto d'intersezione delle rette CD e BE, N ed M i punti medi rispettivamente di [BG] e di [CG]. Dimostrare che G è il punto medio di [DM].
6. Sia ABCD un parallelogrammo. I punti E, F, G ed H sono i punti medi rispettivamente dei segmenti [AB], [BC], [CD] e [DA]. La retta DE incontra le rette HC ed AF rispettivamente in N e P. La retta BG incontra le rette AF ed HC rispettivamente in Q ed M. Dimostrare che il quadrilatero MNPQ è un parallelogrammo.
7 Si consideri un triangolo LAI. Si indichi con M il punto medio del segmento [LI] e con N quello del segmento [LA]. La parallela alla retta AI passante per L incontra la retta AM in D e la retta IN in E. Dimostrare che [LD] ed [LE] hanno la stessa lunghezza.

Non è un caso che nello Studio ICMI "*Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21-st century*" svoltosi a Catania nell'autunno 1995 proprio ricercatori inglesi abbiano affrontato il problema didattico della dimostrazione sostenendo da un lato la riduttività di un approccio ad essa limitato unicamente all'ambito della geometria euclidea (Jones 1995) e dall'altro la negatività dell'insegnamento geometrico tradizionale che, dando enfasi più alla esposizione standardizzata della sequenza dei passi deduttivi che non ai contenuti matematici raggiunti, viene a determinare negli studenti serie difficoltà (Hoyles et Alii 1995). Questi ultimi precisano che gli studenti non riescono a cogliere la differenza cruciale tra argomentazione empirica e ragionamento deduttivo, non vedono la dimostrazione come parte del problem solving, né riescono a comprenderne lo scopo ed il ruolo nella attività matematica (sulla distinzione tra argomentazione e dimostrazione torneremo più avanti). Aggiungono che spesso nell'insegnamento si fa ricorso alla dimostrazione formale per provare qualcosa della cui verità gli studenti sono già convinti e questo porta come conseguenza che essi giungono a considerare l'attività dimostrativa irrilevante e priva di significato.

In effetti quest'ultima critica è antica. Ad esempio già Vailati all'inizio del secolo denunciava il pericolo di vanificare il significato della dimostrazione imponendo lo studio della prova formale di proprietà intuitive ed evidenti. Nel 1904 egli infatti scriveva:

«Il compito dell'insegnante a questo riguardo [insegnamento della geometria euclidea, n.d.r.] sarebbe stato tuttavia reso più facile se ad alcune delle dimostrazioni (quelle specialmente che presentano, per il principiante, il non lieve inconveniente di apparirgli inutili, in quanto portano a conclusioni che egli già conosce ed è indotto a riputare non meno "evidenti" degli assiomi mediante i quali gli vengono "dimostrate") si fosse sostituita la semplice enunciazione loro sottoforma di postulato, rimandando a un appendice ogni considerazione sulla loro "dipendenza" dagli altri postulati ammessi. *È infatti di somma importanza che l'allievo arrivi il più presto possibile a vedere nel processo di dimostrazione un mezzo per passare dal noto all'ignoto, uno strumento cioè di prova e, ancora più, di ricerca*, mentre solo più tardi potrà apprezzarne e gustarne l'efficacia come strumento di analisi, e di riduzione al minimo, dei concetti e delle ipotesi fondamentali.»

Concordiamo con Hoyles et Alii (op. cit.) che la sfida per chi oggi si occupa di educazione matematica è quella di trovare i modi attraverso cui la dimostrazione in geometria venga a svolgere una funzione di comunicazione, esplorazione e spiegazione oltre che di giustificazione o verifica.

6.2. Studi sulla dimostrazione

Il problema dell'insegnamento-apprendimento della dimostrazione è stato affrontato da ricercatori di diversi paesi. Noi ci soffermiamo qui a richiamare in ordine temporale alcuni di tali studi per il ruolo che hanno svolto e per un loro confronto.

Iniziamo con il considerare il contributo di Bell (1976), il quale sostiene che il significato matematico di dimostrazione è connesso a tre sensi diversi. Il primo è *la verifica o giustificazione*, che concerne la verità di una proposizione; il secondo è *l'illuminazione*, che concerne l'intima visione del perché una proposizione è vera; il terzo è *la sistemazione*, che concerne l'organizzazione dei risultati in un sistema assiomatico deduttivo ed è il più propriamente matematico. Egli afferma che la dimostrazione è essenzialmente una attività pubblica che segue il raggiungimento di una convinzione, sebbene possa essere condotta internamente da un medesimo soggetto, contro un immaginario potenziale interlocutore dubbioso. Precisa che essa nasce dalla verifica interna e dalla accettazione o refutazione del soggetto di proprietà nello sviluppo della generalizzazione, successivamente viene gradatamente esplicitata: si inizia con il mettere alla prova la propria generalizzazione con altra gente (e ciò può far nascere conflitti di idee), poi si sente il bisogno di fissare per iscritto la proposizione formulata per individuare più facilmente possibili controesempi o evitare un inconscio scivolamento del proprio punto di vista, infine si giunge ad essere consapevoli del bisogno di spiegare per iscritto i motivi che ne stanno alla base e di rendere espliciti gli assunti iniziali o gli assiomi. Conclude considerando che gli allievi non potranno usare dimostrazioni formali apprezzandone lo scopo finché non saranno consapevoli dello stato pubblico della conoscenza e del valore della verifica pubblica. Al riguardo sottolinea l'importanza del lavoro cooperativo e dell'attività di ricerca nella classe, che in genere porta alla formulazione di congetture differenti da parte di allievi diversi, al confronto di queste ed alla risoluzione dei conflitti che nascono sulla base di argomentazioni. [Un interessante esempio di tale genere di attività realizzata in classi italiane di seconda e terza media è riportato in Arpinati e Pellegrino (1991, 1993), dove viene descritto come gli allievi procedendo empiricamente e sulla base di svariate congetture da loro formulate sono giunti a determinare, classificandoli, tutti gli sviluppi piani di un cubo e più in generale di un generico parallelepipedo rettangolo, tutti gli sviluppi piani di un ottaedro ed ad individuare una non semplice corrispondenza biunivoca tra gli sviluppi di un cubo e di un ottaedro basata sulla legge di dualità.]

Bell (*op. cit.*) inoltre classifica le produzioni di allievi di 14-15 anni, riguardanti la realizzazione di dimostrazioni, distinguendo tra due categorie di risposte - empiriche e deduttive - e caratterizzandole per scale di livelli. Tali scale, riportate in tavola 10, possono essere interessanti per un insegnante che intenda valutare tipologia e qualità delle motivazioni espresse dai propri allievi in riferimento alla validità di una data proposizione.

Un altro studio è stato condotto da Galbraith (1981) con la finalità di indagare sulle percezioni che allievi di 12-15 anni hanno di tecniche e concetti che intervengono nel costruire e valutare spiegazioni e dimostrazioni. Gli aspetti specifici su cui ha indagato sono indicati in tavola 11.

In tale studio Galbraith sottolinea che nell'insegnamento ci si basa su alcuni assunti di fondo (assiomi pedagogici) che riguardano il processo di comunicazione tra insegnante e allievi. Il primo assunto è che gli allievi conoscano il vocabolario matematico e gli oggetti matematici che intervengono nella costruzione di concetti e risultati in quel momento oggetto di insegnamento e riconoscano i significati connessi a tecniche particolari che intervengono nella spiegazione o dimostrazione. Ad esempio se l'insegnante dà un controesempio ad una proposizione si suppone che gli allievi condividano e apprezzino ciò che è stato raggiunto. Un altro assunto tacito è che se un allievo concorda separatamente su ciascun passo di una catena di affermazioni si suppone che un'inferenza dedotta dall'insegnante dall'intera catena sarà convincente per l'allievo. Dallo studio svolto egli rileva che in generale gli allievi non raggiungono gli obiettivi connessi agli aspetti da lui considerati e rivelano visioni limitate e parziali, inoltre a volte il loro lavoro appare condizionato da fattori emotivi. Nel concludere egli sostiene che raramente nell'attività didattica si dà la dovuta attenzione ai suddetti aspetti, indispensabili per attivare le capacità necessarie a produrre spiegazioni e dimostrazioni, e che per poter raggiungere tale scopo occorre orientare su questi aspetti lo sviluppo dell'intero curricolo.

TAVOLA 10

SCALE DI CLASSIFICAZIONE DELLE PROVE EMPIRICHE E DEDUTTIVE FORNITE DAGLI ALLIEVI

PROVA EMPIRICA (risposte date sulla base di inferenze di tipo sperimentale)

Livello 1 *Fallimento* nel generare esempi corretti o nell'attenersi a date condizioni.

Livello 2 *Estrapolazione* della verità di una proposizione generale da un sottoinsieme di casi rilevanti, senza apparente motivazione che le asserzioni aderiscano alle condizioni date.

Livello 3 *Determinazione non sistematica* di alcuni dei casi richiesti, senza completare l'analisi del sottoinsieme dei casi considerati e ignorando la richiesta di trovarli tutti.

Livello 4 *Determinazione parzialmente sistematica* di alcuni insiemi di casi, avendo una certa consapevolezza della richiesta di studiarli tutti.

Livello 5 *Determinazione sistematica* di almeno un insieme completo di casi, e chiaro tentativo di studiarli tutti.

Livello 6 *Verifica* di tutti casi.

PROVA DEDUTTIVA (risposte in cui intervengono elementi di deduzione logica)

Livello 1 *Non-dipendenza*: produzione di uno o più esempi ben studiati, ma non usati per verificare la affermazione generale.

Livello 2 *Dipendenza*: tentativo di fare una legame deduttivo tra dati e conclusioni, ma fallimento nel raggiungere un più alto livello.

Livello 3 *Riformulazione rilevante e generale*: assenza di analisi della situazione, non menzione di rilevanti aspetti che sono effettivamente dietro i dati, ma ripresentazione della situazione come un unicum, in termini generali, consapevolezza che una connessione deduttiva esiste ma incapacità di esprimerla.

Livello 4 *Particolari collaterali rilevanti*: analisi parziale della situazione, menzione di aspetti rilevanti che potrebbero fare parte di una dimostrazione, possibile individuazione di differenti sottoclassi ma fallimento nel porli in una esposizione connessa; frammentarietà.

Livello 5 *Connessione incompleta*: l'argomentazione è connessa e con qualità esplicativa, ma è incompleta.

Livello 6 *Connessione completa*: vi è qualche fallimento solo per l'appellarsi a fatti o principi che generalmente non concordano con la proposizione in gioco (un passo falso)

Livello 7 *Spiegazione completa*: derivazione della conclusione da una argomentazione corretta dai dati e da principi o fatti generalmente accettati.

TAVOLA 11

ELEMENTI SU CUI SI E CENTRATA L'INDAGINE SVOLTA DA GALBRAITH

1. Importanza attribuita alla varietà e completezza nella verifica di casi finiti.
2. Fattori di conoscenza che intervengono nel dare una spiegazione, esterni al particolare contesto, quali ad esempio il ricorso nel dare una giustificazione ad un principio esterno e accettato.
3. Fattori coinvolti nella capacità di collegare una sequenza di inferenze per giungere a convincersi della conclusione.
4. Consapevolezza dell'insieme rispetto al quale una certa generalizzazione è valida.
5. Importanza attribuita alla interpretrazione letterale di affermazioni e condizioni.
6. Fattori coinvolti nell'apprezzamento ed uso della distinzione tra implicazione ed equivalenza.
7. Consapevolezza delle proprietà generali ed arbitrarie della definizione in matematica.
8. Concezione della dimostrazione come rete connessa di passi deduttivi. Capacità di affrontare l'analisi di una dimostrazione come un mezzo per entrare nei dettagli di un dato argomento.

Svariati e interessanti studi sulla dimostrazione in geometria sono stati realizzati in Francia, probabilmente anche per i problemi didattici che la particolare, già citata, situazione scolastica pone. Noi qui ci soffermeremo solo su due di questi, uno realizzato da Balacheff (1988), l'altro da Duval (1991), per indicazioni su altri studi francesi rinviamo ad Arsac (1988) e Barbin (1994).

Balacheff nel suo ampio lavoro, considerato un caposaldo tra gli studi sul tema in esame, studia la genesi cognitiva della dimostrazione a livello di college (allievi di 12-15 anni).

Assunto dell'autore è che la conoscenza nell'individuo si sviluppa e progredisce per prove e confutazioni in sintonia a quanto avvenuto storicamente (la stessa dimostrazione geometrica è il punto di arrivo di una evoluzione durata secoli che da prove legate all'evidenza ha condotto al rigore ed al formalismo). Tale studio, come anche riportato in Iaderosa (1994), è stato svolto attraverso esperienze didattiche, in cui di notevole importanza è l'*interazione sociale* tra gli allievi, ossia la discussione da loro condotta per convincersi l'un l'altro delle proprie argomentazioni.

Ci soffemeremo qui solo su alcuni aspetti di questo lavoro, parte dei quali si trovano anche in Balacheff (1991). L'autore, per poter mettere a fuoco la complessità dell'apprendimento della dimostrazione, inizia con l'effettuare una distinzione precisa tra termini a volte usati come sinonimi. Egli distingue tra *spiegazione, prova, dimostrazione* e tra *ragionamento e processo di validazione*. Precisamente per:

– *spiegazione* intende un tentativo del soggetto di chiarire prima di tutto a sé stesso la validità di una proposizione, utilizzando le proprie conoscenze e seguendo le proprie regole di decisione, mirando a rendere intellegibile ad altri la verità acquisita;

- *prova* intende una spiegazione socialmente condivisa circa la validità di una proposizione (il suo status non è definitivo ma può evolvere con l'evolvere del sapere su cui si basa);
- *dimostrazione* intende una successione di enunciati organizzata sulla base di precise regole deduttive e caratterizzata da una forma strettamente codificata;
- *ragionamento* intende un'attività intellettuale, in generale non completamente esplicita, di manipolazione di informazioni date o acquisite, per produrre nuove informazioni;
- *processo di validazione* intende un'attività la cui finalità è quella di assicurarsi la validità di una proposizione ed eventualmente di produrre una spiegazione (prova o dimostrazione).

L'autore si sofferma poi ad esaminare le dinamiche inerenti il processo di validazione. Tale processo, egli dice, si fonda su una analisi di pro e contro, sulla assunzione di potenziali contraddizioni, ed è perciò un processo dialettico. Distingue poi tra prove pragmatiche, che sono le prove effettuate dall'alunno stesso con la messa in esecuzione di una decisione o la realizzazione del contenuto di una affermazione, e prove intellettuali, che intervengono nel caso non sia possibile il ricorso all'esperienza pratica e richiedono l'espressione linguistica degli oggetti sui quali esse vertono e delle loro relazioni. I due tipi di prove sono regolati da due dialettiche differenti trattandosi da un lato di fatti dall'altro di discorsi sui fatti. Fa presente che anche nella prova pragmatica interviene l'uso del linguaggio e sottolinea che in tal caso questo ha un carattere familiare che porta il segno di chi agisce, del contesto e della durata dell'azione. Lo sviluppo delle prove intellettuali invece esige un cambiamento di posizione: chi parla deve assumere il ruolo di teorico in cui la conoscenza (fino a quel punto operativa) diventa oggetto di riflessione o di discussione. La costruzione della dimostrazione richiede l'uso di un linguaggio non più familiare ma funzionale e caratterizzato dall'introduzione di un appropriato simbolismo. In particolare il passaggio dal linguaggio familiare al linguaggio funzionale esige: una *decontestualizzazione* dalla particolare situazione in esame; una *depersonalizzazione* dell'azione rispetto a chi l'ha compiuta; ed infine, elemento fondamentale nel passaggio dall'universo dell'azione a quello delle relazioni e delle operazioni, una *detemporalizzazione* rispetto al momento dell'azione e della sua durata.

Il passaggio dalle prove pragmatiche a quelle intellettuali viene caratterizzato dall'autore da quattro diversi tipi di prova prodotte dagli allievi, precisamente:

– *l'empirismo naïf* che consiste nel trarre la validità di enunciati dopo la verifica di alcuni casi;
– *l'esperimento cruciale* che consiste in una sperimentazione concepita per testare due ipotesi ed il cui risultato permette di rigettarne una lasciando aperto il problema della validità dell'altra;
– *l'esempio generico* che consiste nell'esplicitazione dei motivi della validità di una esserzione per la realizzazione di operazioni o di trasformazioni su un oggetto non in quanto tale ma come rappresentante di una classe;
– *l'esperienza mentale* che consiste nell'evocare l'azione, interiorizzandola e staccandola dalla sua realizzazione su un rappresentante particolare.

Attraverso un'ampia gamma di produzioni degli allievi l'autore documenta i vari tipi di prova ed il passaggio graduale dal linguaggio familiare, proprio delle prove pragmatiche più elementari a quello funzionale alle prove intellettuali. Svolge poi un'attenta analisi sul ruolo svolto dal controesempio nell'evoluzione del pensiero e rileva che questo può:

– portare all'abbandono della congettura oppure all'intraprendere una via alternativa per la soluzione del problema o all'arrendersi di fronte ad esso;
– condurre alla modifica della congettura, in base ad una nuova analisi del problema, in cui cambia il dominio di validità degli oggetti che si stanno studiando (la congettura può cambiare per la totalità di questi oggetti o può essere introdotta una condizione che permetta di considerare una parte di questa totalità);
– portare ad una suddivisione di una congettura in parti più elementari che a loro volta divengono oggetto di analisi, "sottocongetture" per analizzare in quale di queste parti la congettura globale viene inficiata dal controesempio stesso;
– essere anche rifiutato dal soggetto, o costringerlo a riprendere le definizioni che conosce ed a riverificarle per operare un controllo.

È qui impossibile, per ragioni di spazio, soffermarci in dettaglio sul lavoro in questione, tra l'altro ricchissimo di esemplificazioni su quanto sostenuto, crediamo comunque utile per l'insegnante quanto da noi richiamato affinché egli acquisca consapevolezza della delicatezza e complessità dei fenomeni connessi con l'apprendimento della dimostrazione e giunga a produrre una più attenta e migliore valutazione delle prove fornite dall'allievo. Desideriamo infine richiamare alcune considerazioni svolte da Balacheff nelle conclusioni. Egli sostiene che i fallimenti che si rilevano nell'apprendimento della dimostrazione nel passaggio dalla geometria pratica a quella teorica non dipendono esclusivamente dal cambiamento di contratto didattico: un ruolo essenziale è giocato dalla natura e dallo stato delle conoscenze coinvolte. Inoltre come tutte le costruzioni cognitive l'apprendimento della dimostrazione richiede una durata poco compatibile con le ambizioni dei programmi scolastici. Occorre dunque, egli dice, prestare attenzione al problema sin dai livelli scolari precedenti prendendo in considerazione la natura della razionalità degli allievi e le condizioni della sua evoluzione, ed anche prendere in carico l'analisi didattica dei criteri accettati di prova che devono poter evolvere nel corso della scolarità.

Affrontiamo ora l'altro interessante studio di scuola francese in cui Duval (*op. cit.*) affronta il problema didattico dell'apprendimento della dimostrazione. Tale studio è centrato sull'analisi della differenza tra *argomentazione e dimostrazione*.

Per inciso ricordiamo che per argomentazione si intende «il fornire argomenti, cioè ragioni a favore o contro una determinata tesi» mentre la dimostrazione concerne «la verità di una conclusione, o per lo meno il suo rapporto necessario con le premesse» (Perelman 1977). Marchini (1987) precisa che nell'argomentazione vi è «la presentazione di varie tesi e la loro verifica o confutazione con semplici ragionamenti, con esempi immediati o con prove sperimentali. E ciò in contrapposizione alle dimostrazioni che richiedono invece ragionamenti articolati e spesso lontani dalla verifica intuitiva immediata». Si fa uso di argomentazioni nelle attività di tipo euristico, in cui si formulano congetture o si cercano liberamente soluzioni ad un problema. L'argomentare è dunque mezzo fondamentale nel processo di costruzione sociale delle conoscenze, processo che dovrebbe essere tipico dell'attività matematica soprattutto a livello di scuola media.

Lo studio di Duval parte proprio dalla considerazione che l'argomentazione e la dimostrazione pur essendo due differenti attività di pensiero poggiano sull'uso di forme linguistiche molto somiglianti. Questo comporta negli allievi l'incapacità di operare una effettiva distinzione tra le suddette attività, inoltre generalmente la loro attenzione si concentra prevalentemente sull'aspetto semantico, proprio dell'argomentazione, piuttosto che sull'aspetto sintattico, proprio della dimostrazione.

Innanzi tutto l'autore analizza le differenze tra discorso argomentativo e dimostrativo. Per comodità, riportiamo qui la sintesi di tali differenze realizzata da Iaderosa (*op. cit.*).

1. Nel passaggio inferenziale da una proposizione all'altra, nel primo caso si usano regole implicite derivanti dalle strutture linguistiche e anche dalle rappresentazioni: si utilizza quindi il metalinguaggio e si è fortemente legati al contenuto semantico delle proposizioni; nel secondo caso invece ad ogni passo di deduzione le proposizioni non intervengono direttamente per il loro contenuto semantico, ma per il loro "stato operatorio", cioè per il ruolo che esse svolgono (premessa o conseguenza) in quel punto della dimostrazione.

2. Nel corso di un discorso argomentativo lo “stato operatorio” di ciascuna proposizione è fisso, in relazione al suo contenuto: opposizione, omonimia, particolarizzazione, ...; nel corso di una dimostrazione questo ruolo della proposizione cambia invece a seconda delle situazioni, indipendentemente dal suo contenuto, ma solo in relazione al quadro teorico in cui ci si muove.
3. Nell’argomentare i connettori della lingua naturale servono ad esplicitare il contenuto della relazione tra due proposizioni (conseguenza giustificazione, opposizione..), proprio perché le singole proposizioni contano solo per il contenuto; nella dimostrazione invece i connettori del linguaggio, oltre ad essere operatori sulle proposizioni, possono anche semplicemente indicarne lo stato operatorio. In questo caso quindi un loro uso consapevole può anche sottointenderli.
4. Ancora, nella dimostrazione la concatenazione tra le varie proposizioni è paragonabile ad un calcolo: avviene applicando le regole di inferenza; in un discorso argomentativo invece tale concatenazione avviene per “connessione estrinseca”: come in un discorso a carattere dialogico, le frasi successive non vengono sostituite le une alle altre (conseguenze alle premesse), ma si aggiungono con una coerenza tematica globale.

A seguito di queste riflessioni Duval illustra una originale esperienza didattica rivelatasi altamente produttiva, realizzata con allievi di 13-14 anni nell’arco di dieci settimane con cadenza bisettimanale, e finalizzata all’avvio alla dimostrazione proprio attraverso l’insegnamento della distinzione tra argomentazione e dimostrazione.

In tale esperienza gli allievi vengono chiamati a svolgere un duplice attività: di analisi e costruzione di grafi, che schematizzino la concatenazione logica tra le varie proposizioni in cui si articola una data dimostrazione, grafi realizzati connettendo mediante frecce le proposizioni coinvolte in un certo passo inferenziale. Dalla costruzione o ricostruzione e dall’analisi di un tale genere di grafo appare evidente come nel corso di una dimostrazione una stessa proposizione può svolgere il ruolo di conseguenza rispetto ad una premessa, per diventare a sua volta premessa per una ulteriore deduzione. Sono proprio queste evidenziazioni strutturali che facilitano lo svincolamento da parte dell’allievo dall’aspetto semantico e riescono a fargli cogliere invece gli aspetti sintattici della dimostrazione.

Alla attività con i grafi ne è intrecciata un’altra non meno importante in cui si chiede all’allievo la stesura di un testo verbale che descriva l’organizzazione di un assegnato grafo. È proprio dall’analisi dei testi progressivamente prodotti dagli allievi che ci si può rendere conto del livello di comprensione da loro via via raggiunto. Inizialmente i testi elaborati dai ragazzi si presentano come semplici elenchi di proposizioni senza cenno a connettori, si notano lacune e a volte viene a mancare persino la conclusione, si riscontrano inoltre notevoli difficoltà espositive. Via via che l'attività procede si rileva un arricchimento dei testi prodotti e la traduzione delle inferenze mediante il ricorso spontaneo a connettori linguistici del tipo "*sono sicuro che…*", "*basta che io provi che…*" e simili, che testimoniano come l'allievo si assuma consapevolmente in prima persona la responsabilità delle proprie affermazioni.

In tavola 12 sono riportate, a titolo di esempio dell'attività realizzata, le produzioni di uno stesso allievo all'inizio e verso la fine dell'esperienza. Tali produzioni, a detta dell'autore, riflettono quelle dei 2/3 della classe. Esse documentano che il modo di fornire prove da parte degli allievi e la stessa idea di prova si evolvono in loro parallelamente con le trasformazioni di significato dei contenuti matematici su cui essi stanno lavorando.

6.3. Il problema didattico dell'avvio alla dimostrazione

Nel porsi specificamente il problema didattico dell'avvio alla dimostrazione due sono gli aspetti che vanno considerati: a) il condurre gli allievi a comprendere una dimostrazione (aspetto semantico); b) il condurre gli allievi a comprendere la struttura di una dimostrazione e più in generale i metodi di dimostrazione (aspetto sintattico).

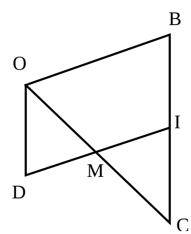
Come già rilevato le difficoltà maggiori nell'apprendimento riguardano l'aspetto sintattico più che quello semantico: molti sono gli allievi che confondono premesse con conseguenze ed al limite ipotesi con tesi, soprattutto se queste non sono costituite da un'unica proprietà, o utilizzano impropriamente un teorema o più in generale non colgono la concatenazione logica tra passi dimostrativi. In tavola 13 è riportato un esempio al riguardo. Circa l'aspetto semantico in riferimento al discorso geometrico, c'è da sottolineare la difficoltà degli allievi di svincolarsi dalle proprietà che si leggono nella figura geometrica cui si riferiscono.

TAVOLA 12

DUE PRODUZIONI DI UNO STESSO ALLIEVO NELL'ESPERIENZA REALIZZATA DA DUVAL

Una produzione iniziale

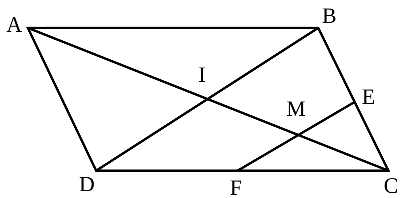
Problema: Siano *O, B, C* tre punti non allineati. Sia *I* il punto medio di [*BC*] e *D* il punto tale che *OBID* sia un parallelogrammo. Si indichi con *M* il punto medio di [*ID*].
Perché *M* è il punto medio di [*OC*]?



Testo dell’allievo in risposta al problema:
DO = IB *DO || IB*
IB = CI *CI || IB*
<u>*DO = CI*</u> <u>*DO || CI*</u>
CD || IO *CD = IO*
Le diagonali di un parallelogrammo si incontrano nel loro punto medio *I*. *DOIC* è parallelogrammo allora queste si incontrano nel loro punto medio

Il testo consiste di una semplice lista di relazioni. Non vi è la giustificazione del perché *DOIC* è un parallelogrammo.

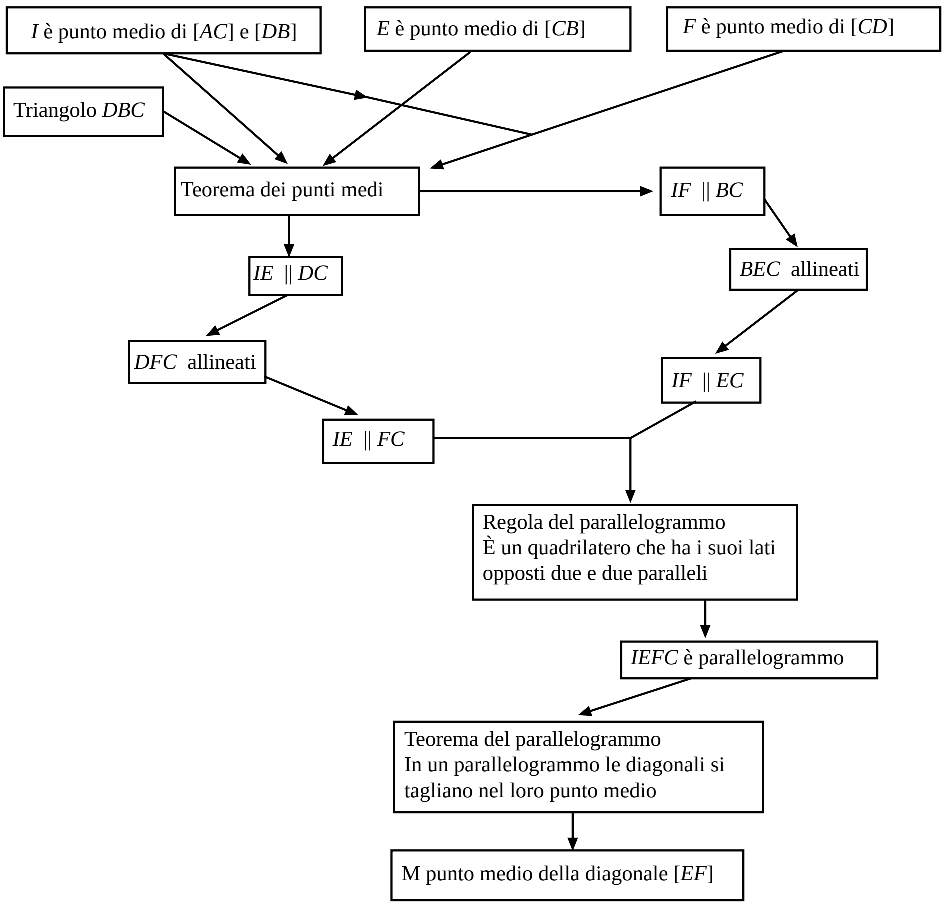
Una produzione verso la fine dell’esperienza



Problema: sia *ABCD* un parallelogrammo. Sia *I* il punto di intersezione delle diagonali, sia *E* il punto medio di [*CB*] ed *F* quello di [*CD*]. Le rette *AC* ed *EF* si incontrano in *M*. Mostrare che *M* è il punto medio di [*EF*].

Testo dell’allievo in risposta al problema:
Per trovare che un punto è medio di due segmenti, questi possono essere le diagonali di un parallelogrammo. È SUFFICIENTE CHE IO PROVI CHE *IE || FC* ed *IF || CE*.
È sufficiente applicare il teorema dei punti medi al triangolo *DBC*.
Si sa che *E* è il punto medio di *BC*.
MA CI SERVE UN ALTRO PUNTO MEDIO. Ci sarà *I* punto medio di *DB*.
Poiché *I* è intersezione delle diagonali di un parallelogrammo che si incontrano nel loro punto medio.
Allora si può applicare il teorema dei punti medi: nel triangolo *DBC* la retta che passa per il punto medio di un lato e che passa per il punto medio del lato opposto è parallela al terzo lato.
IO SONO SICURO CHE *IE || FC*.
ORA IO FACCIO il teorema dei punti medi perché *IF || EC*.
Si sa che *I* è il punto medio di *DB* (vedi più in alto) nel triangolo *DBC*.
Si sa che *F* è il punto medio di *CD* PERCHÉ CE LO DICONO.
Allora la retta che passa per il punto medio di un lato e che va al punto medio del lato opposto è parallela al terzo lato.
Allora io so adesso che *IF || EC*.
E *IE || FC*. Allora c’è un parallelogrammo.
E poiché le diagonali di un parallelogrammo si incontrano nel loro punto medio. Allora *M* è il punto medio di [*EF]*.
Lo stile e l’organizzazione di questo testo è completamente differente da quello prodotto dallo stesso allievo all’inizio dell’esperienza. L’organizzazione deduttiva delle proposizioni è esplicitamente marcata: traspare la considerazione del ruolo delle proposizioni (premessa o conseguenza), il loro cambiamento di stato per il concatenamento dei passi, la non linearità di certi concatenamenti.

Grafo della dimostrazione data costruito dall'allievo



Come sottolineato da Iaderosa (*op. cit.*) «perché una proprietà geometrica venga letta sulla figura con "un'evidenza consapevole" è necessario che l'allievo ne distingua la realizzazione sul caso particolare e possa immaginare senza difficoltà tutti i casi possibili. È importante perciò portare l'allievo a scoprire contraddizioni su proprietà che gli appaiono evidenti: questo può convincerlo della necessità di cercare "prove" diverse, a livello razionale e argomentativo, anche nei casi in cui, data l'evidenza della situazione, gli sembrerebbe superfluo farlo». In tavola 14 è riportato un esempio di "falsa dimostrazione", interessante da un punto di vista didattico poiché caso limite utile a far comprendere agli allievi come spesso la figura contenga in sé proprietà estranee alla

TAVOLA 13

UN ESEMPIO DI SITUAZIONE IN CUI GLI ALLIEVI NON SONO RIUSCITI A RICONOSCERE IL DIVERSO RUOLO GIOCATO DALL'IPOTESI IN DUE CONCLUSIONI

(da Duval 1991)

Riguardo il problema iniziale di tavola 12, due allievi danno le seguenti risposte:
1. *OICD* è un parallelogrammo perché le sue diagonali [*OC*] e [*ID*] si incontrano nel loro punto medio.
2. Se *M* e il punto medio di [*ID*] e se *OICD* è un parallelogrammo allora *M* è il punto medio di [*OC*] perché le diagonali di un parallelogrammo si incontrano nel punto medio.

Chiesto alla classe di indicare quale delle due risposte è corretta, sorprendentemente tutti gli allievi non trovano alcuna differenza tra le due.

UNA SITUAZIONE IN CUI NON VIENE RICONOSCIUTO IL RICORSO IMPROPRIO AD UN TEOREMA E L'UTILIZZO DEL SUO INVERSO

(da Fetisov 1965)

Un'altra volta, un ragazzo più avanti nello studio della geometria, mi mostrò un compito nel quale, a suo dire, gli era stato dato "ingiustamente" un voto troppo basso. Il problema richiedeva di determinare l'altezza di un trapezio isoscele le cui basi misuravano rispettivamente 9 e 25 cm e il lato obliqo 17 cm. Per risolvere il problema, egli aveva inscritto un cerchio nel trapezio affermando che questo era possibile in virtù del teorema secondo il quale, in ogni quadrilatero circoscritto ad un cerchio, le somme dei lati opposti sono uguali, il che era vero per il trapezio dato (9 + 25 = 17 + 17). Egli aveva poi determinato l'altezza come diametro del cerchio inscritto nel trapezio isoscele, diametro che - come era stato dimostrato in un problema precedentemente risolto - è la media proporzionale tra le due basi.

La soluzione gli sembrava molto semplice e convincente. L'insegnante però, non aveva accettato il suo riferimento al teorema delle somme dei lati di un quadrilateo circoscritto considerandolo inesatto. Il ragazzo questo non lo poteva capire e continuava ad insistere: «Ma non è vero che in un quadrilatero circoscritto ad un cerchio, le somme dei lati opposti sono uguali? Bene in questo trapezio la somma delle due basi è uguale a quella dei lati, il che significa che vi si può inscrivere un cerchio. Che cosa c'è di sbagliato?»

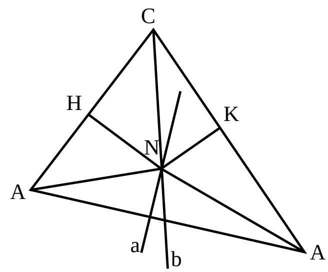
TAVOLA 14

UN ESEMPIO DI FALSA DIMOSTRAZIONE

(da Pellegrino e Zagabrio 1996)

Facendo riferimento a triangolo *ABC* si prova che:
tutti i triangoli sono isosceli!

Indicati con:
- *N* il punto di intersezione tra la bisettrice *b* dell'angolo $A\hat{C}B$ e l'asse a del segmento [*AB*];
- *H* e *K* i piedi delle perpendicolari condotte da *N* rispettivamente ai lati [*AC*] e [*BC*];



si rileva che:
- il segmento [*CH*] è congruente al segmento [*CK*], perché i triangoli rettangoli *CHN* e *CKN* sono congruenti (hanno l'ipotenusa *CN* in comune e gli angoli $H\hat{C}N$ e $K\hat{C}N$ congruenti, essendo *b* la bisettrice dell'angolo *ACB*);
- il segmento [*HA*] è congruente al segmento *KB*, perché i triangoli rettangoli *AHN* e *BKN* sono congruenti (hanno i cateti *HN* e *KN* congruenti per quanto detto prima e le ipotenuse *AN* e *BN* congruenti, essendo *N* un punto dell'asse a di *AB*);
- i lati *AC* e *BC* sono congruenti perché somma di coppie di segmenti congruenti.

Il triangolo *ABC* è dunque isoscele.

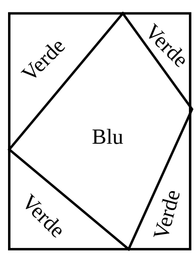
DOV'È L'ERRORE? L'ipotesi falsa è il supporre che il punto *N* sia interno al triangolo *ABC*.

È possibile provare infatti che il punto *N* si trova sempre fuori dal triangolo *ABC* e precisamente sulla circonferenza circoscritta al triangolo (Pellegrino e Zagabrio, *op. cit.*, p. 52-54) e che i lati *AC* e *BC* si ottengono in realtà uno come somma e l'altro come differenza dei segmenti considerati.

TAVOLA 15

PRODUZIONI DI ALLIEVI CHE TESTIMONIANO L'INCIDENZA A VARIO LIVELLO NELLA DEDUZIONE DI PROPRIETÀ EVIDENTI DALLA FIGURA

(da Malara e Gherpelli 1988)



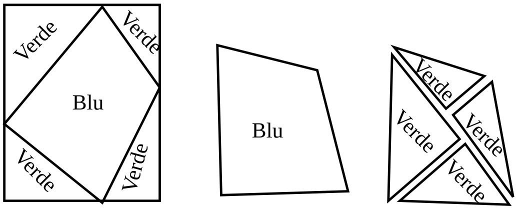
IL PROBLEMA

L'insegnante di educazione artistica chiede aiuto a Claudio e a Cristian per colorare un cartellone e dà loro il seguente schema.
Dice a Claudio di colorare la parte blu ed a Cristian di colorare la parte verde.
Claudio, come sua abitudine, contesta subito e dice che la sua parte è più grande di quella di Cristian e che questo non è giusto. A colpo di

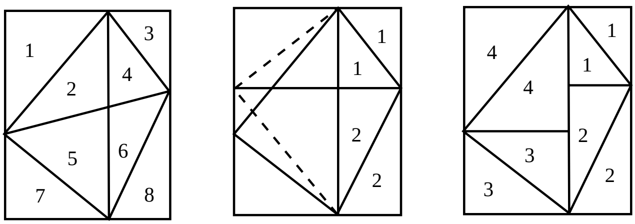
occhio anche l'insegnante di educazione artistica sembra dargli ragione. Tu cosa ne dici?

ALCUNE TIPOLOGIE DI SOLUZIONI PRODOTTE DAGLI ALLIEVI

a) *Soluzione manipolativa, per ritaglio e sovrapposizione*

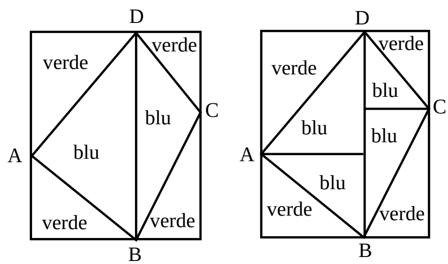


b) *Soluzione grafica ottenuta attraverso lo studio della figura*



c) *Soluzione sostenuta da un'argomentazione in cui però vi è un rinvio a proprietà che appaiono evidenti dalla figura*

Io penso che le due superfici, quella blu e quella verde siano uguali [l'allievo prima scrive equivalenti, poi cancella e scrive uguali]perché tracciando la diagonale da D a B si divide la figura complessiva in due parti, vedi disegno, [riportato sotto a sinistra] e in queste due parti si vede bene che la parte blu, in ognuna delle due parti, è equivalente a quella verde. Per vedere ancora meglio l'equivalenza si possono tracciare le altre due linee come nel seguente disegno [riportato sotto a destra]. In questo caso la figura viene divisa in 4 parti e in ognuna di esse la parte blu è equivalente a quella verde.



situazione e come tali proprietà vengano inconsapevolmente usate. Per superare questi inconvenienti utilissimo appare il ricorso a pacchetti software, quali Cabri-geometre, che permettono la visualizzazione di una figura in varie configurazioni, cosa che da un lato facilità il riconoscimento di relazioni tra gli elementi della classe di figure in esame e dall'altro consente di evitare l'assunzione impropria di proprietà che possono eventualmente sussistere per qualche configurazione particolare.

Tuttavia non va sottovalutato il diverso grado di lettura di una figura nella prova prodotta dagli allievi, che testimonia da un lato l'incidenza della intuizione e della evidenza visiva sulla giustificazione fornita e dall'altro il grado di maturazione verso in pensiero razionale dell'allievo. A titolo esemplificativo sono riportate in tavola 15 prove relative ad un medesimo problema, accettabili ma che testimoniano il diverso livello degli allievi sul piano del pensiero razionale. Notevoli infine sono le difficoltà a livello linguistico, che coinvolgono sia il piano semantico che quello sintattico e sono correlate con la più generale capacità espressiva dell'allievo e la sua padronanza del linguaggio sia naturale che matematico-simbolico.

Il ruolo dell'insegnante è al riguardo cruciale, egli deve:

– portare gli allievi a familiarizzare con modelli di dimostrazione (diretta, per assurdo), con termini quali ipotesi, tesi, congettura, esempio, controesempio, confutazione e generalizzazione;
– dedicare cura alle proposizioni condizionali portando gli allievi a distinguere tra implicazione, sua inversa, contronominale e contraria.

Interessanti spunti di lavoro al riguardo, in ambito geometrico, si trovano in Pellegrino-Iaderosa 1990. Altrettanta attenzione occorre dare all'uso della negazione e dei quantificatori e, soprattutto in ambito geometrico, alla definizione (si vedano in tavola 16 gli esempi di attività riporate).

TAVOLA 16

UN ESEMPIO DI ATTIVITÀ SULL'IMPLICAZIONE

Delle seguenti implicazioni quali sono false?

– se un quadrilatero è un rettangolo allora le sue diagonali sono uguali;
– se le diagonali di un quadrilatero sono uguali allora il quadrilatero è un rettangolo;
– se un quadrilatero è un rombo allora le sue diagonali sono perpendicolari;
– se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari allora è un rombo;
– se un rombo ha le diagonali uguali allora è un quadrato;
– se il quadrilatero Q è un quadrato allora le sue diagonali sono uguali e perpendicolari.

UN ESEMPIO DI ATTIVITÀ SULLA QUANTIFICAZIONE
(da Shkupa 1995)

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

– per ogni triangolo (quadrilatero) esiste una circonferenza che è inscritta (circoscritta) ad esso;

– per ogni circonferenza esiste un triangolo (quadrilatero) che è inscritto (circoscritto) ad essa;
– esiste una circonferenza che è inscritta (circoscritta) ad ogni triangolo (quadrilatero);
– esiste un triangolo (quadrilatero) che è inscritto (circoscritto) ad ogni circonferenza.

UN ESEMPIO DI ATTIVITÀ SULLA DEFINIZIONE
(da Colombo Bozzolo 1995)

In un libro di testo abbiamo letto le seguenti definizioni:
– un trapezio è un quadrilatero con almeno due lati paralleli;
– un trapezio si dice isoscele se ha uguali i due angoli adiacenti ad una base.

Rispetto a queste definizioni esistono trapezi non necessariamente isosceli e con i lati obliqui uguali?

Solo se gli studenti impareranno modi di pensiero logico acquisteranno l'abilità e la confidenza necessaria a valutare e costruire una dimostrazione. In conclusione ci sentiamo di condividere quanto generalmente espresso dai ricercatori citati circa la necessità e opportunità di attività preparatorie alla dimostrazione. In particolare sottolineiamo la produttività di attività, da avviarsi precocemente e trasversalmente sin dall'ingresso nella scuola media, in cui viene dato ampio spazio alla discussione tra allievi ed all'esplicitazione scritta dei propri processi di pensiero (si vedano Mesquita 1989, Malara 1993, Malara e Gherpelli 1994, Jones 1995) nonché all'uso precoce delle lettere per l'avvio alla dimostrazione in ambito aritmetico algebrico (si vedano ad es. Malara 1994, Gherpelli e Malara 1994).

Concordiamo con Iaderosa (*op. cit.*) che è molto difficile giungere con gli allievi alla fine della scuola media ad una visione globale dello sviluppo di un ragionamento deduttivo, tuttavia è importante che questo, organizzato dall'insegnante come sintesi di un lavoro di costruzione collettiva, sia compreso ed accettato da tutti.

Riferimenti bibliografici

ALMOULOUD S.A., 1992, Aide logicielle a la resolution de problemes avec preuve: des sequences didactiques pur l'enseignement de la demonstration, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol. 12, n. 23, 271-318

ARPINATI BAROZZI A.M., PELLEGRINO C., 1991, Alla ricerca di una strategia di classificazione degli sviluppi piani dei parallelepipedi rettangoli, *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 5, n. 4, 4-11

ARPINATI BAROZZI A.M., PELLEGRINO C., 1993, Come allievi di terza media hanno studiato un collegamento tra gli sviluppi dell'ottaedro e del cubo, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 16, n. 4, 383-398

ARSAC G. ET ALII, 1990, Les recherches actuelles sur l'apprendissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol. 3/3, 261-304

BALACHEFF N., 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, 147-189

BALACHEFF N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de College*, Thése de Etat, Université Joseph Furier, Grenoble

BALACHEFF N., 1991, Treatment of Refutations: aspects of the complexity of a constructivistic approach to Mathematics learning, in Von Glasersfeld E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluver Academic Publishers, The Netherlands, 89-110

BARBIN E., 1994, La dimostrazione in matematica: significati epistemologici e questioni didattiche, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 17B, n. 3, 212-245

BELL A., 1976, A study of pupils'proof explanations, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, 23-40

COLOMBO BOZZOLO C., 1995, l'insegnamento della geometria nella scuola elementare: riflessioni sulla definizione di trapezio, *Periodico di Matematiche*, VII, vol. 1, n. 1, 5-11

DAVIS P.J., HERSH R., 1981, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, (tr. it. *L'esperienza matematica*, 1985, Edizioni di Comunità, Milano)

DUVAL R., 1991, Structure di raisonnement deductif et apprendissage de la demonstration, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, 233-261

FETISOV A.I., 1965, La dimostrazione in geometria, Progresso Tecnico Editoriale, Milano

GHERPELLI L., MALARA N.A., 1994, *Argomentazione in Aritmetica*, in Basso M. et Alii (a cura di), Numeri e Proprietà, CSU, Parma, 55-60

HANNA G., 1995, Challenges to the importance of proof, F*or the Learning of Mathematics*, vol. 15, n. 3, 42-49

HOYLES C., HEALY L., NOSS R., 1995, Can Dynamic geometry constructions replace proof or contribute to it? in Mammana C. (ed.) Pre-Proceedings of ICME Study on Geometry, Catania, 101-105

IADEROSA R., 1994, *L'avvio alla dimostrazione nella scuola dell'obbligo*, Tesi di perfezionamento in didattica della matematica (relatore prof. C. Marchini), Università Cattolica di Brescia, A.A. 1993-1994

JONES L., 1995, Quod Erat Demonstrandum, in Mammana C. (ed.) *Pre-Proceedings of ICME Study on Geometry*, Catania, 117-121

MALARA N.A., 1993, Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 16, n. 10, 928-954

MALARA N.A., 1994, Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?, in D'Amore B. (a cura di), *L'apprendimento della matematica: dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica*, Pitagora, Bologna, 67-77

MALARA N.A., GHERPELLI L., 1988, Il poblema di geometria come campo di indagine per gli allievi, comunicazione al *Conv. Naz. Nuclei Ricerca Didattica* - sez. Scuola Media (L'Aquila)

MALARA N.A., GHERPELLI L., 1994, Problem posing e ragionamento ipotetico in ambito geometrico, *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 8, n. 3, 229-244

MARCHINI C., 1987, Argomentazione e Dimostrazione, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 10, n. 2, 121-140

PELLEGRINO C., ZAGABRIO M.G., 1996, *Invito alla Geometria con Cabrì-Geometre*, Didascalie Libri, Trento
PELLEGRINO C., IADEROSA R., 1990, Un'esperienza di utilizzo del Tangram in attività di matematica nella scuola media, *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 4, n. 3, 5-11
PERELMAN C. 1977, voce "Argomentazione", in *Enciclopedia Einaudi*, Torino
SCHOENFELD A., 1994, What do we know about curricola?, *Journal of Mathematical Behaviour*, vol. 13, n.1, 55-80
SCHKUPA T., 1995, Intuizione, ragionamento e linguaggio nell'apprendimento della geometria, *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 9, n. 3, 371-383
VAILATI G., 1904, Il testo di F. Enriques e U. Amaldi "Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori", in Quaranta M. (a cura di), 1987, *Giovanni Vailati Scritti*, vol. 3, Forni Editore, Bologna, 267-273

7. ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA EQUIESTENSIONE

7.1. Aspetti teorici

Un argomento cardine nell'insegnamento della geometria nella scuola media è quello della estensione delle superfici piane chiuse, argomento che si riduce tradizionalmente nella determinazione della misura delle superfici di particolari classi di poligoni (triangoli e quadrilateri) e dei cerchi.

