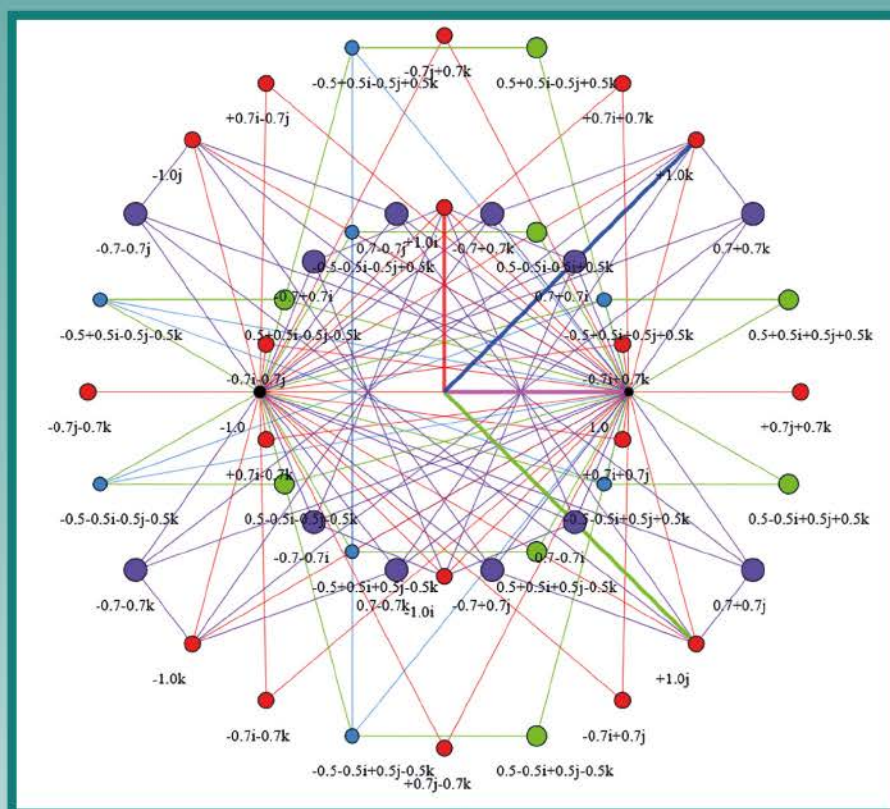


Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana



DIRETTORE RESPONSABILE:
MARCO ANDREATTA

DIRETTORE EDITORIALE:
CARLO TOFFALORI

COORDINATORI SCIENTIFICI:
SILVIA BENVENUTI, ALESSANDRA CELLETTI, ALBERTO COGLIATI

COMITATO EDITORIALE:
ALBERTO ABBONDANDOLO • SAMUELE ANTONINI • NICOLA CICCOLI • FRANCESCA CIOFFI •
PIERLUIGI CONTUCCI • ANTONIO DI CRESCENZO • VERONICA FELLI • MARCO FRANCIOSI •
MARIA GROPPi • CARLO MANTEGAZZA • GIOVANNI NALDI • GABRIELLA PINZARI • ALBERTO TONOLO

REDAZIONE:
GILBERTO BINI

PUBBLICAZIONE REALIZZATA CON CONTRIBUTI DEL MINISTERO PER I BENI E LE ATTIVITÀ CULTURALI, DEL MINISTERO
DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA, DELL'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Immagine di copertina:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Binary_octahedral_group_elements2.png

Indice

MARCO ANDREATTA, SILVIA BENVENUTI, ALESSANDRA CELLETTI, ALBERTO COGLIATI, CARLO TOFFALORI	
EDITORIALE	pag. 87
F. CARDIN, R. TAZZIOLI	
<i>Caratteri seminali nell'opera di Ricci Curbastro. Il tensore di curvatura e i simboli di rotazione</i>	» 89
A. CARLOTTO	
<i>L'eredità di Gregorio Ricci-Curbastro nella matematica contemporanea</i>	» 107
A. COGLIATI	
<i>Ricci Curbastro e la nascita del calcolo differenziale assoluto</i>	» 121
A. ZACCAGNINI	
<i>2025. Il teorema di Nicomaco e i suoi sviluppi</i>	» 147
G. CONTI, R. PAOLETTI	
<i>Triangoli, icosaedri e cupole geodetiche</i>	» 163
A. LUCCHINI	
<i>Un approccio asintotico alla teoria dei gruppi finiti</i>	» 187
P. LONGOBARDI, M. MAJ	
<i>Omaggio a Mario Curzio</i>	» 199

EDITORIALE

Questo secondo numero 2025 della Rivista è dedicato principalmente alla figura di un grande matematico italiano, Gregorio Ricci Curbastro. Quest'anno ricorre infatti il centenario della sua scomparsa, avvenuta il 6 agosto del 1925. Ricci, muovendosi lungo la via aperta da Bernhard Riemann, ideò metodi e strumenti matematici che si rivelarono fondamentali per lo sviluppo della teoria della relatività generale di Albert Einstein. Della sua opera ci parlano i primi tre articoli del fascicolo. Il primo, di Franco Cardin e Rossana Tazzioli, descrive due concetti fondamentali che Ricci e il suo allievo Tullio Levi-Civita elaborarono, rispettivamente il tensore di curvatura e i coefficienti di rotazione, e il ruolo che essi ebbero nelle teorie di Einstein. Il patrimonio matematico di Ricci Curbastro è il tema anche del secondo articolo, di Alessandro Carlotto, che ne considera in particolare l'influsso nell'analisi geometrica. Il terzo e ultimo contributo, di Alberto Cogliati, tratta il calcolo differenziale assoluto delle coordinate sviluppato da Ricci e, di nuovo, il suo rilievo nelle successive ricerche di Einstein.

Sempre al 2025, ma per tutt'altri motivi, si riferisce l'articolo seguente, di Alessandro Zaccagnini. Lo spunto è la proprietà aritmetica di 2025, che è il quadrato della somma dei primi 9 numeri interi positivi e di conseguenza, per un classico teorema di Nicomaco, la somma dei cubi di questi numeri. In generale, infatti, per ogni intero non negativo N , la somma dei primi $N + 1$ cubi di interi positivi coincide col quadrato della somma dei primi $N + 1$ interi, e dunque con $\frac{1}{4}N^2(N + 1)^2$, si esprime quindi come polinomio di grado 4 in N . Il lavoro esplora la possibilità di rappresentare, per ogni scelta di interi non negativi k, N , la somma delle prime $N + 1$ potenze k -me di interi positivi come polinomio a coefficienti razionali di grado $k + 1$ in N . Strumenti di combinatoria e di analisi matematica sono impiegati per questo obiettivo.

Argomento molto diverso è quello dell'articolo successivo, di Giuseppe Conti e Raffaella Paoletti. Si parla infatti di cupole geodetiche, e si descrive come la loro geometria si colleghi non solo ad architettura, ingegneria e design, ma anche a biologia e chimica.

Gli ultimi due articoli del fascicolo trattano di teoria dei gruppi. Patrizia Longobardi e Mercede Maj ci consegnano il ritratto di uno dei suoi grandi maestri italiani, Mario Curzio, descrivendone vita, idee e opere.

Prima ancora, Andrea Lucchini tratta temi di teoria asintotica dei gruppi: ricorda vari invarianti numerici che si possono assegnare ai gruppi finiti, per esempio il numero dei sottogruppi, ed evidenzia alcune regolarità che si possono trovare nel comportamento asintotico di questi invarianti e che concorrono così a caratterizzare i gruppi cui essi si riferiscono.

Concludiamo questa presentazione con qualche anticipazione sul fascicolo di dicembre, che sarà ancora ispirato da varie ricorrenze del 2025: il centenario della scomparsa di Felix Klein e di Gottlob Frege, ma anche il centenario della nascita di Giovanni Prodi; per altri versi, il settantesimo anniversario della Fondazione del C.I.M.E, Centro Internazionale Matematico Estivo "Roberto Conti".

Ma intanto, buona lettura per questo numero di agosto!

MARCO ANDREATTA
(Direttore Responsabile)

CARLO TOFFALORI
(Direttore Editoriale)

SILVIA BENVENUTI, ALESSANDRA CELLETTI, ALBERTO COGLIATI
(Coordinatori scientifici)



Caratteri seminali nell'opera di Ricci Curbastro. Il tensore di curvatura e i simboli di rotazione

FRANCO CARDIN

Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita, Università di Padova

E-mail: cardin@math.unipd.it

ROSSANA TAZZIOLI

Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, France

E-mail: rossana.tazzioli@univ-lille.fr

Sommario: *Questo articolo delinea due fondamentali contributi di Gregorio Ricci Curbastro che sono in realtà fortemente intrecciati: il tensore di curvatura a due indici e i coefficienti di rotazione. Il loro destino culturale incrociò l'opera di Albert Einstein e per entrambi l'azione militante fu svolta da Tullio Levi-Civita, brillante allievo di Ricci a Padova.*

Abstract: *This article outlines two fundamental contributions by Gregorio Ricci-Curbastro, which are in fact deeply interconnected: the two-index curvature tensor and the rotation coefficients. Their intellectual legacy intersected with the work of Albert Einstein, and in both cases, a pivotal role was played by Tullio Levi-Civita, Ricci's brilliant student in Padua.*

1. – Introduzione

Bisognerebbe esser grati anche ai bersaglieri di Porta Pia se Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925) divenne lo scienziato matematico che tutti conosciamo. In seguito a quello storico evento, Ricci abbandonò infatti l'università papalina che aveva cominciato a frequentare su suggerimento del padre, molto pio. Nonostante quell'atto di fuga da Roma capitale, quel padre e tutta la famiglia non manifestarono affatto atteggiamenti di oltranzismo vetero-clericale e sicuramente Gregorio fu un sincero sostenitore dell'unità italiana ([62], pp. 132-134). Dopo due anni nella sua Lugo, eccolo all'università di Bologna, e infine l'anno successivo entrare nella

Scuola Normale di Pisa. Quello fu il vero inizio del suo percorso scientifico.

Ora volgiamoci all'indietro di circa vent'anni: nel 1854, Bernhard Riemann (1826-1866) presentò presso l'Università di Gottinga, dove si era laureato, una dissertazione per ottenere il titolo di Privatdozent, *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria* [52], che sarà pubblicata solo nel 1868. Aveva preliminarmente elaborato tre possibili lezioni, due sull'elettromagnetismo e una sulla geometria. Carl Friedrich Gauss (1799-1855), che da molto tempo si occupava di teoria delle superfici e ne aveva elaborato la sistemazione definitiva, scelse – sembra inaspettatamente per Riemann – la lezione sulla geometria, che sarebbe diventata un classico della matematica a venire. Qui, Riemann pose le basi metriche di quella che oggi si chiama varietà riemanniana caratterizzata dal “quadrato dell'elemento di linea”

Accettato: 25 giugno 2025.

$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, dove $g_{\mu\nu}$ denota il cosiddetto *tenore metrico*, e dalla correlata curvatura, $R_{\mu\nu\rho\sigma}(g(x), \partial g(x), \partial^2 g(x))$. La lezione, probabilmente troppo avanzata per gli auditori della conferenza che erano per la maggior parte filosofi, fu molto apprezzata da Gauss. Questi comprese appieno la profondità dei concetti introdotti dal giovane Riemann che generalizzavano al caso di spazi a n dimensioni e con una visione matematica rivoluzionaria il panorama bidimensionale che lui stesso aveva messo a punto⁽¹⁾.

Torniamo a Ricci, che arrivò a Pisa nel 1873-74. Alla Scuola Normale Superiore uno dei suoi maestri, Enrico Betti (1823-1892), conosceva bene l'opera di Riemann del quale fu anche grande amico. Nel 1875, Ricci si laureò con una tesi dal titolo *Sulle ricerche di Fuchs sulle equazioni differenziali lineari*. Rimase a Pisa e presentò l'anno successivo il lavoro *Su una generalizzazione del problema di Riemann sulle funzioni ipergeometriche* per ottenere l'accesso all'insegnamento. Non c'è traccia di pubblicazione né per questo articolo, né per la sua tesi di laurea.

Ricci vinse una borsa di studio che gli consentì di trascorrere l'anno 1877-78 (nota bene, dieci anni dopo la pubblicazione della lezione di Riemann sui principi della geometria), alla Technische Hochschule di Monaco, ove conobbe Felix Klein (1849-1925) e Alexander Wilhelm von Brill (1842-1935). Ricci frequentò le lezioni di entrambi. Poté dunque, all'Università di Monaco, allargare gli orizzonti culturali della geometria differenziale di Riemann appresa da Betti a Pisa aprendosi anche alla teoria dei gruppi di trasformazione tanto importante nella matematica di Klein. Tuttavia furono Riemann, Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) e Rudolf Lipschitz (1832-1903) i suoi principali punti di riferimento.

Dopo il suo rientro a Pisa, nel 1879, Ricci divenne assistente di Dini. Dal 1880 fu professore a Padova. I suoi primi lavori riguardavano la fisica matematica, in particolare l'elettromagnetismo, e la teoria delle equazioni differenziali. La straordinaria fioritura creativa di Ricci avvenne tra il 1884 e il 1894. Una profonda ed efficace ricerca sulle forme quadratiche

e invarianti lo condusse all'edificazione del 'calcolo differenziale assoluto' (oggi *calcolo tensoriale*)⁽²⁾. La 'derivazione covariante', introdotta da Christoffel come un ingrediente di sistemazione analitica, assunse un posto chiave nella sua visione geometrica costruita intorno al concetto di invariante⁽³⁾.

Assieme al suo allievo Tullio Levi-Civita (1873-1941), laureatosi a Padova nel 1894 con una tesi dal titolo *Sugli invarianti assoluti* [28], perfezionò la sua teoria ampliandola ad un mondo nuovo di applicazioni matematiche e fisiche. La sintesi alta della loro collaborazione fu il lavoro di rassegna sui loro risultati, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* del 1901 (in seguito *Méthodes*) [49], un articolo caldeggiato dallo stesso Klein. Per circa vent'anni, fino alla pubblicazione dei trattati di Levi-Civita [31], questo importante lavoro svolse il ruolo di manuale di riferimento per il calcolo tensoriale.

Prima della formulazione della relatività generale da parte di Albert Einstein (1878-1955), nel 1915, Ricci non ottenne in Italia il successo sperato per il suo calcolo differenziale assoluto. Sopportò comunque con dignità la non assegnazione del Premio Reale dell'Accademia dei Lincei, per ben due vol-

⁽²⁾ La costruzione del calcolo differenziale assoluto da parte di Ricci è narrata nell'articolo di Alberto Cogliati pubblicato in questo volume.

⁽³⁾ Breve digressione: se la rappresentazione di un campo vettoriale X in coordinate x si rilegge 'tensorialmente' nelle coordinate $\bar{x} = \bar{x}(x)$ come $\bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} X^j$, questo non accade per le derivate parziali $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ di X ; si trasformano invece 'tensorialmente' le 'derivate covarianti' di X : $D_{x^j} X^i := \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \ k \end{smallmatrix} \right\} X^k$. Qui, $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} (g_{\ell j, k} + g_{k \ell, j} - g_{j k, \ell}) g^{\ell i}$ sono i simboli di Christoffel (del 2° tipo). Pertanto, la derivata covariante di X rispetto al campo vettoriale Y è: $D_Y X^i = D_{x^j} X^i Y^j$ e la derivata covariante di X rispetto alla curva $x(\lambda)$ è: $D_\lambda X^i = D_{x^j} X^i \dot{x}^j$. Ora, con queste definizioni il vettore $D_Y X^i$ si trasforma esattamente come il vettore X di cui sopra: $D_{\bar{Y}} \bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} D_Y X^j$, mentre l'oggetto geometrico a due indici $D_{x^j} X^i$ si trasforma come un *tenore* con un indice controvariante (tipo vettore) e un indice covariante (tipo forma lineare): $D_{x^j} \bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} D_{x^s} X^r$, [5], [8], [11], [60].

⁽¹⁾ Questo percorso è stato narrato più volte con varie modalità e ricchezza di dettagli dal punto di vista storico e tecnico, [1, 3, 8, 57, 59, 60, 62].

te⁽⁴⁾ (1887 e 1901), un riconoscimento lungamente atteso.

Levi-Civita, da parte sua, applicò con successo il calcolo tensoriale in lavori di altissimo livello che riguardavano la meccanica analitica, i potenziali binari e altri ancora, pubblicati anche prima delle teorie di Einstein. Nella primavera del 1915, ebbe uno scambio epistolare con Einstein che contribuì a orientare il fisico tedesco verso la corretta formulazione delle equazioni di campo gravitazionale. Nel 1917, Levi-Civita fece un ritorno trionfale alla geometria differenziale pubblicando la sua celebre memoria sul ‘trasporto parallelo’ [29].

In questo articolo, ci soffermiamo sulla comune crescita scientifica di Ricci e del suo allievo. In particolare, mettiamo in evidenza *due* aspetti fondamentali che esprimono la profondità del loro approccio alla geometria differenziale: l’accostamento di metodi di calcolo tensoriale che diverranno classici combinati all’uso del ‘triedro mobile’ come emerge dalla descrizione per ‘congruenze’⁽⁵⁾. Da questo approccio nasceranno dei nuovi oggetti matematici, come i simboli di rotazione di Ricci.

Per il nostro scopo, prendiamo in considerazione soprattutto due lavori: l’articolo di Ricci del 1896 intitolato *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque* [46] e il successivo vasto articolo di rassegna redatto assieme a Levi-Civita *Méthodes* [49].

In entrambi i lavori, dopo preamboli basilari, si riannodano nell’ordine, metrica, simboli di Christoffel e il tensore di curvatura di Riemann. Questo viene effettuato con il linguaggio che diventerà usuale del calcolo tensoriale. Si afferma che in dimensione $n = 2$ la curvatura è completamente enucleata nella contrazione totale dei quattro indici di Riemann, riottenendo così la curvatura di Gauss, mentre per $n = 3$ si ottiene il tensore a due indici nell’unica contrazione non banale del tensore di Riemann, $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$, che racchiude tutte le informazioni sulla curvatura. In

[49] gli autori lo battezzano “système contrevariant de Riemann”, ma solo in seguito, con un’attribuzione largamente accettata e nata nel processo di genesi della relatività generale, sarà denominato con il suo nome definitivo: tensore di curvatura di Ricci (si veda la Sezione 2).

Sempre in entrambi i lavori, l’esposizione geometrica di cui sopra viene ricostruita nell’universo descrittivo delle ‘congruenze’: la geometria curva delle varietà n -dimensionali è disegnata dai flussi di n assegnati campi vettoriali linearmente indipendenti λ_j , $j = 1, \dots, n$. Metrica, curvatura di Riemann e di Ricci si lasciano descrivere mediante i λ_j e le loro derivate. Ed è in questo nuovo scenario che emergono quelli che saranno denominati simboli di rotazione γ_{ijk} sui quali ci soffermeremo nella Sezione 3. Questi nuovi oggetti matematici diventano immediatamente centrali nella teoria di Ricci: le formule (20) e (21) a p. 512 di [49] riscrivono il tensore di Riemann in termini dei simboli di rotazione e le (22) e (21)₂ il “système contrevariant de Riemann” che per $n = 3$ è equivalente alla curvatura di Ricci. Si tratta di tutta una serie di formule che riporterà “quasi verbatim” Attilio Palatini (1889-1949) nel 1929 nel suo lavoro sul principio variazionale relativistico [42].

Erano costruzioni legate alla forte pulsione di Ricci di rileggere ed ampliare *aspetti classici*, principalmente di geometria differenziale delle superfici e di teoria degli invarianti, nelle nuove teorie che si stavano affacciando. Con il suo tensore di curvatura, già presente nell’articolo del 1896 [46], Ricci riproponeva un meccanismo di *indagine spettrale* esistente nell’ambito della teoria classica gaussiana della curvatura, legata all’operatore (matriciale) di Weingarten. Si ricorda, tra le molte sue applicazioni, il significato della valutazione della forma quadratica su un vettore unitario, $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$, che rappresenta la *media delle curvature sezionali* rispetto ai piani passanti per v^μ moltiplicata per $n - 1$; inoltre, va menzionata la sua rinnovata vitalità negli ultimi decenni, legata al cosiddetto *flusso di Ricci*, che è stato lo strumento chiave per la soluzione della congettura di Poincaré.⁽⁶⁾

⁽⁴⁾ Con relazioni rispettivamente di Beltrami nel 1887 e di Bianchi nel 1901. Sulla diffusione del calcolo tensoriale si veda [11].

⁽⁵⁾ Attribuita da Ricci a Jean Gaston Darboux (1842-1917), in seguito esaustivamente studiata da Élie Joseph Cartan (1869-1951).

⁽⁶⁾ Su questo argomento si veda l’articolo di Alessandro Carlotto, pubblicato in questo stesso volume.

Con i suoi simboli di rotazione, Ricci generalizza in maniera definitiva la nozione qualitativa di *rotazione* locale, a qualunque dimensione nell'ambiente delle congruenze. La teoria delle congruenze e i coefficienti di rotazione di Ricci ebbero inoltre un profondo impatto sulla ricerca di Levi-Civita in geometria, equazioni differenziali e fisica matematica. In particolare, i coefficienti di rotazione si rivelarono determinanti negli sforzi di Levi-Civita per semplificare le equazioni di campo unificate di Einstein alla fine degli anni '20, come analizzeremo ancora nella Sezione 3.

Nella Sezione 4, infine, vedremo come le congruenze e i coefficienti di rotazione, introdotti da Ricci per le varietà Riemanniane, giochino ancora oggi, secondo alcuni autori, un ruolo importante nelle moderne teorie fisiche.

2. – La doppia vita del tensore di curvatura di Ricci

2.1 – L'emergere e la caduta di $R_{\mu\nu}$

La genesi della relatività generale è stata tormentata e la sua storia è ben documentata da un gran numero di studi sull'argomento. In questo paragrafo, siamo interessati ad un frammento importante di questa storia che coinvolge degli attori importanti, come Einstein, Levi-Civita e indirettamente lo stesso Ricci.

Muovendosi dunque nella ricca letteratura [41, 6, 40, 36], osserviamo come, nella prima decade del secolo XX, si avvertisse nelle comunità dei fisici e dei matematici una certa pulsione per una teoria relativistica della gravitazione. La relatività del 1905 stava realmente affermandosi, ed Einstein era un virtuoso microfono divulgatore delle sue idee, anche di quelle appena in nuce. Si discuteva per esempio di una teoria di Nordström, che Einstein in prima battuta rifiutò e su cui torneremo.

Einstein stesso ci racconta dove e quando si verificò il punto di svolta decisivo:

Ho avuto l'idea cruciale della connessione tra la teoria della gravità e la teoria delle superfici di Gauss nel 1912, dopo essere tornato a Zurigo [Einstein tornò da Praga nell'agosto del 1912] e, a quel tempo, senza conoscere i lavori di Riemann, Ricci e Levi-Civita. ([41], p. 232)

Si rivolse dunque al suo vecchio amico matematico Marcel Grossmann (1878-1936), compagno di studi universitari a Zurigo, ora docente in quell'università. La loro era una solida amicizia: Einstein gli aveva addirittura dedicato la sua tesi dottorato. Tra il 1913 e il 1914 ci furono nove mesi di intenso lavoro comune, e il frutto della collaborazione fu l'articolo *Entwurf* [16].⁽⁷⁾ Grossmann introdusse Einstein nell'universo del calcolo differenziale assoluto di Ricci e Levi-Civita che appariva il completamento naturale dei fondamenti pionieristici di Gauss e Riemann in geometria differenziale.

Molto è stato scritto e commentato a riguardo, e quasi per un senso di sintesi pensiamo auspicabile andare direttamente alla lettura delle fonti. L'*Entwurf* è composto di due parti separate, la prima, *parte fisica*, firmata da Einstein, la seconda, *parte matematica*, da Grossmann.

Dopo un preambolo sul principio di equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale, proponendo in sostanza il famoso esperimento mentale dell'ascensore⁽⁸⁾ in caduta libera, nel primo paragrafo Einstein richiama la struttura variazionale⁽⁹⁾ della dinamica in relatività ristretta di una particella libera in assenza di forze. Nel secondo e terzo paragrafo, mette in risalto il ruolo che il nuovo tensore metrico pseudo-Riemanniano $g_{\mu\nu}$ deve assumere nella teoria gravitazionale in costruzione, le cui dieci componenti indipendenti dovranno rappresentare ciò che il potenziale Newtoniano scalare φ propone nella teoria classica. Viene con naturalezza esteso il principio variazionale sopra richiamato nel caso generale pseudo-Riemanniano. In questo nuovo ambiente, nel paragrafo quarto vengono estese le leggi

⁽⁷⁾ "Entwurf" è il termine tedesco che significa "bozza" o "progetto"; nella letteratura scientifica internazionale sull'argomento, si osserva che questo termine non viene mai tradotto, probabilmente come forma di riconoscimento verso quei due grandi pionieri.

⁽⁸⁾ Einstein usa il termine "Kasten" (box, scatola).

⁽⁹⁾ Einstein correttamente la attribuisce a M. Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. (1906): 136. Il rapporto con Planck fu importante e per alcuni aspetti a volte contrastante. Einstein avrebbe ricordato le parole che gli rivolse Planck: "Se posso darle un consiglio d'amico, io che sono più vecchio di Lei, lasci perdere quest'idea: in primo luogo non avrà successo, e se anche dovesse averlo nessuno La prenderà sul serio". ([41], p. 259).

di conservazione 4-dimensionali della relatività ristretta per un tensore energia-impulso adeguato alla materia disgregata: $\Theta_{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$ (vedi le formule a p. 159 della versione inglese di [16]).

Il quinto paragrafo si apre con una modalità molto seducente, proponendo delle equazioni di campo della forma:

$$(1) \quad \kappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu},$$

dove κ è una costante e $\Gamma_{\mu\nu}$ è il tensore gravitazionale ‘ancora da trovare’:

che deve essere derivato dal tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ tramite operazioni differenziali. In linea con la legge di Newton-Poisson,

$$(2) \quad \Delta\varphi = 4\pi\kappa\rho,$$

si sarebbe inclini a richiedere che queste equazioni siano di secondo ordine.

Einstein prosegue:

Va sottolineato che risulta impossibile trovare un'espressione differenziale $\Gamma_{\mu\nu}$ che sia una generalizzazione di $\Delta\varphi$ e che dimostri di essere un tensore rispetto a trasformazioni arbitrarie. Di sicuro, non si può negare a priori che le equazioni finali esatte della gravitazione possano essere di ordine superiore al secondo. Pertanto, esiste ancora la possibilità che le equazioni differenziali perfettamente esatte della gravitazione possano essere covarianti rispetto a trasformazioni arbitrarie. Ma dato lo stato attuale della nostra conoscenza delle proprietà fisiche del campo gravitazionale, il tentativo di discutere tali possibilità sarebbe prematuro. Per questo motivo dobbiamo limitarci al secondo ordine e dobbiamo quindi rinunciare a stabilire equazioni gravitazionali che siano covarianti rispetto a trasformazioni arbitrarie. Inoltre, va sottolineato che non abbiamo alcuna base per assumere una covarianza generale delle equazioni gravitazionali. ([16], p. 160)

Viene quindi stralciata la possibilità di usufruire della curvatura di Riemann, più esattamente del tensore contratto di curvatura a due indici di Ricci. E questo nonostante il fatto che, come scrive Grossmann nella seconda parte, esso sembri il naturale candidato per una formulazione del tipo (1) visto che anche il tensore energia impulso – mutuato dalla relatività ristretta – appare come un oggetto tensoriale a due indici. Tuttavia, la covarianza generale

per la (1) – operante in *ogni* sistema di riferimento – non comportava la riduzione asintotica all'equazione di Newton-Poisson (limite classico).

In un sol colpo avviene quindi la doppia catastrofe, che sarà sanata solo due anni dopo: abbandono della covarianza generale e dell'utilizzo della curvatura di Ricci. Per supplire a tutto ciò Einstein (nella sua prima parte dell'*Entwurf* non viene mai citata la curvatura, né di Riemann né di Ricci) ricorrerà ad un principio variazionale per dedurre delle equazioni di campo, ben addomesticate a ridursi a Newton-Poisson e covarianti solamente per una limitata classe di trasformazioni di coordinate che estende parzialmente la classe delle trasformazioni lineari affini. Le nuove equazioni proposte da Einstein (7), qui di seguito, saranno deducibili da un principio variazionale che Einstein riproporrà in maniera più fine nel 1914 nella nota [17] non appena arrivato a Berlino da Zurigo. Un funzionale introdotto è il seguente ⁽¹⁰⁾

$$(3) \quad J = \int_{\Omega} \underbrace{\frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\tau}}_{=:H} \sqrt{-g} \, dx$$

$$\left(L := \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\tau} = \frac{H}{\sqrt{-g}} \right)$$

che appare covariante ‘a vista’ almeno per trasformazioni lineari affini. La riduzione asintotica a Newton-Poisson forza gli autori all'imposizione di ‘opportuni ulteriori vincoli’ ⁽¹¹⁾ che non interpreteranno come restrizioni sulle possibili soluzioni delle equazioni di Euler-Lagrange associate, bensì come restrizioni sulle possibili trasformazioni di coordinate, vincoli che notano essere certamente soddisfatti dalle trasformazioni lineari affini. Teorizzano questa ‘covarianza parziale’ come inevitabile rispetto ad una covarianza generale, che rigettano, anche perché la riduzione a Newton non è pensabile in qualunque sistema di riferimento, bensì in qualche sistema di coordinate spazio-temporali surroganti i sistemi inerziali della meccanica classica.

⁽¹⁰⁾ H è la densità Lagrangiana, è il simbolo – inusuale – usato da Einstein, L è lo scalare invariante Lagrangiano, introdotto qui per convenienza.

⁽¹¹⁾ Non riportiamo qui i dettagli di questo lavoro, si veda a tal proposito il lavoro analitico molto accurato [6].

In quell'articolo, Einstein perfeziona e generalizza dunque l'approccio variazionale, precedentemente sviluppato in collaborazione con Grossmann, e trova quella che (sbagliando, ed è qui che arriverà Levi-Civita) ritiene essere una derivazione più soddisfacente delle sue originali equazioni di campo nell'*Entwurf*. Come richiama anche Cattani in [6], Einstein pensa di essere "riuscito, in particolare, a ottenere le equazioni di campo gravitazionale in un approccio teorico puramente covariante" ([17], p. 1030).

Anche in quest'ultimo contributo dunque, come nel caso dell'*Entwurf*, si evita con cura la possibilità di utilizzare il tensore di curvatura di Ricci.

Questo doppio rifiuto appare una definitiva rimozione, almeno nel 1914, della curvatura di Ricci nel processo di edificazione della relatività generale. Vedremo nel prossimo paragrafo come questa rimozione sarà in realtà solo temporanea.

2.2 – La rinascita di $R_{\mu\nu}$

Come prima precisato, Einstein non cita mai la curvatura di (Riemann e di) Ricci nell'*Entwurf*. Lo fa Grossmann nella sua seconda parte. La curvatura di Ricci farà il suo ingresso con Einstein in un articolo redatto in collaborazione con il giovane Adriaan Daniël Fokker (1887-1972)⁽¹²⁾. In tale lavoro, riprendendo la teoria scalare di Nordström, si mostra come quella teoria possa essere compendiata dall'equazione $R = 24\pi T$, dove R è la curvatura scalare (la traccia della curvatura di Ricci) e T la traccia del tensore energia-impulso.

Quest'idea va in senso contrario alla recente teoria dell'*Entwurf*, senonché alla fine anche questa formulazione per lo stesso Nordström appare da scartare, in quanto non prevede l'influenza della gravitazione sulla propagazione della luce, fatto fisico che una teoria della relatività generale deve richiedere in linea di principio.

Al Politecnico di Milano operava in quegli anni un 'fisico classico' di gran valore, Max Abraham

(1875-1922), che era fortemente dubbioso sulle teorie relativistiche, ma certo non in maniera ideologica. Era in corretta polemica scientifica con Einstein e la sua intolleranza alla nuova teoria gravitazionale, la versione del 1914, crebbe con la proposta, a suo dire assolutamente non motivata, della scelta della Lagrangiana associata al funzionale (3).

Abraham era un buon amico di Levi-Civita, il quale, tra l'altro, aveva fatto parte della commissione di concorso che aveva conferito ad Abraham la cattedra di meccanica razionale al Politecnico. Max chiese allora aiuto all'amico Tullio affinché fosse infine chiarito cosa stava accadendo attorno a quella teoria. Tullio di buon grado si immerse nella teoria di Einstein e scoprì che si trattava di una clamorosa interpretazione fisica – quasi una semantica – di quella potente costruzione matematica, il calcolo differenziale assoluto, che lui e Ricci si erano ormai lasciati alla spalle da anni. Tullio avvertì un errore, e subito scrisse ad Einstein, ma non criticò tanto l'abbandono della covarianza generale: l'argomentare epistolare con Einstein riguardava la critica alla covarianza (quella parziale, nel senso introdotto da Einstein) delle equazioni di Euler-Lagrange associate alla Lagrangiana (3), più precisamente della quantità a due indici qui sotto, $\frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$.

Ma andiamo per ordine. Il principio variazionale di Einstein proponeva che le variazioni δJ di J bilanciassero $\int_{\Omega} 2\kappa\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} dx$, per variazioni $\delta g_{\alpha\beta}$ nulle assieme alle loro derivate parziali sul bordo di Ω :

$$(4) \quad \int_{\Omega} (\delta H - 2\kappa\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}) dx = 0;$$

più in dettaglio $\left(g_{\alpha\beta,\rho} := \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}g_{\alpha\beta}\right)$,

$$(5) \quad \int_{\Omega} \left\{ \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}}(L\sqrt{-g}) - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta,\rho}}(L\sqrt{-g}) \right) \right]}_{=: \mathfrak{G}^{\alpha\beta}} - 2\kappa\sqrt{-g}T^{\alpha\beta} \right\} \delta g_{\alpha\beta} dx = 0.$$

Notiamo che $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$ rappresenta il primo membro delle equazioni di Euler-Lagrange relative a δJ .

⁽¹²⁾ Aveva appena conseguito il dottorato nel 1913, restò celebre per l'equazione di Fokker-Planck. Suo cugino Antony, ancora più giovane di lui, fu il costruttore degli aerei da guerra Fokker, tra cui il triplano reso famoso dalle gesta di Manfred von Richthofen, più noto come il 'Barone Rosso'.

Questa condizione variazionale si riscrive:

$$(6) \quad \int_{\Omega} \left[\frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} - 2\kappa T^{\alpha\beta} \right] \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g} dx = 0,$$

da cui le equazioni di campo di Einstein-Grossmann:

$$(7) \quad \frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} = 2\kappa T^{\alpha\beta}.$$

Il ragionamento di Einstein seguiva la seguente linea di pensiero: si osservi il principio variazionale di cui sopra, dato che $T^{\alpha\beta}$ è un 2-tensore controvariante, $\delta g_{\alpha\beta}$ è un 2-tensore covariante, $\sqrt{-g} dx$ è la misura invariante, e ‘certamente’ δJ è scalare invariante rispetto alla covarianza limitata (noi vediamo esserlo almeno rispetto alle trasformazioni lineari affini); allora necessariamente $\frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$ è un 2-tensore controvariante. Fatto quest’ultimo fondamentale per la tenuta della teoria.

Quell’argomentare era fallace. Furono quasi tre mesi di intenso scambio epistolare, Einstein non si dava per vinto non accettando la critica di Levi-Civita che avrebbe scardinato quanto proposto con Grossmann e rifinito in [17]. Alla fine, poco prima dell’entrata in guerra dell’Italia che avrebbe interrotto drasticamente la corrispondenza tra Padova e Berlino, Einstein capitolò, Levi-Civita aveva ragione, e negli anni successivi sempre con grande riconoscenza e amicizia lo ringraziò pubblicamente.

Forse non è propriamente esatto affermare che Levi-Civita corresse direttamente un errore della relatività generale: l’effetto reale di quello scambio fu il completo abbandono, il disamore di Einstein per quella teoria gravitazionale finora elaborata che lo indusse a prendere la via del ripristino della covarianza generale e della reintroduzione della curvatura di Ricci $R_{\mu\nu}$.

Accadde nel novembre del 1915 che, con una successione di lavori presentati e ricorretti a più riprese, Einstein dedusse e pubblicò le equazioni, corrette, nella forma

$$(8) \quad R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right),$$

con $T = T^{\mu}_{\mu}$, utilizzando sistemi di coordinate in cui $\sqrt{-g} = 1$ e ben sottolineando che tale restrizione non costituiva affatto una rinnovata limitazione della

covarianza. Le leggi di conservazione $D_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$, ove D_{ν} è la derivata covariante, furono invece imposte da Einstein come restrizioni ineluttabili. Un semplice conto avrebbe mostrato che le (8) erano equivalenti alle

$$(9) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

e che grazie alle identità di Bianchi valeva l’identità $D_{\nu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0$, rimuovendo così definitivamente quell’ulteriore imbarazzante restrizione. A quel tempo Einstein non conosceva le identità di Bianchi, come è stato evidenziato in [41] e [61]; ma fu comunque in grado nel 1916 di dedurre per calcolo diretto le leggi di conservazione $D_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$. Fu poi Levi-Civita in [30] che dedusse elegantemente le leggi di conservazione ereditandole direttamente dalle identità di Bianchi. Questi le propose nel lavoro [2] del 1902, sebbene erano state precedentemente introdotte da Ricci nel 1888 [45]. Riportiamo qui di seguito Toscano:

Dopo l’articolo del 1902 il matematico parmense [Bianchi] non tornò più sulle “sue” identità. Curiosamente queste comparvero l’anno successivo in un lavoro su varie questioni di geometria differenziale proprio di Ricci, il quale peraltro non esitò ad attribuirle a Bianchi. Questo più di modestia pare confermare l’affermazione di Levi-Civita, riportato nel paragrafo precedente, secondo la quale Ricci aveva dimenticato le identità da lui trovate tredici anni prima di Bianchi. ([61], p. 365)

La formulazione variazionale di queste ultime equazioni fu proposta da David Hilbert (1862-1943) in [25], successivamente, da Hermann Weyl (1885-1955) [64] poi da Attilio Palatini [42] e infine generalizzata da vari autori, in molteplici contesti fisici e matematici.

3. – Congruenze e simboli di rotazione di Ricci

In questo paragrafo mostreremo come, a partire da idee seminali di Ricci, Levi-Civita abbia intrecciato una nuova importante disputa scientifica con Einstein sulle teorie unificate di campo verso la fine degli anni venti.

3.1 – Da Beltrami a Ricci e Levi-Civita

In alcuni lavori pubblicati alla fine del XX secolo e ispirati da idee di Eugenio Beltrami (1835-1900) nello scenario dello spazio Euclideo tridimensionale, Ricci generalizzò la teoria delle congruenze in una varietà Riemanniana n -dimensionale V_n facendo uso del calcolo tensoriale [46], [48]. Considerò infatti sistemi di linee in forma covariante o controvariante che indicò con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ and $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ rispettivamente, con norma unitaria⁽¹³⁾:

$$(10) \quad \sum_{r=1}^n \lambda^r \lambda_r = 1$$

λ^r è un *campo vettoriale unitario* e il parametro di evoluzione è la lunghezza d'arco s . Indicando⁽¹⁴⁾

$$ds^2 = \sum_{r,s=1}^n g_{rs} dx^r dx^s$$

dove, come già denotato, g_{rs} è il tensore metrico di V_n , le equazioni

$$(11) \quad dx^r/ds = \lambda^r \quad r = 1, 2, \dots, n$$

rappresentano ∞^{n-1} curve in V_n : un presupposto teorema di esistenza e unicità garantisce che per ogni punto della varietà passi una ed un'unica curva della congruenza ([46], p. 19-20).

Ricci introdusse in seguito dei sistemi covarianti di n congruenze ortogonali $\lambda_{1|r}, \lambda_{2|r}, \dots, \lambda_{n|r}$, per cui valgano le seguenti equazioni⁽¹⁵⁾

$$(12) \quad \sum_{r=1}^n \lambda_h^r \lambda_{k|r} = \delta_{hk}.$$

Qui $\sum_{r=1}^n \lambda_h^r \lambda_{k|r}$ chiaramente significa $\sum_{r,s=1}^n g^{rs} \lambda_{h|r} \lambda_{k|s}$. Si noti che la piccola sbarra verticale separa l'indice

⁽¹³⁾ Beltrami e Ricci chiamarono “congruenze di curve” ciò che oggi denotiamo come “campi vettoriali”.

⁽¹⁴⁾ Nel seguito, a differenza di quanto adottato nel paragrafo precedente, useremo le notazioni originali di Ricci e Levi-Civita. Questa scelta qui è essenziale per non stravolgere le definizioni che seguiranno dei simboli di rotazione. Il rispetto della notazione ‘indici in alto controvarianti’ e ‘indici in basso covarianti’ divenne rigoroso solamente in anni successivi.

⁽¹⁵⁾ A partire dal seminale teorema di Hopf, una varietà compatta V_n ammette un campo vettoriale senza zeri se e solo se la sua caratteristica di Eulero $\chi(V_n)$ è nulla, un'attenta cura topologica è necessaria nel trattare l'esistenza globale di tetradi, che sono n -uple di campi vettoriali linearmente indipendenti.

del nome del campo vettoriale dall'indice ereditato dalle *coordinate* solamente nella forma covariante. Mise inoltre in risalto che⁽¹⁶⁾

$$(13) \quad \sum_{h=1}^n \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} = g_{rs}$$

è equivalente a (12).

È ancora nel lavoro del 1896 [46] che Ricci introdusse i “coefficienti di rotazione” γ_{hij} e ne diede un significato cinematico. A questo scopo, considerò la derivata covariante⁽¹⁷⁾ $\lambda_{h|r}$ che denotò con $\lambda_{h|rs}$,

$$(14) \quad \lambda_{h|rs} = D_s \lambda_{h|r} = \frac{\partial \lambda_{h|r}}{\partial x_s} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} l \\ r \ s \end{matrix} \right\} \lambda_{h|l}$$

e definì, senza alcuna giustificazione a priori, le seguenti quantità:

$$(15) \quad \gamma_{hij} = \sum_{r,s=1}^n \lambda_i^r \lambda_j^s \lambda_{h|rs}$$

che risultarono equivalenti alle

$$(16) \quad \lambda_{h|rs} = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{hij} \lambda_{i|r} \lambda_{j|s}.$$

Dedusse inoltre per i coefficienti di rotazione γ le seguenti proprietà di anti-simmetria:

$$(17) \quad \gamma_{hij} + \gamma_{ihj} = 0.$$

Dalla loro definizione segue che le espressioni γ sono degli ‘invarianti assoluti’ e dalle (17) che solo $n^2(n-1)/2$ di esse sono linearmente indipendenti.

Inoltre Ricci stabilì le seguenti formule che legano le derivate covarianti dei coefficienti di rotazione con il tensore di curvatura di Riemann via la teoria delle congruenze:

$$(18) \quad \gamma_{hi,kl} = \sum_{qrst} \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qrst}$$

dove con a_{qrst} Ricci indicava l'usuale tensore di Riemann R_{qrst} .

Tali equazioni si riducono per $n = 2$ ad una sola formula che coinvolge la contrazione completa del

⁽¹⁶⁾ Una certa ambiguità insita in queste notazioni sarà rimossa in seguito da Élie Cartan mediante l'introduzione del “repère mobile”.

⁽¹⁷⁾ Si veda la nota 3. Si noti che il segno ‘meno’ rispetto a quanto scritto nella suddetta nota è dovuto alla forma covariante (e non controvariante, quale p.e. X^i) di $\lambda_{h|r}$.

tensore di Riemann, essenzialmente la curvatura gaussiana. Fatto notevole, per $n = 3$ Ricci dedusse dalle equazioni (18) le seguenti formule:

$$(19) \quad \gamma_{hk} = \sum_{rs} a^{(rs)} \lambda_{h|r} \lambda_{k|s}.$$

Oggi i simboli $a^{(rs)}$ si identificano con il tensore di curvatura di Ricci, R^{rs} .

Questa esposizione di Ricci è ripresa nell'articolo in collaborazione con Levi-Civita *Méthodes* [49], Cap. II, §4.

Il significato ultimo di γ_{hij} diventa piuttosto chiaro quando proviamo a testarlo nello spazio Euclideo ($\mathbb{R}^3, \mathbb{I}$). Utilizzando sostanzialmente la linea di pensiero di Ricci, in ogni punto P consideriamo un 'triedro' T_{hij} formato dalle tangenti in P alle rette della terna delle congruenze ortonormali $\lambda_h, \lambda_i, \lambda_j$ prese nelle loro direzioni positive. L'invariante γ_{hij} rappresenta la componente secondo la direzione (i) della rotazione che agisce su (h) quando il triedro in P è sottoposto a uno spostamento positivo infinitesimo lungo la direzione (j). Pensiamo al moto rigido risultante $\tau \mapsto \alpha_{(j)}(\tau) \in SO(3)$ descritto dalla terna e alla congruenza sopra descritta $\frac{dx_{(j)}}{d\tau}(\tau, x) = \lambda_j(x_{(j)}(\tau, x))$, $x_{(j)}(0, x) = x$. Ricordiamo che per i moti rigidi le derivate dei versori $\lambda_h(x_{(j)}(\tau, x)) = \alpha_{(j)}(\tau) \lambda_h(x)$ valutate nella base ruotata mobile

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \lambda_h(x_{(j)}(\tau, x)) &= \dot{\alpha}_{(j)}(\tau) \lambda_h(x) = \\ &= \dot{\alpha}_{(j)}(\tau) \alpha_{(j)}^T(\tau) \lambda_h(x_{(j)}(\tau, x)), \end{aligned}$$

sospendendo la scrittura degli argomenti, giungiamo all'espressione

$$\begin{aligned} (20) \quad \gamma_{hij} &= D_{\lambda_j} \lambda_h \cdot \lambda_i = \\ &= \frac{d}{d\tau} \lambda_h(x_{(j)}(\tau, x))|_{\tau=0} \cdot \lambda_i = \dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \lambda_h \cdot \lambda_i = \\ &= \left(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \right)_{hi} = - \left(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \right)_{ih}. \end{aligned}$$

Alla matrice anti-simmetrica $(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T)_{hi}$ resta correlato – solo in dimensione 3 – il vettore polare, detto la *velocità angolare* $\omega_{(j)}$,

$$(21) \quad \left(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \right)_{hi} v_i = (\omega_{(j)} \times v)_h, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Si osservi che la teoria delle congruenze è presentata per la prima volta in modo sistematico nell'articolo congiunto *Méthodes* [49] del 1901. Successivamente, Levi-Civita introduce il trasporto parallelo riuscendo a mostrare un legame profondo tra questo concetto e

la teoria delle congruenze che sviluppa soprattutto nelle sue lezioni di calcolo differenziale assoluto [31].

Sinteticamente, Levi-Civita definisce il trasporto per parallelismo nei seguenti termini. Data una curva C in una varietà Riemanniana (V_n, g_{rs}) ,

$$C : [a, b] \ni \tau \mapsto x(\tau) \in V_n$$

un vettore assegnato $\xi_0 \in T_{x(a)} V_n$ si trasporta parallelamente lungo C , e dunque si intenderà $\xi(\tau) \in T_{x(\tau)} V_n$, se e solo se

$$(22) \quad D_\tau \xi^l(\tau) = \frac{d}{d\tau} \xi^l(\tau) + \left\{ \begin{matrix} l \\ r \ s \end{matrix} \right\} (x(\tau)) \xi^r(\tau) \dot{x}^s(\tau) = 0,$$

cioè, la derivata covariante di ξ lungo la curva C sia nulla.

A questo punto Levi-Civita disegna lo spazio come riempito da un insieme di curve definite dal flusso di un'equazione differenziale associata ad un campo vettoriale, che sarà λ_n^l , $l = 1, \dots, n$. Per ogni punto P della varietà V_n , si costruiscono n direzioni ortogonali lungo l'unica curva passante per P come segue: $n - 1$ direzioni vengono tracciate in ogni punto P della curva, formando un sistema ortogonale Ω assieme alla direzione tangente a C in P . Questo approccio produce un "insieme di congruenze ortogonali di rette" in ogni punto, rappresentato da quantità con due indici. Ad esempio, la congruenza indicizzata da h è caratterizzata dal campo vettoriale $\lambda_h^1, \lambda_h^2, \dots, \lambda_h^n$ (denominati "parametri"), mentre la correlata forma differenziale è espressa dagli elementi reciproci $\lambda_{h|1}, \lambda_{h|2}, \dots, \lambda_{h|n}$ (chiamati "momenti"). L'indice n corrisponde alla direzione della curva C :

$$\dot{x}^r = \lambda_n^r \sum_{s=1}^n g_{rs} \dot{x}^s = \lambda_{n|r} \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Poiché le congruenze sono composte da n campi vettoriali λ_h^r (o n forme differenziali con $\lambda_{h|r}$), esse sono tutte funzioni di x . Levi-Civita propone la seguente definizione:

$$\begin{aligned} (23) \quad p_{hk} &:= \sum_{i=1}^n \frac{d\lambda_{h|i}}{d\tau} \lambda_k^i - \sum_{i,j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ l \end{matrix} \right\} \lambda_{h|i}^j \lambda_k^l \lambda_{h|l}^i = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_k^i \lambda_h^j \left[\frac{\partial \lambda_{h|i}}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\} \lambda_{h|l}^i \right]. \end{aligned}$$

Ne risulta che $p_{hk} = \gamma_{hkn} = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{h|ij} \lambda_k^i \lambda_n^j = -p_{kh}$ e che ogni vettore ξ^j , rappresentato nella base delle congruenze $\lambda_{h|i}$, cioè $z_h = \sum_{i=1}^n \xi^i \lambda_{h|i}$, evolve per

trasporto parallelo con l'importante significativa relazione differenziale: $\frac{dz_h}{d\tau} = \sum_{k=1}^n p_{hk} z_k$.

Levi-Civita riesce dunque a costruire un ponte tra il concetto di parallelismo e la teoria delle congruenze. In particolare, il parallelismo e le sue implicazioni svolgono un ruolo cruciale nel chiarire le interconnessioni tra diverse discipline, analitiche e geometriche. Per esempio, nel suo trattato Levi-Civita mette in relazione la teoria delle forme pfaffiane con la geometria differenziale, e ne interpreta alcuni aspetti via l'uso della teoria delle congruenze e dei coefficienti di rotazione di Ricci⁽¹⁸⁾. Inoltre, come vedremo nei prossimi paragrafi, i coefficienti di rotazione consentono a Levi-Civita di riscrivere in termini di calcolo differenziale assoluto le equazioni che Einstein aveva trovato nel tentativo di unificare gravitazione ed elettromagnetismo (vedi Sezione 3.3).

Questo punto di vista culturale di Levi-Civita sull'uso delle tetradi risulterà essenziale in varie direzioni: basti per esempio pensare che la teoria di gravità quantistica (dei loops) di Carlo Rovelli è edificata sulla base delle tetradi, e non del tensore metrico, quali incognite di campo. La seguente affermazione di Rovelli ne sottolinea l'importanza:

Chiamo “campo gravitazionale” il campo tetrade piuttosto che il campo metrico di Einstein $g_{\mu\nu}(x)$. Ci sono tre ragioni per questo: (i) il modello standard non può essere scritto in termini di g perché i fermioni richiedono il formalismo tetrade; (ii) il campo tetrade è oggi più utilizzato di g nella gravità quantistica; e (iii) penso che rappresenti il campo gravitazionale in un modo concettualmente più chiaro di g . ([53], p. 34)

3.2 – La teoria unitaria di Einstein e il “Fernparallelismus”

In questo paragrafo introduciamo le equazioni di campo unificate proposte da Einstein in un lavoro del 1929 e “semplificate” da Levi-Civita in una memoria pubblicata lo stesso anno che analizzeremo nel prossimo paragrafo.

La teoria dell'elettone in relatività ristretta di Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) del 1928 ebbe

⁽¹⁸⁾ Per ulteriori dettagli su questi argomenti si veda [60], in particolare la sezione 6.3.

un profondo impatto sul panorama della fisica quantistica. L'equazione di Dirac non solo mostrava invarianza rispetto al gruppo di Lorentz, ma forniva anche una spiegazione corretta della struttura fine osservata nello spettro dell'idrogeno. Lo storico della scienza Dean Rickles osservò che l'introduzione dell'equazione di Dirac fu un importante ‘shock’ intellettuale per molti membri della comunità scientifica in quel periodo ([50], p. 84). Parte dello stupore derivava dal fatto che l'equazione di Dirac *non* era un'equazione tensoriale, cioè non aderiva al principio di covarianza generale, un principio fondamentale della relatività generale ampiamente accettato negli anni '20. Levi-Civita, che contribuì a stabilire il ruolo centrale della covarianza generale nella teoria della relatività generale, probabilmente condivideva questa prospettiva.

L'equazione di Dirac influenzò significativamente la ricerca di nuove teorie di campo unificate, con l'obiettivo di incorporare un'interpretazione dell'elettone in tali teorie. Diversi fisici tentarono di colmare il divario tra la teoria classica dei campi e la meccanica quantistica. Einstein, in particolare, cercò di derivare la meccanica quantistica come conseguenza di una teoria unificata che comprendesse sia i campi gravitazionali che quelli elettromagnetici. A partire dal 1928, concentrò la sua ricerca sul Fernparallelismus, che servì da base per le sue strutture geometriche. Riteneva questo approccio molto promettente, come dimostrato dalla pubblicazione, tra il 1929 e il 1930, di almeno nove articoli sul Fernparallelismus e sulle sue applicazioni alla teoria dei campi unificati.

Nel 1929, in una breve rassegna degli articoli di Einstein su questo argomento, i fisici Norbert Wiener e Manuel Sandoval Vallarta scrissero [65]:

Un'esigenza molto più urgente della relatività generale è l'armonizzazione con la teoria quantistica, in particolare con la teoria di Dirac sull'elettone con spin. Sulla base del parallelismo di Levi-Civita, il compito sembra irrisolto, poiché non disponiamo di mezzi adeguati per confrontare gli spin in punti diversi.

Come Einstein stesso riferisce in un suo primo lavoro sul Fernparallelismus, questo concetto gli permise di confrontare ‘sia i valori assoluti che le direzioni di vettori a distanza’.

Ma entriamo direttamente nella struttura geometrica del Fernparallelismus. Essa consiste in un formalismo localmente espresso dal “ n -Bein” (o

“Vierbein” in quattro dimensioni, oggi: campo di *tetrad*) h_a^ν , tale che ⁽¹⁹⁾

$$\begin{aligned} h_{a\mu} h^{a\nu} &= \delta_\mu^\nu \\ h_{a\mu} h_b^\mu &= \delta_{ab} \end{aligned}$$

dove

le lettere *latine* indicano i vettori del sistema,

le lettere *greche* le componenti di ciascuno.

