

Strutture proiettive e teoria di Hodge

Gian Pietro Pirola
Università di Pavia

Una struttura proiettiva su una superficie di Riemann è un atlante massimale avente cambi di coordinate dati da funzioni razionali (trasformazioni di Moebius). Una conseguenza del teorema di uniformizzazione è l'esistenza di una struttura privilegiata p_u su ogni superficie di Riemann.

Lo spazio delle strutture proiettive su una superficie di Riemann S compatta è uno spazio affine complesso P_g avente come spazio vettoriale associato lo spazio dei differenziali olomorfi quadratici su S . Possiamo allora interpretare p_u come una sezione C -infinito del fibrato affine P_g definito sullo spazio dei moduli M_g delle superficie di Riemann di genere g .

Il problema di confrontare strutture proiettive definite su famiglie di superficie di Riemann compatte può essere affrontato attraverso il passaggio a certe forme differenziali associate. In particolare, questo metodo ha permesso di provare la differenza tra la struttura canonica p_u e la struttura canonica di Hodge, di cui si analizza la costruzione.

Una seconda struttura canonica (di Hodge) $p_h(S)$ su una superficie di Riemann compatta S è stata costruita in maniera indiretta in [CFG]. In tale lavoro, la seconda forma fondamentale associata alla mappa dei periodi viene rappresentata mediante una 1-forma meromorfa definita sul prodotto di $S \times S$ con poli solo sulla diagonale. La struttura proiettiva nasce da tale forma mediante la soluzione dell'equazione schwarziana. In termini di equazioni differenziali, p_h è associata al Laplaciano (teoria di Hodge commutativa), mentre l'uniformizzazione p_u è associata a un'equazione differenziale non lineare (teoria di Hodge non commutativa).

Abbiamo allora due sezioni canoniche p_u e p_h del fibrato P_g . Il confronto di tali strutture è reso possibile dall'interpretazione delle sezioni di P_g mediante forme differenziali di tipo (1.1) sullo spazio dei moduli M_g . Classicamente è noto che la forma w_u associata a p_u è la forma di Kaehler associata alla metrica di Weil Petersson. In [BCFP] si dimostra invece che la forma w_h è il pull-back della forma kaehleriana nello spazio di Siegel attraverso la mappa dei periodi.

La connessione tra strutture proiettive e forme differenziali è stata precisata in un lavoro successivo [FPT] e utilizzata in [BFPT] per chiarire il legame tra la sezione p_u e la forma w_u attraverso le metriche di Quillen.

Rimane completamente misteriosa la geometria dell'atlante associato alla struttura proiettiva di Hodge.

Bibliografia

- [1] [CFG] Colombo, E; Frediani, P; Ghigi, A On totally geodesic submanifolds in the Jacobian locus. *Internat. J. Math.* 26 (2015), no. 1,

- [2] [BCFP] Biswas, I Colombo, E; F. P Pirola, G. A Hodge theoretic projective structure on compact Riemann surfaces. *J. Math. Pures Appl.* (9) 149 (2021), 1–27
- [3] [BFPT] Biswas, I.; Favale, Filippo F. ; Pirola G. Torelli, S. Quillen connection and the uniformization of Riemann surfaces. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 201 (2022), no. 6, 2825–2835
- [4] [FPT] Favale, F., Pirola, G., Torelli, S.: Holomorphic 1-forms on the moduli space of curves, arXiv:2009.10490