Non vogliamo qui affrontare in termini teorici il problema della equiestensione, per il quale rimandiamo all'ampio saggio di Amaldi (1900) ma desideriamo dare per grandi linee una traccia dell'evoluzione di questa teoria e soffermarci su alcune questioni didattico-metodologiche connesse alla presentazione di questi concetti nei testi scolastici.

Seguendo Cipolla (1929, p. 165-174) ricordiamo che in Euclide la nozione di uguaglianza ha due significati: uguaglianza nel senso di congruenza (sovrapponibilità), ed uguaglianza in estensione (equivalenza o equiestensione). Euclide non fa alcuna distinzione fra i due concetti, assume l'uguaglianza come concetto primitivo e assegna ad essa le seguenti proprietà, come nozioni comuni:

1°. - enti uguali ad un terzo sono uguali tra loro;
2°. - enti che sono somme di enti rispettivamente uguali sono uguali;
3°. - enti che sono differenze di enti rispettivamente uguali sono uguali;
4°. - il tutto è maggiore della parte.

L'idea di distinguere l'uguaglianza tra congruenza ed equiestensione è del secolo scorso. I matematici dell'epoca si chiesero se era possibile dare una definizione di equiestensione in termini di congruenza. Il Duhamel (1860) provò che si poteva sviluppare tutta la teoria dell'equiestensione per i poligoni piani sulla base della seguente definizione: due poligoni si dicono equiestesi se sono decomponibili nello stesso numero di poligoni rispettivamente uguali (congruenti). Egli dimostrò che questa relazione di equiestensione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e che se due poligoni sono somme di poligoni rispettivamente equiestesi sono equiestesi (seconda nozione comune). Egli ebbe invece difficoltà a stabilire che se due poligoni sono differenze di poligoni rispettivamente equiestesi sono equiestesi (terza nozione comune) e sviluppò la sua teoria indipendentemente da questa proprietà.

Tenuto conto che Euclide utilizza la terza nozione comune per provare il teorema che parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza sono equiestesi, egli ne evitò l'applicazione e provò direttamente tale teorema utilizzando il postulato di Archimede. (Ricordiamo che il postulato di Archimede afferma che dati due segmenti esiste sempre un multiplo dell'uno che supera l'altro.)

Riportiamo in tavola 17 la dimostrazione del teorema che "parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza sono equiestesi" nelle due varianti. L'opera del Duhamel fu ripresa a livello didattico dal Faifofer nel suo testo Geometria Elementare (1880). Il testo del Faifofer fu studiato criticamente da De Zolt che mise in luce come il teorema che due triangoli equiestesi che hanno la stessa base devono avere la stessa altezza non poteva legittimarsi senza il seguente principio: comunque si divida in parti un poligono non è possibile trascurando una di queste parti disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono; in altre parole la quarta nozione comune di Euclide. Faifofer nelle edizioni successive del suo libro assunse il principio di De Zolt come postulato, tuttavia questo venne dimostrato per la prima volta da Schur (1892); successivamente il Veronese (1894) ne diede una dimostrazione molto elegante che, tra l'altro, ha il pregio di non ricorrere alla misura.

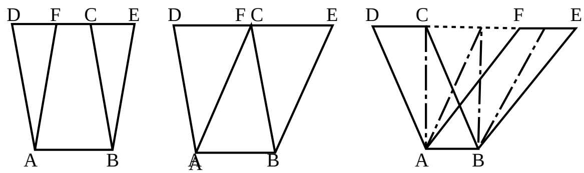
L'equiestensione per differenza esclusa dal Duhamel porta ad un altro interessante criterio per determinare l'equiestensione di poligoni: il cosidetto metodo del completamento. Anziché scomporre figure in parti congruenti tra loro, si aggiungono ad esse parti congruenti in modo che le figure che ne risultano siano ancora congruenti. Si dice in questo caso che le figure sono equiampliabili. Riportiamo in tavola 18 alcuni semplici esempi di poligoni equiampliabili. Come si può intuire è possibile provare che nella geometria ordinaria, in cui vale il postulato di Archimede, i due criteri di equiestensione per equiampliabilità e per equiscomponibilità sono equivalenti, cosa che non accade nella geometria non archimedea (si veda Hilbert 1899, tr. it. 1970, p. 74-75).

Per stabilire la nozione di equiestensione tra superfici piane a contorno curvilineo, quali cerchi, settori circolari, ecc., i matematici greci, ed in particolare Eudosso e successivamente Archimede, escogitarono il cosiddetto metodo di

TAVOLA 17

EQUIESTENSIONE DI DUE PARALLELOGRAMMI AVENTI STESSA BASE E STESSA ALTEZZA

Siano *ABCD* e *ABEF* due parallelogrammi tali che *C, D E* ed *F* cadano sulla stessa retta. Escludendo che i parallelogrammi siano sovrapponibili, si possono presentare i casi sottoindicati, caratterizzati dal fatto che: a) il punto F cada fra *D* e *C*; b) il punto *F* coincida con C; c) il punto *F* cada sul prolungamento di *DC*.



a) In questo caso i parallelogrammi hanno in comune il trapezio *ABCF*. Il primo parallelogrammo si ottiene aggiungendo al trapezio il triangolo *BCE*, il secondo aggiungendo il triangolo *ADF*. Questi due triangoli sono congruenti, perché i lati sono a due a due congruenti (*BC* e *AD* sono lati opposti di un parallelogrammo, così come *BE* ed *AF*, mentre *CE* e *DF* si ottengono togliendo lo stesso segmento FC da segmenti congruenti). I parallelogrammi *ABCD, ABEF* si possono scomporre in uno stesso trapezio ed in due triangoli congruenti. Sono quindi equiestesi.

b) In questo caso, analogo al primo, i parallelogrammi hanno in comune il triangolo *ABC*, il primo si ottiene aggiungendo il triangolo *BCE*, il secondo aggiungendo il triangolo *ADC* ed i triangoli *BCE* e *ACD* sono congruenti perché hanno i tre lati a due a due congruenti.

c) In questo caso operiamo nel seguente modo. Riportiamo a partire da *D*, e nello stesso senso di *DC*, dei segmenti consecutivi uguali a *DC*. Grazie al postulato di Archimede, otterremo ad un certo punto un segmento che termina in un punto tra *F* ed *E* o in *F*. Ora i parallelogrammi successivi che hanno base *AB* e lati opposti i segmenti congrui a *DC*, via via considerati, sono ciascuno equiesteso al precedente, per i due casi precedenti, quindi per transitività il primo parallelogrammo è equiesteso all'ultimo. Ma l'ultimo è anch'esso equiesteso ad *ABEF*. Quindi *ABCD* è equiesteso ad *ABEF*.

Questo caso si può risolvere indipendentemente dal postulato di Archimede ricorrendo al criterio di equiestensione per differenza. Si consideri il trapezio *ABED* Il parallelogrammo *ABFE* si ottiene togliendo al trapezio il triangolo *ADF*; Il parallelogrammo *ABCD* si ottiene togliendo al trapezio il triangolo *BCE*. Questi due triangoli sono congruenti perché i lati sono a due a due congruenti (*BC* e *AD* sono lati opposti di un parallelogrammo, così come *BE* ed *AF*, mentre *CE* e *DF* si ottengono aggiungendo lo stesso segmento *CF* a segmenti congruenti). I due parallelogrammi si ottengono togliendo dalla stessa figura due figure congruenti. Sono quindi equiestesi.

esaustione, in cui si usano figure poligonali inscritte e circoscritte alla figura in studio per "esaurirne" la superficie e poi ragionando per assurdo si dimostra che la superficie in questione non può avere area né inferiore né superiore ad una certa altra di misura nota.

I matematici del secolo scorso diedero un assetto rigoroso a questo procedimento con la teoria delle classi contigue di grandezze e facendo uso del principio di continuità. Sulla base di questa teoria due superfici piane sono equiestese se sono elementi di separazione di una stessa ripartizione della classe delle superfici poligonali, o se sono estremi superiori di due classi limitate di poligoni rispettivamente equiestesi.

La teoria dell'equiestensione fondata sul concetto di limite può essere applicata ai poligoni ma non fornisce un concetto di equiestensione più generale dell'equiscomponibilità.

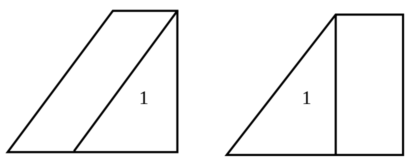
Si è posto allora il problema della possibilità per le superfici a contorno curvilineo di una teoria analoga a quella della equiscomponibilità dei poligoni, ossia se figure equiestese fossero equiscomponibili in parti rispettivamente congruenti, si è però dimostrato (Réthy 1890) che in generale ciò non accade. Per esempio non è possibile che un poligono e una figura piana a contorno curvilineo ad esso equiestesa siano equiscomponibili se il contorno di questa volge sempre la sua concavità (o convessità) verso l'interno della superficie. Questo spiega perché un cerchio ed un poligono equiestesi non sono equiscomponibili e fa comprendere perché alcune particolari lunule risultino quadrabili. Ricordiamo che data una figura geometrica essa si dice quadrabile se è possibile costruire con riga e compasso un quadrato ad essa equiesteso.

I problemi di quadratura avevano notevole importanza già nell'antica Grecia e lo sfondo culturale in cui essi si collocavano è ben delineato in Dunham (1992, p. 1-32), cui rinviamo. Come è noto un qualsiasi poligono è quadrabile. Infatti un qualunque poligono è scomponibile in parti convesse, a partire poi da un poligono convesso è abbastanza semplice costruire con riga e compasso

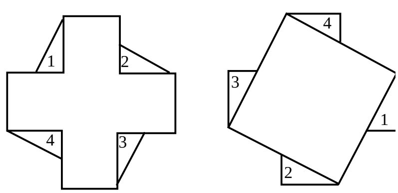
TAVOLA 18

ESEMPI DI EQUIAMPLIABILITÀ

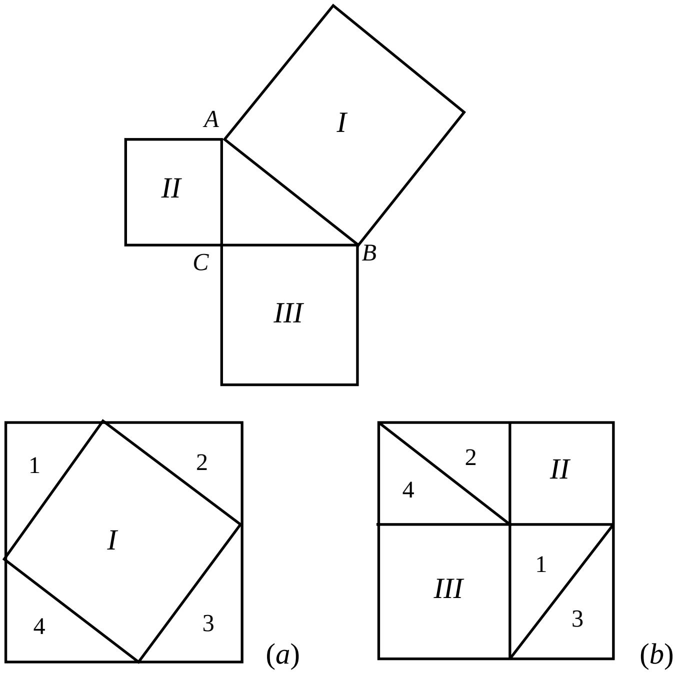
Parallelogramma e rettangolo di stessa base e stessa altezza. Aggiungendo al parallelogrammo ed al rettangolo il medesimo triangolo si ottengono due trapezi congruenti. Dunque i quadrilateri iniziali sono equiestesi.



Croce e quadrato. Aggiungendo quattro triangoli uguali, sia alla croce sia al quadrato, noi otteniamo una medesima figura. Dunque le due figure di partenza sono equestese.



Il teorema di Pitagora. Per provare che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti, basta osservare che aggiungendo al quadrato costruito sull'ipotenusa quattro triangoli congruenti al triangolo dato come in (a) e componendo i quadrati costruiti sui cateti con quattro triangoli congruenti al dato come in (b) si ottengono due quadrati congruenti.



un rettangolo ad esso equiesteso (si veda Enriques e Amaldi, 1928, rist. 1990, 218-219). Dato un rettangolo la costruzione di un quadrato equiesteso si ottiene grazie ad uno qualsiasi dei due teoremi di Euclide ([1]).
Per secoli invece si è cercato invano di risolvere il problema della quadratura del cerchio, ma solo nel secolo scorso si è riusciti a provare l'impossibilità della sua soluzione e con metodi di tipo prettamente algebrico, grazie al teorema

(1) Ricordiamo che il primo teorema di Euclide afferma che, assegnato un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equiesteso al rettangolo avente per lati segmenti congruenti alla proiezione del cateto sull'ipotenusa e all'ipotenusa stessa. Il secondo teorema di Euclide afferma che, assegnato un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equiesteso al rettangolo avente come lati segmenti congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

di Lindemann (1882) che dimostra la trascendenza di pi-greco ([2]). Sottolineiamo che spesso il problema della quadratura del cerchio è frainteso nella sua precisa accezione: non è impossibile l'esistenza un quadrato equiesteso ad un cerchio, basti pensare ad un cerchio di raggio unitario ed un quadrato il cui lato misuri $\therefore\sqrt{\Pi}$ (π), ciò che è impossibile è la effettiva costruibilità con riga e compasso di un tale quadrato.

7.2. L'equiestensione nei libri di testo per la scuola media

Da un'esame di libri di testo si rilevano indirizzi diversi circa l'approccio al problema della equiestensione. Nei testi più tradizionali si fa ricorso immediato alla misura presentando, mediante formule e con un approccio prettamente calcolativo, lo studio dell'area di poligoni elementari (nell'ordine rettangoli, triangoli, rombi, trapezi) e successivamente quella dei cerchi, senza troppo sottolineare le differenze concettuali tra i due casi (per indicazioni sulla misura in matematica rimandiamo a Ferrari 1989). Altri invece considerano l'equiestensione come concetto primitivo, spesso senza neanche esplicitarlo, e presentano l'equiestensione come relazione di equivalenza. L'area in questo caso viene definita come classe di equivalenza di figure equiestese e la sua misura viene introdotta come misura di un qualsiasi elemento della classe. Tra questi testi ve ne sono alcuni che usano il termine area con il doppio significato di classe di equivalanza e misura della estensione di un elemento qualsiasi della classe. Solitamente poi per i poligoni introducono l'equiscomponibilità come metodo per caratterizzare l'equiestensione.

Altri testi invece partono limitandosi inizialmente a considerare la sola classe dei poligoni, introducono la relazione di equiestensione mediante l'equiscomponibilità, provano o più semplicemente affermano che tale relazione è di equivalenza, e sottolineano che nel caso del cerchio o più in generale delle figure a contorno curvilineo l'equiestensione va vista in una accezione più generale della equiscomponibilità. Nei testi inoltre solitamente vengono taciuti, lasciandoli all'intuizione, i principi della somma e della differenza utilizzati per la determinazione della equiestensione di figure. A volte inoltre è dato per scontato che figure congruenti siano equiestese e per di più si presentano esercizi, come ci è accaduto di vedere in qualche testo, in cui, assegnata una serie di poligoni, si chiede di distinguere quelli congruenti da quelli equiestesi.

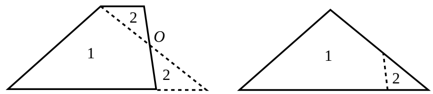
Nei testi più recenti gli esempi più diffusi di equiscomponiblità sono dati attraverso il Tangram, mentre a volte sono omesse questioni classiche relative alla equiestensione di triangoli o quadrilateri.

(2) Un numero reale si dice trascendente se non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi.

ESEMPI CLASSICI DI EQUICOMPOSIZIONE

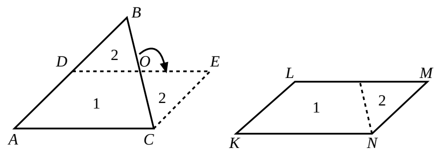
1) Un trapezio è equiscomponibile con un triangolo avente stessa altezza e base uguale alla somma delle basi del trapezio.

1)



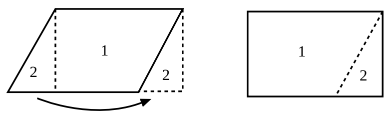
2) Un triangolo è equiscomponibile con un parallelogrammo avente stessa base e altezza metà di quella del triangolo.

2)



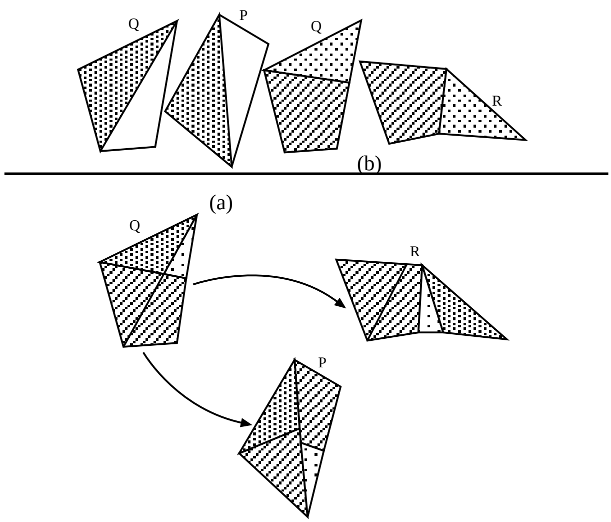
3) Un parallelogrammo è equi-scomponibile con un rettangolo avente stessa base e stessa altezza.

3)



TRANSITIVITÀ DELL'EQUISCOMPOSIZIONE

da Speranza, 1983, vol.2, p. 59)



Consideriamo importante dare spazio allo studio di opportune decomposizioni di poligoni, poiché si ha il vantaggio di centrare l'attenzione degli allievi su aspetti puramente geometrici della questione e di operare una distinzione tra equiestensione e calcolo della misura di aree. In tavola 19 riportiamo alcuni classici esempi di equiscomposizioni, (utili anche a dare un'idea della genesi delle formule di calcolo per le aree di triangoli e quadrilateri) e una efficace rappresentazione della transitività della relazione di equiscomponibilità.

L'estensione delle figure a contorno curvilineo è nei testi scolastici italiani solitamente poco trattata. In genere non si va al di là della presentazione della misura dell'area dei cerchi, effettuata ricorrendo ad approssimazioni per difetto ed eccesso mediante poligoni inscritti e circoscritti rispettivamente, spesso senza fare alcun riferimento, seppure intuitivo, al soggiacente processo al limite. Sporadici e poco incisivi ove presenti sono i casi considerati di figure a contorno curvilineo diverse dai cerchi (si veda Malara 1992, p. 582) in cui occorre procedere per approssimazione attraverso l'uso di griglie quadrettate convenientemente scelte. Questa carenza, da un punto di vista culturale è inopportuna poiché può condurre gli allievi a credere che mediante opportuna formula sia possibile calcolare l'area di una qualsiasi superficie. Appaiono molto più interessanti e didatticamente centrate le proposte presenti in testi inglesi, in cui si chiede di determinare la misura dell'area di regioni a partire da una carta geografica, nota la scala.

In alcuni testi, per la determinazione della misura di superfici piane a contorno qualsiasi, si suggerisce di ricorrere alla costruzione di loro modelli in un dato materiale e di dedurre la misura dell'area dal loro peso, tuttavia il ricorso alla bilancia, senza considerazioni circa i limiti di questo approccio sperimentale, appare poco convincente sul piano teorico per la commistione tra i livelli astratto e concreto.

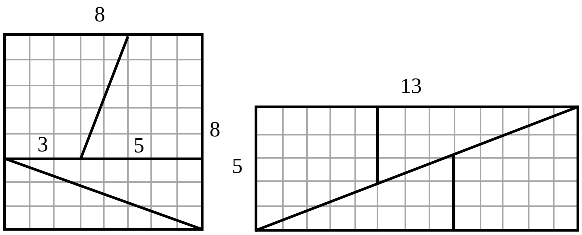
Per quanto riguarda la misura delle aree lamentiamo il grosso spazio dato nei testi scolastici a problemi che solitamente si riducono all'applicazione di formule, spesso neppure comprese nella loro genesi, e che contrabbandano per attività di geometria dei puri calcoli aritmetici. Tuttavia il ricorso alle misure può essere importante per mettere a fuoco con gli allievi i limiti di certe rappresentazioni e di come queste possano indurre in errore quando ci si affida semplicemente all'evidenza senza mettere al vaglio del ragionamento ciò che appare. Al riguardo riportiamo in tavola 20 un noto paradosso basato su una falsa equiscomponibilità.

TAVOLA 20

UN NOTO ESEMPIO DI FALSA EQUISCOMPONIBILTÀ

(Gardner 1987, p. 96-98)

I due quadrilateri non sono equiestesi nonostante appaiano equicomposti. Per convincersene basta procedere al calcolo delle rispettive aree. La forza di persuasione della falsa figura rende comunque arduo il riconoscere dove sta il nocciolo della questione. L'errore dipende dal considerare uguali le inclinazioni dei tagli obliqui e nella conseguente impropria giustapposizione dei triangoli nel costituire il rettangolo.



In conclusione desideriamo segnalare un'esperienza didattica realizzata in classi di seconda media in cui operando a piccoli gruppi si è devoluto agli allievi il compito di formulare autonomamente testi di problemi nell'ambito della misura di triangoli e quadrilateri (si veda Malara e Gherpelli 1994). L'esperienza ha ridotto al minimo gli aspetti calcolativi ed ha portato gli allievi ad acquisire un notevole controllo delle relazioni esistenti tra gli elementi di un dato tipo di figura, esaltandone gli aspetti più propriamente geometrici.

Riferimenti bibliografici

AMALDI U., 1900, Sulla teoria dell'equivalenza, in Enriques F. (a cura di), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. 2, 1-59

BOLTYANSKII V.G., 1963, *Figure equivalenti ed equidecomponibili*, Progresso Tecnico Editoriale, Milano

CIPOLLA M., 1929, *La matematica elementare nei suoi fondamenti*, Macrì editore, Firenze-Bari

DUNHAM W., 1992, *Viaggio attraverso il genio*, Zanichelli, Bologna

ENRIQUES F., AMALDI U., 1928 (ristampa 1990), *Elementi di geometria*, Zanichelli, Bologna

FERRARI M., 1989, La misura in matematica, in *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 12, n.11-12, 1215-1242

GARDNER M., 1987, *Ah, ci sono: paradossi stimolanti e divertenti*, Zanichelli, Bologna

HILBERT D., 1899 (tr. it. 1970), *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano

MALARA N.A., 1992, Il libro di testo per la matematica, in Orlando Cian D. (a cura di), *I libri di testo per la scuola media*, Gregoriana Libreria Editrice, 527-596

MALARA N.A., GHERPELLI L., 1994, Problem posing e ragionamento ipotetico in ambito geometrico, *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 8, n. 3, 229-244

SPERANZA F., 1983, *Il linguaggio della Matematica*, vol. 2, Zanichelli, Bologna.

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE (classificazione delle figure)

Silvia Dentella
ex Insegnante Scuola Media "G. Mazzini" - Pisa

Le trasformazioni geometriche nell'insegnamento alla scuola media

Poniamoci alcune domande:

1) *Quali sono gli aspetti positivi di un insegnamento della geometria attraverso le trasformazioni geometriche nella scuola media?*
2) *Come introdurre tale insegnamento e come svilupparlo?*
3) *Nella pratica dell'insegnamento è stata sufficientemente recepita l'indicazione contenuta nei nuovi programmi del '79 che dà un posto importante alle trasformazioni geometriche?*
Quale preparazione e quali disposizioni deve avere un insegnante per poter svolgere efficacemente tale insegnamento?

1) *Aspetti positivi dell'insegnamento della geometria con le trasformazioni geometriche*
Le motivazioni che sostengono un insegnamento della geometria attraverso le trasformazioni sono state efficacemente illustrate da molti; la convinzione con cui anch'io sottolineo tale posizione proviene dalla mia appassionata esperienza didattica e dalla fruttuosa collaborazione di ricerca con altri insegnanti.

a) In un insegnamento della geometria che fa posto alle trasformazioni geometriche l'attenzione non è rivolta solo alle singole figure, ma coinvolge tutto lo spazio (tipicamente il piano e lo spazio a tre dimensioni).
b) La visione degli oggetti geometrici non è statica, ma dinamica e coglie nel trasformarsi delle figure gli invarianti e le proprietà che variano.
c) È favorita una visione d'insieme più logica e più globale di oggetti e proprietà geometriche. In particolare, alla luce delle trasformazioni geometriche, se ne possono dare classificazioni più significative.
d) Le trasformazioni geometriche si prestano a interazioni feconde con altri settori della matematica: per esempio offrono all'algebra esempi interessanti riguardanti il concetto di gruppo, si collegano utilmente con la geometria analitica fornendo spunti utili alla sistemazione di alcuni concetti (parallelismo, perpendicolarità di rette…) e, viceversa, trovano nell'ambiente del riferimeto cartesiano un terreno favorevole di sviluppo.

e) Ci sono nella realtà (arte, mondo della natura, tecnica…) molti stimoli ad una riflessione su isometrie, similitudini, trasformazioni geometriche più generali e, viceversa, lo studio di questi aspetti della geometria crea una mentalità più aperta e fornisce strumenti preziosi per lo studio di varie discipline e per molteplici applicazioni.

2) *Come introdurre alla scuola l'insegnamento delle trasformazioni geometriche*
I percorsi possibili sono molteplici e dipendono anche dai gusti e dagli orientamenti dell'insegnante. È bene tener conto delle esperienze fatte dagli alunni alle elementari e delle idee che sono rimaste in loro.
Farò cenno a due possibili modi per iniziare.

I) Si può iniziare proponendo agli alunni delle esperienze concrete sulle isometrie e sulle similitudini piane, con spunti tratti dalla realtà e con manipolazione di opportuni materiali. Successivamente si dà una prima organizzazione logica delle esperienze fatte, in modo da far capire loro che si tratta di corrispondenze che idealmente coinvolgono tutto il piano. Si applicano le trasformazioni allo studio di alcune figure e alla loro classificazione. Si possono poi presentare, in maniera più sommaria ed intuitiva, altri tipi di trasformazioni geometriche sfruttando le ombre prodotte da fasci di raggi paralleli o uscenti da una sorgente posta a distanza finita. Alla fine si può cogliere il concetto più generale di trasformazione biunivoca fra punti di piani, e giustificare il nome di trasformazione geometrica. Vedremo in seguito un esempio di percorso didattico di questo tipo, che per esigenze di spazio, sarà limitato alle isometrie.
II) Oppure si può partire dall'idea più generale di trasformazione per poi passare all'analisi di casi particolarmente interessanti. È importante capire qual è l'idea primitiva che la parola trasformazione evoca negli alunni in modo da chiarire e giustificare, se possibile, l'accezione del termine nell'ambito della geometria. Vogliamo portarli al significato di trasformazione come corrispondenza biunivoca fra i punti del piano, ma è opportuno dare al termine plausibilità anche quando la trasformazione produce figure corrispondenti "*uguali*". Un'esperienza utile allo scopo è quella delle ombre prodotte da un reticolato a maglie quadrate, attraversato da fasci di luce paralleli o divergenti, su schermi piani messi in varie posizioni. Da una molteplicità di esperienze possiamo cogliere alcuni elementi costanti: si tratta sempre di corrispondenze fra punti di piani diversi: le chiamiamo trasformazioni geometriche; fra esse si possono notare anche le corrispondenze che trasformano il reticolato in un'ombra "*uguale*". Così anche la congruenza prende po-

sto fra le trasformazioni geometriche in modo abbastanza naturale.

3) *Quale posto hanno le trasformazioni geometriche nella pratica dell'insegnamento alla scuola media? Quali difficoltà sono dovute alla preparazione degli insegnanti e come superarle?*
Da varie indagini condotte in scuole medie e soprattutto da un'analisi attenta svolta su un vasto campione di prove di esame di matematica agli esami di terza media (Irrsae della Toscana 1994), prove che possono rappresentare un consuntivo dei contenuti maggiormente sviluppati dagli insegnanti nel triennio, si è potuto constatare che le trasformazioni geometriche sono entrate scarsamente, e in modo piuttosto marginale, nell'insegnamento della matematica alla Scuola Media. Soprattutto non se ne è colta la valenza innovativa in ordine ad un modo più significativo e dinamico di presentare la geometria. Si potrebbero individuare molteplici motivi fra cui una certa tendenza dell'insegnante a ricalcare gli schemi già consolidati dalla tradizione, la scarsità di corsi di aggiornamento organici per tutti i docenti sugli argomenti più nuovi dei programmi del '79, la tendenza ad aggiornarsi in settori "di moda" e certamente utili, come l'informatica,…. Non sono mancate iniziative locali di aggiornamento e di stimolo all'innovazione, con benefiche ricadute sull'insegnamento, ma molto cammino resta ancora da compiere. Questo corso risponde ad un'attesa sentita degli insegnanti, ma raggiunge un numero esiguo di docenti, se si pensa che è su scala nazionale; è auspicabile che ognuno dei corsisti si faccia promotore, nel suo ambiente, di iniziative di aggiornamento. A volte basta, in un collegio docenti, una proposta significativa perché tutti ne siano convinti e coinvolti.

Le trasformazioni geometriche nella Scuola Media
Uno schema concettuale e lo sviluppo di un itinerario didattico

Prima di descrivere un percorso didattico penso di esporre, in forma molto schematica il quadro concettuale minimo che l'insegnante dovrebbe possedere. Tale quadro potrà essere ampliato, corredato di rnotivazioni e di dimostrazioni durante le conversazioni e nell'itinerario didattico.

Quadro minimo di concetti e di termini per l'insegnante

* *Occorre avere l'idea di trasformazione geometrica come corrispondenza dei punti del piano in sé: ad ogni punto del piano la trasformazione fa corrispondere un punto del piano stesso.*

Mentre in un approccio operativo può essere utile dare l'idea di trasformazioni di un piano in un altro (esperienza delle ombre), in una sistemazione concettuale è più produttivo, agli effetti dello studio delle proprietà del piano, considerare le trasformazioni del piano in sé: infatti se si passasse da un piano ad un altro perderebbero di significato tanti elementi importanti: per esempio non si potrebbero definire le singole isometrie come la traslazione, la rotazione ecc., non si potrebbe più parlare di punti uniti,….

** Le trasformazioni geometriche di cui ci occuperemo sono tutte trasformazioni bigettive (biunivoche) del piano in sé, cioè tali che*

– *ad ogni punto P corrisponde uno ed un solo punto P'*

– *per ogni punto del piano esiste un punto che si trasforma in esso (*surgettività*)*

– *punti distinti vanno in punti distinti (*iniettività*).*

** Se una trasformazione è bigettiva si può parlare di trasformazione inversa: se la trasformazione diretta fa corrispondere al punto P il punto P', la sua inversa farà corrispondere al punto P' il punto P.*

** Se la trasformazione a manda P in P' e la trasformazione b manda P' in P" la trasformazione che manda P in P" viene chiamata trasformazione composta (o prodotto) della a e della b e si può indicare con il simbolo b • a. L'operazione con cui si associa a due trasformazioni la trasformazione composta si chiama operazione di composizione.*

** È opportuno considerare come trasformazione anche l'identità che manda ogni punto del piano in se stesso. L'identità, composta con qualsiasi altra trasformazione, dà per risultato la trasformazione stessa, cioè funziona come elemento neutro rispetto all'operazione di composizione.*

In simboli: $a \bullet I = I \bullet a = a$

La composizione di una trasformazione con la sua inversa dà l'identità.

Una trasformazione si dice involutoria se, applicata due volte, dà l'identità, cioè se è uguale alla sua inversa.

** Un insieme di trasformazioni del piano forma un gruppo (rispetto all'operazione di composizione) se sono soddisfatte le seguenti proprietà*

– *la composizione di due trasformazioni dell'insieme è una trasformazione dell'insieme*

– *la composizione gode della proprietà associativa* $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ *(per qualsiasi a, b, c, appartenenti all'insieme)*

– *l'identità fa parte dell'insieme*

– *se una trasformazione appartiene all'insieme anche la sua inversa vi appartiene.*

Vedremo che le isometrie del piano formano un gruppo, le simmetrie del piano invece non formano un gruppo (basta pensare che l'identità non vi appartiene). Sarà interessante, con gli alunni, studiare i gruppi delle isometrie che mutano in sé un rettangolo, un quadrato, altri poligoni regolari.

Se per ogni coppia di elementi a, b del gruppo a•b = b•a si dice che il gruppo è ***commutativo***. Vedremo esempi di gruppi non commutativi e questo servirà a far capire meglio ai ragazzi che non si deve credere che ogni operazione binaria sia commutativa (come sono abituati a verificare nelle operazioni algebriche consuete).

Una scala di trasformazioni geometriche

** Tra le trasformazioni geometriche che potremmo considerare, le più generali sono le* ***topologiche****, cioè le trasformazioni che soddisfano alla sola condizione della* ***continuità****.*

Per avere un'idea molto semplice pensiamo a figure disegnate su una superficie elastica che si può stirare: le figure si deformano, ma una linea chiusa rimane chiusa, una aperta rimane aperta,…. Gli alunni possono facilmente capire queste semplici idee, ma non possiamo addentrarci in molti altri sviluppi.

* Le esperienze delle ombre prodotte da un reticolato a maglie quadrate ci suggeriscono una categoria di trasformazioni meno generale del gruppo precedente; se la sorgente di luce è al finito ci danno l'idea delle ***proiettività*** che mandano rette in rette ma non conservano necessariamente il parallelismo; se però la sorgente di luce è all'infinito, (per es.la luce del sole, con buona approssimazione) la corrispondenza fra il reticolato e la sua ombra ci dà l'idea delle ***affinità***. Le trasformazioni di questo gruppo mandano coppie di rette parallele in coppie di rette parallele.

* Le esperienze delle riduzioni in scala e degli ingrandimenti ci portano a parlare delle ***similitudini***, *trasformazioni bigettive del piano in sé (o in un altro piano) tali che le distanze vengono tutte moltiplicate per una costante positiva k ,che si chiama rapporto di similitudine*.

Notiamo che le trasformazioni per similitudine mantengono tutte le proprietà geometriche che ci interessano nelle figure; basta pensare a questa situazione concreta: un insegnante disegna alla lavagna e gli alunni ricopiano la stessa figura (simile) sul loro quaderno.

* Fra le similitudini che mutano un piano in sè sono interessanti le ***omotetie***, *o ingrandimenti da un centro; si può infatti dimostrare che qualunque similitudine si può ottenere come il prodotto di un'isometria con un'omotetia. Si può scegliere se fare prima l'isometria o prima l'omotetia*.

* E finalmente l'esperienza dei movimenti rigidi ci porta a parlare delle

isometrie, *cioè delle trasformazioni bigettive del piano in sé che mantengano le distanze*.

A questo punto è bene fare una precisazione: abbiamo detto che l'esperienza dei movimenti rigidi ci porta a parlare delle *isometrie* ma non possiamo dire che le isometrie sono movimenti. *Mentre nel movimento ci interessa tutta la vicenda che porta dalla posizione iniziale a quella finale, per la trasformazione interessano solo la partenza e l'arrivo*.

Per chiarire meglio il fatto, anche sotto l'aspetto didattico, supponiamo di domandare ad un allievo di individuare le trasformazioni che portano il rettangolo ABCD nel rettangolo EFGH. Se l'allievo non ha capito la differenza tra movimento e trasformazione dirà che ci sono moltissime trasformazioni (per lui movimenti) che portano un rettangolo sull'altro e ce ne darà degli esempi muovendo in svariati modi una sagoma rettangolare congruente ad ABCD fino a farla sovrapporre a EFGH.

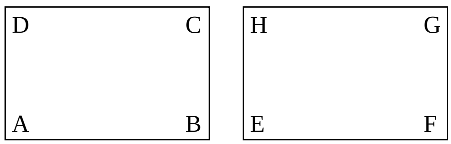


fig. 1

Ma se ha capito che l'importante è vedere dove vanno a finire i punti (nel nostro caso i vertici dei rettangoli) allora potrà individuarne solo quattro; in pratica l'alunno vedrà agevolmente la traslazione che porta A in E, la simmetria assiale che porta A in F, la simmetria centrale che porta A in G, meno facilmente l'antitraslazione che porta A in H. Per fargliela scoprire potremo suggerire di provare a far coincidere il vertice A del primo rettangolo successivamente con ciascuno dei quattro vertici del secondo in modo che le figure si sovrappongano.

* Per fare una significativa *classificazione delle isometrie* premettiamo una considerazione abbastanza intuitiva. Un'isometria trasformi un triangolo ABC nel triangolo A'B'C' e percorriamo il contorno dei due triangoli in modo corrispondente, per es. da A a B a C per il primo e da A' a B' a C' per il secondo: se succede che i due sensi di percorrenza siano uguali (tutti e due orari o tutti e due antiorari) diremo che l'isometria è *diretta*, se i sensi di percorrenza risultano diversi, diremo che l'isometria è *inversa*. Si può dimostrare che nella stessa isometria, quello che succede per un triangolo succede per tutte le altre spezzate semplici chiuse.

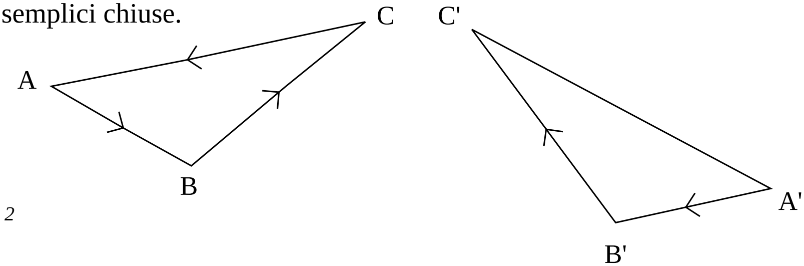


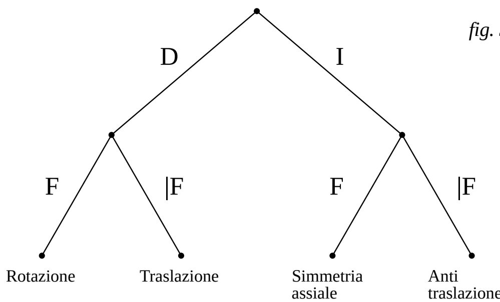
fig. 2

* Osserviamo che il termine “inverso” applicato alle isometrie è stato usato con due significati diversi. Qui abbiamo denominato inversa una isometria che muta il senso di percorrenza di un contorno. Ma abbiamo già visto un altro significato di trasformazione inversa: data la trasformazione **t**, si chiama trasformazione inversa, e si indica con $\mathbf{t}^{-1}$ quella trasformazione che composta con **t** dà l’identità. Se si decide di usare lo stesso termine con le due diverse accezioni, sarà il contesto del discorso a far capire di quale inversa si tratta.

* Ciò premesso le isometrie si possono classificare in modo spontaneo sulla base di questi due criteri

* ***Isometrie dirette con punti fissi***:
– *o tutti i punti sono fissi e si ha l’identità*
– *o un solo punto è fisso e si ha una rotazione*
* ***Isometrie dirette senza punti fissi***: *traslazione propria*
* ***Isometrie inverse con punti fissi***: *allora vi è una retta di punti fissi e l’isometria è una simmetria assiale)*
* ***Isometrie inverse senza punti fissi***: *(sono le antitraslazioni)*

fig. 3



* Fra le rotazioni un posto particolare meritano le rotazioni di mezzo giro o **simmetrie centrali** e le rotazioni di un **quarto di giro**, anche per le numerose applicazioni didattiche di cui parleremo nell’itinerario.

* Un’altra conoscenza importante che l'insegnante dovrebbe avere, conoscenza che può guidarlo nella ricerca di domande ed esercizi stimolanti per gli allievi, è collegata al **ruolo particolare delle simmetrie assiali** all’interno di tutte le isometrie: esse possono generare, per composizione, tutte le altre isometrie.

* È interessante scoprire che: **ogni isometria piana può essere essere generata con, al più, tre simmetrie assiali.**

Possiamo allora fare un’altra classificazione delle isometrie:

* **con una sola simmetria** assiale si ha ovviamente la
– ***simmetria assiale*** (*isometria inversa con una retta di punti uniti*)

* con la composizione di *due simmetrie assiali* si hanno due casi
– con *assi paralleli* si ottiene una **traslazione** *di vettore perpendicolare agli assi, orientato dal primo al secondo asse, di intensità doppia della distanza degli assi (isometria diretta, senza punti uniti, o con tutti i punti uniti se gli assi coincidono)*

– con *assi incidenti* si ottiene *una **rotazione** di centro il punto di incontro degli assi, di senso che va dal primo al secondo asse, di angolo doppio di quello formato dai due assi, nel senso già considerato (isometria diretta, con un solo punto unito).*

È bello far notare le analogie dei due casi precedenti.

* con la composizione *di tre simmetrie assiali* possiamo distinguere tre situazioni che dipendono dalle reciproche posizioni degli assi
– se *i tre assi sono paralleli* è facile mostrare che l'isometria prodotto delle tre simmetrie assiali è una **simmetria assiale**
– se i *tre assi passano tutti per uno stesso punto* il prodotto delle tre simmetrie assiali è ancora una **simmetria assiale**
– se i tre assi sono in altre posizioni reciproche il prodotto delle tre simmetrie si può ridurre al **prodotto di una simmetria assiale per una traslazione nella direzione dell'asse di simmetria** *(antitraslazione, isometria non diretta senza punti uniti).*

Si poteva prevedere che con il prodotto di un numero pari di simmetrie si ottengono isometrie dirette; per avere invece quelle inverse è necessario comporne un numero dispari.

* L'argomento isometrie si presta ad essere sviluppato ampiamente alla scuola media: dà spunto a varie attività di carattere operativo e mentale, ad agganci con la realtà, favorisce l'acquisizione di un linguaggio proprio ed espressivo, si presta ad una visione più dinamica della geometria e induce a classificazioni più soddisfacenti di quelle tradizionali.

* Man mano che scendiamo dalle trasformazioni più generali a quelle particolari aumentano le proprietà che si mantengono attraverso queste trasformazioni, gli **invarianti della trasformazione**. Per esempio le similitudini mantengono, oltre il rapporto fra lunghezze corrispondenti, gli angoli, e naturalmente tutto ciò che mantenevano le affinità.
Le similitudini trasformano cerchi in cerchi, triangoli rettangoli in triangoli rettangoli, poligoni regolari in poligoni regolari,…. Le isometrie poi, mantenendo le distanze, trasformano ogni figura in una "uguale" (congruente); ne possono mutare solo la posizione.

* Sarà interessante far notare agli allievi che le isometrie sono particolari similitudini, che le similitudini sono particolari proiettività, che le proiettività sono particolari trasformazioni topologiche .

* Isometrie e similitudini, per la ricchezza delle proprietà di cui godono e per l'aderenza alle esperienze reali nel loro approccio operativo, saranno privilegiate nell'itinerario didattico da me prescelto.

* Il quadro concettuale dell’insegnante risulterà più completo se ci sarà una conoscenza, anche solo generale, delle diverse impostazioni assiomatiche che una trattazione razionale della geometria può avere. Non si tratta certo di parlare ai nostri alunni di assiomi, teoremi e via dicendo, ma una nostra maggiore consapevolezza dei possibili percorsi assiomatici potrà agevolare un tipo di insegnamento che faccia fare esperienze, osservazioni, ragionamenti utili a preparare il terreno per l'impostazione della geometria che verrà data alle superiori.

* ***Trasformazioni geometriche e riferimento cartesiano***

Di alcune semplici trasformazioni geometriche gli allievi stessi, guidati, possono scoprire le equazioni in un riferimento cartesiano opportunamente scelto. Ma l’insegnante deve saperne di più. È un esercizio piacevole cercare di scrivere le equazioni di alcune trasformazioni geometriche o saper leggere il tipo di trasformazione geometrica dalle equazioni già scritte.

Proviamoci:

$x'=x$ $y'=-y$	simmetria rispetto all’asse x	$x'=-x$ $y'=y$	simmetria rispetto all’asse y
$x'=y$ $y'=x$	simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° q.	$x'=-y$ $y'=-x$	simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° q.
$x'=2a-x$ $y'=y$	simmetria rispetto alla retta di equazione $x=a$	$x'=x$ $y'=2b-y$	simmetria rispetto alla retta di equazione $y=b$
$x'=-x$ $y'=-y$	simmetria centrale di centro O	$x'+x=2a$ $y+y'=2b$	simmetria centrale di centro (a; b)
$x'=-y$ $y'=x$	rotazione di un quarto di giro in senso antiorario	$x'=y$ $y'=-x$	rotazione di un quarto di giro in senso orario

$x'=x+a$ $y'=y+b$	Traslazione T di componenti a *e* b (si può provare algebricamente che, se non è l’identità, non ha punti uniti)
$x'=x+a$ $y'=-y$	Antitraslazione composta dalla simmetria di asse x e dalla traslazione parallela all’asse x di lunghezza a (si può verificare algebricamente che non ha punti uniti)
$x'=kx$ $y'=ky$	Omotetia di centro O e fattore di scala k

SVILUPPO DI UN ITINERARIO DIDATTICO: DALL'APPROCCIO OPERATIVO ALLA CONQUISTA DEI CONCETTI

Alla ricerca delle figure direttamente o inversamente congruenti

* Si chiede ad ogni alunno di costruire una scorta di bandierine uguali (asta di legno e drappo di cartoncino) e di disporle sul banco senza un ordine particolare. L'insegnante potrà verificare se ci sono delle disposizioni privilegiate o se l'alunno occupa liberamente il piano, se sa dare alle aste delle bandiere direzioni varie, non necessariamente parallele ai bordi del banco. Potremo dire agli alunni che faremo uno studio sui movimenti (per ora non conviene parlare di trasformazioni) che portano una bandierina sull'altra.

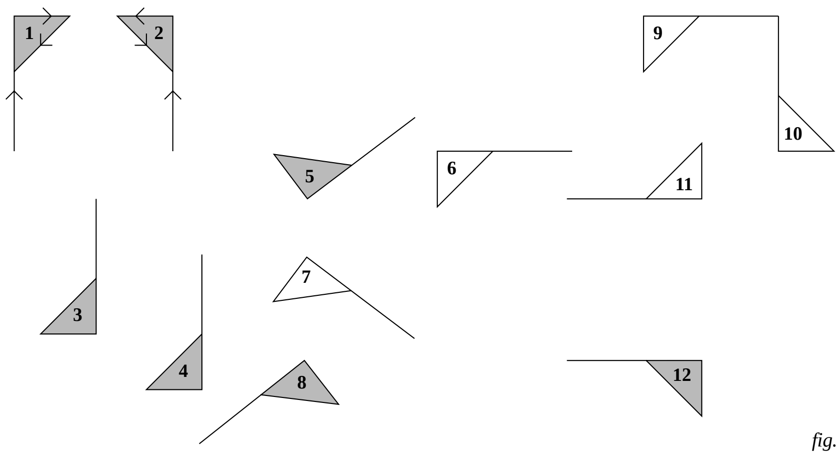


fig. 4

* Per poter lavorare e discutere contemporaneamente con tutti gli alunni, distribuiamo dei fogli con bandierine disegnate come in figura e diamo a ciascuno un modello di bandierina, costruita col materiale, con sagoma uguale a quelle disegnate. Avremo cura di realizzare il drappo del modello con le due facce diversamente colorate, per esempio una rossa e una verde. Chiediamo di sovrapporre la sagoma al disegno n. 1 e di spostarla per sovrapporla su altre bandierine con movimenti a piacere, ma con la condizione di strisciare sempre sul foglio. ***"È possibile sovrapporla su tutte?" "No" "Su quali è possibile?" "……" "Coloriamo i drappi delle bandierine su cui abbiamo potuto sovrapporre la sagoma con lo stesso colore che vediamo su essa"***.

Se ora vogliamo sovrapporre la bandierina mobile a quelle disegnate sul foglio e non ancora colorate, dobbiamo capovolgerla e ci apparirà l'altro colore. Gli alunni riconoscono facilmente, con il movimento, che ora la sagoma si sovrappone a tutte le bandierine su cui non si sovrapponeva prima: a queste riserviamo il secondo colore di quella mobile. Dunque possiamo dire che le bandierine sono tutte “uguali” (congruenti), ma si presentano in due modi diversi; è interessante far scoprire una proprietà legata ai due modi: si tratta del senso con cui si può descrivere il contorno delle figure. Decidiamo di partire sempre dal pomo dell’asta, risalire alla cima dell’asta e completare di seguito il contorno del drappo. Nelle bandierine colorate come la 1 il contorno viene descritto in ***senso orario***, nelle altre in ***senso antiorario***.

* Procediamo con le domande per indagare sulle conoscenze eventualmente acquisite alle elementari: ***“Fra i movimenti che portano una bandierina sull’altra ce ne sono alcuni e te familiari perché ne hai già sentito parlare? quali?”*** Può darsi che qualcuno individui la simmetrie assiali (la coppia 1-2, oppure la 11-12, oppure, ma meno facilmente, la 5-7), o le traslazioni (3 in 4 e viceversa o 6 in 9 e viceversa); è più difficile che scoprano una simmetria centrale o altre rotazioni. A questo punto si può proporre uno studio più particolareggiato sui singoli movimenti. Da dove iniziare? Ciascun insegnante fa la sua scelta, probabilmente fra traslazione e simmetria assiale, perché le rotazioni presentano maggiori difficoltà. La mia proposta prende in considerazione dapprima la simmetria assiale per la varietà di approcci materiali disponibili e perché mi sembra più ricca di sviluppi e quindi più interessante per gli allievi. Attraverso l’operatività sulla simmetria assiale ci si avvicinerà al concetto di trasformazione geometrica che coinvolge tutto il piano.