Le componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ sono date da:

$$g_{\mu\nu} = h_\mu^a h_{a\nu}.$$

Ancora con Wiener e Vallarta:

*Le quantità h_s^λ sembravano avere un **pie**de nel mondo macro-meccanico formalmente descritto dai potenziali gravitazionali di Einstein e caratterizzati dall'indice greco λ e l'altro **pie**de in un mondo Minkowskiano della micro-meccanica, caratterizzato dall'indice latino s . Che il mondo micro-meccanico dell'elettrone sia Minkowskiano è dimostrato dalla teoria di Dirac, in cui lo spin dell'elettrone appare come conseguenza del fatto che il mondo dell'elettrone non è euclideo, ma Minkowskiano. ([65], p. 317)*

Einstein definì il trasporto parallelo con il *differenziale esatto* (la verifica si può ritrovare in [4], App. A):

$$(24) \quad dA^\nu = -\Delta_{\mu\sigma}^\nu A^\mu dx^\sigma$$

dove

$$(25) \quad \Delta_{\mu\sigma}^\nu = h_a^\nu \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\sigma}$$

è, in termini moderni, una connessione affine che è “invariante per rotazione” e asimmetrica nei suoi indici in basso. La curvatura è nulla, mentre la torsione (ovvero la parte antisimmetrica della connessione)

$$(26) \quad \Lambda_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2}(\Delta_{\alpha\beta}^\nu - \Delta_{\beta\alpha}^\nu)$$

resta diversa da zero. Questa connessione determina un nuovo tipo di parallelismo chiamato “parallelismo a distanza” o “parallelismo assoluto”, in inglese “teleparallelism”. ⁽²⁰⁾ Einstein incluse il campo elettromagnetico nelle sue equazioni di campo tramite il

tensore di torsione $\Lambda_{\alpha\beta}^\nu$ interpretandone la traccia $\Lambda_{\alpha\nu}^\nu$ come i potenziali elettromagnetici ϕ_α .

L'obiettivo di Einstein era di ottenere una teoria unificata della gravitazione e dell'elettromagnetismo attribuendo la proprietà di Fernparallelismo a uno spazio metrico quadridimensionale. Dalla relazione di curvatura nulla, Einstein ricavò l'equazione

$$(27) \quad 0 = \Lambda_{\kappa\lambda;\alpha}^\alpha + \phi_{\lambda;\kappa} - \phi_{\kappa;\lambda} + \phi_\alpha \Lambda_{\kappa\lambda}^\alpha$$

dove ϕ_λ è il potenziale elettromagnetico definito sopra.

Utilizzando il suo sistema di riferimento ortogonale h_s^ν , definì la densità tensoriale $\mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha$, che è antisimmetrica in κ e λ , come segue: ⁽²¹⁾

$$(28) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha = h(\Lambda_{\kappa\lambda}^\alpha + \phi_\lambda \delta_\kappa^\alpha - \phi_\kappa \delta_\lambda^\alpha)$$

dove h è il determinante di h_s^ν , quindi $h = \sqrt{|g|}$.

Einstein fu indotto a definire una sorta di “divergenza di densità” generalizzata di $\mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha$, che denotò con $\dots/\alpha$:

$$(29) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda/\alpha}^\alpha = \mathfrak{B}_{\kappa\lambda;\alpha}^\alpha - \mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\sigma \Lambda_{\sigma\alpha}^\alpha.$$

Indicò la derivata covariante con un punto e virgola “nello stile dei matematici italiani” ⁽²²⁾ ([15], p. 1), sebbene Levi-Civita usasse spesso una virgola o nessun simbolo per indicarla. Poiché la curvatura è nulla, dedusse:

$$(30) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda/\alpha}^\alpha = 0.$$

Einstein stabilì infine le sue equazioni di campo unificato:

$$(31) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda/\lambda}^\alpha - \mathfrak{B}_{\kappa\tau}^\sigma \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha = 0$$

$$(32) \quad [h(\phi_{\kappa;\alpha} - \phi_{\alpha;\kappa})]/_\alpha = 0.$$

La sottolineatura degli indici indica il loro innalzamento o abbassamento (ad esempio $\Lambda_{\sigma\tau}^\alpha$ è il tensore puramente controvariante corrispondente a $\Lambda_{\sigma\tau}^\alpha$, cioè $\Lambda_{\sigma\tau}^\alpha = \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha g^{\sigma\kappa} g^{\tau\lambda}$).

Einstein fece notare che le equazioni (31), espresse in termini di pseudotensori, includevano *in prima approssimazione* le equazioni gravitazionali, men-

⁽¹⁹⁾ Adottiamo la stessa notazione usata da Einstein, anche se oggi non risulta completamente corretta.

⁽²⁰⁾ Sebbene Élie Cartan avesse già introdotto il Fernparallelismus all'inizio degli anni '20, che lui chiamava “parallelisme absolu”, Einstein non fece riferimento al lavoro di Cartan. In una lettera datata 8 maggio 1929, Cartan scrisse a Einstein per informarlo delle sue ricerche. Si veda [9], Doc. I.

⁽²¹⁾ La procedura dettagliata seguita da Einstein nel suo articolo del 1929 per determinare le equazioni di campo è descritta da Sauer in [54]. In particolare, Einstein usò lettere latine invece di lettere greche per gli indici inferiori della densità tensoriale, cioè $\mathfrak{B}_{kl}^\alpha$ invece di $\mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha$.

⁽²²⁾ Dopo [26] e [38], insieme a molti altri, il punto e virgola divenne la notazione più diffusa.

tre le equazioni (32) insieme al requisito dell'esistenza di un potenziale vettore davano luogo alle equazioni di Maxwell nello spazio vuoto. Inversamente, affermò che si poteva dimostrare che “per ogni soluzione di queste equazioni esiste un Vierbein che soddisfa le equazioni (31)” ([15], p. 7).

Quest'ultima affermazione sarà il punto di partenza per la nota pubblicata da Levi-Civita nei Sitzungsberichte dell'Accademia di Berlino del 1929 [33] di cui ci occupiamo nel prossimo paragrafo.

La difficoltà intrinseca nella comprensione del nuovo lavoro di Einstein del 1929 fu messa in luce con tono benevolo dal fisico inglese Henry Thomas Herbert Piaggio (1884-1967), nel numero di *Nature* del 1° giugno 1929, con queste parole:

L'annuncio della pubblicazione della nuova teoria di Einstein ha suscitato grande interesse anche tra coloro che di solito non seguono i progressi della scienza. Purtroppo, questo interesse è stato accompagnato dalla sensazione che la nuova teoria, come le precedenti di Einstein, sia una misteriosa miscela di metafisica e matematica, così oscura e paradossale che l'uomo medio non può assolutamente acquisire alcuna nozione di cosa si tratti. In effetti, un autore francese ha dichiarato che “quando due professori tedeschi si incontrano e ciascuno riesce a capire ciò che dice, ma non riesce a capire l'altro, si dice che stiano parlando di Metafisica. Se, tuttavia, l'argomento della discussione è così profondo che non sono in grado di comprendere non solo l'altro, ma nemmeno se stessi, si parla di Metafisica Superiore. Ora, la Teoria di Einstein appartiene alla Metafisica Superiore”. Lo scopo del presente articolo è quello di dissipare tali opinioni. Tornando all'opera di Newton e Maxwell, possiamo tracciare la natura generale delle idee che erano predominanti nella mente di Einstein. Verrà mostrato come il desiderio di unificazione di fenomeni fisici apparentemente diversi sia stata la forza guida in entrambi i casi. Si spera che, attraverso semplici considerazioni i lettori privi di conoscenze matematiche possano comprendere la natura generale dei principi alla base delle nuove geometrie ⁽²³⁾.

3.3 – L'articolo di Levi-Civita del 1929

Nella sua nota del 1929 [33], pubblicata in tedesco nei Sitzungsberichte, Levi-Civita discusse la struttura

⁽²³⁾ H. T. H. Piaggio, *Einstein's and other Unitary Field Theories: An Explanation for the General Reader*, *Nature*, June 1, 1929, 839-841. La citazione è a p. 839.

geometrica di Einstein basata sul concetto di Fernparallelismus rispetto a un n -Bein. ⁽²⁴⁾ Levi-Civita si concentrò sull'aspetto matematico dell'articolo di Einstein del 1929 [15] piuttosto che sul suo contenuto fisico, sebbene la sua analisi raggiunge un risultato davvero importante: le equazioni elettromagnetiche di Maxwell e le equazioni gravitazionali sono ottenute *esattamente*, mentre nel precedente articolo di Einstein si deducono come approssimazione del primo ordine.

Dopo aver brevemente spiegato il contenuto dell'articolo di Einstein, Levi-Civita osservò “che il problema fondamentale sollevato da Einstein può essere risolto in modo più semplice e generale utilizzando i metodi perfettamente familiari del calcolo differenziale assoluto” ([34], p. 3) per i quali faceva riferimento all'edizione tedesca del suo trattato sul calcolo tensoriale pubblicata l'anno precedente (1928) [32]. Il fatto di dedurre le equazioni unificate di campo nel contesto di una varietà riemanniana in cui si applica naturalmente il formalismo tensoriale, rigettando la struttura matematica di Einstein che viveva una varietà con torsione, rappresentava per Levi-Civita un reale miglioramento della teoria. Tuttavia, non tutti condividevano il punto di vista di Levi-Civita, che insisteva sulla semplicità del calcolo differenziale assoluto rispetto al sistema delle n -Bein promosso da Einstein. Come scriveva Piaggio, i metodi di Levi-Civita erano “sufficientemente misteriosi”, soprattutto tra i fisici che non conoscevano i suoi trattati di calcolo tensoriale e non avevano familiarità con i suoi risultati ⁽²⁵⁾.

Per dedurre le equazioni del campo gravitazionale ed elettromagnetico, Levi-Civita utilizzò alcuni risultati contenuti nei suoi trattati sul calcolo differenziale assoluto, in particolare la teoria delle congruenze e i simboli di rotazione di Ricci che divenivano così centrali nel suo lavoro sulle equazioni di campo unificato. Più in dettaglio, nei suoi articoli del

⁽²⁴⁾ L'articolo fu pubblicato grazie all'intercessione di Einstein, si veda la lettera di Levi-Civita a Einstein del 21 marzo 1929 e pubblicata in [13], pp. 665-666.

⁽²⁵⁾ La recensione di Piaggio del lavoro di Levi-Civita *A simplified presentation of Einstein's unified field equations* [34] – traduzione inglese del suo articolo dei Sitzungsberichte [33] – è pubblicata nel giornale *The Mathematical Gazette*, 15 (1930), 274-275.

1929, Levi-Civita fornì ai lettori i “preliminari geometrici e formali”: in una varietà Riemanniana V_n di dimensione n introdusse le coordinate generali x^ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) e considerò i parametri di n congruenze λ_i^ν ($i = 0, \dots, n-1$), con cui definì un “reticolo di linee” (“lattice of lines”; “world lattice” nello spazio-tempo quadridimensionale) in V_n e una “ n -uplet” (le già citate n -Bein) in ogni punto. Seguendo la notazione di Einstein, utilizzò lettere greche per gli indici delle coordinate e lettere latine per gli indici che si riferiscono alla n -upla. Come di consueto, Levi-Civita introdusse le quantità $\lambda_{i|\nu}$ come elementi reciproci di λ_i^ν ; per ogni i esse formano un sistema covariante (“momenti” della n -upla in questione).

Inoltre, per ogni tensore misto di rango (p, q) con componenti

$$(33) \quad A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}$$

Levi-Civita ottenne “per composizione” con le quantità λ_i^ν , $\lambda_{i|\nu}$ gli invarianti:

$$(34) \quad A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q} = A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \lambda_{i_1}^{\mu_1} \dots \lambda_{i_p}^{\mu_p} \lambda_{k_1|\nu_1} \dots \lambda_{k_q|\nu_q}$$

e viceversa, dalle formule (34) poteva dedurre le equazioni (33). Chiamò $A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q}$ un “tensore n -uplet” (o tensore n -Bein) e sottolineò:

Le componenti del tensore n -uplet sono puramente invarianti rispetto alle trasformazioni di coordinate; dipendono essenzialmente dall' n -uplet considerato, ma, come è facilmente verificabile, si comportano come un tensore anche quando le quantità λ_i^μ e λ_k^ν sono simultaneamente soggette a trasformazioni [pseudo-]ortogonali. ([34], p. 4)

Nel loro articolo del 1901 *Méthodes*, Ricci e Levi-Civita avevano già considerato le espressioni $A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q}$ come invarianti che non giocavano però alcun ruolo significativo. Nell'articolo del 1929, invece, le equazioni del campo gravitazionale ed elettromagnetico di Einstein si esprimono proprio in termini di tensori n -uplet che divengono dunque delle espressioni fondamentali.

A questo scopo, Levi-Civita considerò n coordinate $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$ in una varietà pseudo-Riemanniana con metrica indefinita:

$$(35) \quad g_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i \lambda_{i|\mu} \lambda_{i|\nu}$$

dove $\lambda_{i|\nu} \lambda_k^\nu = 0$ per $i \neq k$, e $e_i = \lambda_{i|\nu} \lambda_i^\nu = \pm 1$ (il numero totale di quantità negative e_i dipende dalla segnatura della metrica). Inoltre, introdusse i coefficienti di rotazione di Ricci:

$$(36) \quad \gamma_{ikl} = \lambda_{i|\nu\rho} \lambda_k^\nu \lambda_l^\rho$$

sottolineando che essi rappresentano le componenti di un 3-tensore rispetto alle trasformazioni pseudo-ortogonali a coefficienti costanti. Pertanto, le quantità γ_{ikl} formano un “sistema” che chiamò “tensore locale n -uplet”.

Mentre i termini “ n -uplet” o “tensori n -Bein” sono scomparsi dalla letteratura matematica, i coefficienti di Ricci sono ancora oggi utilizzati nella teoria della relatività generale, come vedremo nel paragrafo conclusivo 4.

Fatto importante: la differenza $\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}$ risulta legata alla parte antisimmetrica della connessione $\Lambda_{\alpha\beta}^\nu$ introdotta da Einstein.

Infine, Levi-Civita dotò lo spazio-tempo quadridimensionale V_4 di un sistema quadruplo di congruenze ortogonali (world lattice), e dedusse la seguente traduzione delle equazioni del campo gravitazionale di Einstein sotto forma di tensori locali n -uplet:

$$(37) \quad G_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} G = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

dove

$$G_{ik} = \sum_{h=0}^3 e_h \gamma_{ih, hk}, \quad G = \sum_{k=0}^3 e_k G_{kk} = \sum_{h,k=0}^3 e_h e_k \gamma_{hk, hk}$$

con $e_0 = 1, e_1 = e_2 = e_3 = -1$.

Una scrittura che Levi-Civita giudicava più semplice poiché le equazioni gravitazionali in forma tetrade sono più naturali per la determinazione dei vettori tetradi, che rappresentano ora le vere incognite delle equazioni ([34], p. 17-18). In particolare, fornì un'interpretazione puramente geometrica delle sue equazioni grazie ai coefficienti di rotazione di Ricci che acquisivano una particolare interpretazione tensoriale come tensori tetradi di rango 3. Osservò inoltre che “ G_{ik} si comportano come tensori rispetto a tutte le trasformazioni pseudo-ortogonali (cioè, nel caso in questione, di Lorentz)” ([34], p. 17).

Come ultimo risultato notevole, introducendo un nuovo formalismo matematico come “la divergenza tensoriale pfaffiana” di un tensore antisimmetrico, oltre a un certo numero di ipotesi che possono apparire oggi azzardate, Levi-Civita giunse a mostrare come le sue equazioni conducano, in prima approssimazione, alle note equazioni di Maxwell⁽²⁶⁾.

Osserviamo che nell’articolo di Levi-Civita, le citazioni sono pochissime: il volume sulla relatività generale di von Laue e il classico libro di Eisenhart sulla geometria riemanniana⁽²⁷⁾. Cita anche due note di Umberto Cisotti (1882-1946) e Rocco Serini (1886-1964) per alcuni dettagli matematici sulle equazioni di Einstein.

Levi-Civita comunicò queste ricerche al Seminario Matematico di Roma nell’aprile 1929. Non possediamo il testo completo della sua conferenza ma solo una pagina della relazione pubblicata nei Rendiconti del Seminario Matematico. Qui insiste sull’aspetto per lui più importante e cioè mantenere la “connessione di Levi-Civita” invece della struttura geometrica di Einstein. Ci sembrano particolarmente significative le parole conclusive della sua conferenza:

Le presunzioni degli uomini di genio sono quasi sempre feconde. È quindi ben probabile che l'Einstein riuscirà a realizzare la coordinazione fra sistema differenziale e reticolo in modo veramente intimo e luminoso. Io vi ho esposto unicamente ciò che il buon senso suggerisce a chi, non guidato da specifiche intuizioni, si proponga di costruirsi col tecnicismo corrente un qualche modello concreto del reticolo einsteniano. ([35], pp. 75-76)

4. – Osservazioni conclusive

Significativamente, prima che apparissero gli articoli di Levi-Civita del 1929 sulle equazioni di campo di Einstein, Vladimir Fock (1898-1974) e

Dmitri Iwanenko (1904-1994) pubblicarono una nota sulla teoria quantistica relativistica [20], in cui interpretavano i risultati di Einstein ottenuti in [15] nel formalismo tensoriale di Levi-Civita. Il loro punto di partenza è il trattato tedesco di Levi-Civita sul calcolo tensoriale [32] e in particolare il capitolo 7 sulla teoria delle congruenze. Infatti, scrissero:

La nuova teoria gravitazionale di Einstein è strettamente correlata alla ben nota teoria delle congruenze delle linee ortogonali, formulata da Ricci. Per confrontare facilmente queste due teorie, possiamo qui riunire le notazioni di Ricci e Levi-Civita, presenti nel trattato Der absolute Differentialkalkül di Levi-Civita, con quelle di Einstein. ([20], pp. 801-802)

Gli autori fornirono una legenda in cui tradussero la notazione di Einstein nel formalismo di Levi-Civita basato sulla teoria delle congruenze e sui coefficienti di Ricci. In particolare, evidenziarono il legame tra la parte antisimmetrica della connessione utilizzata da Einstein e la differenza $\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}$ dei coefficienti di Ricci.⁽²⁸⁾

Inoltre, considerarono l’espressione lineare nelle matrici di Dirac γ_j , $ds = \sum_j \gamma_j dx^j$, per trovare un ponte tra la gravitazione e la teoria quantistica. Nei mesi successivi, si resero però conto che la loro “geometria quantistica lineare” poteva essere meglio compresa come una derivata covariante delle funzioni d’onda complesse a 4 componenti che chiamarono “semivettori” e che altro non sono che gli odierni *spinori*⁽²⁹⁾. È significativo che in un importante articolo che indagava l’equazione di Dirac, Fock [19] preferì tralasciare la struttura geometrica di Einstein basata sul Fernparallelismus per abbracciare le idee presentate da Levi-Civita nei suoi articoli del 1929, in cui le congruenze e i coefficienti di Ricci costituiscono il fondamento

⁽²⁶⁾ Le ipotesi e i calcoli di Levi-Civita ci porterebbero troppo lontano dall’oggetto di questo lavoro. Il lettore interessato potrà consultare l’articolo [4], in particolare p. 105-107, per maggiori dettagli.

⁽²⁷⁾ M. von Laue, *Die Relativitätstheorie* vol. II, Vieweg, Brunswick, 1921; L.P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1926.

⁽²⁸⁾ In particolare, come affermato anche nella legenda di Fock e Iwanenko, abbiamo che: $h_{\nu i} = \lambda_{i|\nu}$.

⁽²⁹⁾ Nel 1929, Weyl e Fock (inizialmente in collaborazione con Iwanenko) introdussero indipendentemente l’uno dall’altro una struttura spinoriale locale sulle varietà di Lorentz al fine di stabilire una teoria relativistica generale dell’equazione di Dirac. Vedi [55].

stesso della teoria. Menzionò inoltre, in una nota a piè di pagina, “lo splendido riassunto delle formule e dei fatti più importanti nell’articolo di T. Levi-Civita” [33] ([19], p. 3).

Le pubblicazioni di Einstein e Levi-Civita presentate nei paragrafi precedenti furono immediatamente seguite da un articolo pubblicato dal matematico e cosmologo britannico George C. Mc Vittie (1904-1988), significativamente intitolato *On Levi-Civita’s modification of Einstein’s Unified Field Theory* [37]. Mc Vittie sottolineò che Levi-Civita aveva modificato la teoria del Prof. Einstein

scartando il concetto di “parallelismo a distanza rispetto a 4 vettori di riferimento ortogonali”, che è alla base della teoria di quest’ultimo, e ottenendo una descrizione completa dei fenomeni gravitazionali ed elettromagnetici tramite i coefficienti di rotazione di Ricci di 4 congruenze ortogonali di rette che, in ogni punto, definiscono 4 vettori di riferimento ortogonali in uno spazio di Riemann. ([37], p. 1033)

Nel suo articolo, Mc Vittie applicò la teoria di Levi-Civita a un caso particolare “in cui è nota una soluzione esatta delle usuali equazioni gravitazionali ed elettromagnetiche della teoria della relatività” ([37], p. 1033). Confrontò quindi i risultati con quelli dedotti mediante l’uso delle equazioni di campo di Einstein e scoprì che le due teorie, quella di Einstein e quella di Levi-Civita, portavano a risultati identici.

In Italia, oltre a Levi-Civita, altri fisici e geometri differenziali utilizzarono i coefficienti di rotazione per tentare una teoria una nuova e più efficace teoria dei campi unificati. Menzioniamo i casi di Gleb Wataghin (1899-1986) e Attilio Palatini⁽³⁰⁾. Wataghin era un fisico, di origine russa, laureato in fisica (1922) e poi in matematica (1924) all’Università di Torino. Successivamente, nel 1934, si trasferì in Brasile dove partecipò alla fondazione della nuova Facoltà di Filosofia, Scienze e Lettere di São Paulo⁽³¹⁾. Ispi-

randosi all’articolo di Levi-Civita del 1929 [33], Wataghin redasse diversi lavori in cui utilizzava i coefficienti di rotazione di Ricci per migliorare i risultati del maestro⁽³²⁾. Nell’approccio allo studio delle teorie unificate e ancora per semplificare il difficile formalismo di Einstein, anche Palatini seguiva la stessa strada intrapresa da Levi-Civita di cui era stato allievo diretto all’Università di Padova [43].

Nel primo trattato italiano sul calcolo tensoriale del dopoguerra, il celebre *Finzi-Pastori*, si trovano citati nel quadro della geometria differenziale i coefficienti di rotazione di Ricci introdotti attraverso la teoria delle congruenze ([18], p. 358-359).

Infine, notiamo come oggi l’approccio di Levi-Civita sia ancora utilizzato in alcuni capitoli della relatività generale.

Nel loro libro, Fernando De Felice e Christopher James Clarke, adottando il metodo delle tetradi, mettono in relazione i coefficienti di rotazione di Ricci con il trasporto di Fermi-Walker ([10], p. 140). Ulteriori utilizzazioni dei coefficienti di rotazione di Ricci in geometria differenziale e in relatività generale si trovano in ([39], p. 247-248) e in ([12], p. 662-663).

Nel suo trattato, *Lezioni di Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*, Maurizio Gasperini approfondisce ulteriormente l’uso moderno dei coefficienti di rotazione di Ricci:

La rappresentazione geometrica dell’interazione gravitazionale sviluppata ha fatto principalmente uso linguaggio della geometria differenziale classica, basato sulla nozione di metrica Riemanniana g e connessione di Christoffel Γ . La curvatura della varietà spazio-temporale, la sua evoluzione dinamica, e l’interazione con le sorgenti materiali è stata descritta mediante equazioni differenziali formulate con le variabili g e Γ .

In questo capitolo introdurremo un modo alternativo, ma completamente equivalente, di descrivere la geometria di una varietà Riemanniana basato sulle nozioni di tetrade V e connessione di Lorentz ω . Questo diverso linguaggio è particolarmente appro-

⁽³⁰⁾ Altri studiosi, come Enea Bortolotti (1896-1942) e Enrico Bompiani (1889-1975), impiegarono l’approccio di Levi-Civita. Per ulteriori dettagli si veda [4], paragrafo 4 e [60], capitolo 7.

⁽³¹⁾ Sul suo ruolo nell’istituzione dell’Università di São Paulo, si veda [58].

⁽³²⁾ Si veda per esempio l’articolo in cui Wataghin dichiarava esplicitamente la superiorità dei metodi di Levi-Civita, basati sulla teoria delle congruenze e i coefficienti di Ricci, rispetto a quelli di Einstein ([63], p. 424).

piato per descrivere la dinamica dei campi spinoriali in uno spazio-tempo curvo – e quindi per rappresentare le interazioni gravitazionali dei fermioni – come vedremo nel capitolo successivo.

Inoltre, e soprattutto, questo nuovo formalismo permette di formulare la teoria della relatività generale come teoria di gauge per un gruppo di simmetria locale, mettendo così la gravitazione sullo stesso piano delle altre interazioni fondamentali (elettromagnetiche, deboli e forti). Vedremo, in particolare, che la simmetria di gauge (non-abeliana) per la gravitazione è l'invarianza locale di Lorentz, e che la curvatura dello spazio-tempo può essere interpretata, in questo contesto, come campo di Yang-Mills per la connessione di Lorentz, che gioca il ruolo di potenziale di gauge ⁽³³⁾ ([21], p. 209)

Il notevole risultato di Ricci, emerso più volte nel nostro articolo, che coniuga i coefficienti di rotazione con il tensore di curvatura di Riemann (vedi Sezione 3.1) si ritrova dunque in numerosi trattati degli ultimi decenni, utilizzato in diversi contesti della fisica teorica.

Ringraziamenti

Franco Cardin ringrazia per il sostegno del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica dell'INdAM, nel cui ambito ha collaborato per questo lavoro.

Rossana Tazzioli desidera ringraziare l'Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences di Cambridge per il supporto e l'ospitalità durante il programma "History of Mathematics" (EPSRC n. EP/R014604/1), nel corso del quale è stato svolto il lavoro relativo a questo articolo.

⁽³³⁾ In un messaggio privato a noi diretto, per il quale lo ringraziamo, Gasperini osservava che "i coefficienti di Ricci, e la corrispondente connessione di Levi-Civita, dovrebbero essere usati da tutti coloro che vogliono scrivere l'equazione per un campo spinoriale accoppiato minimamente alla geometria di uno spazio-tempo curvo, per discutere i possibili effetti fisici della gravità sulle interazioni spinoriali (vedi ad esempio il successivo Cap. 13 del mio libro [22]). Purtroppo ho notato invece che nella moderna letteratura questo generale (e corretto) approccio viene spesso ignorato, partendo da una equazione di Dirac in cui la geometria curva si accoppia unicamente alla parte assiale della corrente spinoriale, trascurando il possibile contributo vettoriale che si accoppia alla traccia dei coefficienti di Ricci (vedi equaz. 13.39 del mio testo [22])."

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] BERGER M., *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer, Berlin, 2003.
- [2] BIANCHI L., *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann*. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (5), 11 (1902), 3-7.
- [3] CARDIN F., *Il concetto di curvatura. Genesi, sviluppo e intreccio fisico-matematico*. Springer, Milano, 2023.
- [4] CARDIN F., TAZZIOLI R., *Levi-Civita simplifies Einstein. The Ricci rotation coefficients and unified field theories*. Archive for History of Exact Sciences, 78 (2024), no. 1, 87-126.
- [5] CARDIN F., TAZZIOLI R., *Tensors and invariants from Ricci to Bourbaki*, in *Towards a philosophy of mathematical invariants* (F. Jaëck, Ed.), Spartacus-IDHF, (forthcoming) 2025.
- [6] CATTANI C., DE MARIA M., *The 1915 epistolary controversy between Einstein and Tullio Levi-Civita*, in *Einstein and the history of general relativity: Einstein Studies I*, (D. Howard, J. Stachel, Eds.), Birkhäuser, New York, 1989, p. 175-200.
- [7] CATTANI C., *I primi anni della relatività in Italia e la corrispondenza Einstein-Levi-Civita*. Quaderni di Storia della Fisica 3 (1998), 25-52.
- [8] COGLIATI A., *Ars inveniendi*, Pisa University Press, Pisa, 2022.
- [9] DEBEVER R., *Élie Cartan and Albert Einstein. Letters on absolute parallelism, 1929-1932*. Princeton University Press, Princeton, 1979.
- [10] DE FELICE F., CLARKE C. J. S., *Relativity on curved manifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [11] DELL'AGLIO L., *Un "case study" nell'accettazione di teorie matematiche. Sviluppo e diffusione del calcolo differenziale assoluto in epoca pre-relativistica*. Bollettino di storia delle scienze matematiche, 24 (2004), 9-65.
- [12] DERUELLE N., UZAN J. P., *Relativity in modern physics*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, 2018.
- [13] EINSTEIN A., *The Collected Papers of Albert Einstein*, 17 vols., ed. by D. Kormos-Buchwald et al. Princeton University Press, Princeton, 1987-2024.
- [14] EINSTEIN A., *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsberichte K. Preussische Akademie Wiss. Berlin, 1914, 1030-1085.
- [15] EINSTEIN A., *Zur einheitlichen Feldtheorie*. Sitzungsberichte K. Preussische Akademie Wiss. Berlin 1929, 2-7.
- [16] EINSTEIN A., GROSSMANN M., *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 62 (1913), 225-261. English translation in: *The collected papers of Albert Einstein*, Vol. 4, Princeton University Press, Princeton, 1996. p. 151-186.
- [17] EINSTEIN A., FOKKER A. D., *Nordström's Theory of Gravitation from the Point of View of the Absolute Differential Calculus – Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls*, Annalen der Physik, 44 (1914), 321-328. English translation in: *The collected papers of Albert Einstein*, Vol. 4, Princeton University Press, Princeton, 1996, p. 293-299.
- [18] FINZI B., PASTORI M., *Calcolo tensoriale e applicazioni*, 2^a ed. Zanichelli, Bologna, 1961.

- [19] FOCK V., *Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons*. Zeitschrift für Physik, **57** (1929), 261-277.
- [20] FOCK V., IWANENKO D., *Über eine mögliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie*. Zeitschrift für Physik, **54** (1929), 798-802.
- [21] GASPERINI M., *Lezioni di Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2010.
- [22] GASPERINI M., *Theory of Gravitational Interactions*. Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer, 2013.
- [23] HAWKING S.W., ELLIS G.F.R., *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [24] HERMANN R. (Ed.), *Ricci and Levi-Civita's tensor analysis paper*. Math Sci Press, Brook-line, 1975.
- [25] HILBERT D., *Die Grundlagen der Physik*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse **3** (1915), 395-407.
- [26] LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M., *The classical theory of fields*. Addison-Wesley, Oxford-London-Paris-Frankfurt, 1962.
- [27] LEVI-CIVITA T., *Opere Matematiche*, 6 vols. Zanichelli, Bologna, 1954-1973.
- [28] LEVI-CIVITA T., *Sugli invarianti assoluti*. Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti **5** (1893-94), 1447-1523; in [27], I, p. 41-100; anche in *Copia anastatica del manoscritto della tesi di laurea (1894), selezione di opere e relazioni per l'intitolazione del Dipartimento di Matematica a Tullio Levi-Civita* (F. Cardin, F. Rampazzo e L. Salce, Eds.), Padova University Press, Padova, 2018.
- [29] LEVI-CIVITA T., *Sulla nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **42** (1916), 173-205; in [27], IV, p. 1-39.
- [30] LEVI-CIVITA T., *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*. Atti della R. Accademia dei Lincei, (5) **26** (1917), 381-391; in [27], IV, p. 47-58.
- [31] LEVI-CIVITA T., *The absolute differential calculus. Calculus of tensors*, Translated from the 1925 Italian version (E. Persico, ED.). Blackie & Son, London/Glasgow, 1927. Reprint Dover Publications, 2005.
- [32] LEVI-CIVITA T., *Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik*. Springer, Berlin, 1928.
- [33] LEVI-CIVITA T., *Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichung*. Sitzungsberichte K. Preussische Akademie Wiss. Berlin, 1929, 137-153; in [27], V, 1-22.
- [34] LEVI-CIVITA T., *A simplified presentation of Einstein's unified field theory*. Blackie & Son, London/Glasgow, 1929.
- [35] LEVI-CIVITA T., *Sopra la nuova rappresentazione unitaria dei fenomeni fisici proposta dall'Einstein*. Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma, 1928-29 (2) **6** (1929), 75-76.
- [36] MALTESE G., *The rejection of the Ricci tensor in Einstein's first tensorial theory of gravitation*. Archive for History of Exact Sciences **41** (1991), no. 4, 363-381.
- [37] MCVITTIE G. C., *On Levi-Civita's Modification of Einstein's Unified Field Theory*. Philosophical Magazine **8** (1929), 1033-1040.
- [38] MISNER C. W., THORNE K. S., WHEELER J. A., *Gravitation*. W. H. Freeman and Co, San Francisco, 1973.
- [39] NAKAHARA M., *Geometry, topology and physics. Graduate Student Series in Physics*. Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990.
- [40] NORTON J., *Einstein found his field equations, 1912-1915*, in *Einstein and the history of general relativity: Einstein Studies I*, (D. Howard, J. Stachel, Eds.), Birkhäuser, New York, 1989, p. 101-159.
- [41] PAIS A., *Sottile è il Signore*, La Cultura Scientifica. Ed. Boringhieri, Torino, 1987.
- [42] PALATINI A., *Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **43** (1919) 1, 203-212.
- [43] PALATINI A., *Intorno alla nuova teoria di Einstein*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (6) **10** (1929), 633-639.
- [44] RICCI CURBASTRO G., *Opere*, ed. by U.M.I., 2 vols. Cremonese, Roma, 1956-57.
- [45] RICCI CURBASTRO G., *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella Analisi applicata*. Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna, Vol. III, Tipografia del Seminario, Padova, 1888, 3-23; in [44], I, p. 245-267.
- [46] RICCI CURBASTRO G., *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*. Memorie della R. Accademia dei Lincei (5) **2** (1896), 276-322; in [44] II, p. 1-61.
- [47] RICCI CURBASTRO G., *Lezioni sulla teoria delle superficie*. Drucker, Verona, 1896.
- [48] RICCI CURBASTRO G., *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5) **11** (1902), 355-362; in [44], II, p. 293-300.
- [49] RICCI CURBASTRO G., LEVI-CIVITA T., *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen **54** (1901), 125-201; in [44], II, 185-271.
- [50] RICKLES D., *Covered with deep mist. The development of Quantum Gravity(1916-1956)*. Oxford University Press, Oxford, 2020.
- [51] RIEMANN B., *Gesammelte mathematische Werke and wissenschaftlicher Nachlass*, edited by H. Weber, Teubner, Leipzig, 1876; 2nd ed. 1892; repr. Springer, New York, 1990.
- [52] RIEMANN B., *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13** (1868), 133-152; In [51], pp. 304-319. English translation in *Bernhard Riemann, On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry*, edited by J. Jost, Birkhäuser, 2016.
- [53] ROVELLI C., *Quantum gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, 2010.
- [54] SAUER T., *Field equations in teleparallel space-time: Einstein's Fernparallelismus approach towards unified field theory*. Historia Mathematica, **33** (2006), 399-439.
- [55] SCHOLZ E., *Local spinor structures in V. Fock's and H. Weyl's work on the Dirac equation(1929)*, in *Géométrie au XXe siècle. Histoire et horizons* (a cura di D. Flament, J. Kounieher, P. Nabonnand, J. J. Szczeciniarz), Hermann, Paris, 2005, p. 284-301.
- [56] SPEZIALI P., *Ricci Curbastro, Gregorio*, in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990). <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/ricci-curbastro-gregorio>.

- [57] SPIVAK M., *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II.* Published by M. Spivak, Brandeis Univ., Waltham, Mass. 1970.
- [58] TAVARES H. D. , BAGDONAS A., VIDEIRA, A.A.P. , *Transnationalism as scientific identity: Gleb Wataghin and Brazilian physics, 1934-1949.* Historical Studies in the Natural Sciences **33** (2020), 248-301
- [59] TAZZIOLI R., *Beltrami e i matematici "Relativisti". La meccanica in spazi curvi nella seconda metà dell'Ottocento.* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana N. 47, Pitagora, Bologna, 2000.
- [60] TAZZIOLI R., *From differential geometry to relativity. Levi-Civita's lectures on the absolute differential calculus, 1925-1928,* European Mathematical Society, Berlin (forthcoming), 2025.
- [61] TOSCANO F., *Luigi Bianchi, Gregorio Ricci Curbastro e la scoperta delle identità di Bianchi.* in *Atti del XX Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia* (a cura di E. Schettino), Napoli, 2000, p. 353-370.
- [62] TOSCANO F., *Il genio e il gentiluomo. Einstein e il matematico italiano che salvò la teoria della relatività generale,* Sironi Editore, Milano, 2004.
- [63] WATAGHIN G., *Sull'applicazione della relatività alla meccanica ondulatoria.* Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, XVIII Riunione, 1929, II, 5 pp.
- [64] WEYL H., *Zur Gravitationstheorie.* Annalen der Physik, **54** (1917), 117-145.
- [65] WIENER N., VALLARTA M. S., *Unified field theory of electricity and gravitation.* Nature, March 2, 1929, 317.



Franco Cardin

Franco Cardin è Professore Emerito di Fisica Matematica presso il Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita dell'Università di Padova. Ha insegnato Meccanica Razionale, Fisica Matematica, Modelli Fisico-Matematici, Topologia, Chimica e Matematica, Symplectic Mechanics nel Curriculum internazionale ALGANT, Sviluppi del Pensiero Matematico. Ha collaborato alla Scuola Galileiana di Studi Superiori dell'Università di Padova insegnando Geometria Differenziale. I suoi interessi scientifici coinvolgono la teoria geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi e correlate teorie variazionali in topologia simplettica. Da alcuni anni partecipa a ricerche su problemi di trasporto ottimo e teoria del controllo rivolti ad argomenti di natura biologica. Ha pubblicato alcuni lavori di carattere storico sulla figura di Tullio Levi-Civita. È socio dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti.



Rossana Tazzioli

Rossana Tazzioli è professoressa di Storia della matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lille (Francia) dal 2009. I suoi interessi di ricerca riguardano la geometria differenziale e la fisica matematica nei secoli XIX e XX, con particolare attenzione ai lavori di Gauss, Riemann, Beltrami e Levi-Civita, ai quali ha dedicato numerose pubblicazioni. Un altro ambito di studio è il ruolo dei matematici durante la Prima guerra mondiale e nel periodo tra le due guerre, con un focus specifico sull'attività dell'Unione Matematica Italiana negli anni del fascismo. Fa parte dell'editorial board della rivista *Historia Mathematica* e della collana dell'*European Mathematical Society Heritage of European Mathematics*. È inoltre socia dell'*Académie Internationale d'Histoire des Sciences*.

L'eredità di Gregorio Ricci-Curbastro nella matematica contemporanea

ALESSANDRO CARLOTTO

Università di Trento

E-mail: alessandro.carlotto@unitn.it

Sommario: *Che cosa resta oggi dell'opera di Gregorio Ricci-Curbastro? In questo articolo proverò a tratteggiare l'impatto delle nozioni da lui introdotte e degli strumenti matematici su cui queste si fondano, con particolare riguardo a vari recenti sviluppi nell'analisi geometrica.*

Abstract: *What is the mathematical legacy of Gregorio Ricci-Curbastro? In this article I will try to outline the actual impact of the notions he introduced and of the tools they rely upon, with special emphasis on various recent developments in geometric analysis.*

Lo studioso che si accosti alle nozioni di base della geometria differenziale, oltre la descrizione di curve e superfici nello spazio euclideo, si imbatte quasi da subito in vari oggetti recanti i nomi di matematici di origine italiana: la connessione di Levi-Civita, il tensore di Ricci, le identità di Bianchi, l'operatore di Laplace-Beltrami e così via. Questa nomenclatura rende conto di un'epoca, tra la fine del secolo diciannovesimo e l'inizio del successivo, nella quale l'Italia (di allora) fu – per tutta una serie di ragioni – tra i centri principali della ricerca matematica in questo ambito.

Una delle figure più influenti di questa stagione fu appunto Gregorio Ricci-Curbastro, del quale cade quest'anno il centenario della morte. Assieme al suo allievo prediletto, Tullio Levi-Civita, egli contribuì a porre le basi di quello che (con terminologia oggi obsoleta) si soleva definire *calcolo differenziale assoluto*, ovvero un calcolo differenziale che, pur compendosi nelle carte locali di una varietà, esibisca proprietà di covarianza tali da renderne i risultati, qualora opportunamente scritti ed intesi, indipenden-

ti dalla scelta delle coordinate. Vedremo in seguito un semplice esempio che ben illustra questo fenomeno.

Con questo articolo desidero rendere esiguo, quasi tacito omaggio alla memoria di Ricci-Curbastro tratteggiando l'impatto che le nozioni da lui introdotte hanno avuto nel contesto della matematica contemporanea, e in particolare in quell'ambito – particolarmente fiorente al giorno d'oggi – che chiamiamo analisi geometrica. Il lettore potrà trovare negli articoli di Cogliati, e di Cardin e Tazzioli una ricostruzione storica più dettagliata dei suoi contributi allo sviluppo del calcolo differenziale assoluto e, rispettivamente, del legame di questo con le origini della teoria della relatività generale.

1. – Dal calcolo differenziale assoluto al tensore di Riemann

Con molto senno di poi, ed in termini necessariamente informali, partiamo dalla seguente questione. Sia data una varietà differenziabile (qui intesa liscia, cioè di classe C^∞) M , di dimensione $n \geq 1$, e sia $\mathbb{U} = \cup_\alpha (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un suo atlante. Intendiamo così dire che M è un insieme che porta con sé un ricoprimento tramite domini ciascuno dei quali sia in corrispon-

Accettato: 10 giugno 2025.

denza biunivoca con un aperto di $\mathbb{R}^n$ (formalmente $M \supset U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$), in modo tale che le corrispondenti funzioni di transizione $\varphi_{\alpha'} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ siano tutte funzioni lisce nel senso usuale. Questo è un modo per codificare la nozione intuitiva di uno spazio che localmente, ovvero intorno ad ogni dato punto, sia “equivalente” allo spazio euclideo standard della corrispondente dimensione, lasciando tuttavia una grande libertà sulla forma globale dello stesso. Una coppia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ si chiamerà *carta* dell’atlante in questione, e la precedente richiesta circa le funzioni di transizione pertiene appunto il trasferimento “coerente” di nozioni tra carte diverse che ricoprono una stessa regione di M : è da queste sovrapposizioni che nasce, come vedremo tra poco, il problema fondazionale cui Ricci dedicò una parte significativa dei suoi studi.

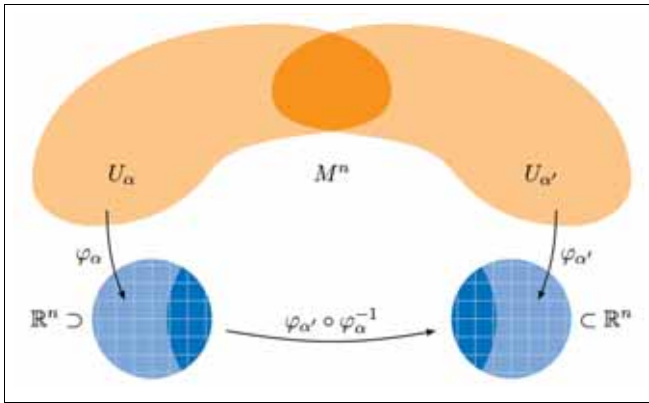


FIGURA 1 – Carte di un atlante, e funzione di transizione associata.

Ora, il dato di un atlante consente di definire quella che si chiama *struttura differenziale* su M , e quindi di chiarire univocamente cosa si intenda dicendo che una certa funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è liscia: richiederemo, semplicemente, che tutte le composizioni $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ lo siano. Volendo considerare una domanda semplice ma per certi versi paradigmatica, come possiamo concretamente definire il differenziale df di una tale f ? In modo molto pragmatico ed ingenuo, possiamo prendere una carta (U, φ) e, indicando – con conveniente abuso di notazione – $f(x)$ invece di $f(\varphi(x))$ per $x \in \Omega = \varphi(U)$, scrivere semplicemente (come si farebbe in un secondo corso di analisi matematica)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

(qui e nel seguito di questo articolo saranno sempre tacitamente intese le operazioni di somma sugli indici ripetuti). Tuttavia, ci si rende subito conto che questa espressione dipende totalmente dalla scelta della carta considerata e dunque non si capisce in che senso si possa intendere df come una nozione, appunto, “assoluta”. Il fatto è che, a ben vedere, non possiamo aspettarci (ad esempio) di attribuire un significato assoluto ai coefficienti di questa forma differenziale; invece l’unico modo di pensare ad una 1-forma è tramite la sua azione su campi vettoriali di M , ed è alla buona positura di questa nozione che si deve puntare. Dato un campo vettoriale V che si esprima, nella stessa carta di cui sopra, come $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ si ha (per linearità) che $df(V) = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Se ora consideriamo una diversa

carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ ed indichiamo con $\{\tilde{x}\}$ le coordinate corrispondenti, si ha che le regole del calcolo differenziale negli spazi euclidei (nello specifico: la *chain rule*) ci indicano il modo in cui possiamo scrivere le espressioni di df e V

$$df = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i,$$

$$V = \tilde{V}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = V^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}$$

ove, coerentemente con l’abuso notazionale sopra dichiarato, abbiamo considerato le mappe $x = x(\tilde{x})$ e $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ intendendo le composizioni $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ e $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ rispettivamente. A questo punto, vediamo che le regole di trasformazione per campi vettoriali ed 1-forme si “compensano” e consentono di mostrare che la quantità $df(V)$, valutata in un qualunque punto della nostra varietà, è indipendente dalla carta scelta (ovvero dalla scelta di coordinate). Infatti, dalle due equazioni precedenti si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{V}^i = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} V^\ell \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\ell} = \frac{\partial f}{\partial x^j} V^j$$

avendo, all’ultimo passaggio, sfruttato il fatto che (quasi tautologicamente)

$$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^j,$$

trattandosi appunto del prodotto della matrice jacobiana dell'applicazione $x \mapsto \tilde{x} = \tilde{x}(x)$, vale a dire di $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, per la sua inversa.

Partendo da qui e guidati – per così dire – dalle regole del calcolo differenziale, si possono definire *campi tensoriali* di tipo arbitrario; con un certo grado di astrazione si può poi sviluppare la teoria dei fibrati vettoriali su varietà (parafrasando le regole di trasformazione nella forma di regole di “incollamento” di banalizzazioni locali degli stessi) arrivando infine a definire i campi tensoriali di un certo tipo (mettiamo, ad esempio, i campi vettoriali) come sezioni di un corrispondente fibrato (nel caso dei campi il *fibrato tangente*).

Giunti a questo punto, il successivo passo concettuale sta nella definizione di un'opportuna nozione di *derivazione* su varietà, intendendo nello specifico il problema di come si possa misurare la variazione infinitesimale di un campo vettoriale (diciamo W) lungo le linee integrali generate da un altro campo assegnato (diciamo V). Qui emerge un problema fondazionale che per certi versi può risultare sorprendente: il solo requisito di produrre, come risultato di quest'operazione, un campo vettoriale non identifica univocamente l'operazione in questione. Vi sono infatti, a seconda degli ulteriori requisiti che si impongano, molte diverse definizioni possibili, corrispondenti ad altrettante nozioni di *connessione*. Quella in un certo senso più restrittiva (e rilevante rispetto a questa presentazione) è quella di connessione di Levi-Civita (o connessione riemanniana). Data sulla nostra varietà M una metrica riemanniana g (ovvero: una nozione di lunghezza dei vettori tangenti e quindi delle curve) questa si può definire in coordinate locali richiedendo che valga

$$D_V W = V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + V^i W^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

ove

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

sono i cosiddetti *simboli di Christoffel* della metrica g . Diremo che $D_V W$ è la *derivata covariante* di W lungo V . Nel caso, a tutti familiare, della metrica euclidea questi numeri Γ_{ij}^k sono tutti identicamente nulli e quindi la derivazione $D_V W$ avviene compo-

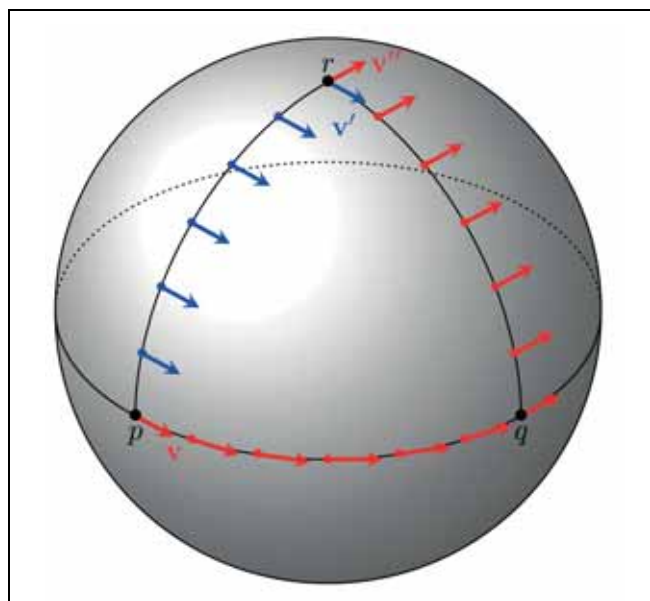


FIGURA 2 – Trasporto parallelo su varietà, e non-commutatività di questa operazione (qui nel caso della sfera). Considerando il triangolo geodetico in figura (corrispondente ad un ottante della sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$) possiamo eseguire il trasporto parallelo del vettore $\mathbf{v} \in T_p M$ o lungo l'arco $\widehat{pr}$, nel qual caso otteniamo $\mathbf{v}'$, o lungo gli archi $\widehat{pq}$ e poi $\widehat{qr}$, ottenendo infine il vettore $\mathbf{v}''$ (palesamente diverso da $\mathbf{v}'$, anzi in questo caso ad esso ortogonale).

nente per componente nel modo consueto, ma in generale questi termini correttivi hanno un ruolo fondamentale nel codificare i concetti di *geodetica* e *trasporto parallelo* su una varietà riemanniana (cf. Figura 2).

Formalmente, diremo che una curva $\sigma : I \rightarrow M$ è una geodetica se soddisfa $D_{\sigma'} \sigma' = 0$ (lavorando in coordinate locali si tratta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine). Proprio come nel caso delle rette nel piano, le geodetiche sono quelle curve speciali su varietà che hanno la proprietà di minimizzare la lunghezza tra due qualunque loro punti (a patto che questi non siano troppo lontani). In maniera analoga, data una qualsivoglia curva σ ed un vettore $\mathbf{v} \in T_p M$ (ove sia $p = \sigma(0)$), il trasporto parallelo di $\mathbf{v}$ lungo σ è il campo vettoriale V che soddisfi, in ogni punto di tale curva, il sistema (del primo ordine nelle coordinate locali di V)

$$\begin{cases} D_{\sigma'} V = 0 \\ V(0) = \mathbf{v}. \end{cases}$$

La cosa interessante è che la nozione di trasporto parallelo consente essa stessa di ricostruire univo-

camente la connessione riemanniana D nel modo che segue. Indicata con $\tau_{\sigma(t)} : T_{\sigma(0)}M \rightarrow T_{\sigma(t)}M$ la mappa di trasporto parallelo lungo σ (per ogni $t \in I$) ed osservato che si tratta di un isomorfismo lineare, si ha, a posteriori, che vale per ogni campo vettoriale V

$$D_{\sigma'(0)}V = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_{\sigma(t)}^{-1}V(t) - V(0)}{t}.$$

Data quindi una nozione intuitiva, quand'anche imprecisa, di trasporto parallelo, ai fini di quest'articolo potremo pensare all'equazione precedente come ad una definizione di connessione riemanniana ovvero, equivalentemente, di derivazione covariante.

Quest'ultimo punto di vista si rivela particolarmente utile qualora si intenda fare un passo ulteriore, arrivando a definire il fondamentale concetto di curvatura. Vi sono almeno quattro prospettive (essenzialmente diverse, ma equivalenti) da cui si può presentare questa nozione, e vale la pena di richiamarle tutte, pur se brevemente.

In prima battuta la definizione di *tensore di curvatura* (o *tensore di Riemann*) R di una varietà riemanniana (M, g) ha a che vedere con la “non-commutatività delle derivate seconde” rispetto alla nozione di derivazione associata alla connessione di Levi-Civita, e si formula ponendo

$$R(X, Y, Z, W) = -g(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z, W) \quad (1)$$

che si può appunto anche riscrivere come

$$R(X, Y, Z, W) = -g((D_{X, Y}^2 - D_{Y, X}^2)Z, W)$$

a patto di ricordare che $D_{X, Y}^2 Z = D_X D_Y Z - D_{D_X Y} Z$ (questa è la definizione di *derivata covariante seconda*), e che la connessione riemanniana è legata all'operazione di bracket di Lie $[\cdot, \cdot]$ dall'identità $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ per due qualsiasi campi vettoriali X ed Y sulla nostra varietà.

In secondo luogo, possiamo pensare alla collezione di numeri R_{ijkl} (che si ottengono esprimendo il tensore suddetto in coordinate locali) come ad una sorta di ostruzioni alla trasformazione, tramite cambio di coordinate, di una data forma quadratica definita positiva (cioè della metrica riemanniana) nella metrica euclidea standard. Tale prospettiva, ovvero quella degli *invarianti differenziali* è in

effetti molto presente negli scritti di Ricci-Curbastro (come si evince dalla raccolta delle sue opere [38, 39] e dal posteriore trattato di Levi-Civita [25]), come del resto in quelli di molti dei suoi più eminenti contemporanei (Christoffel, Lipschitz, Schouten . . .); si vedano a tal proposito il recente articolo [16] e i riferimenti bibliografici in esso specificati.

In termini di trasporto parallelo, dati due campi vettoriali X, Y (che per comodità assumeremo soddisfare la condizione $[X, Y] = 0$), e denotata qui con τ_{sX} la mappa di trasporto parallelo lungo le linee integrali di X per un tempo s (e similmente τ_{tY} la mappa di trasporto parallelo lungo le linee integrali di Y per un tempo t) si può dimostrare in effetti che

$$\left[\frac{d^2}{dsdt} \right]_{s=t=0} \tau_{sX}^{-1} \tau_{tY}^{-1} \tau_{sX} \tau_{tY} Z = -R(X, Y)Z$$

laddove $g(R(X, Y)Z, W) = R(X, Y, Z, W)$ per ogni data quaterna di campi vettoriali⁽¹⁾. Quest'ultima equazione codifica appunto l'idea intuitiva di curvatura come ad una misura dell'effetto (non banale) del trasporto parallelo lungo cammini chiusi. Un esperimento interessante è testare questa equazione, ad esempio, su un ipotetico circuito disegnato sulla superficie della Terra e bordato da due paralleli e due archi di meridiani, partendo da un punto sull'equatore ove si ponga $Z = (0, 0, 1)$.