La simmetria assiale

Dall’approccio operativo al concetto

Le prime esperienze si possono fare con fogli di carta bianca, spilli, matita e righello. Chi ha esperienza di insegnamento sa come l’alunno viene influenzato dalle due direzioni fondamentali (chiamate impropriamente orizzontale e verticale) parallele ai bordi del foglio rettangolare. Pare quindi opportuno lavorare con fogli dal contorno irregolare, che non presentino direzioni privilegiate, oppure fare piegature non parallele ai bordi del foglio.

Il foglio rappresenta il piano, una piegatura del foglio rappresenta una retta. La retta r divide il piano in due semipiani di cui indicheremo le proprietà: “se A è un punto di un semipiano e B è un punto dell’altro, per andare da A a B dobbiamo attarversare la retta r” “se A e B stanno nello stesso semipiano possiamo andare da A a B senza attraversare la retta r”. Dopo aver piegato il foglio, con lo spillo si praticano dei fori che prendano ambedue i semipiani: ecco nascere idealmente delle coppie di punti cui daremo nomi come A e A', B e B', ecc. Per ogni punto del piano che non sta sulla retta r possiamo trovare uno e un solo punto corrispondente che sta nel semipiano opposto, e ogni punto è la destinazione di uno e un solo punto; si può vedere anche, avvicinandosi gradualmente all’asse di simmetria, che ad ogni punto dell’asse corrisponde il punto stesso. Chiamiamo *simmetria assiale di asse r* la corrispondenza biunivoca fra punti del piano che si è venuta a creare. Attraverso varie attività guidate gli alunni scopriranno gradualmente le proprietà della simmetria assiale; l’approccio operativo è accessibile a tutti, mentre il linguaggio che si arricchisce e si precisa obbliga a un certo sforzo che, comunque, fa progredire:

– Se al punto A corrisponde A', al punto A' corrisponde A (la simmetria assiale è involutoria); allora si può dire che A e A' sono simmetrici rispetto alla retta r.

– Se due punti A e B hanno una certa distanza anche i corrispondenti A' e B' hanno la stessa distanza, quindi la simmetria assiale è una isometria.

– Il segmento che congiunge due punti simmetrici è incontrato dall’asse di simmetria nel suo punto medio.

– La retta che passa per una coppia di punti corrispondenti è perpendicolare all’asse di simmetria.

– Se un punto descrive una retta anche il corrispondente descrive una retta e più precisamente

** se la retta è parallela all’asse anche la retta corrispondente lo è*

** se la retta incontra l’asse nel punto R anche la corrispondente incontra l’asse in R*

** se la retta è perpendicolare all’asse si trasforma in sé (non è retta di punti uniti).*

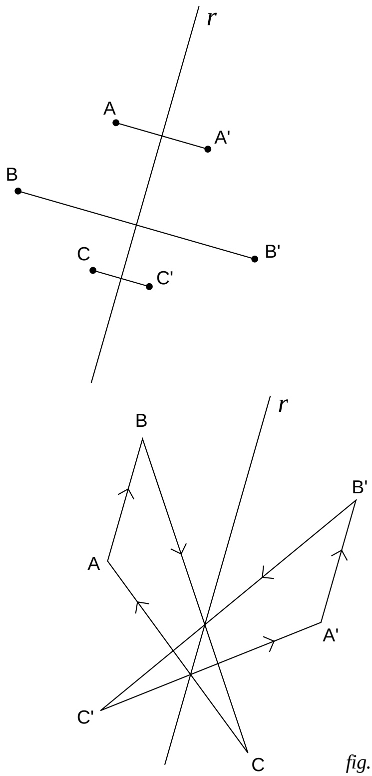


fig. 5

– Gli alunni si eserciteranno liberamente a formare coppie di figure simmetriche, sempre con la tecnica della piegatura della carta e con lo spillo; con una molteplicità di casi diversi si formeranno l’occhio alla simmetria assiale e verificheranno che il senso di percorrenza del contorno di figure corrispondenti non è uguale.

– Quando la figura, di cui trovare la simmetrica, è tagliata dall’asse di simmetria, la piegatura del foglio può cedere il posto al ribaltamento di un foglio traslucido su cui si sono ricalcate la figura di partenza e l’asse di simmetria.

L’uso del secondo foglio trasparente aiuta maggiormente a capire la simmetria come trasformazione di tutto il piano in sé.
– Gli allievi potranno fare anche esperienze con il geopiano che svincola dal disegno e con il foglio quadrettato: gli assi di simmetria potranno essere dapprima paralleli ai bordi del foglio e successivamente in posizione diagonale rispetto alla quadrettatura. - Solo in seconda o in terza media si potranno realizzare le costruzioni geometriche con riga e compasso, molto più impegnative per i ragazzi.

* Dopo aver fatto vari esercizi pratici sulla simmetria assiale definita operativamente, fra cui importanti le piegature di un foglio per formare un angolo retto, gli alunni potranno apprezzare una defìnzione più rigorosa della trasformazione geometrica in questione e potranno allenarsi ad esprimerla correttamente:
Una definizione di simmetria assiale
Data una retta r, la simmetria assiale di asse r è la trasformazione del piano in sé che lascia fissi tutti i punti di r e che ad ogni punto A del piano, esterno ad r, fa corrispondere il punto A' tale che la retta r sia perpendicolare al segmento AA' e lo tagli nel suo punto medio.

* Con questa definizione noi pensiamo che l’alunno possegga già il concetto di perpendicolarità.
* La definizione potrà essere di guida alla ricerca, punto per punto, delle figure simmetriche di figure date. Succede infatti che l’alunno, alle prese con la costruzione del simmetrico, tenga conto di una sola delle condizioni: o solo la perpendicolarità, o solo la distanza,…

Figure con asse di simmetria
* Come introdurre il concetto di “***asse di simmetria di una figura?***”
Mi sembra importante avere chiarezza di idee e comunicare ai ragazzi tale chiarezza. C’è infatti il pericolo di un equivoco: che l’allievo intenda che ogni figura può avere qualunque retta come asse di simmetria nel senso che della figura si può trovare sempre la simmetrica rispetto ad una retta data.
Occorre allora dire che ***una figura ha come asse di simmetria una retta r se, nella simmetria di asse r, la trasformata della figura è la figura stessa***. Ma prima avremo fatto scoprire agli alunni casi di questo genere formando sul geopiano o su carta quadrettata figure dotate di un asse di simmetria e chiedendo loro di trovare la simmetrica della figura rispetto a quell’asse.
Si può anche dare un altro enunciato, dopo averlo verificato nella concretezza dell’oggetto: ***una figura ammette r come asse di simmetria se, essendo***

***P* un punto della figura, anche il suo simmetrico *P'* appartiene alla figura.** È un'ulteriore occasione di arricchimento del linguaggio e di affinamento concettuale. Come attività pratiche potremo chiedere agli alunni di inventare e costruire figure dotate di assi di simmetria. potranno farlo sul disegno, con carta piegata e forbici….

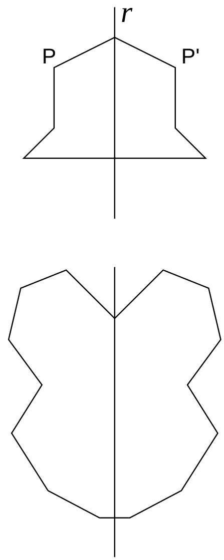


fig. 6

Un altro strumento utile per la simmetria assiale: lo specchio.

A questo punto è quasi d'obbligo lavorare con gli specchi, sia per controllare l'esattezza di costruzioni di coppie di figure simmetriche, sia per cercare gli assi di simmetria di una figura. In particolare gli alunni si divertono moltissimo a trovare gli assi di simmetria delle lettere dell'alfabeto scritte in stampatello e a vedere che cosa succede della lettera quando lo specchio viene messo lungo una retta che non è asse di simmetria. È anche divertente scoprire con lo specchio un messaggio "segreto", fotocopiato da un lucido messo "alla rovescia". Se per chiarire il concetto di figura dotata di asse di simmetria abbiamo ideato figure varie, fantasiose (pensiamo al ritaglio di carta raddoppiata), poi fisseremo l'attenzione alle figure geometriche più "classiche": rettangoli, rombi, quadrati, triangoli, trapezi, cerchi. Dopo aver cercato gli assi di simmetria con lo specchio, sulle figure disegnate, faremo ritagliare le figure in carta e verificare gli assi di simmetria con le piegature. Una sorpresa per molti, si ha con le diagonali del rettangolo generico: dividono il rettangolo in due triangoli uguali, ma non sono assi di simmetria…. Questa osservazione potrà essere utile per introdurre la simmetria centrale.

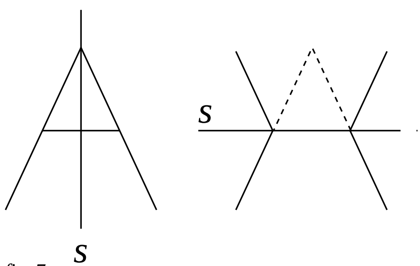


fig. 7

* Abbiamo detto che lo studio delle trasformazioni geometriche aiuta a fare buone classificazioni delle figure.

Ci proponiamo di studiare quali sono i triangoli e i quadrilateri che hanni un asse di simmetria (averne uno non vuol dire averne solo uno).

Triangoli con un asse di simmetria

I tre vertici non possono essere allineati sull'asse di simmetria, quindi almeno uno è esterno, anche il suo simmetrico sarà un vertice; il terzo vertice dovrà appartenere all'asse. Si tratta del *triangolo isoscele*, come caso particolare ci potrà essere il *triangolo equilatero*, che ha altri due assi di simmetria.

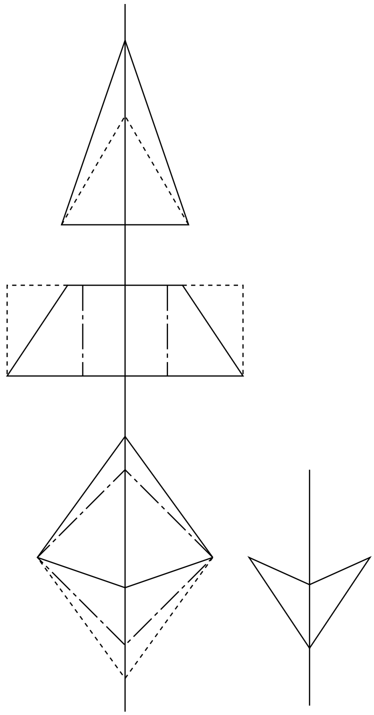


fig. 8

Quadrilateri con un asse di simmetria

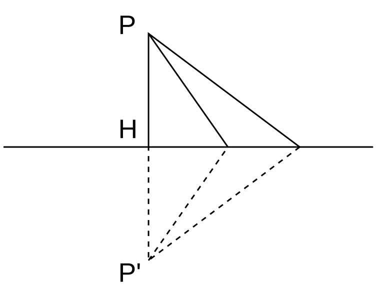
Uno dei quattro vertici sarà certamente esterno all'asse di simmetria, allora anche il suo simmetrico sarà un vertice.

– Se c'è un terzo vertice esterno all'asse anche il quarto lo sarà (simmetrico rispetto al terzo): abbiamo il ***trapezio isoscele*** con i casi particolari del *rettangolo* e del *quadrato*.

– Se il terzo vertice è sull'asse di simmetria, anche il quarto lo sarà e otteniamo il "***deltoide***", convesso o la "*coda di freccia*", concava. Come casi particolari il *rombo* e il *quadrato*.

Altre applicazioni del concetto di simmetria assiale

fig. 9



* Data una retta r e un punto P fuori di essa, per tracciare la ***perpendicolare alla retta*** basta tracciare la congiungente P con il simmetrico P'; se H è il punto di incontro con r è molto facile mostrare che PH è il cammino più breve che conduce da P alla retta *(distanza P dalla retta)*.

* Se P e P' sono simmetrici rispetto alla retta r, tutti i punti di r, e solo loro, distano ugualmente da P e P'; r si chiama ***asse del segmento PP'***. I punti di uno dei due semipiani determinati da r distano da P meno che da P', viceversa quelli dell'altro semipiano. Naturalmente questi con-

fig. 10

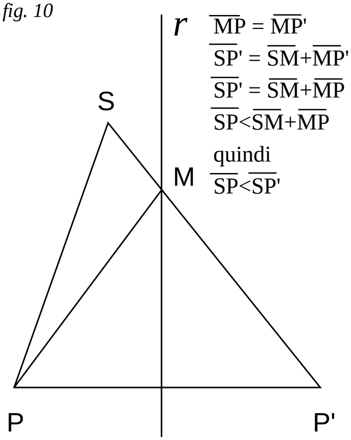
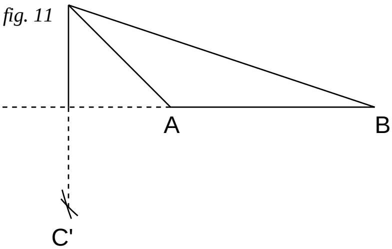


fig. 11



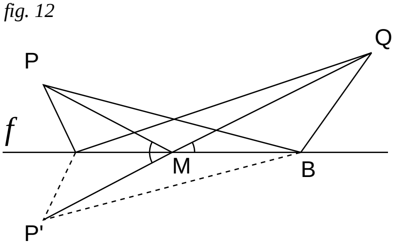
cetti devono essere presentati ai ragazzi con vivacità, in forma problematica, dicendo, per esempio “*in P e in P' ci sono due fontane in mezzo ad una pianura percorribile in ogni parte. Da quali posizioni si è più vicini alla fontana P? e da quali alla P'? Ci sono punti da cui è indifferente andare in P o in P' perché ugualmente distanti?*” Le cose si possono “vedere” intuitivamente, ma sono graziose e semplici anche le dimostrazioni.

* La costruzione *delle altezze di un triangolo* con riga e squadra costituisce per gli alunni una difficoltà, soprattutto quando il triangolo è ottusangolo. Per superare l’ostacolo si può proporre di unire ogni vertice con il simmetrico rispeto al lato opposto. Con la piegatura della carta e lo spillo ciò diventa semplice; anche l’uso del compasso non crea grosse difficoltà.

Il problema di Erone risolto con la simmetria assiale

“P e Q sono due località situate dalla stessa parte rispetto al fiume f. Un uomo a cavallo si trova nella località P e vuole raggiungere la località Q; prima però deve abbeverare il cavallo al fiume. Qual è il minimo cammino che può percorrere?”

fig. 12



L’idea brillante è quella di spezzare il cammino in due tratti rettilinei: da P al fiume e dal fiume a Q. Se P’ è il simmetrico di P rispetto a f, ogni tratto da P al fiume sarà lungo come il simmetrico. Allora il problema si riduce al seguente: *trovare la strada più breve tra P' e Q, cioè tracciare il segmento PQ e segnare il punto M in cui incontra f: di lì passa il cammino più breve da P a Q.*

Questo tipo di ragionamento piace molto agli alunni e mostra la fecondità del concetto di simmetria. Potremo riprenderlo quando studieremo la riflessione della luce in uno specchio piano. Infatti “*un raggio di luce che, uscendo da*

P, incida sulla superficie speculare e rimbalzi passando per Q segue i cammino più breve PMQ che è anche quello che rende l'angolo di incidenza uguale a quello di riflessione".

* Un altro problema che si risolve con un procedimento di simmetrizzazione analogo a quello adottato per il problema di Erone è il seguente: "*Fra i triangoli aventi una certa base AB e altezza assegnata qual è quello con minore perimetro?*"

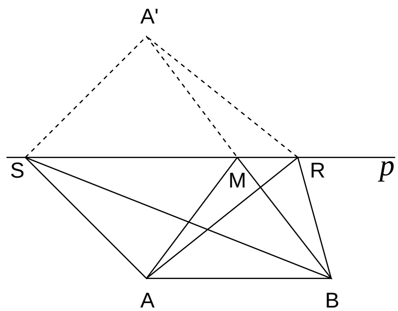


fig. 13

È immediato capire che i vertici dei triangoli in questione stanno tutti su due parallele alla base AB, distanti da essa come l'altezza fissata per i triangoli. Le considerazioni che faremo su una parallela si possono ripetere per l'altra.
Sia dunque p una delle due rette parallele ad AB e sia A' il simmetrico di A rispetto a p.
Fissato un punto qualunque S su p, costruiamo il triangolo ASB e consideriamo la somma AS+SB di due suoi lati; tale somma è uguale alla somma A'S+SB per l'uguaglianza dei due segmenti AS e A'S, simmetrici rispetto alla retta p. Al variare di S sulla retta p ci sarà un punto per cui questa somma diventa minima? Sì, nel punto M in cui la retta A'B taglia la retta p. Tale punto è il vertice del ***triangolo isoscele*** avente per base AB e l'altezza assegnata e il triangolo AMB ha il perimetro minimo.
Più volte, nel corso di questo itinerario didattico, ci siamo imbattuti in situazioni che portano gli alunni a seguire o a fare una piccola dimostrazione, comunque ad argomentare in un modo che allena alle future dimostrazioni. Lo sviluppo dell'alunno è continuo e non si può dire che la geometria delle medie sia tutta intuitiva e quella delle superiori tutta razionale. L'insegnante deve condurre con gradualità da una fase ad un'altra ricordando che la capacità di "intuire" un fatto prima ancora di dimostrarlo sarà preziosa anche quando lo studio della geometria sarà prevalentemente razionale, nel proseguimento degli studi.

Il riferimento cartesiano

L'uso del foglio quadrettato dotato di sistema di riferimento cartesiano monometrico rende più agevoli vari esercizi sulle simmetrie. Ci consente di proporre figure attraverso le coordinate dei loro vertici e di controllare l'esito di esercitazioni con informazioni valide per tutti gli alunni. Fin dalla prima media è possibile lavorare sul piano cartesiano, non solo nel primo quadrante. Infatti i numeri relativi si possono introdurre precocemente per determinare posizioni nel piano; più tardi parleremo delle operazioni con essi.

Dalla fine della seconda media è anche possibile condurre i ragazzi a scoprire equazioni di trasformazioni geometriche in casi semplici, per esempio nel caso delle simmetrie rispetto agli assi coordinati.

La simmetria centrale

La trattazione di questa particolare rotazione precede la presentazione delle rotazioni in generale per vari motivi: per la immediatezza del concetto e delle relative costruzioni, sia con il materiale, sia con gli strumenti da disegno e perché ricorre molto spesso nello studio delle figure geometriche più note.

Per introdurre il movimento che suscita l’idea di simmetria centrale, cioè il mezzo giro intorno ad un centro, possiamo riprendere l’osservazione fatta sul rettangolo, quando ne cercavamo gli assi di simmetria; le diagonali dividono il rettangolo in due parti uguali, ma quale movimento porta l’una sull’altra?

Su un foglio di carta trasparente ricalchiamo uno dei due triangoli determinati da una diagonale, puntiamo uno spillo nel punto medio della diagonale e facciamo ruotare il foglio di mezzo giro: il triangolo ricalcato va a sovrapporsi all’altra metà del rettangolo. Questa esperienza ci dà l’avvio per studiare la **simmetria centrale**.

Approccio operativo. Il materiale utile è costituito da un foglio di carta bianca, da un foglio trasparente, uno spillo o un piccolo bottone a pressione per fissare il foglio trasparente sul foglio base attraverso un solo punto e poter compiere delle rotazioni.

Fissato nel foglio base un punto O (centro della simmetria), segnamo vari punti A, B, C, …in posizione qualsiasi e ricalchiamoli sul foglio trasparente, puntiamo in O uno spillo o un bottone a pressione e ruotiamo il foglio trasparente di mezzo giro (una retta per O segnalerà il mezzo giro).

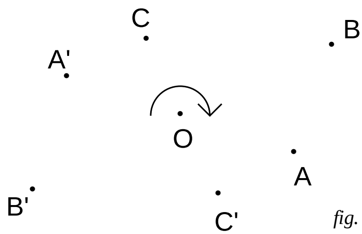


fig. 14

Le posizioni A', B', C' in cui vanno i punti A, B, C, del trasparente sono i corrispondenti di A, B, C nella **simmetria centrale di centro O**. Al centro O corrisponde il centro stesso (punto unito).

Facciamo osservare in modo concreto agli alunni che

* La corrispondenza che così si ottiene è **biunivoca**, infatti

– **ogni punto del piano ha il suo corrispondente**
– **ogni punto (di arrivo) proviene da un punto (di partenza)**
– **punti distinti vanno in punti distinti**

* Le distanze fra punti si mantengono, diciamo quindi che anche la **simmetria centrale** è una **isometria**. Quindi ogni figura si trasforma in una figura "uguale". Sempre attraverso domande, guideremo gli alunni a scoprire altre proprietà della simmetria centrale "***Una simmetria centrale ha rette unite?***" "Sì, le rette per O, ma non sono rette di punti uniti (solo O è unito)". "***Come si trasforma una retta qualunque?***" "In una retta ad essa parallela".

"***La simmetria centrale è una trasformazione diretta o inversa?***" "È diretta perché mantiene il senso di percorrenza del contorno delle figure".

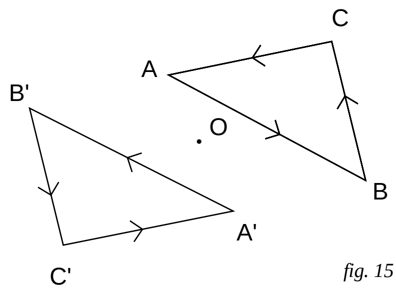


fig. 15

"***Che cosa succede se si applica due volte di seguito la simmetria centrale?***" Poiché se ad A corrisponde A', ad A' corrisponde A, ogni punto torna su se stesso e otteniamo l'**identità**. Per questo la simmetria centrale, come la assiale, si dice **involutoria**.
Diremo che A e A' sono punti simmetrici rispetto ad O.

Arriviamo alla definizione di simmetria centrale

Si fa osservare ai ragazzi che se un generico punto A del piano compie mezzo giro di centro O (non importa se in senso orario o in senso antiorario) e va in A', allora A e A' sono allineati con O e O è punto medio del segmento AA'. Questa osservazione ci porta immediatamente alla definizione di simmetria centrale e ad una semplice costruzione geometrica.

Dato un punto O del piano, la simmetria centrale di centro O, o mezzo giro, è la trasformazione del piano in sè così definita:
• al punto O corrisponde sé stesso
• al punto P, diverso da O, corrisponde il punto P' della semiretta opposta alla semiretta OP e tale che OP' = OP

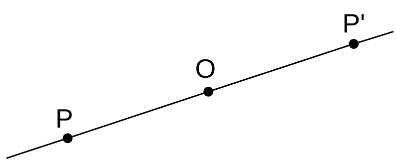


fig. 16

È immediata e facile la *costruzione geometrica*: dato il centro O e un punto P per trovare P' si traccia la retta OP e si cerca su essa, nella semiretta opposta alla OP, il punto P' tale che OP = OP'

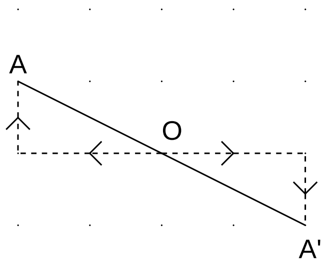


fig. 17

Lavorando su carta quadrettata gli alunni impareranno ben presto a trovare l'immagine P' di P contando i quadretti, a partire da O, lungo le direzioni della quadrettatura. Se per andare da O ad A conto 2 quadretti verso **sinistra** e un quadretto verso l'**alto**, per andare da O ad A' conterò 2 quadretto verso **destra** e un quadretto verso il basso.

Figure con centro di simmetria

Si definiranno le figure che **ammettono un centro di simmetria come quelle che vengono trasformate in sé dalla simmetria centrale intorno a quel punto.** Inviteremo gli alunni a “inventare” figure con centro di simmetria sia lavorando sul geopiano che disegnando su carta quadrettata o su carta bianca.

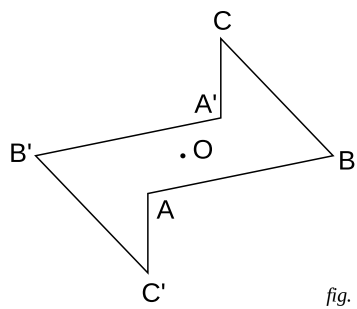


fig. 18

Basterà determinare alcune coppie di punti simmetrici rispetto a un centro e congiungerli opportunamente. ***Un’applicazione nella fisica:*** se una lamina pesante omogenea ha un centro di simmetria questo è il baricentro della lamina.

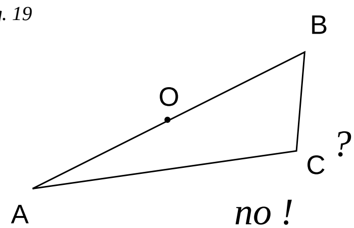
Altre domande sulla simmetria centrale.

a) **“Un triangolo può avere centro di simmetria?”**

“I tre vertici non possono essere allineati, e se un punto è vertice, anche il suo simmetrico lo deve essere; poiché i vertici sono in numero dispari, non c'è un triangolo con centro di simmetria”

b) **“Come scegliere quattro punti perché siano vertici di un quadrilatero che ha centro di simmetria?”** “Poiché la simmetria centrale scambia i vertici a coppie, basta scegliere due coppie di punti simmetrici rispetto ad un centro O. Si ottiene un **parallelogramma**. Basta applicare le proprietà della simmetria centrale per scoprire le proprietà del parallelogramma: lati opposti uguali e paralleli, angoli opposti uguali, diagonali che si dimezzano scambievolmente,….

fig. 19



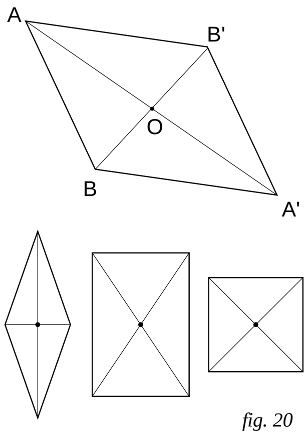


fig. 20

Nell’ottica delle trasformazioni geometriche si può allora dare questa definizione: **Parallelogramma e il quadrilatero che ha centro di simmetria**
Anche il rettangolo, il rombo, il quadrato (particolari parallelogrammi) hanno centro di simmetria.

Esercizi e applicazioni

* Data una retta r ed un punto P fuori di r, costruisci la parallela ad r passante per P sfruttando la simmetria centrale.

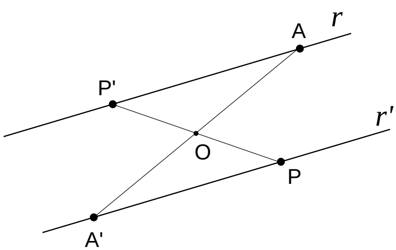


fig. 21

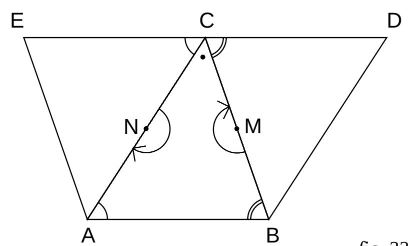


fig. 22

* Si può ricorrere alla simmetria certrale per dimostrare che **la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto**.
* Si può ricorrere alla simmetria centrale per trovare **l’area del trapezio**.
* Si può ricorrere alla simmetria centrale per studiare gli **angoli formati da due**

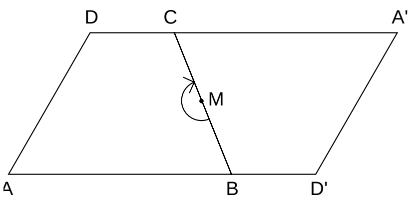


fig. 23

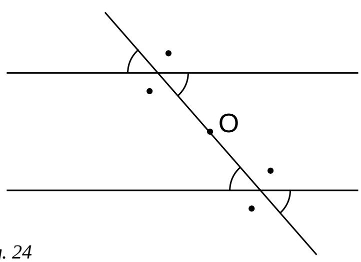


fig. 24

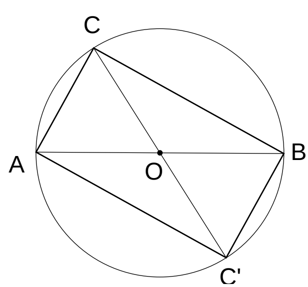


fig. 25

rette parallele tagliate da una trasversale.
* Si può ricorrere alla simmetria centrale per mostrare che un **triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo**: unendo la figura di partenza con la trasformata nella simmetria di centro O si ottiene un rettangolo inscritto in una circonferenza,…

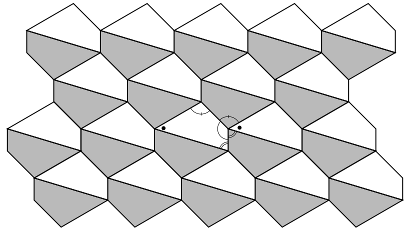


fig. 26

* Si può ricorrere alla simmetria centrale per fare una **pavimentazione** a partire da una **“piastrella” rappresentata da un quadrilatero qualsiasi**. Per passare da ogni piastrella ad una adiacente si fa un mezzo giro con centro nel punto medio del lato in comune. È consigliabile lavorare su carta quadrettata.

La simmetria centrale ottenuta per composizione di simmetrie assiali.

Possiamo lavorare in un foglio quadrettato dotato di sistema di riferimento cartesiano.
Disegnamo la bandierina determinata dai punti A (3;2) B (3:10) C (6:8) D (3;6)
Trasformiamola con la simmetria s di asse x e siano A', B', C', D' i punti che determinano la sua immagine. Possiamo far notare che la simmetria rispetto all'asse delle x mantiene inalterata l'ascissa e cambia ogni ordinata nella sua opposta. Trasformiamo poi A', B', C', D' con la simmetria s di asse y: otterremo A'', B'', C'', D''. Questa volta resta immutata l'ascissa e l'ordinata si cambia nell’opposta.

"Che cosa si può dire della trasformazione che porta la prima bandierina nella terza, cioè della trasformazione composta dalle due simmetrie assiali?" Si riconosce che è la simmetria centrale di centro O, origine degli assi.

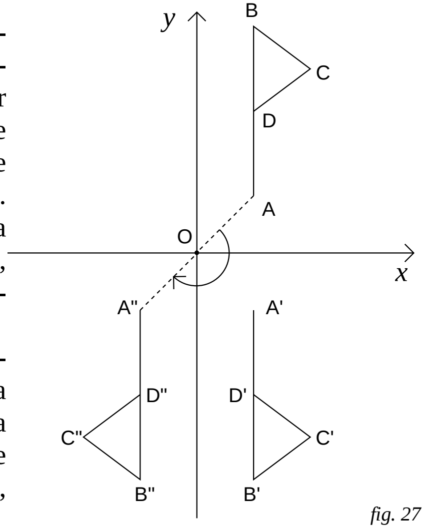


fig. 27

Si può mostrare che ogni simmetria centrale di centro O si può ottenere componendo due simmetrie assiali con assi perpendicolari passanti per O.

Come esercizio per gli alunni: “Disegnata una figura a piacere, trasformala con la simmetria avente per asse la bisettrice del 1° e 3° quadrante e poi opera sulla trasformata con la simmetria avente per asse la bisettrice del 2° e 4° quadrante. Riconosci la trasformazione composta dalle due: puoi verificare che è una simmetria centrale con la rotazione del foglio trasparente o con un ragionamento”.

Verso la traslazione

Dall’approccio operativo alla definizione.

Proponiamo agli alunni un ritorno al disegno di pag. 86 che ci era servito per scoprire la relazione di diretta o inversa congruenza e verifichiamo la capacità da loro acquisita nel riconoscere simmetrie assiali o simmetrie centrali.

“Ci sono coppie di bandierine che si corrispondono in una simmetria assiale? Quali? Con quale asse di simmetria?”

Possiamo prevedere che riconosceranno subito la simmetria assiale che scambia la 1 con la 2 e quella che scambia la 11 con la 12; è meno immediato il riconoscimento della coppia 5, 7 perché l'asse di simmetria in questo caso non è parallelo all'asta delle bandierine. In ogni coppia di bandierine simmetriche una è diversamente colorata dall'altra e ciò conferma che sono inversamente congruenti.

“Ci sono coppie di bandierine che si corrispondono in una simmetria centrale? Quali? Con quale centro dì simmetria?”

La ricerca è più impegnativa e possiamo porre alcune domande-guida:
“Avranno lo stesso colore?” (Ricordiamo che la simmetria centrale è un'isometria diretta).
“Avranno le aste parallele?” (Ricordiamo che la s. c. trasforma una retta in una retta parallela).
Fra le bandierine con drappo tratteggiato solo la 1 con la 3 e la 4 hanno le aste fra loro parallele. Allora ci può essere una simmetria centrale che scambia la 1 con la 3. Di quale centro? È interessante a questo punto vedere come gli alunni se la cavano. Alcuni vanno per tentativi usando carta traslucida e spillo e cercando un “centro buono”, altri ragionano sfruttando la definizione di simmetria centrale e capiscono che se il centro c'è deve stare nel punto medio del segmento che unisce una coppia di punti corrispondenti, per esempio i due pomi delle aste: lì puntano lo spillo per verificare materialmente l'esistenza della simmetria centrale cercata. L’insegnante deve sfruttare questi momenti di ricerca personale degli alunni per far conoscere a tutti i vari metodi usati e ampliare l'orizzonte di ciascuno.
Si trova poi la simmetria centrale che scambia la 1 con la 4. Faremo notare che se in un'asta si va dal pomo al drappo andando “verso l'alto”, nella corrispondente si va dall'alto “verso il basso”.

E dalla 3 alla 4? Non vanno una sull'altra con mezzo giro ma con uno "scivolamento parallelo", cioè con un movimento della carta trasparente che fa fare a tutti i punti tragitti uguali e paralleli: ecco spuntare la **traslazione**. Naturalmente completeremo l'indagine iniziata cercando altre simmetrie assiali o centrali e altre traslazioni. Facile scoprire la coppia 6, 11 che si corrisponde con il mezzogiro e facile scoprirne il centro, più difficile vedere la coppia 9, 11 perché percettivamente la 9 si vede collegata alla 10.
Altra annotazione di carattere didattico: in genere le proposte di attività che proponiamo alla classe devono essere abbastanza ampie e graduate per difficoltà affinché ciascuno abbia qualche conquista da fare.
“Che dire della coppia 6, 9?” la traslazione che porta la 6 sulla 9 è diversa dalla traslazione che porta la 9 sulla 6: sono due trasformazioni una **inversa** dell'altra e se le applico una dopo l'altra torno al punto di partenza, cioè la loro composizione è l'identità. Approfittiamo per un'altra domanda: "Come si potrà andare dalla 9 alla 10?” È facile scoprire **la rotazione di un quarto di giro** intorno al pomo comune delle due aste.
“È uguale la rotazione che porta la 9 sulla 10 a quella che porta la 10 sulla 9?” Rifletteremo sul senso di rotazione che distingue una trasformazione dall'altra.

Osservazioni didattiche sulla traslazione.

Mentre il riconoscimento di figure che si corrispondono in una traslazione è immediato, la costruzione di figure traslate su carta bianca presenta difficoltà per l'uso degli strumenti da disegno.
È quindi consigliabile lavorare inizialmente con il geopiano o con la carta quadrettata, dotata o no di sistema di riferimento cartesiano.

È importante far riconoscere agli allievi quali sono i comandi da dare per far eseguire una traslazione che porti una figura su un'altra.

Per esempio nella figura disegnata (fig. 28) facciamo eseguire, con l'ausilio del foglio trasparente, le traslazioni che portano la 1 sulla 2 e la 2 sulla 3 e domandiamo agli alunni che comunichino verbalmente le operazio-

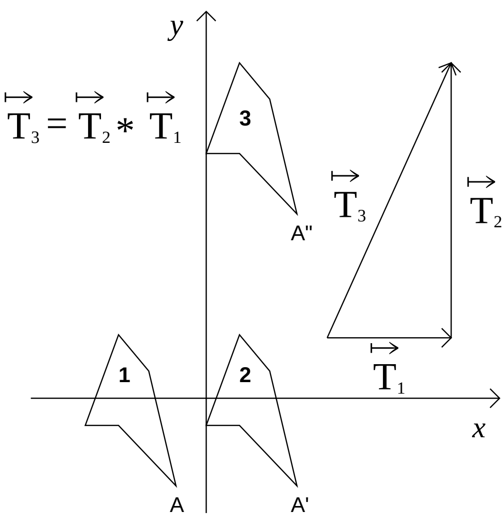


fig. 28

ni compiute. Il nostro intento è di guidarli a rendersi conto di quali siano gli elementi caratterizzanti una traslazione: **la direzione, il verso, la lunghezza dello spostamento**.

Proseguiamo nella scoperta guidata: “La composizione delle due traslazioni fatte è un’altra traslazione? Quale?” Dopo averla effettuata direttamente, per comunicare quale traslazione hanno fatto, diranno: “per andare da A a A' si fanno 4 passi a destra e 9 verso l'alto”, cioè daranno le componenti parallele agli assi. Scopriranno in pratica come si lavora con un vettore e con le sue componenti.

Man mano che si procede, il linguaggio e i concetti si vanno precisando e si potrà parlare di vettore come elemento adatto a caratterizzare una traslazione. Ci si potrà collegare alle altre esperienze (fisica) in cui si usano i vettori. Anche il simbolismo si perfezionerà. Invece di dire “Sposto la figura di 4 unità a destra e 9 in alto” si potrà dire “applico la traslazione [+4; +9]”

Altre domande per approfondire la conoscenza della traslazione:

“La traslazione è una isometria? La traslazione è una trasformazione diretta o inversa?”.

“Ha punti uniti?” il movimento di scorrimento parallelo di un foglio sull’altro non lascia dubbi: non ci sono punti uniti. “Ci sono rette unite?” Anche questa risposta è facile da intuire, forse meno da esprimere. “Sono unite tutte le rette parallele al vettore traslazione (di cui naturalmente non importa il punto di applicazione)”.

La traslazione trasforma ogni retta del piano in una retta parallela. Anche la simmetria centrale trasforma ogni retta in una retta parallela: c'è qualche differenza?

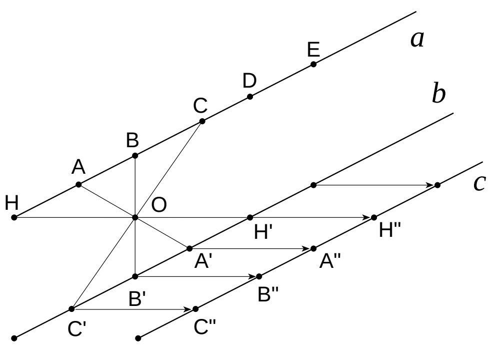


fig. 29

Sì, il senso di percorrenza sulle rette. La simmetria centrale inverte il senso di percorrenza sulla retta, la traslazione invece lo mantiene (vedi fig. 29).

Teniamo presente che sono ambedue trasformazioni dirette, cioè mantengono il senso di percorrenza sul contorno delle figure. Possiamo ora dare una definizione di **traslazione**: ***La traslazione è una trasformazione biunivoca del piano in sé tale che i segmenti che congiungono ciascun***

punto P del piano con il corrispondente P' sono paralleli, di uguale lunghezza e di uguale verso.

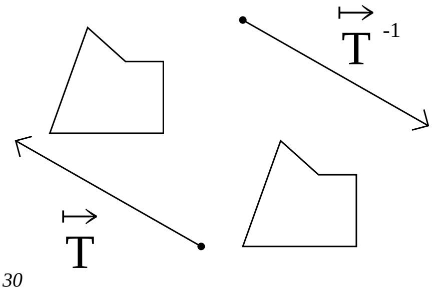


fig. 30

Facciamo notare che per ogni traslazione esiste la traslazione inversa, che componendo due traslazioni si ottiene una traslazione, che anche l'identità si può ritenere una particolare traslazione. Senza ancora parlare di gruppo prepariamo il terreno per arrivare più tardi anche a questo concetto.

Possiamo chiedere: "che succede componendo due simmetrie assiali"? Proviamo anzitutto con gli assi paralleli e poi con gli assi incidenti.

Composizione di due simmetrie assiali ad assi paralleli.

Applichiamo alla figura disegnata ABC la simmetria di asse **a** e alla sua immagine A'S'C' la simmetria di asse **b** ottenendo A"B"C". La trasformazione composta che manda ABC in A"B"C" è una traslazione: "Il suo vettore che direzione ha? che verso? che intensità? Quanto distano i due assi **a** e **b**?"

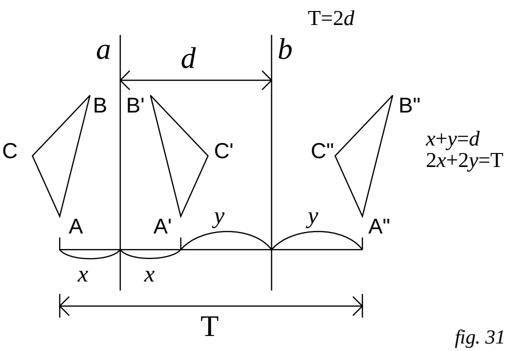


fig. 31

Diamo la consegna agli alunni di ripetere l'esercizio scegliendo varie distanze fra gli assi paralleli: scopriranno che la lunghezza della traslazione è sempre doppia della distanza degli assi. Perché? Se qualche alunno è incuriosito di saperlo, accontentiamolo (fig. 31)

Composizione di due simmetrie centrali con centri diversi.

Prima ancora di operare proviamo a far indovinare di che tipo sarà la trasformazione composta: "Ogni segmento si trasformerà in un segmento parallelo, su di esso si manterrà

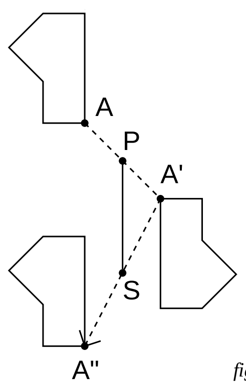


fig. 32

il senso di percorrenza, la trasformazione sarà diretta... una traslazione”. Così è infatti. Interessante scoprire perché il vettore traslazione è doppio e parallelo rispetto al segmento PS che congiunge i centri di simmetria. (fig. 32).

Dalla simmetria alla rotazione: composizione di simmetrie ad assi incidenti.

Componiamo ora due simmetrie assiali ad assi incidenti. Siano **a** e **b** gli assi e sia O il loro punto di intersezione. Per rendere visibile la composizione delle due simmetrie, disegnamo una figura F e trasformiamola prima con la simmetria di asse **a** ottenendo l'immagine F', applichiamo poi ad F' la simmetria di asse **b** e otteniamo F''. Come possiamo andare da F a F''? Si tratta di una rotazione di centro O. Con gli alunni vogliamo fissare l'attenzione sull'esito della composizione, quindi agevoliamo in un primo tempo le costruzioni consentendo la tecnica della piegatura della carta e della foratura con lo spillo.

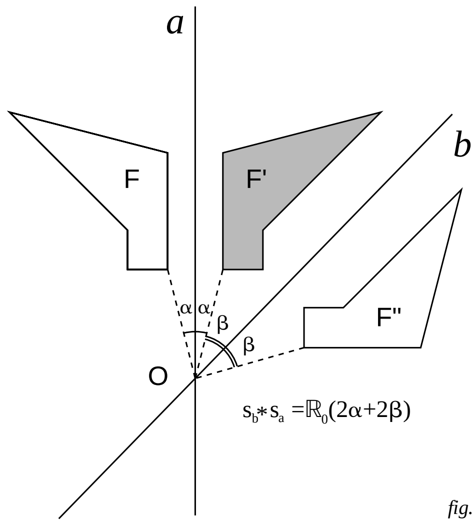


fig. 33

Per verificare che la trasformazione composta è una rotazione sovrapponiamo un foglio trasparente, fissiamolo in O con uno spillo e, dopo aver ricalcato la F, ruotiamo fino alla sovrapposizione con F''. *Di quanto ho ruotato?*, *In che verso?* Se ciascun alunno sceglie a piacere l'angolo formato dai due assi e mette in relazione tale angolo con l'angolo della rotazione, apparirà che **l'angolo di rotazione** è sempre **doppio** rispetto all'**angolo dei due assi di simmetria**. Il verso della rotazione sarà quello che va dall'asse **a** all'asse **b**. Se opero prima con la s_b poi con la s_a il verso di rotazione si inverte: basta immaginare di andare da F'' ad F. È una buona occasione per far notare che ogni rotazione ha la sua **inversa**, che non coincide con la diretta, salvo che per la simmetria centrale. Anche l'identità si può ritenere una rotazione di angolo nullo. Dopo aver verificato che la rotazione è una trasformazione diretta, che si può dire della **composizione** di rotazioni? Sarà sicuramente una trasformazione diretta. **Se il centro rimane invariato**, la composizione di due rotazioni è una rotazione con lo stesso centro: **le rotazioni di centro assegnato formano un gruppo commutativo**. **Se i centri sono diversi** si può ottenere **una traslazione o una rotazione**. Per decidere, basta osservare una coppia di segmenti corrispondenti: se sono paralleli ed equiversi, si avrà una traslazione; se sono paralleli ma non equiversi si tratterà di una simmetria centrale, se non sono paralleli si tratterà di una rotazione generica.

C'è un *aspetto positivo* e un *aspetto negativo* nell'introdurre la rotazione come composizione di simmetrie assiali: *l'aspetto positivo* consiste nel completare l'esperienza della composizione di simmetrie ad assi paralleli con quella relativa ad assi incidenti e nel preparare un assetto generale di classificazione delle isometrie, generate da simmetrie assiali. *L'aspetto negativo* è che l'allievo leghi sempre la rotazione alla composizione di due simmetrie ad assi incidenti. All'insegnante il compito di scegliere la strada e di ovviare ai pericoli.

È interessante che l'insegnante sappia che *una rotazione di centro O si può generare con infinite coppie di assi incidenti in O formanti un angolo metà dell'angolo di rotazione*.

Analogamente succede per la traslazione: *una traslazione si può ottenere in infiniti modi con la composizione di due simmetrie assiali ad assi paralleli fra loro, perpendicolari alla traslazione, distanti la metà dell'intensità della traslazione.*

Fra le rotazioni un posto particolare occupano le simmetrie centrali che abbiamo già visto e le rotazioni di un quarto di giro.

Possiamo comunque proporre esperienze di rotazione studiando le isometrie che mutano in sé un poligono regolare. Per esempio lavoriamo con un modello di esagono regolare realizzato in cartoncino su cui disponiamo un ugual modello in carta traslucida fissato con un bottoncino a pressione nel centro comune. Ci sono 6 rotazioni diverse, con ampiezze multiple di un sesto di giro, e 6 simmetrie assiali che riportano in sé l'esagono.

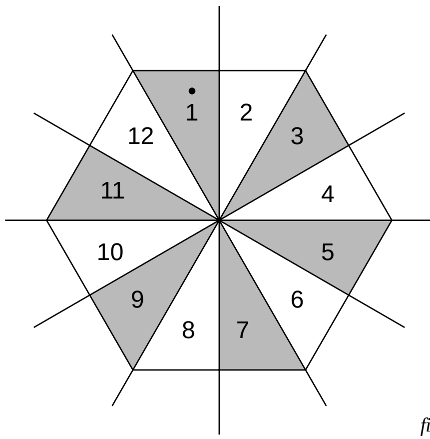


fig. 34

È interessante pensare alle composizioni di tali isometrie e prevedere con il ragionamento di che tipo saranno: la composizione di due rotazioni, dirette, darà ancora una rotazione; la composizione di una rotazione (diretta) con una simmetria (inversa) darà una simmetria (inversa). Infine la composizione di due simmetrie darà una isometria diretta, cioè una rotazione (pensiamo che gli assi di simmetria sono incidenti nel centro dell'esagono). Per ogni trasformazione troviamo l'inversa: le simmetrie sono inverse di sé stesse; la rotazione di

I/6 di giro, per esempio, è inversa della rotazione di 5/6 di giro perché la loro composizione dà l'identità. Per l'operazione di composizione vale ovviamente la proprietà associativa. **Le isometrie che mutano in se un esagono regolare formano gruppo**; c'è un sottogruppo che è costituito dalle sole rotazioni, mentre **le sole simmetrie non formano gruppo**: basta pensare alla composizione di due di esse.

Arriviamo alla **definizione di rotazione**:

La rotazione di centro O e ampiezza α in verso antiorario (o orario) è una trasformazione del piano in sé tale che:

• il solo punto O resta fisso

• detti A', B', C', … i corrispondenti dei punti A, B, C, … si ha OA' = OA, OB' = OB, ...