Per quanto segue, ci interessa tuttavia soffermarci soprattutto sul significato geometrico di certe componenti del tensore di Riemann, e veniamo così alla quarta ed ultima prospettiva. Per dare adeguata motivazione alla definizione che stiamo per dare, facciamo prima un passo indietro. Il lettore ricorderà che la curvatura (intrinseca) di una superficie (ovvero di una varietà di dimensione 2) è descritta essenzialmente da un'unica funzione, che si chiama *curvatura di Gauss*: il famoso *theorem egregium* garantisce appunto che tale funzione, che nei primi corsi di geometria differenziale si definisce in termini delle curvature principali (cioè degli autovalori della seconda forma fondamentale della superficie in questione), non dipende in realtà dal modo in cui la superficie in questione è immersa nello spazio eu-

⁽¹⁾ In altri termini $R(X, Y)Z$ è il tensore di tipo $(1, 3)$ naturalmente associato al tensore di Riemann, come sopra definito dalla (1).

clideo (o in un qualunque spazio ambiente) ma solo dalla metrica riemanniana indotta sulla superficie, quindi dal modo in cui si misura la lunghezza delle curve su di essa. Dunque, data una varietà (M, g) – ora di dimensione qualunque – considerato un punto $p \in M$ ed un 2-piano $\pi \subset T_p M$ possiamo considerare quella porzione di superficie che si ottiene, in M , come immagine delle geodetiche radiali corrispondenti alle condizioni iniziali

$$\sigma(0) = p, \quad \sigma'(0) = \mathbf{v} \in \pi \subset T_p M.$$

(La mappa $T_p M \ni v \mapsto \sigma(1) \in M$ si chiama *mappa esponenziale* basata in $p \in M$, e si suole scrivere $\exp_p(\cdot) : T_p M \rightarrow M$ per riferirsi a tale applicazione, almeno per quel sottoinsieme del suo dominio ove essa è ben definita.) Si mostra che, al variare di $\mathbf{v} \in \pi$ con $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 1$ l'immagine di queste curve forma, in M , una superficie regolare (liscia) nell'intorno di p la cui curvatura di Gauss è uguale, in quello stesso punto, al numero $R(E_1, E_2, E_1, E_2)$ (a priori definito dalla (1), quindi in tutt'altra maniera) per una qualsivoglia coppia di vettori $E_1, E_2 \in \pi \subset T_p M$, assunti unitari e tra loro ortogonali. Tale numero si chiama *curvatura sezionale* del piano π . Il tensore di Riemann contiene dunque in sé le informazioni relative a tutte le possibili superfici che si possono generare in questa maniera, cioè variando la scelta del piano $\pi \subset T_p M$ (e possibilmente spostando poi anche il punto $p \in M$).

2. – Curvatura di Ricci: definizione e caratterizzazione locale

In uno dei suoi articoli più celebri [37], Ricci-Curbastro focalizza la sua attenzione sulla quantità

$$\text{Ric}(V, V) = R(V, E_i, V, E_i)$$

ove $V \in T_p M$ è un dato vettore unitario, e $\{E_1, E_2, E_3, \dots, E_n\}$ è una qualunque base ortonormale dello spazio tangente ad M nel punto p considerato. Questo numero, che egli chiama – per evidente analogia con la geometria estrinseca delle sottovarietà – *curvatura media* di M nella direzione V , si può descrivere come segue: qualora si consideri (senza perdita di generalità) una base per cui $V = E_1$ esso è – tenuto conto di quanto detto nell'ultimo paragrafo della sezione precedente – la somma delle curvature

sezionali dei piani bidimensionali generati da V e da un secondo vettore che vari in una base ortonormale del complemento ortogonale della linea $\langle V \rangle$.

Come suggerito dalla notazione già adoperata sopra, queste non sono altro che certe componenti del tensore che oggi porta – per universale attribuzione – il nome di Ricci e che si ottiene più in generale come traccia del tensore di Riemann:

$$\text{Ric}(V, W) = R(V, E_i, W, E_i),$$

ove $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ sia nuovamente una qualsiasi base ortonormale locale.

Tramite questa operazione algebrica di traccia si ottiene appunto un tensore dello stesso tipo della metrica (ovvero un tensore di tipo $(0, 2)$) a cui – come immediatamente osservato dallo stesso Ricci – è naturalmente associata una forma quadratica che, per fatti ben noti dell'algebra lineare, si può diagonalizzare simultaneamente alla metrica stessa: si ottengono così quelle che egli chiama le *direzioni principali* della varietà (M, g) nel punto considerato, assieme ai corrispondenti autovalori a cui si dà invece il nome di *curvature principali*. Questa terminologia va appunto intesa, come già osservato, in evidente analogia con la teoria delle superfici in $\mathbb{R}^3$.

Vediamo, seguendo ancora l'esposizione del Ricci, alcuni casi particolari. Nel caso in cui M sia una superficie si verifica facilmente che $\text{Ric} = Kg$, quindi tutte le direzioni sono principali e le curvature principali sono tutte eguali al valore della curvatura di Gauss nel punto considerato. Qualora invece la dimensione di M sia almeno 3, queste conclusioni cessano di essere vere; tuttavia nel caso particolare in cui la dimensione della varietà sia esattamente

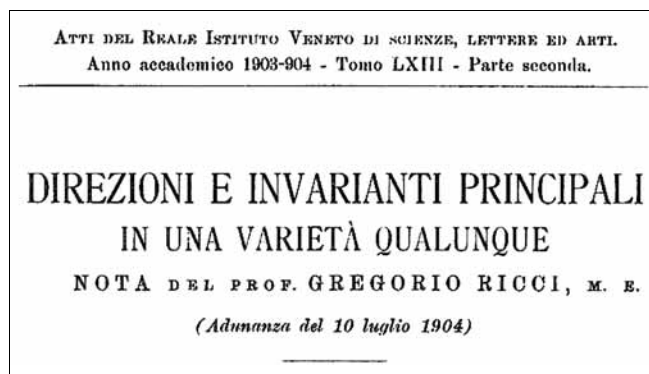


FIGURA 3 – Frontespizio dell'articolo, risalente al 1904, dedicato dal Ricci allo studio del tensore che oggi porta il suo nome.

uguale a 3, le informazioni contenute nel tensore di Riemann si possono (in ragione delle simmetrie dello stesso) tutte recuperare dalla conoscenza delle tre sole curvatures principali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Esplicitamente, considerando le curvatures sezionali $R_{1212} = R(E_1, E_2, E_1, E_2)$, $R_{1313} = R(E_1, E_3, E_1, E_3)$, $R_{2323} = R(E_2, E_3, E_2, E_3)$ associate ad una base principale $\{E_1, E_2, E_3\}$ (nel senso di cui sopra) si ha che:

$$\begin{cases} R_{1212} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \\ R_{1313} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2) \\ R_{2323} = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1) \end{cases}$$

ed inoltre $R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}$ si possono ricavare da queste (è un fatto generale che il tensore di Riemann sia univocamente determinato dalle curvatures sezionali tramite una formula di polarizzazione); tutte le altre componenti del tensore di Riemann sono identicamente nulle o eguali (a meno di segno) a una delle precedenti.

Vi è un altro modo di pensare il tensore di Ricci, meno algebrico si potrebbe dire, e che in qualche senso fornisce un'ulteriore giustificazione della sua rilevanza. È ben noto che, nell'intorno di ogni dato punto p della nostra varietà M possiamo scegliere un sistema di coordinate privilegiate dette *coordinate normali* che si ottengono essenzialmente trasferendo, tramite la mappa esponenziale $\exp_p(\cdot)$, le naturali coordinate $\{x\}$ sullo spazio tangente $T_p M$ rispetto ad una fissata base ortonormale dello stesso. In tali coordinate la metrica (quale che sia) assume la forma $g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^2)$ ovvero coincide con la metrica euclidea a meno di un errore di ordine quadratico; più precisamente si può verificare che in effetti $g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikj\ell}x^k x^\ell + O(|x|^3)$. Se ora esprimiamo la misura di volume ⁽²⁾ μ_g di (M, g) localmente rispetto a tali coordinate si dimostra che vale

$$(2) \quad d\mu_g = \left[1 - \frac{1}{6} \text{Ric}_{jk} x^j x^k \right] d\mu_\delta$$

⁽²⁾ In questo contesto, μ_g si può definire come la misura di Hausdorff n -dimensionale associata alla distanza dei cammini d_g determinata dalla metrica riemanniana g su M .

quindi il tensore Ric fornisce una misura della distorsione dei volumi: ad esempio, una varietà con tensore di Ricci positivo ha, per ogni raggio (piccolo) fissato, volume inferiore rispetto ad una palla euclidea avente il medesimo raggio.

Concludiamo questa sezione menzionando una proprietà del tensore di Ricci che si rivelò di fondamentale importanza nella formulazione delle equazioni di campo di Einstein della relatività generale. Qualora si calcoli la cosiddetta divergenza covariante ⁽³⁾ del suddetto tensore vale l'identità (impropriamente nota come *seconda identità di Bianchi*) ⁽⁴⁾

$$(3) \quad \text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2} d(\text{Scal})$$

ove Scal è la curvatura scalare della varietà (M, g) ovvero la traccia del tensore di Ricci. Ne segue immediatamente che la divergenza del tensore

$G = \text{Ric} - \frac{1}{2} \text{Scal} g$ è identicamente nulla, il che fu

un fattore determinante nel suggerire a Einstein di collegare questo tensore (che ora porta il suo nome) al *tensore di energia-impulso* (traduzione imprecisa dell'inglese *stress-energy tensor*), la cui analoga proprietà codifica una ben nota legge di conservazione.

3. – Alcuni teoremi classici inerenti la curvatura di Ricci

Ma che tipo di contenuto geometrico ha la curvatura di Ricci? Un modo naturale per cercare di risponde-

⁽³⁾ Dato un tensore T di tipo $(0, 2)$, la sua divergenza covariante è un tensore di tipo $(0, 1)$, vale a dire quella 1-forma definita dall'equazione

$$\text{div}(T) = D_{E_i} T(\cdot, E_i)$$

ove $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ sia una qualunque base ortonormale locale nell'intorno di un punto considerato. Ovviamente è qui intesa la somma sull'indice ripetuto, e si mostra che la definizione è ben posta ovvero indipendente dalla base considerata.

⁽⁴⁾ Nel suo importante trattato [25], Levi-Civita sostiene che le identità di Bianchi fossero in verità state scoperte da Ricci stesso intorno al 1889; d'altro canto esse sono già presenti – almeno nella loro forma contratta (ovvero l'equazione (3)) – nell'articolo di Voss [50] risalente al 1880.)

re a questa domanda è indagare quali restrizioni (topologiche e, appunto, geometriche) imponga su una data varietà connessa e completa (M, g) l'assunzione che la sua curvatura di Ricci sia (uniformemente) positiva, ovvero che valga in tutti i punti

$$(4) \quad \text{Ric} \geq \frac{n-1}{\Lambda^2} g$$

nel senso del confronto tra forme quadratiche, per una qualche costante $\Lambda > 0$; qui la normalizzazione del membro di destra dipende dal fatto che lo spazio modello naturale, ovvero la sfera $S^n(\Lambda)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ di raggio Λ , soddisfa – essendo uno spazio a curvatura sezionale costante ed eguale a Λ^{-1} – l'uguaglianza nella formula (4).

Una prima risposta a questa domanda ci viene fornita dal teorema di Bonnet-Myers: in ragione della disuguaglianza (4) necessariamente (M, g) dev'essere una varietà compatta e il suo diametro dev'essere limitato dall'alto da $\pi\Lambda$; in particolare, segue immediatamente (dato che la medesima condizione di curvatura sarà soddisfatta anche da un qualunque rivestimento riemanniano della varietà data) che il gruppo fondamentale di M è finito. Per esempio, un immediato corollario di questo asserto è l'impossibilità di costruire metriche a curvatura di Ricci positiva su varietà della forma $N \times S^1$, laddove N denoti una qualsiasi varietà compatta (e senza bordo). In effetti, se M è una superficie il teorema di Gauss-Bonnet ci consente – dopo aver mostrato la compattezza di M – di concludere inoltre che M deve avere caratteristica di Eulero positiva e quindi potrà essere solo una sfera oppure un piano proiettivo reale (nel caso non orientabile). Cercare di ottenere un'analoga conclusione nel caso di varietà di dimensione 3 è una delle motivazioni centrali per l'introduzione da parte di Hamilton [23] del cosiddetto *flusso di Ricci*, di cui diremo nella prossima sezione.

Vi è poi una diversa maniera, perfezionata da Schoen e Yau nella loro dimostrazione del *teorema di massa positiva* [41] e nello studio delle varietà a curvatura *scalare* positiva [40, 42], per estrarre informazioni topologiche dall'ipotesi che una certa varietà M sia *topologically Ricci positive* (ovvero che supporti metriche a curvatura di Ricci positiva, nel senso definito dalla condizione (4)). Essenzialmente si tratta di guardare non alle geodetiche (oggetti di dimensione 1), come nella dimostrazione del teorema

di Bonnet-Myers, ma alle *ipersuperfici minime* (oggetti di co-dimensione 1). Si può infatti dimostrare che ogni tale varietà, diciamo di dimensione $n \geq 3$ ed assunta per semplicità orientabile, deve necessariamente soddisfare la condizione omologica $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) = 0$. Lo strumento chiave per giungere a questa conclusione è la *disuguaglianza di stabilità*: ogni ipersuperficie (assunta compatta, connessa, con fibrato normale banale⁽⁵⁾) che minimizzi l'area nella sua classe di omologia è necessariamente liscia⁽⁶⁾ per $n < 8$ ed inoltre è stabile, ovvero soddisfa, per ogni $u \in C^1(\Sigma; \mathbb{R})$, la disuguaglianza

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u|^2 d\mu_{\Sigma, g} \geq \int_{\Sigma} (|A|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) u^2 d\mu_{\Sigma, g}$$

ove $|A|^2$ denota il quadrato della norma della seconda forma fondamentale di Σ , ν è un vettore normale di lunghezza unitaria (definito globalmente su Σ) e $\mu_{\Sigma, g}$ è la misura di volume indotta su Σ dalla metrica g . Scegliendo la funzione $u \equiv 1$ nella formula precedente se ne ricava che necessariamente $\text{Ric}(\nu, \nu) \leq 0$ in almeno un punto di Σ .

Da ciò si evince che la condizione $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ non è compatibile con l'esistenza di metriche su M a curvatura di Ricci positiva, dato che – seguendo lo schema logico appena descritto – minimizzando il funzionale d'area in una classe di omologia $(n-1)$ -dimensionale non banale si raggiunge immediatamente una contraddizione.

In effetti, una conclusione di questo tipo (in verità leggermente più debole) si può ottenere anche con un metodo completamente diverso, che trae le sue origini nell'importante articolo [9] di Bochner (si vedano [52] e la ben più recente monografia [51] per esposizioni sistematiche di questa tecnica) e che tutt'oggi continua ad essere foriero di importanti risultati in geometria riemanniana [35]. In particolare, Bochner dimostra che ogni 1-forma ω armonica

⁽⁵⁾ In una varietà ambiente orientabile, questo avviene se e solo se l'ipersuperficie in questione è orientabile.

⁽⁶⁾ Nota tecnica: per $n \geq 8$ le ipersuperfici minimizzanti il funzionale area in una classe di omologia (così come, del resto, le soluzioni del problema di Plateau, che minimizzano l'area a bordo fissato) non sono necessariamente lisce ma possono esibire un insieme singolare; la discussione di questo problema, e del suo legame con i molti recentissimi risultati di *generica regolarità*, va ben oltre gli scopi di questo contributo.

definita su una qualsiasi varietà riemanniana (M, g) soddisfa l'identità

$$-\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \text{Ric}(\omega^\#, \omega^\#)$$

dove $\omega^\#$ indica il campo vettoriale univocamente associato per dualità, rispetto alla metrica g , alla forma ω (vale a dire che $g(\omega^\#, W) = \omega(W)$ per ogni campo vettoriale W su M). Combinando infatti l'equazione precedente col teorema della divergenza, segue subito che ogni varietà riemanniana compatta e senza bordo, qualora abbia curvatura di Ricci non negativa (ovvero: per cui valga $\text{Ric} \geq 0$) e positiva almeno in un punto, non può supportare alcuna 1-forma armonica che non sia identicamente nulla. Quindi una varietà *topologically Ricci positive* deve avere il primo numero di Betti ⁽⁷⁾ nullo, cioè $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$. Notiamo anche, incidentalmente, che un piccolo raffinamento di questo argomento consente di concludere che ogni varietà (M, g) con $\text{Ric} \geq 0$ soddisfa la notevole disuguaglianza $b_1(M) \leq \dim M$ (si osservi che per i tori n -dimensionali si ha uguaglianza).

Concludiamo questa sezione citando un altro risultato, di ben altro sapore ma parimenti classico, che si lega alla seconda caratterizzazione del tensore di Ricci descritta in precedenza. Si tratta del teorema di Bishop-Gromov, il quale fornisce un confronto su scala macroscopica tra i volumi delle palle metriche di varietà a curvatura di Ricci non-negativa e dello “spazio modello naturale”, che nel contesto di questa nostra discussione è lo spazio euclideo. Più precisamente, data una varietà riemanniana (M, g) che soddisfi $\text{Ric} \geq 0$ e un qualunque punto $p \in M$, si ha che la funzione

$$r \mapsto f(r) = \frac{\text{Vol}(B_r(p))}{\omega_n r^n}$$

⁽⁷⁾ Nel contesto qui descritto, ricordiamo che il k -esimo numero di Betti si definisce come $b_k(M) = \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M)$, ove $H_{\text{dR}}^k(M)$ è il k -esimo gruppo di coomologia di de Rham, che a sua volta si ottiene quozientando lo spazio vettoriale delle k -forme chiuse per il sottospazio delle k -forme esatte di (M, g) . Due fatti fondamentali da tenere a mente sono: primo, per varietà lisce vi è un isomorfismo naturale $H_{\text{dR}}^k(M) \cong H^k(M; \mathbb{R})$ ove $H^*(M; \mathbb{R})$ denota l'anello di coomologia singolare a coefficienti reali di una varietà liscia M ; secondo, in ragione della dualità di Poincaré, se M è orientabile vale sempre $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$.

è monotona non-crescente (qui ω_n è la misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$). In particolare, dato che palesemente – essendo M una varietà liscia – vale $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = 1$, segue che per ogni $r > 0$ si avrà $|B_r(p)| \leq \omega_n r^n$ (con disuguaglianza stretta se $\text{Ric} > 0$): in una varietà riemanniana a curvatura di Ricci positiva il volume cresce meno che nello spazio euclideo. Si noti che un aspetto interessante qui è che la misura dei volumi di domini sulla nostra varietà è una nozione di classe C^0 , ovvero dipende solo dalla metrica e non dalle sue derivate, e quindi si lega a nozioni deboli di curvatura di Ricci, importante tema su cui torneremo nella Sezione 6.

4. – Il flusso di Ricci e la congettura di Poincaré

Ma torniamo agli spazi di dimensione 3 e vediamo quali (ben più forti!) conclusioni si possano trarre dall'ipotesi che una varietà M supporti metriche a curvatura di Ricci positiva. L'idea, rivoluzionaria ed a posteriori efficacissima, di Hamilton [23] fu quella di considerare un'opportuna equazione di evoluzione, il cui dato iniziale fosse la metrica data, e che rendesse quest'ultima, al passare del tempo, “sempre più omogenea”, convergendo infine verso una forma limite particolarmente semplice. In termini più concreti, egli propose di deformare la metrica assegnata g_0 su M secondo una velocità data (a meno di segno) proprio dal tensore di Ricci:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}(g(t)) \\ g(0) = g_0. \end{cases}$$

Possiamo pensare a questa equazione in analogia all'equazione del calore, quindi come ad una sorta di problema di diffusione su varietà. Si può dimostrare che il problema si riformula come un'equazione parabolica ben posta, e si hanno dunque esistenza ed unicità della soluzione (almeno per un certo intervallo di tempi iniziali). In effetti, sotto le sole ipotesi che M sia chiusa e $\text{Scal}(g_0) > 0$, la corrispondente equazione di evoluzione per la curvatura scalare di $g(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Scal}(g(t)) = \Delta_{g(t)} \text{Scal}(g(t)) + 2|\text{Ric}(g(t))|_{g(t)}^2,$$

implica immediatamente, sfruttando il principio del massimo per problemi parabolici, che il flusso debba presentare una singolarità in tempo finito. Il contributo principale e tecnicamente molto impegnativo, in [23], sta nel mostrare che, se $\text{Ric}(g_0) > 0$, il flusso – opportunamente rinormalizzato (a guisa che il volume della varietà rimanga invariato) – converge verso una metrica a curvatura sezionale costante. Di lì segue facilmente il seguente teorema di classificazione: l'unica varietà differenziabile tridimensionale M , semplicemente connessa⁽⁸⁾, che supporti metriche a curvatura di Ricci positiva è la sfera S^3 . Il lettore può trovare un'esposizione accessibile di questi risultati, ad esempio, nella bella monografia introduttiva di Topping [47].

Tuttavia, qualora non si assuma per la metrica iniziale una sì forte condizione di positività della curvatura, lo studio della corrispondente evoluzione per flusso di Ricci e il comportamento dello stesso vicino al primo istante singolare divengono parecchio complesse. In termini molto informali, partendo da una forma “a bilanciere” si possono ad esempio creare regioni centrali ad alta curvatura che somiglino (a scala opportuna) a colli cilindrici, come illustrato nella Figura 4. In un impressionante *tour de force* tecnico, Perelman ottenne nei suoi celeberrimi *preprint* [32-34] risultati di classificazione delle singolarità abbastanza precisi da poter definire un flusso di Ricci *con chirurgia*, ovvero una opportuna continuazione del flusso stesso oltre i tempi singolari. Sfruttando questi strumenti, attraverso un processo di ricostruzione “a posteriori” della varietà di partenza (come somma connessa di sfere) egli giunse così a dimostrare la celebre congettura di Poincaré, confermando (ad oltre un secolo dalla formulazione della questione) che l'unica varietà topologica di dimensione 3, chiusa e semplicemente connessa, è la sfera S^3 . Un avvincente e dettagliato racconto di questa straordinaria impresa scientifica si trova nell'articolo di Benedetti e Mantegazza apparso qualche anno fa su questa stessa rivista [7].

⁽⁸⁾ Da questo caso segue anche l'asserto più generale secondo cui le uniche varietà differenziabili di dimensione 3 che supportano metriche a curvatura di Ricci positiva sono i quozienti della sfera S^3 ottenuti da sottogruppi discreti di $SO(4)$ secondo azioni propriamente discontinue (ad esempio gli spazi lenticolari).

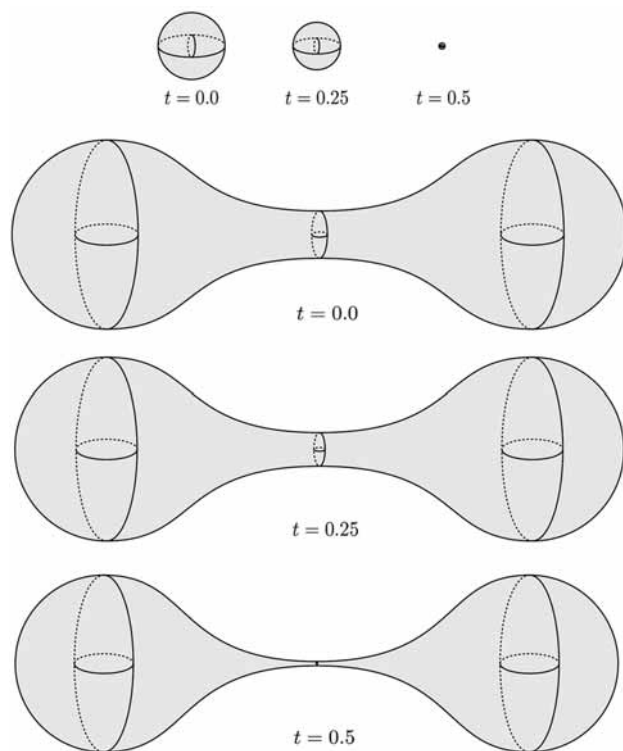


FIGURA 4 – In alto, l'evoluzione per flusso di Ricci di una sfera di raggio $\sqrt{2}$. Indicata con g_{rd} la metrica rotonda standard indotta sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^4$, in questo caso l'evoluzione è data dall'equazione esplicita $g(t) = 2(1 - 2t)g_{rd}$ e il flusso incontra una singolarità in tempo finito ($T = 1/2$). In base al lavoro di Hamilton, questo tipo di comportamento si riscontra per un qualunque dato iniziale corrispondente ad una metrica con tensore di Ricci positivo su S^3 . Tuttavia, per metriche che non soddisfano questa condizione, si possono incontrare altri tipi di singolarità, come il *neck-pinch* indicato nella parte inferiore della figura, ove le scale sono scelte in modo tale che il primo istante singolare sia nuovamente $T = 1/2$.

A questo punto verrà naturale al lettore chiedersi in che misura la condizione di supportare metriche a curvatura di Ricci positiva sia egualmente restrittiva per varietà di dimensione più alta, cominciando proprio dal caso della dimensione 4. Questo si lega, in maniera naturale, ad un altro aspetto della narrazione che abbiamo fin qui volutamente tralasciato: lo studio e la costruzione di varietà di Einstein [8]. Diremo una varietà riemanniana *di Einstein* se vale $\text{Ric} = fg$ per una qualche funzione $f \in C^\infty(M)$; si dimostra facilmente (sfruttando l'identità (3)) che, se questo è il caso e la dimensione di M è almeno 3, allora necessariamente f dev'essere costante ed eguale a Scal/n . Le superfici sono *sempre* varietà di Einstein, e (cosa meno ovvia) le varietà di dimen-

sione 3 sono di Einstein se e solo se hanno curvatura sezionale costante. Per contrasto, si verifica che già in dimensione 4 di varietà di Einstein (anche chiuse) ne esistono in abbondanza. Due semplici esempi che non abbiano curvatura sezionale costante sono il prodotto $S^2 \times S^2$ e lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^2$ con la metrica canonica di Fubini-Study. Il risultato più prossimo, almeno da un certo punto di vista, a un teorema di classificazione si ottiene qualora si considerino metriche di Kähler-Einstein su superfici complesse con prima classe di Chern c_1 positiva: si veda il notevole lavoro di Tian [46]. Di contro, le varietà Kähler compatte con $c_1 < 0$ oppure con $c_1 = 0$ possono *sempre* essere munite di metriche di Kähler-Einstein (vale a dire che non vi sono ostruzioni); in particolare, nel caso *Ricci flat* (cioè con $\text{Ric} = 0$) si può mostrare che tutte le varietà di Calabi-Yau si possono munire di metriche di Einstein.

5. – Alcuni sviluppi recenti

Senza alcuna pretesa di completezza, desidero presentare in questa sezione tre linee di ricerca ben diverse tra loro, che si legano in vari modi ai temi descritti nelle sezioni precedenti e quindi ai contributi di Ricci-Curbastro. La selezione riflette senza dubbio le preferenze di chi scrive, ma vuole altresì sottolineare il decisivo contributo di vari brillanti matematici italiani, segnando dunque – a un secolo di distanza – elementi di continuità con quella scuola di geometria differenziale di cui si è brevemente detto all’inizio di questa nota.

In primis, memori delle conseguenze del teorema di Bonnet-Myers viste nella prima parte della Sezione 3, ci si può chiedere quali implicazioni topologiche comporti, per una varietà differenziabile M , l’assunzione che questa supporti una metrica di curvatura di Ricci non-negativa (ovvero per cui valga $\text{Ric} \geq 0$, da non confondersi con la ben più restrittiva condizione (4)). Questa potrebbe apparire, ad un primo sguardo, una piccola differenza, ma il problema risulta in realtà molto delicato: a questo proposito Milnor congetturò nel 1968 che ogni tale varietà debba avere gruppo fondamentale finitamente generato (vedasi [31]). Non è troppo difficile mostrare che questa conclusione è certamente vera se la

dimensione di M è eguale a 2 (Cohn-Vossen [17] mostrò nel 1935 che, sotto tali ipotesi, se M non è compatta allora (M, g) dev’essere piatta, quindi $\mathbb{R}^2$ oppure $\mathbb{R} \times S^1$) oppure 3 (vedasi Liu⁽⁹⁾ [26]), ma cosa si può dire in dimensione arbitraria? Nonostante una messe di conferme in presenza di ipotesi aggiuntive, due anni fa Brué, Naber e Semola [11] hanno sorpreso la comunità matematica con un formidabile controesempio: esistono varietà di dimensione 7 che da un lato supportano metriche a curvatura di Ricci non-negativa, e dall’altro hanno gruppo fondamentale $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. In un successivo ed ancor più recente lavoro hanno poi ottenuto un ulteriore raffinamento costruendo controesempi di dimensione 6. Ad oggi, dunque, la congettura di Milnor ha il seguente status: certamente vera in dimensione 2 o 3, certamente falsa in dimensione almeno 6, uno (straordinario) problema aperto per varietà di dimensione 4 o 5.

Veniamo poi ad un’altra direzione di ricerca, particolarmente cara a chi scrive. Nel 1982, Yau formulò la seguente ardita congettura⁽¹⁰⁾: ogni varietà riemanniana (compatta e senza bordo) di dimensione 3 contiene infinite superfici minime chiuse, possibilmente immerse. Nel corso degli anni sono state proposte – anche nel contesto di seminari e conferenze varie – diverse ed ancor più ambiziose versioni di questa congettura, richiedendo (nella formulazione più ottimistica di tutte) che la medesima conclusione valga per ipersuperfici chiuse *embedded* in varietà di dimensione arbitraria. Un fondamentale strumento per approcciare questioni di questo tipo sta nel lavoro pionieristico di Almgren e Pitts [36], da cui prende il via lo sviluppo di una teoria di min-max per il funzionale area definito su oggetti anche molto poco regolari (il contesto qui è quello della teoria geometrica della misura e gli oggetti in questione sono opportune classi di *varifolds*). In particolare, con questo tipo di strumenti Pitts riuscì a dimostrare che ogni

⁽⁹⁾ Il lavoro di Liu fa un uso ingegnoso di tecniche di superfici minime introdotte da Schoen e Yau oltre quarant’anni fa [42].

⁽¹⁰⁾ Quello qui descritto è il problema numero 88 nella collezione contenuta in [53], la quale continua ad ispirare una frazione non trascurabile della ricerca in analisi geometrica.

3-varietà riemanniana compatta e senza bordo contiene almeno *una* superficie minima chiusa. Per quasi tre decenni questa teoria rimase sostanzialmente isolata nel panorama matematico, anche per la sua oggettiva, terrificante complessità tecnica, fino a quando Marques e Neves [28] ne hanno fatto decisivo uso per dimostrare la congettura di Willmore sulle forme dei tori di minima energia elastica nello spazio euclideo. Questo articolo ha dato il via, per così dire, a una sorta di nuova età dell'oro nella teoria delle superfici minime. Raffinando in varie direzioni gli studi di Almgren e Pitts, Marques e Neves sono poi riusciti ad ottenere risultati di esistenza sempre più generali, che hanno infine portato Song (all'epoca studente di dottorato sotto la guida di Marques) a dimostrare la validità della congettura di Yau, nella sua forma più forte, per varietà riemanniane di dimensione minore di 8 (e in dimensione arbitraria qualora si ammetta la presenza di un insieme singolare, di codimensione 7). Quel che ci preme sottolineare è questo: un passo importante in questo percorso è stato realizzare che tale congettura dev'essere vera in varietà riemanniane aventi *curvatura di Ricci positiva* [29]. Il fatto chiave qui è il seguente: come mostrato da Frankel [20] in ogni varietà che soddisfi la precedente ipotesi due qualsiasi ipersuperfici minime (chiuse) devono necessariamente intersecarsi, il che pone delle restrizioni molto forti al comportamento asintotico di una certa successione di invarianti (le *p-widths*) che emergono naturalmente quando si sviluppi una teoria di min-max con un numero arbitrario di parametri. Il successivo contributo di Song sta appunto nell'analizzare la situazione per varietà riemanniane per cui *non* valga la proprietà di Frankel, ovvero per cui possano esistere famiglie finite di ipersuperfici minime a due a due disgiunte.

Ci preme infine menzionare una serie di recenti sviluppi, particolarmente interessanti, iniziata col raffinamento ottenuto da Antonelli e Xu [6] dei teoremi di Bonnet-Myers e Bishop-Gromov (esposti nella Sezione 3). Essenzialmente, il loro lavoro dimostra che, al fine di giungere a tali conclusioni, non è effettivamente necessaria un'ipotesi di tipo puntuale sul tensore di Ricci, ma è sufficiente un'ipotesi di tipo *non locale*, specificamente sul primo autovalore (denotato con λ_1) di un opportuno

operatore di Schrödinger su una varietà riemanniana n -dimensionale:

$$\lambda_1 \left(-\frac{n-1}{n-2} \Delta + \text{Ric} \right) \geq n-1.$$

In particolare, la stima sulla crescita dei volumi di palle geodetiche che si può ottenere per varietà riemanniane che soddisfino tale ipotesi ha giocato un ruolo decisivo nella (di poco) seguente dimostrazione, da parte di Mazet [30], del fatto che le ipersuperfici minime stabili (con fibrato normale banale) in $\mathbb{R}^6$ devono necessariamente essere iperpiani affini. Questo significativo progresso nella soluzione del problema di Bernstein “stabile” (*stable Bernstein problem*) segue i precedenti contributi di Chodosh, Li, Minter e Stryker, lasciando quindi aperta solo la questione nel caso di $\mathbb{R}^7$ (dato che in $\mathbb{R}^8$, come congetturato da Simons [43] e poi mostrato da Bombieri, De Giorgi e Giusti [10], di ipersuperfici minime stabili che non siano piatte ne esistono in abbondanza). Va detto che nel caso di $\mathbb{R}^4$ la risoluzione del suddetto problema è stata ottenuta, indipendentemente dal lavoro di Chodosh e Li, anche da Catino, Mastrolia e Roncoroni [12] basandosi su tecniche della geometria conforme, reminescenti dei classici lavori di Fischer-Colbrie.

Tornando alla discussione precedente, vale altresì la pena di segnalare l'ancor più recente estensione, sempre sotto analoghe ipotesi spettrali, del fondamentale teorema di splitting di Cheeger-Gromoll [14] da parte di Antonelli, Pozzetta e Xu [5].

6. – Nozioni deboli di curvatura di Ricci

Un discorso a parte merita poi quell'ampio filone di ricerca legato alla possibilità di definire opportune nozioni deboli di curvatura di Ricci (ovvero alla possibilità di dare un significato a disuguaglianze come $\text{Ric} \geq k$ su oggetti geometrici che non siano varietà riemanniane lisce).

Ricordando che in coordinate locali su una varietà riemanniana (M, g) , il tensore di Ricci assume la forma

$$R_{jk} = \Gamma_{jk,i}^i - \Gamma_{ki,j}^i + \Gamma_{ip}^i \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^i \Gamma_{ik}^p$$

(ove la lettera Γ denota i simboli di Christoffel della metrica g , richiamati nella Sezione 1, e gli indici dopo

la virgola corrispondono a derivazioni nelle coordinate locali in questione) si vede subito che questa espressione ha a che vedere con la possibilità di derivare *due volte* la metrica e quindi pare improbabile aspettarsi di poter estendere questa definizione a classi di metriche meno regolari su una varietà liscia o, addirittura, a categorie di spazi potenzialmente singolari e con strutture più povere. Per meglio intendere il senso della domanda precedente, a priori quasi senza senso, vale la pena ricordare come, in tempi parecchio anteriori, Alexandrov avesse definito – basandosi sull’enunciato del teorema di Toponogov – una nozione di “spazio con curvatura sezionale maggiore o uguale a κ ” (per $\kappa \in \mathbb{R}$) guardando alla lunghezza del terzo lato di triangoli geodetici aventi uguali le lunghezze di due lati e l’ampiezza dell’angolo tra di essi, come illustrato in Figura 5; una tale caratterizzazione risulta equivalente a quella classica per varietà munite di una metrica di classe C^2 , ma si può dare per una sottoclasse assai ampia di spazi metrici (i cosiddetti spazi geodetici).

Ciò premesso, torniamo alla questione posta. Un fondamentale risultato, ad essa soggiacente, è il teorema di pre-compattatezza di Gromov (che qui citeremo, per semplicità espositiva, solo in un caso particolare): una qualsivoglia famiglia di varietà riemanniane chiuse aventi tutte diametro minore o eguale di D , curvatura di Ricci maggiore o eguale di K (ovvero $\text{Ric} \geq Kg$) e dimensione al più n è pre-

compatta rispetto alla topologia di Gromov-Hausdorff. Questo identifica, in particolare, un sottoinsieme privilegiato di spazi metrici (compatti), ovvero quelli che si possono ottenere come limiti di varietà riemanniane – sotto le ipotesi appena elencate – e che quindi, in quanto tali, dovrebbero ragionevolmente godere di proprietà ulteriori. L’indagine della regolarità dei cosiddetti *Ricci limit spaces* è stata oggetto di importanti lavori da parte di Cheeger e Colding (si vedano [13] ed i successivi raffinamenti), e poi – tra gli altri – da parte di Colding e Naber [18], e di Cheeger e Naber [15]: in termini molto vaghi è stato dimostrato in particolare che ogni tale spazio limite ha una naturale struttura stratificata legata alla forma dei coni tangenti (la parola *forma* qui allude al numero di fattori banali dei coni in questione, che sono sempre unicamente esprimibili in forma ridotta come $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{C}^{n-\ell}$, lo strato top corrispondendo alla parte “regolare” dello spazio), e ciascuno strato “singolare” soddisfa stime ragionevoli determinate dall’ordine ℓ dello strato stesso.

In verità, tuttavia, la questione posta sopra si può approcciare da una prospettiva completamente diversa: come proposto indipendentemente da Sturm [44, 45] e da Lott e Villani [27], traendo spunto da disuguaglianze funzionali legate alla teoria del trasporto ottimo di massa (si vedano in particolare [19] e i corrispondenti riferimenti bibliografici, oltre alla successiva esposizione contenuta nelle splendide

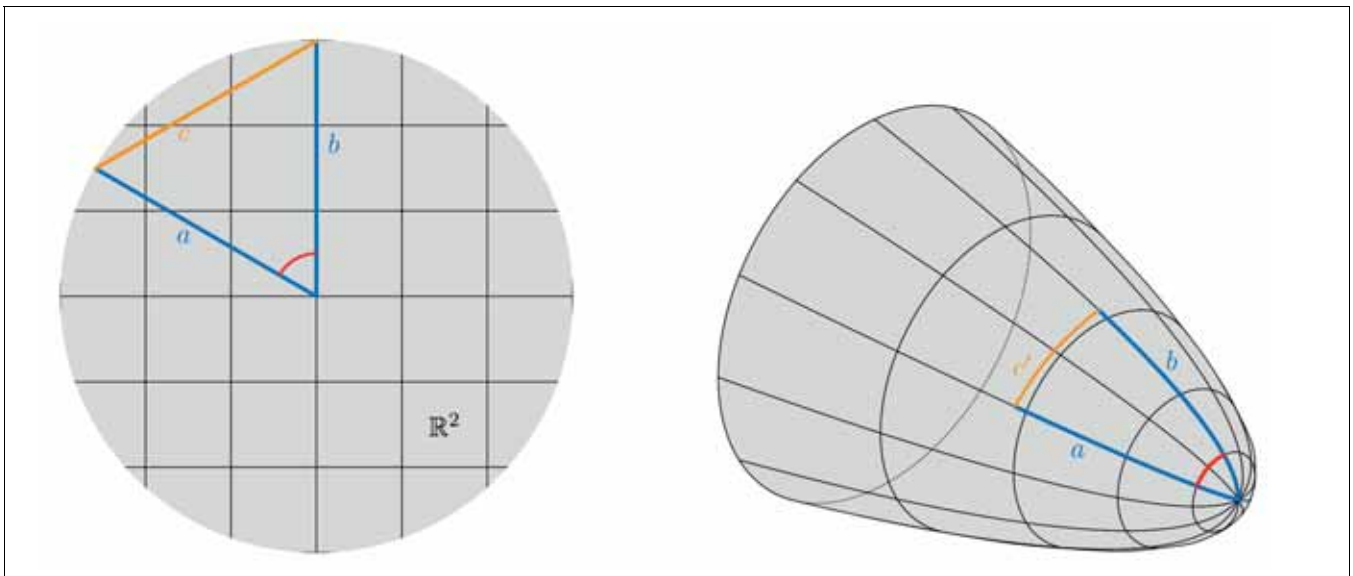


FIGURA 5 – *Triangle comparison* tra un dominio del piano euclideo ed una porzione di un paraboloide in $\mathbb{R}^3$: il teorema di Toponogov assicura che il terzo lato (in giallo nelle figure) sarà certamente più corto nel secondo caso che nel primo.

monografie di Villani [48, 49] e di Ambrosio, Gigli e Savaré [1]) la proprietà $\text{Ric} \geq \kappa$ può essere caratterizzata richiedendo una opportuna condizione di convessità (nota come *displacement convexity*) di certi funzionali definiti sullo spazio delle misure di probabilità, munito della distanza di Wasserstein associata ad un costo di trasporto quadratico. Seguendo questa strada è possibile definire, in maniera concettualmente molto elegante e generale, una nozione di limitatezza dal basso della curvatura di Ricci per spazi metrici (di misura), andando così a costruire una teoria (quella degli spazi RCD, si vedano – tra i tanti – i pionieristici contributi in [2-4, 21, 22] e la corrispondente bibliografia) che include quella dei *Ricci limit spaces* come caso particolare. Tale teoria si è arricchita, nel corso degli ultimi vent’anni, di svariate centinaia di contributi, dando vita ad un *corpus* di straordinario valore ed importanza, che testimonia in maniera evidente la rilevanza delle nozioni introdotte da Ricci-Curbastro e degli strumenti matematici che furono posti a loro fondamento.

Ma oltre ai suoi meriti scientifici, che ci paiono fuor di dubbio, vale oggi più che mai la pena di ricordare anche la statura umana di Gregorio Ricci-Curbastro tramite le parole che di lui scrisse Levi-Civita esattamente un secolo fa [24]:

”Profondamente stimato da alcuni pochi, Egli era rimasto in precedenza ignoto ai più, anche pel suo carattere riservato e alieno, nonché dal farsi largo, altresì dalle forme intensive di comunicazione scientifica che si accompagnano alla vita moderna, quali frequenti viaggi e contatti personali; intervento a congressi; conferenze; distribuzioni relativamente larghe di lavori; pubblicazione di Note preventive e di riassunti. [...]”

Esempio edificante di modestia in un uomo che pur ebbe giusta coscienza di aver legato perennemente il suo nome al calcolo differenziale assoluto e alle sue applicazioni grandiose.”

Ringraziamenti. Desidero ringraziare Alberto Cogliati per avermi fornito copia di alcune delle opere di Ricci-Curbastro, purtroppo di difficile reperibilità, Mario Bernhard Schulz per aver curato le figure presentate in questo articolo e l’anonimo *referee* per i molti validissimi suggerimenti espositivi. Infine, un sentito grazie a Marco Andreatta e Carlo Toffalori per il gentile invito alla stesura di questo contributo.

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 947923).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] L. AMBROSIO, N. GIGLI, and G. SAVARÉ, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Second, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [2] ———, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math. **195** (2014), no. 2, 289-391.
- [3] ———, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 7, 1405-1490.
- [4] ———, *Bakry-Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds*, Ann. Probab. **43**(2015), no. 1, 339-404.
- [5] G. ANTONELLI, M. POZZETTA, and K. XU, *A sharp spectral splitting theorem*, preprint, available at arXiv:2412.12707.
- [6] G. ANTONELLI and K. XU, *New spectral Bishop-Gromov and Bonnet-Myers theorems and applications to isoperimetry*, preprint, available at arXiv:2405.08918.
- [7] R. BENEDETTI and C. MANTEGAZZA, *The Poincaré conjecture and the Ricci flow*, Mat. Cult. Soc. Riv. Unione Mat. Ital. (I) **2** (2017), no. 3, 245-290.
- [8] A. L. BESSE, *Einstein manifolds*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.
- [9] S. BOCHNER, *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 776-797.
- [10] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, and E. GIUSTI, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243-268.
- [11] E. BRUÈ, A. NABER, and D. SEMOLA, *Fundamental groups and the Milnor conjecture*, Ann. of Math. (2) **201** (2025), no. 1, 225-289.
- [12] G. CATINO, P. MASTROLIA, and A. RONCORONI, *Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces*, Geom. Funct. Anal. **34** (2024), no. 1, 1-18.
- [13] J. CHEEGER and T. H. COLDING, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 3, 406-480.
- [14] J. CHEEGER and D. GROMOLL, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geom. **6** (1971/72), 119-128.
- [15] J. CHEEGER and A. NABER, *Lower bounds on Ricci curvature and quantitative behavior of singular sets*, Invent. Math. **191** (2013), no. 2, 321-339.
- [16] A. COGLIATI, *Some remarks on the history of Ricci’s absolute differential calculus*, Arch. Hist. Exact Sci. **78** (2024), 717-761.
- [17] S. COHN-VOSSEN, *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compos. Math. **1** (1935), 69-133.
- [18] T. H. COLDING and A. NABER, *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 1173-1229.
- [19] D. CORDERO-ERAUSQUIN, R. J. MCCANN, and M. SCHMUCKENSLÄGER, *A Riemannian interpolation inequality à*

- la Borell, Brascamp and Lieb, *Invent. Math.* **146** (2001), no. 2, 219-257.
- [20] T. FRANKEL, *On the fundamental group of a compact minimal submanifold*, *Ann. of Math.* (2) **83** (1966), 68-73.
- [21] N. GIGLI, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **236** (2015), no. 1113, vi+91.
- [22] ———, *Nonsmooth differential geometry-an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **251** (2018), no. 1196, v+161.
- [23] R. S. HAMILTON, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 2, 255-306.
- [24] T. LEVI-CIVITA, *Commemorazione del socio nazionale Prof. G. R.-C.*, *Memorie dell'Accademia dei Lincei* **1** (1925), 555-564.
- [25] T. LEVI-CIVITA, *The absolute differential calculus*, Dover Phoenix Editions, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2005. Calculus of tensors, Translated from the Italian by Marjorie Long, Edited by Enrico Persico, Reprint of the 1926 translation.
- [26] G. LIU, *3-manifolds with nonnegative Ricci curvature*, *Invent. Math.* **193** (2013), no. 2, 367-375.
- [27] J. LOTT and C. VILLANI, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, *Ann. of Math.* (2) **169** (2009), no. 3, 903-991.
- [28] F. C. MARQUES and A. NEVES, *Min-max theory and the Willmore conjecture*, *Ann. of Math.* (2) **179** (2014), no. 2, 683-782.
- [29] ———, *Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature*, *Invent. Math.* **209** (2017), no. 2, 577-616.
- [30] L. MAZET, *Stable minimal surfaces in $\mathbb{R}^6$* , preprint, available at arXiv:2405.14676.
- [31] J. MILNOR, *A note on curvature and fundamental group*, *J. Differential Geom.* **2** (1968), 1-7.
- [32] G. PERELMAN, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint, available at arXiv:0211159.
- [33] ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, available at arXiv:0307245.
- [34] ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, available at arXiv:0303109.
- [35] P. PETERSEN and M. WINK, *New curvature conditions for the Bochner technique*, *Invent. Math.* **224** (2021), no. 1, 33-54.
- [36] J. T. PITTS, *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, *Mathematical Notes*, vol. 27, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981.
- [37] G. RICCI-CURBASTRO, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, *Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti* **63** (1904), 1233-1239.
- [38] G. RICCI-CURBASTRO, *Opere. Vol. I. Note e memorie*, Edizioni Cremonese, Rome, 1956. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.
- [39] ———, *Opere. Vol. II. Note e memorie: teoria dell'elasticità*, Edizioni Cremonese, Rome, 1957. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.
- [40] R. SCHOEN and S. T. YAU, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature*, *Ann. of Math.* (2) **110** (1979), no. 1, 127-142.
- [41] R. SCHOEN and S. T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, *Comm. Math. Phys.* **65** (1979), no. 1, 45-76.
- [42] ———, *Complete three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature*, *Seminar on Differential Geometry*, 1982, pp. 209-228.
- [43] J. SIMONS, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, *Ann. of Math.* (2) **88** (1968), 62-105.
- [44] K.-T. STURM, *On the geometry of metric measure spaces. I*, *Acta Math.* **196** (2006), no. 1, 65-131.
- [45] ———, *On the geometry of metric measure spaces. II*, *Acta Math.* **196** (2006), no. 1, 133-177.
- [46] G. TIAN, *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class*, *Invent. Math.* **101** (1990), no. 1, 101-172.
- [47] P. TOPPING, *Lectures on the Ricci flow*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 325, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [48] C. VILLANI, *Topics in optimal transportation*, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [49] ———, *Optimal transport*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, vol. 338, Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.
- [50] A. VOSS, *Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen* **16** (1880), 129-178.
- [51] H. H. WU, *The Bochner technique in differential geometry*, *Math. Rep.* **3** (1988), no. 2, i-xii and 289-538.
- [52] K. YANO and S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, *Annals of Mathematics Studies*, No. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.
- [53] S. T. YAU, *Problem section*, *Seminar on Differential Geometry*, 1982, pp. 669-706.



Alessandro Carlotto

Alessandro Carlotto è professore ordinario di Analisi matematica presso l'Università di Trento e Principal Investigator del progetto ERC CHANGE. Allievo della Scuola Normale Superiore, ha ottenuto il dottorato di ricerca in Matematica nel 2014 presso la Stanford University discutendo una tesi dal titolo *Rigidity and flexibility phenomena in general relativity* sotto la direzione del Prof. Richard Schoen. Ha lavorato come ricercatore all'Imperial College di Londra e successivamente, dal 2016 al 2022, come docente presso il Politecnico Federale di Zurigo (ETH Zurich) prima di rientrare in Italia nel settembre 2022. Nel corso della sua carriera si è occupato di vari temi al confine tra l'Analisi e la Geometria, quali ad esempio lo studio delle superfici minime, delle varietà a curvatura scalare positiva, e delle equazioni vincolari di Einstein. Per il suo lavoro di ricerca, è stato insignito di diversi premi e riconoscimenti tra i quali – limitandoci agli anni più recenti – citiamo il Latsis Prize (2022) con la citazione “for groundbreaking contributions to Geometric Analysis”, la medaglia Ambrosetti (2023) ed il Frontiers of Science Award (2024).

Ricci Curbastro e la nascita del calcolo differenziale assoluto

ALBERTO COGLIATI

Università degli Studi di Padova

E-mail: alberto.cogliati@unipd.it

Sommario: *In occasione del centenario dalla scomparsa del suo principale ideatore, questo articolo si propone di ripercorrere alcune delle tappe più significative che portarono Gregorio Ricci Curbastro allo sviluppo del nuovo calcolo. Particolare attenzione sarà dedicata agli anni della sua formazione scientifica presso l'Università di Pisa e la Scuola Normale Superiore, con un'enfasi particolare sul ruolo svolto da Enrico Betti nell'orientare gli interessi di ricerca del giovane Ricci verso la fisica matematica e, più in generale, verso un approfondito studio dell'eredità scientifica di Riemann. Vengono inoltre analizzati alcuni dei lavori prodotti tra il 1884 e il 1892, nei quali comparvero per la prima volta i concetti fondamentali della teoria: la proprietà di covarianza dei coefficienti di particolari forme differenziali quadratiche, la definizione esplicita dei sistemi di funzioni covarianti e controvarianti (tensori) e la nozione di derivata covariante.*

Abstract: *On the centenary of the death of its main discoverer, this article aims to retrace some of the most significant steps that led Ricci to develop the new calculus. Particular attention will be devoted to the years of his scientific training at the University of Pisa and the Scuola Normale Superiore, and to the decisive role played by Enrico Betti in guiding the young Gregorio's research interests towards mathematical physics and, more generally, towards a careful study of Riemann's scientific legacy. Some works from the period 1884-1892 will also be analysed in some detail, in which the main notions of the theory appeared: the covariance property of the coefficients of certain quadratic differential forms, the explicit definition of systems of covariant and contravariant functions (tensors), and the covariant derivative*

1. – Introduzione

Diversamente da molti contributi fondamentali nella storia della matematica, il calcolo differenziale assoluto sviluppato da Gregorio Ricci Curbastro non consistette tanto nella scoperta di nuove nozioni e di nuovi teoremi, ma piuttosto in un modo nuovo di organizzare e comprendere risultati già noti che poterono finalmente essere interpretati alla luce di radici concettuali comuni. In altri termini, si potrebbe dire, da un punto di vista storico la portata del calcolo di Ricci fu di natura prevalentemente meta-teorica, nel senso che esso si esplicitò come una riflessione matura, e per nulla banale, sopra un

corpo di dottrine già esistenti, quali la teoria delle varietà riemanniane, la teoria dell'equivalenza delle forme quadratiche differenziali e la teoria degli invarianti e dei parametri differenziali.

Tale carattere metateorico dal nuovo strumento algoritmico impedì per qualche tempo il riconoscimento delle sue reali potenzialità. Allo stesso tempo, però, esso rese disponibile un vasto spettro di applicazioni che investirono tanto la fisica-matematica quanto la geometria pura. Due esempi, tra i molti, nei quali il calcolo di Ricci poté dispiegare la sua feconda efficacia possiamo ritrovare nella teoria della relatività generale e nei numerosi tentativi di generalizzazione della geometria metrica riemanniana che fecero seguito all'interpretazione geometrica della derivata covariante proposta nel 1917 da Tullio Levi-Civita, che di Ricci fu allievo, nel suo

Accettato: 29 giugno 2025.

celebre contributo [Levi-Civita 1917], *Sulla nozione di parallelismo in una varietà qualunque*.

In effetti, il calcolo differenziale assoluto fu riconosciuto come strumento essenziale di ricerca solo all'indomani della pubblicazione, nel biennio 1915-1916, da parte di Einstein delle fondamentali memorie sulla teoria della gravitazione, nelle quali venne esplicitamente menzionato il ruolo cruciale che i lavori di Ricci avevano rivestito nello sviluppo della nuova teoria. Prima di allora, come evidenzia l'esito delle competizioni per il Premio Reale di Matematica alle quali Ricci partecipò nel 1887 e nel 1901, prevalsero posizioni di scetticismo che vedevano (per la verità, non senza qualche giustificazione) negli sviluppi formali del calcolo un corpo di tecniche e di nozioni di gran lunga sproporzionato rispetto alle applicazioni esplorate sino a quel momento.

A 100 anni dalla morte del suo principale scopritore, ci proponiamo di ripercorrere alcune delle tappe più significative che condussero Ricci a sviluppare il nuovo calcolo. Porremo una particolare attenzione agli anni della sua formazione scientifica presso l'Università di Pisa e la Scuola Normale Superiore e al ruolo preponderante rivestito da Enrico Betti nell'orientare gli interessi di ricerca del giovane Gregorio nel campo della fisica matematica e più in generale verso un attento studio dell'eredità scientifica di Riemann. Saranno poi analizzati in qualche dettaglio alcuni lavori del periodo 1884-1892 nei quali fecero la loro comparsa le nozioni principali della teoria: proprietà di covarianza dei coefficienti di certe forme differenziali quadratiche, definizione esplicita dei sistemi di funzioni covarianti e controvarianti (tensori), derivata covariante. Infine, svolgeremo qualche riflessione sul processo di ricezione del calcolo tensoriale in rapporto ai già citati Premi Reali. Specie per quanto riguarda i §§2-4, la trattazione si avvarrà di alcune fonti inedite che si sono rese disponibili grazie alla cortesia del Centro Archivistico della Scuola Normale Superiore di Pisa e dell'Archivio Ricci Curbastro presso il Liceo G. Ricci Curbastro di Lugo (RA).