• gli angoli AOA', BOB' sono uguali ad α in ampiezza e verso

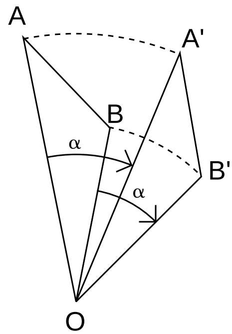


fig. 35

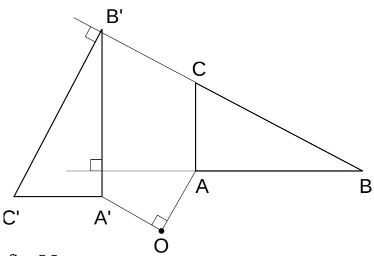


fig. 36

Attraverso qualche esempio facciamo notare agli allievi che in una rotazione di centro O una retta si trasforma in un'altra retta che forma con la precedente l'angolo di rotazione e questo succede non solo se le rette passano per O, ma anche se non passano per O. In particolare nella rotazione di un quarto di giro tutte le rette corrispondenti sono fra loro perpendicolari.

Sono interessanti gli esercizi in cui si danno due figure di cui si sa che sono ruotate una rispetto all'altra e si chiede di trovare il centro di rotazione. Siamo sicuri che l'isometria che porta la bandierina 1 sulla 2 è una rotazione perché è diretta e non è una traslazione. Dove trovare il centro? (fig. 37).

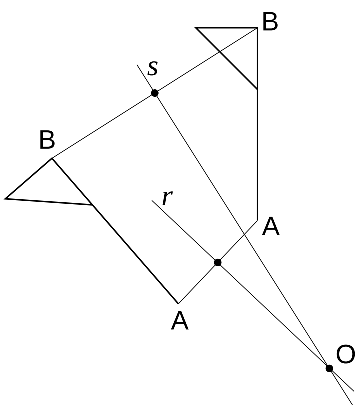


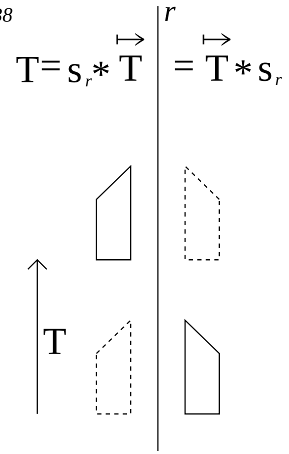
fig. 37

Le orme dei passi: la glissosimmetria o antitraslazione.

Il quadro delle isometrie non sarebbe completo se non proponessimo anche il caso delle isometrie inverse senza punti fissi. In effetti **se noi componiamo una simmetria assiale con una traslazione parallela all'as-**

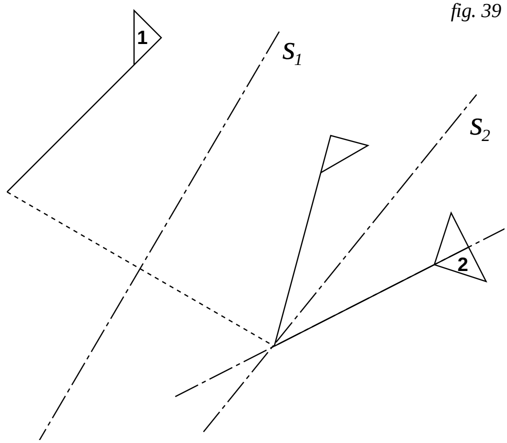
se della simmetria otteniamo una trasformazione inversa certamente priva di punti fissi: infatti un punto sull'asse subisce la traslazione lungo l'asse, un punto fuori dell'asse ha l’immagine nel semipiano opposto rispetto all'asse di simmetria, quindi non ci possono essere punti uniti. Ci accorgiamo facilmente che la simmetria e la traslazione possono commutare. Chiamiamo questa trasformazione *glissosimmetria* o ***antitraslazione*** o *traslazione con scorrimento*. Per avere un'idea di una trasformazione di questo tipo pensiamo alle orme dei passi di una persona (fig. 38).

fig. 38



Date due bandierine 1 e 2 uguali, poste a caso nel piano, siamo ora in grado di individuare una isometria che porta una sull'altra e possiamo affermare che tale isometria si può ottenere con al più tre simmetrie assiali. Una prima simmetria assiale porti il piede della bandierina 1 sul piede della 2; se le bandierine non si sovrappongono totalmente e se nemmeno le aste si sovrappongono, applichiamo una seconda simmetria assiale che porti l'asta della trasformata sull'asta della 2 e, se ancora i drappi non si sovrappongono, una terza simmetria assiale con asse lungo l'asta della 2 porterà a coincidere anche i drappi.

fig. 39



Se basta la prima simmetria a farle sovrapporre diremo che le bandierine 1 e 2 si corrispondono in una simmetria centrale; se bastano due simmetrie vuol dire che la 1 va sulla 2 con una isometria diretta, cioè con una traslazione o con una rotazione; se occorrono tre simmetrie, si tratta di un’antitraslazione.

È interessante intuire prima e poi fare un ragionamento per dire che se mettiamo sul piano, a caso, due bandierine che si corrispondano in un'isometria diretta, il caso della traslazione è pochissimo probabile in confronto a quello della rotazione; se le mettiamo, a caso, in modo che si corrispondano in una isometria inversa, l’antitraslazione sarà molto più probabile della simmetria assiale. (Come si può pensare di metterle "a caso"? Pensiamo di aver due modellini materiali: un alunno ne dispone uno sul piano e un compagno ne dispone un altro senza sapere dov'è il primo).

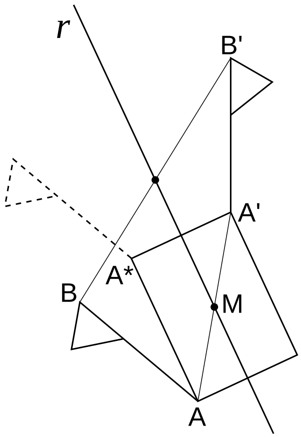


fig. 40

Ogni volta che due figure congruenti si corrispondono in un'antitraslazione possiamo trovare una opportuna simmetria e una traslazione, con vettore parallelo all'asse di simmetria, tali che la loro composizione porti una figura sull'altra. Come trovare l'asse di simmetria che va bene? Basta trovare i punti medi dei segmenti che congiungono due coppie di punti corrispondenti sulle due figure: la retta passante per i punti medi trovati è l'asse di simmetria voluto. La figura fa capire il perché.

Per rendere più evidente il concetto di antitraslazione si può proporre il seguente esercizio:

Le orme dei passi, la glissosimmetria.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano e sugli assi una uguale unità di misura, disegna i due quadrilateri ABCD e A'B'C'D' di vertici rispettivamente A(+3: -4) B(+5; -4) C(+5; -1) D(+3; +1) e A' (-3; +2) B' (-5; +2) C'(-5; +5) D' (-3; +7)

a) Puoi andare da ABCD a A'B'C'D' attraverso la composizione di due trasformazioni note: quali per esempio? Che cosa puoi dire del senso di percorrenza del contorno? C'è commutatività fra le due trasformazioni?

b) La trasformazione che porta ABCD in A'B'C'D' porta A'B'C'D' in….Disegna

c) La stessa trasformazione porta una figura (che devi disegnare) in ABCD

d) Quali sono le equazioni delle trasformazioni componenti e della trasformazione composta?

e) Perché il titolo "*le orme dei passi*"? e perché *glissosimmetria*?

f) La trasformazione composta ha punti uniti? È diretta o inversa?

* Ecco un esercizio che fa intervenire tutti i tipi di trasformazione visti: "trovare alcune isometrie (una gara a chi ne trova di più) che portano l'uno sull'altro due quadrati uguali uniti per un lato (o posti come in fig. 41)".

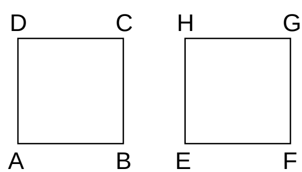


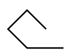
fig. 41

* Un altro esercizio per verificare la capacità di riconoscere le varie isometrie incontrate è quello di rivedere le bandierine di pag. 86 (su un disegno ingrandito) e considerarle a coppie chiedendosi: che tipo di isometria porta l'una sull'altra? Non basta dire il tipo di isometria, ma dovremo caratterizzarla. Per esempio per una simmetria assiale dovremo dare l'asse; per una centrale daremo il centro; per una traslazione daremo il vettore; per una rotazione generica daremo il centro, l'angolo e il verso di rotazione; per un'antitraslazione daremo l'asse di simmetria e il vettore parallelo di scorrimento.

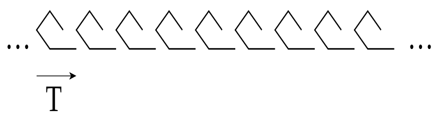
* L'argomento delle trasformazioni geometriche si presta a una molteplicità di domande stimolanti e ad esercizi che possono essere graduati in modo da essere adeguati alle varie capacità degli alunni.

In appendice ne proponiamo alcuni che sono stati offerti alla discussione dei corsisti.

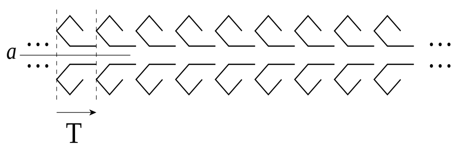
Un' attività che riguarda i vari tipi di isometrie viste e che gratifica gli alunni offrendo loro il modo di esprimere la propria creatività è quella dei **fregi ornamentali**. Potremo proporre i 7 gruppi unidirezionali di cui diamo sotto un esempio. Ogni alunno sceglierà il suo motivo base e costruirà fregi secondo le regole esposte. Scegliamo per esempio il motivo



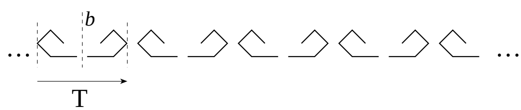
1) Il fregio è ottenuto con traslazioni del tipo *nT* (con n intero positivo o negativo) a partire dal motivo-base.



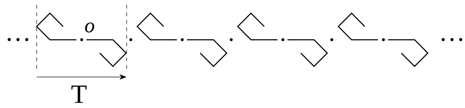
2) Il fregio è ottenuto con traslazioni del tipo *nT* a partire dalla maglia in cui operano identità e la simmetria rispetto ad una retta *a* parallela alla traslazione *T*.



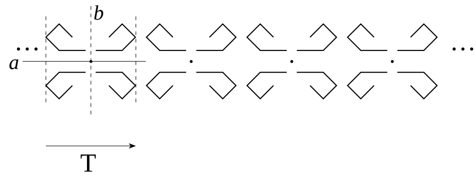
3) Il fregio è ottenuto con traslazioni *nT* a partire dalla maglia in cui operano identità e simmetria assiale con asse *b* perpendicolare alla traslazione *T*.



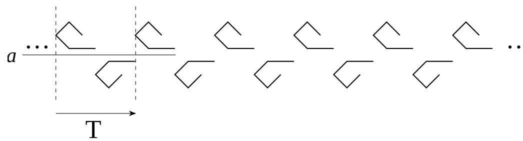
4) Il fregio è ottenuto con traslazioni nT a partire dalla maglia in cui operano identità e simmetria centrale di centro O.



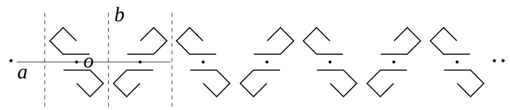
5) Il fregio è ottenuto con traslazioni nT a partire dalla maglia in cui operano, oltre l'identità, le due simmetrie di assi a e b e la simmetria centrale di centro O.



6) Il fregio è ottenuto con traslazioni nT a partire dalla maglia in cui operano, oltre l'identità, l'antitraslazione di asse a.



7) Il fregio è ottenuto con traslazioni nT a partire dalla maglia in cui operano, oltre l'identità la simmetria di asse b, l'antitraslazione di asse a, la simmetria di centro O.



Alcune proposte di esercizi sulle isometrie

1) Quante simmetrie assiali mandano A in A'?

2) Quante simmetrie centrali mandano A in A'?

3) Quante traslazioni mandano A in A' ?

4) Quante antitraslazioni mandano A in A' ?

5) Quante e quali isometrie mutano una retta in se stessa? un segmento in se stesso?

6) Quante e quali isometrie mutano un segmento in un altro assegnato avente uguale lunghezza?

7) Quante isometrie scambiano fra loro due rette incidenti? Caratterizzale.

8) Quante isometrie scambiano fra loro i lati di un angolo?

9) Il prodotto di due simmetrie assiali ad assi paralleli a e b è.... La sua intensità è doppia rispetto alla distanza fra a e b. Perché?

10) Il prodotto di due simmetrie assiali ad assi incidenti è .... che ha i seguenti caratteri....Perché?

11) Il prodotto di due simmetrie centrali è… di intensità…. Perché?

12) Il prodotto di tre simmetrie centrali rispettivamente di centri P, Q, R è una simmetria centrale che ha per centro il punto S quarto vertice del quadrilatero PQRS. Verificalo con una costruzione e dimostralo.

13) Quante isometrie mutano in sé un rettangolo? Formano gruppo? C'è un sottogruppo?

14) Quante isometrie mutano in sé un quadrato? Formano gruppo? C'è un sottogruppo?

15) Quante isometrie mutano in sé un triangolo equilatero? Formano gruppo? C'è un sottogruppo?

16) Con piegature opportune determina le altezze di un triangolo e gli assi dei lati.

17) Con piegature opportune determina le bisettrici di un triangolo

18) Dato l'asse di simmetria r e due punti P e P', simmetrici rispetto ad r, costruisci, usando solo una riga non graduata, il simmetrico di un punto Q nel caso in cui la retta PQ non sia parallela ad r e poi nel caso in cui PQ sia parallela ad r.

19) Quali sono gli assi di simmetria di un segmento?

20) Costruisci con riga e compasso l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo. Perché questo esercizio ha a che fare con la simmetria assiale? Quale figura geometrica ci sta sotto?

21) Sia t la tangente ad un cerchio in un suo punto A, sia Q un punto di t. Costruisci l'altra retta tangente al cerchio passante per Q. Serve la simmetria assiale?

22) Sappiamo che una condizione necessaria e sufficiente perché un poligono abbia cerchio circoscritto è che gli assi di simmetria dei suoi lati si incontrino in uno stesso punto. Dimostra che il trapezio isoscele ha cerchio circoscritto.

23) Sappiamo che una condizione necessaria e sufficiente perché un poligono abbia cerchio inscritto è che le bisettrici dei suoi angoli si incontrino in uno stesso punto. Dimostra che il deltoide ha cerchio inscritto.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Mario Barra
Università di Roma "La Sapienza"

Due principi didattici

In un noto spot televisivo una ragazza al telefono pronuncia queste parole:
"ma tu mi ami?… ma quanto mi ami?"

L'interruzione di chiamata telefonica permette alla ragazza di approfondire questa conoscenza induttiva del suo grado di amabilità, ponendo le stesse domande ad un altro ragazzo, e contemporaneamente di reclamizzare il servizio telefonico. Questo ci serve per dire che:

#) mediamente prima viene il qualitativo e poi il quantitativo.

Così è probabile che gli antichi pastori verificassero il rientro di tutte le pecore facendo scorrere dei sassolini, uno per ogni pecora in una specie di rosario, ottenendo in questo modo, pur non conoscendo i numeri, un bilancio finale con i sassi, preoccupandosi solo per una eventuale eccedenza. Allo stesso modo, traversando la strada ad occhi chiusi, sappiamo che aumenta la probabilità di essere investiti pur non conoscendo esattamente tale probabilità, così come è avvenuto anche nella storia che ci dice che con un po' di esperienza si era in grado di valutare la maggiore o minore convenienza di un gioco anche prima di aver coniato la parola 'probabilità'. Quanto detto introduce un altro principio

@) l'ontogenesi ricapitola la filogenesi.

Buona parte delle persone che si occupano di didattica accettano questo principio che sostanzialmente dice di guardare alla storia per avere delle informazioni relative alle difficoltà che verranno incontrate dagli studenti. Ma è anche certo che non si può concludere che "se Newton ha scoperto la gravitazione universale dopo la caduta di una mela in testa, è conveniente mettere gli studenti sotto un melo. Non si sa mai!".

Purtuttavia è accaduto anche che, considerando eventualmente come assiomi #) e @), e poi citando Bourbaki, molti libri delle scuole elementari siano pieni di esercizi dal titolo "Dove di più?" associati, ad esempio, ai disegni di un insieme di 7 farfalle e di un altro con 5 caramelle, ove si chiede, senza bisogno di conoscere i numeri, di porre una doppia freccia fra una farfalla e una caramella, per poter così concludere che le prime sono di più perché due di esse sono senza freccia. Nei fatti, ignorando #) e @), i bambini contano velocemente: "1,2,3,4,5,6,7; 1,2,3,4,5" e concludono "quindi le farfalle sono di più", "e adesso mettiamo le frecce per far contenta la maestra".

Sono i belgi e i francesi che hanno imposto nella scuola la teoria degli insiemi, traducendo esigenze di modernità e rigore, ma, dopo che il contagio è dilagato nel mondo, hanno fatto marcia indietro, tanto che in Francia da 6 anni è proibita “l’insiemistica” nella scuola media.

Questo per ribadire che i problemi della didattica sono talmente grandi e vari che non è possibile superarli attraverso raccomandazioni generali prese alla lettera, senza cercare di coniugare il “nuovo” con il “vecchio”, o riproponendo metodologie cristallizzate eventualmente finalizzate all’ unico obiettivo del rigore matematico. Poiché il bilancio generale dell’insegnamento della matematica non è buono, diviene forse colposo riprodurre tale insegnamento senza un atteggiamento positivo verso l’innovazione, anche radicale. Ma sembra ugualmente necessario introdurre nuovi argomenti con estrema gradualità, guardando alla tradizione, da rinnovare soprattutto nei metodi. In ogni caso occorre insegnare di più, e quindi più produttivamente, e considerando che computer e automi tendono ad assorbire il lavoro routinario, richiedendo nuovi atteggiamenti e capacità di partecipazione attiva e cosciente, comunque indispensabili in un mondo più vulnerabile per i problemi demografici e per l’aggressività dei mezzi di informazione[1].

Sembra importante differenziare i modi e i contesti in una ricerca condotta da un numero sempre più grande di persone, che presenti soluzioni diverse, aumentando la coscienza dei possibili effetti che possono portare attraverso il confronto, accompagnato dalla consapevolezza che le cose nuove, che pure sono necessarie, hanno un’alta probabilità di essere esagerate, imprecise e di fallire in prima formulazione e sperimentazione. Certo è che, se come professionisti non riusciamo a raggiungere obiettivi soddisfacenti, non possiamo unicamente scaricarci dalle nostre responsabilità appellandoci alle esigenze del rigore matematico. Quanto meno i problemi che dobbiamo affrontare ci impongono di considerare il potere inibitorio che il rigore può esercitare e la soggezione che può incutere.

Da Euclide al 1965 con l’equiscomponibilità

Nel 1900 a Parigi, al secondo Congresso internazionale dei matematici, David Hilbert pone 23 problemi che toccano i differenti domini della matematica

[1] Questo tema è più diffuso in Barra M., Probabilità e Statistica nella scuola secondaria, *Notiziario UMI*, luglio 1994, supplemento al n.7, 59-69, e in “Formule e teoremi per induzione naturale” e “Fusionismo globale”, Jannamorelli B. (ed.) *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*, Ed. Qualevita, 1995.

e che ispireranno la ricerca matematica nel XX secolo[2]. Il terzo problema riguarda la matematica elementare ed ha per titolo: "Sulla uguaglianza in volume di due tetraedri di base ed altezza uguali". Hilbert, citando due lettere indirizzate a Gerling da Gauss[3], che a sua volta cita Euclide, esprime l'esigenza di una dimostrazione rigorosa dell'impossibilità per due tetraedri di uguale base ed altezza di essere equiscomponibili in generale. Proviamo ad inquadrare il problema dall'inizio.

Due figure sono equiscomponibili se si possono dividere in un numero finito di parti[4] rispettivamente uguali[5] o, che è lo stesso, se è possibile decomporne una in un numero finito di parti da riposizionare per comporre l'altra.

Da Euclide deriva abbastanza facilmente che due poligoni con la stessa area (cioè equivalenti) sono sempre scomponibili in parti poligonali rispettivamente uguali[6]. Si ha così che "l'avere la stessa area" fra poligoni può essere sostituito dalla equiscomponibilità e questo permette, "limitandosi al qualitativo", di eliminare elegantemente il concetto primitivo di area, la necessità di definire una unità di misura e le formule per determinarla e soprattutto di evitare il ricorso a procedimenti "al limite". Ma questo è possibile con molte limitazioni. Infatti ad esempio Ugo Amaldi[7] ha dimostrato quello che tutti sanno e cioè che un cerchio e un poligono non sono equiscomponibili. E' infatti impossibile mettere insieme dei bordi tondi senza lasciare dei buchi. Ma anche escludendo il tondo, basta salire a tre dimensioni e quello che prima era sempre possibile per i poligoni, diviene spesso impossibile per i poliedri.

E qui entra in gioco il problema posto da Hilbert. Per calcolare il volume di una piramide e per mostrare in generale che due piramidi di uguale base ed al-

[2] Hilbert D., *Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les 23 problemès*, Gauthier-Villars, 1902. Ristampa nelle Editions Jaques Gabay, 1990, p.17.

[3] Anche Legendre nei suoi *Eléments de Géométrie*, si era interessato al problema agli inizi del XIX secolo.

[4] Tali parti debbono essere "sufficientemente regolari".

[5] Più spesso viene usata la parola "congruenti" che qui sta per "uguali dal punto di vista geometrico". In questo caso è una precisazione necessaria?

[6] La dimostrazione esplicita è data da Farkas Bolyai (padre di Janos) nel 1832 e da Gerwien, un ufficiale prussiano amante della matematica, nel 1833. Si veda Boltianskii V.G. *Equivalent and equidecomposable figures*, D.C. Heath and co, Boston, 1963.

[7] Amaldi U., Sulla teoria della equivalenza in, ***Questioni riguardanti le matematiche elementari***, raccolte e coordinate da **Enriques F.** parte I, Vol. II, Zanichelli, Bologna 1925, p.1. Si veda anche: Benedetti P., Fondamenti della geometria, in***, Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi***, a cura di **Berzolari L.**, **Vivanti G.**, **Gigli D.**, Hoepli, 1937, v. II, parte I, 5-48. Vengono evidenziati in neretto i riferimenti bibliografici che si ritengono più importanti.

tezza hanno lo stesso volume, i matematici, dai tempi di Euclide, hanno fatto ricorso a dei metodi più complicati della equiscomponibilità, come il metodo di esaustione[8] o altri metodi che fanno intervenire delle nozioni infinitesimali. Hilbert chiede di dimostrare che questa esigenza è necessaria. Hill[9], nel 1895, fornisce 3 tipi di tetraedri equiscomponibili con un cubo, e Bricard[10], nel 1896, presenta una condizione affinché due poliedri con lo stesso volume siano equiscomponibili. Hilbert capisce che quelli di Hill sono dei casi particolari e non cita Bricard perché la sua dimostrazione è incompleta. Max Dehn, un allievo di Hilbert, mostra nel 1900, pochi mesi dopo il Congresso di Parigi, che due poliedri possono avere lo stesso volume senza che con ciò sia possibile scomporli in un ugual numero finito di poliedri rispettivamente uguali, e precisa la condizione di Bricard. È una questione di angoli diedri. Così un cubo e un tetraedro regolare non sono equiscomponibili perché l'angolo diedro del primo è incommensurabile con quello del secondo. Manca in generale nello spazio la proprietà fondamentale dei poligoni di avere la somma degli angoli interni uguale ad un multiplo intero di π. Nello spazio, dimostra Dehn, perché due poliedri siano equiscomponibili, è necessario che esista una combinazione lineare a coefficienti interi[11] dei loro diedri che sia uguale ad un multiplo di π. Così la piramide di Jeuel, che si ottiene proiettando dal centro di un cubo una sua faccia, è equiscomponibile con un prisma con lo stesso volume[12].

Con delle considerazioni sulla divisione di un prisma in tre piramidi di uguale volume, altri matematici riprendono il problema, e infine Sydler, nel 1965[13], dimostra che le condizioni di Dhen, oltre che necessarie, sono anche

[8] Schema di ragionamento matematico (per assurdo), che permette di evitare l'uso dell'infinito, o comunque di procedimenti infinitesimali, nelle questioni relative alle aree e ai volumi. Il metodo di esaustione venne valorizzato nel IV secolo a.C. da Eudosso di Cnido. È un metodo perfettamente rigoroso, ma era in realtà impiegato dai geometri greci, soprattutto da Archimede, a giustificazione di risultati acquisiti per altra via.

[9] Hill M.J.M., Determination of the volumes of certain species of tetraedra without the imployment of the method limits, *Proc. London Math. Soc.* 27, 1896, 39-53.

[10] Bricard R. Sur une question de géométrie relative aux polyèdres, in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 15, 1896, 331-334.

[11] Questi coefficienti interi dipendono dalla lunghezza degli spigoli.

[12] Su 1/4 della piramide di Jeuel viene dimostrata tale proprietà (v.o.) con materiale didattico manipolabile, utile alla dimostrazione della formula del volume della piramide. 1/8 di tale piramide è un particolare tetraedro di Hill. L'equiscomponibilità è collegata alle tassellazioni dello spazio (v.o.) con cubi o con esaedri.

[13] Sydler J.P. Condizions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions, *Comment. Math. Helvetica*, 40, 1965, 43-80. Dello stesso autore e sullo stesso argomento: Sur la décomposition des polyèdres, *Comment.*

sufficienti per l'equiscomponibilità di due poliedri con lo stesso volume.
Il problema è così completamente risolto.

Teoria matematica, pedagogia e didattica

Tale argomento, espresso in sintesi, può o deve essere trattato compiutamente a livello didattico?

Quello che sembra accadere nei libri scolastici è che si verifichi la cosa più semplice, che non è detto sia la più giusta. Consiste nel tacere i vari problemi, riportandone però i capisaldi dell'impianto più ampio e approfondito. Anzi in alcuni libri mancano anche i capisaldi e rimangono soltanto tracce o riverberi, a volte solo formali o nominalistici, della problematica generale che quindi non può essere colta rendendo immotivate o incomprensibili le scelte connesse. E l'impianto didattico che ne deriva potrebbe risultare maggiormente pernicioso di una scelta più superficiale, ma più precisa, utile e comprensibile per altri obiettivi. Se comunque, giustamente, il principio è quello di presentare qualcosa che può divenire perfettamente rigorosa con aggiunte, è forse possibile trovare delle presentazioni che tengano maggiormente presenti anche i problemi pedagogici. Certo è che, come è stato detto, sembra necessario percorrere nuove strade nell'insegnamento, dovendo allora perdere necessariamente qualcosa, forse anche sul piano del rigore all'interno di una impostazione assiomatica. L'esigenza del rigore resta, perseguirlo forse è la cosa più difficile della matematica, la sua importanza è fondamentale, ma è relativa, e per noi docenti va inquadrata all'interno dell'arte dell'insegnamento che deve essere anche equilibrio fra esigenze molteplici, pesate con la loro importanza, che risulta diversa in situazioni differenti[14].

Si dirà che in questo modo non si riesce a far percepire il vero spirito della matematica. Ma forse il problema è in qualche modo opposto e consiste nel far crescere la disponibilità a perfezionare la conoscenza di tale spirito.

La filosofia che cercheremo di seguire prova a rovesciare il percorso che può aver definito la linea di alcuni libri di testo, anche se di larga adozione, riaffermandone un'altra, che pure ha portato al macero dei testi molto buoni.

Math. Helvetica, 16, 1943-1944, 266-273 e Sur les tétraèdres équivalents à un cube, *Element. Math.*, 11, 1956, 78-81. Precedentemente un discorso panoramico è in Lebesque H., Sur l'équivalence des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers, et sur la dissection des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers, *Annales de la Soc. Polonaise de Math.*, 17, 1938, 193-226.

[14] Lucio Lombardo Radice parlava dell'esigenza di una "avventura intellettuale".

Si tenterà di prendere spunto anche dai problemi che sono stati qui riassunti, di guardare alle ricerche didattiche in proposito e, ad esempio, di considerare la storia delle soluzioni[15] ma anche quello che può offrire oggi il materiale manipolabile, la lavagna luminosa, il computer e i suoi programmi di grafica o di apprendimento della geometria, come ad esempio il Cabri[16]. In particolare questi ultimi dovrebbero avere sempre più spazio all'interno della scuola.

Cercheremo inoltre di considerare un altro aspetto poco affrontato: gli insegnanti hanno un tipo di esperienza e di immagine dei modi, dei tipi e del significato delle dimostrazioni matematiche possibili, poco adatti a ciò che può essere utile pedagogicamente[17]. Tale immagine deriva dalla loro esperienza come studenti nella scuola o nell'università, dove, se è vero che la didattica è una scienza recente, gli obiettivi prioritari che si volevano raggiungere non potevono essere indirizzati ad uno sviluppo più consapevole della personalità dello studente. Comunque la funzione, che con tali dimostrazioni e con gli esercizi connessi, veniva richiesta di svolgere era massimamente passiva e spesso routinaria e quindi inadatta per un professionista dell'insegnamento e in una società che sembra chiedere il contrario.

Elenco di alcuni obiettivi di cui in particolare si cercherà di tenere conto

– Esercitare la capacità della visione spaziale negli insegnanti[18] e negli studenti
– esercitare la capacità di saper disegnare, eventualmente usando il computer
– abituare gli insegnanti ad analizzare e creare dimostrazioni semplici: a valutarne la portata, sceglierne il simbolismo più semplice, renderne chiara l'esposizione con un disegno o una ideografia accuratamente studiata in funzione della sua migliore comprensione, oppure a riprodurre dimostrazioni esistenti, riformulandole anche con linguaggio comune, con pochi formalismi da aggiungere gradualmente, eventualmente concordandoli con la classe
– considerare il gergo, il linguaggio tecnico, iniziatico, esoterico, …, significa-

[15] Per approfondire il modo di intendere la storia in rapporto con la didattica: Menghini M., Dopo una conversazione con H.G. Steiner, *Epsilon* n.4, 1989, 20-23.

[16] È un programma che potremmo definire di apprendimento induttivo della geometria.

[17] Viene in mente Bruno de Finetti che affermava la necessità per gli insegnanti di seguire un corso di disegno. Chi può dire se la geometria è stata poco insegnata anche per il timore dei docenti di mettere in discussione la propria capacità di disegnare? Oggi i computer rilanciano questa materia, offrendo nuovi strumenti per insegnarla.

[18] Si ipotizza una disponibilità che l'insegnante dovrebbe avere: un computer e numerosi libri e riviste.

tivo "solo" se è creato da chi deve utilizzarlo (almeno come categoria. Es.: quella dei "matematici")
– cercare di avere una visione unitaria della materia e dei particolari che vengono utilizzati per esporla, considerando ogni fascia scolare (es. collegamento dei volumi con gli integrali), ogni settore, contesto[19], linguaggio specifico (sintetico e analitico), numero delle dimensioni (anche qualsiasi[20]) e il rapporto fra finito e infinitesimo e fra discreto e continuo che si crede molto utile per sfruttare le diverse potenzialità che ciascun ambito può offrire. In particolare si cercherà di preferire quelle dimostrazioni che hanno uno svolgimento analogo in contesti diversi (come argomento e dimensione). Si enfatizza infine l'importanza dei collegamenti interdisciplinari[21]
– accettare, in alcuni casi, come assiomi alcune conseguenze di assiomi più generali, favorendo l'intuizione ed evitando ciò che appare inutile o noioso
– sfruttare quella parte della geometria delle trasformazioni che si considera più intuitiva e facilmente precisabile. Usare le affinità[22] viste come strumento, nel piano e nello spazio. Come dilatazioni e proiezioni[23], in particolare con il Cabri, con la possibilità di scoprire le proprietà chiedendo che cosa si mantiene e che cosa si modifica[24].

In particolare per i volumi

– Partire dal principio di Cavalieri[25] (è sufficiente definirlo per i parallelepipedi a base quadrata inclinati in modo diverso (o limitarsi ulteriormente ai soli

[19] Klein affermava l'esigenza del collegamento fra analisi e geometria con la parola "fusionismo" che in de Finetti indica anche il collegamento fra settori e linguaggi differenti delle scienze (il tempo, la massa, la probabilità, i prezzi, …).

[20] Si può rendere la geometria pluridimensionale semplice ed utile per esercitare l'analogia, l'induzione e le immagini mentali nella scuola superiore, anche per le sue possibilità "fusionistiche".

[21] Qui possono essere soltanto accennati.

[22] Vedi: Villani V., Didattica della geometria delle trasformazioni, Pubbl. dell'IRRSAE Marche, 1992.

[23] L'ombra del gatto sulla finestra della Castelnuovo è un "favore didattico" fra amici.

Il metodo di questa grande artista dell'insegnamento, a livello internazionale, ha fatto capire l'essenza di molte questioni ad un gran numero di persone, fra cui chi scrive.

[24] Come è anche suggerito egregiamente, in questa pubblicazione, dalla professoressa Silvia Dentella.

[25] Il principio di Cavalieri (due solidi hanno lo stesso volume se si possono disporre rispetto ad un piano in modo che quelli paralleli a questo li intersechino in sezioni con la stes-

"scorrimenti"[26])) per poi generalizzarlo al caso delle "bucce con uguale spessore" dei solidi con curvatura, anche doppia (sfera), costante, evidenziando il collegamento con gli integrali[27]
– definire i volumi come il numero dei cubi che sono contenuti in un solido (e analogamente per l'area). In particolare nel parallelepipedo rettangolo ("blocchetto") si determinano con il prodotto delle 3 dimensioni (se qualche misura non è intera si passa a contare dei cubi sempre più piccoli)
– considerare centrali le affinità: usare quelle parallele[28] per dire che una barca a vela simile ad un'altra e di dimensioni doppie ha volume 8 volte più grande perché ciò accade in ogni cubo, con dimensioni raddoppiate rispetto a quello di partenza. Generalizzare la proprietà passando dai cubi ai blocchetti (parallelepipedi rettangoli) per affermare che in una "chiesa gotica o romanica"[29] nello spazio (nel piano) si mantengono i rapporti dei volumi (delle aree) delle varie parti che la compongono. Proprietà che rimane inclinando la figura nel caso delle affinità generiche[30] (o attraverso gli scorrimenti).

sa area) viene considerato molto intuitivo. È collegato al concetto non formalizzato degli integrali. In varie forme, più o meno precise, si può considerare presente forse negli egiziani …e già in Leonardo da Vinci che lo sfrutta in una sua forma più generalizzata che traduce nel rapporto delle aree di cerchio ed ellisse, quello delle loro sezioni. Da quest'ultima formulazione si può ottenere l'area di un rettangolo come prodotto delle misure di base e altezza, che si traduce nel prodotto del numero dei quadrati di una fila per il numero delle file. Forse conviene introdurre direttamente l'area in questo modo.

[26] Nei più intuitivi "scorrimenti" (es.: mazzo di carte da gioco inclinato in 2 modi: il volume è uguale perché le carte sono le stesse (principio di conservazione della quantità) è possibile costituire un collegamento fra discreto e continuo e fra finito e infinito, considerando un numero "grande quanto si vuole ma finito" di sezioni parallele (contro il pensiero comune, forse Archimede usa questo metodo per poter considerare il peso delle sezioni).

[27] Vedi il paragrafo dedicato alla sfera.

[28] Ogni asse è parallelo al suo trasformato mentre può cambiare la lunghezza del versore.

[29] Sono l'una una trasformazione affine parallela dell'altra.

[30] Una affinità é una corrispondenza biunivoca che trasforma 3 punti allineati (qualsiasi) in 3 punti allineati. Così le rette rimangono tali, e si conservano: 1) il parallelismo (2 punti distinti su 2 rette parallele non sarebbero in corr. biun. con l'unico punto di intersezione delle rette non più tali); 2) i rapporti dei segmenti (e quindi ad es. il punto medio) su una retta (o su rette parallele); 3) i rapporti delle aree (o dei volumi. Vedi "la chiesa gotica o romanica, le loro ombre o … la torre di Pisa").

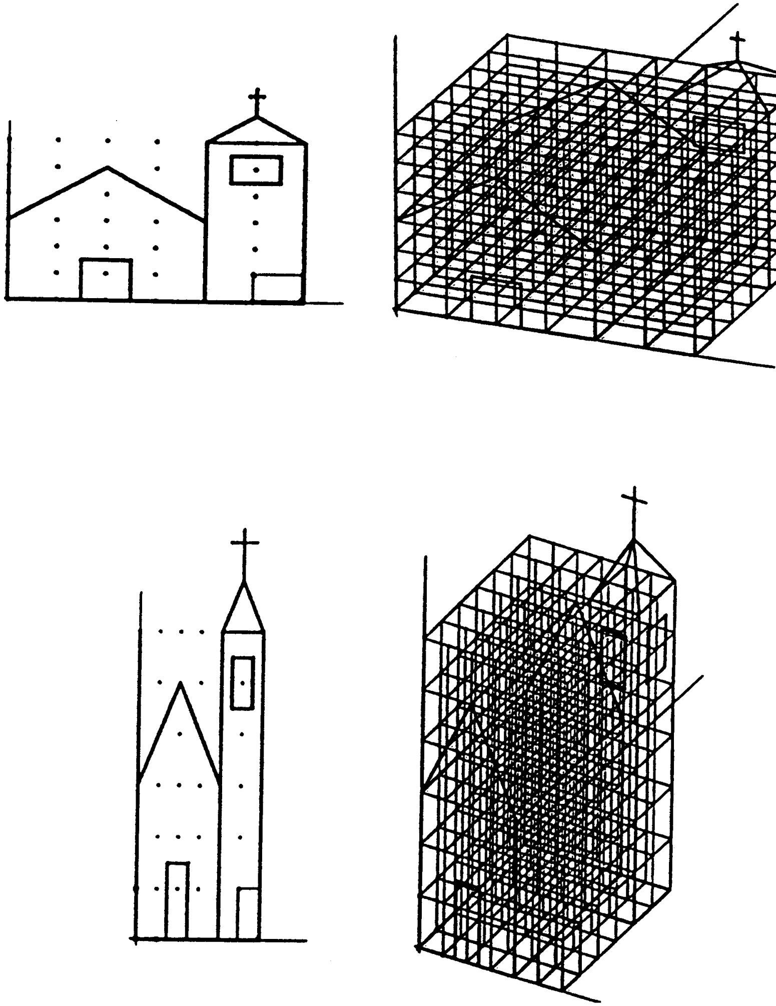


Fig. 1 - Chiesa romanica e chiesa gotica

Un esempio[31] per stimolare la discussione: la piramide e il tronco di piramide[32]

Si tenterà di stimolare l'attenzione su quanto è stato detto precedentemente, considerando il volume del tetraedro e del tetraedro-tronco. Quest'ultimo perché la formula risolutiva è fra quelle che maggiormente dimentichiamo e perché questo argomento è stato già trattato in modo molto interessante da G. Polya[33] e, a livello storico, da L. Giacardi e T. Viola[34] con un taglio diverso ma con obiettivi analoghi a quelli qui esposti. In particolare questi due ultimi autori riassumono i loro lavori affermando testualmente: "Si richiamano brevemente le dimostrazioni della formula…del tronco di piramide nella matematica egizia…" proposte da 7 storici della matematica. "Di ognuno di esse si fa una critica approfondita rilevandone i difetti." Gli autori propongono poi[35] una loro soluzione e forniscono una ricca ed interessante bibliografia.

Dati i limiti di spazio non si riportano le soluzioni presentate nei lavori indicati, rimandando ad una lettura diretta, di grande interesse storico e didattico e per il loro contenuto innovativo.

[31] L'esempio è rivolto agli insegnanti.

[32] Tutte le figure sono state disegnate con il Cabri. "Prendendo" alcuni punti e spostandoli, è possibile sottoporre ad una qualsiasi affinità nello spazio le parti, anche separate, della figura, che si possono poi avvicinare o allontanare. Limitandosi al disegno che cosa si può chiedere oltre a poter cambiare l'angolo visuale e collocare dove si vuole le varie parti che lo compongono?

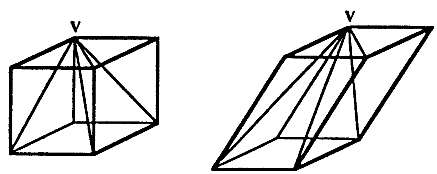
[33] Polya G., *La scoperta matematica, Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, Vol. II, (1967), Feltrinelli 1971, 250-262. Polya trae spunto da questo argomento per teorizzare un metodo risolutivo, che rappresenta con uno schema (p.258) che probabilmente considerava significativo perché lo riporta nelle facciate interne della foderina del libro in lingua originale, che però non sono state "tradotte".

[34] Giacardi L., Viola T., Il calcolo del volume del tronco di piramide nella matematica egizia. Discussione sulle ipotesi più importanti già proposte. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino,* Vol. III (1976-77), 441-453.

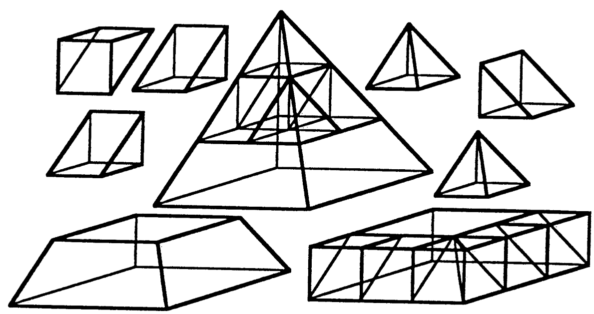
[35] Giacardi L., Viola T., Saggio su un possibile calcolo dei volumi di alcuni poliedri nella matematica egizia. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino,* Vol. III, 1976-77, 523-537. Si veda anche **Giacardi L., Roero S.C.**, *La matematica delle civiltà arcaiche,* Stampatori didattica, 1979.

Il volume della piramide

Pi1) *Scomposizione e affinità:* da un vertice del cubo proiettiamo i 3 quadrati che hanno in comune il vertice opposto: otteniamo 3 piramidi uguali[36]. Con una affinità che "allontani" 2 quadrati paralleli del cubo (oppure con un "allungamento" verso l'alto e poi con uno scorrimento per passare ad un parallelepipedo) le 3 piramidi divengono differenti ma il loro volume è ancora uguale perché tutti i cubetti, che contenevano nella configurazione iniziale, si sono trasformati allo stesso modo. Così dal volume del parallelepipedo si ottiene quello della piramide a base quadrata: area di base per altezza (la sua lunghezza) diviso 3. La formula resta allora valida per i coni generalizzati (quindi anche senza utilizzare di nuovo il principio di Cavalieri) intendendoli composti dalle piramidi che proiettano dal vertice i quadrati della base, che ne determinano l'area[37].



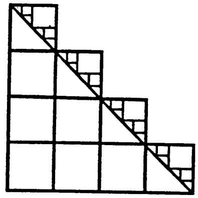
Pi2) *Il volume di una delle piramidi precedenti, relative al cubo, per equiscomposizione*



[36] Accostandone 4 con lo spigolo verticale in comune, si ottiene la "piramide di Jeuel". Con 6 di queste ultime poste intorno ad un cubo, facendo coincidere i quadrati, si ottiene il dodecaedro rombico (v.o.).

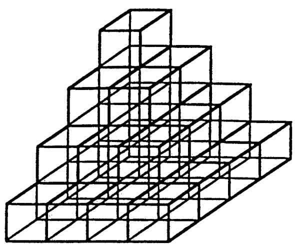
[37] La dimostrazione è riproducibile in dimensione qualsiasi (drdq) dividendo il cubo in 3 piramidi in R^3 e in d piramidi in R^d proiettando da un vertice i **d** cubi in dimensione **d-1** che hanno in comune il vertice opposto.

Pi3) *Dal discreto al continuo:* (1) **Area del triangolo**



La somma degli interi da 1 a n si può rappresentare con una scaletta formata da 1+2+3+…+n quadretti. Il loro numero è n(n+1)/2. Se un triangolo ha base ed altezza di lunghezza **e**, si può "circoscrivere" con la nostra scaletta con un numero sempre più grande di gradini e quindi con quadretti sempre più piccoli di area $(e/n)^2$.
Moltiplicando il loro numero per tale area: $\frac{n^2+n}{2}\frac{e^2}{n^2}$, al limite si ottiene $\frac{e^2}{2}$
che è l'area del limite della scaletta, cioè l'area del triangolo.
Con un triangolo di base **b** ed altezza **h** avremmo moltiplicato n(n+1)/2 non per $(e/n)^2$ ma per (b/n)•(h/n), che è l'area di ogni rettangolino, ottenendo al limite bh/2.

(2) Volume della piramide[38]



Analogamente nello spazio si dimostra, in molti modi, che il volume (e quindi il numero dei cubetti unitari) della "piramide a gradini" che si ottiene sovrapponendo un cubetto, 4 cubetti, 9 cubetti,… n^2 cubetti è $n^3/3 + n^2/2 + n/6$.

Generalizzando quanto detto per il triangolo ad una piramide P di base rettangolare, di dimensioni **a** e **b**, ed altezza **h**, il calcolo diviene

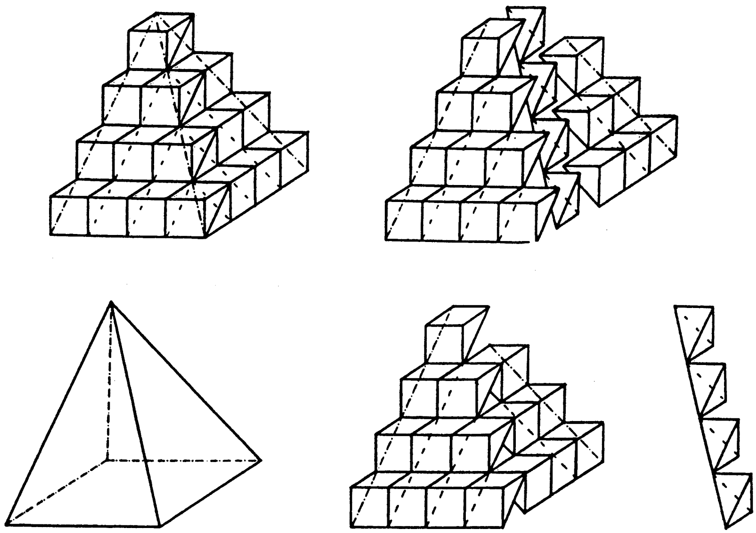
[38] (drdq)

$$\{n^3/3 + n^2/2 + n/6\} \frac{a.b.h}{n.n.n} \text{ che tende a } \frac{abh}{3}$$

che è il volume di P.

Se in particolare a=b=h otteniamo $\frac{a^3}{3}$.

La piramide è così intesa come limite della scaletta quando i blocchetti divengono sempre più piccoli.

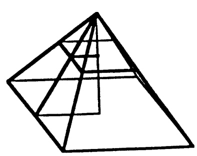


Viceversa dal volume della piramide si ottiene la somma dei quadrati:

$$n^3/3 + n^2/2 + n/6$$

Volume del tronco di piramide: **la base minore è un quadrato di area b^2, la base maggiore è un quadrato di area a^2; l'altezza è h.**

TP1) *La formula del volume V del tronco di piramide determinata attraverso l'uso di una incognita da Polya*[39]**.** Polya parte da questa figura:



[39] Nota 33.

la piramide piccola in alto, di volume B, ha altezza x, quindi il volume A di **tutta** la piramide è:

(1) $A = \frac{a^2(x+h)}{3}$; per similitudine: (2) $\frac{x}{x+h} = \frac{b}{a}$ segue

(3) ax = bx+bh, da cui $x = \frac{bh}{a-b}$; se ne deduce:

(4) $$h + x = h + \frac{bh}{a-b} = \frac{ah - bh + bh}{a-b} = \frac{ah}{a-b}$$ e

(5) $$B = b^2 \frac{(\frac{bh}{a-b})}{3} = \frac{b^3 h}{3(a-b)}$$.

Infine (6) $$V = A - B = \frac{(a^3 - b^3)}{(a-b)} \frac{h}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} h$$

Premettiamo che l'autore non è criticabile in funzione dei nostri obiettivi perché ha scopi diversi. Usiamo la sua dimostrazione unicamente come esempio per iniziare ad approfondire il problema delle scelte da effettuare tenendo anche presente l'età dello studente cui ci si rivolge. Consideriamo quindi criticamente i seguenti aspetti relativi alla sua dimostrazione:

– il disegno non rende sufficientemente la profondità dell'immagine sulla destra della figura

– mancano le lettere, il riferimento alla figura è "a parole". Forse qualche lettera non guasta.

– troppi calcoli

– poteva essere sufficiente la seguente figura che considera graficamente 1/4 della piramide precedente o se si vuole la stessa figura precedente nella quale (con una affinità o solo con uno "scorrimento") uno spigolo obliquo viene reso perpendicolare (per mantenere l'altezza e le lunghezze **a** e **b** dei lati dei quadrati delle basi)

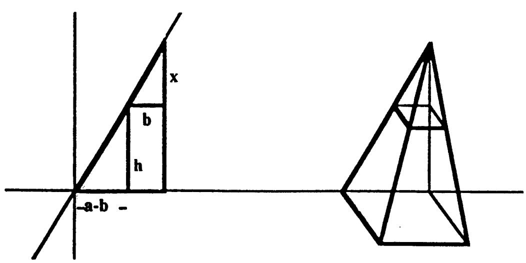


Fig. 3

– in (2) la proporzione giustamente viene espressa con $\frac{x}{x+h}=\frac{b}{a}$ e non con "**x** sta a **(x+h)** come **b** sta ad **a**"
– sempre in (2) e in riferimento alla Fig. 3, anche per agevolare i calcoli, si potrebbe parlare di stessa inclinazione, in alto ed in basso, da cui $\frac{x}{b}=\frac{h}{a-b}$ (vedi anche Fig. 3, a sinistra)
sarà così anche nel coefficiente angolare $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, per l'equazione della retta, e lo ritroviamo nei cartelli autostradali sulla pendenza di una autostrada) da cui più velocemente si determina (3): $x=\frac{bh}{a-b}$

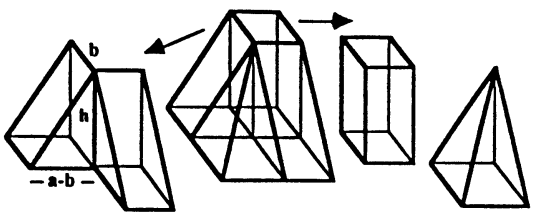
– conviene esplicitare l'altezza totale

$$h+x=h+\frac{bh}{a-b}=\frac{ah-bh+bh}{a-b}=\frac{ah}{a-b}$$

per esprimere direttamente l'ultimo termine delle uguaglianze di (4): $A=\frac{a^3h}{3(a-b)}$

– l'uso della incognita rende necessario rivolgersi ad uno studente di età maggiore di quella che si può considerare utilizzando una dimostrazione che non ne fa uso (come in Giacardi e Viola[40] o nello stesso Polya, altrove[41])

TP2) Dividendo il tronco di piramide in fig.3 in 4 parti: 2 prismi triangolari uguali, un blocchetto e una piramide, si ha



$$V=(a-b)\frac{h}{2}b\bullet 2+b^2h+(a-b)^2\frac{h}{3}=abh-b^2h+b^2h+a^2\frac{h}{3}-2ab\frac{h}{3}+b^2\frac{h}{3}=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

[40] Note n. 34 e 35.
[41] Nota 33, p.262.

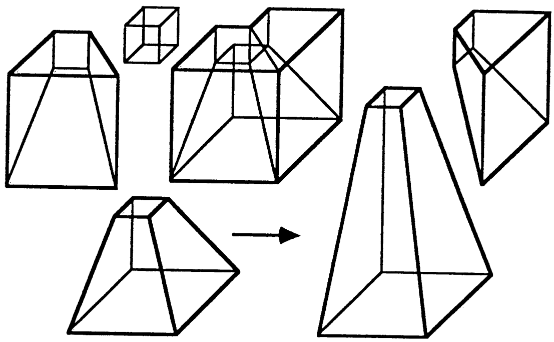
– il punto (6) mostra che tutti i calcoli si riducono a considerare

$$a^3-b^3= (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

che algebricamente è banale. Ciò suggerisce una dimostrazione con un abbinamento del tipo geometria-algebra-geometria.

TP3) Consideriamo appunto a^3-b^3 geometricamente come la differenza dei due cubi della figura seguente (al centro). Proiettando dai 3 quadratini, della parte concava del poliedro, i quadrati del cubo grande, rispettivamente paralleli, si ottengono 3 tronchi di piramide uguali. Quindi il volume di ciascuno si può ottenere dividendo per 3 i 2 termini dell'uguaglianza

$$a^3-b^3= (a-b)(a^2+ab+b^2)$$



Così ad esempio il tronco di piramide in basso a sinistra ha volume

$$\frac{a^3-b^3}{3}=(a-b)\frac{(a^2+ab+b^2)}{3} \quad \text{e altezza } a-b.$$

Con una affinità che porta tale altezza ad avere lunghezza h ritroviamo il volume[42]

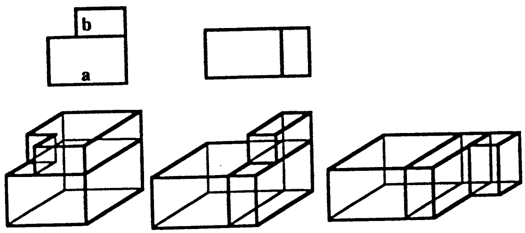
$$\mathbf{V}= h\frac{(a^2+ab+b^2)}{3}$$

Con minore immediatezza che in modo algebrico, l'uguaglianza

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

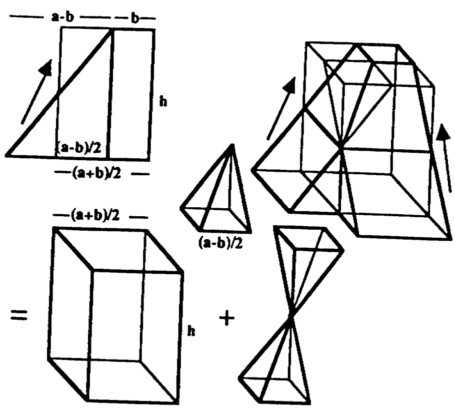
[42] In generale si considera $\frac{a^d-b^d}{d}=(a-b)\frac{a^{d-1}+a^{d-2}b+\dots ab^{d-2}+b^{d-1}}{d}$. Portando egualmente ad **h** l'altezza **a-b** si ottiene la formula del tronco di piramide in **d** dimensioni (per d=2 è un trapezio).

poteva essere vista geometricamente a partire da a^2-b^2= (a-b)(a+b)



In modo ricorsivo: a^3-b^3= a^2(a-b) + b(a^2-b^2) oppure,
direttamente: a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) .

TP4) In collegamento con il trapezio e sfruttando la rotazione di alcune parti



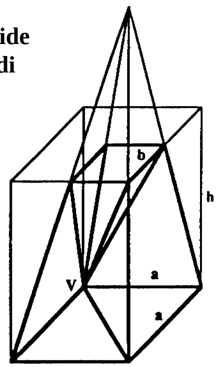
Il trapezio diviene un rettangolo di base $\frac{a+b}{2}$ e altezza h
e quindi di area $R = \frac{a+b}{2}h$

il tronco di piramide si trasforma nei 2 poliedri, in basso, di volume

$$\mathbf{V} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{h}{3} .$$

TP5) Generalizziamo il collegamento con il trapezio prendendo lo stesso cubo diviso in 3 piramidi, usato nella dimostrazione **Pi1)** per determinare il volume della piramide. Scambiamo l'alto col basso, allunghiamo il disegno e sottoponiamolo ad una proiettività che abbia un solo punto di fuga sulla retta che contiene uno degli spigoli verticali **s** dove far confluire i prolungamenti degli spigoli paralleli ad **s**. Il cubo diviene un tronco di piramide, ancora diviso in 3 piramidi con vertice in V.

Il tronco di piramide diviso in 3 piramidi



$$V= \left(\frac{a+b}{2}h\right)\frac{a}{3}2+b^2\,\frac{h}{3}$$

Iterativamente: le 2 piramidi laterali, uguali[43], hanno per base un trapezio (tronco di triangolo) di area $\frac{a+b}{2}h$ e altezza **a**, cui si aggiunge la piramide "a testa in giù" che ha base b^2 e altezza **h** ([44]).

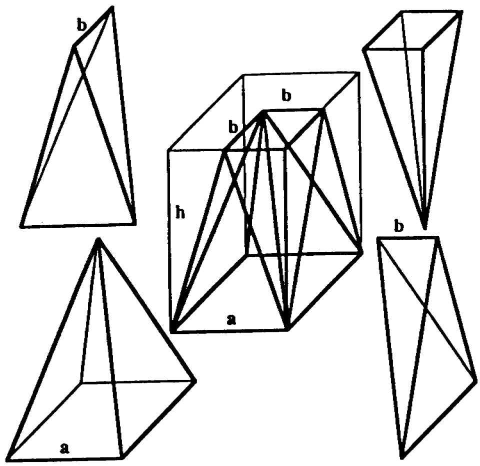
[43] Le piramidi laterali sono ancora uguali perché sono sottoposte alla stessa deformazione.

[44] In 4 dimensioni si parte da un cubo diviso in 4 piramidi (proiettando da un vertice i 4 cubi nel vertice opposto). Poi, facendo confluire le rette degli spigoli "verticali" in un punto su una di queste, il cubo diviene un tronco di piramide in 4 dim. diviso in 3 piramidi "laterali", di altezza **a**, con alla base un tronco di piramide, il cui volume è dato dalla formula precedente. A queste si aggiunge la piramide "a testa in giù", che ha base b^3 e altezza **h**.

Cioè: $V=3\left(h\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)\frac{a}{4}+b^3\frac{h}{4}=h\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4}$.

Si continua ricorsivamente in d dim. ove si hanno d-1 piramidi con alla base un tronco di piramide di dim. d-1 e altezza **a**, e una piramide di base b^{d-1} e altezza **h**.

TP6) Oppure con una **divisione in 4 piramidi**, di cui 2 uguali di altezza **b**



$$V= a^2\frac{h}{3}+2\frac{ah}{2}\frac{b}{3}+b^2\frac{h}{3}$$

Poliedri[45]

"Sir D'Arcy W. Thomson[46] once remarked to me that Euclid never dreamed of writing An Elementary Geometry: what Euclid really did was to write a very excellent (but somewhat long-winded) account of the Five Regular Solids for the use of Initiates. However, this idea, first propounded by Proclus, is denied by Heath". Coxeter H.S.M.[47]

[45] Un obiettivo importante del testo che segue è quello di proporre degli esercizi per lo sviluppo delle immagini e delle esperienze mentali (Barra M., Random images on mental images, in: *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Edited by Sutherland R., Mason j., Springer, NATO ASI Series F, Vol.138, 263-276). Così, anche per mancanza di spazio, non si riproducono qui di seguito i disegni dei vari poliedri. Per questi e per altri aspetti si rimanda a**: Cundy H.M., Rollet A.P.,** *I modelli matematici,* Feltrinelli, 1974, **L. Brusotti,** Poligoni e poliedri, (nota 7, Enciclopedia…) v.II, parte I, 259-320, **Chisini O.**, Aree, lunghezze e volumi nella Geometria elementare, (nota 7, Questioni…), parte prima, vol.II, 61-123, Bernardi C., "Archimede" risponde, *Archimede*, fasc. 4, 1992, p.181 e fasc.2, 1994, p.65, **Dedò M.**, Topologia delle forme di poliedri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.178, n.2, p.149-192, aprile 1994. Per i modelli geometrici in prospettiva di Luca Pacioli, per i radiolari e per i cristalli a forma dei poliedri platonici…: Gario P., *L'immagine geometrica del mondo. Storia dei poliedri.*, Stampatori didattica, 1979 e D'Amore B., Geometria: mezzo pedagogico per l'educazione matematica, *La matematica e la sua didattica,* 4, 1993, 387-409.

[46] Autore di un libro pieno di fascino e poesia: *Crescita e forma.*, Boringhieri, 1969 (1961).

[47] **Coxeter, H.S.M.,** *Regular Polytopes*, The Macmillan Company, 1963 (1948), p.13.

> "'Temo', disse Boccadoro, 'che non riuscirò mai a farmi un'idea del tuo mondo di pensiero, dove si pensa senza immagini" … "Ma una cosa ancora non mi vuole entrare in testa: quello che tu chiami 'il pensiero puro', il tuo così detto pensare senza immagini e operare con parole, con cui non si può rappresentarsi nulla". Hesse H.[48]

– **Poliedro (P):** dicendo "**parte finita di spazio limitata da poligoni detti facce"** includeremmo ad es. un "mostro[49]": un cubo con una faccia interna fra 2 spigoli paralleli non contigui. Aggiungiamo così "**tale che ciascuno spigolo appartenga unicamente a 2 facce"**. Ma per escludere ad es. 2 cubi con un vertice in comune precisiamo anche "**e tale che l'*interno* sia connesso, cioè non sia *diviso in 2 parti*"**. Naturalmente si poteva anche essere più precisi o più eleganti. Ma, in particolare in classe, tutte le precisazioni possibili, debbono essere fatte necessariamente all'inizio e in modo ineccepibile? Certo non è stato così storicamente.
– Possibile scoperta, argomentazione o teorema semplice per gli studenti: sommando i numeri dei lati di ciascun poligono, oppure i numeri degli spigoli che escono da ogni vertice, si ottiene il doppio del numero totale degli spigoli del poliedro. Infatti, in ogni caso, ogni spigolo viene contato 2 volte. Quanti **spigoli** ha il dodecaedro D a facce pentagonali? $5 \cdot 12:2=$**30**. Quale è il numero x dei vertici di D? Intorno ad ogni vertice ci sono 3 spigoli, che hanno 2 estremi, quindi gli **spigoli** sono $x \cdot 3:2=$**30**, da cui x=60:3; oppure anche: i vertici di un pentagono sono 5, in totale $12 \cdot 5=60$ vertici, a 3 a 3 riuniti in ciascun vertice di D. Il loro totale è quindi 60:3= 20.
– Un **poliedro P è semplicemente connesso** se è verificata una delle 3 condizioni equivalenti:
1) la sua superficie è riducibile per deformazione continua alla superficie di una sfera

2) è senza buchi (contro-esempio: un poliedro disegnato su una ciambella)

3) vale la relazione di Eulero: E= $\sum_{0}^{2} \mathbf{i}(-1)^{\mathbf{i}}\mathbf{N_i} = \mathbf{2}$ (N_i = n° di vertici, spigoli e facce per i=0,1,2).
– Un **poliedro C è convesso** se presi comunque 2 suoi punti, il segmento che li unisce è tutto contenuto in C.

[48] **Hermann Hesse**, *Narciso e Boccadoro*, Mondadori, 1933 (1930) 385-387.
[49] **Imre Lakatos**, nel suo notevole libro "*Dimostrazioni e confutazioni*" ((1976), Feltrinelli, 1979), chiama "mostri" quei contro-esempi, spesso 'alambiccati', da cui derivano molte clausole per eliminarli, rendendo spesso poco comprensibile la sostanza di un discorso.

I poliedri convessi sono anche semplicemente connessi (ma non viceversa, es.: “un poliedro disegnato su un pallone sgonfio con una rientranza”).
- Poliedro P' **duale** di un poliedro P[50]: è un poliedro che si costruisce prendendo N_2 punti, uno per ogni faccia di P (spesso si prende il centro delle facce), che divengono vertici di P', e unendo quelli che appartengono a facce contigue. Così “sotto” ogni spigolo e vertice di P ci sono rispettivamente uno spigolo e una faccia di P'. Dunque i numeri di facce e vertici di P e P' si scambiano fra loro mentre non varia quello degli spigoli. Esempi di dualità: cubo e ottaedro, dodecaedro ed icosaedro. Il tetraedro è duale di se stesso; e con il duale del duale di ottiene di nuovo lo stesso tipo di poliedro iniziale.

D’ora in poi **parleremo di poliedri convessi a facce regolari**[51] **(PCFR) e di alcuni loro duali.**

Che cosa sono le dipiramidi a “base interna” triangolare o pentagonale regolare, le cui facce sono triangoli equilateri? Sono poliedri platonici, archimedei o loro duali? Nessuno dei tre. Vediamo di cosa si parla.
– **V-poligono**[52]**:** si consideri un vertice V di un poliedro P; se i punti medi degli spigoli in V giacciono su uno stesso piano π, tali punti medi sono i vertici di un v-poligono (che è anche l’intersezione di P con π).
– **Poliedri convessi *regolari*** o **platonici**: sono i 5 noti poliedri convessi: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro, che hanno facce e v-poligoni tutti regolari. Con ridondanza si può dire anche: poliedri con facce uguali e regolari e v-poligoni uguali e regolari.

Facendo cadere una parte delle proprietà enunciate troveremo i poliedri convessi a facce regolari (PCFR) intersecati con i poliedri convessi semiregolari (PCS), che presentano altre divisioni interne.

[50] Può essere sufficiente indicare alcune proprietà suscettibili di precisazione.

[51] Di facile costruzione in particolare con il “Polydron” in cui poligoni di plastica si agganciano facilmente sugli spigoli. Per una costruzione con il metodo degli “origami” (piegature della carta e giustapposizione senza uso di colla): Canovi L., *Origami e geometria*, La Casa Verde Editrice, 1987 e Harrison I., For the Classroom- Origami spheres, *Mathemetics Teaching 153*, Dec. 1995.

[52] Il v-poligono (si intende poligono piano) come concetto non sembra molto usato in Italia (accennato in Cundy…(nota 45)) anche se è comodo per limitare l’uso degli angoloidi e degli angoli diedri. Come nome e significato è la “traduzione” che si propone del “vertex constituent” di Sommerville (*An Introduction to the Geometry of n-Dimensions*, Dover 1929, p.100), del “frame figure” di Stringham (Regular figures in n-dimensional space, *American Journal of Mathematics*, 3, 1880, p.7) e del “vertex figure” di Coxeter (nota 47),

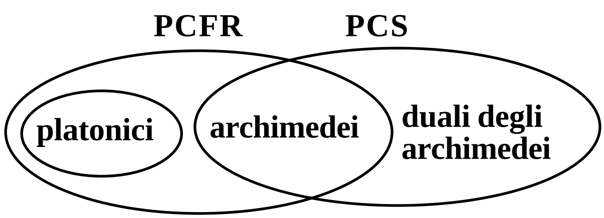
platonici	regolari	uguali		archimedei	regolari	uguali		duali arch.	regolari	uguali
facce	sì	sì			sì	no			no	sì
v-poligoni	sì	sì			no	sì			sì	no

– **Poliedri convessi *semiregolari* (PCS):** si dividono in:

α**) archimedei** che hanno *facce regolari, non tutte uguali fra loro* (2 o 3 tipi[52]) e *v-poligoni uguali non regolari*. Sono 13 cui si aggiungono i **prismi** ( ) e gli **antiprismi** ( ) (v.o.);

α') **duali degli archimedei** che hanno *facce uguali, ma non regolari e v-poligoni regolari non uguali*. Sono 13 più le **dipiramidi semiregolari** ( ) duali dei e le **antidipiramidi semiregolari** ( ) **(con aquiloni)** (v.o.), duali degli .

I poliedri platonici e archimedei sono iscrivibili in una sfera, i duali degli archimedei hanno invece una sfera inscritta. Tutti hanno una intersfera tangente ai loro spigoli[54].

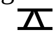


p.16 e p.128)).

[53] Dalla uguaglianza dei v-poligoni deriva l’uguale presenza dei poligoni intorno a ogni vertice. Ponendovi intorno un triangolo equilatero, un quadrato, un pentagono e un esagono regolare superiamo i 360° e ancora di più con un’altra scelta di 4 poligoni diversi fra loro. Questo è impossibile per la convessità, quindi i tipi di poligoni regolari sono al massimo 3.

[54] Queste proprietà, che scambiano vertici con facce lasciando inalterati gli spigoli, fanno parte della “dualità”.

- in α) ci sono**:** i **prismi (**  **)** e gli **antiprismi**[54] **(**  **) regolari** che sono due sequenze infinite di poliedri, formati da due poligoni regolari uguali e paralleli di n lati, uniti, nei prismi, da una corona di n quadrati, e, negli antiprismi, da una corona di 2n triangoli equilateri con le “basi” rivolte verso i 2 poligoni, in modo alterno.
– in α') ci sono: **1)** le **dipiramidi semiregolari** () che sono formate da 2 piramidi rette uguali, con alla base un poligono regolare, unite su quest’ultimo (**base interna**). Poiché le facce debbono essere uguali ma non regolari, viene escluso ad esempio l’ottaedro regolare (che è anche un antiprisma triangolare) e per limitarsi ad un solo tipo di poliedro, si richiedono v-poligoni *regolari,* ma non uguali (i v-poligoni relativi ai vertici della base interna sono rombi, in generale, che divengono *quadrati* “tirando o comprimendo il poliedro” sui rimanenti 2 vertici).

2) le **antidipiramidi semiregolari** () **(con aquiloni)**[56] che devono avere, anche loro, v-poligoni regolari ma non uguali[57] e facce uguali ma non regolari . Queste sostituiscono i triangoli delle dipiramidi con degli aquiloni (quadrilateri convessi con 2 coppie di lati adiacenti uguali) di modo che al posto del bordo con n lati della base interna delle dipiramidi ci sia uno zig-zag di 2n spigoli uguali.
– I poliedri convessi a facce regolari (PCFR) sono 92 ai quali si aggiungono le due sequenze infinite dei prismi e degli antiprismi regolari cioè  e  (le piramidi a facce regolari sono 3 e non infinite). Questo è stato dimostrato da Victor Zalgaller in Russia ed indipendentemente N.W. Johnson in Nord America, che hanno pubblicato i loro risultati nel 1966[58]. Fra i 92 PCFR ci sono naturalmente i poliedri platonici e archimedei. I duali degli archimedei non sono PCFR. Infine le dipiramidi a “base interna” triangolare e pentagonale (regolare) formate da *triangoli equilateri* sono PCFR che hanno v-poligoni rombici, in corrispondenza dei vertici delle basi interne, mentre riproducono, con spigoli dimezzati, il triangolo ed il pentagono regolare, delle basi interne, negli

[55] Gli antiprismi non sembrano conosciuti prima di Keplero (1571-1630).

[56] È un neologismo che si propone in sostituzione di “trapezoedro archimedeo”.

[57] I 2 v-poligoni delle “punte” sono regolari e uguali (con più di 3 lati), gli altri sono triangoli equilateri uguali. In particolare per le dipiramidi e antidipiramidi, la regolarità dei v-poligoni permette di tacere sugli angoli diedri uguali.

[58] Victor A. Zalgaller, *Convex polyhedra with regular faces*. Tradotto dal russo. Seminar in Mathematics, V.A. Steklov Mathematical Institute, Lenigrad, Vol.2. Consultant Bureau, New York, 1969, Norman W. Johnson, Convex polyhedra with regular faces, *Canad. J. Math.* 18,1966, 169-200 (attenzione ci sono un centinaio di Johnson che scrivono su riviste internazionali di matematica).

altri 2 v-poligoni. Dunque, avendo v-poligoni né tutti uguali né tutti regolari, non sono né platonici, né archimedei, né loro duali.
– Fra i **PCFR** ci sono i **poliedri primi**[59]: sono 28, più i  e  , e sono definiti da 2 proprietà:
a) sono blocchi di costruzione dei PCFR (in particolare dei 64 rimanenti diversi dai  e )
b) non sono riducibili a PCFR con un numero minore di facce.
Es.: una piramide quadrata con triangoli equilateri è un poliedro primo: 2 di queste formano un ottaedro regolare che non è primo.

Alcuni metodi costruttivi e proprietà dei poliedri considerati e dei loro duali[60]

Il poliedro P', duale di un poliedro P, può essere costruito:
1) unendo i centri delle facce contigue di P, se queste sono regolari
2) considerando le intersezioni dei piani che contengono i v-poligoni di P
3) considerando i cerchi circoscritti ai v-poligoni di P e, nei vertici di questi, le tangenti ai cerchi (metodo di Dorman Luke)
4) per “costruzione-π con piani sui vertici” di P (v.o.).

A partire da un poliedro P definiamo:
– “**costruzione-π con piani sui vertici”:** il poliedro che si ottiene intersecando i piani nei vertici di P, in “condizioni di simmetria”. Per esempio a partire dal piano π, perpendicolare alla diagonale di un cubo in un vertice V, si ottiene un triangolo equilatero per intersezione su π dei 3 piani analoghi uscenti dai 3 vertici contigui a V. Considerando tutti i vertici si ottiene un ottaedro regolare
– “**costruzione-α per accrescimento limitato sulle facce**”: il poliedro che si ottiene facendo crescere contemporaneamente una piramide retta, su ogni faccia di P, fintantoché 2 triangoli contigui di 2 piramidi (su 2 facce contigue di P) si trovino sullo stesso piano (un triangolo sul prolungamento dell’altro) dando origine ad un aquilone e nei platonici ad un rombo[61]
– “**costruzione-V per v-poligoni**”**:** il poliedro che ha per spigoli quelli dei v-poligoni di P. Così l’ottaedro è la costruzione per v-poligoni a partire da un tetraedro

[59] Si veda Pinel A, Gailiunas P., *For the Classroom-Convex polyhedra from regular Mats, Mathemetics Teaching 152*, Sept. 1995.

[60] Si forniscono delle idee guida da selezionare o perfezionare.

[61] Più in generale si può arrestare la crescita quando si verificano condizioni particolari sui v-poligoni, sulle facce o sugli angoli diedri. Così si possono ottenere alcuni poliedri regolari stellati.

– “**costruzione-τ per troncamento**”: se le “punte” di ciascun quadrato di un cubo vengono tagliate in modo da ottenere un ottagono regolare, in corrispondenza dei vertici del cubo si ottengono dei triangoli equilateri e il cubo dà origine ad un cubo tronco (6 ottagoni e 8 triangoli) che è un solido archimedeo.

Si possono inventare altre operazioni, in prossimità dei vertici e degli spigoli, per trovare i più vari collegamenti fra i poliedri.

Teorema: per i poliedri P semplicemente connessi vale la relazione di Eulero

$$E = \sum_{0}^{2} \mathbf{i}(-1)^{\mathbf{i}} \mathbf{N}_{\mathbf{i}} = \mathbf{2}$$

Eulero, poco dopo il 1750, pubblica 2 memorie. E=2 è esemplificato largamente nella I e dimostrato nella II. Cerchiamo una dimostrazione collegata alle costruzioni con materiale didattico[62].

Per un punto E=1; per un segmento E=1. Unendo due segmenti in un vertice rimane E=1, perché si sommano le 2 unità dei segmenti e si sottrae quella del vertice. Lo stesso per una successione di segmenti uniti in una spezzata, o quando inseriamo uno spigolo fra le 2 estremità per formare una faccia, perché annulliamo l’unità dello spigolo con quella della faccia[63]. Ancora **E=1** unendo una faccia ad un’altra o ad un insieme di facce già costruite (senza lasciare dei buchi), perché in ogni caso si aggiunge l’unità della faccia e si sottrae quella del vertice, del segmento o della spezzata ove avviene l’unione. Niente cambia fino all’ultima operazione di chiusura del solido, quando invece **si aggiunge una unità** tappando il bordo libero di tutta la costruzione con una faccia (+1). Quindi **E=1+1=2**.

E nel caso di 1 buco? “Allunghiamo” una parte del solido precedente e, “girando intorno ad un buco”, riattacchiamo la protuberanza unendo 2 facce (o 2 insiemi connessi di queste) e sottraendo le due unità delle 2 zone di contatto: **E= 2-2** =**0**.

E con 2 buchi? Partendo da 2 solidi con 1 buco, si uniscono, sottraendo, come prima, 2 unità: 0+0-2=**-2=E**. Si capisce così che, in generale, si ha:
E=2-2b, ove b è il numero di buchi.

[62] Per molte altre informazioni e dimostrazioni vedi nota n.49.

[63] Si può dire subito che in una faccia E=1 (la faccia è una e i due numeri uguali di lati e vertici si elidono). Qui si è indicato un metodo “ripetibile” in dimensione qualsiasi (anche per l’insieme di poliedri E=1 se si condidera il loro numero con -N_3,…), sempre nel tentativo di affermare l’esigenza di più spazio per l’analogia e l’induzione.

Teorema: i solidi platonici[64] sono 5

Dalla definizione si ha che: 1) intorno ad un vertice ci sono almeno 3 facce uguali, regolari e in ugual numero intorno ad ogni vertice; 2) per la convessità la somma degli angoli in un vertice deve essere inferiore a 360°; 3) per i poligoni intorno ad un vertice ci sono 5 possibilità: 3 triangoli equilateri, oppure 4, e al massimo 5, oppure 3 quadrati o 3 pentagoni. Infatti gli angoli di: triangoli, quadrati, pentagoni ed esagoni regolari, misurano rispettivamente: 60°, 90°, 108° e 120° e crescono all'aumentare del numero dei lati e con 6 dei primi, 4 dei secondi e 3 da 120° si ottiene l'angolo giro e si va oltre questo aumentando il numero dei poligoni o quello dei loro lati.

Questi 5 poliedri ipotizzati esistono effettivamente.

Infatti, poiché si vede subito che è possibile costruire prismi, alcune piramidi e dipiramidi con facce regolari, non si ha alcun problema per il cubo, il tetraedro e l'ottaedro in cui si verifica anche lo stesso numero di facce intorno a ciascun vertice. L'icosaedro è formato da un antiprisma pentagonale archimedeo, unito sui pentagoni a quelli di due piramidi pentagonali formate da triangoli equilateri. Il totale di questi è dunque 20, e nei vertici ce ne sono: 5 intorno alle ex "punte" delle piramidi, e ai 3 triangoli in ogni vertice dell'antiprisma se ne aggiungono 2 per unione con una piramide.

Per l'ultimo caso prendiamo 6 pentagoni regolari su un piano: 1 al centro e 5 intorno uniti ai lati del primo. Questi ultimi si "alzano" contemporaneamente intorno al primo per formare un "**canestro**" con uno zig-zag di 5 sporgenze e 5 rientranze. Rovesciando un altro canestro, uguale al precedente, si vorrebbe che le sporgenze del primo corrispondano esattamente alle rientranze dell'altro. Ma chi ci dice che questo sia possibile? Data l'inclinazione dei pentagoni potrebbe accadere che le sporgenze di ciascun canestro fuoriescano da quelle dell'altro, come accade per le dita tese di due mani intrecciate. Come mai una rientranza di un canestro formata da due pentagoni P e Q, inclinati verso l'esterno (rispetto alla base) può accogliere un pentagono del canestro rovesciato, che è inclinato in modo opposto? Questo è vero per simmetria rispetto

[64] Timeo di Locri inventò uno corrispondenza mistica, ripresa da Platone, fra tetraedro, ottaedro, icosaedro e cubo, e, rispettivamente, il fuoco, l'aria, l'acqua, e la terra. Infine il dodecaedro doveva considerarsi la forma che avvolge l'universo. Questi solidi vengono trattati matematicamente da Teeteto di Atene e "da Euclide" nei libri XIII-XV (gli ultimi due libri sono scritti da vari autori successivi). Un dodecaedro, costruito dagli Etruschi, è stato trovato nel Monte Loffa, vicino Padova, e risale ad almeno 2500 anni fa. Sembra fosse un giocattolo.

alle estremità dello spigolo che unisce P e Q: se c'è un pentagono da una parte (la base del canestro) è possibile porne uno anche dall'altra. Così lo zig-zag individua un antiprisma a basi pentagonali che si può completare con un canestro "sopra" perché ciò è vero "sotto". Anche il 12° pentagono si può aggiungere per simmetria. Questo è il **dodecaedro regolare**[65] che ha 3 pentagoni intorno a ciascun vertice.

La matematica è soprattutto il superamento delle argomentazioni discorsive come queste, attraverso strumenti tecnici spesso complessi. Come migliorare il bilancio pedagogico?

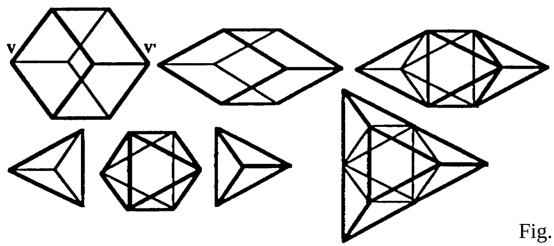


Fig. 4

Tassellazioni, probabilità e teoria dei numeri

Consideriamo un cubo formato unicamente dagli spigoli, articolabili nei vertici. Prediamo 2 vertici opposti V e V' ed allontaniamoli finché gli angoli intorno a questi vertici siano di 60°. Dalla figura si vede che, da questo esaedro a facce rombiche, possiamo ottenere un ottaedro e 2 tetraedri. Questo dimostra che gli ottaedri e i tetraedri (regolari) del nostro esaedro, **tassellano** lo spazio[66] (lo riempiono senza buchi o sovrapposizioni). Infatti per i cubi è vero e rimane vero quando questi si trasformano in esaedri "tirando" tutto lo spazio nella direzione di una diagonale.

[65] Quanto visto può essere utile per disegnare un dodecaedro in pianta. Poiché i due "canestri" sono uguali e combaciano, i due cerchi, che circoscrivono 5 sporgenze e 5 rientranze, coincidono nella proiezione, mantenendo ad es.: la distanza fra le rientranze successive, che è data dalla diagonale del pentagono. Conoscendo il rapporto fra questa e il lato si possono disegnare al centro 2 pentagoni ruotati di mezzo lato da congiungere in modo alterno ai vertici precedenti. Lo stesso nelle rappresentazioni, in pianta, degli antiprismi, e quindi dell'ottaedro, ma anche dei poliedri che comprendono i prismi come poliedri primi come l'icosaedro (10 vertici di un decagono regolare uniti alternativamente da 2 pentagoni e collegati al centro da 10 segmenti).

[66] Si veda anche Mariotti M.A.: Images and concepts in geometrical reasoning (nota 45: Springer, 97-116) e: Il ragionamento geometrico nell'ambito dei problemi di insegnamento/apprendimento della matematica, in B. D'Amore (ed.), *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, Pitagora, 1994, 348-353.

Prendiamo ora un ottaedro regolare **O** di spigolo **s** e sia **b** (in **b**asso in fig. 4) un suo triangolo. Se sui 3 triangoli, di tipo β, che hanno un lato in comune con **b**, poniamo 3 tetredri regolari, di spigolo **s**, otteniamo un tronco di tetraedro, che si completa in un tetraedro di spigolo 2**s** aggiungendo un quarto tetraedro, con lo stesso spigolo, sul triangolo **a** (in **a**lto) opposto a **b**.

Sulle facce di **O** si uniscono **a caso** due tetraedri regolari T_1e T_2 con spigolo **s**. Per "a caso" si intende che dopo aver unito T_1 con **O**, si unisce T_2 su uno dei 7 triangoli rimanenti, con uguale probabilità. E' maggiore uguale o minore di 1/2 la probabilità che le 8+4+4=**16** facce triangolari di O, T_1e T_2, diano un solido con **6** facce ?

Dunque, dopo aver unito T_1 ad **O**, ad es. su **a**, si hanno questi casi:

– T_2 su **b:** si hanno le 6 facce rombiche dell'esaedro (fig.4: disegno in alto a destra, ruotato).

– T_2 su una delle 3 facce di tipo β: si ottengono ancora 6 facce: 2 trapezi, 2 rombi e 2 triangoli. In particolare dei **16** triangoli di O, T_1e T_2, 4 scompaiono per sovrapposizione, in 2 casi 3 triangoli si uniscono in un trapezio e, ancora in 2 casi, 2 triangoli si uniscono in un rombo.

In totale 16-4-2-2-1-1= 6 facce.

– T_2 su una delle 3 facce che hanno con **a** un lato in comune: si ottengono 8=16-4-4 facce: 4 rombi e 4 triangoli. Quindi 6 facce nei primi 4 casi presi in esame, e la probabilità cercata è 4/7.

Consideriamo ora un ottaedro con 2 vertici opposti in verticale; "traducendolo" negli inediti "numeri ottaedrici": **1**, 1+4+1=**6**, 1+4+9+4+1=**19**, 1+4+9+16+9+4+1=**44**, **85** … e ricordando i numeri tetraedrici (somma di n^{i}. triangolari): **1**, 1+3=**4**, 1+3+6=**<u>10</u>**, 1+3+6+10=**20**, **<u>35</u>**, **56**, **<u>84</u>**…, la fig.4 si traduce nella proprietà dei cubi: $1+6+1=8=2^3$, 4+19+4=27, 10+44+10=64, 20·2+85=125…. Analogamente considerando 4 tetraedri e un ottaedro in un tetraedro: 1·4+6=**<u>10</u>**, 4·4+19=**<u>35</u>**, 4·10+44=**<u>84</u>….** Un discorso simile può essere fatto per le altre tassellazioni e dimensioni o collegando numeri e volumi, differenze finite e derivate. Così è per i numeri "dodecaedro rombici" in qualsiasi dimensione **d**, visti anche come proiezione lungo la diagonale dei cubi in dimensione **d+1**. Il caso più semplice è dato dai numeri esagonali[67] (visti come proiezioni dei cubi): 1, 7, 19, 37, 61, … le cui somme parziali danno i numeri piramidali a base esagonale, "equivalenti" per quanto detto, assieme alla loro versione nel continuo, ai cubi.

[67] Sommando questi ai n^{i}. triangolari, con un punto in meno sui lati, si ottengono i quadrati.

La sfera

Sotto certe condizioni e in presenza di curvatura costante è possibile anticipare i concetti di integrale e derivata. Così per il cerchio (e quindi il cilindro) o la sfera, con il centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio r, l'integrale del perimetro (P) o della superficie (S) dà l'area (A) o il volume (V) (quindi con la derivata si inverte il calcolo). In 3 dimensioni l'integrale diviene la somma dei volumi delle "bucce" e la derivata è interpretabile come la superficie di una "buccia" ottenuta dividendone il volume per lo spessore costante[68]:

cerchio: $A = \int_0^r 2\pi x dx = \pi r^2; \quad \frac{d(\pi r^2)}{dr} = 2\pi r = P$.

sfera: $V = \int_0^r 4\pi x^2 dx = \frac{4}{3}\pi r^3; \quad \frac{d(\frac{4}{3}\pi r3)}{dr} = 4\pi r^2 = S$

Analogamente per il quadrato con i lati di lunghezza **l** sugli assi cartesiani (e un vertice nell'origine): dal semiperimetro P ("gnomone") si ottiene l'area A e viceversa per la derivata. Lo stesso per il volume V del cubo di spigolo **s** che cresce con **x**, su 3 quadrati di area x^2:

quadrato: $A = \int_0^l 2x dx = l^2;$; cubo: $V = \int_0^S 3x^2 dx = s^3$ ([69]).

quadrato $A' = \int_0^{\frac{1}{2}} 8x dx = l^2;$ ([70]); cubo: $V' = \int_0^{\frac{1}{2}} 24x^2 dx = s^3$

Discorso analogo (meno immediato) per A' e V' nel caso che si trasli il centro delle figure nell'origine. Si integra tutto l'"accrescimento", che in questo caso è l'intero perimetro (superficie) moltiplicato per dx. Così, limitandosi ai polinomi, si potrebbe prendere familiarità con questi concetti delicati, senza il complicato strumento analitico del limite e quindi diminuendo gli aspetti routinari degli integrali[71]. Questi collegamenti fra le dimensioni e fra i concetti ci

[68] In questi casi lo spessore costante è dx, in altri casi si può calcolare rispetto a dx la lunghezza dello spessore perpendicolare alla superficie che ha curvatura costante.

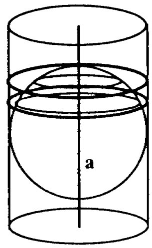
[69] Stesso discorso in d dimensioni, sia per la sfera che per il cubo di spigolo s. Per quest'ultimo lo gnomone è formato dai d ipercubi in d-1 dimensioni che hanno un suo vertice in comune. Si ha così, anche geometricamente, la formula del calcolo integrale

$V= A\, dx^{d-1} dx=s^d$ ottenuta per i primi valori da Cavalieri (1639) ed indipendentemente da Fermat e Roberval (1636) con un procedimento archimedeo.

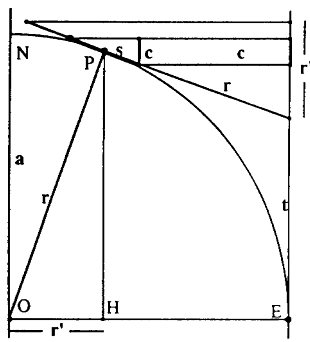
[70] Se invece, ad es., si raddoppia solo la base, il rettangolo che si ottiene ha area doppia che non è più l'integrale del perimetro (12x) perché lo spessore dell'accrescimento non è più costante.

[71] Capita frequentemente che concentrandosi sul calcolo non si capisca un concetto.

servono ora per porre un accento maggiore sul calcolo del volume della sfera attraverso la sua superficie. La dimostrazione con la “scodella di Galileo”[72] è certamente valida, oltre che molto nota, ma, come ricerca didattica, si vuole enfatizzare la necessità di sperimentare vari metodi che proponiamo in modo interdisciplinare[73].



Siano dati una sfera e un cilindro tangente. Sezionando i 2 solidi, perpendicolarmente all’asse **a** del cilindro, con 2 piani, si individuano fra questi, 2 fasce circolari: fascia_s sulla sfera e fascia_c sul cilindro, **con la stessa superficie** perché fascia_s, proiettata perpendicolarmente da **a** sulla fascia_c, diminuisce la sua altezza in modo da compensare esattamente il suo allungamento. Dimostrazione: sia P un punto sul quarto di cerchio in figura, t la retta tangente in E,



e H la proiezione di P sulla base. Siano **r** ed **r'** le lunghezze dei 2 segmenti OP e OH. Consideriamo il triangolo OPH, ruotiamolo di 90° ed inseriamolo fra t e il cerchio: l’ipotenusa sarà tangente a questo in P. Facciamo divenire piccolo “come si vuole” quest’ultimo triangolo, mantenendo i lati paralleli e la tangenza in P. Siano **s** e **c** le lunghezze di ipotenusa e cateto verticale di questo nuovo triangolo piccolo e proiettiamo sulla retta t il segmento di lunghezza **c**. **Tutta**

[72] Castelnuovo E., Barra M., *Matematica nella realtà*, p.38, Boringhieri, 1976.
[73] Si guadagna così anche un collegamento con un argomento affascinante: la cartografia.

la figura ruoti intorno a ON. Si ottiene una semisfera con un cilindro tangente, generato da t, sul quale è disegnata la fascia_c, di larghezza **c** e di area $2\pi\mathbf{rc}$. La sua corrispondente fascia_s sulla sfera è approssimata dalla fascia di larghezza **s** (**s**, e quindi **c**, sono piccole quanto si vuole), di area $2\pi\mathbf{r's}=2\pi\mathbf{rc}$ perché, per similitudine, $\mathbf{r/r'=s/c}$.

Con dei piani per **a**, dividendo in parti uguali le due fasce, i "rettangolini" corrispondenti avranno ancora area uguale. Dividendola in tali "rettangolini" così anche l'area dell'Italia sulla sfera è uguale a quella della sua proiezione, perpendicolare da **a**, sul cilindro[74].

La superficie di tutta la sfera è dunque uguale a quella laterale del cilindro tangente, di area $2\pi\mathbf{r}\cdot2\mathbf{r}=4\pi\mathbf{r}^2$, che si distende in un rettangolo **R**. Dividendo la sfera in "bucce" concentriche di spessore dr[75] e sovrapponendo le "lamine" rettangolari corrispondenti, di uguale spessore dr, il volume della sfera diviene uguale a quello di una piramide di base R[76] e altezza r, che vale $\frac{4}{3}\pi\mathbf{r}^3$, in analogia all'integrale già svolto.

[74] Tale proiezione è la proiezione cartografica "cilindrica di Lambert" che è "equivalente" perché mantiene i rapporti delle aree.

[75] Il metodo è analogo a quello degli "indivisibili curvi" di Torricelli (*Opera Geometrica*, Firenze, 1644) che vengono generalizzati dal caso cilindrico a quello sferico. Un esempio di traduzione didattica degli indivisibili curvi è a p. 89-93 (nota 73).

[76] Ugualmente con un cono a base circolare con la stessa area (raggio 2r).

Bibliografia per altra bibliografia

Riferimenti con moltissime indicazioni bibliografiche si possono trovare in: Atti del XVII Convegno sull'insegnamento della matematica: l'insegnamento della geometria, *Notiziario UMI*, Sup. al n.8-9, ag.-set. 1995; Barra M., Ferrari M., Furinghetti F., Malara N.A., Speranza F., *The italian research in mathematics education: common roots and present trends*, Progetto strategico del C.N.R. Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n.12, 1992; ICMI Study, Prospectives on the teaching of geometry for the 21st century, *Pre-procedings for Catania Conference 28 September-2 October 1995*, Department of Matematics-University of Catania; Indice generale 1970-1993 della rivista: *L'insegnamento delle matematiche e delle scienze integrate*, v.17 A/B N.5-Suppl. ott.1994.

Attività e "problemi aperti"[77] per descrivere, argomentare o dimostrare

Disegnare dei solidi su un piano punteggiato[78]. Contare il numero di blocchetti unitari che compongono questi solidi[79]. Disegnare vari solidi, anche "a scalini" per i quali il conteggio precedente (il volume) può essere eseguito in modo sintetico. Considerare un cubo di spigolo 3 (e poi di spigolo n) formato da cubetti unitari e dipinto all'esterno di blu: quanti cubetti hanno rispettivamente 3, 2, 1, 0 facce dipinte di blu? Posizionare un certo numero di cubetti in modo da formare solidi con lo stesso volume, ma con superficie diversa, fino a massimizzarla o a minimizzarla sotto certe condizioni. Costruire con una superficie assegnata di cartoncino delle scatole di volume differente. Ottenere, per costruzione-π, un icosaedro da un dodecaedro e viceversa. Ottenere per costruzione-α: un cubo da un tetraedro regolare, (perché non può venire un esaedro rombico?); un dodecaedro rombico (v. nota 34) dal cubo o dall'ottaedro; un "triacontaedro rombico[80]" (30 rombi) dal dodecaedro o dall'icosaedro. Due **poliedri platonici duali** hanno lo stesso tipo di costruzione-α? Ottenere per costruzione-**V**: il cubottaedro (6 quadrati e 8 triangoli (situati "al posto" dei

[77] Le attività sono rivolte agli studenti o agli insegnanti.

[78] Se il piano punteggiato è costruito con il Cabri attraverso il parallelismo o la simmetria, i disegni possono essere trasformati per affinità spostando l'origine e gli estremi dei versori. Si possono considerare punteggiature di vario tipo: quadrata, triangolare, ….

[79] Molti disegni, come quelli riportati nelle fig.1 e 2, sono costruiti su un piano punteggiato.

[80] Forse è meglio chiamarlo 30-edro rombico.

vertici)) a partire da un cubo o da un ottaedro; l'icosidodecaedro (12 pentagoni e 20 triangoli) a partire da un dodecaedro o da un icosaedro. Dei 4 ultimi poliedri costruiti ottenere gli ultimi 2, dai primi 2, per dualità e viceversa. Verificare che le diagonali delle facce dei primi 2 poliedri sono gli spigoli del cubo e dell'ottaedro e, rispettivamente, del dodecaedro e dell'icosaedro. Sfruttare queste proprietà per costruire più poliedri all'interno di un poliedro. Verificare se per costruzione-**v** su 2 poliedri duali si ottiene lo stesso tipo di poliedro; cosa dire rispetto alle facce, al loro numero e a quello degli spigoli ? Ottenere per costruzione-τ: 5 poliedri tronchi archimedei[81] a partire dai poliedri platonici; altri 2 solidi archimedei dal cubottaedro e dall'icosidodecaedro (vedi 4 righe prima); come cambiano i numeri delle facce, degli spigoli e dei vertici e quali nuove facce si ottengono con questo tipo di trasformazione? Dimostrare che non è possibile costruire un poliedro che abbia in ogni vertice, nell'ordine, 2 triangoli e 2 quadrati[82] mentre esiste un poliedro con questi poligoni in ordine diverso. Costruire 2 solidi diversi aventi gli stessi vertici. Costruire poliedri diversi utilizzando una parte dei vertici di un cubo. Dividere il cubo in vari modi in 4 parti uguali. Costruire in cartoncino i vari blocchetti che compongono $(a+b)^3$. Le diagonali di un cubo sono fra loro perpendicolari? Dimostrare che le coppie di spigoli sghembi di un cubo sono 24. Mostrare che le sezioni del cubo[83] possono essere: triangoli, quadrati, rombi, parallelogrammi, trapezi, pentagoni, esagoni, regolari e non. Considerare le sezioni del cubo dell'attività precedente e ridisegnarne il contorno su uno sviluppo piano della superficie

[81] Fra questi l'icosaedro tronco (20 esagoni (ex triangoli dell'icosaedro tagliati ad 1/3 degli spigoli) e 12 pentagoni (troncamento dei vertici) che viene usato per costruire i **palloni per il gioco del calcio**.

[82] Per soddisfare le ipotesi, ai due lati che concorrono in ogni vertice di ciascun triangolo del poliedro, devono esserci da una parte un quadrato (Q) e dall'altra un triangolo (T) e questo, è impossibile. Infatti le 2 successioni possibili intorno ad un triangolo: QTT, TQQ non verificano la condizione richiesta. E' invece possibile il solido che, in ogni vertice, ha le stesse figure precedenti ma in ordine diverso: QTQT. Infatti dalle ipotesi deriva che ogni triangolo è contornato da quadrati e ogni quadrato da triangoli. Bisogna però dimostrare che, oltre ad essere possibile, il solido esiste effettivamente. Da quanto detto segue anche che il numero dei lati dei triangoli deve essere pari a quello dei quadrati. Il mcm fra 3 e 4 è 12 che corrisponde a 3 quadrati e 4 triangoli che danno origine a 12 spigoli (24:2) e 6 vertici (24:4). Ma non è rispettata la relazione di Eulero perché E=7+6-12=1, quindi in tal modo non è possibile costruire un poliedro. Se si raddoppiano i numeri, con 14 facce (6Q e 8T) si rispetta la condizione necessaria: 14+12-24=E=2. Ma ancora si deve verificare l'esistenza di quello che risulterà il cubottaedro.