2. – Gli anni giovanili e i primi studi

La formazione matematica del giovane Gregorio fu contraddistinta, inizialmente, da un certa frammen-

tarietà. Gli studi presso la pontificia università *La Sapienza* che si erano avviati nel 1869 vennero interrotti nel 1870 a causa dei rivolgenti politici del settembre di quello stesso anno che fecero seguito alla breccia di Porta Pia.⁽¹⁾ Ricci, insieme al fratello Domenico, tentò un trasferimento all'Università di Bologna che tuttavia fu ostacolato dalla mancanza di un diploma di scuola superiore, di cui Ricci non disponeva poiché la sua prima formazione era stata affidata a precettori privati. Ricci entrò nell'Ateneo bolognese soltanto nel 1872. Qui seguì, tra gli altri, corsi di calcolo differenziale e integrale, di fisica e di geometria descrittiva sotto la guida di Eugenio Beltrami, che avrebbe a brevissimo lasciato Bologna per assumere la cattedra di meccanica razionale a Roma.

Dopo un solo anno trascorso a Bologna, probabilmente in cerca di un ambiente scientifico più stimolante, Ricci optò per il trasferimento alla Normale di Pisa dove fu effettivamente ammesso nel novembre 1873, come studente esterno. Tra i suoi compagni di studio ritroviamo quello stesso anno anche Luigi Bianchi (1856-1826) il cui lavoro nel campo della geometria differenziale, pur con metodi e intenti assai diversi da quelli perseguiti da Ricci con il suo calcolo tensoriale, avrebbe contribuito a plasmare i lineamenti della disciplina fra Ottocento e Novecento.

Degli anni trascorsi da Ricci all'Università di Pisa e alla Scuola Normale abbiamo preziosa testimonianza nei quaderni di appunti che egli stesso trascrisse e che sono conservati nell'archivio delle sue carte a Lugo. Tra questi spiccano le *Lezioni di Analisi Superiore* (1873-74) di Ulisse Dini, le *Lezioni di Meccanica Razionale* (1873-74) di Ernesto Padova, le *Lezioni di Complementi di Calcolo Differenziale e Integrale* (1873-74) di Cesare Finzi, le *Lezioni di Meccanica Celeste* (1874-75) e le *Lezioni di Fisica Matematica* (1874-75) di Enrico Betti.

L'influenza più marcata sulla formazione di Ricci fu esercitata proprio da Betti e Dini. Quest'ultimo, in particolare, fu supervisore della tesi di laurea (il cui testo non ci è purtroppo pervenuto) che Ricci difese nel giugno del 1875, intorno ad alcuni aspetti della teoria delle equazioni lineari ordinarie nel campo

⁽¹⁾ In generale sulla biografia di Ricci, si vedano [Levi-Civita 1925] e [Goodstein 2018].

complesso e di tipo fuchsiano. Ad un tentativo di generalizzazione della teoria di Fuchs ad equazioni lineari che ammettono integrali non regolari, Ricci dedicò invece la tesi di abilitazione all'insegnamento. Il lavoro, che pure non fu mai pubblicato e che è rimasto in forma manoscritta⁽²⁾ (il titolo è *Alcune Ricerche sulle Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Razionali*), riveste tuttavia una qualche importanza poiché contribuisce a chiarire il quadro degli interessi di ricerca di Ricci, indicando il ruolo rilevante che l'opera di Riemann esercitò su di lui sin da giovanissimo. Ispirato dai lavori del matematico Wilhelm Thomé con i quali quest'ultimo, che era stato allievo di Weierstrass a Berlino, aveva avviato un primo tentativo di estensione della teoria di Fuchs al caso di integrali irregolari,⁽³⁾ Ricci si proponeva di superare le difficoltà che tale generalizzazione implicava, mediante un opportuno adattamento dei procedimenti cui Riemann aveva rapidamente accennato in un celebre lavoro dedicato alle equazioni ipergeometriche.⁽⁴⁾

Risultato vincitore di una borsa di studio, Ricci trascorse a Pisa anche l'anno accademico 1876-77. Ciò gli permise di dedicarsi in particolare allo studio dell'elettrodinamica verso la quale ormai da qualche anno Betti aveva rivolto i suoi interessi. Proprio su stimolo di Betti nel 1877 Ricci si dedicò alla stesura di [Ricci 1877b], [Ricci 1877c] due articoli di rassegna per la rivista *Il Nuovo Cimento* sulle più recenti acquisizioni nel campo delle interazioni elettromagnetiche.

Nel primo di questi contributi Ricci si propose di esporre le principali conseguenze di una formula che il fisico Clausius aveva recentemente introdotto per descrivere matematicamente l'interazione fra particelle cariche e che in termini vettoriali (e quindi anacronistici) può essere resa nel modo seguente:

$$(1) \quad \mathbf{F} = -ee' \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2} \right) - \frac{ee'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}'}{r} \right),$$

dove $\mathbf{F}$ indica la forza esercitata dalla particella e' sulla particella e , r la loro distanza relativa e $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ le velocità, rispettivamente, di e ed e' .

⁽²⁾ Il manoscritto è conservato presso l'Archivio di Lugo.

⁽³⁾ Si vedano in particolare [Thomé 1872a], [Thomé 1872b], [Thomé 1873].

⁽⁴⁾ Si tratta di [Riemann 1857].

L'intento che Ricci si prefiggeva era di procedere ad un confronto con formule analoghe introdotte da Weber e da Riemann e di valutarne le conseguenze a partire da principi di conservazione generali quali la conservazione del momento lineare, del momento angolare e un principio di natura più astratta (di cui non veniva fornita alcuna interpretazione fisica) che Ricci indicava con l'espressione di "principio di Betti". Si trattava di un principio, per certi versi assimilabile a quello di conservazione del momento angolare la cui introduzione si doveva allo stesso Betti il quale ne aveva discusso il contenuto nel corso di alcune lezioni tenute a Pisa nel 1877. Ai medesimi intenti espositivi aspirava anche il secondo lavoro sopra menzionato, pubblicato in quello stesso anno sempre su *Il Nuovo Cimento*, nel quale Ricci presentava i punti essenziali della nuova elettrodinamica di Maxwell.

3. – Il periodo trascorso a Monaco

Nel 1878 Ricci risultò vincitore di un bando ministeriale per borse di perfezionamento all'estero con le quali il Ministero dell'Istruzione del neocostituito stato unitario sosteneva il soggiorno di giovani studiosi presso atenei esteri. Su consiglio dello stesso Betti, la scelta di Gregorio si orientò verso il Politecnico di Monaco dove dal 1875 insegnava Felix Klein. Da qualche anno Klein era in contatto epistolare con Betti, al quale lo accumulavano gli interessi di ricerca per la teoria delle equazioni algebriche e per l'opera di Riemann nel campo dell'analisi com-

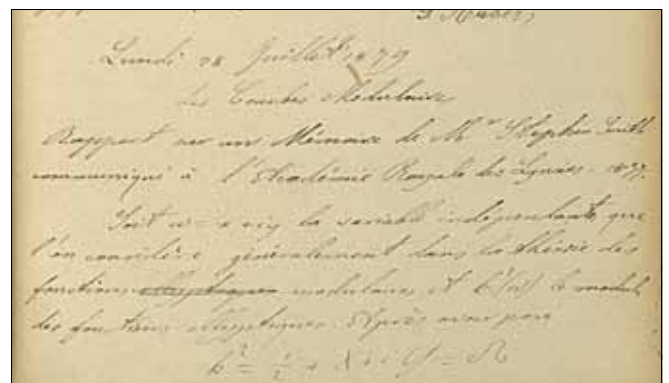


FIGURA 1 – Un particolare del manoscritto che reca il resoconto del seminario tenuto da Ricci a Monaco nel luglio 1879, Band 1, 2, Seite 75.

plexsa. Betti, dovette vedere nel collega tedesco l'interlocutore privilegiato per guidare i primi passi di Ricci nella ricerca matematica, tantopiù dal momento che in anni recenti (1876-1877) nel contesto delle proprie ricerche sull'icosaedro e sulle equazioni di quinto grado Klein si era occupato anche della teoria delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine di tipo fuchsiano, un campo al quale lo stesso Ricci aveva dedicato la propria tesi di laurea e quella di abilitazione all'insegnamento.

Ricci giunse a Monaco nel novembre del 1878, quando il semestre invernale era già avviato. Su indicazioni di Klein, cominciò a seguire due corsi: il primo, tenuto dallo stesso Klein, verteva su argomenti avanzati della teoria delle equazioni algebriche; il secondo, tenuto da Alexander von Brill, riguardava invece la teoria delle funzioni ellittiche.

Una vivida testimonianza delle prime settimane trascorse a Monaco possiamo trarre da una lettera del dicembre 1878 che Ricci inviò al proprio maestro Betti, per ragguagliarlo sull'andamento del soggiorno di studio.

Chiarissimo Sig.r Professore

Ella mi avrà scusato se prima d'ora non Le ho mandato notizie mie e dei miei studi, come Ella gentilmente mi scrisse di desiderare, perché io stesso ho voluto prima non solamente fissare il piano di detti studi, ma addentrarmi un po' per saperlene dire qualche cosa di preciso. Quando presentai al Prof.r Klein la di Lei lettera, questi mi disse che dei corsi, che si facevano qui, egli vedeva due soltanto mi potessero essere utili, il suo sulla teoria delle equazioni, e quello del Prof.r Brill sulle funzioni ellittiche. In pari tempo egli mi indicò alcune teorie come necessarie a conoscersi per l'intelligenza del suo corso, e mi consigliò di studiare nel Serret la teoria dei numeri e quella delle sostituzioni e di più la seconda parte del Corso di Geometria del Clebsch pubblicato da Lindemann. Aggiunga a questo il dovermi mettere al corrente delle lezioni già fatte dal Klein prima del mio arrivo e comprenderà che il lavoro non mi è proprio mancato, né mi può mancare per ora. Anzi per non disperdere l'attenzione sopra troppi soggetti ho dovuto rinunciare a seguire il corso del Brill, ciò, che non mi è molto rincresciuto, perché la teoria delle funzioni ellittiche l'ho fatta anche costì sotto il Prof.r Dini. A questo modo ho potuto rivolgere tutta la mia attenzione al corso interessantissimo del Klein e alle diverse teorie, che a questo si riannodano, fra le quali alcune, specialmente le geometriche mi sono affatto nove. Vedo pure che mi sarebbe molto utile studiare

la memoria di Riemann sulle funzioni abeliane, e lo farò se per l'avvenire troverò il tempo, che ora mi manca.

Intanto ho visto nel Serret i due primi capitoli della teoria dei numeri e i primi quattro di quella delle sostituzioni, argomenti, al cui studio sento che prenderei molto gusto, perché mi pare che ci sia ancora molto da fare, così che mi auguro di poterci tornare sopra con più calma e di proposito.

Quanto al corso del Klein, egli si è finora trattenuto sulla parte generale e preparatoria, come sulla riducibilità ed il suo significato nei diversi casi, sulla trasformazione di Tschirnhaus e sulle equazioni, che ammettono trasformazioni razionali in sé stesse, sui gruppi di sostituzioni nei casi di $n = 5, 7, 11, 6, 8, 12$; etc.. Soltanto nelle ultime lezioni prima del Natale egli è venuto allo studio delle risolvibili, che proseguiremo dopo le vacanze.

Del resto io mi trovo benissimo qui [sic!] e son molto contento di aver seguito il di Lei consiglio, del quale La ringrazio, come pure dell'avermi procurata la conoscenza di una persona così istruita e gentile come il Prof.r Klein, da cui ho nei miei studi il più valido aiuto. ⁽⁵⁾

Gli interessi di studio di Ricci non mutarono nei mesi successivi. Come egli stesso spiegò nella seconda delle relazioni ⁽⁶⁾ inviate al Ministero nell'agosto del 1879, decise di continuare a seguire i corsi di Klein e in particolare il suo "Corso Speciale" dedicato in quell'anno alla teoria delle funzioni modulari e alla teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche. Del secondo semestre trascorso a Monaco restano inoltre i sunti di due seminari che egli tenne nel marzo e nel luglio del 1879 sul tema della teoria di Galois di certe particolari equazioni algebriche di grado 2^n e su una memoria del matematico irlandese Stephen Smith intorno ad una "nesso importantissimo" tra la teoria delle forme quadratiche e delle curve modulari. ⁽⁷⁾

Nel necrologio ⁽⁸⁾ che scrisse per Ricci nel 1925, Levi-Civita osservava che i mesi trascorsi a Monaco sotto la guida scientifica di Klein non paiono avere suscitato un effetto evidente sulla sua produzione

⁽⁵⁾ Centro Archivistico SNS, Lettera di Ricci a Betti, 29 Dicembre 1878.

⁽⁶⁾ [Goodstein 2018, Cap. 3].

⁽⁷⁾ Si tratta di [Smith 1877], una breve memoria presentata da Luigi Cremona all'Accademia dei Lincei.

⁽⁸⁾ Si veda [Levi-Civita 1925].

matematica. In effetti, come si è visto, le materie di studio che Ricci poté approfondire (teoria delle equazioni algebriche, teoria dei numeri e teoria delle funzioni ellittiche) ebbero poco a che fare con i temi verso i quali di lì a qualche anno i suoi interessi si sarebbero rivolti.

Si può supporre piuttosto, come lo stesso Levi-Civita fu disposto a riconoscere, che Klein abbia esercitato sul giovane Ricci un'influenza di natura più generale (e sotterranea), consolidando in lui una attitudine verso il perseguimento di un'ideale unità della scienza e favorendo, se mai ce ne fosse stato bisogno, l'interesse verso l'intera opera di Riemann.

4. – Il trasferimento a Padova e il primo dei lavori sul calcolo

Al ritorno da Monaco, Ricci ottenne il suo primo incarico accademico, con la nomina ad assistente di Ulisse Dini presso l'Università di Pisa per l'anno 1879-1880. Pressoché contemporaneamente, Ricci tentò di muovere i primi passi della sua carriera universitaria partecipando a svariati concorsi a cattedra a Roma, Bologna, Napoli, Palermo e a Padova. Proprio a Padova egli risultò vincitore di una posizione per Professore Straordinario in Fisica Matematica. La presa di servizio presso l'Ateneo patavino avvenne nel dicembre 1880, l'inizio del corso a lui affidato era invece previsto per il gennaio dell'anno successivo.

Della prima lezione per il corso di Fisica Matematica che Ricci tenne a Padova l'8 gennaio 1881 abbiamo preziosa testimonianza in un documento manoscritto (che già Levi-Civita ebbe occasione di visionare e di citare al momento della stesura del necrologio per la morte dello stesso Ricci) che riporta il testo dell'intero discorso inaugurale.⁽⁹⁾

Soltanto qualche settimana prima, il 3 dicembre 1880, Ricci aveva interpellato Betti in cerca di qualche consiglio rispetto al contenuto della lezione inaugurale alla quale, con sua sorpresa, erano invitati a partecipare non solo studenti della facoltà ma anche molti colleghi professori.

⁽⁹⁾ Il manoscritto è preservato presso l'Archivio Ricci-Curbastro di Lugo.

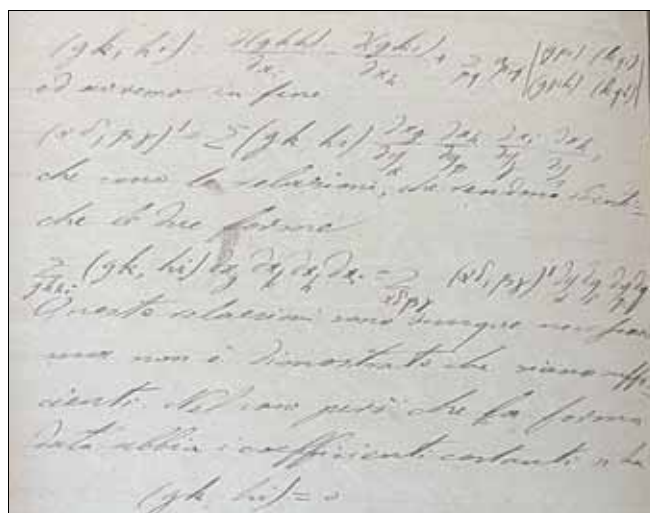


FIGURA 2 – Un particolare del quaderno contenente appunti manoscritti, per mano di Ricci, delle lezioni di Enrico Betti sulla Teoria del Calore, Pisa, 1876-77. Archivio Ricci Curbastro di Lugo.

Chiar.mo Sig.r. Professore,

Ho appreso che a Padova vige l'uso a dir vero increscioso che i nuovi Professori inaugurino il loro corso con una prelezione, a cui intervengono molti colleghi e discepoli della facoltà. A quanto mi hanno detto si tratta di cosa di poca importanza, ma che pur bisogna fare e che specialmente in un corso matematico presenta le sue difficoltà. Mi parrebbe opportuno nel caso mio di trattare qualche argomento di storia o della scienza o dell'insegnamento delle Matematiche superiori in Italia, ma ora non saprei dove mettermi le mani per trovare la materia prima di un lavoro di questo genere.⁽¹⁰⁾

Ricci continuava la sua lettera appellandosi alla cortesia di Betti, richiedendo consigli e una lista di riferimenti bibliografici utili per predisporre la lezione inaugurale e più in generale per orientare i contenuti del corso cui stava per dare inizio. In una bozza di risposta non datata, che è preservata sul retro della lettera di Ricci appena citata, Betti elargiva suggerimenti interessanti che, come si vedrà, Ricci avrebbe diligentemente fatto propri.

Caro Ricci,

Mi pare che un soggetto di una prelezione potrebbe essere la influenza della Fisica Matematica ai progressi dell'Analisi matematica. La rappresentabilità

⁽¹⁰⁾ Centro Archivistico SNS, Lettera di Ricci a Betti, 3 Dicembre 1880.

analitica di funzioni di quantità reali arbitrariamente date originata dalla quistione delle corde vibranti e dalla teoria del calore. La teoria delle funzioni di variabili complesse della quale Riemann ha trovato [...] principii delle funzioni potenziali [...] di Green [...] originata dalla teoria della elettrostatica e del magnetismo [...] (¹¹)

Tra i consigli bibliografici inviati a Ricci, con ogni probabilità Betti dovette includere anche quello alle *Lezioni elementari di Fisica Matematica* di Fabrizio Ottaviano Mossotti e alla prolusione, lì contenuta, con la quale quest'ultimo aveva inaugurato il corso di Fisica Matematica e Meccanica Celeste al momento di assumere la cattedra di Fisica presso l'Università di Pisa nel 1841.

Sancendo un'ideale continuità con l'iniziatore della scuola pisana, proprio alle parole che Mossotti pronunciò in quella occasione Ricci affidò il compito di introdurre una descrizione generale del fine della ricerca fisica e quindi una definizione del campo di indagine della Fisica Matematica, in contrapposizione con quello della Fisica Sperimentale.

“L'investigazione delle leggi e la determinazione teorica delle forze sono dunque i due grandi oggetti che si propone la fisica e ciascuno di essi si consegue con i suoi mezzi propri. Per primo oggetto è necessario studiare la natura quale è, cioè esaminarla per mezzo di osservazioni, interrogarla per mezzo di esperienze, ed analizzando i risultamenti ottenuti, riconoscere per induzioni successive quali sono le leggi, con cui il Creatore ha regolato il mondo. Niente si può scoprire in questa parte per mezzo del solo raziocinio ... per il secondo oggetto si parte pure dalle leggi del movimento, che l'esperienza ci ha somministrate, ma si procede poi con raziocini puramente matematici a dedurre dalle leggi verificate i caratteri delle forze, e di lì si discende a tutte le conclusioni riguardo ai fenomeni. Di qui avviene la divisione della fisica in isperimentale e matematica. La fisica sperimentale ha per oggetto di far conoscere le osservazioni e le esperienze, dalle quali si sono indotte le leggi, che regolano i fenomeni; la fisica matematica di esporre i metodi per i quali siamo saliti dall'analisi delle leggi a caratterizzare le forze ed a somministrare i mezzi per

discendere in seguito dalla cognizione delle forze al calcolo di tutti i fenomeni.” (¹²)

Individuato così il fine che Fisica Matematica si propone, seguendo i suggerimenti di Betti, Ricci passava a discutere del ruolo che questa disciplina aveva rivestito nel plasmare gli sviluppi dell'Analisi, affrontando in particolare il problema della corda vibrante e la questione della rappresentabilità in serie trigonometriche di funzioni arbitrarie.

l'influenza più decisiva è stata esercitata dalla Fisica Matematica sui progressi dell'Analisi così che ad essa può dirsi si debba tutto quel complesso di teorie che nelle nostre Università si insegnano sotto il nome di Analisi Superiore e che hanno prodotto un rivolgimento radicale nello studio delle funzioni tanto di variabili reali, quanto di variabili complesse. (¹³)

L'enfasi con la quale Ricci affrontò il tema appare significativa, in primo luogo perché testimonia dell'idea di un rapporto strettissimo fra ricerca fisica e ricerca matematica; in secondo luogo, poiché rivela l'influenza esercitata sulla sua formazione dagli insegnamenti di Ulisse Dini, del quale come sappiamo egli fu assistente e al quale nel corso della sua prolusione egli volle porgere uno speciale tributo di stima e di riconoscenza, ricordando la recente pubblicazione del trattato *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*.

Questi problemi sono stati oggetto continuo di studi profondi per parte specialmente dei Matematici tedeschi del nostro secolo, ma mi è grato il poter rendere omaggio al nome del mio amato ed illustre maestro il Prof. Dini col ricordare qui il suo libro, di cui la prima parte soltanto è uscita l'anno scorso alla luce, e sul quale il problema delle rappresentazioni analitiche delle funzioni delle variabili reali è trattata con tanta generalità di metodi, ricchezza e novità di risultati da assicurargli un posto distintissimo nella storia della Scienza. (¹⁴)

Per qualche anno dopo il suo trasferimento a Padova, la Fisica Matematica costituì non soltanto la sua

(¹¹) Centro Archivistico SNS, Minuta (non datata) di una lettera di Betti a Ricci. Ringrazio Umberto Bottazzini per l'aiuto nel decifrare alcune parti del manoscritto la cui lettura è particolarmente difficile.

(¹²) Archivio Ricci Curbastro di Lugo, Raccoglitore III. La lunga citazione è tratta, con qualche modifica, da [Mossotti 1845, p. 6].

(¹³) Archivio Ricci-Curbastro di Lugo, Raccoglitore III.

(¹⁴) Archivio Ricci-Curbastro di Lugo, Raccoglitore III.

principale materia di insegnamento ma anche l'ambito privilegiato di ricerca.⁽¹⁵⁾ Ne è testimonianza una pubblicazione del 1882, *Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti*, dedicata all'elettrodinamica e alla teoria del potenziale nella quale, come ebbe a scrivere a Betti in una lettera del marzo 1882, Ricci si proponeva di affrontare il seguente problema:

Dato un sistema di correnti elettriche costanti entro a un conduttore isolato S , determinare in S una tale distribuzione una tale distribuzione magnetica, la cui azione sui punti esterni ad S equivalga quella delle correnti date.⁽¹⁶⁾

A partire dal 1884, con il lavoro *Sui principi di una teoria delle forme quadratiche differenziali*, il tenore delle pubblicazioni di Ricci mutò profondamente rispetto ai precedenti contributi di carattere fisico-matematico, spostandosi prevalentemente verso uno studio sistematico delle forme quadratiche differenziali e dei loro invarianti, sancendo così la nascita di ciò che solo qualche anno più tardi egli avrebbe indicato con la denominazione di "calcolo differenziale assoluto".

Ma quali furono, è lecito chiedersi, le ragioni che condussero Ricci a orientare i suoi interessi verso un tale genere di questioni? Posticipando al paragrafo successivo una esame più dettagliato del contesto di risultati e di problemi con i quali Ricci dovette confrontarsi, un aspetto della formazione fisico-matematica presso l'Università di Pisa non dovrebbe essere trascurato. Nonostante avesse già ottenuta la laurea e la abilitazione all'insegnamento, Ricci trascorse a Pisa l'intero anno accademico 1876-77, potendo usufruire di una borsa di studio. Proprio in quell'anno Betti dedicò un corso di Fisica Matematica alla teoria del calore. Possiamo farci un'idea assai precisa del contenuto di quelle lezioni oltre che dagli appunti dello stesso Betti che sono conservati presso il fondo archivistico della Scuola Normale anche dai quaderni di mano dello stesso Ricci

⁽¹⁵⁾ Ricci continuò a tenere corsi di Fisica Matematica anche dopo la sua promozione a professore ordinario nel 1890 sulla cattedra di Algebra Complementare. Si veda a questo riguardo [Goodstein 2018, Capp. 6, 8].

⁽¹⁶⁾ Centro Archivistico SNS, Lettera di Ricci a Betti, 6 marzo 1882.

preservati a Lugo. Particolarmente interessante è la prima parte del corso che reca il titolo "Conducibilità" nella quale Betti affrontò un caso particolare del problema dell'equivalenza per due forme quadratiche differenziali.⁽¹⁷⁾ Con un evidente, seppur implicito, riferimento alla discussione che dello stesso problema aveva fornito Riemann nella sua *Commentatio Mathematica*, Betti aveva ricondotto l'intera trattazione a due problemi distinti: da un lato, la determinazione di un opportuno sistema di coordinate e dall'altro l'integrazione delle equazioni della teoria che proprio il cambiamento di coordinate adottato ha reso accessibile. Nelle parole di Betti:

Lo studio del problema generale [della conduzione del calore], che forma l'oggetto di questa teoria, consiste evidentemente di due parti, in una delle quali si tratta di trasformare conveniente[mente] le equazioni del problema,⁽¹⁸⁾ o gli integrali, da cui queste dipendono, e nell'altra di trovare la funzione F che soddisfa alle equazioni stesse. Occupiamoci della prima, e dimostriamo prima di tutto che se si ha una forma

$\sum_{i,i'} a_{i,i'} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_{i'}}$ e si pone $x_i = \xi(y_1, y_2, y_3)$ la determinazione dei coefficienti della forma trasformata

$\sum_{i,i'} b_{i,i'} \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial T}{\partial y_{i'}}$, dipendono dalla determinazione dei coefficienti della forma differenziale $\sum_{i,i'} B_{i,i'} dy_i dy_{i'}$, in

cui si trasforma per mezzo delle stesse formule $\sum_{i,i'} A_{i,i'} dx_i dx_{i'}$. Noi dimostreremo questo teorema in generale per qualunque numero di variabili.

⁽¹⁷⁾ Una formulazione precisa del problema è data nel § 5 di questo lavoro.

⁽¹⁸⁾ Betti si riferisce qui ad una formulazione variazionale del problema della conducibilità per un corpo solido S di superficie σ , data dalla seguente condizione:

$$\delta \int_S \left(\sum_{i,i'} a_{i,i'} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_{i'}} \right) dS + \\ + \delta \int_{\sigma} h(T - T_0)^2 d\sigma + 2 \int_S pC \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dS = 0;$$

T , la temperatura è funzione del tempo t e delle coordinate x^1, x^2, x^3 ; $a_{i,i'}$ sono i coefficienti della conducibilità termica, h e T_0 sono rispettivamente la conducibilità esterna e la temperatura esterna; infine, p è la densità e C il calore specifico. Qui, e nel seguito, contariamente all'uso di Ricci e dei suoi contemporanei, impiegherò indici "in alto" per denotare gli indici delle coordinate. Ciò per rendere le formule più ordinate e trasparenti.

La trasformazione dell'equazione del calore rispetto a un cambiamento di coordinate qualunque è così ricondotta al più semplice problema della trasformazione di due forme quadratiche differenziali i cui coefficienti, denotati con B_{rs} e A_{rs} , sono legati ai coefficienti della conducibilità termica a_{rs} , b_{rs} dalle relazioni:

$$B_{rs} := \frac{1}{\det(\mathbf{B})} \frac{\partial \det(\mathbf{B})}{\partial b_{rs}}, \quad A_{rs} := \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial a_{rs}}$$

e cioè sono tali per cui se si pone $[a_{rs}] =: \mathbf{A}$, $[A_{rs}] =: \tilde{\mathbf{A}}$ e $[b_{rs}] =: \mathbf{B}$, $[B_{rs}] =: \tilde{\mathbf{B}}$, si ha: $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}$. Alla luce di queste semplici considerazioni Betti si diffondeva quindi in un'ampia discussione volta a ricavare condizioni necessarie per l'esistenza di un cambiamento di coordinate che trasforma una data forma differenziale $\sum_{i,i'} A_{i,i'} dx^i dx^{i'}$ nella $\sum_{i,i'} B_{i,i'} dy^i dy^{i'}$. Tra queste condizioni spiccano alcune relazioni differenziali notevoli, indicate come condizioni necessarie per la trasformabilità, quali:

$$(\alpha\delta, \beta\gamma)' = \sum_{g,h,k,i=1}^n (gk, hi) \frac{\partial x^g}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^h}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^i}{\partial y^\gamma} \frac{\partial x^k}{\partial y^\delta},$$

$$\alpha, \delta, \beta, \gamma = 1, \dots, n$$

che in effetti possiamo interpretare (retrospettivamente) come le leggi di trasformazione delle componenti completamente covarianti del tensore di curvatura di Riemann, ⁽¹⁹⁾ e la relazione

$$(gk, hi) = 0, \quad g, k, h, i = 1, \dots, n,$$

indicata come condizione necessaria affinché la forma $\Phi = \sum_{i,i'} A_{i,i'} dx^i dx^{i'}$ sia trasformabile in una forma differenziale quadratica a coefficienti costanti. Proprio la dimostrazione del fatto che queste ultime relazioni sono in realtà anche sufficienti sarebbe stato dimostrato da Ricci nel 1884 nel primo dei numerosi contributi dedicati allo sviluppo del calcolo differenziale assoluto.

È verosimile che proprio questo corso di lezioni tenute da Betti abbia suscitato in Ricci un vivo interesse verso lo studio delle forme quadratiche differenziali e delle loro proprietà di trasformazione rispetto a trasformazioni di coordinate arbitrarie, che Riemann aveva avviato già nel 1854 e che altri

matematici, quali Erwin Christoffel, Rudolf Lipschitz e Richard Beez, dopo la pubblicazione della *Habilitationsvortrag* (1868) e della *Commentatio Mathematica* (1876), avevano proseguito e approfondito.

5. – Intermezzo: sulla storia del concetto di tensore

Lo strumento delle coordinate offre l'innegabile vantaggio di consentire l'impiego delle tecniche dell'analisi per la risoluzione di problemi di ordine geometrico. Allo stesso tempo, tuttavia, esso introduce un carattere di arbitrarietà che è estraneo alla natura delle questioni che si intendono trattare. Per tale ragione, è necessario assicurarsi che le nozioni geometriche (o fisiche) di cui si fa uso, pur espresse in una forma dipendente dalle coordinate, abbiano un significato intrinseco e indipendente dalla scelta adottata. Il concetto di tensore risponde a questa necessità.

Da un punto di vista storico, il calcolo tensoriale fu il risultato di un processo di scoperta piuttosto complesso che coinvolse svariati ambiti di ricerca quali la geometria differenziale, la teoria della elasticità, la cristallografia e naturalmente la teoria della relatività. Verso la fine dell'Ottocento, soprattutto per opera di Gregorio Ricci Curbastro e del suo allievo Tullio Levi-Civita, a partire da un disorganico e multiforme insieme di tecniche e di strumenti già esistenti, il calcolo poté organizzarsi in una disciplina matematica autonoma.

Le denominazioni di tensore e di calcolo tensoriale non furono proprie dell'originaria trattazione di Ricci, il quale parlò piuttosto di sistemi di funzioni covarianti, controvarianti o misti e di calcolo differenziale assoluto. Il termine, introdotto per la prima

expressionibus eruitur

$$(5) \quad 2 \sum \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x}{\partial x_k} = \frac{\partial b_{i,j}}{\partial x_k} + \frac{\partial b_{j,k}}{\partial x_i} - \frac{\partial b_{i,k}}{\partial x_j}$$

et si haec quantitas per $p_{i,j,k,l}$ designatur

$$(6) \quad 2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x}{\partial x_k} = \sum_l \frac{\partial x}{\partial x_l} p_{i,j,k,l}$$

FIGURA 3 – Un dettaglio della *Commentatio Mathematica* di Riemann, dove compare la definizione dei simboli $p_{i,j,k,l}$, coincidenti, a meno di un inessenziale fattore numerico con i simboli dati da (6).

⁽¹⁹⁾ Un'espressione esplicita per tali funzioni a quattro indici è data nel § 5.

volta (1847) da W. Hamilton per designare la norma di un quaternione, fu impiegato dal fisico Woldemar Voigt, nello studio delle proprietà di simmetria dei cristalli, per designare una quantità fisica determinata da sei componenti e caratterizzata da opportune leggi di trasformazione. Le grandezze tensoriali di Voigt venivano di fatto a coincidere con tensori simmetrici covarianti di ordine due, in tre variabili. ⁽²⁰⁾

In seguito la nozione di tensore di Voigt fu generalizzata al caso non simmetrico e a tensori di ordine superiore e quindi proficuamente applicata allo studio della elettrodinamica e della relatività speciale. A partire dal 1913, Einstein riconobbe per la fisica e gli sviluppi della propria relatività generale la necessità di disporre di un calcolo differenziale assoluto, come quello che Ricci aveva sviluppato da circa un ventennio, per fornire una formulazione invariante delle leggi di natura. Assecondando l'uso dei fisici del tempo, Einstein impiegò la denominazione di Voigt per indicare i sistemi di funzioni covarianti o controvarianti introdotti da Ricci e da allora le espressioni “tensore” e “calcolo tensoriale” si affermarono definitivamente.

Secondo la definizione adottata da Ricci un sistema di funzioni misto r -volte covariante e s -volte controvariante consiste nella assegnazione di n^{r+s} funzioni delle coordinate $(x^1, \dots, x^n)$, $T_{i_1, \dots, i_r}^{k_1, \dots, k_s}$ tali che, rispetto a un qualunque cambiamento di coordinate $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1(x), \dots, y^n(x))$, sussistono le seguenti leggi di trasformazione:

$$(2) \quad \bar{T}_{j_1, \dots, j_r}^{l_1, \dots, l_s} = \sum_{h_1, \dots, h_s} \sum_{t_1, \dots, t_r} \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{h_1}} \cdots \frac{\partial y^{l_s}}{\partial x^{h_s}} \frac{\partial x^{t_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{t_r}}{\partial y^{j_r}} T_{t_1, \dots, t_r}^{h_1, \dots, h_s},$$

dove si intende che le somme siano estese a $h_1, \dots, h_s, j_1, \dots, j_r = 1, \dots, n$.

Esempi elementari di tensori sono offerti dalle componenti dei campi vettoriali e delle cosiddette forme pfaffiane che sono rispettivamente tensori controvarianti e covarianti di ordine 1. Un esempio notevole di tensore covariante di ordine 2 è la metrica di una varietà riemanniana, immediata generalizzazione della prima forma fondamentale

⁽²⁰⁾ Per una disamina dettagliata dell'origine della denominazione e della stessa nozione di tensore, si veda [Reich 1994].

di una superficie, che in un dato sistema di coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ assume la forma seguente:

$$(3) \quad \Psi = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad (21)$$

dove le a_{ik} sono funzioni delle coordinate che soddisfano alle seguenti proprietà: i) $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, \dots, n$; ii) $\sum_{i,k} a_{ik} v^i v^k > 0$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v^1, \dots, v^n) \neq 0$; iii) le funzioni $x \mapsto a_{ik}(x)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^2$, dove definite.

L'introduzione di tale nozione risale al 1854, anno in cui Riemann presentò il proprio discorso di abilitazione nel quale enunciò, in una forma piuttosto vaga e discorsiva, le idee generali alla base di una teoria delle varietà, oggi dette riemanniane, a un numero qualunque di dimensioni.

Pur non disponendo del concetto di tensore, Riemann fu molto esplicito nel riconoscere che le funzioni $x \mapsto a_{ik}(x)$, coefficienti della metrica, non hanno di per sé un significato geometrico intrinseco, poiché esse dipendono dalla scelta (arbitraria) del particolare sistema di coordinate adottato. Sorse allora il problema di stabilire condizioni atte a stabilire se due date forme differenziali quadratiche differiscono o meno l'una dall'altra per un semplice cambiamento di coordinate. Esso può essere così riformulato:

Problema 5.1 *Trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché, date due forme differenziali quadratiche*

$$(4) \quad \Phi = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \Psi = \sum_{r,s=1}^n b_{rs}(y) dy^r dy^s$$

nelle variabili $x^i, i = 1, \dots, n$ e $y^i, i = 1, \dots, n$, esista un cambiamento di coordinate $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ (sufficientemente regolare) che trasforma Ψ in Φ e cioè tale che sussistano le relazioni:

$$(5) \quad a_{ik}(x) = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial y^s}{\partial x^k} b_{rs}(y(x)).$$

⁽²¹⁾ In termini più precisi, una metrica riemanniana è identificabile con un elemento del fibrato dei tensori covarianti di ordine 2. Più propriamente, dunque, Ψ dovrebbe scriversi nella forma seguente $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx^i \otimes dx^k$. Si veda [Spivak 1999, I, capp. 4 e 9]. Qui e nel seguito ignoreremo tale distinzione, adeguandoci alla notazione “storica”.

Il problema fu affrontato e parzialmente risolto da Christoffel e Lipschitz con tecniche assai diverse. Christoffel, come già Riemann prima di lui, si servì una serie di funzioni con multi-indici in termini delle quali poté esprimere condizioni necessarie (e solo in qualche caso anche sufficienti) affinché una data forma Φ nelle variabili $x^1, \dots, x^n$ sia trasformabile in una seconda forma (essa pure data) Ψ nelle variabili $y^1, \dots, y^n$. Tra queste funzioni rivestono un ruolo assai rilevante i cosiddetti simboli di Riemann-Christoffel di prima e seconda specie:

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} gh \\ k \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{gk}}{\partial x^h} + \frac{\partial a_{kh}}{\partial x^g} - \frac{\partial a_{gh}}{\partial x^k} \right), \quad g, h, k = 1, \dots, n; \\ (6) \quad \left\{ \begin{matrix} gh \\ k \end{matrix} \right\} &= \sum_{s=1}^n a^{sk} \left[\begin{matrix} gh \\ s \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

e i seguenti simboli a quattro indici, che oggi possiamo riguardare come le componenti totalmente covarianti del tensore di curvatura di Riemann:

$$\begin{aligned} (gkhi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a_{gi}}{\partial x^h \partial x^k} + \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x^g \partial x^i} - \frac{\partial^2 a_{gh}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x^g \partial x^h} \right) + \\ (R) \quad &+ \sum_{\beta=1}^n \left\{ \begin{matrix} gi \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} hk \\ \beta \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} gh \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} ik \\ \beta \end{matrix} \right] \quad g, k, h, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Riemann guardò alle funzioni (R) come a una estensione della nozione gaussiana della curvatura di una superficie a varietà di dimensione n qualunque. Nel caso pluridimensionale, la curvatura cessa di essere una semplice funzione scalare definita sulla varietà (come succede nel caso delle superfici) per acquisire una struttura a quattro indici che, unitamente a opportune proprietà di trasformazione, fanno di essa un tensore. Tali coefficienti furono introdotti per la prima volta dallo stesso Riemann, non nel suo discorso inaugurale ma nel già citato lavoro del 1861 (ma pubblicato solo in [Riemann 1876] con il quale Riemann partecipò ad una competizione indetta dall'Accademia delle Scienze di Parigi sul problema della conduzione del calore. In questo stesso lavoro, fecero la propria comparsa anche i simboli di Riemann-Christoffel di prima specie, in una forma di poco differente rispetto a quella data da (6).

Inizialmente tali simboli furono introdotti per scopi prevalentemente algoritmici. Christoffel e

Ricci, in maniera più esplicita e generale, si servirono di essi per definire una operazione che proprio da Ricci fu battezzata con l'espressione di derivazione covariante: un tipo di derivazione (estensione della ordinaria derivazione in uno spazio euclideo) che consente di ottenere tensori $(r+1)$ -volte covarianti a partire da un tensore r -volte covariante; soltanto verso la fine degli anni Dieci del secolo scorso per opera di alcuni fondamentali contributi di Levi-Civita e di Arnoldus Jan Schouten, ad essi fu effettivamente attribuito un significato geometrico in termini della nozione di parallelismo fra vettori controvarianti (o covarianti). Fu questo l'inizio di una fase di nuovi sviluppi e di profondi mutamenti per la disciplina che orientarono le ricerche di molti specialisti (lo stesso Schouten, Hermann Weyl, Élie Cartan) verso un superamento del quadro teorico riemanniano e verso la creazione della cosiddetta teoria delle connessioni.

6. – La nascita del Calcolo Differenziale Assoluto

Il calcolo differenziale assoluto fu il risultato di un processo di scoperta lento e graduale che si svolse nell'arco di circa un decennio (1884-1892), durante il quale Ricci ideò e perfezionò progressivamente le nozioni chiave del suo algoritmo. Un primo importante contributo fu l'articolo intitolato *Principi di una teoria delle forme quadratiche differenziali*, [Ricci 1884], in cui Ricci fornì una discussione molto dettagliata del problema dell'equivalenza per le forme quadratiche differenziali, proponendosi un duplice obiettivo: offrire una trattazione delle forme quadratiche differenziali attraverso strumenti di natura puramente analitica e introdurre un criterio di classificazione che potesse aprire la strada a ricerche più sistematiche sull'argomento.

L'introduzione a [Ricci 1884] offre interessanti spunti di riflessione da questo punto di vista. Qui Ricci esprimeva la volontà di perseguire un ideale di uniformità e generalità nei metodi che, a suo avviso, non si riscontrava negli studi pubblicati in precedenza. Dopo aver richiamato i lavori pionieristici di Riemann, in particolare, l'*Habilitationsvortrag* e la *Commentatio Mathematica*, Ricci descriveva brevemente i contributi dei suoi predecessori (Christoffel

fel, Lipschitz, Voss e Beez) osservando che, a suo giudizio, (quasi) tutti presentavano difetti metodologici comuni:

quasi tutti i Geometri che si sono fino ad ora occupati di questo argomento [cioè della teoria delle forme quadratiche differenziali], [...] chiesero alle teorie che valgono pel nostro spazio e per le superficie ordinarie a due dimensioni, norma alle loro ricerche. E se i risultati a cui giunsero furono notevoli, i metodi non appaiono sempre chiari e non rendono dei risultati stessi sufficiente ragione [...]. [Ricci 1884, pp. 139-140]

Inoltre, Ricci intendeva abbandonare ogni riferimento esplicito ad analogie di natura meccanica e geometrica, a favore di una trattazione puramente analitica, priva di ogni coinvolgimento in discussioni “oziose” sulla natura degli spazi multidimensionali. Come spiegava:

Oggetto di questo scritto è di iniziare sulle forme differenziali quadratiche una serie di ricerche, le quali, condotte su concetti puramente analitici, meglio ci addentrino nella conoscenza della loro natura, e sfuggano anche così alle discussioni, a dir vero, alquanto oziose sulla esistenza e sulla natura degli spazi a più di tre dimensioni. Le interpretazioni dettate dalle analogie geometriche o meccaniche, che a quei risultati si potranno dare, non saranno che illustrazioni di una tale teoria. [Ricci 1884, pp. 139-140]

Non sorprende che queste osservazioni abbiano attirato tra gli storici una certa attenzione.⁽²²⁾ Sono state interpretate come una dichiarazione programmatica che documenta la volontà di sviluppare la teoria delle forme quadratiche differenziali e, più in generale, il nascente calcolo differenziale assoluto, in maniera indipendentemente da qualsiasi ricorso all'intuizione geometrica, confinando così la geometria differenziale a un ruolo affatto secondario nello sviluppo storico del calcolo.

Certamente, le parole di Ricci indicano una preferenza per metodi analitici e algebrici, in contrapposizione, ad esempio, a quelli impiegati da Lipschitz che era ricorso sovente ad argomentazioni tratte dalla meccanica e dal calcolo delle variazioni.⁽²³⁾ Tuttavia, esse non dovrebbero essere inter-

pretate come segno che Ricci intendesse sminuire il ruolo della geometria, o addirittura ignorarne l'importanza per le sue ricerche sulla teoria delle forme quadratiche differenziali.

La sua affermazione circa la volontà di evitare ogni discussione sulla natura degli spazi multidimensionali ha ragioni storiche specifiche, che andrebbero prese nella dovuta considerazione quando si valutano le dichiarazioni di Ricci e il loro impatto effettivo sul processo che ha portato alla creazione del calcolo differenziale assoluto.

Poco prima della pubblicazione di [Ricci 1884], la questione della legittimità degli spazi multidimensionali era stata al centro delle indagini del matematico tedesco Richard Beez.⁽²⁴⁾ A partire dalla fine degli anni Settanta dell'Ottocento, dopo la pubblicazione delle *Werke* di Riemann, Beez aveva perseguito un ampio programma di ricerca volto a estendere la teoria delle superfici di Gauss alla geometria multidimensionale e a sviluppare una teoria generale delle ipersuperfici immerse negli spazi euclidei a più dimensioni $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 4$. Nel corso di queste indagini, Beez si era imbattuto in diversi risultati inattesi, che egli interpretò come una manifestazione dell'incoerenza logica della geometria pluridimensionale. Il più importante tra questi era il seguente: al contrario del caso bidimensionale, le ipersuperfici di dimensione superiore – cioè ipersuperfici $(n - 1)$ -dimensionali immerse (isometricamente) in uno spazio euclideo n -dimensionale, con $n \geq 4$ – non possono essere deformate. Infatti, le ipersuperfici nello spazio euclideo, Beez aveva dimostrato, risultano completamente determinate dalla loro prima forma fondamentale e presentano quindi una proprietà di rigidità che non trova corrispondenza nella teoria classica delle superfici. A suo avviso, questo comportamento appariva inconcepibile per il suo carattere controintuitivo.

Come fu chiarito poco dopo in [Killing 1885] e [Schur 1887], questo risultato si rivelò errato o, al massimo, formulato in modo impreciso. Infatti, come dimostrato per primo da Killing nella sua monografia [Killing 1885], il risultato di rigidità di

⁽²²⁾ Si veda [Reich 1994, p. 67] e [Darrigol 2015, §3.4].

⁽²³⁾ Si vedano ad esempio: [Lipschitz 1869], [Lipschitz 1870].

⁽²⁴⁾ Si veda [Beez 1874], [Beez 1875], e [Beez 1876].

Beez può considerarsi corretto solo sotto particolari condizioni relative al rango della matrice associata alla seconda forma fondamentale delle ipersuperfici.⁽²⁵⁾

Nonostante queste limitazioni, Beez e i suoi scritti sembrano aver esercitato un'influenza rilevante sui primi lavori di Ricci e in particolare su [Ricci 1884]. In effetti, la trattazione delle forme quadratiche differenziali di prima classe⁽²⁶⁾ che Ricci propose può essere interpretata come una riformulazione puramente analitica della teoria delle ipersuperfici negli spazi euclidei di dimensione superiore a tre. Attraverso di essa, Ricci intendeva fornire dimostrazioni alternative di alcuni risultati di Beez, incluso il teorema (errato) secondo cui il determinante della seconda forma fondamentale associata a ipersuperfici n -dimensionali, con $n \geq 3$, è in ogni caso diverso da zero.

Fornendo strumenti euristici essenziali per l'individuazione di scelte tecniche e criteri di classificazione, i contributi di Beez alla geometria multidimensionale costituirono una fonte di ispirazione importante per la teoria che Ricci si avviava a sviluppare. Allo stesso tempo, però, egli ritenne opportuno prendere le distanze dalla trattazione geometrica di Beez, probabilmente per evitare di essere coinvolto in un delicato dibattito sulla legittimità della geometria multidimensionale, concentrandosi su una discussione puramente analitica dell'argomento.

Di conseguenza, sembra che la citazione sopra riportata vada intesa alla luce di circostanze specifiche, piuttosto che come espressione di un punto di vista metodologico chiaro e ponderato da parte di Ricci. Un esame dell'intera produzione di Ricci suggerisce l'esistenza di un rapporto piuttosto stretto tra lo sviluppo del calcolo differenziale assoluto e la geometria delle varietà riemanniane multidimensionali. Del resto, lo stesso Ricci, insieme a Levi-Civita, riconobbe di buon grado il sussistere di

questa connessione nell'introduzione a [Ricci, Levi-Civita], dove scrisse:

[...] les méthodes mêmes et les avantages, qu'ils présentent, ont leur raison d'être et leur source dans les rapports intimes, qui les lient à la notion de variété à n dimensions, que nous devons aux génies de Gauss et de Riemann. [Ricci, Levi-Civita, p. 127]

6.1 – Principi di Ricci

Il punto di partenza di [Ricci 1884] fu un'osservazione di [Schläfli 1871-73], secondo la quale, data una forma quadratica differenziale $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ nelle n variabili $x^1, \dots, x^n$, esistono interi h , $0 \leq h \leq n(n-1)/2$ e funzioni $u^r = u^r(x^1, \dots, x^n)$, $r = 1, \dots, n+h$, tali che Φ possa essere trasformato in una forma quadratica differenziale del tipo $\sum_{r=1}^{n+h} (du^r)^2$. Alla luce di questo risultato, Ricci si propose di fornire una classificazione delle forme quadratiche differenziali basata sulla nozione di *classe*, che egli definì come il minimo intero $\tilde{h}$ per il quale questa condizione è soddisfatta.

Ricci decise di concentrare i propri sforzi intorno alla classificazione delle forme quadratiche differenziali di classe $\tilde{h} = 0, 1$. Probabilmente, tale scelta fu dettata tanto da un criterio di semplicità quanto dal fatto che questo tipo di forme quadratiche risultava rilevante per lo studio della geometria delle varietà piatte e delle ipersuperfici immerse nello spazio euclideo.

Per quanto riguarda le forme quadratiche differenziali di classe zero, Ricci offrì una nuova dimostrazione del criterio, già stabilito da Lipschitz, secondo cui l'annullarsi del tensore di curvatura è condizione non solo necessaria ma anche sufficiente affinché una forma quadratica differenziale sia trasformabile in una metrica piatta, una metrica cioè della forma: $\sum_{i=1}^n (dy^i)^2$.

La soluzione proposta del problema di fornire condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma quadratica differenziale sia di prima classe è particolarmente interessante, poiché chiaramente modellata sulle ben note proprietà geometriche delle ipersuperfici nello spazio euclideo, quali Beez aveva stabilito negli studi cui prima si è fatto cenno. In effetti, la trattazione offerta da Ricci delle forme $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j = \sum_{r=1}^{n+1} (du^r)^2$ di questa classe si basava sull'introduzione di una forma quadratica

⁽²⁵⁾ Un'ipersuperficie di dimensione $n \geq 3$ è effettivamente indeformabile se il rango della sua seconda forma fondamentale è maggiore di 2.

⁽²⁶⁾ La nozione di classe sarà definita nel paragrafo successivo.

differenziale associata, che è covariante rispetto a Φ e che può essere interpretata geometricamente come una generalizzazione a dimensioni superiori della seconda forma fondamentale usata nella teoria classica delle superfici.

Ispirandosi alla definizione già introdotta in [Breez 1875, p. 428], Ricci considerò il seguente insieme di funzioni: ⁽²⁷⁾

$$\sqrt{a} \cdot b_{ik} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^i \partial x^k} & \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^i \partial x^k} & \cdots & \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^i \partial x^k} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^n} & \frac{\partial u^2}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^n} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{dove } a := \sqrt{\det(a_{ij})},$$

e dimostrò che i simboli di Riemann associati a Φ possono essere espressi tramite i minori della seconda ordine della matrice simmetrica dei coefficienti b_{iq} . Inoltre, Ricci poté provare che tali coefficienti costituiscono una forma quadratica differenziale $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} dx^i dx^j$, che noi indicheremo con $\mathbf{K}$, chiamata forma derivata di Φ che, come anticipato, presenta la notevole proprietà di essere “covariante” (vedi [Ricci 1884, p. 168]) rispetto a Φ . Ciò significa che le leggi di trasformazione dei coefficienti di $\mathbf{K}$ sono identiche a quelle dei coefficienti di Φ . Infatti, se $\bar{b}_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$ denotano le componenti di $\mathbf{K}$ rispetto a un nuovo sistema locale di coordinate $(y_1, \dots, y_n)$, si ha

$$\bar{b}_{ij} = \sum_{rs} b_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

⁽²⁷⁾ La formula di Ricci differisce da quella di Beez semplicemente per il fattore $-\sqrt{a}$. È interessante notare che il fattore $\sqrt{a}$ è essenziale affinché b_{rs} si trasformi covariantemente rispetto ad a_{rs} . Su questo punto, Ricci non menzionò il lavoro di Beez sulle ipersuperfici. Tuttavia, vi fece ripetuto riferimento nella discussione del teorema di rigidità di Beez alla luce dei suoi risultati [Ricci 1884, pp. 167-170].

L'introduzione della forma $\mathbf{K}$ si rivelò decisiva nell'orientare le successive ricerche sulle proprietà invarianti delle forme quadratiche differenziali. Infatti, la considerazione della coppia $(\Phi, \mathbf{K})$ permise a Ricci di presentare, per la prima volta, un approccio generale alla determinazione degli invarianti differenziali associati a Φ . Con questa espressione si indicavano funzioni associate ad una forma quadratica $\sum_{ik} a_{ik} dx^i dx^k$, dipendente dai coefficienti a_{ik} insieme alle loro derivate rispetto alle variabili $x^1, x^2, \dots, x^n$, fino a un dato ordine q (detto ordine dell'invariante), tale che

$$\mathcal{F}\left(a_{ij}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}, \dots\right) = \mathcal{F}\left(\bar{a}_{ij}, \frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial y^k}, \frac{\partial^2 \bar{a}_{ij}}{\partial y^k \partial y^l}, \dots\right),$$

ove $\bar{a}_{ij}$ indicano i coefficienti della prima forma fondamentale espressa nel nuovo sistema di coordinate $y^1, y^2, \dots, y^n$.

L'idea principale consisteva nel considerare sia Φ sia $\mathbf{K}$ come forme *algebriche* (quadratiche) nelle variabili dx^i , $i = 1, \dots, n$ (proprio come aveva fatto [Christoffel 1869]), alle quali potevano essere applicate le tecniche standard della teoria algebrica degli invarianti, al fine di trovare “invarianti algebrici assoluti”. Con questa espressione Ricci denotava funzioni razionali $\mathcal{F}(a_{ij}, b_{ij})$ dei coefficienti delle forme Φ e $\mathbf{K}$ che restano invarianti rispetto alle seguenti trasformazioni:

$$\bar{a}_{lq} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^q},$$

$$\bar{b}_{lq} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^q},$$

$$l, q = 1, \dots, n.$$

Tali funzioni venivano quindi interpretate come invarianti differenziali di Φ sulla base dell'errato risultato secondo cui i coefficienti di $\mathbf{K}$ possono essere espressi solo in termini dei coefficienti di Φ e delle loro derivate. La procedura adottata da Ricci può essere così descritta: ⁽²⁸⁾ per calcolare le fun-

⁽²⁸⁾ Qui e nel seguito, per brevità, adotteremo la notazione matriciale di cui Ricci non fece uso.

zioni invarianti $\mathfrak{F}(a_{ij}, b_{ij})$, egli considerava il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{BA}^{-1}$ (dove $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$) e osservava che i suoi n coefficienti (non costanti) rappresentano altrettanti invarianti assoluti, dipendenti dai coefficienti di Φ e dalle loro derivate. Tali proprietà di invarianza sono conseguenza di una semplice osservazione: se $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ denotano le matrici i cui elementi sono dati rispettivamente da $\bar{a}_{ij}$ e $\bar{b}_{ij}$, allora le matrici $\mathbf{BA}^{-1}$ e $\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}^{-1}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Infatti, introducendo la matrice $\mathbf{J} := [J_{ki}] = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}$, è facile vedere che $\bar{\mathbf{A}} = [\bar{a}_{ij}] = \mathbf{J}^t \mathbf{A} \mathbf{J}$, $\bar{\mathbf{B}} = [\bar{b}_{ij}] = \mathbf{J}^t \mathbf{B} \mathbf{J}$. Di conseguenza, $\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{J}^t \mathbf{B} \mathbf{J} (\mathbf{J}^t \mathbf{A} \mathbf{J})^{-1} = \mathbf{J}^t \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{J}^t)^{-1}$ e quindi, $\det(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}^{-1} - \lambda \mathbb{I}) = \det(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} - \lambda \mathbb{I})$.