[83] Eventualmente attraverso la superficie di un liquido colorato all'interno di un cubo di plexiglass trasparente.

del cubo. Considerare vari sviluppi piani[84] (in totale sono 11) della superficie del cubo. Considerare gli sviluppi piani di altri solidi platonici o di parti di questi anche per una loro costruzione in cartoncino. Dimostrare che "al centro" di ogni solido platonico c'è un antiprisma (oppure mostrare che ogni solido platonico ha infinite sezioni parallele con lo stesso perimetro). Dimostrare in vari modi, diversi da quello già esaminato, che ottaedri e tetraedri tassellano lo spazio[85]. Ottaedri e ottaedri tronchi possono tassellare la spazio? Quale poliedro si ottiene unendo i vertici a 2 a 2 non contigui né opposti di un cubo? Proiettando dal centro di un cubo le facce del poliedro che risponde al quesito precedente, il cubo è diviso in 4 parti uguali? Con 8 di queste parti costruire un dodecaedro rombico[86]. Dato un ottaedro e 2 tetraedri regolari con spigoli uguali, dividere i 2 tetraedri regolari proiettando gli spigoli dal centro e unire gli 8 pezzi ottenuti all'ottaedro facendo coincidere i triangoli equilateri. Che cosa si ottiene? Dimostrare in più modi che i dodecaedri rombici tassellano lo spazio[87]. Descrivere uno dei 2 poliedri uguali che si ottengono dividendo al centro un cubo con un piano perpendicolare ad una diagonale. Si uniscano 8 di questi poliedri in un unico poliedro, OT, facendo aderire le facce pentagonali in modo che scompaiano al suo interno. Quali sono le facce di OT? Dimostrare che gli OT ottenuti tassellano lo spazio. Dire quali solidi si ottengono scomponendo l'esaedro in fig. 4 con 3 piani perpendicolari alla diagonale più lunga che la dividono in 4 parti uguali. Dimostrare che tetraedri tronchi e tetraedri tassellano lo spazio e provare a reinterpretare la proprietà trovata traducendo in numeri i poliedri considerati. Descrivere in un "tema di matematica" una tassellazione e le sue proprietà da argomentare o dimostrare. Tassellare in vari modi tetraedri ed ottaedri con tetraedri ed ottaedri più piccoli ed individuare

[84] Vedi: Pellegrino C., Arpinati Barozzi A.M., Come allievi di terza media hanno studiato un collegamento tra sviluppi dell'ottaedro regolare e del cubo, *L'insegnamento delle matematiche e delle scienze integrate*, v.16, 1993, 383-398.

[85] Le linee guida potrebbero essere ad es.: 2 rette parallele formate dai quadrati delle basi interne degli ottaedri, considerando gli spazi fra questi…; scomposizione del cubo in più modi…; ampliamento del tronco di tetraedro in fig.4 ponendo 6 piramidi "verso l'alto e verso il basso" intorno ad ogni ottaedro e 3 ottaedri intorno a ciascun tetraedro.

[86] Per un collegamento interdisciplinare con il dodecaedro rombico: Steinhaus H., *Matematica per istantanee*, Zanichelli 1995 (1950) e Barra M., …problemi di minimo in urbanistica, in natura ed in architettura, *L'Educazione Matematica*, supplemento III, pp.76- 122, 1982.

[87] Le dimostrazioni possono essere date ad es. attraverso le tassellazioni di cubi, o di tetraedri e ottaedri, dividendoli, in entrambi i casi, in poliedri rossi e bianchi, in modo alterno, e proiettando dal centro gli spigoli di quelli di uno dei 2 colori. Questo vale anche per la domanda precedente.

delle regolarità sui numeri di questi; tradurre in numeri tetraedri ed ottaedri e collegarsi alle proprietà precedentemente trovate. Calcolare il numero di vertici, spigoli e facce di un dodecaedro rombico e determinare gli inediti numeri dodecaedro rombici: **1**, 1+14=**15**, 15+14+24+12=**65**, 65+14+24·2+12·4=**175**…, aggiungendo al numero ottenuto, delle "bucce" nelle quali ai vertici si sommano gli spigoli, che divengono progressivamente più lunghi, e le facce, le cui unità aumentano quadraticamente; verificare che le somme parziali corrispondono alle quarte potenze. Ritrovare gli stessi numeri considerando che in un vertice di un cubo a 4 dimensioni ci sono 4 spigoli e quindi 6 quadrati e 4 cubi: **1**, **15**=1+4+6+4, **65**=1+4·2+6·4+4·8,…. Considerare questa proprietà per dividere i dodecaedri rombici in 4 poliedri uguali che naturalmente tassellano lo spazio[88]. Provare a generalizzare queste ultime proprietà in d dimensioni tenendo presente quanto detto dopo l'esercizio sulla probabilità. Cercare di sovrapporre vari tipi di tassellazioni anche per ottenerne delle informazioni sulla equiscomposizione. Determinare le proprietà dei tetraedri che possono essere divisi da un piano in 2 tetraedri uguali (fra questi ci sono quelli di Hill).

Nel passaggio dal cerchio al triangolo, nella figura che segue, l'area A non cambia, è quella del triangolo: $A = 2\pi r \frac{r}{2}$. Quali punti non cambiano posizione? Determinare i luoghi di questi ripetendo l'operazione precedente sui cerchi paralleli in cui può essere divisa una sfera. Descrivere il solido che si ottiene distendendo le lamine cilindriche concentriche in cui può essere considerato scomposto il solido in figura (6° disegno), determinabile anche da 2 sezioni simmetriche passanti per la perpendicolare all'asse di un cilindro. In questa operazione quali punti non cambiano posizione? Interpretare i disegni seguenti per ottenere il volume della sfera[89]

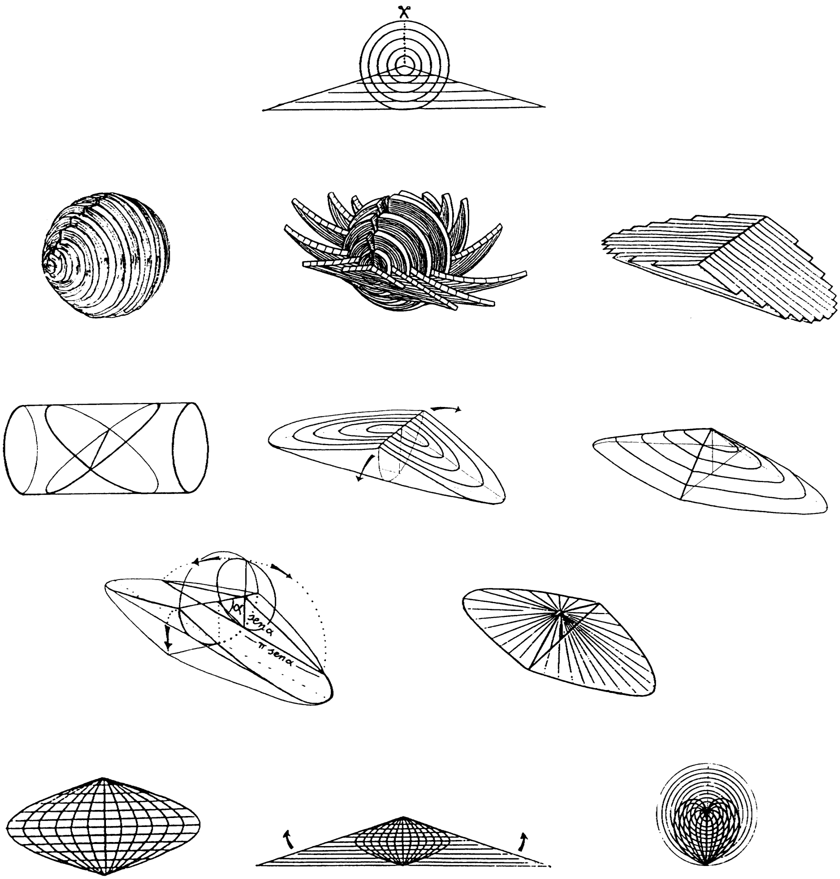
($V = 4\pi r^2 \frac{r}{3}$),

attraverso la sua superficie, che genera 2 proiezioni cartografiche, che hanno proprietà interessanti[90].

[88] Un modo consiste nel proiettare dal centro il tetraedro dentro il cubo che è dentro il dodecaedro rombico.

[89] Si può vedere: Barra M., Il gioco della matematica, D'Amore B. (ed.), *Matematica, gioco e apprendimento*, Apeiron Editrice, pag. 19-27, 1990, oppure: "Esempi di creatività in matematica", *Atti del convegno "Pensiero Scientifico e creatività"* , (Ancona, 17-19 marzo 1994), Pubbl. dell'IRRSAE-Marche

[90] Dalle figure, con qualche attenzione, si può comprendere che si tratta di 2 proiezioni equivalenti che mantengono l'equidistanza dei paralleli: la "sinusoidale" di Mercatore-Sanson e la "cordiforme" di Werner, che mantiene anche le distanze da un punto (nella figura è il polo nord).



[91]

[91] Ascolta l’arte, la terra, il cuore… (scusate).

ASPETTI EPISTEMOLOGICI E STORICI DELLA GEOMETRIA

Francesco Speranza
Università di Parma - Dipartimento di Matematica

1. Scienza, storia e filosofia

> *Epistemologia*: studio della conoscenza scientifica. Essa fa parte della *gnoseologia*, che è quella parte della filosofia che studia la conoscenza.

Quindi, l'epistemologia della matematica è una parte consistente della "filosofia della matematica", in quanto in matematica sono nettamente prevalenti i problemi relativi alla conoscenza.

Ci troviamo di fronte all'"accoppiata" storia-filosofia, ben nota nel panorama scolastico; ma in questo caso *riferite a una disciplina scientifica*, il che, secondo le tradizioni della nostra scuola, che divide nettamente le "materie umanistiche" dalle "materie scientifiche", è "strano". Però, veniamo a sapere che una legge del 1990 (la 341) prevede una scuola di specializzazione per il conseguimento dell'abilitazione; e che la commissione espressione dei due ministeri della Pubblica Istruzione e dell'Università ha elaborato un progetto, nel quale sono previsti, per ognuna delle discipline dell'insegnamento secondario, corsi di didattica e corsi storico-epistemologici specifici.

Viene quindi riconosciuto che

1) storia ed epistemologia (e quindi la filosofia) specifiche sono essenziali per la formazione degli insegnanti;

2) che c'è un collegamento fra storia ed epistemologia (e anche con la didattica);

3) che si può parlare di "epistemologia" per qualsiasi disciplina che sia oggetto d'insegnamento: quindi che le parole "scienza", "scientifico" hanno un significato più vasto di quello che comunemente viene dato loro, cioè quello di "scienze della natura".

L'affermazione 1 riguarda una questione di opportunità nel modo di organizzare la formazione degli insegnanti; la sua giustificazione può venire dall'analisi delle affermazioni 2 e 3, che invece sono tipicamente di tipo "speculativo": che cosa è una scienza (o *la* scienza)? Che cosa vuol dire "filosofia di una scienza"? Perché mettere assieme (e quindi riconoscere una qualche forma di interdipendenza tra) storia e filosofia?

Queste domande (prima ancora delle risposte che se ne possono dare) possono aiutarci a capire il perché d'una filosofia che si occupa di scienza (e quindi aiutarci a superare la frattura fra le “due culture”, umanistica e scientifica). Siamo stati portati a rivolgersi alcune domande “a proposito della scienza”, o di una particolare disciplina: di che cosa si occupa, quali sono i suoi caratteri che la distinguono da altre discipline, ...

Osserviamo intanto che *è importante porsi domande sulle discipline, sulla scienza, sul suo ruolo nella cultura e nella formazione, ..., anche se forse non arriveremo a dare sempre risposte precise.* Queste riflessioni sono già un primo passo verso la costruzione della filosofia della scienza. Il seguito di questo intervento potrà chiarire meglio le risposte.

In quanto al ruolo della storia, cominciamo a osservare che, per parlare di una scienza, possiamo seguire diverse strade, che si possono sostanzialmente far rientrare in due tipi:

prenderne una trattazione compiuta, definitiva, e analizzarla nella sua struttura “logica”

seguirla nel suo sviluppo concreto, come si è realizzata nella storia.

L’accostamento storia-epistemologia porta chiaramente alla seconda strada (il che non esclude un’analisi del primo tipo, come momento di sviluppo della disciplina): la scelta appare giustificabile alla luce di un principio celebre, quello dell’analogia tra filogenesi (sviluppo della specie) ed ontogenesi (sviluppo dell’individuo): vale a dire, c’è, fino a un certo punto, un’analogia fra il cammino che l’umanità ha percorso per arrivare alla conoscenza attuale, e quello che ogni individuo deve ripercorrere per fare propria quella conoscenza. (Si noti che qui stiamo esponendo alcune tesi che riguardano il modo con il quale si perviene alla conoscenza, cioè la psicologia: entrano in gioco altre specialità disciplinari.)

2. Il caso della geometria

Sembra che si possa indicare una strada ragionevole per comprendere lo sviluppo d’una disciplina: seguire la sua storia, il suo sviluppo. In questo si osservano dei caratteri di continuità: noi ci interessiamo ancor oggi dei problemi delle costruzioni geometriche, posti dai greci; questi avevano già teorizzato l’idea di *dimostrazione*. Ci sono però stati anche notevoli cambiamenti: lo stesso concetto di dimostrazione è profondamente cambiato, come vedremo. Lo storico e filosofo della scienza Thomas Kuhn ha elaborato, per le scienze sperimentali, l’idea di *rivoluzione scientifica*. Secondo questa idea, la scienza di regola si sviluppa come “scienza normale”, nella quale gli scienziati lavorano secondo certi “paradigmi” (modi di pensare, metodi, risultati universalmente accettati), e certi problemi sono ritenuti rilevanti; arrivano periodi di crisi, nei quali viene rimesso tutto in discussione: si parla allora di rivoluzione, dalla quale esce un successivo periodo di scienza normale. Per esempio, si parla di "rivoluzione copernicana" in astronomia. La fisica è stata riformata dalla grande rivoluzione del Seicento, da Galilei a Newton: questa ha portato la matematica nel cuore della fisica, ha cambiato l'idea di spazio, ... All'inizio del Novecento, la rivoluzione relativistica di Albert Einstein ha cambiato profondamente i concetti di spazio, di tempo, di massa (mantenendo il ruolo fondamentale della matematica).

Recentemente si è posto il problema se anche in matematica vi sono state delle rivoluzioni. A mio avviso la questione va vista in modo non manicheo: l'idea di rivoluzione può essere un buon strumento per comprendere lo sviluppo della matematica. Secondo Dunmore le rivoluzioni in matematica riguardano non tanto i risultati tecnici, ma piuttosto le concezioni generali, i modi di pensare (ma si può osservare che a lungo andare questo fa cambiare anche i problemi, i metodi). In questo scritto incontreremo tre rivoluzioni che interessano in particolare la geometria: quella collegata alle grandezze incommensurabili, quella del metodo delle coordinate, e quella non euclidea.

Una impostazione di questo tipo affida un ruolo fondamentale alla storia. La geometria presenta però una particolarità. Essa ha iniziato a svilupparsi molto presto: il primo testo significativo che ci è pervenuto è quello degli *Elementi* di Euclide (circa 300 a.C.), che presenta la materia in modo già organizzato logicamente, ed è certamente il risultato di un lungo lavoro di sistemazione (dovuto probabilmente a più autori); le indicazioni indirette sul periodo precedente sono alquanto lacunose. Ci sono pervenuti alcuni papiri egizi, risalenti all'inizio del II millennio, che riportano alcune regole per il calcolo di aree e di volumi, sempre espresse su casi particolari, e senza giustificazione. Qualcosa di analogo accade per l'area babilonese. Tuttavia, le costruzioni pervenuteci o delle quali abbiamo sicura testimonianza, risalenti anche al 3000 a. C., testimoniano che quelle civiltà avevano raggiunto un notevole grado di "sapere pratico" in fatto di geometria (va però notato che in Grecia, almeno fino all'epoca di Archimede, c'era una netta separazione tra il "sapere" scientifico e il "saper fare" tecnologico: e questo forse valeva, in qualche misura, anche per le civiltà orientali).

Quindi, se ci affidiamo alla storia *nota* della geometria, ce ne facciamo un'idea molto parziale: ci appare solo come una scienza razionalmente organizzata. È questo l'equivoco nel quale si imbatterono molti di coloro che si occuparono di geometria, dal punto di vista epistemologico o da quello della programmazione didattica: si credette che la geometria dovesse necessariamente prendere la forma che le aveva dato Euclide. Lo credette il filosofo Immanuel Kant (1724-1804), per il quale i principi che Euclide pone alla base della sua trattazione sono nient'altro che i modi con i quali organizziamo l'esperienza, e non potrebbero essere diversi; lo pensarono i matematici che, poco dopo l'unità d'Italia, decisero che la sola geometria che convenisse insegnare fosse quella di Euclide, il che poteva andare per i licei, ma portò di fatto all'abolizione della geometria nella scuola elementare e nei primi anni delle secondarie. Quando poi si decise di anticipare l'inizio della geometria, il più delle volte si finì per fare delle brutte copie della trattazione euclidea, da un lato con pretese di astrazione non adatte all'età degli allievi, e d'altro canto con molte improprietà.

Solo tra la fine del Settecento e l'inizio dell'Ottocento si cominciò a riflettere su quelli che potrebbero essere i primi passi del "sapere geometrico": vedremo più oltre gli eventi che aiutarono a chiarire le idee. Nel Novecento gli studi in proposito hanno coinvolto in larga misura anche la psicologia sperimentale (ricordiamo i nomi di Piaget e dei coniugi Van Hiele), in stretta connessione con la ricerca epistemologica (in questo campo gli italiani hanno avuto una posizione rilevante, ricordiamo G. Vailati, B. Levi, G. Castelnuovo, e soprattutto F. Enriques; fuori d'Italia si distinse lo svizzero F. Gonseth). Qui ci limiteremo a un breve *excursus* su alcune idee sulle quali oggi c'è un certo accordo (naturalmente, in campo filosofico ciascuno ha il diritto di avere la propria opinione!)

3. La geometria, dagli oggetti ai concetti: le immagini mentali

Il prestigio della geometria classica aveva fatto dimenticare che la geometria prende le sue mosse da certe esperienze, che potremmo dire genericamente "spaziali". Probabilmente aveva influito anche una certa diffidenza che i greci avevano per le attività pratiche: Platone, nella *Repubblica*, chiedeva che la matematica (e soprattutto la geometria) sia insegnata a tutti i cittadini, non per l'utilità che se ne può trarre, ma perché è "scienza di ciò che è sempre stato e sempre sarà".

Nell'Ottocento prese forza la corrente *empirista*: i principi della geometria sono affermazioni basate sull'esperienza (vedremo in seguito i motivi di questa svolta). L'idea è ripresa nel primo tema dei programmi della scuola media: "la geometria prima rappresentazione del mondo fisico". Dice Enriques:

«... la Geometria, anziché essere ritenuta come necessariamente precedente alla Fisica, viene ad esserne considerata una parte, assorta ad alto grado di perfezione in virtù della semplicità, della generalità, e della relativa indipendenza dei rapporti in essa compresi.»

In altre parole, quando osserviamo un oggetto, o il modo in cui si modifica, possiamo limitarci ad alcuni aspetti quali la forma, la grandezza, ..., in generale alle *proprietà spaziali*: su queste fondiamo la geometria [1].

D'altra parte, come abbiamo già osservato, sarebbe impossibile trovare un itinerario didattico per la geometria nella scuola dell'obbligo se non ci rivolgessimo a questa fase della geometria. Si è discusso se debba prevalere l'intuizione oppure il lavoro sperimentale: ma non si tratta di una vera contrapposizione. Immaginiamo per esempio che un alunno riconosca "intuitivamente" come vera la proprietà "un triangolo isoscele è simmetrico rispetto a una mediana": questa constatazione è stata certamente preceduta da osservazioni ed esperienze in proposito. Un altro alunno, invece, dovrà essere condotto a compiere tali osservazioni ed esperienze: in seguito è probabile che la proprietà diventi "intuitiva" anche per lui [2].

Abbiamo dunque il livello delle sensazioni, e all'altro capo quello delle idee generali, nel nostro caso dei "concetti geometrici": "cerchio", "rettangolo", "sfera", "rotazione", ... Si pongono alcune questioni:

che cosa sono queste idee, questi concetti? (la domanda ha senso tutte le volte che compiamo un'operazione di *astrazione*)

c'è un livello intermedio fra quello delle sensazioni e quello dei concetti astratti? (domanda tipica della geometria)

Cominciamo dalla seconda. Già il filosofo neoplatonico Proclo (5° secolo d.C.) si chiedeva come sia possibile operare geometricamente sui concetti astratti, che di per sé non hanno estensione: parlò allora di un livello intermedio fra le sensazioni e l'intelletto, quello dell'*immaginazione*:

[1] Risale probabilmente agli atomisti presocratici l'idea di distinguere, fra le proprietà degli oggetti materiali, le *primarie* dalle *secondarie*: le prime sono quelle veramente pertinenti all'oggetto, le altre sono dovute ai nostri sensi (all'interazione dell'oggetto con questi). La distinzione è stata ripresa da Galileo, Locke, Newton, ed è uno dei cardini della fisica che usiamo chiamare "classica" (vi sono stati tuttavia degli studiosi che non erano d'accordo sulla distinzione, ritenendola un'ipotesi metafisica). Proprietà primarie sono quelle che riguardano lo spazio e il tempo; buona parte della fisica classica cerca di spiegare i fenomeni in termini di proprietà primarie (per esempio il suono come vibrazioni di un corpo; la temperatura come movimento di molecole, eccetera). Nel Novecento, la teoria della relatività ha addirittura unificato le idee di spazio e tempo, e le cosiddette teorie unitarie cercano di interpretare tutti i fenomeni in termini di spazio-tempo.

[2] Abbiamo toccato uno dei nodi più importanti della gnoseologia: le idee generali e le conoscenze sono già in noi (innatismo) o sono acquisite attraverso i sensi (sensismo)? Oggi prevale una interpretazione intermedia: esse si formerebbero tramite successive interazioni fra le strutture mentali e i dati dell'esperienza. Ha una particolare importanza il linguaggio: lingue diverse possono portare a diverse "classificazioni del mondo".

«Le conoscenze prime [i concetti] sono senza figura e senza forma ... ; le ultime [quelle sensibili] agiscono mediante gli organi dei sensi, ... e mutano con i loro oggetti. ... L'immaginazione occupa la posizione intermedia ... Tutto quello che concepisce è impronta e forma di pensiero; ed essa pensa il circolo sotto specie dimensionabile, puro di materia esterna, ma in possesso della materia intelligibile che è insita in essa; ed è per questo che non c'è in essa un unico circolo, come non ce n'è uno nelle cose sensibili ...» (52-53)

Oggi si parla di *immagini mentali*:

«La loro caratteristica principale sta nel fatto che a esse non corrisponde in quel dato momento nessun particolare stimolo esterno. Sono un prodotto della mente o una rievocazione della memoria. Proviamo a chiudere gli occhi e a immaginare un cubo e un piano luminoso, o una lama, che lo taglia. Quest'immagine può essere statica, nel senso che riusciamo a evocare solo una sezione del cubo, ma può essere anche dinamica, nel senso che siamo in grado di produrre con continuità sia una, sia diverse sezioni del cubo ...» (Pellerey 1984)[3]

Converremo di chiamare queste immagini *figure geometriche*: esse sono idealizzazioni dell'esperienza sensibile, e in quanto tali possiamo dare a esse quei caratteri di esattezza che gli oggetti materiali non possono avere: un disco non sarà mai un cerchio perfetto, se non altro perché ha uno spessore: invece nella nostra immaginazione possiamo attribuirgli due sole dimensioni, se ci interessano solo queste, e possiamo immaginarlo perfettamente circolare.

Un discorso analogo si può fare per le *trasformazioni geometriche*: un movimento effettivo deforma un pochino gli oggetti, ma noi possiamo idealizzarlo in modo che nella nostra immaginazione le distanze siano conservate; analogo discorso si può fare per l'immagine speculare di un foglio. La fotografia di una facciata, presa di fronte, si idealizza in una trasformazione che non conserva le distanze, ma che mantiene i loro rapporti; presa di scorcio, in una trasformazione che conserva gli allineamenti.

---

[3] A mio avviso ci sono anche delle rappresentazioni mentali non visualizzabili come lo sono un cerchio o un cubo: pensiamo alla capacità che abbiamo di muoverci nella nostra città, che non è legata a una rappresentazione visiva diretta, ma piuttosto a un sistema di rappresentazioni visive (quelle d'un angolo fra due strade, d'una casa, ...: forse si tratta a volte di rappresentazioni a livello inconscio), e a una sorta di loro coordinamento.

4. I concetti geometrici

Oltre il livello della immagini mentali, c'è quello dei concetti geometrici, che Proclo chiamava delle "conoscenze prime", mentre oggi si sarebbe piuttosto portati a chiamarlo "il terzo livello": si tratta delle "idee generali", come quella di rettangolo, o anche di isometria. A questo proposito, occorre stare attenti ad alcuni abusi di linguaggio, che nella pratica comune possono risultare tollerabili, ma che in particolari circostanze conducono a gravissimi fraintendimenti. La questione non riguarda solo la geometria, ma proprio in ambito geometrico si rischia di più.

Perché Proclo parla di conoscenze prime? Secondo la filosofia di Platone, si tratta di idee, esistenti in modo indipendente dalla nostra mente: le cose sensibili ne sono in qualche modo copie imperfette, vengono 'dopo' (si pensi al 'mito della caverna'). In questa prospettiva, la ricerca matematica è *scoperta* di questa realtà ultrasensibile. Si parla di *realismo delle idee.*

Secondo Aristotele, le idee generali sono nella natura stessa degli oggetti: per esempio, la "cavallinità" è quel tanto che permette di dire che un certo pezzo di materia è un cavallo e non qualcosa d'altro. Questa concezione non è probabilmente atta a spiegare la natura degli enti "ideali", come quelli matematici. Sia Platone che Aristotele riconoscono comunque carattere di necessità alle idee generali: esse descrivono la natura del mondo. Questa discussione è anche nota come "il problema degli universali"[4].

Una corrente sviluppatasi nel medioevo ritiene che gli universali non siano altro che parole, *nomi* (comuni): si parla perciò di *nominalismo*. Sembrerebbe che questo punto di vista non abbia nulla a che fare con la matematica: invece la più diffusa concezione della matematica del Novecento è di stampo nominalista.

Vicino al filone nominalista (soprattutto in quanto esalta anch'essa l'importanza degli individui) si è sviluppata, a partire dalla scolastica inglese, soprattutto con Guglielmo da Ockham, una corrente che fu detta *terminismo*, ma che oggi si può meglio chiamare *costruttivismo*. Il filosofo empirista John Locke scriveva:

«... il *generale* e l'*universale* non appartengono all'esistenza reale delle cose, ma sono invenzioni e creature dell'intelletto, fatte per il suo uso, e riguardano solamente i segni, siano parole o idee.»

Il nostro spirito è quindi libero di costruire delle idee generali: in alcuni ambiti come, per esempio, le scienze naturali, esso deve fare i conti con i dati

[4] Siamo in presenza di una questione sulla natura di certe entità, e quindi di un problema *ontologico* (l'ontologia è la filosofia dell'essere in quanto tale).

dell'esperienza, e quindi si tratta di una "libertà limitata"; ma in matematica, operando solamente su enti ideali, esso è (quasi) del tutto libero di porre "insieme" degli oggetti sotto uno stesso concetto. I termini della geometria tradizionale non sono quindi gli unici possibili; si possono *inventare* delle altre classi (cfr. per es. l'articolo di Neubrand sull'invenzione di alcuni nuovi tipi di quadrilateri).

Secondo questo punto di vista, dai dati dei sensi noi ricaviamo delle immagini mentali; queste sono gli *individui* dei quali si interessa la geometria; essa costruisce poi delle *specie* raccogliendo sotto uno stesso criterio, uno stesso *concetto*, individui diversi: quest'ultimo passo è un esempio di *astrazione*.

Come avviene questo "raccogliere assieme"? Se gli individui sui quali si opera sono in numero finito, potrebbe avvenire indicando esplicitamente quelli che si vogliono raccogliere. Di solito, si segue un certo criterio: questo può essere implicito: per esempio, nella figura 1 sono segnati i rettangoli (entro la linea continua), ed entro la linea tratteggiata un'altra classe di figure (che cosa hanno di speciale queste fra tutte quelle disegnate?)

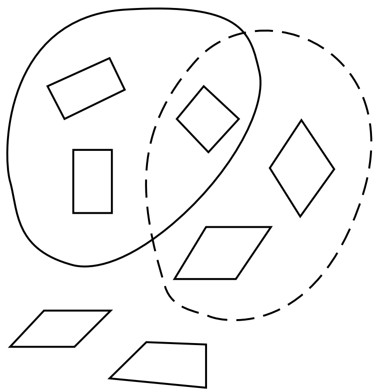


fig 1

Le immagini mentali che ci suggerisce l'esperienza sono influenzate dalle nostre conoscenze di geometria astratta: per esempio, un foglio di carta viene immaginato come limitato da linee diritte, senza spessore e perfettamente piano perché ci siamo abituati a immaginare oggetti geometrici cosiffatti (per esempio, i rettangoli).

I concetti geometrici (almeno quelli più semplici) sono indissolubilmente legati a rappresentazioni, a immagini mentali: Fischbein parla di *concetti figurali*. Tuttavia sarebbe troppo semplicistico associare a un concetto una ben determinata figura: quale sarebbe la figura tipica del "triangolo"? Una sola figura per ogni concetto diventa uno *stereotipo*, per esempio quando un rettangolo viene rappresentato in modo pressoché costante con i lati più lunghi orizzontali (Gallo). Gozzano pensa che a un concetto generale si associ una "figura vaga", in grado di diventare più precisa quando il concetto si specializza. Comunque, come appare dalle considerazioni precedenti, a un concetto va collegata piuttosto una collezione di figure abbastanza rappresentativa, che ci consenta, di fronte a una figura "nuova", di riconoscere se essa rientra o no nel concetto.

Se su questo punto vogliamo essere precisi, dovremo dare una *caratterizzazione* dell'insieme delle figure in questione (si parla anche di "trovare una proprietà caratteristica"). Si tratta cioè di indicarne una *definizione* usando parole appropriate, prese dal linguaggio geometrico: come si vede, la definizione non è il punto di partenza per la conoscenza di una specie di figure, ma anzi ne è il punto di arrivo, quello che porta gli allievi già addentro allo stadio del "pensiero formale" (nel senso di Jean Piaget).

Vorrei far osservare come la scelta fra una soluzione o l'altra del problema degli universali sia significativa anche ai fini della didattica. Un realista è portato a ritenere che la classificazione di un campo del sapere sia qualcosa di necessario; un costruttivista si sente libero di inventare, anche se solo in forma provvisoria, nuove classificazioni. Mi sembra invece poco significativa, finché la matematica è a un livello intuitivo, la concezione nominalista.

5. La crisi degli incommensurabili e il carattere astratto della matematica

In questo paragrafo iniziamo un discorso storico, basato su testimonianze indirette ma abbastanza sicure (della matematica egiziana e soprattutto di quella babilonese abbiamo testi originali, ma che ci dicono poco sul pensiero matematico di quelle civiltà; invece dei testi greci abbiamo purtroppo solo copie molto più tarde, anzi per quelli più antichi solo testimonianze indirette, ma che ci permettono di fare delle congetture sul pensiero matematico dell'epoca).

A partire dal 6° secolo a. C. fiorì nella Magna Grecia la scuola pitagorica, che fu assieme una scuola di pensiero matematico e filosofico, una setta religiosa e un movimento politico. Si ritiene che in una prima visione del mondo i pitagorici pensassero che le figure sono composte da un numero finito di punti (influenzati forse dai granelli della sabbia sulla quale usavano tracciarle). "Misurare" una linea significherebbe allora contare i suoi punti: le lunghezze di due linee si potrebbero sempre esprimere come il rapporto di due numeri naturali (i pitagorici avevano una passione per i rapporti 'razionali': essi studiarono i suoni prodotti da corde che fossero in certe proporzioni).

L'idea fu probabilmente un "ostacolo epistemologico" quando fu necessario pensare le figure come dei 'continui': ma quest'altra concezione è stata di ostacolo alla costruzione delle "geometrie finite", che nel Novecento hanno assunto una notevole importanza. Secondo Gaston Bachelard (1938), un ostacolo epistemologico è rappresentato da una conoscenza ben organizzata, avente una sua validità, contro la quale bisogna combattere per costruire una nuova conoscenza:

«si conosce *contro* una conoscenza anteriore, distruggendo le conoscenze mal fatte ...»

Nell'insegnamento/apprendimento, può corrispondere a esso un *ostacolo didattico*, che funziona più o meno allo stesso modo.

Grande fu lo scandalo quando si "scoperse" (probabilmente durante il 5° secolo) che in geometria vi sono segmenti incommensurabili, le cui lunghezze non si possono cioè esprimere come rapporto di numeri interi. Questo accade, per esempio, per una diagonale e un lato d'un quadrato. Seguendo le indicazioni di Aristotele, supponiamo che tale rapporto sia p/q, dove possiamo supporre che i numeri p, q siano primi fra loro. Il quadrato costruito sulla diagonale ha area doppia del quadrato dato, quindi

$$(p/q)^2 = 2, \text{ cioè } p^2 = 2q^2 .$$

Quindi p è un numero pari, e q (che non ha fattori comuni con p) è dispari. Possiamo porre $p = 2r$, e quindi

$$4r^2 = 2q^2 \ , \quad \text{cioè} \quad q^2 = 2r^2 .$$

Allora q sarebbe pari, contrariamente a quanto s'era visto. Non esiste quindi un numero razionale il cui quadrato sia 2, cioè che sia il rapporto fra diagonale e lato.

Intanto questo risultato distrusse l'idea di uno "spazio atomico". Ma le sue conseguenze (o forse meglio il clima intellettuale in cui esso poté formarsi e sviluppare delle conseguenze) andarono ben più in là. Qualsiasi "tiratore di corde" egizio (l'espressione è attribuita a Democrito) era capace di misurare lato e diagonale, e dire che il rapporto è, più o meno, 1,4. Anzi, su una tavoletta babilonese che risale a circa il 1800 a. C. è segnato tale rapporto con una precisione (nella nostra notazione) di cinque (anzi 'quasi' sei) cifre decimali.

Dire che tale rapporto *non esiste* fu un atto di coraggio intellettuale (anche perché andava contro convinzioni radicate a proposito della bellezza dei numeri); fu il riconoscimento esplicito che gli oggetti della geometria sono entità ideali; fu un atto di fiducia nella ragione, che permette di scoprire dei segreti che sfuggono ai sensi; segnò il prevalere, nella matematica greca, della geometria sull'aritmetica e l'algebra. Infatti, con i numeri razionali non è possibile dominare la complessità dei rapporti geometrici; i greci infatti non arrivarono a esplicitare l'idea di numero irrazionale nel nostro senso (per esempio, scrivendo qualcosa come $\sqrt{2}$). Eudosso (nella prima metà del IV secolo) definì la relazione di proporzionalità fra grandezze

"**a** sta a **b** come **c** sta a **d**"

così

"per ogni coppia m,n di numeri naturali,

$m\mathbf{a} < n\mathbf{b} \Leftrightarrow m\mathbf{c} < n\mathbf{d}, \quad m\mathbf{a} = n\mathbf{b} \Leftrightarrow m\mathbf{c} = n\mathbf{d}, \quad m\mathbf{a} > n\mathbf{b} \Leftrightarrow m\mathbf{c} > n\mathbf{d}$".

Si può allora dimostrare che le lunghezze d'un lato e quella d'una diagonale, in due diversi quadrati, sono proporzionali; quello che noi chiamiamo $\sqrt{2}$

viene sostanzialmente trattato da Euclide come la coppia diagonale-lato d'un quadrato; l'algebra viene espressa in forma geometrica.

Ma l'impatto della 'crisi' fu anche più profondo: probabilmente fu l'atto d'inizio del razionalismo greco, che ebbe in Parmenide e poi in Democrito e in Platone i suoi massimi esponenti. Platone rimproverava alla maggioranza degli Ateniesi di non conoscere che cosa fossero le grandezze incommensurabili. Si può ben dire che questa crisi ebbe un carattere rivoluzionario (cfr. più sopra).

6. Le trattazioni assiomatiche della geometria

L'Accademia di Platone era un luogo di studio e dibattito filosofico e scientifico. In essa fu elaborata la teoria delle proporzioni (cfr. § 5) e, sempre ad opera di Eudosso, il primo sistema cosmologico che tenesse conto di come si vedono muovere i pianeti. All'epoca di Platone i matematici greci discutevano su alcuni problemi geometrici, per esempio:

trovare una costruzione che permetta di dividere qualsiasi angolo in tre parti uguali;

trovare un segmento lungo quanto una circonferenza di raggio dato;

dato un cubo, trovarne un altro di volume doppio (l'analogo problema della duplicazione d'un quadrato si risolve in modo elementare: vedi più sopra).

I matematici greci cercavano delle soluzioni teoricamente esatte, e la cui correttezza fosse provabile: quindi avevano già l'idea che gli enti matematici fossero enti ideali (cfr. più sopra). Per esempio, quando si tratta di rettificare una circonferenza, non interessa trovare un segmento la cui lunghezza **s** differisca da quella **c** della circonferenza tanto poco da non essere rilevabile con gli strumenti più precisi che si hanno a disposizione: **s** deve essere esattamente uguale a **c**. Alcune soluzioni dei problemi indicati erano state trovate, esse richiedevano però l'uso di curve non elementari. Sembra sia stato Platone a chiedere che i problemi si dovessero risolvere facendo uso solo di una *riga (a un solo bordo, e non graduata)* e di un *compasso*. In linea di massima si può vedere in queste limitazioni un'aspirazione estetica, che ancor oggi si trova in certe discipline sportive; più precisamente l'appello alla riga e al compasso significa utilizzare solo "linee elementari", le rette e le circonferenze.

La crisi delle grandezze incommensurabili certamente convinse i matematici della necessità di usare metodi rigorosi per studiare la geometria. Ci sono testimonianze secondo le quali, nell'Accademia di Platone, circolavano dei testi del tipo "Elementi di geometria", che fondavano (o cercavano di fondare) razionalmente la geometria.

Secondo un progetto ideale che si può rintracciare nei *Dialoghi* di Platone, bisogna sapere di che cosa si parla, e ragionare correttamente. Di qui due esigenze:

a) *definire* le parole, i concetti, che si utilizzano,

b) *dimostrare* le affermazioni che su di essi si vogliono fare.

a) Per esempio: *quadrato* è un rettangolo con i lati uguali; *rettangolo* è un parallelogramma con gli angoli retti; *parallelogramma* è un quadrilatero con i lati opposti paralleli; e così via. Per definire un concetto si fa ricorso ad altri concetti, di regola più generali (ci sono anche parole che indicano relazioni, come "*parallele*" o "*uguali*"). Naturalmente, non si può, per esempio, utilizzare "quadrato" per definire "parallelogramma", perché ormai il concetto di quadrato "si appoggia" a quello di parallelogramma (come si dice, non sono ammessi "circoli viziosi"); né si può ammettere un rinvio "all'infinito".

b) Se cerchiamo di dimostrare una proposizione A, dovremo utilizzare certe altre affermazioni B, C, ... Ma allora dobbiamo dimostrare anche queste; e nel farlo dovremo utilizzare altre proposizioni D, E, ... (non A, perché altrimenti la certezza di A si fonderebbe su quella di B, e quella di B su A: la certezza non si raggiungerebbe) Platone sperava di poter dedurre tutto il sapere da un 'principio primo'; Aristotele, che frequentò l'Accademia finché visse Platone, fu meno ambizioso: capì che alla base di una scienza bisogna mettere dei "principi", alcuni dei quali sono comuni a tutte, e altre sono specifici di quella:

«sarà ... necessario che la scienza dimostrativa si costituisca sulla base di premesse vere, prime, immediate, più note della conclusione, anteriori a essa, e che siano cause di essa ... un sillogismo [cioè un ragionamento formale] potrà sussistere anche senza tali premesse, ma una dimostrazione non potrebbe sussistere, perché allora non produrrebbe scienza. ... Il conoscere - non accidentalmente - gli oggetti la cui dimostrazione è possibile, consiste nel possederne la dimostrazione».

Può sembrare strano che di Euclide, il matematico più influente di tutti, non si conosca praticamente alcun dato biografico. Da alcuni aneddoti nei quali compare il re Tolomeo I d'Egitto si può inferire che viveva ad Alessandria (che aveva sostituito Atene nel ruolo guida della civiltà ellenica) intorno al 300 a. C.: certamente era informato sia della filosofia platonica che di quella aristotelica. La sua opera più famosa, tanto famosa che anche in tempi moderni è seconda solo alla Bibbia per numero di edizioni, è *Gli Elementi*: in essa viene data la sistemazione della matematica di base (geometria piana e solida, aritmetica) nota al suo tempo: però già allora erano noti sviluppi più avanzati che non compaiono nel testo.

Esso comincia con la geometria: anzitutto i *termini*:

Punto è ciò che non ha parti

Linea è ciò che ha lunghezza ma non larghezza né spessore

...

Oggi queste non sono considerate definizioni accettabili, perché, per esempio, bisognerebbe allora definire che cosa sono lunghezza, larghezza e spessore (per questo, oggi si ammette che bisogna accettare alcune parole senza darne la definizione); però fanno intendere che nella trattazione di Euclide gli enti della geometria sono enti ideali, perché nella realtà fisica non esistono oggetti senza larghezza e spessore.

Si passa poi ai cosiddetti "postulati"; il testo dice:

Si chiede che

1) *da ogni punto si possa tracciare una retta a ogni altro punto*;

2) *ogni retta terminata si possa prolungare continuamente, per diritto*[5];

3) *con ogni centro e ogni raggio si possa tracciare una circonferenza*;

4) *tutti gli angoli retti sono uguali*;

5) *se una retta che ne incontra altre due forma con queste, da una stessa parte, due angoli la cui somma è minore di due retti, le due rette, prolungate all'infinito, s'incontrano, da quella parte da cui stanno gli angoli minori di due retti*.

Seguono le "nozioni comuni", che dovrebbero essere comuni a tutte le scienze che trattano di quantità:

1) *Se due cose sono uguali a una terza, esse sono uguali fra loro*

2) *Somme di cose uguali sono uguali*

3) *Differenze di cose uguali sono uguali*

4) *Cose che si possono sovrapporre sono uguali*

5) *Il tutto è maggiore della parte*[6].

L'interesse dei matematici e dei filosofi, per più di duemila anni, si accentrò sul 5° postulato, che non appariva dotato di quella evidenza che dovevano avere i "princìpi"; molti sperarono di dimostrarlo a partire dai rimanenti. Come vedremo, la vicenda si concluse con il riconoscimento della sua indipendenza. Solo verso la fine dell'Ottocento si iniziò una revisione di tutto l'apparato euclideo. Su questo ritorneremo nel seguito.

[5] Se non è specificato, una "retta" per Euclide è "terminata", cioè si tratta di un segmento. I Greci cercavano in ogni modo di evitare l'infinito *in atto,* cioè effettivamente esistente; la *possibilità* di prolungare senza limiti una "retta terminata" è detta invece *infinito potenziale.*

[6] Nell'insegnamento tradizionale si dicono "uguali" figure che oggi si dicono "isometriche" o "congruenti", cioè della stessa forma ed estensione; Euclide chiama invece "uguali" due figure che hanno la stessa estensione. In particolare, tuttavia, per i segmenti e gli angoli "uguali" significa "isometrici".

7. La geometria analitica

Il metodo delle coordinate non è solamente un utile strumento per risolvere problemi geometrici: esso ha influito in modo essenziale sul pensiero matematico e filosofico.

Già Apollonio enunciava alcune proprietà delle coniche interpretabili facilmente in termini di coordinate. Nel Trecento, i fratelli Pietro e Ambrogio Lorenzetti usarono nei loro quadri, in modo sistematico, nella rappresentazione d'interni, pavimenti a mattonelle quadrate che permettono di comprendere subito la posizione d'un personaggio o d'un particolare. Nicolas d'Oresme cominciava già a rappresentare dei fenomeni con qualcosa di simile a un grafico.

René Descartes, detto Cartesio (1596-1650), ebbe l'intuizione dell'importanza gnoseologica del metodo delle coordinate (tanto che la *Géométrie* fu inserita nel *Discours sur la méthode*). Si prefigurava un metodo generale per risolvere problemi scientifici (che infatti ben presto divenne essenziale anche per la fisica).

Si trattò di una specie di 'industrializzazione della matematica': mentre prima occorreva escogitare per ogni problema geometrico un metodo apposito, si era ottenuto un metodo generale. Possiamo lamentarci che questo abbia fatto perdere qualcosa al "sapore" della matematica; ma in una visione equilibrata resta spazio all'"artigianato", vale a dire ha ancora senso cercare di risolvere problemi con mezzi sintetici: sia perché non interessano solo i risultati finali, ma anche i metodi, e inoltre perché alcuni problemi si risolvono più agevolmente con metodi tradizionali.

Si trattò anche di una riunificazione degli ambiti algebrico e geometrico: il primo offre al secondo i suoi metodi (che nel Rinascimento si erano sviluppati in modo autonomo, fino al calcolo letterale); il secondo dà al primo la forza sintetica della visione, per esempio attraverso le rappresentazioni grafiche.

Un'altra conseguenza importante si può leggere nei programmi della scuola media: "studio di figure geometriche delle quali sono assegnate le coordinate di alcuni punti". Nel piano senza coordinate, possiamo fissare una determinata figura, per esempio un poligono mediante i suoi vertici A, B, C, ... Ma A, B, C finiscono per funzionare come *variabili* (simboli che stanno in luogo di punti), e quindi ABC... non è più un *determinato* poligono, ma qualcosa di indeterminato (si rischia allora di confondere individui e concetti: un determinato quadrato e "il quadrato", ...). Questo perché lo spazio geometrico, nell'accezione comune, è *omogeneo*, cioè tutti i punti si equivalgono. Invece, ogni numero ha la sua "personalità", è distinguibile dagli altri; quindi, fissato un sistema di coordinate, anche i punti diventano distinguibili senza ambiguità: per esempio, A(0,1), B(-1,2), ... (fig. 2).

Osservate pure che nel "piano cartesiano" è facile rappresentare figure di tipi determinati (per esempio un rettangolo).

Per Cartesio spazio e materia sono la stessa cosa (non c'è materia senza estensione, ma neppure c'è spazio che non sia occupato da materia): quindi vi è una sostanziale omologazione di fisica e geometria. Con il metodo delle coordinate, Cartesio fa un ulteriore passo, anche se sul piano metodologico: estensione e numeri sono riconducibili l'una agli altri.

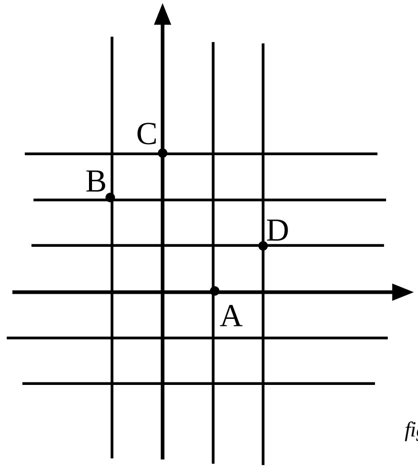


fig 2

Va osservato che Cartesio non introduce gli *assi cartesiani* come si fa oggi: si limita a tracciare l'asse x, e a riportare dai punti di questo dei segmenti di lunghezza opportuna, tutti paralleli (le *ordinate*).

8. Le trasformazioni come criterio per organizzare la geometria: il programma di Erlangen

Le trasformazioni sono oggetti della geometria: si ispirano a fatti fisici (movimenti e deformazioni di oggetti, immagini speculari, ...), ma in ambito geometrico interessano le immagini mentali corrispondenti (che, nel caso di movimenti, deformazioni, ... riguardano solo le posizioni iniziale e finale). Interviene poi la concettualizzazione, che raccoglie trasformazioni diverse in una sola classe. Nei programmi della scuola media alle trasformazioni è dedicato un intero tema: sono esplicitamente indicate alcune di queste classi (le isometrie e le più importanti sottoclassi, le similitudini), insieme a indicazioni per ricondurle all'esperienza.

Nello stesso tema vi sono indicazioni ad altre situazioni concrete, che preludono a nuovi tipi di trasformazioni:

"Osservazione di altre trasformazioni geometriche: ombre prodotte da raggi solari o da altre sorgenti luminose, rappresentazioni prospettiche (fotografie, pittura, ecc.), immagini deformate, ..." (nelle "osservazioni sui contenuti" si parla poi di "concezione dinamica" per suggerire che le trasformazioni geometriche vanno applicate anche allo studio di figure: per esempio, un triangolo isoscele è un triangolo con un asse di simmetria).

Sono qui adombrati nuovi tipi di trasformazioni: le affinità (le "ombre solari"), le proiettività (tutti i tipi di ombre), le trasformazioni topologiche. Per considerarle "in modo dinamico", notiamo che sono rispettivamente al centro di tre "tipi di geometria": la geometria affine, la geometria proiettiva, la topologia.