Ricci fu particolarmente interessato a studiare il significato geometrico di questo insieme di invarianti e a ricollegarlo con la teoria delle ipersuperfici di Beez. A tal fine, Ricci dimostrò che gli n invarianti così determinati ammettono espressioni in termini delle curvature principali dell'ipersuperficie associata a Φ .

6.2 – Invarianti e Parametri Differenziali

Lo studio delle forme quadratiche differenziali di prima classe, sebbene condizionato dall'erronea convinzione che la forma derivata $\mathbf{K}$ fosse completamente determinata da Φ , spinse Ricci a sviluppare un approccio generale alla determinazione degli invarianti e dei parametri differenziali. Nel 1886 pubblicò una breve memoria *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali*, nella quale la procedura già adottata in [Ricci 1884] e appena descritta trovò un'applicazione di carattere generale.

L'idea centrale di questo approccio consisteva nella produzione di forme quadratiche differenziali covarianti rispetto alla forma fondamentale assegnata e nell'applicazione di tecniche standard della teoria degli invarianti algebrici per ricavarne invarianti differenziali. È proprio in questo contesto che l'algoritmo di Christoffel (corrispondente all'operazione di derivazione covariante) acquisì rilievo come strumento tecnico essenziale nelle ricerche di Ricci.

Questi contributi alla teoria degli invarianti e dei parametri differenziali sono stati talvolta descritti come frutto della preoccupazione di Ricci per questioni metodologiche e del desiderio di offrire un trattamento sistematico della materia, libero dall'uso di tecniche variazionali, come quelle impiegate in [Lipschitz 1869] e [Beltrami 1868]. Ricci considerava evidentemente tali tecniche come spurie e in qualche modo estranee al tipo di problemi cui venivano applicate. È certamente vero che egli fu particolarmente sensibile a preoccupazioni di carattere formale e metodologico. Tuttavia, il ruolo delle sue precedenti ricerche sulle forme quadratiche differenziali associate a ipersuperfici immerse in uno spazio euclideo fu, di gran lunga, più decisivo nell'orientare le sue scelte tecniche e nel condurlo alla nozione di derivazione covariante.

Nell'introduzione al suo lavoro del 1886, Ricci fu piuttosto esplicito nel descrivere il percorso euristico da lui seguito. Infatti, dopo aver ricordato alcuni precedenti lavori sugli invarianti differenziali di Casorati e Beltrami, cioè [Casorati 1860-61] e [Beltrami 1868], Ricci descrisse in dettaglio l'approccio algebrico che intendeva perseguire.

I risultati relativi alla ricerca medesima, contenuti nei miei *Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche*, pei quali gli invarianti degli elementi lineari delle superficie di quante si vogliano dimensioni si sono presentati come veri e propri invarianti algebrici di un sistema di due forme quadratiche covarianti, mi hanno indotto a cercare una via simile per giungere ai parametri differenziali di 2° ordine. [Ricci 1886, pp. 177-178]

Prima di analizzare il contenuto dell'articolo, è utile richiamare la definizione di parametri e invarianti differenziali fornita in [Ricci 1886, §1]. A tal fine, sia Φ una forma quadratica differenziale non singolare nelle variabili $x^1, \dots, x^n$, $\Phi = \sum_{r,s} a_{rs} dx^r dx^s$; un parametro differenziale di Φ è un'espressione che contiene i coefficienti di Φ e funzioni arbitrarie, diciamo $U(x^1, \dots, x^n)$, $V(x^1, \dots, x^n)$, ecc., insieme alle loro derivate $\left(a_{ik,r} := \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^r}\right)$, tale che essa conservi la propria forma ogniquale volta le coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ vengano sostituite da nuove coordinate,

diciamo $(y^1, \dots, y^n)$. Ciò significa che se $\bar{a}_{ik}, \bar{a}_{ik,r}, \dots, \bar{U}, \bar{U}_r$, ecc., sono definiti da:

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{a}_{ik} = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} a_{rs}, \\ \bar{a}_{ik,r} = \frac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial y^r}, \\ \vdots \\ \bar{U}(y^1, \dots, y^n) = U(x^1(y), \dots, x^n(y)), \\ \bar{U}_r(y^1, \dots, y^n) = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y^r}, \\ \vdots \end{cases}$$

allora la funzione $\mathfrak{F}(a_{ik}, a_{ik,r}, \dots; U, U_r, \dots)$ è un parametro differenziale se, e solo se, si ha:

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}(a_{ik}, a_{ik,r}, \dots; U, U_r, \dots) = \\ = \mathfrak{F}(\bar{a}_{ik}, \bar{a}_{ik,r}, \dots; \bar{U}, \bar{U}_r, \dots). \end{aligned}$$

Come già nel caso delle forme quadratiche differenziali di prima classe, Ricci applicò il metodo della teoria degli invarianti algebrici per ottenere parametri differenziali attraverso gli “invarianti algebrici assoluti” di due forme covarianti. La sua strategia consisteva nell’associare a Φ una forma quadratica differenziale che dipende dalla funzione (arbitraria) U e dalle sue derivate fino a un certo ordine. Proprio in questa circostanza, la procedura di Christoffel che Ricci in seguito denominò “derivazione covariante” fece una prima implicita comparsa. Ricci osservava infatti che se $U(x^1, \dots, x^n)$ denota una funzione arbitraria, allora le sue derivate del primo ordine $U_r = \frac{\partial U}{\partial x^r}$, $r = 1, \dots, n$ si trasformano “controvariantemente” rispetto a dx^r , $r = 1, \dots, n$. In termini moderni, ciò equivale a dire che gli U_r sono le componenti di un tensore covariante del primo ordine, mentre i dx^r si comportano come componenti di un tensore controvariante del primo ordine. Considerando il sistema di funzioni $U^r = \sum_{k=1}^n a^{rk} U_k$, Ricci introdusse le quantità

$$U_{rs} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^r \partial x^s} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{rs,k} U^k, \quad (29) \quad r, s = 1, \dots, n,$$

(29) Qui, e nel seguito, i simboli $\Gamma_{rs,k}$, $r, s, k = 1, \dots, n$ denotano i simboli di Christoffel di prima specie; analogamente, i simboli Γ_{rs}^k , $r, s, k = 1, \dots, n$ denoteranno i simboli di Christoffel di seconda specie. Si veda §5.

e dimostrò che esse si trasformano covariantemente rispetto ai coefficienti di $\Phi = \sum_{rs} a_{rs} dx^r dx^s$, cioè:

$$\bar{U}_{ik} = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} U_{rs}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Proprio questa proprietà di covarianza può essere sfruttata per calcolare i parametri differenziali associati alla funzione U . In particolare, introducendo le matrici $\mathbf{U} = [U_{rs}]$ e $\mathbf{A} = [a_{rs}]$, Ricci determinò i parametri differenziali in termini dei coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$. Questo perché un cambiamento di coordinate $x^k = x^k(y^1, \dots, y^n)$ coniuga la matrice $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$. Infatti,

se $\mathbf{J}$ denota la matrice $J_{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$, si ha $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{J}^t \mathbf{U} \mathbf{J}$,

$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^t \mathbf{A} \mathbf{J}$ e quindi, $\bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{A}})^{-1} = \mathbf{J}^t \mathbf{U} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{J}^t)^{-1}$. Di conseguenza, i coefficienti del polinomio caratteristico di $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$ sono invarianti sotto un arbitrario cambiamento di coordinate. Essi sono infatti parametri differenziali del secondo ordine della funzione $U(x^1, \dots, x^n)$, la cui dipendenza dalle derivate seconde è data dai coefficienti della matrice $\mathbf{U}$. In tal modo, oltre ad altri nuovi parametri differenziali, Ricci ottenne il parametro differenziale del secondo ordine introdotto in [Beltrami 1868, p. 98]. Infatti, se c_r denota il coefficiente del termine di ordine r del polinomio caratteristico di $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$, allora si verifica facilmente che vale l’equazione:

$$(10) \quad \begin{aligned} (\Delta_2)U &= c_{n-1}(-1)^{n-1} = \text{Tr}(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}) = \\ &= \sum_{h,k=1}^n a^{hk} U_{hk} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij} \sqrt{a} \frac{\partial U}{\partial x^j} \right), \end{aligned}$$

dove si intende che $a^{ij} = [\mathbf{A}^{-1}]_{ij}$ e che $a = \det \mathbf{A}$. Ricci fu particolarmente esplicito nel sottolineare i vantaggi del suo nuovo approccio nella ricerca di invarianti e parametri differenziali. A suo avviso, i metodi seguiti consentivano un trattamento unitario della materia, che non richiedeva il ricorso a tecniche indirette, come quelle di tipo variazionale, impiegate da Jacobi e Beltrami. In realtà, l’importanza del nuovo approccio andava ben oltre la scoperta di una nuova strategia per determinare invarianti e parametri differenziali. Infatti, il suo lavoro sull’argomento condusse naturalmente Ricci alla nozione di derivata covariante.

6.3 – Derivata covariante

La prima occorrenza esplicita della nozione di derivata covariante si trova in [Ricci 1887a], una breve memoria pubblicata nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*. Nell'introduzione di questo articolo, Ricci espresse il desiderio di fornire una trattazione sistematica di una procedura generale (*operazione* è il termine che egli utilizzò) che aveva recentemente impiegato in diverse circostanze. Egli menzionava le sue ricerche sugli invarianti differenziali e sui parametri differenziali, nonché un suo lavoro sulla nozione di sistemi ortogonali n -pli in una varietà riemanniana. Con le sue stesse parole:

Nelle mie ultime ricerche sono stato naturalmente condotto ad associare alle funzioni di n variabili una forma quadratica ϕ^2 come espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà, di cui quelle variabili rappresentano le coordinate. Indicando con U una funzione arbitraria di queste, mi sono così presentate delle espressioni a due o tre indici, la cui considerazione si può sostituire a quella delle derivate seconde o terze di U , e che hanno su queste il vantaggio di essere coefficienti di forme covarianti a ϕ^2 . Ho pure accennato alla possibilità di una simile sostituzione per le derivate di un ordine qualunque. L'utilità della sostituzione stessa, in ispecie nelle ricerche che sono per loro essenza indipendenti dalla natura della varietà o dalla scelta delle coordinate in una varietà data, è evidente. Così, per esempio, queste espressioni (che chiamerò derivate covarianti nella varietà di elemento lineare ϕ) danno necessariamente forma più semplice e perspicua a tutte le espressioni che godono della proprietà caratteristica dei parametri differenziali, e mi hanno permesso di dare alle equazioni, cui deve soddisfare il parametro di una famiglia di luoghi ad $n - 1$ dimensioni in una varietà qual si voglia ad n dimensioni e qualunque sia il sistema delle coordinate per poter far parte di un sistema n -plo ortogonale, una forma tanto semplice quanto quella data dal Darboux nel caso in cui la varietà proposta sia piana od euclidea e le coordinate siano cartesiane ortogonali. [Ricci 1887a, p. 199]

La menzione esplicita del problema della determinazione dei sistemi n -pli ortogonali, cui era dedicata la memoria [Ricci 1887b], è interessante soprattutto perché offre una ulteriore conferma del contesto geometrico entro il quale la nozione di derivata covariante fu introdotta. Tralasciando di fornire i dettagli della soluzione proposta da Ricci, per i quali rimandiamo a [Tonolo 1961] e [Cogliati 2024], ci

limitiamo ad enunciare i termini del problema che Ricci interpretò come una generalizzazione al caso di una metrica riemanniana qualunque di un problema già affrontato e risolto per il caso euclideo da Darboux.

Problema 6.1 *Trovare le condizioni (sia necessarie che sufficienti) affinché, data una famiglia di ipersuperfici $\rho(x^1, \dots, x^n) = c$ in una varietà Riemanniana, il cui tensore metrico è $\Phi = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx^i dx^k$, si possano associare altre famiglie di ipersuperfici, ad esempio, $\rho_1 = c_1, \rho_2 = c_2, \dots, \rho_{n-1} = c_{n-1}$, le quali, insieme a $\rho_n := \rho = c$, costituiscono un sistema ortogonale n -plo nel senso che valgono le seguenti relazioni:*

$$(11) \quad \sum_{r,s=1}^n a^{rs} \frac{\partial \rho_h}{\partial x^r} \frac{\partial \rho_k}{\partial x^s} = 0, \quad h \neq k.$$

Torniamo però a [Ricci 1887a]. L'importanza di questa memoria appare duplice. Infatti, oltre a introdurre la nozione di derivazione covariante, Ricci presentò qui per la prima volta una definizione esplicita di quella che chiamò “quantità a p indici”, che possiamo identificare, in termini moderni, come le componenti di un tensore completamente covariante di ordine p :

Definizione 6.1 *Siano $U_{r_1 \dots r_p}$ p funzioni connesse a $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ in modo tale che, passando da $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ a $\sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij} dy^i dy^j$, esse si trasformino secondo le seguenti relazioni:*

$$(12) \quad \bar{U}_{r_1 \dots r_p} = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_p=1}^n \frac{\partial x^{s_1}}{\partial y^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_p}}{\partial y^{r_p}} U_{s_1 \dots s_p};$$

si dice che le funzioni $U_{r_1 \dots r_p}$ sono coefficienti a p indici di una forma che è covariante con Φ .

L'operazione di derivazione covariante introdotta in [Ricci 1887a], sulla scorta della nozione di “tensore” appena definita, può essere considerata come una reinterpretazione della procedura già impiegata in [Christoffel 1869], che consisteva nel generare forme differenziali covarianti di ordine crescente associate alla forma quadrilineare $G_4 = \sum_{ijkl} R_{ijkl} d^{(1)}x^i d^{(2)}x^j d^{(3)}x^k d^{(4)}x^l$, costruita a partire dalle componenti della curvatura di Riemann. Dal canto suo, Ricci estese tale nozione a forme covarianti e controvarianti qualsiasi (non

necessariamente dedotte a partire dal tensore di curvatura), enfatizzando inoltre l'analogia con l'ordinaria operazione di derivazione.

Per introdurre questa nozione, Ricci considerò un insieme di coefficienti $U_{r_1 \dots r_p}$ che si trasformano in modo covariante rispetto a Φ (secondo la definizione precedente) e definì le quantità seguenti:

$$U_{r_1 \dots r_p r_{p+1}} := \frac{\partial U_{r_1 r_2 \dots r_p}}{\partial x^{r_{p+1}}} - \sum_{q,s=1}^n a^{qs} \sum_{h=1}^p \Gamma_{r_h r_{p+1}, s} U_{r_1 \dots r_{h-1} q r_{h+1} r_p}.$$

Facendo uso delle relazioni

$$\frac{\partial^2 x^h}{\partial y^r \partial y^s} = \bar{a}^{pq} \bar{\Gamma}_{rs, q} \frac{\partial x^h}{\partial y^p} - \alpha^{hp} \Gamma_{qt, p} \frac{\partial x^s}{\partial y^t},$$

Ricci dimostrò che l'insieme delle quantità $U_{r_1 \dots r_p r_{p+1}}$ così definite si trasforma, rispetto a un cambiamento di coordinate $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1(x), \dots, y^n(x))$, come segue:

$$\bar{U}_{r_1 \dots r_p r_{p+1}} = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_p, s_{p+1}=1}^n \frac{\partial x^{s_1}}{\partial y^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_p}}{\partial y^{r_p}} \frac{\partial x^{s_{p+1}}}{\partial y^{r_{p+1}}} U_{s_1 \dots s_p s_{p+1}},$$

e quindi si comporta come “i coefficienti a $p+1$ indici” di una forma covariante con Φ .

Ricci passò quindi ad esaminare alcune proprietà generali dell'operazione che aveva appena introdotto, osservando che essa è distributiva rispetto alla somma. Investigò anche la validità della proprietà commutativa, stabilendo che “in ogni varietà, la derivazione covariante gode della proprietà commutativa fino al secondo ordine, e oltre il secondo ordine solo nelle varietà euclidee.” In tal modo, si stabilì per la prima volta un collegamento diretto tra la curvatura riemanniana e la proprietà commutativa della derivazione covariante. Più precisamente, se $\tilde{\mathcal{F}}$ è una funzione arbitraria delle variabili $x_1, \dots, x_n$ e se $\tilde{\mathcal{F}}_r$ denota $\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial x^r}$, $r = 1, \dots, n$, Ricci dimostrò che $\tilde{\mathcal{F}}_{rs} = \tilde{\mathcal{F}}_{sr}$, $r, s = 1, \dots, n$, e che, per le derivate di terzo ordine, si ha:

$$(13) \quad \tilde{\mathcal{F}}_{rst} - \tilde{\mathcal{F}}_{rts} = \sum_{i,k=1}^n a^{ik} R_{krst} \tilde{\mathcal{F}}_i. \quad (30)$$

⁽³⁰⁾ Se D_k denota la derivazione covariante rispetto a x^k , allora $\tilde{\mathcal{F}}_{rs} := D_s(\tilde{\mathcal{F}}_r)$ e $\tilde{\mathcal{F}}_{rst} := D_t(D_s(\tilde{\mathcal{F}}_r))$.

Una definizione più generale di tensore, sia p volte covariante che contravariante, veniva data in termini di un sistema di np funzioni delle variabili $(x_1, \dots, x_n)$ soggette a leggi di trasformazione del tipo (12). La definizione venne ulteriormente discussa in un articolo di rassegna volto a presentare i suoi metodi a un pubblico più ampio, che Ricci pubblicò nel *Bulletin de Sciences Mathématiques* nel 1892. Qui, le quantità tensoriali venivano indicate come sistemi invarianti di funzioni. Inoltre, è in quest'opera che Ricci introdusse un simbolo specifico per indicare l'operazione di derivazione covariante (e controvariante) rispetto a una data forma differenziale quadratica Φ , denotata da D_Φ (e da D^Φ).

7. – Sviluppi successivi

Il citato articolo di rassegna scritto per il bollettino di Darboux, conteneva un cenno alle applicazioni del calcolo alla teoria delle superfici. Unitamente ai vantaggi offerti dalla nuove tecniche per lo studio della teoria dell'elasticità e della diffusione del calore, Ricci discusse brevemente del modo di ricavare a partire dai principi del calcolo differenziale assoluto le equazioni per le linee asintotiche e le linee di curvatura di una superficie definita localmente dall'annullarsi di una funzione reale di tre variabili reali.⁽³¹⁾

Un anno più tardi (1893) Ricci fece delle applicazioni del suo calcolo alla teoria delle superfici l'argomento di uno studio dettagliato che aveva il duplice scopo di dimostrare, da un lato, la fecondità dei nuovi metodi in un campo che “appunto perché esplorato in ogni sua parte dai geometri” era “meglio atto a far risaltare per mezzo di confronti i vantaggi [del calcolo differenziale assoluto]” e di presentare, dall'altro, alcuni risultati preliminari necessari alla comprensione di ulteriori sviluppi.

L'idea di fondo alla base di [Ricci 1893] consisteva in una sintesi tra i metodi del nuovo calcolo e l'impiego di alcune tecniche introdotte qualche tempo addietro da Beltrami nel corso delle sue *Ricerche di analisi applicate alla geometria*, dove quest'ulti-

⁽³¹⁾ Una discussione più dettagliata di tali applicazioni era stata fornita in [Ricci 1888, pp. 257-259].

mo aveva discusso diffusamente il tema delle linee tracciate su una data superficie ed in particolare dei sistemi di curve cosiddette isoterme.

Un'idea feconda che Ricci trasse da questo lavoro di Beltrami era la possibilità di caratterizzare le curve su una superficie non in termini finiti ma mediante la loro "rappresentazione analitica" ottenuta specificando il campo vettoriale di cui la curva è una curva integrale. Più precisamente, Ricci si propose di studiare la nozione di congruenza di curve e quella di fascio di congruenze con l'intento di tradurre concetti chiave della teoria classica delle superfici nel linguaggio del calcolo tensoriale. Erano concetti questi in parte già impiegati e tuttavia la preponderanza che Ricci gli accordava nell'economia della trattazione era del tutto nuova.

Fissata una superficie (astratta) definita dal dato di una forma quadratica differenziale $\Phi = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} dx^i dx^j$, una congruenza sulla superficie Φ veniva definita da Ricci come un "sistema semplicemente infinito" di curve sulla superficie tali che per ogni punto della superficie passa una e una sola curva del sistema. In termini analitici, una congruenza di curve corrisponde ad assegnare un campo di vettori (controvarianti) le cui componenti rispetto al sistema di coordinate locali x^1, x^2 sono $\lambda^r(x)$, $r = 1, 2$. Supponendo che il campo vettoriale λ sia normalizzato, supponendo cioè che valga la relazione $\sum_{r=1}^2 \lambda^r \lambda_r = 1$, le equazioni differenziali della congruenza assumono la forma

$$(14) \quad \lambda^r = \frac{dx^r}{ds}, \quad r = 1, 2;$$

dove s designa l'arco della curva integrale. Quelle che Ricci denominava equazioni finite della congruenza possono invece essere ottenute ricavando gli integrali dell'equazione lineare $\sum_{r=1}^2 \lambda^r \frac{\partial f}{\partial x^r} = 0$ ed eguagliando il suo integrale ad una costante arbitraria. Ne deriva che l'equazione $f(x^1, x^2) = c$, dove c è invece una costante fissata, è l'equazione di una curva della congruenza sulla superficie (al variare di c , si ottengono tutte le curve della congruenza. È chiaro che la determinazione della costante c è data dall'imposizione del passaggio di una curva per un punto assegnato). Da qui la definizione di congruenza come semplice infinità di curve tali che per ogni punto passa una e una sola curva della congruenza assegnata.

Cruciale ai fine degli sviluppi successivi era poi la nozione di "sistema canonico ortogonale" associato ad una congruenza $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, che Ricci definiva in [Ricci 1893, p. 313] nel modo seguente. Fissato un campo vettoriale $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, il sistema canonico ortogonale (designato con $\bar{\lambda}$ o alternativamente con $N_\Phi(\lambda)$) è il campo vettoriale normale e ortogonale a λ dato dalle posizioni:

$$(15) \quad \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^1, \bar{\lambda}^2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}} \lambda_2, \frac{1}{\sqrt{a}} \lambda_1 \right),$$

dove a è il determinante della matrice a_{rs} e λ_r sono le componenti covarianti associate al vettore λ , $\lambda_r = \sum_{s=1}^2 a_{rs} \lambda^s$, $r = 1, 2$. Non era difficile dimostrare che la definizione risultava ben posta (occorre infatti dimostrare che le componenti di $\bar{\lambda}$ si trasformano come le componenti di un tensore controvariante di ordine 1, o meglio, per usare le parole di Ricci, come le componenti di un sistema semplice controvariante). Il campo vettoriale $\bar{\lambda}$ risultava inoltre essere normalizzato e ovunque ortogonale alle congruenze λ . Sebbene Ricci non impiegasse questa denominazione, possiamo riassumere le posizioni appena descritte affermando che Ricci esibiva in questo modo un riferimento mobile ortonormale, definito localmente in un intorno coordinato di una superficie, la cui metrica ammette espressione locale (nel medesimo sistema di coordinate) $\Phi = \sum_{r,s=1}^2 a_{rs} dx^r dx^s$. Inoltre, poiché in ogni punto (di tale intorno coordinato) i vettori $\lambda(x)$, $\bar{\lambda}(x)$ costituiscono una base dello spazio tangente, Ricci poteva esprimere i coefficienti a_{rs} in termini delle componenti $\lambda_r, \bar{\lambda}_s$ delle 1-forme (sistemi semplici covarianti) associate a $\lambda, \bar{\lambda}$:

$$(16) \quad a_{rs} = \lambda_r \lambda_s + \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s, \quad r, s = 1, 2. \quad (32)$$

(32) La metrica è un tensore simmetrico; la totalità di tali tensori di ordine k su uno spazio vettoriale V di dimensione N , solitamente denotata con $S^k(V)$ è essa stessa uno spazio vettoriale di dimensione $\binom{N+k-1}{k}$.

L'insieme dei tensori metrici di una superficie ha dimensione tre; la metrica $a_{ij} dx^i dx^j$ può essere decomposta rispetto alla base $\{\theta \otimes \theta, \theta \otimes \bar{\theta} + \bar{\theta} \otimes \theta, \bar{\theta} \otimes \bar{\theta}\}$, dove $\theta = \sum_{r=1}^2 \lambda_r dx^r$, $\bar{\theta} = \sum_{r=1}^2 \bar{\lambda}_r dx^r$. Dal che segue la relazione: $a_{rs} = \alpha_1 \lambda_r \lambda_s + \alpha_2 (\lambda_r \bar{\lambda}_s + \bar{\lambda}_r \lambda_s) + \alpha_3 \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s$. Finalmente, ricordando che $\sum \lambda_s \lambda^s = \sum \bar{\lambda}_s \bar{\lambda}^s = 1$ e $\sum \lambda_s \bar{\lambda}^s = \bar{\lambda}_s \lambda^s = 0$, si ha $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 0$.

A partire dalla condizione $\sum_{r=1}^2 \lambda^r \lambda_r = 1$ attraverso derivazione covariante (rispetto alla metrica a_{rs}), si ottengono facilmente: $\sum_{r=1}^2 \lambda^r D_s \lambda_r = 0$, le quali implicano l'esistenza di un *tensore covariante ϕ_s , $s = 1, 2$ tale che:*

$$(17) \quad D_s \lambda_r = \bar{\lambda}_r \phi_s, \quad r, s = 1, 2.$$

Derivando ulteriormente e specializzando la formula (13) del paragrafo precedente al caso bidimensionale, Ricci otteneva l'espressione seguente per la curvatura gaussiana G :

$$(18) \quad G = \frac{D_2 \phi_1 - D_1 \phi_2}{\sqrt{a}}.$$

Sulla base di queste considerazioni, si poteva quindi introdurre la definizione, fondamentale per la formulazione della teoria delle superfici proposta, di fascio di sistemi di congruenze su una superficie: esso è un insieme di congruenze su una superficie tali che due curve appartenenti a due sistemi determinati di congruenze del fascio si tagliano ad un angolo costante. Equivalentemente, considerate due congruenze le quali sono curve integrali di campi vettoriali λ^r e ξ^r , $r = 1, 2$, esse appartengono al medesimo fascio se e solo se i tensori covarianti ad essi associati a norma delle (17) coincidono. Inoltre, ad ogni sistema semplice covariante ϕ_s , $s = 1, 2$, (cioè, ad ogni 1-forma) che soddisfa alla (18) corrisponde un fascio F . Per questo motivo ϕ_s o alternativamente la sua controparte controvariante ϕ^s è detta da Ricci sistema coordinato covariante (o controvariante) del fascio F .

Espressamente dedicata ad una trattazione della teoria delle superfici immerse nello spazio euclideo con i metodi offerti dal nuovo calcolo era [Ricci 1895]. Il primo capitolo trattava delle equazioni fondamentali della teoria delle superfici nelle quali il teorema di esistenza e unicità per le superfici regolari, già dimostrato in [Bonnet 1865], veniva riottenuto nel contesto del calcolo differenziale assoluto. Cruciale a tal fine, era la possibilità di scrivere in forma tensoriale le equazioni di Mainardi-Codazzi.

Consideriamo, seguendo la trattazione offerta da [Ricci 1895], una superficie S immersa nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$: siano y^1, y^2, y^3 le coordinate cartesiane ortogonali di un generico punto di $\mathbb{R}^3$ e denotiamo con x^1, x^2 le coordinate gaussiane di S la quale viene così ad essere descritta dalla parametrizzazione $y^k = y^k(x^1, x^2)$, $k = 1, 2, 3$.

Alla luce di queste posizioni, i coefficienti della prima forma fondamentale possono scriversi così: $a_{rs} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y^k}{\partial x^r} \frac{\partial y^k}{\partial x^s}$. Per ottenere invece i coefficienti della seconda forma fondamentale, Ricci ricavò dapprima i coseni direttori della normale alla superficie:

$$(19) \quad \begin{cases} \zeta^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^1} \frac{\partial y^3}{\partial x^2} - \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \right), \\ \zeta^2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial y^3}{\partial x^1} \frac{\partial y^1}{\partial x^2} - \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \right), \\ \zeta^3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial y^2}{\partial x^2} - \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \right); \end{cases}$$

quindi definì le funzioni

$$(20) \quad b_{rs} \equiv \sum_{h=1}^3 \zeta^h D_s \frac{\partial y^h}{\partial x^r}, \quad r, s = 1, 2,$$

dove D_s denota la derivata covariante del tensore covariante $\frac{\partial y^h}{\partial x^s}$, essendo h un indice fissato – si noti che le y^h si comportano come scalari rispetto a trasformazioni delle coordinate gaussiane. Veniva introdotta in questo modo la seconda forma fondamentale, la quale, così come la prima, costituisce un sistema covariante simmetrico del secondo ordine.

Un vantaggio notevole che l'impiego del nuovo calcolo offriva era la possibilità di esprimere le equazioni di Mainardi-Codazzi in termini delle derivate covarianti di $\Psi = \sum_{r,s=1}^2 b_{rs} dx^r dx^s$. A questo proposito, è interessante osservare come l'introduzione della seconda forma fondamentale e la deduzione stessa delle equazioni di Mainardi-Codazzi fossero ottenute in maniera affatto indipendente dalla loro interpretazione geometrica, sulla scorta della teoria delle forme differenziali quadratiche di prima classe che Ricci aveva sviluppato in [Ricci 1884].

In effetti, è chiaro che le forme quadratiche atte a rappresentare la prima forma fondamentale di una superficie nello spazio euclideo sono esattamente le forme quadratiche che Ricci aveva denominato "forme di prima classe". D'altra parte non è difficile riconoscere che il tensore covariante definito in (7)

coincide, nel caso bidimensionale, con il tensore b_{rs} quale risulta definito in (20). In conseguenza di tale teoria, si ha che ogni forma differenziale $\phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ di classe 1 soddisfa alle condizioni seguenti: i) Indicati con R_{ijkl} i simboli di Riemann associati alla forma $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ esiste un tensore simmetrico covariante tale che $R_{ijkl} = b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{kj}$; ii) il tensore $D_t(b_{rs}) =: b_{rst}$ è simmetrico nei suoi tre indici, in particolare: $b_{rts} = b_{rst}$. Nel caso di superfici bidimensionali, la condizione i) restituisce immediatamente la cosiddetta equazione di Gauss, se si nota che in questo caso la curvatura gaussiana G è esprimibile mediante un solo simbolo di Riemann (indipendente), ad esempio R_{1212} , cioè: $G = \frac{R_{1212}}{a}$. Infine la simmetria di

b_{rts} si traduce in due equazioni indipendenti nelle derivate dei coefficienti della seconda forma fondamentale che coincidono con le equazioni di Mainardi-Codazzi.

Sulla scorta di tale impostazione caratterizzata da un evidente orientamento analitico, Ricci affrontò la risoluzione di alcuni problemi della teoria della superficie e in particolare della applicabilità dimostrando, tra gli altri, un risultato del tutto nuovo che oggi va sotto il nome di teorema di immersione minimale:

Teorema 7.1 (Ricci 1895) *Si consideri una superficie astratta la cui metrica è data dalla forma quadratica $\Phi = \sum_{r,s=1}^2 a_{rs} dx^r dx^s$. La condizione necessaria e sufficiente affinché esista una superficie nello spazio euclideo che ha come prima forma fondamentale la forma Φ e curvatura media costante $c \in \mathbb{R}$ è che la curvatura gaussiana G di Φ soddisfi all'equazione:*

$$(21) \quad \Delta_2 \log(c^2 - G) = 4G;$$

dove con Δ_2 si è denotato l'operatore di Laplace-Beltrami la cui espressione è data in (10).

Negli anni successivi le ricerche in materia di varietà bidimensionali sarebbero confluite nella pubblicazione del ponderoso tomo [Ricci 1898] di lezioni sulla teoria delle superfici che rappresenta probabilmente il frutto più maturo e più ponderato dell'intera opera matematica di Ricci. Il particolare approccio alla teoria che Ricci aveva esplorato sino a quel punto fu in seguito ampliato nel contesto delle

ricerche che egli dedicò allo studio degli spazi riemanniani in più dimensioni. È interessante riflettere a questo proposito sul ruolo euristico che i suoi studi in materia di teoria delle superfici rivestirono nei successivi tentativi di generalizzazione al caso pluridimensionale: la nozione di fascio di congruenze e di sistema coordinato di un fascio così ampiamente utilizzata nel caso di varietà a due dimensioni, costituì il punto a partire dal quale Ricci prese le mosse per introdurre nozioni chiave della propria teoria degli iperspazi quali quella di n -pla ortogonale di riferimento e di coefficienti di rotazioni. ⁽³³⁾

8. – Premi Reali per la matematica, 1887, 1901

Per comprendere il processo di ricezione del calcolo assoluto da parte della comunità dei matematici italiani negli anni compresi fra la fine dell'Ottocento e gli inizi del Novecento, le vicende legate al Premio Reale per la Matematica degli anni 1887 e 1901 rivestono un'importanza particolare. ⁽³⁴⁾ Fu per iniziativa del Re Umberto I (figlio di Vittorio Emanuele II, primo Re d'Italia) che i Premi Reali (da conferirsi annualmente nell'ambito della fisica, della matematica, delle scienze naturali e delle scienze morali, storiche e filosofiche) furono istituiti nel 1878. Ricci partecipò due volte, nel 1887 e nel 1901, al bando del premio sottoponendo alla commissioni designate per il giudizio dei candidati un numero cospicuo di lavori della sua produzione scientifica. In entrambi i casi, i lavori delle commissioni si conclusero con la decisione di non conferire ad alcuno (né a Ricci né agli altri candidati) l'ambito riconoscimento. La lettura delle relazioni delle commissioni giudicatrici redatte da Beltrami (1887) e da Bianchi (1901) offre spunti preziosi di riflessione.

In occasione del premio Reale del 1887 Ricci aveva presentato le tre memorie: i) *Principii d'una teoria delle forme quadratiche differenziali* 1884, ii) *Sui parametri e gli invarianti delle forme diffe-*

⁽³³⁾ A questi temi, è dedicato il contributo di F. Cardin e R. Tazzioli, su questo numero della Rivista.

⁽³⁴⁾ Intorno al tema della ricezione del calcolo differenziale assoluto, rimandiamo alla trattazione ben più esaustiva contenuta in [Dellaglio 2004]; più specificatamente sui Premi Reali del 1887 e del 1901, si veda anche [Bottazzini 1999].

renziali quadratiche, iii) *Sui sistemi di integrali indipendenti d'una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali del primo ordine.*

Dopo una breve e tuttavia approfondita disamina del contenuto delle memorie, Beltrami esprimeva il proprio giudizio con le seguenti parole:

Dato così un rapido sguardo al contenuto delle Memorie presentate dal prof. Ricci, le quali costituiscono indubbiamente tre lavori di grande polso ed attestano forti e svariate cognizioni analitiche nel loro autore, è naturale il domandare se l'importanza e la fecondità dei risultati ottenuti sieno adeguate agli sforzi non lievi che si son dovuti fare da lui per giungere allo scopo, attraverso una lunga e non interrotta serie di laboriose trasformazioni, le quali rendono non poco penoso l'ufficio del lettore ed esigono da questo non solo un'attenzione molto sostenuta ma altresì una famigliare conoscenza di parecchi sussidi dell'alta analisi. Volendo rispondere a questa domanda sarebbe ingiusto il passare sotto silenzio un più recente scritto dell'autore (*Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nell'analisi applicata*, Padova 1888) nel quale egli mostra come i suoi procedimenti servano assai bene a stabilire, in coordinate generalissime, le formole fondamentali della teoria delle superficie, di quella dell'elasticità e di quella della propagazione del calore. [...]

E neppure è da passare sotto silenzio che le applicazioni in discorso non si spingono peranche fino a quel punto che avrebbe forse messo in più chiara luce l'utilità dei nuovi algoritmi. [...]

Dalle considerazioni che siamo venuti fin qui esponendo ci sembra poter concludere che i lavori del prof. Ricci, piuttosto che una somma di ultimi risultati definitivamente acquisiti ed immediatamente utilizzabili, rappresentino un poderoso sforzo che in parte apparisce già conducente ad una meta onorevole, in parte aspetta la sua giustificazione finale da ulteriori cimenti, nei quali forse il primitivo ed assai complesso apparato analitico potrà essere definitivamente surrogato da più semplici argomenti esecutivi. [Beltrami 1889, p. 306 sqq.]

Dunque, pur apprezzando l'ampio spettro di applicazioni che il nuovo calcolo sembrava prospettare, alcune delle quali si erano già concretizzate in [Ricci 1888], Beltrami lamentava una mancanza di completezza delle nuove tecniche in particolare sul fronte delle applicazioni. I vantaggi derivanti dall'impiego del calcolo in svariati ambiti della geometria e della fisica matematica non parevano ai suoi occhi giustificare l'introduzione del gravoso apparato analitico.

Negli anni successivi alla competizione del 1887, Ricci perseguì con tenacia gli obiettivi dell'ambizioso programma di ricerca sviluppando in maniera sistematica il proposito di riformulare la classica teoria delle superficie con gli strumenti del calcolo differenziale assoluto. Il progetto culminò nella pubblicazione del corposo volume di lezioni, [Ricci 1898], che costituì il contributo principale con il quale nuovamente Ricci partecipò alla competizione per l'assegnazione del Premio Reale del 1901.

In questa occasione fu Luigi Bianchi incaricato di stilare la relazione finale della commissione giudicatrice. Nuovamente si riaffacciava la critica già formulata da Beltrami che evidenziava la sproporzione degli strumenti analitici impiegati da Ricci rispetto alle efficacia nella produzione di nuovi risultati; si affiancava inoltre l'impressione che un tale apparato analitico avesse come effetto quello di offuscare l'intuitivo significato geometrico delle teorie.

In riferimento alle lezioni di Ricci, Bianchi scriveva:

In complesso questo libro del Ricci ci sembra degno di lode per l'unità di metodo che conferisce all'esposizione della teoria. Per altro ci sembra che la troppa preponderanza data alla parte algoritmica lasci bene spesso nell'ombra il contenuto essenziale geometrico e talora conduca ad enunciare come risultati speciali del calcolo proprietà geometricamente evidenti. [...]

Pur non volendo attribuire gran peso a varie mende che, dal punto di vista geometrico, abbiamo riscontrato nel libro, ci siamo domandati se queste fossero davvero compensate dalla maggior potenza e fecondità dimostrata dai nuovi metodi in confronto degli antichi. [...]

Ma per verità ci sembra che, nel campo della geometria infinitesimale delle superficie, i vantaggi inerenti ai nuovi algoritmi siano più che altro formali, o limitati a questioni secondarie; ed in questo giudizio ci conferma l'osservare che ai più recenti ed importanti progressi compiuti nel detto campo non hanno contribuito in modo significativo i nuovi metodi. [Bianchi 1904, p. 148]

I giudizi di Bianchi, che pure riconoscevano a Ricci il merito di aver ottenuto alcuni risultati originali, tra i quali spiccava il teorema di immersione minimale, se da un lato possono apparire in qualche modo severi e ingenerosi – alla luce soprattutto delle applicazioni che del calcolo assoluto fece Einstein a partire dal 1912-1913 – dall'altro riflettono la convinzione pro-

fonda più volte espressa da Bianchi secondo la quale l'efficacia dei metodi classici della geometria infinitesimale risalenti a Gauss non doveva in alcun modo essere messa in discussione.

La circostanza nella quale Bianchi si trovò a scrivere questi giudizi dovette in qualche modo inibire una maggiore schiettezza. Qualche anno più tardi l'occasione offerta dalla redazione del necrologio di Julius Weingarten, verso il quale Bianchi nutrì costante ammirazione, gli consentì di essere più esplicito e meno circospetto. Scrisse:

È bensì vero che più volte, e da molte parti, si è mossa a questi metodi di Gauss l'accusa di prolissità e di insufficienza, giungendo recentemente persino a meravigliarsi che con mezzi così inadeguati si sia giunti a scoprire tante importanti verità geometriche! Ma tali accuse non sembrano davvero giustificate, e non sarà inopportuno citare al proposito il giudizio del Nostro, che in una lettera del 1892 mi scriveva: "Ich bin ganz Ihrer Meinung dass die Gauss'schen Methoden die leichter vorwärts führenden sind, im Gegensatz zur Benutzung von Drehungen. Aber es ist auch nicht zu leugnen dass man mit diesen letzten Methoden schöne Erfolge erzielt hat, und dass man zufrieden sein kann, dass zwei geeignete Methoden über einander herlaufen. Eine unterstützt die andere".⁽³⁵⁾

E quanto dice il Weingarten del metodo del triedro mobile, parmi si possa ben ripetere, al più con eguale favore, di tutti gli altri fin qui escogitati, nessuno dei quali ha rivelato coll'effettivo successo una potenza superiore a quella dei metodi di Gauss. Vedano piuttosto i censori se non dimentichino troppo facilmente che l'importanza di una ricerca di geometria infinitesimale dipende ben più dalla profondità del pensiero geometrico che la informa, che non dalla veste analitica di cui l'autore, a seconda delle sue preferenze, si compiace di rivestirlo. [Bianchi 1910, p. 221]

La citazione dalla lettera di Weingarten si riferiva al metodo dei riferimenti mobili di Darboux al quale, se non altro, lo stesso Bianchi e Weingarten riconoscevano una qualche utilità di applicazione entro il campo degli sviluppi della geometria negli ultimi

⁽³⁵⁾ Sono completamente d'accordo con Lei sul fatto che i metodi gaussiani sono quelli che più facilmente conducono a passi in avanti, contrariamente all'uso delle rotazioni. Ma è anche innegabile che questi recenti metodi abbiano avuto successo, e che si possa essere soddisfatti che si disponga di due metodi efficienti. Uno è di supporto all'altro.

decenni. D'altro canto, non è difficile riconoscere nella frase successiva e nel caustico inciso "al più con eguale favore" un riferimento più o meno velato al calcolo differenziale assoluto.

Pur riconoscendo l'originalità di alcuni dei risultati che Ricci aveva conseguito entro l'ambito della teoria delle superfici, tra i quali venivano esplicitamente menzionati come "pregevoli aggiunte" "i criteri distintivi [...] per decidere della possibilità di deformare una superficie flessibile ed inestensibile in guisa che diventi di area minima, o a curvatura costante" (si tratta del teorema di immersione minimale), Bianchi riteneva che in generale i vantaggi offerti dal nuovo algoritmo fossero più che altro "formali o limitati a questioni secondarie" [Bianchi 1904, p. 148]. Inoltre, proseguiva, la preponderanza accordata da Ricci alla parte algoritmica appariva di gran lunga sproporzionata rispetto alla effettiva rilevanza dei risultati ottenuti, il contenuto geometrico dei quali veniva spesso lasciato nell'ombra.⁽³⁶⁾

Ben più benevolo fu l'atteggiamento di Bianchi nei confronti dell'impiego che Ricci aveva fatto del nuovo calcolo nel campo della geometria pluridimensionale. Tuttavia i risultati raggiunti non parevano sufficienti a meritare il conferimento del premio (che di fatto non venne attribuito a nessuno dei concorrenti).

Al di là dei giudizi nel merito circa la rilevanza dei nuovi apporti ottenuti da Ricci, lo scetticismo di Bianchi (certo non isolato nella comunità dei matematici⁽³⁷⁾) rifletteva la convinzione epistemologica profonda secondo la quale il progresso del sapere matematico consiste prevalentemente di acquisizioni di nuovi risultati e non tanto nella risistemazione e riorganizzazione di un corpo di dottrine già note. Ciò emerge chiaramente ad esempio nel passo seguente della relazione di Bianchi che appare come un invito

⁽³⁶⁾ In [Bianchi 1903, §349], è fatta una rapida menzione al teorema di immersione minimale di Ricci. Significativamente Bianchi evitava l'impiego dei metodi del calcolo assoluto preferendovi la possibilità, già sfruttata da Padova, di scrivere l'elemento lineare di una superficie (a curvatura media costante) in coordinate di curvatura che sono al contempo isoterme.

⁽³⁷⁾ Cinicamente, Bianchi non mancò di sottolineare che le idee di Ricci avevano avuto presa solo tra una ristretta cerchia di matematici; li definì "pochi seguaci" [Bianchi 1904, p. 150].

a badare alla sostanza dei risultati più che alla ricercatezza dei metodi impiegati:

Piuttosto che nella specialità degli algoritmi usati riconosciamo la vera sorgente delle scoperte, nel campo dell'ordinaria geometria infinitesimale, nella forza della intuizione geometrica, sussidiata da quel potente stromento [sic!] analitico, che ciascun ricercatore potrà foggiare nell'una o nell'altra guisa a seconda delle preferenze od abitudini individuali, ma la cui forza è pur sempre unicamente quella che vi infusero i creatori del calcolo infinitesimale. [Bianchi 1904, p. 148]

Le posizioni epistemologiche che animarono le ricerche dello stesso Ricci furono di segno opposto: l'elaborazione di metodi e di tecniche uniformi insieme alla volontà di organizzare in maniera unitaria un'ampia mole di risultati in parte già noti era visto dal creatore del nuovo calcolo come un obiettivo prioritario delle proprie ricerche, fermo restando l'intento di esplorare nuovi interessanti risultati, che in effetti non mancarono.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

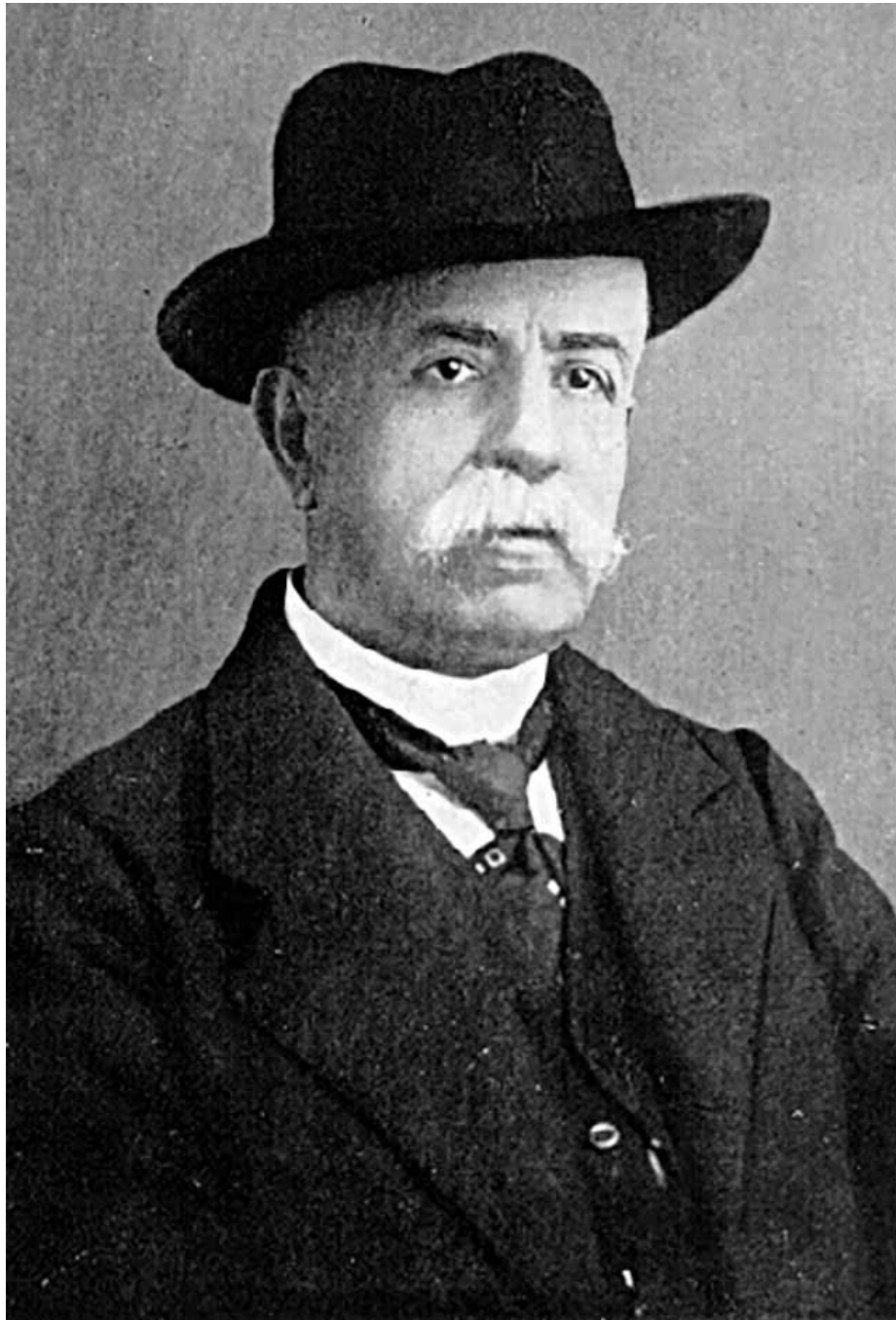
- [Beez 1874] R. BEEZ, Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höher Ordnung, *Mathematische Annalen*, 7, 387-395, 1874.
- [Beez 1875] R. BEEZ, Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 20, 1875.
- [Beez 1876] R. BEEZ, Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 21, 373-401, 1876.
- [Beltrami 1864-1865] E. BELTRAMI, Ricerche di analisi applicata alla geometria, *Giornale di Matematiche*, 2, 267-282, 297-306, 331-339, 355-375, 1864; 3, 15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314, 1865. Anche in *Opere Matematiche di Eugenio Beltrami*, Tomo Primo, 107-198, Hoepli, Milano 1902.
- [Beltrami 1868] E. BELTRAMI, Sulla teorica generale dei parametri differenziali, *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, Serie 2, 8, 551-590. Anche in *Opere Matematiche di Eugenio Beltrami*, Tomo Secondo, 74-118, Hoepli, Milano 1904.
- [Beltrami 1889] E. BELTRAMI, Relazione sul concorso al Premio Reale per la Matematica, *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, 5, 304-307, 1889.
- [Bianchi 1903] L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. 2, Spoerri, Pisa, 1903.
- [Bianchi 1904] L. BIANCHI, Relazione sul concorso al Premio Reale, del 1901, per la Matematica, in *Rendiconti delle adunanze solenni dell'Accademia dei Lincei*, 2, 142-151, 1904.
- [Bianchi 1910] L. BIANCHI, Vita ed opera scientifica di Julius Weingarten, in *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, vol. XIX, 470-477, 1910. Anche in L. Bianchi, *Opere*, Vol. I, parte seconda, 217-225. I riferimenti contenuti nell'articolo seguono la paginazione delle *Opere*.
- [Bottazzini 1999] U. BOTTAZZINI, Ricci and Levi-Civita: from differential invariants to general relativity, in *The Symbolic Universe*, ed. J. Gray, Oxford University Press, 241-259, 1999.
- [Bonnet 1865-1867] O. BONNET, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (première partie), *Journal de l'école Imperiale Polytechnique* 24, 209-230, 1865, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (deuxième partie), *Journal de l'école Imperiale Polytechnique*, 25, 1-151.
- [Casorati 1860-61] F. CASORATI, Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 3(1), 363-379, 1860, 4(1), 177-185, 1861.
- [Christoffel 1869] E. B. CHRISTOFFEL, Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70, 46-70, 1869.
- [Cogliati 2014] A. COGLIATI, Riemann's *Commentatio Mathematica*, a reassessment, *Revue d'histoire des mathématiques*, 20, 73-94, 2014.
- [Cogliati 2024] A. COGLIATI, Some remarks on the history of Ricci's absolute differential calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 78, 717-761, 2024.
- [Darboux 1878] G. DARBOUX, Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux, *Annales de l'école Normale*, 7(2), 101-150, 227-260, 275-348, 1878.
- [Darrigol 2015] O. DARRIGOL, The mystery of Riemann's curvature, *Historia Mathematica*, 42, 47-83, 2015.
- [Dell'Aglio 1996] L. DELL'AGLIO, On the genesis of the concept of covariant differentiation, *Revue d'histoire des mathématiques*, 2, 215-264, 1996.
- [Dell'Aglio 1997] L. DELL'AGLIO, Sul concetto di tensore in Ricci-Curbastro, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 17, 13-49, 1997.
- [Dell'Aglio 2004] L. DELL'AGLIO, Un case study nell'accettazione di teorie matematiche. Sviluppo e diffusione del calcolo differenziale assoluto in epoca pre-relativistica, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIV, 2, 9-65, 2004.
- [Goodstein 2018] J. R. GOODSTEIN, Einstein's Italian Mathematicians; Ricci, Levi-Civita, and the Birth of General Relativity, AMS, 2018.
- [Killing 1885] W. KILLING, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung*, Teubner, Leipzig, 1885.
- [Levi-Civita 1917] T. LEVI-CIVITA, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 42, 173-215, 1917. Anche in [Levi-Civita Opere, IV, 1-39].
- [Levi-Civita 1925] T. LEVI-CIVITA, Commemorazione del socio nazionale prof. G. Ricci-Curbastro, *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, (6), 1, 555-564, 1925. [Levi-Civita Opere, IV, 391-402].
- [Levi-Civita Opere] *Opere matematiche. Memorie e note*, 6 voll., Bologna, Zanichelli, 1954-1973.
- [Liouville 1851] J. LIOUVILLE, Sur la théorie générale des surfaces, in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, vol. 16, 130-132, 1851.
- [Lipschitz 1869] R. LIPSCHITZ, Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70, 71-102, 1869.
- [Lipschitz 1870] R. LIPSCHITZ, Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72, 1-56, 1870.
- [Mossotti 1845] O. F. MOSSOTTI, *Lezioni Elementari di Fisica Matematica*, Tomo I, Firenze, Piatti, 1845.