Storicamente, la più antica di queste è la geometria proiettiva, che trae le sue origini dalla prospettiva, ed è quindi detta "geometria della visione". Le regole della prospettiva matematica, precisate nel Quattrocento a cominciare da Leon Battista Alberti (1404-1472), realizzano, fra l'altro, una proiettività fra una superficie piana e la sua immagine prospettica (fig. 3). La geometria proiettiva fu poi sviluppata in modo sistematico da Gerard Desargues, da Blaise Pascal e da altri dal Seicento in poi. Punti allineati si trasformano in punti allineati, e una retta si trasforma in una retta; rette parallele si trasformano, di solito, in rette concorrenti in un punto (il *punto di fuga* della prospettiva): nella geometria proiettiva, due rette d'un piano si incontrano sempre.

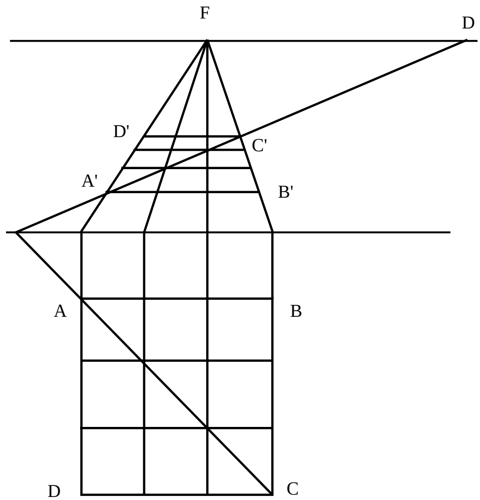


fig 3

Una circonferenza si può trasformare in una conica qualsiasi (ellisse, iperbole o parabola: si osservino le ombre di un *abat-jour*), e quindi non si può parlare di circonferenze in geometria proiettiva. Non si conservano né le lunghezze dei segmenti né i loro rapporti. Introduciamo le coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, in modo che sia

$$x = x_1/x_0\ ,\ y = x_2/x_0\ ;$$

al punto di coordinate (x_1, x_2, x_0) una proiettiva fa corrispondere il punto (x'_1, x'_2, x'_0) tale che

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{10}\,x_0\ , \\ x'_2 &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{20}\,x_0\ , \\ x'_0 &= a_{01}\,x_1 + a_{02}\,x_2 + a_{00}\,x_0\ : \end{aligned}$$

le a_{ik} sono numeri reali a determinante non nullo.

Più recente è la geometria affine, che è la "geometria delle ombre solari", cioè delle proprietà invarianti per proiezioni parallele. Si conserva l'allineamento di punti, e anche il parallelismo di rette; i rapporti fra segmenti non paralleli di regola non si conservano, mentre sono invarianti i rapporti di segmenti ugualmente diretti (fig. 4). Al punto di coordinate cartesiane (x,y) un'affinità fa corrispondere il punto (x',y') tale che

$$x' = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_1,$$
$$y' = a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_2\,,$$

con $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

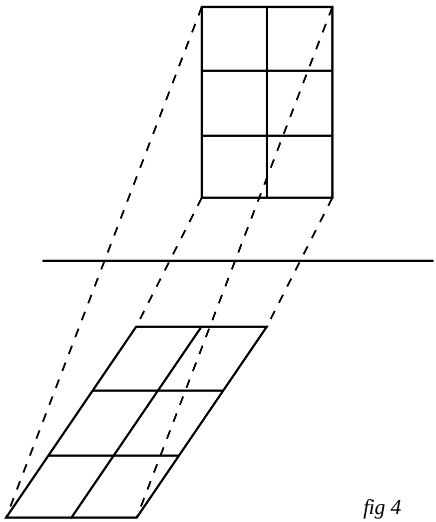


fig 4

La topologia si è sviluppata soprattutto a partire dall'Ottocento (qualche proprietà era nota anche prima, ad esempio la formula F - S + V = 2 che collega i numeri di facce, spigoli e vertici di un poliedro 'normale'). Essa viene detta "geometria della gomma", perché si interessa di quelle proprietà che permangono anche se la figura viene disegnata su un foglio di gomma che poi è stirato o compresso (ovviamente si può pensare anche a specchi deformanti). Per esempio, l'allineamento di punti non si conserva, e quindi non è una proprietà topologica; una linea chiusa non intrecciata divide un piano in una regione interna e una esterna, e questa distinzione ha carattere topologico.

In tutti questi casi, c'è un'idea portante: si tratta di capire come una trasformazione opera sulle figure, anzi addirittura nello spazio: *data questa trasformazione* (per esempio, $x' = 2x + y$, $y' = x - 2y$), *che cosa essa cambia e che cosa lascia invariato?* Si passa poi a considerare classi notevoli: *che cosa lasciano invariato tutte le trasformazioni di questa classe?* (per es., tutte le isometrie, tutte le traslazioni, tutte le proiettività, ...)

Sorgono anche le domande "inverse": *per quali tipi di trasformazioni è invariante questa idea?* Per esempio: per quali trasformazioni è invariante la distanza di due punti? (lo è per le isometrie). Quali trasformazioni trasformano segmenti congruenti in segmenti congruenti? (le similitudini). Quali trasformazioni trasformano parallelogrammi in parallelogrammi? (le affinità). Quali trasformazioni conservano il parallelismo di rette? ...

Si stabilisce così un collegamento fra concetti geometrici (cioè fra tipi di figure, relazioni, ...) e le classi di trasformazioni che li lasciano invariati.

Ci si può chiedere quali classi di trasformazioni possono considerarsi “rilevanti” da questo punto di vista. Vi è una rilevanza pratica: le isometrie, le affinità, le proiettività, ... sono ben note per le loro proprietà, e quindi sono “rilevanti”. Ma c’è una rilevanza più nascosta. Per esempio, proviamo a chiederci quali proprietà sono invarianti per simmetrie assiali (per esempio, lo è la distanza di due punti): se qualcosa è invariante in una simmetria S_1, e anche in una simmetria S_2, sarà invariante anche nel loro prodotto. Ma il prodotto di simmetrie assiali non è una simmetria assiale, possiamo dire che è una isometria; quindi tanto valeva chiedersi se quella tale proprietà è invariante in una isometria. E, messa così la domanda, non ci sono obiezioni, perché componendo due isometrie si ha un’isometria. Quindi

le classi di trasformazioni “significative” per la ricerca dell’invarianza sono quelle chiuse rispetto alla composizione.

Per poter parlare di “chiusura” rispetto alla composizione, è opportuno limitarsi alle trasformazioni che trasformano un piano (o un altro “ambiente”) in sé. Si vede poi che è opportuno chiedere pure che per ogni trasformazione della classe ci sia anche l’inversa: un insieme di trasformazioni di uno spazio in sé, che contenga il prodotto di due qualsiasi suoi elementi e l’inverso d’un suo elemento, si dice un *gruppo* (di trasformazioni). Dunque

le classi significative di trasformazioni, per lo studio degli invarianti, sono i gruppi.

Osserviamo che l’attenzione viene così spostata dalle singole trasformazioni alla loro classe. Possiamo ormai enunciare il punto centrale del programma di Erlangen (dovuto a Felix Klein, 1848-1925):

Una geometria è lo studio delle proprietà invarianti per effetto di un dato gruppo di trasformazioni.

Se il gruppo si chiama G, si parla di “*geometria del gruppo* G” o anche di “G-*geometria*”.

Come abbiamo detto, gli stessi *concetti geometrici* si possono sottoporre ad analisi: quali trasformazioni trasformano rettangoli in rettangoli? (lo fanno le similitudini, ma non le affinità.) Quali trasformazioni lasciano invariata la classe dei parallelogrammi? Per esempio, poiché la geometria affine si occupa delle proprietà invarianti per affinità, il concetto di rettangolo non ha senso nella geometria affine (mentre è ammissibile quello di parallelogramma): *i concetti geometrici sono dunque relativi , nel senso che possono avere “diritto di cittadinanza” in una geometria e non in un’altra.*

Ecco perché si può dire che non esiste una sola geometria, che la geometria è “relativa”. Questo “relativismo” è temperato da un fatto, che analizziamo partendo da un caso particolare, ma importante.

Prendiamo la geometria euclidea metrica, quella del gruppo delle isometrie (si può parlare di segmenti congruenti, di circonferenze, di parallelogrammi, ..., in generale di concetti, di proprietà *invarianti per isometrie*). Prendiamo poi la geometria affine, quella del gruppo delle affinità (si può parlare di parallelogrammi, di ellissi, di rette parallele..., in generali di concetti, di proprietà *invarianti per affinità*). Le isometrie sono particolari affinità (se facciamo l'ombra solare d'una figura piana su un piano parallelo, la corrispondenza è un'isometria). Allora, tutto quello che è invariante per affinità lo è anche per isometrie: quindi, tutto quello che fa parte della geometria affine è rintracciabile anche nella geometria euclidea metrica: per esempio, anche in quest'ultima si può parlare di parallelogrammi, di ellissi, di rette parallele, ...

In generale: siano dati due gruppi G, H, tali che G sia contenuto in H: tutto quello che è invariante rispetto ad H, lo è anche rispetto a G. Dunque, la geometria di H è contenuta in quella di G. Tornando all'esempio precedente (G gruppo delle isometrie, H gruppo delle affinità): le proprietà della geometria affine sono rintracciabili anche nella geometria euclidea.

Anzi, il gruppo delle isometrie è contenuto (salvo qualche precisazione che per semplicità omettiamo) in tutti i gruppi "classici", quelli delle geometrie più note; quindi basterebbe studiare la geometria euclidea per avere anche queste.

Perché allora studiare anche "le altre" geometrie?

Una prima risposta immediata è: perché, per esempio, le proprietà, le affermazioni della geometria euclidea sono molte di più di quelle della geometria affine; queste ultime sono, per così dire, soffocate dalle altre: e bisognerebbe controllare le proprietà metriche per vedere se sono invarianti per affinità. Ma questa risposta è riduttiva: essa presuppone che la matematica sia solo un insieme di affermazioni. Invece, una teoria matematica (qui, una geometria) deve essere vista anche come "sistema", almeno per quanto si differenzia da sistemi analoghi, e per quanto interagisce con essi: si spiega così perché è giusto studiare ogni geometria "importante" in modo autonomo.

Klein suggerisce inoltre come fare interagire le geometrie. Dato un piano affine, chiamiamo *punto improprio* d'una retta la sua direzione (quello che hanno in comune rette fra loro parallele): il punto improprio della retta $ax + by + c = 0$ ha coordinate omogenee $(b, -a, 0)$. I punti impropri formano la retta impropria: aggiungendo questa al piano ordinario, si ottiene il piano proiettivo. Viceversa, dato un piano proiettivo, si ottiene un piano affine togliendogli una retta.

Particolare importanza assume il gruppo, diciamolo P, delle proiettività, che porta alla geometria proiettiva. Allora le affinità (piane) si possono considerare come le proiettività che lasciano invariata una retta, che funziona da retta impropria.

Le similitudini si possono caratterizzare come le affinità che lasciano fissa una coppia di "punti complessi", i punti ciclici I, J: essi sono i punti impropri di ogni circonferenza [in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale le loro coordinate omogenee sono (1, $\pm i$, 0)]. Si può definire "in linguaggio proiettivo" anche la perpendicolarità di due rette. Nella figura 5, C è una circonferenza, K una parabola (una conica tangente alla retta impropria).

Il programma di Erlangen permette di operare simultaneamente con diverse geometrie, un po' come se fossero dei registri d'uno stesso strumento musicale: è un potente strumento per capire la geometria a un livello di "intuizione superiore" (o "raffinata", come la chiamava lo stesso Klein).

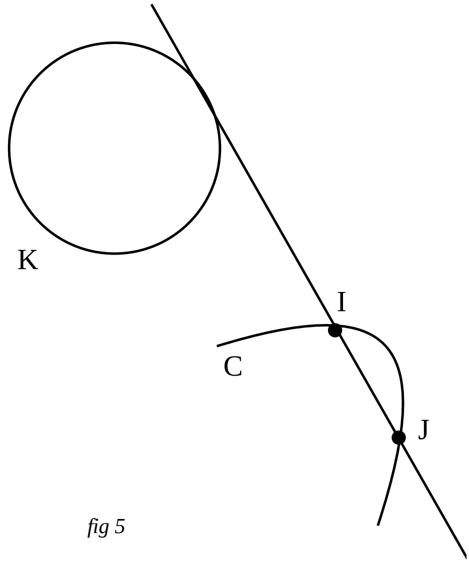


fig 5

9. Il 5° postulato di Euclide e la geometria non euclidea

Euclide sembra piuttosto prudente nel presentare il suo sistema: "Si chiede che ...". Tuttavia, fin dall'antichità la geometria di Euclide fu considerata un modello di scienza sicuramente vera, perché fondata su principi evidenti (gli assiomi) e su regole logiche sicure. Il 5° postulato suscitava però qualche dubbio: lo stesso Euclide ne rimanda l'applicazione fino a quando non può farne a meno, anche a costo di enunciare una proprietà più debole di quella che potrebbe dedursi dal 5° postulato. Molti cercarono di "emendare" Euclide cercando:

o di dimostrare il 5° postulato a partire dagli altri,

oppure di sostituirlo con una affermazione equivalente che fosse più accettabile.

Sono date due affermazioni A, B, e un blocco di altri assiomi, diciamo X; dire che (ammessi gli assiomi X) A e B sono equivalenti significa questo: da X e da A si può dimostrare B, e da X e B si può dimostrare A. Una versione equivalente del 5° postulato (ammessi gli altri assiomi) è il cosiddetto postulato della parallela:

5*) *Per un punto* P *passa una sola parallela a una retta* r *data (non passante per* P).

Anzi, basta ammettere che la parallela sia unica: con i rimanenti assiomi si può costruire una parallela (*Elementi,* libro I, prop. 28). Altre affermazioni equivalenti sono

Esistono figure simili e non isometriche.

La somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto (basta che questo accada per *un* triangolo).

Esiste un triangolo di area comunque grande.

Esiste un rettangolo.

Sono *evidenti* queste affermazioni? Che cosa è *evidente*?

Più ambiziosi erano i tentativi di dimostrare il postulato; ma questi fallirono tutti (anche se molti credettero d'esservi riusciti). Per "salvare la certezza" della matematica e della meccanica, il filosofo Immanuel Kant pensò che i principi di queste scienze fossero condizioni necessarie per il funzionamento della nostra mente (torneremo nel seguito su questa idea). Ma la scienza non si lascia facilmente imbrigliare dai sistemi filosofici. Nei primi anni dell'Ottocento, cominciò a farsi strada l'idea che il 5° postulato fosse indimostrabile, anzi che si potesse sviluppare una geometria, che alcuni chiamarono "immaginaria", e poi fu detta "non euclidea" (brevemente, GNE). In essa, non è vero che per un punto passa una sola retta parallela a una retta data. La studiarono Karl Friedrich Gauss (1777-1855) (che però non pubblicò le sue ricerche perché non voleva entrare in polemiche con i seguaci di Kant), Janos Bolyai e Nikolai Lobacevskij: questi ultimi più o meno contemporaneamente pubblicarono testi nei quali esplicitamente si assume il postulato "non euclideo", e in qualche modo si sviluppa una 'sensibilità non euclidea'.

Ma come si può decidere se ha ragione Euclide o Gauss–Bolyai–Lobacevskij?

Il metodo classico sarebbe quello di trovare in ciascuna geometria sempre nuovi teoremi, finché in una di esse non si trova una contraddizione, cioè fino a dimostrare un teorema *T* e anche il teorema non-*T*. È quello che cercò di fare Girolamo Saccheri (1733), riuscendo a mostrare una contraddizione nell'ipotesi "non esistono per P rette parallele a *r*"; ma senza trovarla effettivamente nell'ipotesi "esistono per P molte rette parallele a *r*". Che fare se una contraddizione non si trova?

Affronteremo nel prossimo paragrafo in un modo del tutto diverso. Questo potrà essere utilizzato per una presentazione "pre-razionale" della geometria non euclidea.

10. Costruiamo la geometria “dal basso”

Nel § 6 abbiamo visto come si imposta una trattazione deduttiva della geometria, secondo lo stile euclideo; in sostanza, ci si basa su principi fondamentali (gli assiomi), in modo analogo a un popolo al quale viene data una costituzione sulla quale basare i propri comportamenti.

Ma l’analogia politica potrebbe funzionare anche in modo diverso. Può accadere che un popolo non abbia una costituzione precisa, e che comunque abbia dei comportamenti riconoscibili; allora a un legislatore si potrebbe affidare il compito di scrivere una costituzione sulla base dei comportamenti dei cittadini. Tornando alla matematica, si tratta di osservare un sistema di enti, di stabilire a buon senso alcune loro proprietà, e di risalire da queste a un sistema di assiomi.

Verso la fine dell’Ottocento, è stato pubblicato un breve romanzo, “Flatlandia”, il cui autore, Abbott, immagina un popolo di figure bidimensionali che vivono in un piano. La costituzione di Flatlandia è basata sugli assiomi euclidei del piano (con alcune spiritose aggiunte, come la regola per la quale il figlio maschio di un poligono regolare è un poligono regolare con un lato in più, il che gli conferisce un maggior prestigio sociale). Un bel momento un essere dello spazio tridimensionale, una sfera, si mette in comunicazione con uno di tali esseri, A. Quadrato, e riesce a convincerlo dell’esistenza della terza dimensione, facendogli vedere il suo mondo “dal di fuori”. Il povero quadrato ha però due gravi delusioni: i suoi concittadini, quando cerca di convincerli delle sue nuove convinzioni, lo prendono per matto; e quando con una geniale intuizione dice alla sfera “ma come tu mi hai insegnato la terza dimensione, così qualche essere superiore potrà insegnarti la quarta dimensione”, si prende un rimbrotto: “non c’è niente oltre la terza dimensione!”.

È stato immaginato un altro mondo, Sferolandia, i cui abitanti sono esseri bidimensionali su una superficie sferica (non come noi sulla Terra, che ci innalziamo sopra di essa). La luce in Sferolandia segue la curvatura della sfera; un SEGMENTO è il più breve cammino fra due PUNTI, una RETTA è una linea prolungamento d’un SEGMENTO, cioè una circonferenza massima della superficie sferica; un’ISOMETRIA è una rotazione della sfera su se stessa (scriviamo in MAIUSCOLO le parole quando le intendiamo come gli abitanti di Sferolandia).

Noi non conosciamo la costituzione di Sferolandia: però sia noi che i suoi abitanti ci accorgiamo che due RETTE si incontrano in due punti diametralmente opposti A, A’ (gli “antipodi”: fig. 6). Sono negate alcune regole fondamentali di Euclide: due RETTE si incontrano in due PUNTI; una RETTA è una linea chiusa; non esistono RETTE PARALLELE. Invece, per due PUNTI non antipodi A, B passa una sola RETTA. Altri concetti euclidei si trasportano facilmente a Sferolandia: si può parlare di RETTE PERPENDICOLARI (pensate all'equatore e a un meridiano della superficie terrestre); di DISTANZE (che si misurano come angoli: per esempio, Roma dista circa 42° dall'equatore, Milano circa 45°); di CIRCONFERENZE (sulla superficie terrestre, tali sono per esempio i paralleli); di POLIGONI, ...

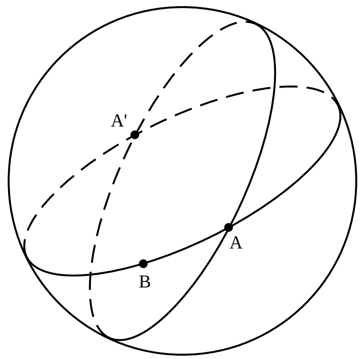


fig 6

Immaginiamo che gli abitanti di Sferolandia, per avvicinarsi alla costituzione di Flatlandia, decidano di modificare il loro mondo: prendere in considerazione solo un emisfero, o, il che è lo stesso, "identificare" i punti che si trovano agli antipodi l'uno dell'altro. Una RETTA resta però una linea chiusa. I matematici chiamano questo mondo "piano ellittico" o "modello di Riemann": in esso esistono TRIANGOLI con tre ANGOLI retti: (pensate al solito alla superficie terrestre); anzi, ingrandendoli un po', si trovano TRIANGOLI con tre ANGOLI ottusi. In ogni caso, la somma delle ampiezze degli ANGOLI d'un TRIANGOLO è maggiore di 180° (ed è tanto maggiore quanto più grande è l'area del triangolo).

Felix Klein ha immaginato (nel 1868) un altro mondo, che si realizza all'interno d'una circonferenza *C*; le RETTE sono le corde di questa (fig. 7). Un'ISOMETRIA è una proiettività che trasforma *C* in sé, e la regione interna a *C* in sé. La DISTANZA di due punti è espressa da una formula, in base alla quale un SEGMENTO che scorre su una RETTA avvicinandosi a *C* e conservando la sua LUNGHEZZA è visto da noi come se si rimpicciolisse oltre ogni limite. Maurits Escher ha eseguito una serie di incisioni (*Limite circolare*) basate su un mondo non troppo diverso da quello di Klein.

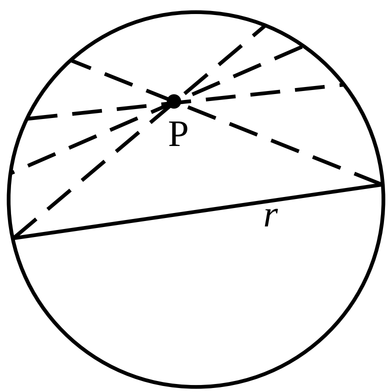


fig 7

Si constata immediatamente che nel modello di Klein (che i matematici chiamano "piano iperbolico") per un PUNTO passano infinite RETTE PARALLELE a una RETTA data. Tutti gli altri assiomi di Euclide sono verificati (anche quelli che Euclide non aveva esplicitato, e che furono precisati alla fine dell'Ottocento). Si può provare che la somma delle ampiezze degli ANGOLI d'un TRIANGOLO è minore di 180°.

Immaginiamo ora di essere catapultati in un mondo, che potrebbe essere Flatlandia, o il piano ellittico, o il piano iperbolico. Come facciamo a sapere in quale dei tre ci troviamo?

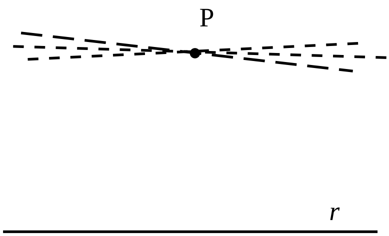


fig 8

La risposta, già intuita da Gauss e chiaramente espressa dal suo allievo Bernhard Riemann (1826-1866), affida all'esperienza la decisione. La geometria si presenta in questo modo come una scienza sperimentale.

C'è qualche complicazione. Per esempio, l'assioma della parallela non è controllabile direttamente: noi possiamo segnalare certamente delle rette che passano per P e incontrano *r* ; ci sono rette delle quali si può pensare che incontreranno *r* fuori del foglio (fig. 8), ma come facciamo a controllare, per esempio, che per una certa retta l'incontro avviene, a un milione di anni luce di distanza?

Possiamo però sottoporre a controllo una conseguenza dell'assioma, per esempio una di quelle affermazioni che abbiamo segnalato come equivalenti all'assioma. La misura degli angoli d'un triangolo potrebbe allora essere il test per decidere quale è la geometria dello spazio fisico: se la somma delle ampiezze è esattamente 180° lo spazio è euclideo, se è minore è iperbolico, se è maggiore è ellittico (è interessante il fatto che basta fare il controllo su un solo triangolo, perché valga per qualunque altro). Ma sono inevitabili errori di misura. Immaginiamo che l'incertezza sia di 1'. Se la somma risultasse, per esempio, 179° 58' saremmo certamente nel caso iperbolico; se risultasse 180° 2' saremmo nel caso ellittico; fra 179° 59' e 180° 1' saremmo nell'incertezza: *sperimentalmente non è possibile 'provare' che lo spazio è euclideo, anche se lo fosse.*

11. La nuova idea di geometria

Osservate la diversità fra i due modi di decidere la questione “è giusta la geometria euclidea (GE) o quella non euclidea (GNE)?”: diciamo così uno logico e l’altro fisico. Questo rompe una millenaria tradizione, che (grazie al principio dell’evidenza degli assiomi) pensava di poter conoscere la realtà con i soli mezzi della ragione. Con il metodo fisico, la certezza resta subordinata ai risultati dell’esperienza, che potrebbero dare risultati diversi (per esempio, con strumenti più precisi); con il metodo logico, non importa più la verità delle affermazioni, ma solo la loro coerenza (che non ci siano contraddizioni).

Verso il 1870 anche l’idea di far cadere la GNE “pescandola in contraddizione” si rivelò illusoria: ciò avvenne proprio grazie al “modello di Riemann” e al “modello di Klein”. Essi sono stati realizzati entro lo spazio euclideo: i loro CONCETTI fondamentali si possono descrivere con parole della GE (per esempio, nel modello di Klein RETTA si traduce in “corda di *C*”).

Pensiamo ora a una qualunque affermazione di GNE, che parlerà di PUNTI, RETTE, ... Essa si può tradurre in una affermazione di geometria euclidea, facendo alla rovescia la “traduzione”. Se vi fosse una contraddizione nella GNE, questa si tradurrebbe in una contraddizione nella geometria euclidea, e quindi anche questa sarebbe contraddittoria!

Questa possibilità di interpretare liberamente gli oggetti geometrici ha aperto un’altra possibilità, quella che si può chiamare la liberazione dai riferimenti concreti. È l’altro aspetto della geometria, quello che è stato più ricco di conseguenze: fra l’altro, ben presto si è compreso che nessun principio della geometria, e non solo il 5° postulato, poteva godere di una sicurezza assoluta. Anzi, ci si rese conto che gli assiomi elencati da Euclide sono insufficienti per costruire la teoria, che Euclide ammetteva senza accorgersene alcuni assiomi nascosti. Le lacune maggiori si riferiscono all’ordine con il quale si susseguono i punti d’una retta; in particolare, Moritz Pasch si accorse che Euclide ammette che

dato un triangolo, se una retta che non passa per alcuno dei suoi vertici incontra uno dei lati, essa ne incontra almeno un altro.

Prima della fine dell’Ottocento, erano stati proposti diversi sistemi assiomatici che permettono di costruire la geometria euclidea. Il sistema più celebre è quello di Hilbert (1899), che ha diversi pregi: intanto, fra i suoi assiomi si possono rintracciare molti di quelli di Euclide (qualcuno parla di assiomatica di Euclide-Hilbert); inoltre, i termini primitivi e gli assiomi sono organizzati in blocchi, in modo che, ammettendone solo alcuni, si può avere la geometria piana; o anche la geometria affine (piana o spaziale), o addirittura una variante di quest'ultima, detta "geometria affine grafica". Ecco gli assiomi di questa (per il piano), in una forma molto prossima a quella di Hilbert:

Se A, B sono due punti, c'è sempre una sola retta alla quale i punti appartengono.

Vi sono almeno tre punti che non appartengono a una retta.

Dati una retta r e un punto A che non gli appartiene, esiste una sola retta cui appartiene A e che non ha punti comuni con r.

Questo sistema di assiomi ammette modelli *finiti*, cioè composti da un numero finito di punti, per esempio quello formato da quattro punti e dalle sei rette che li congiungono a due a due; e quello formato da nove punti e da dodici opportune rette (fig. 9).

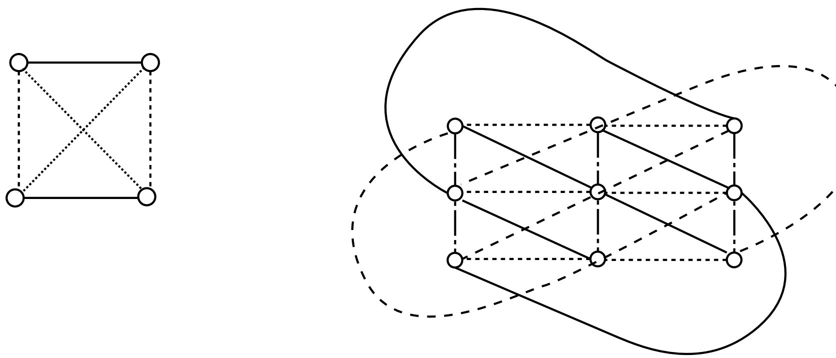


fig 9

Per far comprendere la "liberazione" dai significati empirici, Hilbert dice che non sarebbe necessario usare le parole "punto", "retta", "piano", ma si potrebbe dire invece, per esempio, "boccale", "sedia", "tavolo". Va detto pure che vi sono termini primitivi che indicano dei predicati, come "... appartiene a ...", "... sta fra ... e ...", "... è congruente a ..."; si potrebbero sostituire con altre parole, purché siano sempre dei predicati (con lo stesso "numero di posti": 2 il primo e il terzo, 3 il secondo). Come si vede, siamo proprio nel modo di pensare nominalista: i termini della teoria sono parole prive di significato!

In conclusione, possiamo dire che vi sono due modi per affrontare la geometria.

Il primo consiste nel trattarla come una scienza sperimentale: i suoi oggetti sono entità ideali (le figure e i *concetti*), ma legati all'esperienza sensibile, che suggerisce il loro significato e permette di fare congetture e di controllarle empiricamente: si possono fare anche delle dimostrazioni, senza pretendere che esse formino un sistema completo. Essa è tipicamente la geometria della scuola dell'obbligo.

Quando si cerca di sviluppare sistematicamente il sistema delle dimostrazioni, si arriva alla “geometria liberata”, scienza astratta nella quale le *parole* non hanno più necessariamente un significato. Naturalmente, tra la fase sperimentale e quella astratta è necessaria una fase intermedia: questa è tipica del biennio delle superiori, mentre la fase astratta vera e propria è tipica del triennio (assieme agli approfondimenti e alle considerazioni filosofiche, come quelle sulla geometria non euclidea).

Molti matematici affermano volentieri che la geometria (come del resto altre teorie matematiche) è una teoria nella quale le parole non hanno più significato. Per quanto riguarda l’insegnamento, e le applicazioni, siamo invece obbligati a tener conto anche della fase sperimentale; la soluzione del problema degli universali che meglio si adatta alla geometria non è quella nominalista (a mio avviso, è quella costruttivista). È illusorio cercare di presentare la geometria come una scienza solo astratta; è ancor più illusorio cercare di rappresentarla come una applicazione dell’algebra, dicendo più o meno che “un punto *è* una coppia - o una terna - di numeri” (questa è sostanzialmente la via seguita dalla maggior parte degli attuali corsi universitari): si perdono in questo modo molti degli aspetti della geometria, che è una scienza per sua natura complessa e non riducibile a uno schema unico [7].

12. Sul concetto di spazio

Che cosa è lo spazio? La domanda è implicita nelle considerazioni precedenti: ma, invece di dare una risposta diretta, ne abbiamo dato una indiretta, proponendo dei sistemi di assiomi che cercano di descrivere le proprietà essenziali dei suoi oggetti (punti, rette, ...). Ora affrontiamo più direttamente la questione.

Osserviamo anzitutto che si può distinguere fra lo spazio in cui siamo immersi, quello delle nostre rappresentazioni mentali, e quello della fisica o della geometria. Si parla, per il primo, di *spazio percettivo*, o meglio di *spazio fisiologico*. Esso non è omogeneo, perché la posizione da me occupata è diversa da tutte le altre; c’è una direzione privilegiata, quella verticale (si dice che non è *isotropo*).

[7] Questo è stato riconosciuto dalla stragrande maggioranza dei partecipanti a un seminario internazionale di studio sul futuro della geometria, svoltosi a Catania nel settembre - ottobre 1995: la sintesi di tali studi sarà pubblicata a cura dell’UNESCO.

Indagini psicologiche hanno suggerito che le situazioni spaziali si possono, *grosso modo*, ripartire in tre ambiti: quelle che impegnano uno spazio non superiore a metà dell'altezza del soggetto ("microspazio": per esempio, quello che si può fare su un banco scolastico); quelle che vanno dalla metà a cinque volte l'altezza ("mesospazio": per esempio, operare in una stanza); e su scala più grande il "macrospazio" (per esempio, operando all'aperto).

Lo spazio della geometria euclidea (e delle principali geometrie) è invece omogeneo e isotropo; ma, seguendo le indicazioni del § 8, potremmo anche costruire una geometria il cui spazio non è omogeneo (o non è isotropo): basta scegliere un gruppo G formato da trasformazioni con un punto fisso (o rispettivamente con una direzione fissa).

Osservate che la geometria proiettiva ha le sue basi percettive nella visione; la geometria euclidea ha la sua base nella possibilità di confrontare la lunghezza degli oggetti (per esempio, mediante una mano aperta).

Nel seguito, evidenzieremo alcuni modi contrapposti di "affrontare la questione dello spazio": non si tratta di modi "giusti" o "sbagliati", ma di punti di vista che soddisfano a esigenze diverse.

1) *Geometria delle figure o geometria dello spazio?*

Carlo Felice Manara ha osservato che nel testo di Euclide non si parla mai di "spazio", mentre nei nuovi programmi dei vari ordini scolastici si tratta di una parola chiave. Come mai? Una risposta potrebbe essere questa: per molte grandi idee, c'è una fase nella quale esse sono presenti solo in modo implicito, e un'altra (di solito posteriore) nella quale ci si accorge della loro importanza, e quindi diventano oggetto di esplicita considerazione. In questo caso, la prima fase ci porta a pensare a singole figure, poi a pensarle immerse in un ambiente comune; nella seconda fase si dà maggiore importanza a questo ambiente, per costruire dentro esso le figure (e altri oggetti geometrici).

Attenzione: qui non stiamo contrapponendo "situazioni piane" e "situazioni spaziali", cioè a due o a tre dimensioni: stiamo contrapponendo quella che si può chiamare "geometria delle figure" (quella del trattato euclideo) e "geometria dello spazio" (quella verso la quale ci si orienta oggi), dove "spazio" va inteso come "ambiente", e quindi potrebbe essere anche "il piano" (nel caso della geometria piana). Come si è arrivati a cambiare il modo di affrontare i problemi? La domanda è interessante anche dal punto di vista didattico, perché questa evoluzione può dare indicazioni per ciò che accade nello sviluppo d'un individuo; e anche perché spesso nella pratica didattica si mescolano pezzi di trattazioni tradizionali e di trattazioni moderne e modernissime, con il rischio di creare dei conflitti nella mente degli allievi.

Va osservato che è assai difficile (soprattutto in tempi passati) trovare esplicite dichiarazioni a proposito di questo problema: bisogna “leggere fra le righe”. Fra i pensatori greci, quelli che si potrebbero dire “della corrente razionalista” (i pitagorici, Democrito, Platone) sono di regola orientati verso la preminenza, la priorità dell’idea di spazio; nei primi filosofi-scienziati, come per esempio Democrito, la “scoperta” dello spazio deve essere arrivata in conseguenza di quella del vuoto, di quel “non-essere” che però è necessario per spiegare il divenire dell’universo come movimento degli atomi. Nel *Timeo*, Platone parla esplicitamente dello spazio come della “terza entità”, che sta fra il mondo delle idee e quello delle cose sensibili; esso è inalterabile come il primo, ma senza di esso le cose materiali non potrebbero esistere. Seguendo una tradizione probabilmente di origine pitagorica, Platone cerca pure di spiegare la struttura della materia come un sistema di atomi che hanno la forma di (anzi sono) poliedri regolari. Aristotele punta invece l’attenzione sul “luogo di un oggetto”.

Tipico del Rinascimento scientifico fu un ritorno a Platone e alla tradizione più schiettamente razionalista, contro Aristotele il cui pensiero era stato fondamentale da S. Tommaso in poi. Questo ritorno può avere dato un primo contributo alla “svolta”. Inoltre, secondo Panofsky, lo sviluppo della pittura europea (e soprattutto italiana) nel Medioevo e nel primo Rinascimento segna il passaggio dalla rappresentazione di singoli gruppi di oggetti a uno spazio sistematico: «Il Rinascimento era giunto a razionalizzare pienamente anche sul piano matematico quella immagine dello spazio che esteticamente era stata già da tempo unificata».

Un altro contributo essenziale è venuto dalla geometria analitica. Cartesio stesso, probabilmente, era ancora legato alla “geometria delle figure” (egli cominciò con problemi classici; non introdusse esplicitamente, come abbiamo visto, gli assi “cartesiani”): ma il nuovo metodo portò a costruire figure come luogo dei punti soddisfacenti condizioni date, e quindi a “costruirle entro lo spazio”: si è quindi portati a pensare prima allo spazio (o al piano), e solo dopo alle figure.

Anche le trasformazioni geometriche nascono intuitivamente come operatori su figure; ma intanto si cominciano a vedere “assieme” più figure (una figura e la sua trasformata); e poi a pensare in termini di spazio, che le contiene tutte.

La “geometria delle figure” può essere stata un *ostacolo epistemologico* per sviluppare la “geometria dello spazio”.

2) *Lo spazio è un insieme di punti?*

Un’altra notevole contrapposizione è questa: lo spazio (e le figure) vanno pensate come insiemi di punti o come un “continuo”? In altre parole, la solita teoria degli insiemi è applicabile alla geometria? Anche qui il pensiero matematico ha oscillato fra una risposta e la sua contraria. Si pensa che i primi pitagorici considerassero le figure come composte da “punti-atomi”, in numero finito; ma probabilmente i celebri paradossi di Zenone sono anche confutazioni di questo punto di vista (pensate a quello della freccia: un oggetto che si muove da A a B, in ogni *istante* occupa una *posizione* fra A e B; allora si trova lì, come bloccato; e quindi non si può muovere). Sta di fatto che Aristotele, che si preoccupa di confutare Zenone, arriva alla conclusione che “un continuo non può essere composto d’indivisibili, in particolare una linea non è composta da punti”.

Euclide, negli *Elementi*, non dice chiaramente che una figura è composta da punti (forse anche perché bisognerebbe ammettere che di regola essi sono infiniti). Piuttosto, in una figura *si possono* prendere dei punti (un esempio di infinito potenziale). La geometria analitica ci ha invece abituato a pensare a linee e superfici come insiemi di punti (si pensi alla tipica espressione: “il luogo dei punti tali che ...”).

3) *Spazio assoluto o relativo?*

Nella fisica è stata essenziale la contrapposizione fra spazio assoluto e spazio relativo. Quando diciamo “ci vediamo a casa di Gianni a mezzogiorno”, crediamo allo spazio e al tempo assoluti: siamo sicuri di potere individuare una posizione (anche in tempi diversi) e un istante preciso (anche in luoghi diversi).

La fisica aristotelica era sostanzialmente basata sull’idea di spazio assoluto; tant’è che al sistema copernicano si obiettava che, se la Terra si muovesse, un sasso lasciato cadere dall’alto d’una torre non cadrebbe verticalmente. Galileo contro-obiettava sostenendo la relatività dei moti, e facendo osservare come cade un sasso lasciato cadere da un albero d’una nave che si sta muovendo. Newton, per costruire il suo sistema, dovette tornare allo spazio assoluto: altrimenti non ha senso il principio d’inerzia. Secondo Einstein, non si può parlare né di spazio assoluto né di tempo assoluto, ma di una sola entità, lo spazio-tempo (la distinzione fra spazio e tempo dipende dall’osservatore).

Nello spazio assoluto ogni punto ha una individualità: quindi, nel senso del programma di Erlangen, il suo gruppo è formato dalla sola trasformazione identica.

4) *Lo spazio è limitato o illimitato?*

“Limitato” può avere due significati:

a) Le distanze fra i suoi punti non superano un certo “tetto” (per esempio, una superficie sferica, o un cerchio; una striscia è invece, in questo senso, illimitata).

b) C'è un "bordo" (per esempio, una superficie sferica non ha bordo; un cerchio chiuso, comprendente cioè la sua circonferenza, ha un bordo; un cerchio aperto non ha bordo se lo consideriamo in sé).

Il significato b) ha carattere topologico; a) ha carattere metrico (cfr. § 8).

Nelle discussioni di natura filosofica, si è di regola usato il significato a).

Per Aristotele, lo spazio non va oltre il cielo delle stelle fisse: lo spazio è solo il possibile luogo d'un corpo, e oltre le stelle fisse un corpo non può andare. Come abbiamo visto, lo spazio di Euclide si può considerare potenzialmente infinito. L'*horror infiniti* dei greci orientò in questo senso la maggior parte dei pensatori fino a Medioevo inoltrato: ma la teologia cristiana incontra subito l'infinità divina, e questo può avere indotto ad attenuare il rifiuto dell'infinito attuale.

Un passo notevole fu compiuto dai pittori, con la "scoperta" del punto di fuga, nel quale concorrono le rette immagine di un sistema di rette parallele: esso è la rappresentazione di un *punto all'infinito*. La prima rappresentazione corretta è attribuita ad Ambrogio Lorenzetti (1344).

Fra i filosofi, una chiara dichiarazione dell'infinità dello spazio si ha con Nicola Cusano (XV secolo), ma ancora Copernico (1473-1543) e Keplero (1571-1630) sono per la limitatezza dello spazio; Galileo (1564-1642), più cautamente, ritiene che la questione è forse insolubile[8].

Per la fisica classica, fino all'inizio del Novecento, lo spazio è infinitamente esteso. Con la teoria della relatività generale (1916), la situazione ritorna problematica: lo spazio fisico è "curvo", e vi sono versioni della teoria per le quali esso è limitato. È stato osservato (Cornford) che l'umanità ha dovuto superare, nei secoli scorsi, l'idea di spazio limitato, e ora si trova nella difficoltà opposta, a dover cioè passare dall'idea di spazio infinitamente esteso a quello d'uno spazio che si chiude su se stesso.

5) *Lo spazio è reale?*

Questa domanda può sembrare provocatoria: da Platone a Newton, chi parlava di spazio (indipendente) ne affermava la realtà. Nel Settecento, Kant pro-

[8] In effetti, l'affermazione "Lo spazio è illimitato" non può essere "verificata"; anzi, la sua opposta, "lo spazio è limitato", è *infalsificabile*, in quanto o si riesce a trovare una distanza k che non sia mai superata, o, se invece si trovano punti distanti più di k, resta il dubbio che proseguendo nella ricerca si trovi un "limite superiore" più grande. L'osservazione è particolarmente importante dal punto di vista dell'epistemologia di Karl Popper, che sostiene essere la falsificabilità il criterio per decidere se un'affermazione è scientifica; l'idea è significativa, ma evidentemente deve essere presa con qualche cautela.

pone una nuova idea. La scienza non è una lettura passiva dell'esperienza: essa è una costruzione del nostro pensiero. Con una felice metafora presa dall'informatica, lo spazio sarebbe un *data processor*. Spazio, tempo, causa, sostanza, ... sono schemi mentali, non possiamo dire che siano inerenti alle "cose in sé" (che per noi restano inconoscibili).

I principi della geometria e della meccanica, secondo Kant, non sono "analitici", cioè non sono affermazioni banalmente vere, come sarebbero "un triangolo ha tre vertici" (perché l'avere tre vertici è contenuto nel concetto di triangolo, "un poligono con tre vertici"). Essi sono "sintetici", cioè danno delle effettive informazioni; ma sono anche "a priori", perché non sono ricavati dall'esperienza; anzi, sono proprio la 'griglia' con la quale leggiamo l'esperienza. Quindi una geometria e una meccanica diversa da quelle ufficiali (la geometria di Euclide e la meccanica di Newton) possono essere al massimo dei giochi verbali.

Proseguendo con la metafora, il *data processor* sarebbe dunque munito di un *software* ben preciso (resta da capire come mai l'umanità ci abbia messo tanto tempo per capire quale esso è).

L'affermarsi della geometria non euclidea, e poi della meccanica relativistica, hanno segnato il destino della tesi di Kant sulla geometria euclidea e la meccanica newtoniana. Tuttavia, molti scienziati e filosofi si sono resi conto che le altre tesi ne uscivano rafforzate, anzi la "costruzione della scienza" poteva diventare molto più libera. Com'è noto, alcuni filosofi (Fichte, Hegel) presero lo spunto dalle tesi kantiane per arrivare all'idealismo: la realtà fisica sarebbe solo un prodotto dello spirito. Kant si rifiutò di aderire a queste posizioni (scrisse "dagli amici mi guardi Iddio, che dai nemici mi guardo io"). Gli scienziati-filosofi degli ultimi due secoli per la maggior parte riconoscono l'esistenza della realtà fisica (Helmholtz, Enriques, Einstein, Bachelard, Popper); invece, alcuni ammettono solo l'esistenza di sensazioni, o dei dati strumentali (Mach, Heisenberg).

Per ciò che riguarda la questione dello spazio, la scelta fra Platone e Kant (o meglio, fra Platone e le nuove vedute post-kantiane) ha conseguenze importanti, anche dal punto di vista dell'insegnamento. Se lo spazio è qualcosa di reale, dovrà avere certe proprietà, e quindi si dovranno di regola fare delle scelte definitive fra i punti di vista contrapposti illustrati in questo paragrafo. Se invece esso è uno strumento per organizzare l'esperienza, potremmo anche cambiare la scelta, a seconda delle questioni che di volta in volta ci troviamo ad affrontare.

Bibliografia

ARISTOTELE, *Analitici Secondi*; *Fisica*

G. BACHELARD, (tr.) *La formazione dello spirito scientifico,* Cortina, Milano 1995

L. BUNT, P. JONES, J. BEDIENT, (tr.) *Le radici storiche delle matematiche elementari,* Zanichelli, Bologna 1987

M. CAPEK, (ed.), *The concepts of space and time,* Reidel, Dordrecht-Boston 1976

A. EINSTEIN, (tr.) *Relatività, esposizione divulgativa* (con scritti di Descartes, Newton, Riemann, Helmholtz, Mach, Poincaré, e altri), Boringhieri, Torino 1967

F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza,* Zanichelli, Bologna 1906

F. ENRIQUES, G. DE SANTILLANA, *Compendio di storia del pensiero scientifico,* Zanichelli, Bologna 1936

H. FREUDENTHAL, (tr.) *Ripensando l'educazione matematica,* La Scuola, Brescia 1995

E. GALLO, *Geometria, percezione, linguaggio,* L'Ed. Mat., 6, 61-103 (1985)

M. JAMMER, (tr.) *Storia del concetto di spazio,* Feltrinelli, Milano 1963

JOHN LOCKE, (tr.) *Saggio sull'intelletto umano*, UTET, Torino 1971

C. F. MANARA, *La Matematica nella scuola secondaria superiore,* L'ins. d. mat. e d. scienze int., 11, 686-703 (1988)

M. MENGHINI, L. MANCINI PROIA, *La prospettiva: un incontro tra matematica e arte*, CNR, TID (1988)

M. NEUBRAND, *L'apprendere e il riflettere: perché e come associarli nella didattica della matematica*, La mat. e la sua did., 4, n. 2, (1990)

E. PANOFSKY, (tr.) *La prospettiva come forma simbolica,* Feltrinelli, Milano 1961

M. PELLEREY, *Geometria e immagini mentali*, L'Ed. Mat., 5, Suppl. I, 1-15 (1984)

PLATONE, *La Repubblica; Timeo*

PROCLO, *Commentario al primo libro degli Elementi di Euclide,* a cura di M. Timpanaro Cardini, Giuntini, Pisa 1978

F. SPERANZA, *Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio - Some ideas on space*, L'Ed. Mat. (IV), 1, 95-116 (1994)

RISCOPRENDO LA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

Benedetto Scimemi
Università di Padova

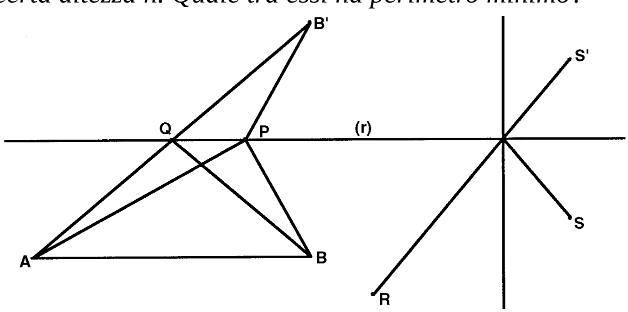
Nella geometria euclidea del piano il *triangolo* è protagonista: fonte inesauribile di problemi, palestra di dimostrazioni più o meno elementari, il triangolo fa la sua comparsa precocemente nei nostri programmi scolastici, ma troppo presto ne scompare, quando si è acquisita poco più che la nomenclatura ma non si è avuto il tempo di raccogliere la ricca messe di risultati che pur sono apprezzabili da parte dei giovanissimi.

L'argomento *trasformazioni geometriche* compare anch'esso assai presto nei programmi, ma non è corredato dalle istruzioni per l'uso. Molti insegnanti si chiedono: ammesso che si trovi il tempo per descrivere le trasformazioni fondamentali (traslazioni, rotazioni, omotetie, ecc.) che cosa dobbiamo poi farcene? come motivare questo lavoro supplementare ed evitare che si tratti dell'ennesimo elenco di nomi superflui?

In questa conversazione mi propongo di rivisitare certi teoremi classici (alcuni sono notissimi) della geometria elementare del triangolo, che portano il nome di grandi geometri del passato (Torricelli, Fagnano, Eulero, Poncelet ecc.), cercando di utilizzare - quando sembrerà conveniente - le similitudini del piano. Questo metodo rende spesso le dimostrazioni più *intuitive* (non più rigorose) di quelle tradizionali. Così gli argomenti *triangolo* e *trasformazioni* dovrebbero aiutarsi l'uno con l'altro. Le nozioni che daremo per scontate (sia per il triangolo che per le similitudini) sono quelle descritte in un buon libro per la scuola media.

1. Problemi di minimo: uso di simmetrie assiali.

Problema. *Consideriamo l'insieme dei triangoli che hanno una certa base AB e una certa altezza h. Quale tra essi ha perimetro minimo?*



I triangoli in questione hanno il terzo vertice P sulla retta r, parallela ad AB e da essa distante h. Occorre scegliere P in modo che sia minima la somma |AP|+ |PB|. Si consideri il punto B', simmetrico di B rispetto a r. Allora |AP|+|PB|= |AP|+|PB'| e quest'ultimo è minimo quando il percorso APB' è rettilineo. Tracciata la retta per A, B' e intersecatala con r in Q, si applicano le proprietà della simmetria per trovare |AQ|=|QB'|=|QB|. Si conclude :

[1] **tra tutti i triangoli che hanno una certa base e una certa altezza, il triangolo isoscele è quello che ha il perimetro minimo.**

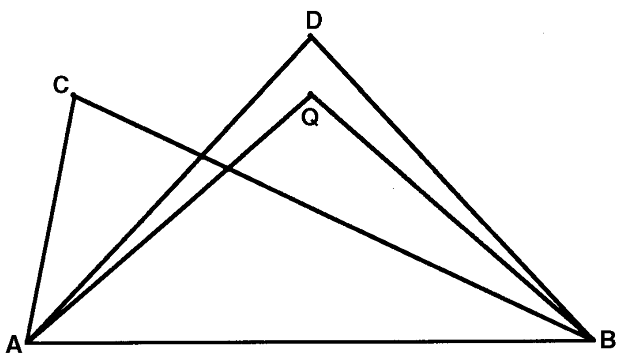
Problema. *Come scegliere la direzione di un raggio luminoso uscente da R in modo che, dopo una riflessione sullo specchio r, arrivi in S?*

Sapendo che la luce percorre percorsi minimi (principio di Fermat) si dimostra che

[2] **il raggio in arrivo e quello riflesso formano con lo specchio angoli eguali** (legge di Cartesio).

Problema. *Consideriamo l'insieme dei triangoli che hanno un certo lato e un certo perimetro. Quale tra essi ha area massima?*

Possiamo derivare la dimostrazione dal teorema precedente.



Siano: ABC un triangolo di base AB, perimetro p, area A.
ABD un triangolo isoscele di base AB, perimetro p, area A*
ABQ un triangolo isoscele di base AB, perimetro p**, area A.

Per il teorema precedente, p** ≤ p . Confrontando i due triangoli isosceli si ha allora A ≤ A* |. Dunque

[3] **tra tutti i triangoli che hanno un certo lato e un certo perimetro, quello isoscele ha area massima.**

2. Il problema isoperimetrico.

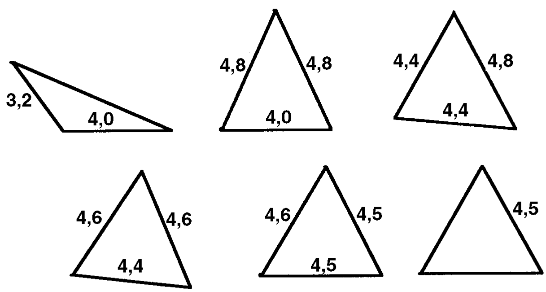
Nel classico problema isoperimetrico ci si chiede: *tra i poligoni di n lati che hanno un certo perimetro, quale ha area massima?* Il caso più semplice è ovviamente quello del triangolo, che ha la seguente prevedibile risposta:

[4] **tra tutti i triangoli che hanno un assegnato perimetro, quello equilatero ha area massima.**

La dimostrazione sembrerebbe a portata di mano applicando [3], ma occorre sapere a priori che un tale massimo esiste. Se invece ci si accinge a costruirlo, si innesca una situazione più complessa. Partiamo dal triangolo T =ABC e sia |AB|= c, |BC|= a, |CA|= b, p = a+b+c. L'area di T sia Δ. Applicando ripetutamente [3], costruiremo una successione di triangoli isosceli T_1 T_2, T_3 … ciascuno di perimetro p, ma di area crescente ($\Delta \leq$) $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \ldots$ Proveremo che le lunghezze dei loro lati vanno avvicinandosi quanto si vuole a p/3, cioè T_n tende, al crescere di n, verso un triangolo equilatero.

Ecco la costruzione

T_1 :	base	c	altri due lati	(a+ b)/2	$= s_1/2$
T_2:	base	$s_1/2$	altri due lati	$(c + s_1/2)/2$	$= s_2/2$
T_3:	base	$s_2/2$	altri due lati	$(s_1/2 + s_2/2)/2$	$= s_3/2$
T_n:	base	$s_{n-1}/2$	altri due lati	$(s_{n-2}/2 + s_{n-1}/2)/2$	$= s_n/2$



Si vede subito che in ogni passaggio da un triangolo al successivo si conservano uno dei lati e il perimetro e dunque l'area non diminuisce. Calcoliamo ora la differenza d_n tra i lati diversi:

$d_1 = c - s_1/2$

$d_2 = (s_2 - s_1)/2 = (c - s_1/2)/2 \qquad = d_1/2$

$d_3 = (s_2 - s_3)/2 = (s_2 - s_1)/4 \qquad = d_1/4$

$d_4 = (s_4 - s_3)/2 = (s_2 - s_3)/4 \qquad = d_1/8$

In generale si trova $d_n \qquad = d_1/2^{n-1}$

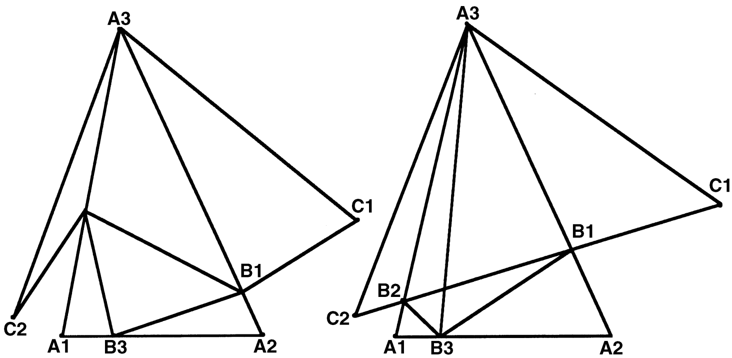
una quantità che diventa piccola quanto si vuole, pur di prendere n abbastanza grande. Così è intuitivo pensare che il triangolo equilatero, di lato p/3, è il *limite* di quella successione, e la sua area è $\Delta^* \geq \Delta_n > \Delta$.

L' argomentazione precedente potrebbe diventare una rigorosa dimostrazione, ma occorrerebbe corredarla con la nomenclatura e le proprietà dei limiti. Esistono naturalmente dimostrazioni alternative (quelle più note utilizzano la formula di Erone e il teorema delle medie aritmetica e geometrica), ma tutte richiedono una certa preparazione di risultati ausiliari. Anche per questo appare veramente notevole - per brevità e autonomia - la risoluzione del prossimo problema che ora esporremo: è un'idea che ebbe L. Fejer nel 1900 .

3. Il problema di Fagnano

Come si devono scegliere tre punti B_1, B_2, B_3 sui tre lati di un triangolo acutangolo $A_1A_2A_3$ affinchè sia minimo il perimetro del triangolo $B_1B_2B_3$?

Si potrebbe pensare di procedere come sopra: fissati due punti B_1, B_2 (rispett. su A_2A_3 e A_3A_1) cercare la scelta migliore per B_3 su A_1A_2. Poi con la coppia B_2, B_3 cercare un nuovo B_1 che diminuisca il perimetro ecc. Ma questo ci porterebbe ancora una volta a una successione infinita di triangoli. L'idea vincente di Fejer è invece quella di fissare un solo punto B_3 e ottimizzare in un sol colpo le scelte di B_1, B_2. Il problema si suddivide in due sottoproblemi: 1) *Prefissato arbitrariamente il punto B_3 sul lato A_1A_2 , come si debbono scegliere i punti B_1 (sul lato A_2A_3) e B_2 (sul lato A_3A_1) per minimizzare la lunghezza $p=|B_1B_2|+|B_2B_3|+|B_3B_1|$?* 2) Risolto il problema 1, si vedrà che la scelta di B_3 individua gli altri due punti B_1, B_2. *Come si deve scegliere B_3 ?*



Problema 1). Sul lato A_1A_2 si prefissi arbitrariamente il punto B_3. Siano C_2 e rispettivamente C_1 i punti simmetrici di B_3 rispetto alle rette per A_3A_1 e A_3A_2 . Allora $p = |C_1B_1|+|B_1B_2|+|B_2C_2|$. È chiaro che il tragitto più breve si ottiene quando la spezzata $C_1B_1B_2C_2$ è rettilinea, e questo individua i punti B_1, B_2 come intersezioni della retta per C_1C_2 con i lati A_2A_3, A_1A_3. 2) Calcoliamo la lunghezza p. Si ha $|C_1A_3|=|A_3B_3|=|C_2A_3|$ e dunque il triangolo $C_1A_3C_2$ è isoscele. Poichè l'angolo $\angle C_1A_3C_2$ è il doppio di $\angle A_2A_3A_1$ (e quindi è indipendente dalle scelte) la sua base C_1C_2 ha lunghezza minima quando è minima quella dei suoi lati eguali, che a loro volta hanno la lunghezza di A_3B_3. Allora il problema diventa: come scegliere B_3 affinchè sia minima la sua distanza da A_3? Evidentemente, B_3 è il piede dell'altezza per A_3. Con questa scelta di B_3, possiamo scoprire che i punti B_1, B_2 individuati dallo stadio 1 sono anch'essi i piedi delle altezze. Infatti, rifacendo il ragionamento precedente dopo una permutazione dei vertici, si vede che se B_2 non fosse il piede dell'altezza per A_2 il perimetro non potrebbe essere minimo.

Il risultato che abbiamo provato si usa enunciare dicendo:

[5] **tra tutti i triangoli iscritti in un certo triangolo (acutangolo) il triangolo *ortico* è quello che ha perimetro minimo.**

Incidentalmente, dal precedente ragionamento si ottiene un importante risultato che non avevamo perseguito: se i punti B_i sono i piedi delle altezze, la retta per $C_1B_1B_2C_2$ e la retta B_3B_2 sono simmetriche rispetto al lato A_1A_3, dunque anche rispetto all'altezza A_2B_2.

Questa circostanza si può esprimere con le leggi della riflessione, ovvero dei rimbalzi di una sponda elastica, che teoricamente sono le stesse:

[6] **i lati del triangolo ortico si ottengono l'uno dall'altro per riflessione sui lati del triangolo originario**

[7] **in un biliardo triangolare il perimetro del triangolo ortico è un'orbita chiusa**,

cioè si tratta di una traiettoria che una bilia percorre indefinitamente.

Siamo ora in grado di risolvere facilmente anche i seguenti problemi: *in un biliardo rettangolare UVWZ, assegnati due punti A, B come scegliere la traiettoria AP di una bilia che partendo da A rimbalzi prima in P sulla sponda VW, poi sulla sponda UV, per poi colpire il pallino in B? Come sono fatte le orbite chiuse?*

Nella tradizionale geometria del triangolo il risultato [6] si trova normalmente nella forma seguente, che reincontreremo più avanti:

[8] **le altezze di un triangolo (acutangolo) sono le bisettrici del suo triangolo ortico; dunque l'ortocentro del primo è l'incentro del secondo.**

4. Altro problema di minimo: uso di rotazioni.

I teoremi precedenti ci portano a risolvere un altro famoso problema di minimo :

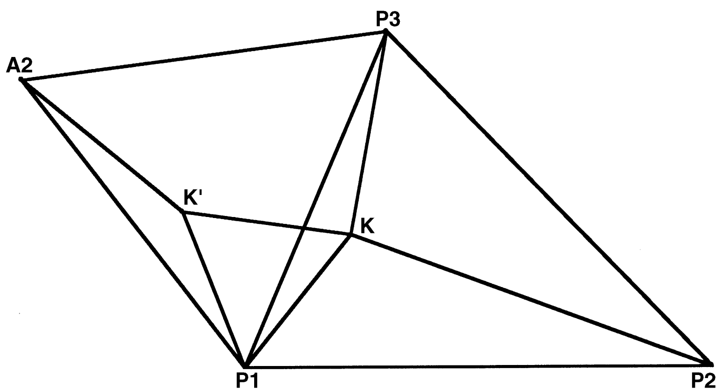
Problema: *Assegnato un triangolo $P = P_1P_2P_3$, qual è il punto F che rende minima la somma delle distanze dai vertici: $d(F) = |FP_1|+|FP_2|+|FP_3|$?*

La prima soluzione di questo problema è dovuta a Cavalieri e Torricelli. La sua versione più nota è la seguente

[9] **il punto che rende minima la somma delle distanze dai tre vertici di un triangolo è quello che vede i tre lati sotto il medesimo angolo ($2\pi/3$).**

Vi sono modi assai diversi di provare questo risultato. Qui ci proponiamo di fare uso delle rotazioni.

Assegnato il triangolo $T= P_1P_2P_3$, si costruisca, esternamente, un triangolo equilatero $T_3 = P_1P_2A_3$ (cioè in modo che A_3 e P_3 stiano, rispetto al lato P_1P_2, su semipiani opposti) e analogamente si costruiscano i triangoli equilateri $T_1 = P_2P_3A_1$, $T_2 = P_3P_1A_2$. Proviamo anzitutto che F appartiene alle tre rette A_iP_i. Assegnato un qualunque punto K, sottoponiamo il triangolo P_1KP_3 ad una rotazione ρ di ampiezza $\pi/3$, attorno al punto P_1, che porti P_3 su A_2 . Allora, se ρ manda K in K', anche il triangolo P_1KK' è equilatero. Ne segue l'uguaglianza $|A_2K'|+|K'K|+|KP_2| = |KP_3|+|KP_1|+|KP_2|= d(K)$.



La spezzata $A_2K'KP_2$ ha lunghezza minima se è rettilinea, cioè se K e K' appartengono al segmento A_2P_2. Accertato dunque che, nella ricerca del minimo, occorre scegliere K sul segmento A_2P_2, basterà ragionare analogamente con riferimento agli altri vertici del triangolo per concludere che il punto di minimo deve appartenere anche alle rette A_1P_1, A_3P_3. |

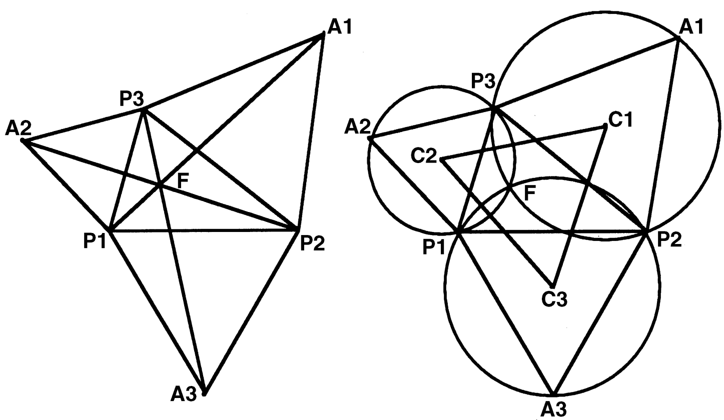
Abbiamo così visto che

[10] **le tre rette A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 hanno un punto F in comune; la somma delle distanze dai vertici P_1, P_2, P_3 ha un minimo in F, e questo minimo è la lunghezza di ciascuno dei tre segmenti A_iP_i .**

Un'altra costruzione del punto di minimo e la sua caratterizzazione secondo l'enunciato [9] si ottengono ora come segue. Consideriamo le circonferenze C_1 e C_2, circoscritte ai triangoli T_1 e T_2, e sia F la loro intersezione (diversa da P_3). Allora gli angoli $\angle P_1FP_3 = \angle P_3FP_2$ valgono $=2\pi/3$, perché supplementari di $\angle P_1A_2P_3 = \angle P_3A_1P_2 = \pi/3$. Così F vede sotto lo stesso angolo $2\pi/3$ i lati P_2P_3, P_3P_1 e dunque anche il terzo lato P_1P_2 . Ne segue che F appartiene anche alla circonferenza C_3, circoscritta a P_3. Per motivi analoghi risulta $\angle P_1FA_3 = \angle P_1P_2A_3 = \pi/3$, dunque $\angle P_1FP_3$ è supplementare di $\angle P_1FA_3$, cioè i punti A_3, F, P_3 sono allineati. Si conclude che F appartiene alla retta A_3P_3, e analogamente alle A_1P_1, A_2P_2, cioè si tratta del punto di minimo descritto in [9].

Un'appendice al teorema precedente è attribuita a Napoleone Bonaparte (al quale si deve il maggior merito della diffusione della cultura geometrica nelle scuole europee del 19º secolo):

[11] **sui tre lati di un triangolo si costruiscano, esternamente, tre triangoli equilateri. Allora i loro centri sono i vertici di un triangolo equilatero** (detto il *triangolo di Napoleone*).



Siano C_i i centri dei cerchi C_i . Allora segmento FP_3 (che ha per estremi le intersezioni di C_1 e C_2) è perpendicolare al segmento C_1C_2, e analogamente FP_1 è perpendicolare a C_2C_3. Allora $\angle C_1C_2C_3 = \pi/3$ e analogamente $\angle C_2C_3C_1 = \angle C_3C_1C_2 = \pi/3$.

5. Retta di Eulero, cerchio dei 9 punti: uso di omotetie.

Un'*omotetia* è caratterizzata da un centro O e da un fattore λ ($\neq 0,1$) . Il generico punto P viene trasformato nel punto P' individuato dalla equazione (vettoriale) $OP' = \lambda \cdot OP$.

In altre parole, i punti P, P' sono allineati con O, dalla stessa parte (se $\lambda>0$) o da parti opposte (se $\lambda<0$), e risulta $|OP'|=|\lambda|\cdot|OP|$. Di conseguenza, un segmento PQ viene trasformato in un segmento parallelo P'Q' di lunghezza $|\lambda|\cdot PQ$. Se è $\lambda > 0$, i segmenti orientati PQ, P'Q' hanno lo stesso verso, altrimenti hanno versi opposti.

Viceversa, se un'omotetia trasforma il segmento PQ nel segmento parallelo P'Q' (non della stessa lunghezza e non allineato con PQ) il centro dell'omotetia si ottiene come intersezione delle rette PP' e QQ' .

Nel triangolo $A=A_1A_2A_3$ sia M_i il punto medio del lato opposto al vertice A_i. Sappiamo che le mediane A_iM_i si incontrano nel *baricentro* G, che cade a un terzo della loro lunghezza. Perciò A_i e M_i sono allineati con G, da parti opposte, l'uno a distanza doppia dell'altro: $GM_i = (-1/2)\ GA_i$. Il triangolo *mediale* $M=M_1M_2M_3$ è dunque immagine di $A=A_1A_2A_3$ secondo l'omotetia di centro G e fattore -1/2. Osserviamo che un'omotetia (poichè rispetta i rapporti tra lunghezze e gli angoli, come ogni similitudine) trasforma l'asse di un segmento PQ nell'asse del segmento trasformato P'Q'. Ciò significa che il circocentro di un triangolo viene trasformato nel circocentro del triangolo immagine. Considerazioni analoghe si possono fare per l'ortocentro ecc.

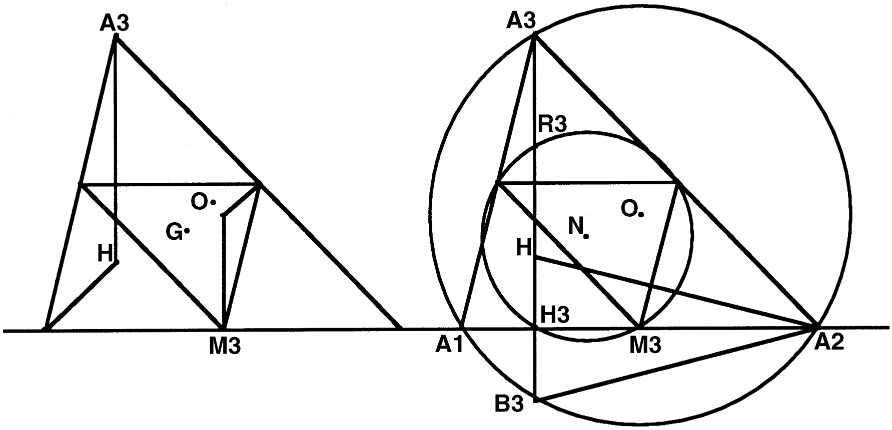
[12] **in un triangolo il baricentro G, l'ortocentro H e il circocentro O sono allineati** (sulla *retta di Eulero*) **e G divide il segmento OH nel rapporto 1:2.**

Infatti le mediane del triangolo mediale $M=M_1M_2M_3$ sono le stesse mediane di A; dunque G è baricentro anche di M. D'altra parte, gli assi di A sono le altezze di M e dunque il circocentro O di A è l'ortocentro di M. Riassumiamo queste osservazioni con i simboli

$$G = G_M \qquad\qquad O = H_A$$

Introduciamo ora l'omotetia γ di centro G e fattore -1/2. Essa trasforma un punto P nel punto P' per cui $GP' = (-1/2)\cdot GP$. Dunque γ trasforma il triangolo A nel triangolo $M = M_1M_2M_3$.

Ora l'omotetia, come si è detto, trasforma l'ortocentro H di A nell'ortocentro H_M = O di M, perciò risulta $GO = (-1/2)\ GH$, cioè appunto O,H sono allineati con G, da parti opposte, e $|HG| = 2|GO|$. |



Siano ora B e N le circonferenze circoscritte ai triangoli A e M. Poichè γ(A) = M, anche γ(B) = N, il raggio di N è la metà di quello di B e γ(O)=N è il suo centro. Dunque GO = -2 GN. Confrontando con GH = -2 GO si trova che N è il punto medio tra O e H. Con riferimento al prossimo enunciato, dovuto a Poncelet, N è noto come il circolo dei 9 punti di A.

[13] **il punto medio N tra il circocentro O e l'ortocentro H di un triangolo A è il centro di una circonferenza N cui appartengono i seguenti nove punti: i tre punti medi M_i dei lati di A, i tre piedi H_i delle altezze di A, i punti medi R_i tra H e i vertici A_i di A.**

I punti medi M_i appartengono a N per definizione. Proviamo l'appartenenza a N degli altri 6 punti. L'altezza A_iH_i di A incontra la circonferenza B (oltre che in A_i) anche in un secondo punto B_i. Osserviamo l'uguaglianza degli angoli $\angle A_1A_3B_3 = \angle HA_2A_1$ (i cui lati sono a due a due perpendicolari) e $\angle A_1A_3B_3 = \angle A_1A_2B_3$ (perchè sottesi dall'arco A_1B_3 in B). Ne deduciamo che il triangolo HA_2B_3 è isoscele, e dunque H_3 è il punto medio di HB_3. Lo stesso si ottiene per H_1, H_2 permutando gli indici. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che c'è un'omotetia η di centro H e coefficiente $\mu = 1/2$ che manda B_i in H_i . Si trasformi ora la circonferenza B secondo η; si ottiene una circonferenza il cui raggio è la metà di quello di B e il cui centro η(O) è medio tra H e O. Ma allora, per quanto osservato sopra, η(O)=N e η(B)=N. Poichè B è circoscritta al triangolo $B_1B_2B_3$, anche la sua immagine N è circoscritta al triangolo $H_1H_2H_3$, come si voleva. Quanto ai punti R_i dell'enunciato, basta osservare che η manda A_i in R_i e quindi si tratta ancora di punti di N.

Gli ultimi tre punti (dei nove) non sembrano avere la stessa ... dignità geometrica degli altri sei. Per convincerci del contrario, basterebbe inoltrarci nella *geometria del quadrangolo*, un capitolo poco conosciuto: interpretando infatti $A_1A_2A_3H$ come un (particolare) quadrangolo completo, i nove punti precedenti diventano i sei punti medi dei sei lati e i tre punti *diagonali* (intersezione dei lati opposti); e si vedrebbe che, anche per un quadrangolo qualsiasi, vale un teorema analogo al precedente, pur di sostituire al circolo un'opportuna *conica*. Un'insolita applicazione del teorema dei nove punti ([16]) si troverà anche nel paragrafo che segue.

6. Altre similitudini: una disuguaglianza di Eulero

In un triangolo $A_1A_2A_3$, per ogni vertice A_i passano una bisettrice interna e un bisettrice esterna, tra loro ortogonali. Queste sei rette si incontrano a tre a tre in quattro punti: l'incentro I, intersezione delle tre bisettrici interne, e i tre excentri E_i (i=1,2,3), intersezione della bisettrice interna per A_i con le due bisettrici esterne per A_j e A_h . I quattro punti I, E_1, E_2, E_3, sono (i soli) punti del piano che hanno eguale distanza dalle tre rette che prolungano i lati del triangolo. Ma, tenuto conto dell'ortogonalità, questi stessi punti si possono anche interpretare come i vertici e l'ortocentro di un triangolo, di cui $A_1A_2A_3$ è il triangolo ortico. Precisamente:

[14] **sia A = $A_1A_2A_3$ un triangolo acutangolo e sia E = $E_1E_2E_3$ il triangolo che ha per vertici gli excentri di A. Allora A è il triangolo ortico di E e l'incentro di A è l'ortocentro di E.**

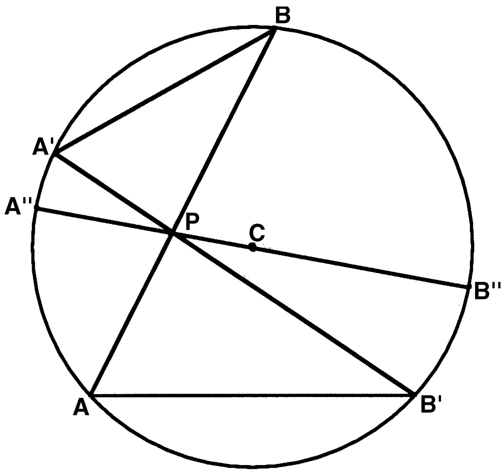
Si può confrontare questo enunciato con [8]. Se il triangolo A non è acutangolo, un analogo enunciato rimane vero, purchè si scambino i ruoli dei punti H, A_i, dove A_i è il vertice dell'angolo ottuso. A proposito di questa interscambiabilità tra vertici e ortocentro, il seguente enunciato è tanto sorprendente quanto semplice da dimostrare:

[15] **Se di quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4, uno è ortocentro del triangolo che ha per vertici gli altri tre, allora lo stesso vale per tutti gli altri.**

Combinando [13] e [14], osserviamo che la circonferenza circoscritta a A è il circolo dei nove punti di E. Allora il teorema di Poncelet garantisce, tra l'altro, che:

[16] **i punti medi tra incentro ed excentri di un triangolo appartengono alla sua circonferenza circoscritta.**

Faremo uso tra poco di [16] per dimostrare un altro celebre risultato di Eulero. Ma occorre prima richiamare un'altra osservazione, che riguarda una similitudine di triangoli già segnalata nei libri di Euclide:



[17] **Sulla circonferenza C si considerino i punti A, B, A', B' e si supponga che le rette AB, A' B' si incontrino nel punto P. Allora risulta |PA|· |PB| =|PA'|·|PB'|.**

Infatti, per le solite proprietà degli angoli al cerchio sottesi dalla stessa corda, risultano le seguenti eguaglianze: ∠ ABA' = ∠ AB'A' , ∠ BAB' = ∠ BA'B', e dunque sono simili i triangoli PAB', PA' B. L' uguaglianza del rapporto tra le lunghezze dei corrispondenti lati |PA'|/|PA|= |PB|/ |PB'| si può allora scrivere |PA|· |PB| = |PA'|· |PB'|.

Questo prodotto dipende dunque dal punto P ma è indipendente dalla particolare corda AB; ciò sta alla base della nozione di *potenza* p di un punto P rispetto a un cerchio *C*. In particolare, per calcolare p si può scegliere un diametro A"B" di *C* nel ruolo della corda AB. Indicata con d=|PC| la distanza di P dal centro C di *C* e con R il raggio di *C*, la potenza di P rispetto a *C* è data allora dalla formula

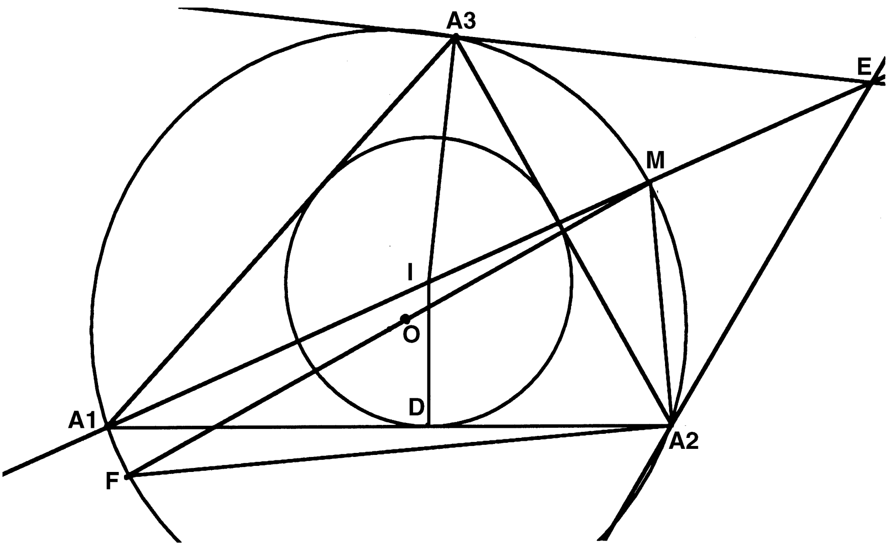
$$p = |PA''| \cdot |PB''| = (R - d) \cdot (R+d) = R^2 - d^2.$$

Abbiamo ora tutti i mezzi per dimostrare il teorema di Eulero:

[18] **in un triangolo siano O il centro (circocentro) ed R il raggio del circolo circoscritto, I il centro (incentro) ed r il raggio di quello inscritto. Allora risulta $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$. In particolare, R ≥ 2r.**

Sappiamo da [16] che il punto di mezzo M tra l'incentro I e l'excentro E appartiene alla circonferenza *C* circoscritta al triangolo *A* = $A_1A_2A_3$. Allora M è il centro di una circonferenza che ha IE per diametro e passa per A_2, A_3, perchè sono retti gli angoli $\angle IA_2E$ e $\angle IA_3E$. Allora $|IM|=|A_2M|$. Calcoliamo la potenza di I rispetto alla circonferenza C, con riferimento alla corda A_1M :

$|A_1I|\cdot|IM| = |A_1I|\cdot|A_2M|$. Sia D il punto di contatto del cerchio iscritto sul lato A_1A_2. Sia F il simmetrico di M rispetto al centro O di *C*. Proviamo che i triangoli rettangoli FA_2M e A_1DI sono simili. Infatti $\angle IA_1D = \angle MA_1A_2 = \angle MFA_2$ perchè sottesi dalla corda A_2M. Dunque si ha $|IA_1|/|MF| = |ID|/|MA_2|$. Questo si riscrive $|IA_1|/2R = r/|MA_2|$ e dunque, vista l'uguaglianza $|IM|=|A_2M|$, la potenza di I vale 2rR. Ma si è visto che la potenza vale anche $R^2 - |IO|^2$. Ne segue, come volevamo, $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$.



È facile vedere che l'uguaglianza R = 2r si verifica solo nel triangolo equilatero. La disuguaglianza $R \geq 2r$ è invece il caso particolare di una disuguaglianza scoperta molto più recentemente:

[19] **se $A_1A_2A_3$ è un triangolo e P un punto qualunque, la somma delle distanze di P dai vertici non è minore del doppio della somma delle distanze di P dai lati.**

Questo teorema, dimostrato per la prima volta nel 1937 da Mordell, fu pochi anni dopo ridimostrato elementarmente, facendo un uso opportuno delle riflessioni, un po' come nei nostri primi esempi.

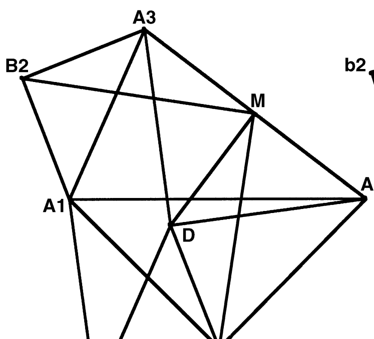
ADDENDUM (1 /12/1995)

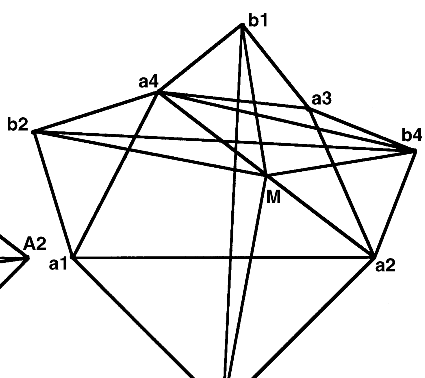
Al termine della conversazione con i partecipanti al corso del MPI a Viareggio, in cui avevo esposto alcuni dei precedenti risultati, il collega Massimo Galuzzi mi sottopose il seguente enunciato, di cui aveva ottenuto e illustrato ai corsisti una facile dimostrazione per via analitica, usando il PC per le manipolazioni algebriche:

Su due lati opposti di un quadrilatero si costruiscano (esternamente) due quadrati, e si consideri il segmento che ha per estremi i centri dei due quadrati. Partendo dagli altri due lati si costruisca un analogo segmento. Allora i due segmenti sono perpendicolari .

Come produrne una dimostrazione sintetica? Non fui allora in grado di rispondere, e solo a distanza di qualche giorno trovai una dimostrazione elementare ma poco interessante, che coinvolgeva un gran numero di angoli e di reciproche relazioni. Più recentemente ho invece ritrovato il medesimo problema tra gli esercizi del Coxeter (1), corredato da una traccia di dimostrazione per noi assai più interessante, perchè basata sull'uso delle trasformazioni geometriche, e precisamente delle rotazioni . Data la pertinenza dell'argomento, e le analogie con il metodo del § 4, ritengo opportuno svilupparne qui i dettagli. La dimostrazione del primo lemma è già nel suo enunciato:

Lemma 1. Sia $A_1A_2A_3$ un triangolo e si orienti il piano in modo che la rotazione $A_1 \to A_2 \to A_3$ sia positiva . Sui suoi lati si costruiscano tre quadrati, uno internamente (su A_2A_3) e due esternamente (su A_3A_1 e su A_1A_2), e siano rispettivamente D, B_2, B_3 i loro centri. Sia poi C ottenuto da D per rotazione di un angolo $\pi/2$ (in verso positivo) attorno a B_3. Allora componendo la rotazione $-\pi/2$ attorno a D con la rotazione precedente si ottiene una traslazione che manda DA_3 in CA_1.





Perciò A_1A_3DC è un parallelogramma.

Lemma 2. Sia A_1A_3DC un parallelogramma. Su 3 dei suoi lati A_1A_3, A_3D, DC, si costruiscano tre quadrati (esternamente) e siano rispettivamente B_2, M, B_3 i loro centri. Allora il segmento B_3M si ottiene da B_2M per rotazione di $\pi/2$ attorno a M.

Se infatti A_2 è il simmetrico di A_3 rispetto a M, dal Lemma 1 risulta che ruotando di un angolo retto attorno a M si trasformano A_3 in D, A_3B_2 in DB_3, MA_3 in MD, quindi anche B_2M in B_3M.|

[20] **Sia $A_1A_2A_3A_4$ un quadrangolo. Sui 4 lati A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 si costruiscano quattro quadrati (esternamente) e siano rispettivamente B_3, B_4, B_1, B_2 i loro centri. Se M è il punto medio di A_2A_4 allora la rotazione di un angolo retto attorno a M trasforma B_4B_2 in B_1B_3.**

Infatti, se M è il punto medio di A_2A_4, applicando i lemmi precedenti ai triangoli $A_1A_2A_4$ e rispettivamente $A_3A_2A_4$ (e ai parallelogrammi da essi individuati) si trova che la rotazione di $\pi/2$ attorno a M trasforma B_2M in B_3M, B_4M in B_1M, quindi anche B_2B_4 in B_3B_1.|

Si osservi che, oltre all'enunciato originario, abbiamo provato che i due segmenti in questione hanno la stessa lunghezza. Per analogia con il teorema di Cavalieri-Torricelli, ci si potrebbe chiedere se esista una ragionevole funzione del quadrangolo per cui quella lunghezza $|B_2B_4|=|B_1B_3|$ possa interpretarsi come un minimo.

BIBLIOGRAFIA

(1) COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*, J.Wiley, New York, 1961
(2) KAZARINOFF, N.D. *Disuguaglianze geometriche*, Zanichelli, 1973.

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Manuela Placucci - S.M.S. “F. da Longiano” Longiano (FO)
Giovanni Magrini - S.M.S. “Giuria-Chiabrera” Savona
Oriano Modenini - S.M.S. “F. Cipriani” Nogara (VR)
Michele Boffa - S.M.S. “A. Frank” Mondovì (CN)
Rosa Iaderosa - S.M.S. “L. da Vinci” Cesano Boscone (MI)
Giuliana Candussio - S.M.S. di Mariano del Friuli (GO)
Alessandra Berna - S.M.S. “Carducci” Avigliano (PZ)
Loretta Ferrante - S.M.S. “Montello” Roma
Anna Mirabella - S.M.S. “Garibaldi” Enna
Danilo Restaneo - S.M.S. “G. Pierluigi” Palestrina (Roma)
Paolo Della Torre - S.M.S. “U. Foscolo” Preganziol (TV)
Antonella Giacomin - S.M.S. “I. Nievo” Castion (BL)
Annamaria Ruspa - S.M.S. “L. Pirandello” Moncalieri (TO)
Sergio Vettore - S.M.S. IV Corsico (MI)
Archetti Adria - S.M.S. “Alessi” Roma
Patrizia Patracchini - S.M.S. “Manzoni” Mesola (FE)
Domenica Formica - S.M.S. “G. Recupero” Catania
Antonio Magaldi - S.M.S. “Rocco Scotellaro” Rivello (PZ)
Maria Cipolaro - S.M.S. “Pascoli III” Napoli
Isabella Balducci - S.M.S. S. Angelo d’Alife (CE)
Corazzini Grazia - S.M.S. Pillo Popoli (PS)
Maria Rosaria Conte - S.M.S Alliste (LE)
Giovanni Castrucci - S.M.S. “F. de Matteo” Deliceto (FG)
Giuseppe Cazzetta - S.M.S. “Carducci” Ginosa (TA)
Tommasa Marenna - S.M.S. “Stroffolini” Casapulla (CE)
Ianna Nardi - S.M.S. “Galileo” Pesaro
Enrica Borromeo - S.M.S. “L. da Vinci” Guidonia (Roma)
Carla La Saponara Ciarrocca - S.M.S. “Giansante” Città S. Angelo (PE)
Nicolina Sucapane - S.M.S. Balsorano (AQ)
Ezio Donzelli - S.M.S. “Fracassetti” Fermo (AP)
Annamaria Facenda - S.M.S. “Faà di Bruno” di Marotta (PS)
Mauro Pietrini - S.M.S. “Paolano Manassei” Terni
Ivaldo Grassi - S.M.S. “Lanei” Stroncone (TR)
Tiziana Silvani - S.M.S. “Ferrari” Marina di Massa (MS)
Fabio Brunelli - S.M.S. “Masaccio” Firenze

Riccardi Carla - S.M.S. “A. Vera” Amelia (TR)
Maria Francesca Funari - S.M.S. “Giannini” Rocca Imperiale (CS)
M. Rosaria Manna - S.M.S. “Scarano” Trivento (CB)
M. Gemma Orrù - S.M.S. “Gramsci” Sestu (CA)
Elsa Uselli - S.M.S. “Zuddas” Dolianova (CA)
Giusy Motta - S.M.S. “Marconi” Paternò (CT)

NEOLAUREATI

Guliana Bettini,
Maria Cantiello,
Alessia Cupini,
Valentina Del Col,
Lorella Patone,
Roberta Gorni,
Daniela Ippolito,
Anna Maria Ranigoni,
Laura Tomasini,
Maria Grazia Zagabrio.

APPENDICE
1. ELENCO DELLE SCUOLE POLO

Le scuole polo, di cui si pubblica l'elenco, hanno assunto il compito di distribuire i *Quaderni* agli istituti che rientrano nel territorio loro affidato.
I Presidi che non avessero ricevuto tutti i numeri della collana possono pertanto richiederne l'invio alla scuola polo dell'area provinciale di appartenenza.

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - A

LM	SLATAPER	Corso Verdi, 17	Gorizia
LS	TORRICELLI	Via Udine 7	Maniago (PN)
LC	PETRARCA	Via Rossetti, 74	Trieste
IM	PERCOTO	Via Pier Silverio Leicht, 4	Udine
IM	GOBETTI	Via Istituto Tecnico, 1	Genova-Sampierdarena
IM	AMORETTI	Piazzetta G.B. De Negri, 2	Imperia
IM	MAZZINI	Viale Aldo Ferrari, 37	La Spezia
IM	G. DELLA ROVERE	Via Monturbano, 8	Savoia
IM	G. FALCONE	Via Dunant, 1	Bergamo
LS	CALINI	Via Monte Suello 2	Brescia
LS	GIOVIO	Via P. Paoli, 38	Como
LC	MANIN	Via Cavallotti, 2	Cremona
IM	TENCA	Bastioni Porta Volta, 16	Milano
LS	MAJORANA	Via Ratti, 88	Rho (MI)
IM	PARINI	Via Gramsci, 17	Seregno (MI)
LC	VIRGILIO	Via Ardigò, 13	Mantova
IM	CAIROLI	Corso Mazzini, 7	Pavia
LS	NERVI	Piazza S. Antonio	Morbegno (SO)
LS	LUINO	Via Lugano, 24	Luino (VA)
IM	SALUZZO	Via E. Faà di Bruno, 85	Alessandria
IM	MONTI	Piazza Cagni, 2	Asti
IM	LEONARDO DA VINCI	Piazza S. Francesco, 1	Alba (CN)
IM	BELLINI	Baluardo La Marmora	Novara
LS	GRAMSCI	Colle Bella Vista	Ivrea (TO)
LS	GOBETTI	Via M. Vittoria, 39 bis	Torino
IM	ROSA STAMPA	Corso Italia, 48	Vercelli
IM	PASCOLI	Via M. Longon, 3	Bolzano
LC	VON DER VOLGELWIDE	Via A. Diaz, 34	Bolzano
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Giusti, 1/1	Trento
IM	BINEL	Via Franchetè, 111	Verres (AO)
LC	TIZIANO	Via Cavour, 2	Belluno
IM	AMEDEO DI SAVOIA	Via del Santo	Padova

IM	ROCCATI	Via Carducci, 8	Rovigo
LC	CANOVA	Via Mura S. Teonisto, 16	Treviso
IM	STEFANINI	Via Miglio	Venezia - Mestre
LC	G. B. BROCCHI	Via Beata Giovanna, 67	Bassano del Grappa
IM	VERONESE	Via Fiume, 61/B	San Bonifacio (VR)

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - B

LC	D. COTUGNO	Portici del Liceo	L’Aquila
IM	ISABELLA GONZAGA	Via dei Celestini	Chieti
IM	MARCONI	Via M. Da Caramanico, 6	Pescara
IM	MILLI	Via G. Carducci	Teramo
LS	COPERNICO	Via F. Garavaglia, 11	Bologna
LC	ARIOSTO	Via Arianuova, 19	Ferrara
LS	RIGHI	Piazza Aldo Moro, 76	Cesena (FO)
LS	FANTI	Viale Peruzzi, 7	Carpi (MO)
LC	GIOIA	Viale Risorgimento, 1	Piacenza
LC	C/O C.N. MARIA LUIGIA	Via Lalatta, 14	Parma
LS	RICCI CURBASTRO	Viale degli Orsini, 8	Lugo (RA)
LS	MORO	Via XX Settembre, 5	Reggio Emilia
IM	REGINA MARGHERITA	Viale Regina Margherita	Anagni (FR)
LS	MAJORANA	Via Sezze	Latina
IM	ELENA PRINC. NAPOLI	Piazza Mazzini, 2	Rieti
LC	MAMIANI	Via delle Milizie, 30	Roma
LS	PEANO	Via Morandini, 38	Roma
SM	MONTESSORI	Via Livenza, 8Roma	
IM	S. ROSA DA VITERBO	Via S. Pietro, 27	Viterbo
LS	LEONARDO DA VINCI	Viale G. Verdi, 23	Jesi (AN)
IM	MERCANTINI	Via Emidio Consorti, 28	Ripatransone (AP)
IM	VARANO	Via Pieragostino, 18	Camerino (MC)
LC	MAMIANI	Via Gramsci, 2	Pesaro
IM	PRINCIPESSA ELENA	Via Trieste, 1	Campobasso
IM	CUOCO	Via G; Leopardi	Isernia
LS	REDI	Via Leone Leoni, 38	Arezzo
LS	C/O C.N. CICOGNINI	Piazza del Collegio, 13	Prato (FI)
IM	ROSMINI	Viale Porciatti, 2	Grosseto
IM	PALLI BARTOLOMEI	Via Maggi, 50	Livorno
LS	VALLISNERI	Via delle Rose, 68	Lucca
IM	MONTESSORI	Via Lunense, 39/B	Marina di Carrara (MS)
LS	BUONARROTI	Via Betti	Pisa
IM	LORENZINI	Via Sismondi, 7	Pescia (PT)
LC	PICCOLOMINI	Prato S. Agostino	Siena
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Tusicum	Umbertide (PG)
LC	TACITO	Viale Fratti, 12	Terni

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - C

IM	T. STIGLIANI	Via Lenera, 61	Matera
IM	GIANTURCO	Via Zara	Potenza
LS	FERMI	Via Molinella, 30	Cosenza
LC	GALLUZZI	Via De Gasperi	Catanzaro
IM	GRAVINA	Via Foscolo	Crotone
IM	ALVARO	Via Campanella	Palmi (RC)
IM	CAPIALBI	Via S. Ruba	Vibo Valentia
IM	IMBRIANI	Viale Italia, 2	Avellino
IM	GUACCI	Via Nicola Calandra, 138	Benevento
IM	SALVATORE PIZZI	Piazza Umberto I	Capua (CE)
LC	VICO	Via Salvator Rosa, 117	Napoli
LS	CALAMANDREI	Via Comunale Maranda, 84	Napoli - Barra
IM	SERAO	Via Carducci, 18	Pomigliano d’Arco (NA)
IM	ALFANO I	Via dei Mille	Salerno
LC	TROYA	Via R. Sanzio	Andria (BA)
LS	E. MAJORANA	Via A. Moro, 19	Mola (BA)
IM	PALUMBO	Via A. Grandi, 17	Brindisi
IM	RONCALLI	Piaza Europa	Manfredonia (FG)
LC	CAPECE	Piazza Moro, 37	Maglie (LE)
LC	ARISTOSSENO	Viale Virgilio, 15	Taranto
LS	PACINOTTI	Via Liguria	Cagliari
LS	FERMI	Via Veneto, 45	Nuoro
IM	CROCE	Via G. D’Annunzio	Oristano
IM	CASTELVÌ	Via Manno, 58	Sassari
LS	LEONARDO	Via della Vittoria	Agrigento
LC	RUGGERO SETTIMO	Via Rosso di San Secondo	Caltanissetta
LC	C/O C.N. CUTELLI	Via V. Emanuele II, 56	Catania
IM	CRISPI	Via Padova, 50	Piazza Armerina (EN)
LS	ARCHIMEDE	Viale Regina Margherita, 3	Messina
IM	DE COSMI	Via L. Ruggieri, 15	Palermo
IM	MAZZINI	Via Curtatone	Vittoria (RG)
IM	RAELI	Via Matteo Raeli, 9	Noto (SR)
IM	SALVO	Via Marinella, 1	Trapani

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

1 – Gestione e innovazione*
2 – Lo sviluppo sostenibile
3 – La valenza didattica del teatro classico
4 – Il postsecondario per la professionalità*
5 – Dalla memoria al progetto
6 – La sperimentazione della sperimentazione*
7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
8 – Probabilità e statistica nella scuola liceale
9 – L'Italia e le sue isole
10 – Lingua e civiltà tedesca
11 – La scuola nel sistema polo* (manuale guida)
12 – La "città" dei filosofi
13 – Le città d'Europa
14 – Dal passato per il futuro
15 – Gestione, innovazione e tecnologie*
16 – Per non vendere il cielo
17 – Briser la glace
18 – Dalla lingua per la civiltà
19 – L'insegnamento della geometria

VOLUMI IN CORSO DI PUBBLICAZIONE

20 – Se hace camino al andar
21 – Gli IDEI nel progetto formativo
22 – Il linguaggio dei linguaggi
23 – Tecnologia e disegno
24 – Il Liceo Classico Europeo

N.B. I titoli caratterizzati dall'asterisco * si riferiscono a *Quaderni* dedicati alla formazione dei presidi; gli altri sono destinati alla formazione dei docenti.

matteoni stampatore lucca
maggio 1997

«Io non credo che si renda omaggio
alla verità e alla giustizia, che della
verità è compagna inseparabile,
se non si riconoscono accanto ai limiti
e alle carenze, non lievi, certamente non
marginali, che a volte toccano la vita
della scuola, anche i meriti e l’impegno,
sempre umile e qualche volta eroico,
dei tanti che nella scuola ci stanno con
fermezza di propositi, con chiarezza di
obiettivi, con sincerità di convinzioni
socio-culturali.»

Romano Cammarata