- [Reich 1994] K. REICH, *Die Entwicklung des Tensorkalküls. Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie*, Springer, 1994.
- [Ricci 1877a] G. RICCI CURBASTRO, Sopra la deduzione d'una nuova legge fondamentale di elettrodinamica – *Giornale di Crelle*, vol. 82 – Sopra il modo d'agire delle forze pondero ed elettromotrici fra due conduttori filiformi – *Atti della Soc. di Storia Nat. delle Province Prussiane del Basso Reno*: per R. Clausius, *Il Nuovo Cimento*, Serie 3, I, 58-72, 89-106, 1877.
- [Ricci 1877b] G. RICCI CURBASTRO, Sulla teoria elettrodinamica di Maxwell, *Il Nuovo Cimento*, Serie 3, II, 5-27, 93-106, 1877.
- [Ricci 1884] G. RICCI CURBASTRO, Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche, *Annali di Matematiche* Serie 2, Tomo 12, 135-167, 1884. Anche in [Ricci 1956-57, I, 138-171].
- [Ricci 1886] G. RICCI CURBASTRO, Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali, *Annali di Matematica pura ed applicata*, Serie 2, 14, 1-11, 1886. Anche in [Ricci 1956-57].
- [Ricci 1887a] G. RICCI CURBASTRO, Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale, *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, Serie 4, 3, 15-18. Anche in [Ricci 1956-57, I, 199-122].
- [Ricci 1887b] G. RICCI CURBASTRO, Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine, *Annali di Matematica pura ed applicata*, Serie 2, 15, 127-159, 1887. Anche in [Ricci 1956-57, I, 204-238].
- [Ricci 1888] G. RICCI CURBASTRO, *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso in Analisi applicata*, Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario dell'Università di Bologna, 3, Padova, Tipografia del Seminario, 3-23, 1888. Anche in [Ricci 1956-57, I, 245-267].
- [Ricci 1892] G. RICCI CURBASTRO, Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique, *Bulletin des Sciences mathématiques*, Série 2, 16, 167-189, 1892. Anche in [Ricci 1956-57, I, 288-310].
- [Ricci 1893] G. RICCI CURBASTRO, Di alcune applicazioni del calcolo differenziale assoluto alla teoria delle forme differenziali quadratiche binarie, *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti* Serie VII, 4, 1336-1364. Anche in [Ricci 1956-57, I, 311-335].
- [Ricci 1895] G. RICCI CURBASTRO, Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di 2° grado, *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti*, (6) 7, 445-488, 1895.
- [Ricci 1898] G. RICCI CURBASTRO, *Lezioni sulla teoria delle superfici*, Fratelli Drucker, Verona-Padova, 1898. Un'edizione più recente è: *Lezioni sulla teoria delle superfici nell'opera di Ricci-Curbastro*, G. Esposito, L. Dell'Aglia editors, UMI, 2019.
- [Ricci, Levi-Civita] G. RICCI CURBASTRO, T. LEVI-CIVITA, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Mathematische Annalen*, 54, 125-201, 1901.
- [Ricci 1956-57] G. RICCI CURBASTRO, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese, Roma, 1956-57.
- [Riemann 1857] B. RIEMANN, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen, in *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. VII, 3-22. Anche in Weber (Heinrich), ed., *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1876, 62-78.
- [Riemann 1868] B. RIEMANN, Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, in *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. XIII, 133-150, 1868.
- [Riemann 1876] B. RIEMANN, Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiensi propositae (1861), in Weber (Heinrich), ed., *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1876, 370-383.
- [Schur 1887] F. SCHUR, Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume, *Mathematische Annalen*, 28, 343-353, 1887.
- [Schläfli 1871-73] L. SCHLÄFLI, Nota alla Memoria del Sig. Beltrami, Sugli spazi di curvatura costante, *Annali di Matematica pura e applicata*, Serie 2, 5, 178-193, 1871-1873.
- [Smith 1877] S. SMITH, Sur l'équations modulaires, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (3) 1, 68-69, 1877.
- [Spivak 1999] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume 1, Third Edition, Publish or Perish, Houston, 1999.
- [Thomé 1872a] L. W. THOMÉ, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 193-218, 74, 1872.
- [Thomé 1872b] L. W. THOMÉ, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 265-291, 75, 1872.
- [Thomé 1873] L. W. THOMÉ, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 273-291, 76, 1873.
- [Tonolo 1954] A. TONOLO, Commemorazione di Gregorio Ricci-Curbastro nel primo centenario dalla nascita, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 23, 1-24, 1954.
- [Tonolo 1961] A. TONOLO, Sulle origini del Calcolo di Ricci, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 53, 189-207, 1961.



Alberto Cogliati

Alberto Cogliati è professore ordinario di Storia della Matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Padova. I suoi interessi di ricerca vertono principalmente sulla storia della geometria differenziale fra Settecento e Novecento. Tra le sue pubblicazioni più recenti, la monografia: *La geometria non euclidea: una breve storia dall'Antichità a Poincaré*, Carocci 2024.



2025. Il teorema di Nicomaco e i suoi sviluppi

ALESSANDRO ZACCAGNINI

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Parma

E-mail: alessandro.zaccagnini@unipr.it

Sommario: Partendo dall'osservazione che $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3 = 45^2 = 2025$, introduciamo alcune identità e facciamo un giro nella matematica parlando di combinatoria, analisi matematica e molto altro, arrivando a “intuire” una proprietà profonda della funzione zeta di Riemann.

Abstract: Starting from the remark that $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3 = 45^2 = 2025$, we introduce some identities and have a mathematical tour talking about combinatorics, mathematical analysis and much else, until we “guess” a deep property of the Riemann zeta-function.

1. – Storia

La motivazione per scrivere un nuovo articolo che contiene nel titolo l'anno in cui è stato pubblicato proviene dall'uguaglianza

$$1^3 + 2^3 + \dots + 9^3 = (1 + 2 + \dots + 9)^2 = 45^2 = 2025.$$

Si tratta di un caso particolare del Teorema o Identità di Nicomaco, secondo i quali

$$1^3 + 2^3 + \dots + N^3 = (1 + 2 + \dots + N)^2 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$$

per ogni intero positivo N . L'identità

$$(1) \quad 1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

è ben nota, così come l'aneddoto secondo il quale Gauss l'avrebbe riscoperta da bambino e utilizzata per risolvere molto velocemente un problema posto dal suo maestro. La parte sinistra della Figura 1 ne illustra un caso particolare.

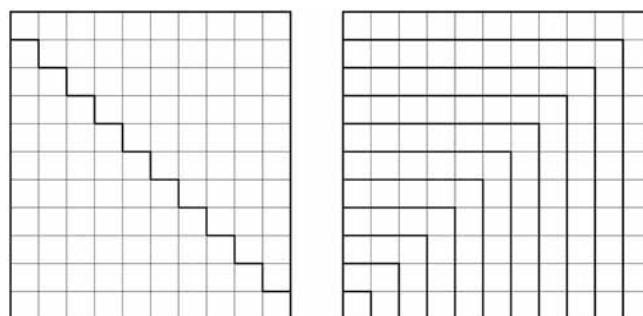


FIGURA 1 – A sinistra la dimostrazione dell'identità (1) per $N = 10$. Il rettangolo ha una base lunga 10 unità ed un'altezza di 11; la somma $1 + 2 + \dots + 9 + 10$ vale metà della sua area. A destra la dimostrazione dell'identità (2) per $N = 10$. La somma $1 + 3 + 5 + \dots + 19 + 21$ è pari all'area del quadrato di lato 11.

La relazione equivalente

$$(2) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2N+1) = (N+1)^2$$

era certamente nota agli antichi Greci. La dimostrazione per mezzo degli “gnomoni” è riprodotta nella parte destra della Figura 1. Molti ricordano anche le due identità

$$\sum_{j=1}^N j^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

Accettato: 29 giugno 2025.

e

$$\sum_{j=1}^N j^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2} \right)^2.$$

La prima può essere usata per dare una dimostrazione delle formule di Archimede per la quadratura della parabola, la seconda è proprio l'identità di Nicomaco.

Considerazioni euristiche. Queste relazioni suggeriscono che la funzione

$$(3) \quad S_k(N) = \sum_{j=0}^N j^k,$$

si possa rappresentare mediante un polinomio p_k di grado $k+1$ nella variabile N , quando k è un intero non negativo. Ci possiamo anche spingere a congetturare che il primo coefficiente di p_k sia $(k+1)^{-1}$ sulla base delle formule date sopra. Nei prossimi paragrafi daremo argomentazioni di varia natura che suggeriscono la correttezza di questa congettura, e vari modi per determinare concretamente i coefficienti di p_k . Per motivi formali è più semplice se facciamo partire da 0 la somma nella definizione (3); l'unica differenza si ha per $k=0$ quando definiamo $S_0(N) = N+1$, usando la stessa convenzione che si usa quando si scrivono le serie di potenze e le si calcolano nel centro dello sviluppo, cioè $0^0 = 1$; di solito questa convenzione resta implicita e non ci si fa nemmeno caso. Questo ci permetterà di dare alcune proprietà valide per $k \in \mathbb{N}$ senza fare eccezioni per $k=0$. Per esempio, $N+1$ divide $S_k(N)$ in $\mathbb{Q}[N]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Discuteremo di queste proprietà di divisibilità nel §7.

Una puntualizzazione formale. Prima di proseguire è necessario fare qualche altra considerazione di carattere formale; il dominio di S_k è $\mathbb{N}$, l'insieme degli interi non negativi, e conoscere una funzione sugli interi non è sufficiente a determinare completamente una sua eventuale estensione ad $\mathbb{R}$: per esempio le funzioni $f(x)$ ed $f(x) + \sin(\pi x)$ coincidono su tutti i numeri interi senza coincidere come funzioni. Dunque stiamo dicendo questo: se k è intero, esiste un polinomio p_k tale che $S_k(N) = p_k(N)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Non si tratta esclusivamente di una questione formale sul dominio di una certa funzione: vedremo anche il caso in cui k è positivo ma non necessariamente intero, e quindi S_k non si può rappresentare mediante un polinomio, ma le approssimazioni che troveremo saranno valide a prescindere perché si ottengono tramite considerazioni di monotonia di una certa funzione reale, e cioè $f_k(x) = x^k$. Estenderemo ulteriormente questi risultati al caso in cui k è negativo (eliminando l'addendo $j=0$ dalla definizione, beninteso), e parleremo quindi della funzione zeta di Riemann, vedendone alcune proprietà interessanti. Saremo dunque costretti a distinguere quali valori di k stiamo prendendo in considerazione, ma questo è inevitabile in vista delle estensioni che vogliamo trattare nella seconda parte dell'articolo.

Inizialmente consideriamo il caso "facile" in cui $k \in \mathbb{N}$. Una volta che avremo dimostrato che esiste un polinomio p_k tale che $S_k(N) = p_k(N)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$, ci potremo concentrare sulla determinazione dei coefficienti di p_k sfruttando il fatto che il suo dominio è $\mathbb{R}$, e che su questo insieme è una funzione continua, derivabile, ... In pratica ci avvaliamo del principio di identità dei polinomi che ricordiamo più avanti. In linea di principio non avrebbe senso parlare di integrali e derivate di S_k ; ma se dimostriamo che S_k , ristretto ai numeri naturali, è un polinomio, possiamo poi ricavarne i coefficienti usando argomentazioni di natura diversa, uscendo in un certo senso dal dominio naturale della funzione S_k . Una discussione puntuale di questa questione si può trovare nell'articolo di Levy citato in Bibliografia.

Perché queste identità sono interessanti? Per spiegare meglio l'interesse per identità di questo tipo anche al di fuori della matematica vera e propria conviene raccontare per intero l'aneddoto di Gauss bambino: a quanto pare il suo maestro dette il compito di calcolare $1 + 2 + \dots + 100$; qualche minuto dopo Gauss consegnò la sua lavagnetta con il risultato corretto, 5050, e dovettero aspettare parecchio tempo perché i compagni di scuola consegnassero le loro. Lo scetticismo del maestro dovette svanire quando vide che l'unico risultato giusto era appunto quello di Gauss. Con il linguaggio moderno dell'informatica, possiamo dire che l'uso di una identità ha ridotto la *complessità computazionale* del calcolo e allo stesso tempo ne ha aumentato

l'accuratezza; se questo può essere relativamente poco rilevante quando è coinvolta la sola aritmetica dei numeri interi, diventa molto più importante quando si devono eseguire calcoli in virgola mobile, come può essere la somma parziale di una serie geometrica (8) con argomento non intero.

Come è strutturato questo articolo. Il primo risultato che enunceremo è il teorema che per l'appunto garantisce che c'è un polinomio con la proprietà che cerchiamo quando k è un intero non negativo. Nel prossimo paragrafo vedremo argomentazioni euristiche di varia natura, alcune delle quali permettono di dare una dimostrazione rigorosa e anche un modo per determinare i coefficienti del polinomio in questione. Più avanti vedremo il Teorema di Levy che dà la possibilità di ottenere i polinomi p_k ricorsivamente ed il Teorema di Faulhaber che ci permetterà di legare i coefficienti del polinomio p_k ai numeri di Bernoulli che definiremo nell'Appendice B; anche questi ultimi possono essere determinati ricorsivamente. Completano l'articolo alcune discussioni relative al caso in cui k non è intero.

Teorema 1 *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio p_k di grado $k+1$ a coefficienti razionali tale che per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha $S_k(N) = p_k(N)$.*

Naturalmente i $k+2$ coefficienti di p_k possono essere determinati imponendo $k+2$ condizioni (per esempio, osservando che $p_k(n) = S_k(n)$ per $n \in \{0, 1, \dots, k+1\}$), ma resta la domanda se possa esistere un procedimento più efficiente rispetto a risolvere un sistema lineare con $k+2$ incognite. I teoremi che vedremo più avanti contreranno qualche risposta a questa domanda.

2. – Euristica

Per prima cosa vedremo un'argomentazione non molto profonda che suggerisce il corretto andamento asintotico per la funzione S_k quando k è un numero reale positivo. Proseguiremo con un'argomentazione combinatoria elementare che è sufficiente a dimostrare rigorosamente il Teorema appena enunciato, dando una relazione di ricorrenza che lega fra loro i

polinomi p_k per diversi valori di k , ovviamente quando $k \in \mathbb{N}$. Poi daremo una nuova argomentazione analitica che permette di determinare i primi due coefficienti di p_k , il cui interesse principale sta nel fatto che si può usare anche per k non intero e addirittura negativo (ridefinendo come detto la funzione S_k), ottenendo la corretta asintotica per la funzione S_k in generale. Ma cominciamo piano piano, andando con ordine.

2.1 – Andamento asintotico

Qui supponiamo che $k > 0$ sia un numero reale fissato. Possiamo notare che S_k è una *somma di Riemann* per la funzione $f_k(x) = x^k$ sull'intervallo $[0, N]$ e quindi ci si aspetta che, almeno asintoticamente, si debba avere

$$S_k(N) = \sum_{j=0}^N j^k \sim \int_0^N x^k dx = \frac{N^{k+1}}{k+1}.$$

La dimostrazione della relazione asintotica non è difficile e segue dalle disuguaglianze che intercorrono tra un integrale di Riemann per funzioni monotone e la relativa primitiva. In sostanza, se $f: \mathbb{R}^{0+} \rightarrow \mathbb{R}^{0+}$ è monotona crescente allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n+1)$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^N f(n) \leq \int_0^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N+1} f(n).$$

Nel nostro caso $f(x) = x^k$ e quindi le quantità estreme valgono rispettivamente $S_k(N)$ ed $S_k(N+1)$ mentre la quantità al centro vale $(N+1)^{k+1}/(k+1)$. Questo basta per dimostrare la relazione asintotica, perché queste disuguaglianze implicano che $N^{k+1}/(k+1) \leq S_k(N) \leq (N+1)^{k+1}/(k+1)$, e le due quantità estreme sono polinomi di grado $k+1$ con primo coefficiente $(k+1)^{-1}$ quando k è intero. Più avanti useremo una versione della “formula dei trapezi” enunciata nell'Appendice A che fornisce un risultato più preciso per le funzioni f derivabili e non semplicemente monotone.

Ora torniamo a restringere il dominio per k ai soli numeri naturali. Un modo simile per intuire la stessa

cosa è osservare che per definizione la funzione S_k soddisfa

$$(4) \quad S_k(N+1) - S_k(N) = (N+1)^k,$$

e questo, per il Teorema di Lagrange, è compatibile con l'idea che S_k sia la restrizione ad $\mathbb{N}$ di un polinomio p_k di grado $k+1$. Oggi sappiamo dalla teoria generale che un'equazione alle differenze come (4) ha una tale soluzione; ovviamente la teoria in questione è stata sviluppata dopo che sono emerse tante istanze di risultati simili a questo. Un'idea alternativa è considerare l'identità

$$\frac{(N+1)^{k+1} - N^{k+1}}{k+1} = \int_N^{N+1} t^k dt \sim N^k,$$

che ci mette sulla strada che porta alla scoperta dei polinomi di Bernoulli; si veda l'Appendice B e in particolare la formula (17).

3. – Dimostrazione combinatoria

In questo paragrafo prendiamo $k \in \mathbb{N}$. Un modo elementare per convincerci che le funzioni S_k sono effettivamente restrizioni ad $\mathbb{N}$ di polinomi p_k proviene da un esame del Triangolo di Tartaglia. Se sommiamo alcuni elementi consecutivi su una diagonale fissata troviamo un opportuno coefficiente sulla diagonale successiva: si veda la Figura 2. Più formalmente si dimostra per induzione su N che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale l'uguaglianza

$$(5) \quad \sum_{n=0}^N \binom{n+k}{k} = \binom{N+k+1}{k+1},$$

essenzialmente sfruttando solo le proprietà

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

valide rispettivamente per $n \geq 0$ e per $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Vediamo in azione un esempio concreto: per $k=0$ e $k=1$ l'identità (5) restituisce le due uguaglianze

$$\sum_{n=0}^N \binom{n}{0} = \binom{N+1}{1} = N+1$$

e

$$\sum_{n=0}^N \binom{n+1}{1} = \binom{N+2}{2} = \frac{1}{2}(N+1)(N+2).$$

La prima è evidentemente banale, mentre la seconda equivale a $S_0(N) + S_1(N) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ e quindi alla relazione (1). Fin qui niente di nuovo, e allora prendiamo $k=2$, ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \binom{n+2}{2} &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \\ &= \binom{N+3}{3} = \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(N+3). \end{aligned}$$

Semplificando otteniamo

$$(6) \quad \sum_{n=0}^N (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(N+1)(N+2)(N+3).$$

Il primo membro vale $S_2(N) + 3S_1(N) + 2S_0(N)$ e quindi, usando le formule ricavate sopra per S_0 ed S_1 , possiamo dedurre che $S_2(N) = p_2(N)$ ha la forma data in una delle formule ricordate in precedenza.

È evidente che questo procedimento può essere utilizzato in generale per trovare che una certa combinazione lineare delle funzioni $S_0, \dots, S_k$ è un polinomio a coefficienti interi di grado $k+1$. Questo permette di dimostrare per induzione che S_k è (la restrizione ad $\mathbb{N}$ di) un polinomio a coefficienti razionali di grado $k+1$, quello che chiamiamo p_k , cioè il Teorema 1; la base dell'induzione è pressoché banale. Inoltre, questo ci dà un procedimento pratico, estremamente inefficiente, per ricavare la forma concreta di p_k conoscendo le espressioni di p_j con $j < k$; il Teorema di Levy qui sotto ci permetterà una cosa analoga in cui però è sufficiente la conoscenza di p_{k-1} .

Una conseguenza non ovvia è la dimostrazione che $N+1$ è sempre un fattore algebrico di $p_k(N)$; in altre parole, esiste un polinomio q_k a coefficienti razionali tale che $p_k(N) = (N+1)q_k(N)$. Anche questo si dimostra facilmente per induzione, ricordando la nostra convenzione iniziale che $p_0(N) = N+1$. Torneremo su questo aspetto nel §7 dedicato alla scomposizione in fattori dei polinomi p_k .

Basi dello spazio vettoriale dei polinomi. I polinomi $q_k(n) = \binom{n+k}{k}$ sono una *base* dello spazio vetto-

riale $\mathbb{Q}[n]$; quelli con $k \leq d$ sono una base del sottospazio dei polinomi di grado $\leq d$. Da un certo punto di vista costituiscono una base più *naturale* di quella dei monomi $1, n, n^2, \dots$, ed il nostro problema consiste nell'esprimere i vettori di quest'ultima base come combinazione lineare di elementi della precedente. Notiamo che si tratta di polinomi che assumono valori interi negli argomenti interi, ma hanno coefficienti razionali non tutti interi.

Nell'Appendice C introdurremo il simbolo di Pochhammer $(a)_n$, che in un certo senso generalizza i polinomi q_k (definiti solo sui numeri naturali, per costruzione) a valori non necessariamente interi della variabile, un tema che tornerà fra breve. Nel §4, nel quale parleremo principalmente di derivate, vedremo che un'altra base che emerge in modo naturale è costituita dai polinomi $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \dots$

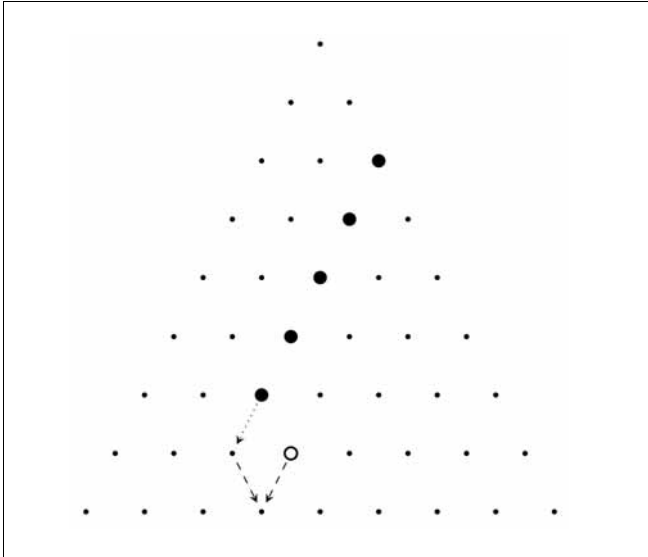


FIGURA 2 – La dimostrazione per induzione della relazione (5). La somma dei coefficienti binomiali indicati dal pallino grande è data dal pallino vuoto. Se aggiungiamo anche il coefficiente successivo sulla stessa diagonale, indicato dalla freccia con i puntini, troviamo quello indicato dalle altre frecce, per una delle proprietà dei coefficienti binomiali.

3.1 – Una relazione di ricorrenza

La relazione (4) suggerisce di usare il Triangolo di Tartaglia e scrivere in questo modo

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} n^j (-1)^{k-j}.$$

Quindi, sommando su $n = 0, \dots, N$ troviamo

$$\begin{aligned} N^{k+1} + (-1)^k &= \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} n^j (-1)^{k-j} = \\ (7) \quad &= \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} \sum_{n=0}^N n^j = \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} S_j(N). \end{aligned}$$

Questo fornisce una relazione di ricorrenza per calcolare S_k conoscendo $S_0, \dots, S_{k-1}$, e conferma quanto visto nel paragrafo precedente sul fatto che S_k si rappresenta mediante un polinomio p_k ; non diamo i dettagli. Inoltre, distinguendo a primo membro fra k pari e dispari e ragionando per induzione su k si ricava che, come polinomio, $N+1$ divide p_k ; ci torniamo su nel §7.

4. – Analisi matematica

L'analisi matematica ci offre vari modi diversi di affrontare il problema. Può sembrare strano introdurre una variabile continua in un problema che appare di pertinenza esclusiva della matematica discreta, ma ci sono diversi motivi per fare questo;⁽¹⁾ tanto per cominciare, sappiamo dalle considerazioni fatte nel paragrafo precedente che quando $k \in \mathbb{N}$ la soluzione del problema che ci siamo posti è un polinomio, che per sua propria natura ha come dominio i numeri reali (o volendo quelli complessi). Inoltre, in generale le proprietà "aritmetiche" della

⁽¹⁾ Per chi, come l'autore di questo articolo, si occupa principalmente della distribuzione dei numeri primi, la consapevolezza che non si può trattare la matematica come se fosse fatta a compartimenti stagni, tenendo rigorosamente separate *aritmetica*, *analisi matematica* e *algebra*, tanto per dire, arriva abbastanza presto nel corso dei propri studi. In effetti, scopo della buona matematica è gettare ponti tra aree apparentemente distanti e rivelare connessioni nascoste o inattese.

successione $(a_n)_{n \geq 0}$ si riflettono sulle proprietà “analitiche” della funzione

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

posto che la serie converga; l'esempio più noto di questo fenomeno è probabilmente il caso in cui prendiamo la successione di Fibonacci, che descriviamo brevemente nell'Appendice D. In situazioni più difficili, sappiamo che si può “estrarre” il coefficiente a_n di questa serie di potenze usando il Teorema dei residui.

Ora ci limitiamo a trattare i polinomi, evitando per il momento problemi di convergenza, ma più avanti considereremo anche le serie, nell'Appendice C. Per $k \in \mathbb{N}$ consideriamo i polinomi

$$\phi_k(N; x) = \sum_{n=0}^N \binom{n+k}{k} x^n.$$

Osserviamo che $\phi'_k(N; x) = (k+1)\phi_{k+1}(N-1; x)$, usando una semplice proprietà dei coefficienti binomiali, e cioè

$$(n+1) \binom{n+k+1}{k} = (k+1) \binom{n+k+1}{n}.$$

L'identità elementare

$$(8) \quad \phi_0(N; x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

valida per $N \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ci consente di calcolare $p_0(N)$: infatti

$$p_0(N) = \lim_{x \rightarrow 1} \phi_0(N; x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = N + 1,$$

come si vede immediatamente applicando per esempio il Teorema di de l'Hôpital.

Questo naturalmente è del tutto banale, ma se deriviamo rispetto ad x l'identità qui sopra otteniamo

$$\begin{aligned} \phi'_0(N; x) &= \phi_1(N-1; x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + Nx^{N-1} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Ragionando esattamente come prima abbiamo

$$\begin{aligned} p_1(N) &= \lim_{x \rightarrow 1} \phi_1(N-1; x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}N(N+1). \end{aligned}$$

Potremmo proseguire allo stesso modo trovando relazioni simili a quelle ottenute sopra, ma i calcoli diventano rapidamente molto noiosi. Ci limitiamo ad osservare che

$$\begin{aligned} \phi''_0(N; x) &= \phi'_1(N-1; x) = 2\phi_2(N-2; x) \\ &= 2 + 6x + 12x^2 + \dots + (N-1)(N-2)x^{N-3} + N(N-1)x^{N-2} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{d}{dx} \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2 - N(N+1)x^{N-1} + 2(N^2-1)x^N - N(N-1)x^{N+1}}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Questa volta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \phi''_0(N; x) &= \frac{1}{3}N(N-1)(N+1) = \sum_{n=0}^{N-2} (n+1)(n+2) \\ &= 2p_0(N-2) + 3p_1(N-2) + p_2(N-2), \end{aligned}$$

da cui deduciamo rapidamente il valore di $p_2(N)$, esattamente come nella formula (6). Questo procedimento è abbastanza complicato e per certi versi inutile ma suggerisce l'introduzione delle serie che vedremo qui sotto nell'Appendice C.

5. – Applicazione della formula dei trapezi

Consideriamo la formula dei trapezi nella versione semplificata (15) con $M = 0$ ed $f(x) = x^k$, dove $k \geq 1$; per il momento non supponiamo che k sia intero.

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} S_k(N) &= \sum_{j=0}^N j^k = \int_0^N t^k dt + k \int_0^N \phi(t) t^{k-1} dt + \frac{1}{2}N^k \\ &= \frac{N^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}N^k + k \int_0^N \phi(t) t^{k-1} dt, \end{aligned}$$

dove $\phi(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$. La funzione ϕ ha periodo 1 e media nulla sul periodo, ed è quindi naturale aspettarsi che l'integrale all'estrema destra abbia ordine $\mathcal{O}_k(N^{k-1})$, cosa che dimostreremo qui sotto senza particolare fatica. Questa formula “rivela” l'origine del termine spurio $N^k/2$, l'unico con la stessa parità di k nella formula per p_k quando k è intero, ma al

tempo stesso “nasconde” la proprietà di divisibilità di p_k per $N + 1$ che abbiamo ricavato dalle considerazioni combinatorie.

Ora ci concentriamo sull'ultimo addendo a destra. Sfruttando il fatto che ϕ ha media nulla su $[0, 1]$, abbiamo che questo addendo vale 0 quando $k = 1$, una conferma che $p_1(N)$ ha la forma nota. Se $k \geq 2$ possiamo integrare per parti una volta. Poniamo $\Phi(x) = \frac{1}{2}\{x\}(\{x\} - 1)$; si verifica immediatamente che Φ è continua ovunque e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Inoltre, su quest'ultimo insieme abbiamo $\Phi'(x) = \phi(x)$. Dunque l'ultimo addendo qui sopra vale

$$\begin{aligned} k \int_0^N \phi(t)t^{k-1} dt &= k \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} \phi(t)t^{k-1} dt \\ (9) \quad &= k \sum_{n=0}^{N-1} \left(\left[\Phi(t)t^{k-1} \right]_n^{n+1} - (k-1) \int_n^{n+1} \Phi(t)t^{k-2} dt \right) \\ &= -k(k-1) \int_0^N \Phi(t)t^{k-2} dt \end{aligned}$$

poiché $\Phi(n) = 0$ se n è intero. La tesi, cioè il fatto che l'integrale in questione è $\mathcal{O}_k(N^{k-1})$, segue perché Φ è una funzione limitata. Più precisamente,

$$\begin{aligned} |\Phi(x)| &\leq \frac{1}{8} \text{ per ogni } x \text{ reale e quindi} \\ \left| S_k(N) - \left(\frac{1}{k+1} N^{k+1} + \frac{1}{2} N^k \right) \right| &= \\ &= k(k-1) \left| \int_0^N \Phi(t)t^{k-2} dt \right| \\ &\leq \frac{k}{8} (k-1) \int_0^N t^{k-2} dt = \frac{k}{8} N^{k-1}. \end{aligned}$$

Per $k = 2$ possiamo portare a termine il calcolo esatto, partendo dalla relazione (9) e sfruttando il fatto che Φ ha periodo 1 e media

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{12}, \end{aligned}$$

trovando di nuovo l'espressione nota per S_2 che abbiamo dato all'inizio di questo articolo.

Per $k > 2$ possiamo integrare per parti di nuovo, definendo per comodità $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) + \frac{1}{12}$, in modo

che $\tilde{\Phi}$ sia periodica di periodo 1 e abbia media nulla. Si può poi iterare e se $k \in \mathbb{N}$ questo processo termina dopo un numero finito di passi; non diamo i dettagli, ma in linea di principio ne possiamo ricavare una nuova dimostrazione del Teorema 1. Segnaliamo solo che siamo inesorabilmente sulla strada della scoperta dei polinomi di Bernoulli e di formule che estendono la “formula dei trapezi” che abbiamo usato in questa analisi, dalle importanti applicazioni nelle questioni di Analisi Numerica; si vedano le Appendici A e B.

Due brevi osservazioni conclusive: dal punto di vista dell'analisi matematica non è molto rilevante il fatto che il parametro k sia intero, purché soddisfi certi vincoli; si veda il §9. Inoltre, potremmo inserire lo sviluppo in serie di Fourier della funzione ϕ ed integrare termine a termine; per il momento lasciamo perdere, ma vedremo più avanti, sempre nel §9, un'interessante applicazione della stessa formula al caso in cui $k < -1$, ed effettivamente sarà utile fare questa operazione.

6. – Una relazione di ricorrenza: il Teorema di Levy

Vediamo ora una dimostrazione molto semplice di una proprietà fondamentale dei polinomi p_k : come si vedrà, sono sufficienti considerazioni relativamente elementari, mentre il Teorema di Faulhaber qui sotto richiede conoscenze più profonde. La dimostrazione sfrutta il fatto che p_k è una funzione definita su $\mathbb{R}$, che è continua e derivabile e possiamo usare queste proprietà per determinarlo; naturalmente per il Teorema 1 sappiamo che $p_k(N) = S_k(N)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Teorema 2 (Levy) *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ esiste una costante C_k tale che*

$$p_k(N) = k \int_0^N p_{k-1}(t) dt + C_k N.$$

La chiave per la dimostrazione è il “principio di identità dei polinomi”: se un polinomio di grado che non supera n si annulla in $n + 1$ punti distinti, allora è il polinomio nullo. Alternativamente, se due polinomi di grado che non supera n coincidono in $n + 1$ punti distinti allora sono lo stesso polinomio, cioè hanno tutti i coefficienti ordinatamente uguali.

Possiamo procedere con la dimostrazione del Teorema di Levy. Per definizione, il polinomio p_k ha la proprietà

$$(10) \quad p_k(x) - p_k(x-1) = x^k$$

per tutti gli $x \in \mathbb{N}^*$, perché vale il Teorema 1. Per il principio di identità dei polinomi, poiché questa relazione tra polinomi vale per infiniti valori della variabile x , deve valere *per ogni* x reale e possiamo dimenticare il vincolo che x sia un intero positivo. Rimpiazzando k con $k-1$ e poi moltiplicando per k abbiamo dunque

$$\begin{aligned} k(p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x-1)) &= kx^{k-1} = \frac{d}{dx}x^k = \\ &= p'_k(x) - p'_k(x-1). \end{aligned}$$

A destra stiamo usando l'identità (10): stiamo evidentemente sfruttando il fatto che stiamo parlando di p_k e non di S_k che ha un dominio che non permette di derivare. Ora rimpiazziamo x con $x-1$ ottenendo

$$k(p_{k-1}(x-1) - p_{k-1}(x-2)) = p'_k(x-1) - p'_k(x-2).$$

Sommando le ultime due relazioni abbiamo

$$k(p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x-2)) = p'_k(x) - p'_k(x-2).$$

Iterando, per $n \in \mathbb{N}$ concludiamo che

$$k(p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x-n)) = p'_k(x) - p'_k(x-n),$$

purché $n \leq x$. Questa relazione è stata dimostrata con l'ipotesi che n sia un intero non negativo: prendiamo $x = n = N \in \mathbb{N}$, ottenendo

$$k(p_{k-1}(N) - p_{k-1}(0)) = p'_k(N) - p'_k(0),$$

cioè

$$(11) \quad p'_k(N) = kp_{k-1}(N) + C_k,$$

dove $C_k = p'_k(0) - kp_{k-1}(0)$. Vorremmo naturalmente integrare questa relazione, ottenendo in sostanza la tesi a meno del valore della costante di integrazione, ma la formula (11) è legata in modo apparentemente indissolubile al fatto che la variabile N sia un numero intero. È in questo punto che abbiamo bisogno di fare la transizione tra una funzione definita sui naturali come S_k ed un polinomio come p_k . La via d'uscita è ancora il principio di identità dei polinomi: i polinomi a primo e secondo membro della relazione (11) hanno grado k (come abbiamo dimo-

strato sopra) e coincidono su *tutti* i numeri interi positivi. Dunque sono lo stesso polinomio e cioè $p'_k(t) = kp_{k-1}(t) + C_k$ per ogni t reale e in pratica possiamo integrare tra 0 ed N questa ultima relazione, che generalizza la (11) a tutti i numeri reali, ottenendo

$$(12) \quad p_k(N) = k \int_0^N p_{k-1}(t) dt + C_k N + p_k(0).$$

Ma $p_k(0) = 0$ poiché $k \geq 1$ e il Teorema di Levy è dimostrato.

7. – Proprietà algebriche dei polinomi p_k

Ci occupiamo della scomposizione in fattori dei polinomi p_k , quando k è un numero naturale. L'ambito naturale dove fare queste considerazioni è $\mathbb{Q}[x]$: diremo che il polinomio a coefficienti razionali p_k è divisibile per un altro polinomio a coefficienti razionali q_k se esiste un terzo polinomio a coefficienti razionali s_k tale che $p_k(x) = q_k(x)s_k(x)$. Questo fatto non implica in generale che per N intero il valore di $q_k(N)$, posto che sia intero, debba dividere il valore di $p_k(N)$, che certamente lo è nel nostro caso, come si verifica immediatamente già per $k = 1$.

Dal Teorema di Levy deduciamo senza fatica che p_k è divisibile per x per ogni $k \geq 1$, cosa peraltro ovvia perché come appena ricordato $p_k(0) = 0$ non appena $k \neq 0$. La dimostrazione "combinatoria" del Teorema 1 dà anche l'informazione ulteriore che il polinomio $x+1$ divide $p_k(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$: come già osservato, è una conseguenza della relazione (7).

La dimostrazione del Teorema di Levy, così come quella del Teorema di Faulhaber qui sotto, è fortemente dipendente dai concetti dell'analisi matematica e non si presta immediatamente a dare i risultati voluti. Abbiamo anche bisogno di alcune proprietà più algebriche dei polinomi che stiamo considerando. Il nostro obiettivo è dimostrare il seguente risultato, per il quale ci dobbiamo procurare alcuni strumenti.

Teorema 3 *Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, il polinomio p_k è divisibile per $x(x+1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ con k pari, p_k è divisibile per $x(x+1)(2x+1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ dispari con $k \geq 3$, p_k è divisibile per $x^2(x+1)^2$.*

Lemma 4 Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $p_k(-x) = (-1)^{k+1} p_k(x-1)$.

Questo Lemma si dimostra mettendo $1-x$ al posto di x nella relazione (10), ottenendo $p_k(-x) - p_k(1-x) = -(1-x)^k$; prendiamo N intero positivo, sostituiamo in quest'ultima relazione i valori $x = N, x = N-1, \dots, x = 1$ e sommiamo tutte le relazioni così ottenute; la tesi segue immediatamente, usando ancora il principio di identità dei polinomi.

Corollario 5 Se $k > 1$ è dispari la costante C_k nel Teorema di Levy vale 0.

Dimostriamo questo corollario del Teorema di Levy ottenendo due espressioni diverse per la stessa quantità e mettendole a confronto. Per definizione, per $k \in \mathbb{N}$ il polinomio p_k soddisfa la relazione

$$(13) \quad p_k(t) - p_k(t-1) = t^k$$

per tutti i $t \in \mathbb{N}$ e quindi per *tutti* i numeri reali t per il principio di identità. Per $k \in \mathbb{N}^*$ poniamo $k-1$ al posto di k in questa relazione, moltiplichiamo per k e integriamo

$$x^k = k \int_0^x t^{k-1} dt = k \int_0^x (p_{k-1}(t) - p_{k-1}(t-1)) dt$$

(per il Teorema di Levy e per il Lemma 4, purché $k-1 > 0$)

$$= (p_k(x) - C_k x) - k(-1)^k \int_0^x p_{k-1}(-t) dt$$

(cambiando variabile)

$$= (p_k(x) - C_k x) + k(-1)^k \int_0^{-x} p_{k-1}(u) du$$

(per il Teorema di Levy con $-x$ al posto di x)

$$= (p_k(x) - C_k x) + (-1)^k (p_k(-x) + C_k x)$$

(ancora per il Lemma 4)

$$= (p_k(x) - C_k x) + (-1)^k ((-1)^{k+1} p_k(x-1) + C_k x) \\ = (p_k(x) - p_k(x-1)) + C_k x (-1 + (-1)^k)$$

(ancora per la (13) con $t = x$)

$$= x^k + C_k (-1 + (-1)^k) x.$$

Quando k è pari la quantità $(-1 + (-1)^k)$ vale 0 e quindi troviamo un'identità priva di qualunque interesse, ma quando k è dispari la stessa quantità vale -2 e l'identità tra polinomi $x^k = x^k - 2C_k x$, valida per $k > 1$, implica che $C_k = 0$.

La stessa cosa segue, più semplicemente, dal Teorema di Faulhaber qui sotto, perché $\beta_r = 0$ se $r \geq 3$ è dispari. Abbiamo incluso questa dimostrazione perché richiede solo concetti relativamente elementari, mentre la dimostrazione del Teorema di Faulhaber è ben più profonda.

Lemma 6 Se $q \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio a coefficienti reali, e $q(a) = q'(a) = 0$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, allora $q(x)$ è divisibile per $(x-a)^2$.

Sia $q(x) = (x-a)^2 g(x) + h(x)$, dove g è un polinomio opportuno ed h è un polinomio di grado che non supera 1. Allora $h'(x) = q'(x) - g'(x)(x-a)^2 - 2(x-a)g(x)$ e dunque per le ipotesi $h(a) = 0$ ed $h'(a) = 0$, cioè h è il polinomio nullo.

Possiamo cominciare la dimostrazione del Teorema 3; la prima affermazione segue dal fatto che $p_k(0) = 0$ non appena $k \geq 1$ e dal fatto già osservato nella dimostrazione del Teorema 1. La seconda affermazione segue ponendo $x = \frac{1}{2}$ nel Lemma 4:

se k è pari, questo implica $p_k\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ e quindi

$2x+1$ è un fattore di $p_k(x)$. La terza affermazione segue combinando la formula (11) della dimostrazione del Teorema di Levy, il Corollario 5 ed il Lemma 6, poiché per $k \geq 3$, con k dispari, abbiamo $p_k(0) = p_k(-1) = p'_k(0) = p'_k(-1) = 0$. Le ultime due uguaglianze seguono per induzione dalla (11) e dal fatto che p_{k-1} è divisibile per $x(x+1)$ per la prima affermazione.

8. – Il Teorema di Faulhaber

Per enunciare il Teorema di Johann Faulhaber, che permette in linea di principio di determinare i coefficienti dei polinomi p_k , abbiamo bisogno di ricordare alcune definizioni che diamo in appendice. In particolare, ci servono i numeri di Bernoulli β_r : questi sono stati "scoperti" più volte e non esiste una loro definizione univoca. Per questo motivo il Teo-

rema di Faulhaber può essere enunciato in vari modi leggermente diversi tra loro: per evitare ambiguità, qui ci atteniamo alla definizione dei coefficienti β_r data nella formula (16) dell'Appendice B.

Teorema 7 (Faulhaber) *Con le definizioni ricordate sopra si ha*

$$p_k(N) = N^k + \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \binom{k}{r} \beta_r N^{k+1-r}.$$

Dato che $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, $\beta_3 = 0$ e $\beta_4 = -\frac{1}{30}$, questo ci dà di nuovo i risultati già trovati

prima, e ci permette di ricavare che $P_4(N) = N^5/5 + N^4/2 + N^3/3 - N/30$. Notiamo inoltre che $\beta_{2r+1} = 0$

per ogni $r \in \mathbb{N}^*$ e quindi, a parte il monomio $\frac{1}{2}N^k$,

tutti i monomi di p_k con coefficienti non nulli hanno grado della stessa parità di $k+1$. Un aspetto interessante di questa formula è che i coefficienti β_r non dipendono da k e quindi si possono “riciclare” da un valore di k ad un altro.

Per dimostrare questo importante risultato introduciamo la funzione

$$F_k(N; x) = k!x(1 + e^x + \dots + e^{(N-1)x}).$$

Un breve calcolo con la serie di Taylor della funzione esponenziale rivela che $F_k(N; x)$ ha lo sviluppo di Taylor

$$F_k(N; x) = \sum_{m \geq 0} \frac{k!}{m!} p_m(N-1) x^{m+1}.$$

Dunque $p_k(N-1)$ è il coefficiente di Taylor di x^{k+1} in questa espressione, cioè quando $m = k$.

Nel linguaggio dell'Appendice D, F_k è una sorta di “funzione generatrice” fatta con i valori del polinomio p_k .

Ora scriviamo F_k in un'altra forma e calcoliamo il suo sviluppo di Taylor in un altro modo: per la somma parziale della serie geometrica (8) abbiamo

$$F_k(N; x) = k!x \frac{e^{Nx} - 1}{e^x - 1} = k! \frac{x}{e^x - 1} (e^{Nx} - 1).$$

Espandiamo la frazione usando la definizione dei coefficienti β_k nella formula (16) e il fattore a destra

con la solita serie della funzione esponenziale:

$$F_k(N; x) = k! \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \frac{\beta_3}{3!}x^3 + \dots \right) \sum_{m \geq 1} \frac{N^m}{m!} x^m.$$

Con una modica dose di pazienza si scopre che il coefficiente del monomio di grado m del prodotto di Cauchy delle serie qui sopra vale

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_0 N^m}{0!m!} + \frac{\beta_1 N^{m-1}}{1!(m-1)!} + \dots + \frac{\beta_{m-1} N}{(m-1)!1!} = \\ & = \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^{m-1} \beta_r \binom{m}{r} N^{m-r}. \end{aligned}$$

Per quanto visto sopra ci interessa il coefficiente del monomio con $m = k+1$; tenendo conto del fattore $k!$ che abbiamo trascurato, troviamo che questo coefficiente vale

$$\begin{aligned} & \frac{k!}{(k+1)!} \sum_{r=0}^k \beta_r \binom{k+1}{r} N^{k+1-r} = \\ & = \sum_{r=0}^k \beta_r \binom{k}{r} \frac{1}{k+1-r} N^{k+1-r}, \end{aligned}$$

e il Teorema di Faulhaber è dimostrato.

La dimostrazione si basa sul “principio di identità delle serie di potenze” ed è quindi più sofisticata della dimostrazione del Teorema di Levy. Una parte dell'interesse di questo risultato è che in un certo senso si sposta il problema su un altro piano, cioè si passa dalla determinazione di una funzione al più semplice calcolo di un'opportuna successione di numeri razionali (i numeri di Bernoulli) che possono essere definiti mediante una relazione di ricorrenza, come facciamo nell'Appendice B. Questo porta ad una riduzione della complessità computazionale del calcolo, perché, come osservato sopra, in principio, i coefficienti di p_k si possono calcolare con l'interpolazione.

Abbiamo trovato due diverse rappresentazioni del polinomio p_k , con i teoremi di Levy e Faulhaber rispettivamente. È interessante mettere a confronto le due espressioni. Supponendo per induzione che p_{k-1} abbia la forma data dal Teorema di Faulhaber e sostituendo nella formula (12) scopriamo che queste coincidono utilizzando per $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ le

consuete proprietà dei coefficienti binomiali, mentre per $r = k$ scopriamo che $C_k = \beta_k$. Dato che $\beta_k = 0$ se $k \geq 3$ è dispari, questo ci dice di nuovo che p_k è divisibile per N^2 se $k \geq 3$ è dispari.

9. – Estensione ad altri valori di k

Finora abbiamo considerato k positivo o nullo, concentrandoci sui valori interi; per k positivo non intero si possono parzialmente riutilizzare le considerazioni fatte nei §§2.1 e 5. Che dire quando k è negativo? Cominciamo osservando che è necessario ridefinire S_k facendo partire la somma da $j = 1$. Per $k \in (-1, 0)$ valgono ancora, in sostanza, le considerazioni del §5, facendo attenzione al fatto che ora la funzione è monotona decrescente.

Per $k = -1$ la formula dei trapezi (15) dà la familiare asintotica per le somme parziali della serie armonica, con un valore “esplicito” per la costante γ di Eulero-Mascheroni. Infatti, prendendo $f(x) = x^{-1}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} &= \int_1^N \frac{dt}{t} - \int_1^N \frac{\phi(t)}{t^2} dt + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N}\right) \\ &= \log(N) - \int_1^N \frac{\{t\}}{t^2} dt + \frac{1}{2} \int_1^N \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N}\right) \\ &= \log(N) + 1 - \int_1^N \frac{\{t\}}{t^2} dt. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è convergente se esteso alla semiretta $[1, +\infty)$ poiché $0 \leq \{t\} < 1$.

Posto

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt,$$

usando semplici stime si ottiene

$$\int_1^N \frac{\{t\}}{t^2} dt = 1 - \gamma - \int_N^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt = 1 - \gamma + \mathcal{O}(N^{-1}),$$

dalla quale deduciamo una formula precisa per le somme parziali della serie armonica. Se la formula dei trapezi avesse solo questa conseguenza non l'avrei inclusa in questo articolo, ma invece possiamo usarla per indagare cosa succede quando conside-

riamo $k < -1$: i nostri calcoli valgono quando k è reale, non necessariamente intero. In questo caso la serie, estesa a *tutti* gli interi positivi, converge a $\zeta(-k)$, dove ζ indica la funzione zeta di Riemann. Usiamo la notazione standard

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$$

nel semipiano $\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) > 1\}$, dove la serie è puntualmente convergente per il criterio integrale per le serie. Storicamente questa serie è stata studiata in dettaglio da Eulero nel XVIII secolo, per valori reali della variabile, ma era già comparsa nel secolo precedente, per esempio nel problema di Basilea: il matematico bolognese Pietro Mengoli ha chiesto infatti quanto vale $\zeta(2)$, chiedendo di esprimerne il valore in modo finito per mezzo di quantità note; Eulero dimostrò che $\zeta(2) = \pi^2/6$, cosa che al giorno d'oggi si ottiene come corollario di varie proprietà delle serie di Fourier.

Per $x > 1$ (non necessariamente intero), $M = 1$ ed $N \in \mathbb{N}^*$ la formula (15) con $f(t) = t^{-x}$ dà

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} &= \int_1^N \frac{dt}{t^x} - x \int_1^N \frac{\phi(t)}{t^{x+1}} dt + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N^x}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} \left(1 - N^{1-x}\right) - x \int_1^N \frac{\phi(t)}{t^{x+1}} dt + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N^x}\right). \end{aligned}$$

Dato che $x > 1$ per ipotesi, possiamo prendere il limite per N che tende all'infinito, ottenendo

$$\zeta(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \frac{1}{x-1} - x \int_1^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^{x+1}} dt + \frac{1}{2}.$$

Questa cosa è vera in realtà se al posto di x scriviamo un qualunque numero complesso $z = x + iy$, purché $\Re(z) = x > 1$. La formula qui sopra dà il *prolungamento analitico* della funzione zeta di Riemann all'insieme più ampio $\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) > 0\} \setminus \{1\}$ con

$$(14) \quad \zeta(z) = \frac{1}{z-1} - z \int_1^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^{z+1}} dt + \frac{1}{2}.$$

Infatti l'integrale a destra converge in questo semipiano poiché ϕ è una funzione limitata; in effetti, sfruttando il fatto che ϕ ha media nulla su ogni intervallo di lunghezza 1, questa stessa formula dimostra che questo prolungamento è valido nell'insieme ancora più ampio $\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) = x > -1\} \setminus \{1\}$.

Per inciso, l'ultima formula mostra che ζ ha un polo semplice con residuo 1 in $z = 1$ e, con qualche calcolo, che vicino ad 1 vale lo sviluppo $\zeta(z) = (z-1)^{-1} + \gamma + \mathcal{O}(|z-1|)$.

L'interesse della formula (14) non si esaurisce qui: nel semipiano $\{z \in \mathbb{C}: \Re(z) < 0\}$ vale l'identità

$$\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} = -z \int_0^1 \frac{\phi(t)}{t^{z+1}} dt,$$

cosicché in definitiva nella striscia $\{z \in \mathbb{C}: -1 < \Re(z) < 0\}$ si ha

$$\zeta(z) = -z \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^{z+1}} dt.$$

Perché ci siamo spinti così in là, rispetto al punto da cui siamo partiti? Perché facendo un piccolo passo ulteriore “scopriamo” una cosa non scontata: per la precisione, è opportuno dire che la giustificazione dei passaggi che seguono non è immediata, ma si può dare. Ricordiamo lo sviluppo in serie di Fourier

$$\phi(x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}.$$

Se introduciamo questo sviluppo nella formula precedente e scambiamo formalmente serie e integrale troviamo

$$\zeta(z) = \frac{z}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{t^{z+1}} dt.$$

Prendiamo $y = 2\pi nt$ e cambiamo la variabile nell'integrale:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{z}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(2\pi n)^z}{n} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y^{z+1}} dy \\ &= \frac{z}{\pi} (2\pi)^z (-\Gamma(-z)) \sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right) \zeta(1-z), \end{aligned}$$

per una delle tante proprietà della funzione Γ di Eulero. La cosa più importante, al di là della presenza della funzione Γ , è il fatto che questa formula mostra una possibile connessione fra i valori che ζ assume nei punti z ed $1-z$. Naturalmente c'è un passaggio non pienamente giustificato, cioè lo scambio tra integrale e serie, ma questa argomentazione è molto interessante perché fornisce evidenza per l'equazione funzionale soddisfatta dalla funzione zeta, e cioè il fatto che sussista una

relazione tra i valori di $\zeta(z)$ e $\zeta(1-z)$. Esistono una decina di dimostrazioni dell'equazione funzionale, ma la cosa più sorprendente dal mio punto di vista è immaginare come possa essere stata scoperta da Riemann.

Eulero conosceva la connessione fra $\zeta(2k)$, dove k è un intero positivo, e i numeri di Bernoulli e sapeva che $\zeta(2k)\pi^{-2k} \in \mathbb{Q}$. Più precisamente, Eulero ha dimostrato che vale la rappresentazione $\zeta(2k) = 2^{2k-1}(-1)^{k+1}\beta_{2k}\pi^{2k}(2k)!^{-1}$ per $k \in \mathbb{N}^*$, dove i β_k sono i numeri di Bernoulli definiti nella formula (16) dell'Appendice B. Nel suo libro sulla funzione zeta, Edwards ipotizza che Riemann sia stato condotto alla scoperta dell'equazione funzionale dalla ricerca di una dimostrazione alternativa di questa relazione scoperta da Eulero. Probabilmente quest'ultimo conosceva una versione dell'equazione funzionale, senza una dimostrazione formale della sua correttezza.

10. – Conclusioni

Siamo partiti da un problema elementare che ha origine nella notte dei tempi, e abbiamo visto come vari tentativi di soluzione ci portino a “scoprire” aree della matematica quali la combinatoria, l'analisi numerica, a introdurre nuove funzioni definite mediante opportune serie di potenze, e perfino ad immaginare una proprietà molto importante della funzione zeta di Riemann.

A La formula di Euler-MacLaurin

Con $\{x\}$ indichiamo la *parte frazionaria* del numero reale x .

Teorema 8 Sia $f: (x, y] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 . Allora

$$\begin{aligned} \sum_{x < n \leq y} f(n) &= \int_x^y f(t) dt + \\ &+ \int_x^y \{t\} f'(t) dt - \{y\} f(y) + \{x\} f(x). \end{aligned}$$

La dimostrazione si può dare osservando che se questa formula vale sugli intervalli $(x, y]$ ed $(y, z]$ allora vale sull'intervallo $(x, z]$. Se l'intervallo $(x, y]$ non contiene interi il primo membro vale 0; posto $n = [x] = [y]$, si ha che $\{t\} = t - n$ su tutto l'inter-

vallo (x, y) ed è sufficiente integrare per parti per verificare che anche il secondo membro vale 0. Se invece esiste un intero $n_0 \in (x, y]$ il primo membro vale $f(n_0)$ mentre per valutare il secondo membro bisogna spezzare il secondo integrale sui due sottointervalli $(x, n_0]$ ed $(n_0, y]$, tener conto del fatto che $\{t\}$ vale $t - n_0 + 1$ e $t - n_0$ rispettivamente e poi integrare per parti e semplificare.

Posto $\phi(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$ la formula qui sopra diventa

$$\sum_{x < n \leq y} f(n) = \int_x^y f(t) dt + \int_x^y \phi(t) f'(t) dt + \frac{1}{2}(f(y) - f(x)) - \{y\}f(y) + \{x\}f(x).$$

Questa è una versione della “formula dei trapezi” che nel nostro caso è utile perché mostra da dove proviene il termine “spurio” $\frac{1}{2}N^k$ presente nella formula per p_k . Come abbiamo notato per inciso nel §5, c’è la possibilità di integrare ϕ se $f \in C^2$, oppure di sostituire la serie di Fourier per ϕ come abbiamo fatto nel §9. Non entriamo nel dettaglio per brevità.

Una semplificazione verrà dal fatto che useremo questa formula esclusivamente per valori interi di x ed y ; preso $x = M$ ed $y = N$, dove $M, N \in \mathbb{N}$ con $M \leq N$, e aggiungendo $f(M)$ ad ambo i membri abbiamo dunque

$$(15) \quad \sum_{n=M}^N f(n) = \int_M^N f(t) dt + \int_M^N \phi(t) f'(t) dt + \frac{1}{2}(f(M) + f(N)).$$

Esistono versioni più raffinate di questa formula in cui compaiono come coefficienti proprio i numeri di Bernoulli che vedremo nel prossimo paragrafo. Queste sono indispensabili nell’analisi numerica della funzione zeta; vedi Edwards [1], Capitolo 6.

B Numeri e polinomi di Bernoulli

Ricordiamo che non esiste una convenzione univoca sulla definizione dei numeri di Bernoulli; per gli

scopi di questo articolo ci atteniamo a questa: i numeri β_n sono quelli che compaiono esplicitamente nel Teorema di Faulhaber 7.

Definizione 9 (Numeri di Bernoulli) *I numeri di Bernoulli β_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor*

$$(16) \quad \frac{z}{e^z - 1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}z + \frac{\beta_2}{2!}z^2 + \frac{\beta_3}{3!}z^3 + \dots$$

valido per $|z| < 2\pi$.

In particolare, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = -\frac{1}{30}$, $\beta_5 = 0$ e $\beta_6 = \frac{1}{42}$. In generale $\beta_{2k+1} = 0$ per $k \in \mathbb{N}^*$: infatti, la funzione

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

è pari, e quindi $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ mentre per $k \geq 1$ tutti i coefficienti β_{2k+1} sono nulli. Vediamo anche in questo caso comparire il coefficiente $\frac{1}{2}$ che abbiamo già incontrato tante volte sulla nostra strada.

In effetti, la funzione $z/(e^z - 1)$ o sue piccole varianti compaiono in una delle dimostrazioni dell’equazione funzionale della funzione zeta di Riemann: la sua presenza in questo contesto, dunque, non è per niente casuale o accidentale.

I coefficienti β_k soddisfano varie relazioni di ricorrenza che permettono di calcolarli in successione: qui ci limitiamo ad affermare che

$$\sum_{r=0}^k \binom{k+1}{r} \beta_r = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0; \\ 0 & \text{se } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Questa è una conseguenza del Teorema di Faulhaber con $N = 1$ e di semplici proprietà dei coefficienti binomiali.

I polinomi di Bernoulli sono definiti come i coefficienti nello sviluppo di Taylor

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k(x) \frac{t^k}{k!},$$

che generalizza quello dei numeri di Bernoulli definiti sopra; infatti $\beta_k = B_k(0)$. Fra le tante proprietà

di questi polinomi, c'è il fatto che B_k è univocamente determinato come soluzione della relazione

$$(17) \quad \int_x^{x+1} B_k(t) dt = x^k,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e da questa segue che per $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$S_k(N) = \int_0^{N+1} B_k(t) dt = \frac{B_{k+1}(N+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}.$$

Come vediamo, numeri e polinomi di Bernoulli sono intrinsecamente legati al problema che stiamo studiando.

C Le funzioni ipergeometriche

Nel §4 abbiamo introdotto alcuni polinomi di forma speciale che ci hanno consentito di trovare un procedimento molto indiretto per determinare i polinomi p_k . Le corrispondenti serie si chiamano funzioni ipergeometriche e hanno proprietà simili a quelle che abbiamo visto sopra. Per cominciare, poniamo

$$F_k(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n} z^n.$$

Si verifica facilmente che $F'_k(z) = (k+1)F_{k+1}(z)$; in effetti, $F_k(z) = (1-z)^{-k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Questa è una versione più “comoda” di una relazione che abbiamo usato per calcolare in modo apparentemente non combinatorio il valore di p_0 , p_1 e p_2 . Se diamo la definizione qui a destra vediamo che non è più necessario che k sia intero, pur di dare una definizione più generale del coefficiente binomiale.

Definizione 10 (Simbolo di Pochhammer) Per $n \in \mathbb{N}$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$ poniamo

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $(1)_n = n!$ e che $\binom{n+k}{n} = (k+1)_n/n!$.

Definizione 11 (Funzione ipergeometrica) Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ con $\gamma \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ allora per $z \in \mathbb{C}$ definiamo

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

La serie converge per $|z| < 1$.

In particolare, $F_k(z) = {}_2F_1(k+1, 1; 1; z)$ e la relazione $F'_k(z) = (k+1)F_{k+1}(z)$ segue dai teoremi generali sulle funzioni ipergeometriche. Questo insieme di funzioni contiene come casi speciali molte funzioni standard dell'analisi matematica (serie geometrica, esponenziale, logaritmo, ...) e trova innumerevoli applicazioni in tutti i campi della matematica applicata.

D La funzione generatrice dei numeri di Fibonacci

Poniamo come di consueto $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ed $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. A questa successione associamo la sua *funzione generatrice*, cioè la serie di potenze

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n.$$

Poiché $f_n \leq 2^n$, come si vede immediatamente per induzione, il raggio di convergenza della serie vale almeno $\frac{1}{2}$. Dunque, in un disco di $\mathbb{C}$ di centro l'origine e raggio positivo abbiamo

$$\begin{aligned} (z + z^2)F(z) &= \sum_{n \geq 0} f_n z^{n+1} + \sum_{n \geq 0} f_n z^{n+2} \\ &= \sum_{n \geq 1} f_{n-1} z^n + \sum_{n \geq 2} f_{n-2} z^n \\ &= f_0 z + \sum_{n \geq 2} (f_{n-2} + f_{n-1}) z^n \\ &= \sum_{n \geq 2} f_n z^n = F(z) - f_0 - f_1 z = F(z) - z. \end{aligned}$$

Tutte le operazioni sono legittime in un opportuno disco chiuso di raggio positivo.

Semplificando

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Posto $\psi_1 = (-1 - \sqrt{5})/2$ e $\psi_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$ le due radici reali del polinomio $z^2 + z - 1$, esistono numeri reali A e B tali che

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{A}{\psi_1 - z} + \frac{B}{\psi_2 - z} = \\ &= \frac{A}{\psi_1} \cdot \frac{1}{1 - (z/\psi_1)} + \frac{B}{\psi_2} \cdot \frac{1}{1 - (z/\psi_2)}. \end{aligned}$$

In effetti, $A = -\psi_1/(\psi_2 - \psi_1)$ e $B = \psi_2/(\psi_2 - \psi_1)$. È ora possibile espandere le due frazioni a destra come serie geometriche nel dominio $|z| < \min(|\psi_1|, |\psi_2|) = \psi_2$, ottenendo

$$F(z) = \frac{1}{\psi_2 - \psi_1} \left(\frac{1}{1 - (z/\psi_2)} - \frac{1}{1 - (z/\psi_1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\psi_2 - \psi_1} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{\psi_2^n} - \frac{1}{\psi_1^n} \right) z^n$$

e con qualche breve calcolo si trovano le formule di Binet, valendosi ancora una volta del principio di identità delle serie di potenze, dato che $\psi_2 - \psi_1 = \sqrt{5}$, $\psi_1 = -\phi$ e $\psi_2 = \phi^{-1}$, dove ϕ è la sezione aurea.

E Riferimenti utili

Articoli e libri. La dimostrazione del Teorema di Levy 2 e le considerazioni sui fattori dei polinomi p_k nel §7 sono adattate dagli articoli di Levy [3]. La presente trattazione risulta semplificata perché diamo per prima cosa una dimostrazione combinatoria del Teorema 1. La dimostrazione del Teorema di Faulhaber 7 e le definizioni dell'Appendice B sono sviluppati a partire da Hardy & Wright [2], §7.9. La teoria della funzione zeta, e le sue applicazioni ai numeri primi che qui abbiamo totalmente trascurato per evidenti motivi, si trova nel libro di Edwards [1]; si veda in particolare il Capitolo 6 per un approfondimento di quello che abbiamo visto qui a proposito

della formula di Euler-MacLaurin e della sua versione più generale che contiene numeri e polinomi di Bernoulli. La sua personale congettura su come Riemann sia stato condotto alla scoperta dell'equazione funzionale si trova a pagina 12. Utili considerazioni su alcune questioni formali sulla dimostrazione di identità si trovano in Petkovšek, Wilf, Zeilberger [4] e in Wilf [5].

Siti web. Possono integrare le considerazioni di questo articolo queste pagine di Wikipedia.

- Teorema di Nicomaco:
https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Nicomaco
- Gnomone:
<https://it.wikipedia.org/wiki/Gnomone>
- Numeri di Bernoulli:
https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number
- Polinomi di Bernoulli:
https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_polynomials

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] H. M. EDWARDS, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974, Dover Reprint 2001.
- [2] G. H. HARDY & E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, sesta ed., Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [3] L. S. LEVY, *Summation of the series $1^n + 2^n + \dots + x^n$ using elementary calculus*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 840-847. *Corrigendum*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 987.
- [4] M. PETKOVŠEK, H. S. WILF, & D. ZEILBERGER, *A = B*, A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996. Disponibile dall'indirizzo <https://www.math.upenn.edu/wilf/>.
- [5] H. S. WILF, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994, Disponibile dall'indirizzo <https://www.math.upenn.edu/wilf/>.



Alessandro Zaccagnini

Alessandro Zaccagnini è professore di Analisi Matematica a Parma, ma la sua attività di ricerca è concentrata nella Teoria Analitica dei Numeri, che studia principalmente le proprietà dei numeri primi. Oltre all'attività di ricerca, ha al suo attivo qualche decina di articoli divulgativi, compresi molti su rete, e ha un suo canale YouTube per fare divulgazione in modo meno tradizionale.

Triangoli, icosaedri e cupole geodetiche

GIUSEPPE CONTI

Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze

E-mail: giuseppe.conti@unifi.it

RAFFAELLA PAOLETTI

Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze

E-mail: raffaella.paoletti@unifi.it

Sommario: *Le cupole geodetiche, poliedri convessi di forma quasi sferica o parti di essi, sono state oggetto di grande attenzione nel ventennio compreso fra le metà degli anni Cinquanta e Settanta del secolo scorso, soprattutto grazie a Richard Buckminster Fuller. Dopo un boom edilizio, specialmente negli Stati Uniti, il loro interesse costruttivo è declinato ma le loro caratteristiche geometriche, studiate da vari matematici, hanno inaspettatamente trovato applicazioni in altri campi delle Scienze (Biologia, Chimica) fin dalla metà degli anni Cinquanta e sono tuttora alla base di modelli, oggetto di ricerche attuali. Anche in campo ingegneristico-architettonico, col rinato interesse per le “grandi” strutture reticolari, esse vengono analizzate e a volte prese come spunto. In questo articolo, dopo aver riassunto la storia della loro ideazione e delle varie applicazioni nelle Scienze, ne descriviamo le principali caratteristiche geometriche ed i procedimenti geometrici più usati per la loro costruzione.*

Abstract: *Geodesic domes, convex polyhedrons with almost spherical shape or parts of them, were the subject of great attention in the twenty years between the mid-1950s and the 1970s, especially thanks to Richard Buckminster Fuller. After a building boom, mostly in the United States, their construction interest declined but their geometric characteristics, studied by various mathematicians, have unexpectedly found applications in other fields of science (Biology, Chemistry) since the mid-1950s and are still underlying models, the subject of current research. Even in the engineering-architectural field, with the revived interest in “large” reticular structures, they are analyzed and sometimes taken as inspiration. In this article, after summarizing the history of their conception and the various applications in science, we describe their main geometric characteristics and the geometric procedures most used for their construction.*

1. – Motivazioni

Il triangolo, poligono col numero minimo di vertici e lati, non ha diagonali e questo lo rende una figura **rigida** o **indeformabile**: tre aste unite a triangolo formano una struttura che non si deforma anche se le connessioni alle estremità non sono completamente rigide. Una poligonale con un numero maggiore di lati costruita in modo analogo è deformabile, ma diventa rigida inserendo ulteriori aste per “triango-

larla”. Questa proprietà è stata sfruttata fin dall’antichità nell’ambito della statica edilizia, in particolare per le coperture; a partire dal quarto secolo d.C., le travi orizzontali delle coperture vengono sostituite da semplici capriate in legno formate da due *puntoni*; successivamente, per aumentarne la resistenza, viene introdotta la *catena* (elemento orizzontale) per passare poi a capriate più articolate con *monaco* ed eventuali *saettoni* per una triangolazione più fitta. Nel Medioevo queste coperture vengono usate per spazi ampi come quelli dei monasteri e delle cattedrali, in alcuni casi con risultati considerati ancora oggi notevoli.

Accettato: 6 aprile 2025.

Intorno alla metà dell'Ottocento si è fatto ricorso a strutture reticolari e, successivamente, alle *travature reticolari*: una sorta di “sandwich” formato da due sistemi continui paralleli (*correnti*) che racchiudono una struttura reticolare, nella maggior parte dei casi con reticolo triangolare. Queste strutture hanno permesso di coprire grandi spazi e sono (state) utilizzate, ad esempio, per coperture industriali oppure ponti e passerelle; il loro ampio uso è dovuto alla loro resistenza a forti carichi pur avendo un peso ed un costo ridotto rispetto a molte altre soluzioni. Fra i numerosi esempi di strutture reticolari ricordiamo gli iconici *Forth Rail Bridge* di Edimburgo (lungo 2,5km, opera di Fowler e Baker, 1890) e la *Torre Eiffel* (Parigi, 1889).

Intorno alla metà del Novecento vengono sviluppati altri modelli di “triangolazione” ed uno dei più importanti è sicuramente quello delle **cupole geodetiche**: (porzioni di) poliedri convessi inscritti in una sfera i cui spigoli (rettilinei) giacciono, approssimativamente, lungo circonferenze massime (le *linee geodetiche* della sfera). Le facce di queste cupole sono, in genere, dei triangoli. La struttura ottenuta tende a ripartire gli sforzi in modo uniforme sulle aste, garantendo rigidezza e staticità a fronte di un peso contenuto.



FIGURA 1 – Osservatorio di Maragheh (Azerbaijan).

Foto di: Elmju – Opera propria, CC BY-SA 3.0

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10027825>

Dato che la sfera permette di racchiudere il massimo volume a parità di superficie, la copertura a forma (di porzione) sferica permette di usare minor materiale a parità di volume racchiuso. Ad esempio, una casa cubica con lato di misura l racchiude un volume l^3 ed ha una superficie esterna $5l^2$; una semisfera di raggio $\sqrt{\frac{5}{2\pi}}l$ ha la stessa superficie

esterna ma racchiude un volume $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2\pi}}l^3$, circa una volta e mezzo quello del cubo⁽¹⁾.

Progettata dallo studio *Synergetics* di Richard Buckminster Fuller, nel 1958 viene costruita a Baton Rouge (Louisiana) per la Union Tank Car Company una cupola di 118mt di diametro; all'epoca è la copertura più ampia di uno spazio completamente libero all'interno⁽²⁾.

Prima di vedere nel dettaglio la genesi e la costruzione di queste cupole, osserviamo alcune delle “grandi” costruzioni contemporanee realizzate con strutture reticolari triangolari.

Tacoma Dome, cupola non geodetica; inaugurata nel 1983, con i suoi 160mt di diametro è la cupola pubblica più grande al mondo. Nel 1983 era anche la copertura in legno più grande al mondo.

Queen Elizabeth II Great Court, copertura della corte del British Museum inaugurata nel 2000 e progettata dallo studio *Foster & partners*; formata da 3212 pannelli di vetro triangolari, con forme diverse, è la piazza coperta più grande d'Europa.

Sia il grattacielo **The Gherkin** (Londra, 2004) che la **Hearst Tower** (New York, 2006), progettati da Norman Foster, si caratterizzano per una struttura a maglie triangolari detta *diagrid* (contrazione dei termini *diagonal* e *grid*) che si eleva per oltre 180mt. Queste costruzioni sono i primi esempi di applicazione della *diagrid* ad edifici molto alti.

Nel 2016 la *Carlo Ratti Associati* presenta il progetto “avveniristico” **The Mile**: si tratta di un giardino verticale alto 1609mt (un miglio appunto) basato su una struttura reticolare triangolata, larga 20mt, che si avvolge a forma di elicoide.

Ovviamente la statica delle opere menzionate è estremamente complessa, ma quelle a cupola geodetica devono sostanzialmente la loro stabilità ad un

⁽¹⁾ Per completezza osserviamo anche che, ovviamente, la superficie di base della semisfera è $5/2$ più grande di quella del cubo. Negli Stati Uniti di metà Novecento, dove vengono costruite la maggior parte delle cupole, questo parametro è secondario rispetto al risparmio di materiale.

⁽²⁾ Nel 1990 l'edificio viene venduto alla Kansas City Southern Railway che poi lo demolirà a partire dal 2007, nonostante le numerose proteste popolari. Nel 1961, sempre per la Union Tank Car Company, viene costruita una cupola uguale a questa a Wood River, Illinois, ancora esistente sotto altra proprietà.

teorema di matematica: il **Teorema di rigidità** di **Augustin Louis Cauchy**, il quale afferma che un poliedro convesso è indeformabile (come struttura nello spazio) se le sue facce (che sono figure piane) sono rigide⁽³⁾.

Intorno al 1940, **Aleksandr Danilovič Aleksandrov** dimostrò che tutte le superfici poliedriche convesse triangolate sono rigide se non contengono vertici all'interno delle facce naturali piatte⁽⁴⁾.

La questione se tutti i poliedri, anche quelli non convessi, fossero rigidi o meno è rimasta aperta a lungo⁽⁵⁾. Nel 1975 **Herman Gluck** ha dimostrato che quasi tutti i poliedri sono rigidi⁽⁶⁾.

A quel tempo, molti credevano che tutti i poliedri fossero rigidi (seguendo una congettura di Eulero del 1766), ma nel 1977 **Robert Connelly** sorprese la comunità scientifica costruendo un poliedro non rigido nello spazio tridimensionale; tale poliedro è a facce triangolari ma, naturalmente, non è convesso⁽⁷⁾. Notiamo che, per il risultato di Gluck, si trattava di un esempio piuttosto raro tra i poliedri.

2. – Richiami sui poliedri

Il termine **poliedro** deriva dalle parole greche *poly* (molti) e *hedra* (sede) ma, nonostante questi solidi siano stati studiati fin dall'antichità (anche civiltà pre-elleniste come quelle egizia, babilonese e cinese, oltre agli stessi greci, hanno calcolato il volume di un tronco di piramide), una definizione matematica di poliedro è stata data solo in secoli più recenti. Senza entrare nel merito delle “varie” definizioni di poliedro che sono attualmente usate, definiamo **poliedro convesso** la regione di spazio convessa delimitata da

⁽³⁾ Vedi: Cauchy A. (1813), *Sur les polygones et polyèdres*, J. Éc. Polytech., IX, pp. 87-99.

⁽⁴⁾ Vedi: Aleksandrov, A. D. (Traduzione di Zalgaller 2006), *Convex Polyhedra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer.

⁽⁵⁾ Il problema della rigidità (globale e infinitesimale) dei poliedri e delle strutture articolate è stato oggetto di studio di diverse branche della Matematica.

⁽⁶⁾ Vedi: Gluck H. (1975), *Almost all simply connected closed surfaces are rigid*, Lecture Notes in Math. 438, Geometric Topology, Springer-Verlag, pp. 225-239.

⁽⁷⁾ Vedi: Connelly R. (1977), *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., Tome 47, pp. 333-338.

un numero finito di facce poligonali in modo che valgano le seguenti tre condizioni:

- 1) due facce sono disgiunte oppure si intersecano in uno spigolo o in un vertice,
- 2) ogni spigolo appartiene esattamente a due facce,
- 3) due facce adiacenti non sono complanari.

La porzione di spazio delimitata dai due semipiani che contengono due facce adiacenti viene chiamata *diedro*, mentre tutte le facce che si intersecano in uno stesso spigolo determinano un *angolo solido* o *angoloide*.

Si chiama **grado (o valenza) di un vertice** il numero degli spigoli del poliedro che hanno quel vertice come estremo. Osserviamo che lo stesso numero rappresenta anche il numero delle facce a cui appartiene quel vertice.

Un **poliedro** convesso si dice **regolare** se tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti tra loro e tutti i vertici hanno lo stesso grado.

Come è noto, si possono costruire poligoni regolari con un numero n di lati per ogni intero $n \geq 3$, ma esistono solo 5 poliedri regolari, detti **solidi platonici** perché Platone ne parla esplicitamente nella sua opera *Il Timeo* [Fr].

Tetraedro, cubo e dodecaedro erano già noti alla scuola pitagorica ed in seguito i greci introdussero l'ottaedro e l'icosaedro [Br]; nel 410 a.C. Teeteto dimostrò che i poliedri regolari sono soltanto questi cinque [Br], mentre Platone legò questi solidi agli elementi della Natura: il cubo alla Terra (stabilità), il tetraedro al Fuoco (ha il minor numero di lati), l'ottaedro all'Aria (il più mobile dei solidi), l'icosaedro all'Acqua (ha il maggior numero di lati) e il dodecaedro all'Universo (ha 12 facce come le case dello zodiaco). Si ipotizza che gli studi degli antichi greci sui poliedri siano nati dall'osservazione della natura: infatti, cubo, ottaedro e dodecaedro (quest'ultimo non regolare) sono tra le forme dei cristalli di fluorite e pirite, mentre altri solidi (fra cui l'icosaedro) sono visibili negli scheletri di alcuni animali marini come i Radiolari [DA][Cr].

Non è chiaro se i solidi platonici siano stati oggetto di studio di popolazioni precedenti: ad esempio, sono stati ritrovati in Scozia (ma anche in Inghilterra e Irlanda) vari manufatti in pietra risalenti al neolitico (circa 3000-2500 a.C.) che hanno la forma di sfere intagliate in modo da far risultare vari “pomelli” sporgenti.



FIGURA 2 – Foto di: Johnbod [licenza CC]
https://en.wikipedia.org/wiki/Carved_stone_balls#/media/File:Room_51,_British_MuseumDSCF6620.jpg



FIGURA 3 – Autore: Johnbod [licenza CC].
https://en.wikipedia.org/wiki/Carved_stone_balls#/media/File:Kelvingrove_Art_Gallery_and_MuseumDSCF0239_11.JPG

Il loro uso è ancora incerto e dibattuto fra gli studiosi; il numero di “pomelli” è variabile da 3 a 160 ed alcuni sono decorati con incisioni. Potrebbero essere stati ideati per motivi mistico-religiosi oppure decorativi o anche dall’osservazione della natura. Benché alcuni abbiano una forma molto simile ai solidi platonici, gli studiosi ritengono che non siano frutto di studi matematici ma siano stati realizzati così allo scopo di distribuire in maniera regolare i vari pomelli.

Sono invece dichiaratamente a forma di dodecaedro e icosaedro numerosi manufatti bronzei di epoca romana, datati dal II al IV secolo d.C. e rinvenuti soprattutto in Francia e Germania; si suppone siano stati considerati oggetti di valore ma il loro impiego non è chiaro, anche perché i manufatti hanno dimensioni diverse (da 4 a 10cm). Interessante una recente ipotesi [Sp] che vede il dodecaedro usato come telemetro (per gli appezzamenti agricoli).



FIGURA 4 – Foto di: User Itub [licenza CC]
https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:Roman_dodecahedron.jpg



FIGURA 5 – Foto di: User Kleon3 [licenza CC]
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2018_Rheinisches_Landesmuseum_Bonn,_Dodekaeder_%26_Ikosaeder.jpg

Nel IV secolo d.C. Pappo d’Alessandria elencò e studiò una nuova famiglia di poliedri, che attribuì ad Archimede [Br] e che sono chiamati oggi **poliedri archimedei**. Questi sono dei poliedri convessi in cui le facce sono dei poligoni regolari (dunque gli spigoli del solido sono tutti congruenti), tutti i vertici hanno lo stesso grado, ma in modo che il solido non sia né un poliedro platonico né un prisma o un antiprisma. Per ottenere un poliedro archimedeo si devono, quindi, usare almeno due tipi diversi di poligoni regolari;

questi solidi sono quelli più regolari dopo quelli platonici e per questo sono detti anche **poliedri semiregolari**. Ricordiamo che **prismi** e **antiprismi** sono poliedri formati da due poligoni con n lati (le basi), uguali e paralleli, collegati fra loro da n parallelogrammi (prismi) o da triangoli isosceli (antiprismi; in questo caso i triangoli sono $2n$ e ogni triangolo ha due vertici su una delle basi ed il terzo vertice sull'altra base). Se i poligoni delle basi sono regolari e i parallelogrammi del prisma sono quadrati, oppure i triangoli dell'antiprisma sono equilateri, si hanno due famiglie infinite di solidi "quasi regolari" che non hanno però molte simmetrie.

I solidi archimedei sono 13 e sono tutti inscrittibili in una sfera, ma non circoscrivibili [C-R]. Cinque di questi possono essere ottenuti per *troncamento* (ovvero tagliando i vertici) dei solidi platonici in modo che gli spigoli del solido così ottenuto siano tutti uguali alla terza parte nei poliedri a facce triangolari, poco meno negli altri due, degli spigoli del poliedro di partenza (vedi [Ba]). Ne è un esempio l'**icosaedro troncato**, con facce pentagonali ed esagonali, utilizzato dalla ditta Adidas per modellare il famoso pallone da calcio *Telstar* alla fine degli anni 1960 [C-T-C].



FIGURA 6 – Foto di User Zac Allan
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Adidas_Telstar_Mexico_1970_Official_ball.jpg

Altri due poliedri archimedei si ottengono eseguendo il troncamento a metà degli spigoli dei solidi platonici, in modo che gli spigoli del solido ottenuto siano tutti uguali alla metà degli spigoli del poliedro di partenza. Questa costruzione dà luogo solo a due poliedri archimedei perché sia

dal cubo che dall'ottaedro si ottiene il cubottaedro, sia dal dodecaedro che dall'icosaedro si ottiene l'icosidodecaedro, mentre dal tetraedro si ottiene l'ottaedro che è un solido platonico⁽⁸⁾. Per ottenere gli altri sei poliedri archimedei si hanno differenti costruzioni. Notiamo che fra i poliedri archimedei soltanto il **cubo camuso** e il **dodecaedro camuso** sono *chirali*⁽⁹⁾.

Un poliedro convesso, le cui facce sono tutti poligoni regolari che non è né un solido platonico o archimedeo, né un prisma o antiprisma, è detto **solido di Johnson**. L'esempio più semplice di questo tipo è la piramide a base quadrata avente come facce laterali 4 triangoli equilateri. Furono scoperti da Norman Johnson [Jo] che ne elencò 92; nel 1967 Victor Zalgaller dimostrò che effettivamente sono esattamente 92.

Introduciamo adesso il concetto di **dualità** fra poliedri, di cui esistono varie definizioni. Seguendo la costruzione illustrata in [C-R], basata sulla *polarità* indotta da una sfera, possiamo associare ad ogni punto dello spazio un piano (detto **piano polare**); in tal caso il punto è detto **polo** del piano. Se il punto appartiene alla sfera, allora il suo piano polare è il piano tangente alla sfera in quel punto⁽¹⁰⁾. Si ottiene così una dualità fra punti e piani che soddisfa la legge di reciprocità: se un punto Q appartiene al piano polare di un punto P , allora il piano polare di Q contiene P . In questa corrispondenza, ad una retta passante per due punti P e Q viene associata la retta intersezione dei piani polari di P e Q . La polarità trasforma un poliedro P in un altro poliedro P^* , detto **duale** di P , in modo che ad ogni vertice/spigolo/faccia di P corri-

⁽⁸⁾ Vedremo fra poco che cubo e ottaedro, dodecaedro e icosaedro sono due coppie di solidi duali.

⁽⁹⁾ Un solido si dice **chirale** (dalla parola greca *χείρ* che significa "mano") se non è sovrapponibile, tramite rotazioni e traslazioni, alla sua immagine speculare. Esempi di oggetti chirali sono le nostre mani e i nostri piedi. La definizione di figura chirale può essere data anche nel piano; ad esempio, un triangolo scaleno è una figura piana chirale.

⁽¹⁰⁾ La polarità può essere definita anche attraverso l'inversione per raggi reciproci determinata dalla sfera: se P' è il corrispondente nell'inversione di un punto P , allora il piano polare è il piano per P' avente come vettore normale PP' .

sponda faccia/spigolo/vertice di P^* con le seguenti inclusioni:

- 1) se una faccia F di P contiene uno spigolo S , allora il vertice di P^* trasformato di F è contenuto nello spigolo trasformato di S ;
- 2) se V è un vertice di P contenuto in uno spigolo S , allora la faccia di P^* trasformata di V contiene lo spigolo trasformato di S .

Il duale del duale di un poliedro è il poliedro iniziale.

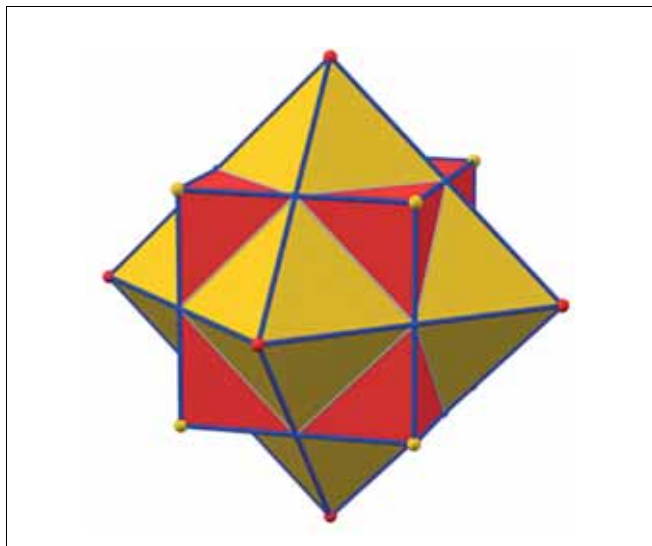


FIGURA 7 – Autore T.Piesk Il duale di un cubo (in rosso) è l'ottaedro (in giallo). La costruzione del duale in questo caso è stata fatta rispetto alla sfera tangente a tutti gli spigoli del cubo (intersfera).

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polyhedron_pair_6-8.png

Poiché siamo interessati a poliedri convessi inscrivibili in una sfera, possiamo definire la polarità rispetto alla sfera circoscritta al poliedro, ottenendo in questo modo un metodo più semplice per costruire il poliedro duale. Infatti, in questo caso il poliedro duale è dato dall'intersezione dei piani tangenti alla sfera nei punti che sono vertici del poliedro di partenza; viceversa, il duale di un poliedro circoscrittibile alla sfera ha come vertici i punti di tangenza con la sfera inscritta.

Si può ottenere il duale dei poliedri platonici anche con una costruzione più semplice: consideriamo i centri delle facce di questi solidi e congiungiamo con un segmento due centri che appartengono a facce adiacenti. Si ottiene così un poliedro simile a quello ottenuto con la costruzione mediante la sfera

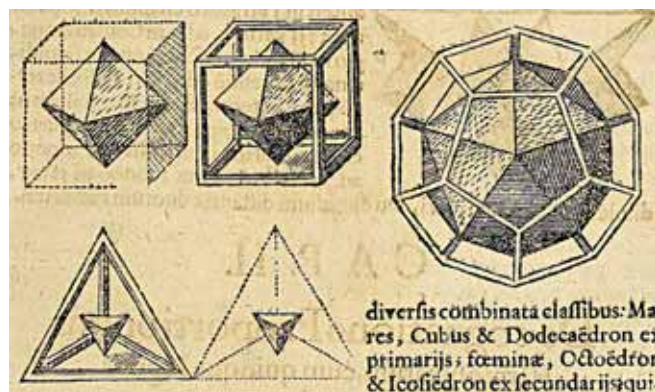


FIGURA 8 – Tratta da Harmonices Mundi di J.Kepler
<https://archive.org/details/ioanniskeplerih00kepl/page/180/mode/2up?view=theater>

circoscritta, quindi tale poliedro è il duale del solido di partenza.

Come si vede dalla Figura 8, il duale di un solido platonico è ancora un solido platonico: il duale del cubo è l'ottaedro, quello dell'icosaedro è il dodecaedro e il tetraedro è autoduale.

I duali dei poliedri archimedeei sono i **solidi** (detti anche **poliedri**) **di Catalan**, descritti nel 1865 dal matematico belga Eugène Charles Catalan. Poiché i poliedri archimedeei possono essere inscritti in una sfera, i loro duali (i poliedri di Catalan) hanno le facce tangenti alla sfera; viceversa, i duali dei poliedri di Catalan (i poliedri archimedeei) hanno per vertici i punti di tangenza delle facce alla sfera inscritta al poliedro di Catalan.

Un'altra importante classe di poliedri è data dai **poliedri di Goldberg**, che prendono il nome dall'ingegnere (appassionato di matematica) Michael Goldberg, che li descrisse nel 1937. Questi sono poliedri convessi con le seguenti caratteristiche: tutti i vertici hanno grado tre, le facce sono solo pentagoni o esagoni, possiedono tutte le simmetrie rotazionali dell'icosaedro.

Studiando problemi isoperimetrici per poliedri, Goldberg introdusse una classe di poliedri con molte simmetrie, che chiamò *medial polyhedra* [Go1, Go2]; quello con 12 facce era il dodecaedro regolare, quelli con un numero di facce maggiore erano ottenuti componendo 12 pentagoni (regolari) con esagoni. Questi solidi hanno tutte le 60 simmetrie rotazionali dell'icosaedro, che sono: l'applicazione identica, 12 rotazioni di 72° , 12 rotazioni di 144° , 20 rotazioni di 120° , 15 rotazioni di 180° ; a causa di queste simme-

trie, i pentagoni che appaiono nei poliedri di Goldberg sono tutti regolari.

In letteratura si trovano varie definizioni dei poliedri di Goldberg, che differiscono fra loro per la regolarità richiesta alle facce esagonali; in questo articolo, considereremo solo i poliedri di Goldberg aventi esagoni equilateri (ma non necessariamente regolari); quindi, i poliedri di Goldberg che tratteremo hanno tutti gli spigoli congruenti fra loro.

Il numero fisso 12 dei pentagoni in questi solidi, come già calcolato da Goldberg, è una conseguenza della **formula di Eulero**: $V - S + F = 2$. Infatti, indichiamo con F_5 e F_6 il numero delle facce pentagonali ed esagonali rispettivamente; poiché ogni spigolo è comune a due facce e in ogni vertice concorrono tre facce, si ha:

$$S = (5F_5 + 6F_6)/2, \quad V = (5F_5 + 6F_6)/3$$

Sostituendo tali valori nella formula di Eulero, si ottiene:

$$10F_5 + 12F_6 - 15F_5 - 18F_6 + 6F_5 + 6F_6 = 12,$$

da cui $F_5 = 12$.

Osserviamo che dalla precedente relazione segue anche: $V = 20 + 2F_6$. Quindi, un poliedro di Goldberg ha almeno 20 vertici e, se ne ha esattamente 20, allora non ha facce esagonali e, di conseguenza, è un dodecaedro.

Se $V = 60$ si ottiene invece l'icosaedro troncato; in tal caso $F_6 = 20$.

3. – Cupole geodetiche



FIGURA 9 – Biosfera Montreal

Foto di Eberhard von Nellenburg [licenza CC]

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mtl._Biosphere_in_Sept._2004.jpg

In letteratura, col termine *cupola geodetica* si indica di solito una griglia (semi)sferica a maglie triangolari le cui aste giacciono, approssimativamente, sulle geodetiche (ovvero i cerchi massimi) della sfera. In questo articolo, chiameremo **sfera geodetica** (o **poliedro geodetico**) un poliedro topologicamente equivalente ad una sfera, a facce triangolari, inscritto in una sfera, i cui vertici hanno grado 5 o 6 e i cui lati giacciono approssimativamente sulle geodetiche della sfera. Chiameremo **cupola geodetica** una parte di questo poliedro, ad esempio quella corrispondente ad una semisfera o ad una generica calotta sferica.

Di solito le cupole geodetiche realizzate in architettura hanno facce triangolari proprio per il citato Teorema di Cauchy: in questo modo la struttura risultante è stabile anche se le aste dell'intelaiatura non hanno connessioni completamente rigide agli estremi poiché, comunque, formano dei poligoni rigidi. Per costruire cupole geodetiche con facce non triangolari occorre rendere rigide tali facce.

In generale le aste sono realizzate con profili tubolari di sezione circolare e sono dotate alle loro estremità di appositi innesti con dei fori che permettono tramite un bullone di unirle ai vari nodi, componendo in tal modo la struttura geometrica. Le aste sono incernierate internamente sia nel piano meridiano che in quello tangente in modo tale che l'unica sollecitazione che si trasferisce da un'asta all'altra sia quella normale. Notiamo che i nodi delle cupole geodetiche possono essere schematizzati con cerniere oppure con incastri.

Nelle cupole geodetiche, gli spigoli distribuiscono gli sforzi locali sull'intera struttura; queste cupole sono concepite in modo che eventuali azioni esterne (forze), ad esempio quelle dovute ad un telo di copertura, vengano applicate solo nei nodi. Inoltre, a parità di forma, dimensioni complessive, materiale utilizzato, la loro resistenza aumenta se aumenta il numero di triangoli che le compongono; quindi, strutture più grandi sono anche più resistenti. Le deformazioni di queste strutture sono trascurabili poiché sono sollecitate principalmente a trazione oppure a compressione; tuttavia, occorre osservare che il comportamento delle forze di trazione e di compressione nelle differenti strutture geodetiche non è stato ancora completamente compreso.

Come vedremo in dettaglio più avanti, uno dei metodi più usati per costruire sfere geodetiche a facce triangolari consiste nel suddividere ogni faccia di un **icosaedro** regolare (il poliedro regolare che meglio approssima una sfera) in triangoli equilateri più piccoli e tutti uguali fra loro; successivamente dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro si proiettano tutti i vertici così ottenuti sulla sfera stessa. In ogni vertice del poliedro ottenuto concorrono 5 o 6 spigoli; perciò, i vertici sono di grado 5 o 6.

I poliedri duali di queste sfere sono poliedri a facce pentagonali o esagonali, hanno tre facce concorrenti in ogni vertice e, per come sono stati costruiti, hanno le simmetrie rotazionali di un icosaedro, quindi sono poliedri di Goldberg.

Nelle cupole geodetiche la proiezione ortogonale del centro della sfera su ciascuna faccia (triangolare) del poliedro è il circocentro del triangolo. Questa proprietà è molto utile nella costruzione della cupola e si dimostra applicando il **Teorema delle tre perpendicolari**. Infatti, siano A, B, C i vertici di una faccia F , O il centro della sfera circoscritta alla cupola e K il piede della perpendicolare condotta da O al piano in cui giace F . Nel piano contenente F , conduciamo da K la perpendicolare al lato AB e indichiamo con H il suo punto di intersezione con AB. Il piano contenente i punti O, K e H è quindi, per il teorema delle tre perpendicolari, ortogonale ad AB; in particolare, OH è ortogonale ad AB. Poiché il triangolo AOB è isoscele rispetto alla base AB e OH è l'altezza relativa a tale base, si ha che H è il punto medio di AB; quindi, KH è l'asse di AB nel piano di F . Analoghe considerazioni valgono per i lati AC e BC, quindi K è il circocentro di ABC⁽¹¹⁾.

Un altro esempio interessante di sfera geodetica si ottiene a partire dal **dodecaedro** regolare con una costruzione differente: su ogni faccia si costruisce una piramide (a base pentagonale) il cui vertice è dato dall'intersezione della sfera circoscritta al dodecaedro con la retta passante per il centro della sfera e perpendicolare alla faccia pentagonale; con questa costruzione si ha che tale piramide è retta. Il poliedro che si ottiene in questo modo ha come facce

tutti triangoli isosceli congruenti e fa parte della famiglia dei **pentacisdodecaedri**⁽¹²⁾. Notiamo che i vertici delle piramidi costruite sono i vertici dell'icosaedro duale del dodecaedro di partenza.

Un poliedro di questo tipo fu progettato da **Michelangelo Buonarroti** per il coronamento della lanterna della cupola della Sagrestia Nuova della chiesa di San Lorenzo a Firenze. Quasi sicuramente questa *palla*, come la chiama Michelangelo, è inscrittibile in una sfera. L'esecuzione di questa sfera geodetica, formata da due pezzi non saldati fra loro, fu opera dell'orafo e scultore fiorentino **Giovanni di Baldassarre** (1460-1536), specializzato nelle opere di metallo e soprannominato il **Piloto**.



FIGURA 10 – Il poliedro posto a coronamento della lanterna della Sagrestia Nuova di San Lorenzo a Firenze

<http://met.provincia.fi.it/public/images/20130117142819681.jpg>

Una curiosità: le facce di un pentacisdodecaedro sono ovviamente 60 ma, per motivi che ci sfuggono, Giorgio Vasari afferma che sono 72 [Va, p. 1223]!

Un pentacisdodecaedro è stato disegnato da Leonardo da Vinci nel libro di Luca Pacioli *Divina Proportione*; tuttavia, questo poliedro è un po' diverso da quello di Michelangelo perché nel poliedro di Leonardo le facce delle piramidi sono triangoli equilateri; quindi, il poliedro ottenuto non è convesso e non è inscrittibile in una sfera.

Esiste anche il pentacisdodecaedro circoscrivibile ad una sfera: si tratta del poliedro di Catalan duale del solido archimedeo icosaedro troncato. Le facce

⁽¹¹⁾ Notiamo che in realtà questa proprietà vale per qualunque poliedro a facce triangolari (acutangolo) inscritto in una sfera.

⁽¹²⁾ I pentacisdodecaedri sono poliedri ottenuti costruendo su ogni faccia di un dodecaedro regolare una piramide retta avente per base la suddetta faccia. Le facce di tutte queste piramidi sono triangoli isosceli congruenti fra loro.

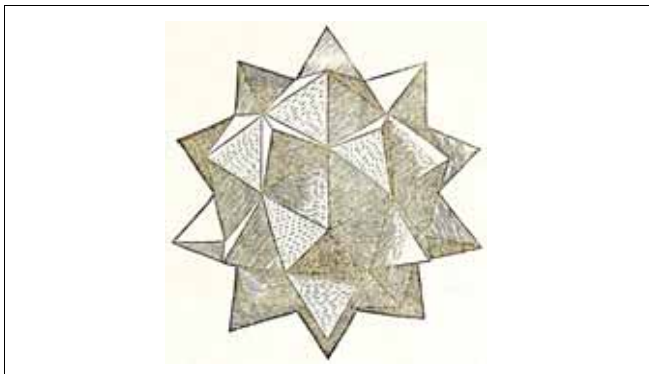


FIGURA 11 – Il pentacisdodecaedro di Leonardo da Vinci

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_divina_proportione_-_Illustration_08.jpg

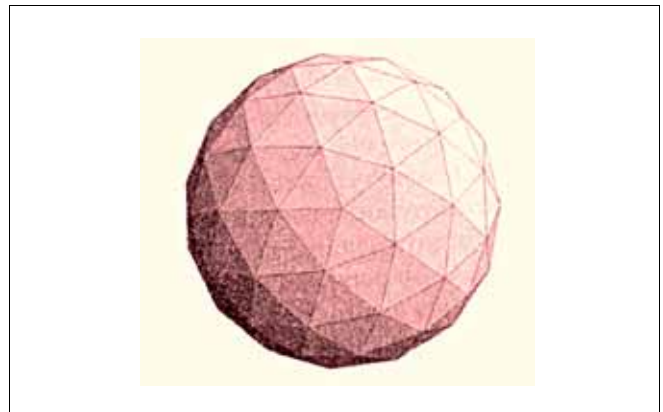


FIGURA 12 – Sfera geodetica ottenuta dall'innalzamento dell'icosaedro troncato

del pentacisdodecaedro di Catalan sono triangoli isosceli tutti uguali fra loro; si dimostra che in ogni triangolo il rapporto fra il lato obliquo e la base è circa 0,887057998, mentre l'angolo al vertice è circa $68^\circ 37' 07''$.

Anche nel pentacisdodecaedro inscritto in una sfera le facce sono triangoli isosceli tutti uguali fra loro, ma in questo poliedro il rapporto fra il lato obliquo e la base di ogni triangolo è circa 0,897999085 e l'angolo al vertice è circa $67^\circ 40' 07''$. Poiché le differenze fra i due pentacisdodecaedri (quello inscritto e quello circoscritto) sono minime, resta difficile stabilire con certezza quale sia quello di Michelangelo. Noi pensiamo che, per questioni realizzative, l'artista abbia pensato a quello inscritto.

Con un procedimento analogo a quello appena visto per costruire il pentacisdodecaedro inscritto nella sfera, si può costruire una sfera geodetica a partire da un icosaedro troncato: si proiettano i centri delle facce (che sono pentagoni o esagoni regolari) dal centro della sfera circoscritta al solido sulla sfera stessa e si costruiscono delle piramidi aventi per vertice i punti proiettati e per base la faccia di partenza. In questo caso si ottengono 12 piramidi a base pentagonale e 20 a base esagonale; quindi, la sfera geodetica ottenuta ha 270 spigoli (di 3 lunghezze diverse), 180 facce (triangoli isosceli di due tipi) e 92 vertici (di due tipi) ⁽¹³⁾.

⁽¹³⁾ Sul sito <https://mathcurve.com/polyedres/geode/geode.shtml> è mostrata una particolare tassellazione delle facce di un icosaedro che porta alla costruzione della stessa cupola geodetica.

Il procedimento costruttivo appena visto, detto anche **twinning (gemmazione)**, può essere esteso ad un qualunque poliedro inscrittibile in una sfera ed avente come facce dei poligoni regolari, non triangolari. Tuttavia, partendo da solidi diversi da quelli considerati adesso, le lunghezze dei lati del poliedro e degli spigoli delle piramidi possono essere molto diverse e dare origine, quindi, a risultati esteticamente non gradevoli. ⁽¹⁴⁾ Si evita di fare la gemmazione sulle facce triangolari perché questa produrrebbe delle “valli” e non si otterrebbe un solido convesso.

Anche se al tempo non le è stato attribuito questo aggettivo, viene spesso considerata come prima cupola “geodetica” quella (non più esistente) progettata dall'ingegnere **Walther Bauersfeld** nel

⁽¹⁴⁾ Nel caso del dodecaedro, posto $R = 1$ il raggio della sfera circoscritta al poliedro, il suo spigolo è

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}},$$

mentre il raggio della sfera inscritta è

$$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}.$$

Il lato obliquo della piramide risulta, quindi:

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}}$$

ed il rapporto fra questo lato e lo spigolo del dodecaedro vale circa 0,898.

1922 e montata sulla sommità di uno degli edifici delle fabbriche di ottica Zeiss a Jena (Germania). Consisteva in una struttura semisferica a maglie triangolari (vedi Figura 13), rivestita di cemento spruzzato che doveva servire come superficie per testare il nuovo proiettore dello *Zeiss Planetarium*. Inaugurata e chiusa nel corso del 1924 [Ga1], viene successivamente smantellata e non ne restano che poche foto. Nel 1926 viene inaugurato il secondo planetario di Jena, progettato sempre da Bauersfeld; tale cupola ha un diametro di 23 metri e contiene una sala di 261 posti. Si tratta del più antico planetario ininterrottamente operativo al mondo. Bauersfeld progetterà altre cupole ma non di tipo geodetico⁽¹⁵⁾.

Nel 1928 viene inaugurato il primo planetario di Roma, posto all'interno delle Terme di Diocleziano (ora sede del Museo Nazionale Romano), come riportato da A. Carlini e L. Tedeschini Lalli in [C-TL]. Lo schermo ed il proiettore Zeiss del planetario fanno parte del risarcimento danni della prima guerra mondiale. La griglia metallica dello schermo è tutt'ora visibile ed in [C-TL] viene evidenziata la similarità della triangolazione di questa cupola con quella (confrontabile solo in foto) della prima cupola di Jena; in particolare, si ha in entrambe l'inusuale presenza di vertici di grado 7, oltre a quelli di grado 5 e 6. Per questo motivo tali cupole non possono essere considerate geodetiche secondo la definizione data precedentemente e non possono essere ottenute proiettando una triangolazione di un solido platonico (o semiregolare) sulla sfera ad esso circoscritta. Anche O. Gaspar [Ga1, Ga2], che ha analizzato appunti e disegni di Bauersfeld recentemente ritrovati, mostra che sovrapponendo ad una foto della prima cupola di Jena le griglie ottenute suddividendo un icosaedro con 4 metodi diversi descritti in letteratura, la griglia che si adatta meglio corrisponde al metodo usato da Bauersfeld (così come ricostruito dai documenti ritrovati) ma non a quello indicato da Buckminster Fuller.

⁽¹⁵⁾ Poiché la prima cupola serve per un planetario, gli studi di Bauersfeld puntano ad una superficie il più possibile "liscia" e "sferica" da realizzare per mezzo di triangoli con aree il più possibile uguali e con poche differenze fra le lunghezze dei lati [Ga1, Ga2].

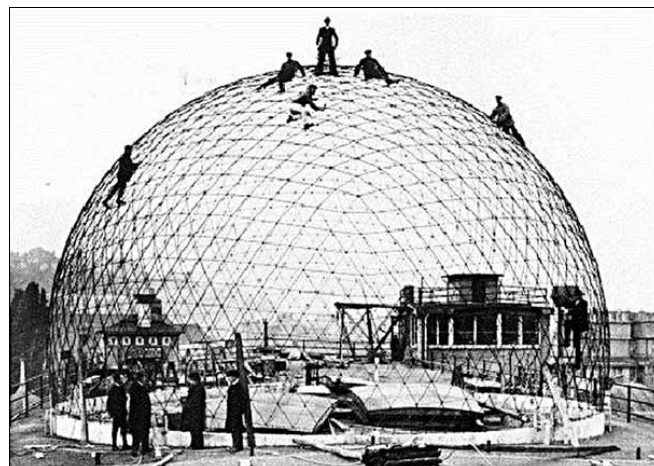


FIGURA 13 – La cupola di Jena in costruzione

[https://en.m.wikipedia.org/wiki/](https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Dome_Jena_UnderConstruction.jpg)

File:Dome_Jena_UnderConstruction.jpg

Alle cupole geodetiche viene usualmente associato il nome dal già citato architetto statunitense **Richard Buckminster Fuller** (1895 – 1983) perché è lui il primo a sviluppare in maniera sistematica l'idea di cupola geodetica a partire dal 1948 e a costruire i primi edifici con questa forma, ottenendone vari brevetti americani. Nelle estati del 1948 e 1949, Buckminster Fuller è "visiting professor" al Black Mountain College e lì con i suoi studenti sperimenta il primo esempio di cupola geodetica: una griglia semisferica di 48 piedi (circa 14,6 mt) di diametro, costruita con stecche di veneziane piegate in modo da seguire la curvatura delle geodetiche; questa struttura, però, crolla sotto il suo peso e viene ribattezzata *Supine Dome*. Nei tentativi successivi verranno usate aste rigide e varie soluzioni per le connessioni, ottenendo modelli più performanti. Nel 1951, Buckminster Fuller richiede il primo brevetto (concesso nel 1954) e sempre agli inizi degli anni '50 l'esercito americano gli commissiona varie cupole geodetiche da utilizzare sia come abitazioni sia come protezioni per strumentazioni costose. Nel 1954 viene invitato ad esporre alla Triennale di Milano, ottenendo così il primo riconoscimento pubblico a livello internazionale e nel 1967 raggiunge il massimo della popolarità realizzando la cupola per l'Expo di Montreal (Figura 9), di cui vedremo in seguito le caratteristiche geometriche.

Buckminster Fuller è stato un architetto autodidatta e "non convenzionale", un uomo carismatico dalla personalità eclettica, interessato a vari campi della Scienza, ma soprattutto inventore: gli vengono

attribuiti ben 25 brevetti, anche se alcuni studiosi mettono oggi in discussione la piena paternità di alcuni risultati. I suoi studi e le sue invenzioni sono tutti legati alla ricerca e alla successiva messa in pratica di principi strutturali che governano l'Universo. Come spiega nella raccolta *Synergetics* [BF], tutte le strutture, interpretate in maniera appropriata, dal sistema solare all'atomo, sono strutture di *tensegrità*. Con il termine da lui coniato *tensegrity*, Buckminster Fuller contrae le parole *tension* e *integrity* per descrivere il principio che governa tutto l'Universo di *compressione isolata* e *tensione continua*: componenti isolate che “lavorano” in compressione (di solito barre o puntoni nelle realizzazioni) sono all'interno di un sistema continuo in tensione (in genere realizzato con cavi o tendini). Le componenti in compressione non si toccano l'una con l'altra; lo scultore Kenneth Snelson, allievo di Buckminster Fuller e primo⁽¹⁶⁾ a realizzare e poi sviluppare *Tensegrity Sculptures*, descrive le realizzazioni come barre che galleggiano nell'aria senza alcun supporto “solido”. Le strutture devono, quindi, la loro stabilità ad un equilibrio di forze opposte che si compensano e Buckminster Fuller individua in questo meccanismo un principio fondamentale della Natura che, con pochi elementi, riesce a realizzare una struttura “forte”. Sempre prendendo spunto dalla Natura, Buckminster Fuller definisce una geodetica come la relazione più economica fra due eventi e dichiara che la geometria delle cupole geodetiche è la più efficiente fra tutti i sistemi a cupola triangolati a curvatura composta. Afferma anche che le cupole geodetiche sono tutte strutture di tensegrità, indipendentemente dalla visibilità per l'osservatore della differenziazione fra tensione e compressione⁽¹⁷⁾. Poiché queste strutture utilizzano una quantità minima di materiale, sono secondo Buckminster Fuller le più leggere ed economiche.

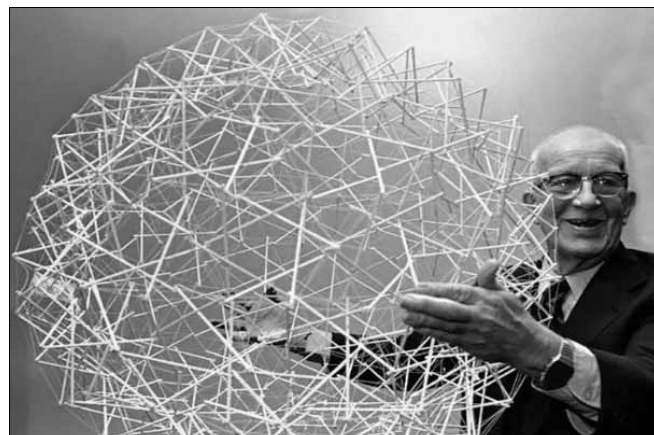


FIGURA 14 – R. Buckminster Fuller con una struttura Tensegrity Sphere – 1979⁽¹⁸⁾

La facile trasportabilità di queste cupole le rende interessanti anche per l'esercito americano, che, come accennato prima, ne installa centinaia in Canada per proteggere postazioni radar. Negli anni '60 le conferenze di Buckminster Fuller sono molto seguite dalle giovani generazioni americane e vengono costruite nuove comunità (come *Drop City* in Colorado), animate anche dalle idee di organizzazione sociale dell'architetto [Tu]; tuttavia, già un decennio dopo queste comunità sono sparite quasi tutte. A differenza di quanto ipotizzato da Buckminster Fuller, le cupole geodetiche non risolvono i gravi problemi abitativi degli Stati Uniti di quegli anni; comunque, sono ancora fonte di ispirazione e ricerca per architetti e ingegneri.

Il principio di tensegrità è ad oggi il modello di riferimento nella biomeccanica. A partire dagli anni '80, il biologo Donald Ingber, studiando la biomeccanica dei sistemi viventi, mostra che la Natura usa il principio di tensegrità per stabilizzare la forma delle cellule viventi e determinarne la risposta alle sollecitazioni meccaniche. Le strutture di tensegrità,

⁽¹⁶⁾ Tre persone hanno un brevetto che riguarda strutture di tensegrità: R. Buckminster Fuller (1962, anche se lui stesso ammette di non averle mai costruite), G. Emmerich (1964, artista ungherese che sembra aver lavorato senza conoscere Buckminster Fuller e Snelson), Kenneth Snelson (1965), che Buckminster Fuller inizialmente riconosce come primo realizzatore, ma poi sembra “dimenticarsene”.

⁽¹⁷⁾ In realtà le cupole realizzate da Buckminster Fuller, come quella di Montreal, non sembrano essere strutture di tensegrità.

⁽¹⁸⁾ <https://www.flickr.com/photos/poetarchitecture/26806590126/in/photolist-GQNMjjo-hESW2z-GMT4BP-ejcfv3-criycW-r4RXrm-qjxJV2-3ZnJR-3ZnKg-5mMEfE-5mHpSD-5mMEDd-VR9y-VR7Y-VR9e-VR7D-VR8M-8y9tDo-8y6sNX-qnhPRv-sSPR3B-ta1L5A-sSFpTo-t7XFvh-t7Xf6u-t7WDZd-t7W8aY-sSFCyf-t7WNX3-sdgce7-sSGbAS-sSEAJd-sSH5eG-t7WeNY-sdsw7p-sdrtJa-t7WvQs-ta2Hj3-taiBsF-tagNuP-sSPTcM-t7WCsq-ta1wys-sSNNhP-ta2Tpo-sSFMmJ-sSPk8M-sdrEH4-ta2Jc5-sSHcrN>

scrive Ingber, sono efficienti e flessibili mantenendo la robustezza [In].

4. – Dalle cupole geodetiche ai virus passando per la PopArt

Una diversa “triangolazione” lega le cupole geodetiche con l’arte e con la biologia, come dettagliato da Gregory J. Morgan in diversi lavori [Mo1, Mo2, Mo3].

Nel 1956 Francis Crick e James Watson [C-W] pubblicano su *Nature* un famoso articolo in cui ipotizzano una struttura poliedrica del capsido, cioè del rivestimento proteico esterno che racchiude l’RNA, di molti virus comunemente detti *sferici*. Come già suggerito precedentemente da altri scienziati, questi virus presentano simmetrie che sono possibili in tetraedri, ottaedri e icosaedri. Poiché il genoma virale è “povero”, Crick e Watson ipotizzano che le (poche) proteine del capsido siano organizzate in sottounità asimmetriche posizionate nello stesso modo su ogni *faccia* di un poliedro; gli scienziati pensano all’icosaedro perché questo consente il posizionamento di 60 unità asimmetriche (contro le 24 dell’ottaedro e le 12 del tetraedro)⁽¹⁹⁾ su ogni faccia ed anche perché, fra i poliedri considerati, l’icosaedro racchiude un volume più grande (e quindi una maggior quantità di acido nucleico). Questa teoria trova inizialmente scettici diversi esperti, anche di spicco, del settore⁽²⁰⁾ mentre altri scienziati, proseguendo lo studio della diffrazione ai raggi X di alcuni virus cristallizzati, ipotizzano l’esistenza di un numero anche maggiore di sottounità e richiedono, quindi, un nuovo modello. In particolare, i risultati di John Thomas Finch e Aaron Klug sul virus della polio vengono diffusi anche da alcuni

quotidiani e l’artista John McHale se ne interessa. McHale è al tempo un membro dell’*Independent Group* di Londra, un gruppo influente di artisti “ribelli” in cerca di nuove fonti di ispirazione estetica da trarre dalla cultura popolare, dalla produzione di massa e dalla scienza. L’*Independent Group* è considerato l’antesignano in Inghilterra della *PopArt* (termine coniato secondo alcuni storici dallo stesso McHale ma attribuito dalla maggioranza a Lawrence Alloway, un altro esponente del gruppo). McHale è già in contatto con Buckminster Fuller, contribuendo alla diffusione delle sue tematiche e dei suoi progetti; leggendo gli articoli sul virus della polio, pensa che ci possa essere un legame con le cupole geodetiche ed organizza un incontro fra Buckminster Fuller e Klug. Anche se il primo incontro porta solo alla condivisione di simmetrie icosaedriche, Klug continua a visionare i disegni di cupole geodetiche presenti nei manoscritti di Buckminster Fuller e studia anche le *Tensegrity Structures* realizzate da Kenneth Snelson. In particolare, Klug è colpito dalla *270-struts tensegrity sphere*; formata da 270 puntoni e, quindi, 540 sottounità ottenute dividendo ogni puntone nelle sue due parti asimmetriche, questa scultura fornisce un modello per organizzare $540 = 60 \cdot 9$ unità proteiche asimmetriche su una sfera. Negli stessi anni il collega Donald L.D. Caspar, che ha già presentato dei modelli di capsidi a simmetria icosaedrica costruiti con palline da pingpong, trascorre del tempo con Buckminster Fuller; identificando come possibili sottounità proteiche le facce di una cupola geodetica, determina la formula (che descriveremo nel paragrafo 5) $T = m^2 + mn + n^2$, con m e n interi non negativi e non entrambi nulli, che porta alla definizione di T come numero di triangolazione o numero del virus: ogni virus *sferico* può essere classificato dal suo numero T ed il relativo capsido è formato da $60T$ sottounità, $3T$ per ogni sfaccettatura. Introducendo il concetto di *quasi-equivalenza* per i legami delle sottounità proteiche, Caspar e Klug pubblicano i loro risultati nel 1962 [C-K]; questo articolo, insieme a quello di Crick e Watson, è considerato una delle “pietre miliari” della nascente biologia molecolare. L’analogia del capsido con le cupole geodetiche non si ha solo nella struttura *triangolata* di ogni faccia, ma anche nel fatto che i legami di *quasi-equivalenza* comportano che le sfaccettature

⁽¹⁹⁾ Dalle osservazioni sperimentali, gli scienziati ipotizzano che le sottounità proteiche (asimmetriche) siano aggregate rispettando le simmetrie di un gruppo puntuale cubico (gruppo delle simmetrie rotazionali di un cubo o di un ottaedro); per avere la stessa disposizione su ogni faccia del poliedro, conservandone le simmetrie, si hanno le limitazioni descritte. Si veda anche la Nota 25.

⁽²⁰⁾ I gruppi di simmetria dei cristalli non prevedono simmetrie di ordine 5 ed anche in Natura queste sono abbastanza rare; i *quasicristalli* verranno scoperti a metà degli anni Ottanta.

non sono identiche fra loro, così come le facce triangolari di una cupola geodetica non sono identiche fra loro. Caspar posiziona le sottounità non sui vertici ma sulle facce triangolari di una cupola geodetica; quindi, di fatto lavora con il poliedro duale, ovvero un poliedro di Goldberg. Come scoprirà più tardi, la formula per calcolare T è già presente in [Go2]. Per un confronto fra le varie costruzioni si veda anche [B-G-S] e per le analogie fra cupole geodetiche e struttura dei virus [Co].

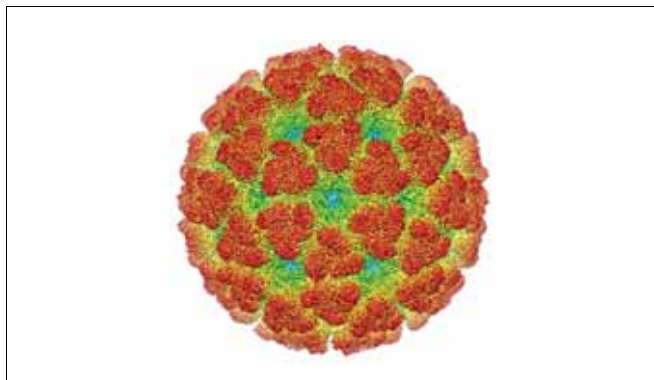


FIGURA 15 – Chikungunya Virus $T = 4$, $(m, n) = (2, 0)$
Foto di A2-33 - Opera propria, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30051546>

La scoperta, in anni successivi, di strutture virali a simmetria icosaedrica (come il virus della polio), che non rientrano nel modello di Caspar e Klug, ha portato alla recente *Viral Tiling Theory*, in cui la struttura del capsido viene descritta con tassellazioni più generali (tipo Penrose) attraverso i gruppi matematici dei *quasicristalli*. Le ricerche in tal senso sono iniziate con Reidun Twarock [Tw] e proseguono tutt'ora.

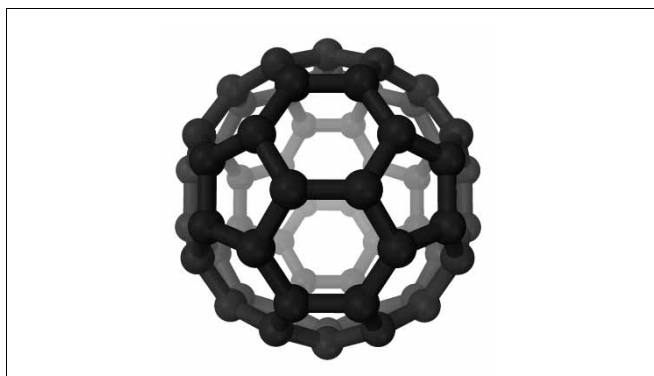


FIGURA 16 – Buckminsterfullerene
Foto di Benjah-bmm27 - Own work, Public Domain
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1913689>

Nel 1985 un gruppo di 5 chimici inglesi e statunitensi pubblica un articolo [K-H-OB-C-S] intitolato C_{60} : *Buckminsterfullerene*, in cui viene descritta una nuova molecola costituita esclusivamente da atomi di carbonio. Si tratta di un aggregato particolarmente stabile formato da 60 atomi di carbonio, nato in laboratorio a seguito di esperimenti sulla frammentazione della grafite in “condizioni violente” che simulano quelle che accadono nell’Universo. Gli autori dell’articolo spiegano che, dovendo ipotizzare una struttura per questa specie e considerando che il carbonio non può avere un intorno tetraedrico come nel diamante, hanno pensato ad una forma “sferica” e si sono così rivolti agli studi di Buckminster Fuller. Fra le figure con alta simmetria, l’ipotesi dell’icosaedro troncato, con 60 atomi di carbonio disposti negli altrettanti vertici, è stata ritenuta “di bellezza unica”. A seguito di queste scoperte, nel 1996 Harold Walter Kroto, Robert Curl e Richard Smalley ricevono il Premio Nobel per la Chimica. Sempre nell’articolo citato, gli autori precisano che una struttura così importante merita un proprio nome e, dopo aver considerato alternative quali “soccerene” o “sferene”, scelgono *Buckminsterfullerene*, talvolta abbreviato in *Buckyball*. Col termine *fullereni* vengono oggi indicati gli elementi appartenenti a una classe di allotropi del carbonio diversi dalla grafite e dal diamante (gli allotropi sono modificazioni strutturali diverse dello stesso elemento), i cui atomi sono tri-coordinati e formano strutture a gabbia chiusa; il *Buckminsterfullerene* è il più stabile fra questi. Studi recenti fatti sulle simmetrie di capsidi virale indicano che gli stessi modelli geometrici possono essere applicati alle *carbon onions*, nanoparticelle di solo carbonio costituite da gusci concentrici di molecole di fullerene.

5. – Primo tipo di triangolazione di un icosaedro

Descriviamo ora uno dei metodi più comuni per costruire le sfere geodetiche in modo che queste abbiano la maggior regolarità possibile, partendo da un icosaedro (vedi anche [C-P-T1]).

Dividiamo i lati di ogni sua faccia in m segmenti congruenti, con m numero naturale, e uniamo i punti così ottenuti con segmenti paralleli ai lati di ciascuna

faccia. Quindi, ogni faccia risulta tassellata con m^2 triangoli equilateri congruenti fra loro, come si può vedere nelle figure seguenti (se $m = 1$ non si ha alcuna tassellazione); si dice che la suddivisione ha

frequenza mv oppure che è di **tipo mv** .

Questo modo di tassellare ciascuna faccia dell'icosaedro con triangoli equilateri è detto anche **ripartizione alternata**⁽²¹⁾.

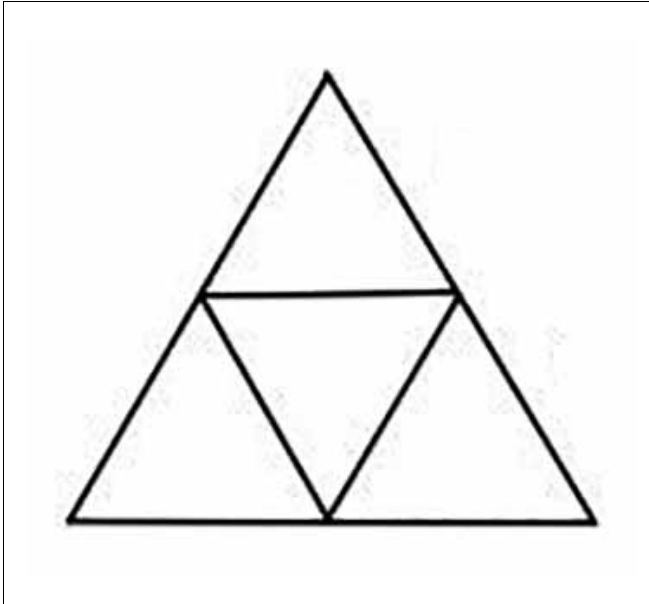


FIGURA 17 – Frequenza 2v

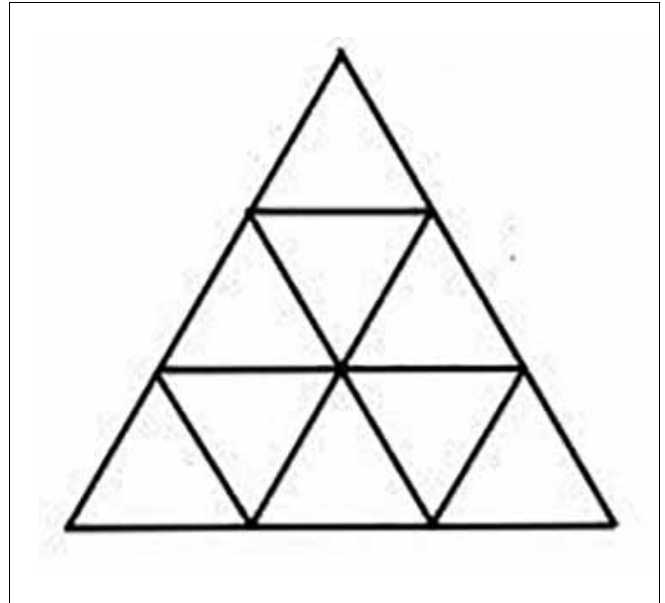


FIGURA 18 – Frequenza 3v

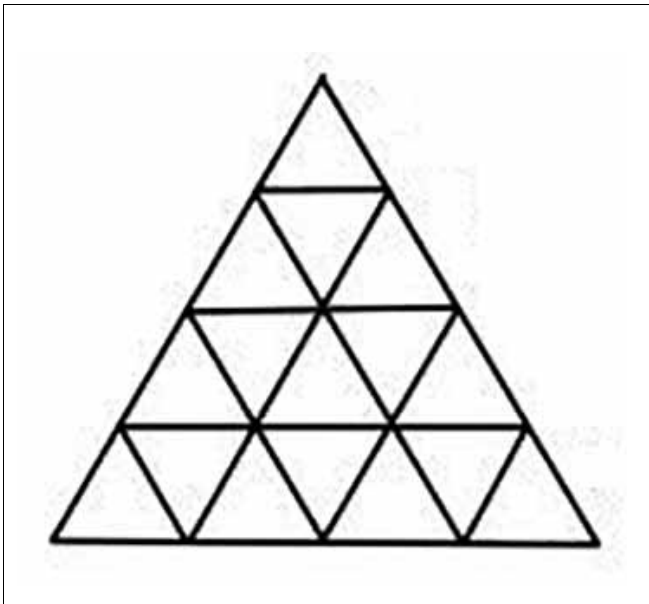


FIGURA 19 – Frequenza 4v

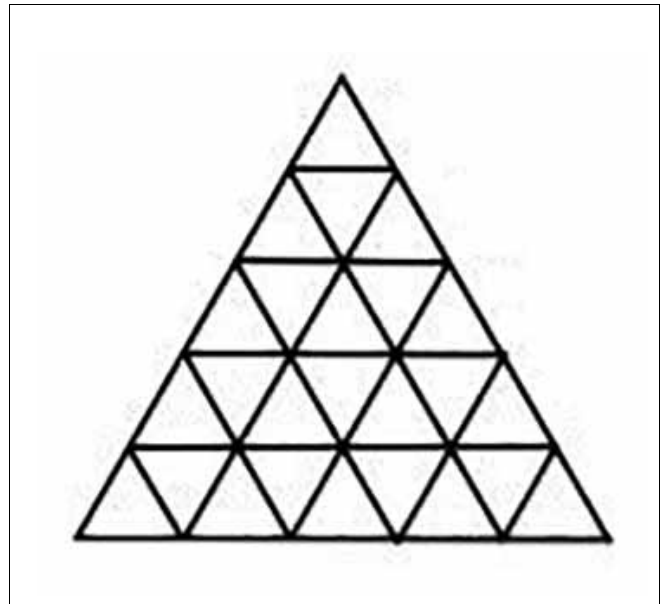


FIGURA 20 – Frequenza 5v

⁽²¹⁾ Storicamente, questo tipo di ripartizione nasce dopo quella oggi detta di tipo $(m, 0)$ (vedi il paragrafo successivo) e per questo viene indicata come “alternativa” [Ke].

Dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro, proiettiamo i vertici dei triangoli così ottenuti sulla sfera stessa; otteniamo in tal modo una sfera geodetica a facce triangolari.

Ad esempio, la sfera geodetica 2v (nella Figura 21) ha 80 facce, 42 vertici (12 di grado 5 e 30 di grado 6) e 120 spigoli.

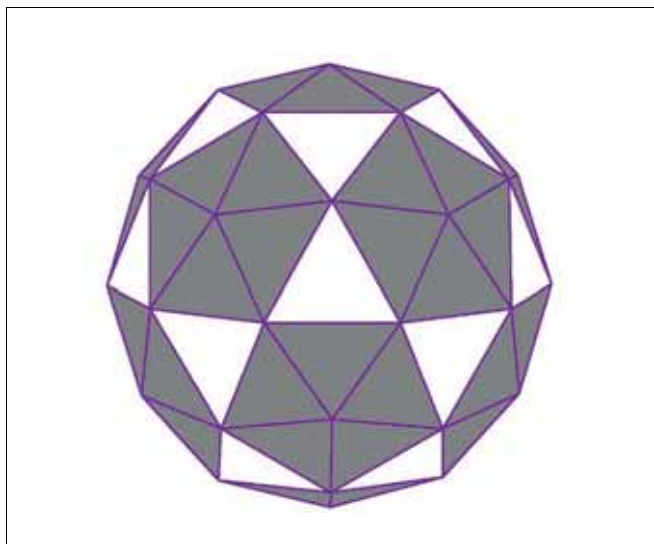


FIGURA 21 – Sfera geodetica 2v

Il poliedro di Goldberg, duale di questa sfera geodetica, è il **triacontaedro rombico troncato**, che ha 80 vertici, 120 spigoli e 42 facce: 30 esagonali e 12 pentagonali. Poiché questo poliedro ha una forma simile all'icosaedro troncato, esso è anche chiamato *super pallone da calcio*.



FIGURA 22 – Triacontaedro rombico troncato

Per una lista di sfere geodetiche e dei loro duali rimandiamo a Magnus J. Wenninger [We].

Una costruzione analoga a questa può essere ottenuta anche partendo da altri poliedri regolari; tuttavia la maggior parte delle sfere geodetiche sono costruite partendo dall'icosaedro perché questo è il poliedro regolare che, a parità di volume, ha una superficie più piccola.

Operando una suddivisione di tipo mv sull'icosaedro, si ottengono $20m^2$ triangoli equilateri più piccoli e quindi una sfera geodetica con $20m^2$ facce triangolari. Anche se ogni faccia dell'icosaedro è tassellata con triangoli equilateri, le facce della sfera geodetica ottenuta sono triangoli isosceli (solo alcuni equilateri) non tutti uguali fra loro. Ad esempio, nella sfera geodetica 3v compaiono tre diverse lunghezze di spigoli, in quella 5v nove lunghezze diverse. Nel corso degli anni sono state sviluppate varie tecniche di calcolo e, recentemente, anche software *ad hoc*.

Per calcolare la frequenza di una sfera geodetica (ottenuta a partire da un icosaedro) si considerano due vertici "vicini" di grado 5 (che corrispondono agli estremi di uno spigolo dell'icosaedro) e si contano i segmenti che uniscono tali vertici: il numero di questi segmenti corrisponde alla frequenza.

Nei seguenti disegni sono presentate alcune *semisfere* geodetiche con frequenze diverse; in questi casi le facce triangolari sono $10m^2$.



FIGURA 23 – Semisfera geodetica 2v

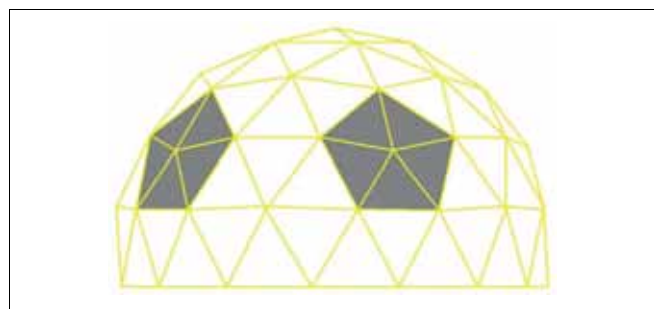


FIGURA 24 – Semisfera geodetica 3v

Notiamo che la sfera geodetica 3v corrisponde a quella ottenuta dall'innalzamento dell'icosaedro troncato (vedi la Figura 12).

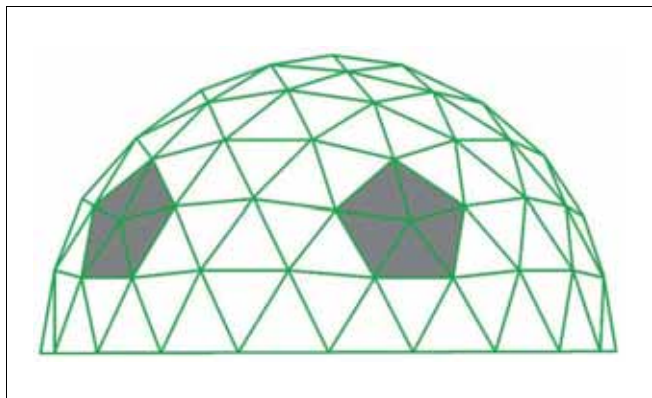


FIGURA 25 – Semisfera geodetica 4v

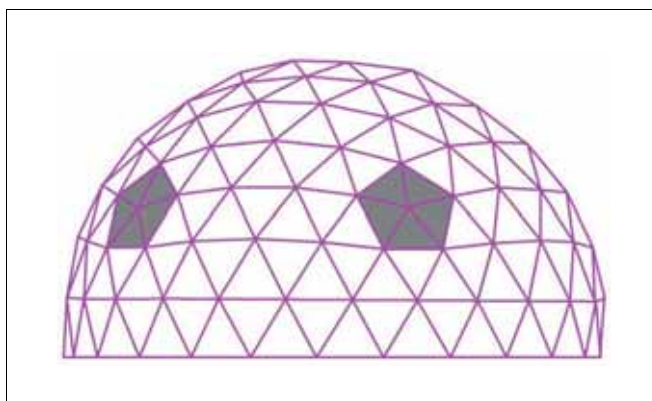


FIGURA 26 – Semisfera geodetica 5v

Nel Parco de la Villette a Parigi si trova il **Géode**, una grande sfera (quasi completa) geodetica d'acciaio di 36 metri di diametro, realizzata nel 1985 dall'architetto Adrien Fainsilbe. Al suo interno si trova una sala cinematografica di 400 posti, dotata di uno schermo semisferico di 1000mq, il più grande al mondo. La parte esterna della sfera ha un'altezza di circa 30 metri. Si tratta di una sfera geodetica di tipo 20v con la parte esterna formata da circa 6433 triangoli di acciaio inossidabile.

La **Biosphère** a Montreal (Canada), menzionata precedentemente, è la cupola geodetica⁽²²⁾ che Ri-

⁽²²⁾ Sono stati due ex studenti di Buckminster Fuller, Jeffrey Lindsay e Don Richter, a progettare nel 1950 il prototipo della cupola realizzata a Montreal, usando il metodo che hanno chiamato "della griglia regolare".

chard Buckminster Fuller ha progettato come Padiglione degli Stati Uniti per l'Esposizione Universale del 1967. La cupola è di tipo 16v ed è circa i 4/5 di una sfera di diametro 76,2 metri, perciò è alta circa 60,96 metri ed è formata da circa 4096 triangoli [B-B].



FIGURA 27 – Semisfera geodetica di Buckminster Fuller a Spoleto Foto di Manuela Rosi [licenza CC]
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=45968494>

Nel 1967 Buckminster Fuller ha donato alla città di Spoleto, in occasione del *X Festival dei Due Mondi*, una semisfera geodetica chiamata **Spoleto-sfera**. Essa è formata da elementi metallici, misura 21 metri di diametro, è di tipo 3v ed è formata da 90 facce triangolari. Con opportune modifiche (ad esempio, coprendola con un telo) tale struttura può essere utilizzata per organizzare conferenze, mostre, spettacoli.

6. – Secondo tipo di triangolazione di un icosaedro

Descriviamo un altro metodo, introdotto da Michel Goldberg in [Go2] e ripreso da Donald L. D. Caspar e Aaron Klug [C-K], per realizzare una famiglia infinita di sfere geodetiche che possiedono le simmetrie rotazionali dell'icosaedro e dotate della massima regolarità possibile (vedi anche [C-P-T2]).

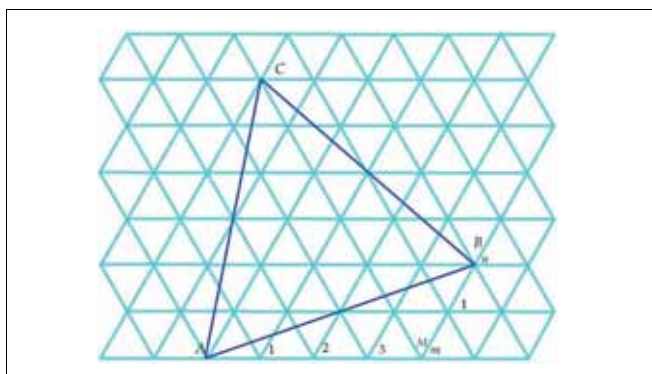


FIGURA 28 – La suddivisione $m = 4, n = 2$

Consideriamo una tassellazione del piano formata da triangoli equilateri di lato unitario, come in Figura 28. Consideriamo due numeri naturali m e n non entrambi nulli. A partire da un vertice A della tassellazione, percorriamo m spigoli nella direzione “orizzontale” del reticolo e poi n spigoli nella direzione ruotata, rispetto alla precedente, di 60° in senso antiorario per arrivare al vertice B ; nella Figura 28, $m = 4$ e $n = 2$. Costruiamo il triangolo equilatero ABC ; notiamo che il vertice C è un vertice della tassellazione e può essere ottenuto, a partire da B , percorrendo m spigoli nella direzione ruotata di 60° rispetto all’ultima percorsa e poi n spigoli nella direzione ulteriormente ruotata di 60° (sempre in senso antiorario). Ripetendo lo stesso procedimento a partire dal vertice C si ritrova il punto A .

La costruzione precedente è detta tassellazione di **tipo** (m, n) del triangolo ABC .

Notiamo che, eccetto i casi $m = 1$ e $n = 0$ oppure $m = 0$ e $n = 1$, il triangolo equilatero ABC è più grande di quelli del reticolo di partenza.

Sostituiamo ad ogni faccia di un icosaedro questo triangolo ABC con tutti gli elementi della tassellazione originale in esso contenuti. Successivamente, dal centro della sfera circoscritta all’icosaedro proiettiamo i **vertici** dei triangoli della tassellazione sulla sfera stessa; vengono proiettati solo i vertici dei triangoli e non eventuali altri punti che si trovano sugli spigoli del poliedro, eccetto i casi $m = 0$ oppure $n = 0$. Si ottiene così una sfera geodetica S a facce triangolari. Notiamo che i vertici dei triangoli piccoli possono trovarsi in parte su una faccia dell’icosaedro e in parte su una faccia contigua; tuttavia, i triangoli che si trovano in parte su una faccia e in parte su un’altra faccia contigua, si “ricompongono” nella proiezione.

I triangoli della tassellazione una volta proiettati non sono più equilateri⁽²³⁾ in quanto i loro vertici, prima della proiezione, non appartengono alla sfera circoscritta all’icosaedro a meno che non siano vertici dell’icosaedro stesso. Le facce triangolari della sfera geodetica ottenuta con questa costruzione sono comunque triangoli isosceli; inoltre, esse non sono tutte uguali fra loro.

Notiamo che tutti i vertici dell’icosaedro sono anche vertici della tassellazione, quindi appartengono alla sfera geodetica. Intorno a questi vertici, si dispongono cinque triangoli piccoli, mentre intorno a tutti gli altri vertici della sfera geodetica si collocano sei triangoli piccoli.

La sfera geodetica così ottenuta è detta di **tipo** (m, n) perché ottenuta con una tassellazione di tipo (m, n) delle facce dell’icosaedro.

Notiamo che le tassellazioni di tipo $(m, 0)$ o di tipo $(0, n)$ sono formate da triangoli equilateri con i lati paralleli ai lati del triangolo equilatero ABC (vedi la Figura 29). In questi casi (e solo in questi!) tutti i punti che vengono a trovarsi sugli spigoli dell’icosaedro corrispondono a vertici dei triangoli della tassellazione e vengono quindi proiettati sulla sfera. Le sfere geodetiche di tipo $(m, 0)$ o $(0, n)$ sono dette di **Classe I** e corrispondono a quelle viste nella costruzione illustrata nel paragrafo precedente. Nella figura seguente è riportata una tassellazione di tipo $(5, 0)$.

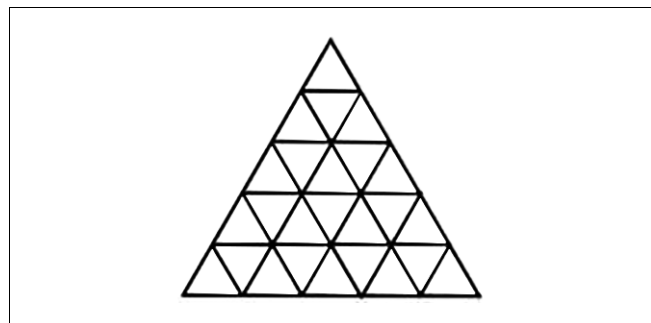


FIGURA 29 – Tassellazione di tipo $(5, 0)$

⁽²³⁾ Notiamo che, oltre ai tre poliedri regolari a facce triangolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro), esistono soltanto 5 poliedri convessi le cui facce sono triangoli equilateri; tali poliedri sono chiamati **deltaedri**. I deltaedri sono stati studiati dal matematico olandese Bartel Leendert van der Waerden nel 1947; sono stati chiamati così da Martyn Cundy nel 1952 [Cu]. Il loro nome deriva dalla lettera greca *Delta*, che ha la forma di un triangolo.

La semisfera geodetica corrispondente alla precedente tassellazione è rappresentata nella Figura 30.

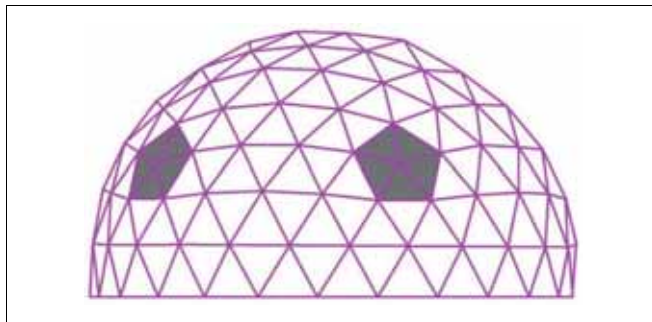


FIGURA 30 – Semisfera geodetica di tipo (5, 0)

Nel caso di tassellazioni di tipo (n, n) , con $n \neq 0$, si dice che la cupola geodetica è di **Classe II**. Nella Figura 31 è disegnata una tassellazione di tipo (2, 2).

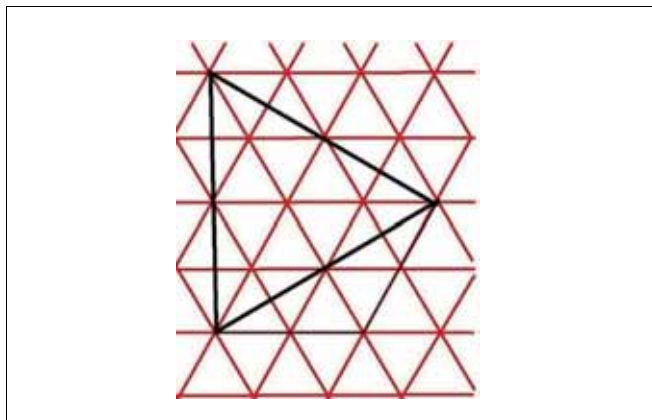


FIGURA 31 – Tassellazione di tipo (2, 2)

La sfera geodetica corrispondente alla precedente tassellazione è rappresentata nella Figura 32.

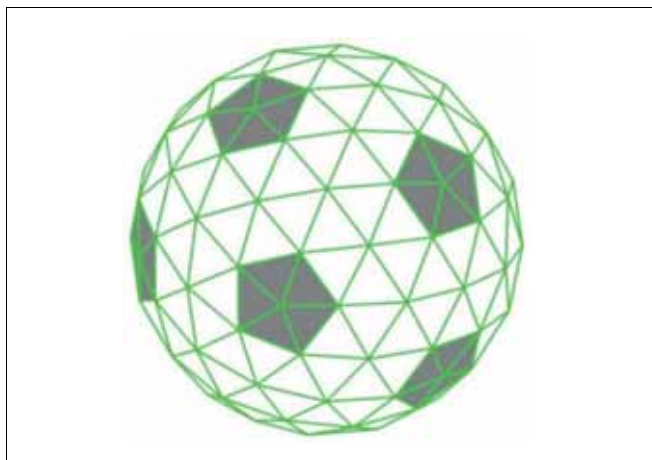


FIGURA 32 – Sfera geodetica di tipo (2, 2)

Nel sito internet <https://mathcurve.com/polyedres/geode/geode.shtml> è riportato un esempio di cupola geodetica del tipo (2, 2), usata per telecomunicazioni, che si trova nell'Antartide.

È interessante notare che il pentacisdodecaedro inscritto in una sfera non è altro che la cupola geodetica di tipo (1, 1).

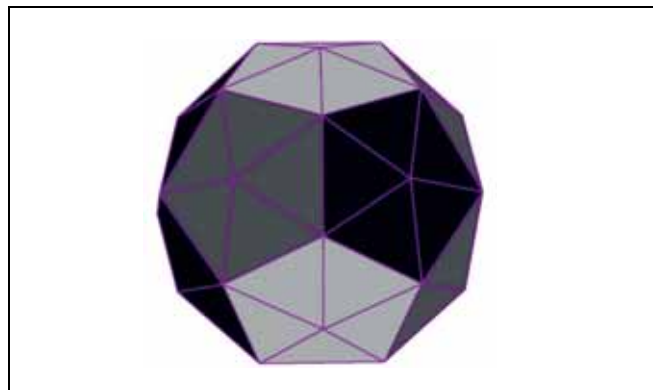


FIGURA 33 – Pentacisdodecaedro

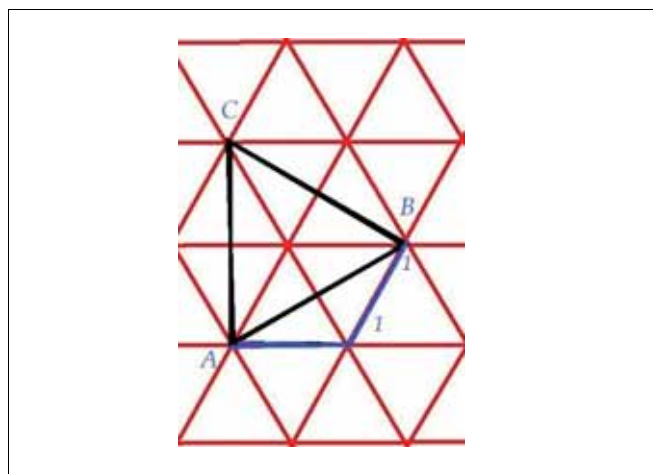


FIGURA 34 – Tassellazione di tipo (1, 1)

Come si può vedere anche dalle Figure 31 e 34, le tassellazioni di tipo di tipo (n, n) sono formate da triangoli equilateri e *semitriangoli* equilateri con ciascun lato perpendicolare ad uno dei lati del triangolo ABC .

Nel caso di tassellazioni di tipo (m, n) , con $m \neq n$ e $m, n \neq 0$, si dice che la cupola geodetica è di **Classe III**. Notiamo che i poliedri di questa classe sono chirali.

Ogni tassellazione di questo tipo è formata da triangoli equilateri, o porzioni di triangoli equilateri, i cui lati non sono né paralleli né perpendicolari ai lati

del triangolo ABC , come si vede, ad esempio, considerando la tassellazione di tipo $(2, 1)$.

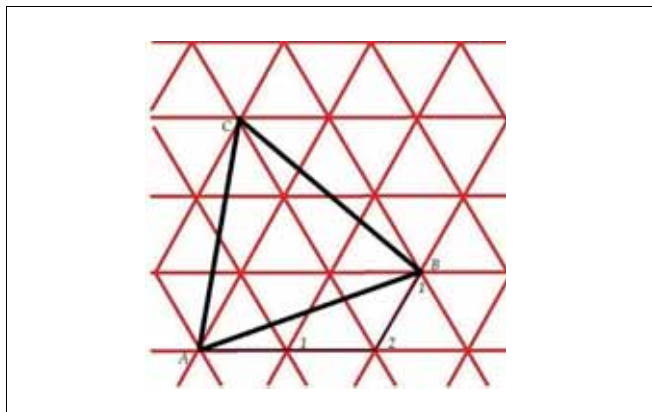


FIGURA 35 – La tassellazione di tipo $(2, 1)$

Con questa tassellazione otteniamo la sfera geodetica della Figura 36.

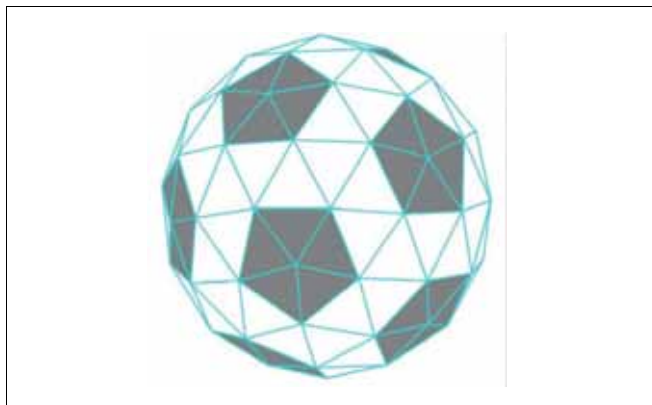


FIGURA 36 – La sfera geodetica di tipo $(2, 1)$

La costruzione fatta nel caso $m = 0$ o $n = 0$ può essere eseguita anche a partire dagli altri poliedri regolari a facce triangolari, cioè il tetraedro e l'ottaedro ([Ba], pp. 221-223); tuttavia, quasi tutte le sfere geodetiche si ottengono considerando l'icosaedro come poliedro di partenza.

Calcoliamo ora il numero di facce triangolari presenti in una cupola geodetica.

Facciamo riferimento alla Figura 28 e ricordiamo che i triangoli equilateri che formano la tassellazione del piano hanno il lato unitario.

Determiniamo anzitutto il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$. Si ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$. Supponiamo di riferire il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, in cui il punto A è l'origine e la retta AM l'asse delle ascisse, con verso concorde con quello del vettore $\overrightarrow{AM}$.

Si ottiene $\overrightarrow{AM} = (m, 0)$ e $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{2}n, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right)$. Ne segue che

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \left(m + \frac{1}{2}n, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right)$$

quindi la misura del segmento AB è

$$\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2} = \sqrt{m^2 + mn + n^2}$$

Ne consegue che l'area del triangolo equilatero ABC è:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(m^2 + mn + n^2)$$

Il numero T di triangoli della tassellazione presenti in ABC si ottiene dividendo l'area di ABC per l'area di un triangolino della tassellazione, che è

$$\frac{\sqrt{3}}{4},$$

quindi

$$T = m^2 + mn + n^2.$$

Di conseguenza il numero delle facce triangolari che formano una cupola geodetica di tipo (m, n) è $20T$.

Il numero T è anche chiamato **numero di triangolazione** e, come accennato nel paragrafo 4, è molto utilizzato in virologia. Ad esempio, il numero delle facce della sfera geodetica nella Figura 36 è 140. Invece il numero delle facce della sfera geodetica di tipo $(1, 1)$ (cioè il pentacisdodecaedro) è 60.

La sfera geodetica di tipo $(3, 1)$ (vedi Figura 37) ha 260 facce.

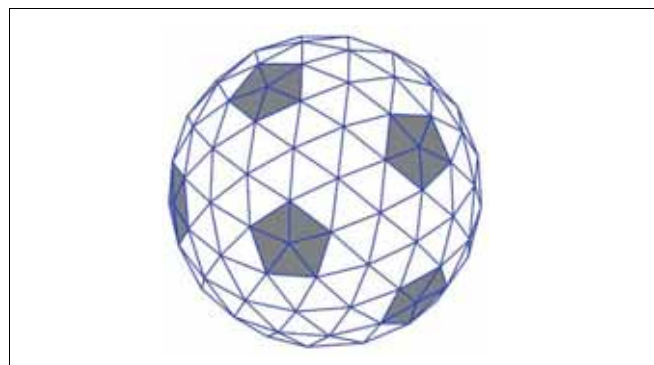


FIGURA 37 – Sfera geodetica di tipo $(3, 1)$

Nel paragrafo successivo calcoleremo anche il numero degli spigoli e dei vertici delle sfere geodetiche.

7. – Ulteriori considerazioni sui poliedri di Goldberg

Come abbiamo già osservato, i poliedri duali di una cupola geodetica sono poliedri di Goldberg. Ad esempio, il duale della cupola geodetica del tipo (1, 1) è l'**icosaedro troncato**.



FIGURA 38 – Icosaedro troncato (pallone da calcio)

In alcuni testi, anche i poliedri di Goldberg sono considerati sfere geodetiche; questo ci sembra poco corretto perché, a parte il dodecaedro regolare e l'icosaedro troncato, i poliedri di Goldberg non sono inscrivibili in una sfera.

Esistono comunque diverse strutture architettoniche che hanno la forma di poliedri di Goldberg. Una delle più interessanti è l'*Eden Project*, un complesso turistico in Cornovaglia, a circa 2 km dalla città di St Austell, ricavato nello spazio di una ex-cava. In questo complesso si trovano due grandi biosfere il cui interno ospita circa 100.000 piante provenienti da tutto il mondo.

Come abbiamo detto, gli spigoli dei poliedri di Goldberg sono tutti uguali, ma i poligoni che formano le sue facce esagonali non sono regolari, a parte l'icosaedro troncato.

Abbiamo già osservato che nei poliedri di Goldberg si ha $F_5 = 12$, da cui

$$F_6 = \frac{V}{2} - 10$$

Nel seguito indicheremo con il simbolo $GC_{m,n}$ il poliedro di Goldberg duale della sfera geodetica del tipo (m, n) .

Il poliedro duale della cupola geodetica del tipo (2, 1) della Figura 36 è il poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$ della Figura 39.

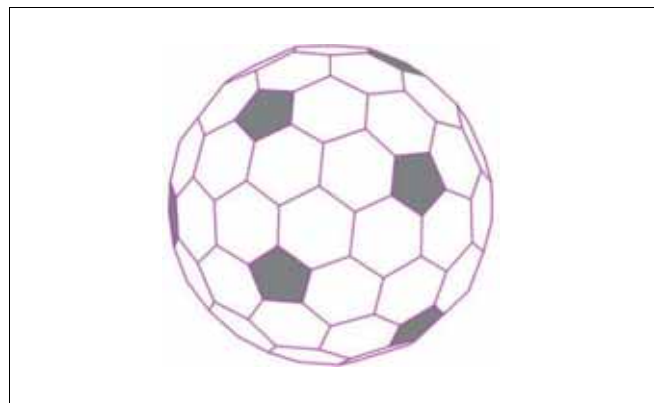


FIGURA 39 – Poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$

Abbiamo visto che la sfera geodetica di tipo (2, 1) ha $T = 7$ e quindi $20T = 140$ facce; di conseguenza il poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$ ha 140 vertici. Calcoliamo gli altri elementi di questo poliedro.

Dalla formula $F_6 = V/2 - 10$, si ha $F_6 = 60$; sommando a queste le 12 facce pentagonali, si ha che $GC_{2,1}$ ha 72 facce; quindi, dalla relazione di Eulero segue che ha 210 spigoli. Allora la sfera geodetica di tipo (2, 1), duale del poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$, ha 210 spigoli e 72 vertici.

Generalizzando questo procedimento, si ottengono queste formule per le sfere geodetiche di tipo (m, n) :

$$F = 20T \quad S = 30T \quad V = 10T + 2$$

dove, ricordiamo, $T = m^2 + mn + n^2$.

La prima relazione è già stata dimostrata nel paragrafo precedente. Per provare la seconda, ricordiamo che nei poliedri di Goldberg il numero degli spigoli è $S = \frac{5F_5 + 6F_6}{2}$ e che tale numero è

uguale al numero degli spigoli della sfera geodetica sua duale; inoltre, il numero dei vertici V_G di un poliedro di Goldberg soddisfa la seguente relazione

$$F_6 = \frac{V_G}{2} - 10$$

dove V_G = numero delle facce della sfera geodetica duale = $20T$. Dunque, dalla relazione precedente si ha:

$$S = \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{6 \cdot F_6}{2} = 30 + 3 \left(\frac{V_G}{2} - 10 \right) = \frac{3}{2} \cdot 20T = 30T$$

Dalla relazione di Eulero segue la terza formula: $V = 10T + 2$.

Ad esempio, la sfera geodetica di tipo (4, 1) (vedere la Figura 40) ha $T = 21$. Di conseguenza essa ha 420 facce, 630 spigoli e 212 vertici. Segue che il corrispondente poliedro di Goldberg $GC_{4,1}$ (vedere la Figura 41) ha 420 vertici, 630 spigoli e 212 facce.

È interessante notare il fatto che nelle sfere geodetiche e nei poliedri di Goldberg è sufficiente conoscere uno soltanto fra i numeri S , F , e V per determinare gli altri due; invece, in un qualunque poliedro, occorre conoscerne due per determinare il terzo, usando la relazione di Eulero.

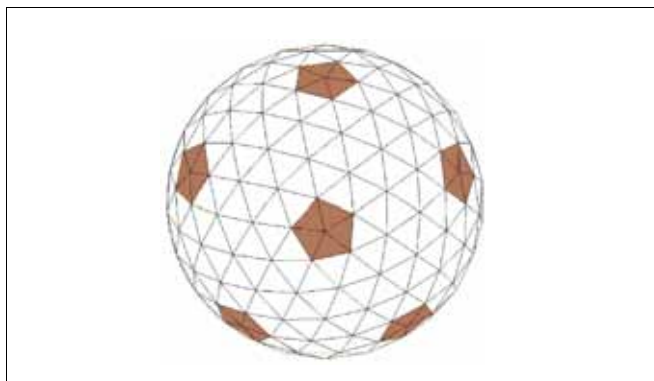


FIGURA 40 – Sfera geodetica di tipo (4, 1)



FIGURA 41 – Poliedro di Goldberg $GC_{4,1}$

Epcot è uno dei quattro parchi a tema che si trovano presso il *Walt Disney World Resort* a Bay Lake, Florida. Epcot rappresenta un'utopistica città del futuro. Il simbolo di questo parco è un'astronave chiamata *Spaceship Earth*⁽²⁴⁾; essa ha la forma di una sfera geodetica di tipo (8,8) (vedere la Figura 42). Le linee che sono evidenziate in questa figura

⁽²⁴⁾ Buckminster Fuller chiamava la Terra “navicella spaziale”.

rappresentano la proiezione sulla sfera geodetica dei segmenti che, nella tassellazione del piano, formano una linea che collega due vertici adiacenti dei triangoli grandi.

Essendo di tipo (8, 8), si tratta di una sfera geodetica con $T = 192$; dunque è formata da $192 \cdot 20 = 3840$ triangoli isosceli e ognuno di questi è la base di una piramide a base triangolare.

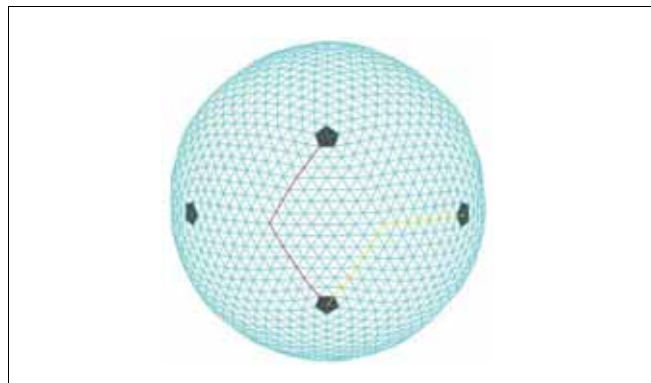


FIGURA 42 – Sfera geodetica di tipo (8, 8)

Di conseguenza la cupola è composta da $3 \cdot 3840 = 11.520$ faccette. In realtà esse sono 11.324, poiché alcune di queste sono state eliminate dalla presenza dei supporti e delle porte.

Considerazioni finali

La geometria delle cupole geodetiche ideate da Buckminster Fuller nasce dalle sue osservazioni sui fenomeni naturali: in Natura, i carichi in una struttura geometrica vengono distribuiti nel percorso più breve possibile (le linee geodetiche appunto) e i campi energetici “triangolano” lo spazio. Nella cupola geodetica, i triangoli (non uguali ma non troppo “diversi” fra loro) formano una griglia (energeticamente) compatta che garantisce la robustezza locale, mentre la disposizione dei loro lati lungo le geodetiche permette di distribuire gli sforzi locali sull'intera struttura, ottenendo, quindi, la massima efficienza col minor sforzo, sia a livello “energetico” che “materiale”.

Il calcolo degli elementi geometrici che compongono una cupola geodetica (lunghezze delle aste, angoli delle facce, angoli diedri, etc.) una volta era lungo e difficile; sono state stilate varie tabelle da più autori, tenute sempre gelosamente custodite!

Con l'avvento dei computer questi calcoli sono diventati più semplici ed oggi esistono diversi software realizzati proprio per determinare le misure delle varie entità geometriche di una cupola geodetica.

Anche se queste strutture, dopo un iniziale boom costruttivo, non hanno avuto quella diffusione auspicata da Buckminster Fuller, sono comunque oggetto di studio anche oggi e non solo in campo architettonico-ingegneristico ma anche in vari campi delle Scienze, dalla Biologia alla Chimica.

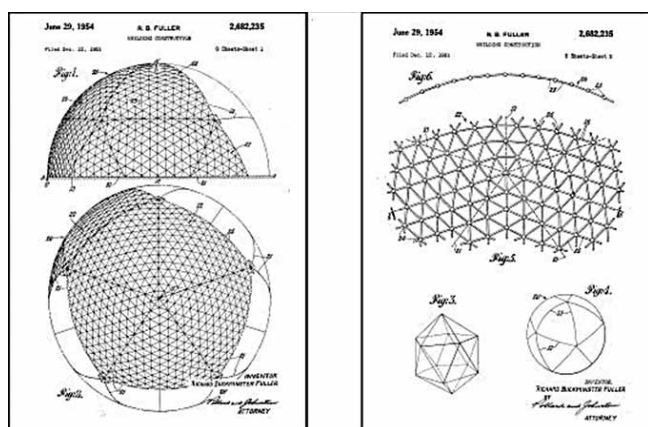


FIGURA 43 – Fogli 1 e 2 del brevetto di R. Buckminster Fuller US 2682235, 1954

Se le prime sperimentazioni di Buckminster Fuller si sono basate su modelli in cui vengono riprodotti tutti i 31 cerchi massimi ricavati dai piani equatoriali delle simmetrie rotazionali di un icosaedro [Ke], ottenendo una struttura robusta ma esteticamente sgradevole perché molto disomogenea nelle lunghezze degli elementi e nel grado dei numerosi vertici, si è poi passati alla riduzione dei cerchi considerati ed alla successiva rimozione di alcune parti di questi togliendo spigoli dell'icosaedro di partenza. Le strutture così ottenute, con vertici di grado 5 o 6 e con elementi di lunghezze meno diverse fra loro, vengono poi eventualmente rinforzate introducendo elementi paralleli a quelli esistenti. Gli archi geodetici, che danno il nome alla cupola, sembrano “spariti”. Nella descrizione dei 31 cerchi massimi dell'icosaedro, Hugh Kenner fa riferimento a tre tipologie (6+15+10) che nascono da rotazioni intorno a tre tipi di assi (una coppia di vertici opposti, i punti mediani di due spigoli oppo-

sti, i baricentri di due facce opposte). Ogni cerchio massimo può essere ricostruito a partire dal triangolo di Schwarz di una faccia dell'icosaedro proiettato sulla sfera circoscritta. Il triangolo di Schwarz di un triangolo equilatero si ottiene tracciando le tre altezze e considerando uno dei 6 triangoli retti (con angoli 30° e 60°) in cui risulta suddiviso il triangolo di partenza. Notiamo che, accoppiando un triangolo di Schwarz col suo simmetrico rispetto al cateto minore, si ottiene un triangolo isoscele che tassella il triangolo di partenza applicando solo rotazioni. Proiettando il triangolo di Schwarz sulla sfera, si ottiene un triangolo sferico che ne rappresenta 1/120 e che può tassellarla con riflessioni e rotazioni⁽²⁵⁾.

Si ha quindi la possibilità di tassellare il triangolo di Schwarz, anziché l'intera faccia dell'icosaedro, per poi riportare la tassellazione sulla sfera proiettando i vari vertici dal centro della sfera. Per una descrizione completa si veda ad esempio [Ki]. Lo stesso Walter Bauersfeld, dagli appunti ritrovati [Ga1], usa questo metodo per la costruzione della cupola di Jena.

Recentemente [H-N-G], per aumentare la regolarità e la “sfericità” di una cupola geodetica, è stata studiata una “stepping-projection”, ovvero una proiezione a passi successivi. Partendo da una cupola con frequenza 2v, ogni faccia dell'icosaedro originale risulta suddivisa in 4 triangoli. Dividendo ognuno di questi triangoli con frequenza 2v e proiettando i nuovi vertici sulla sfera, si ottiene una cupola tipo 4v con elementi triangolari di forme meno “diverse” fra loro rispetto alla usuale costruzione 4v. Nell'articolo citato sono mostrati calcoli e tabelle relative a queste costruzioni.

Ringraziamenti Gli autori ringraziano i referees per i miglioramenti suggeriti nella presentazione dell'articolo.

⁽²⁵⁾ Proiettando sulla sfera il triangolo di Schwarz unito al suo simmetrico si può tassellare la sfera con 60 unità senza usare riflessioni. Ripetendo la costruzione del triangolo di Schwarz a partire da un tetraedro si ottiene un tassello che copre 1/24 della sfera mentre, partendo da un ottaedro, il triangolo sferico ottenuto ne copre 1/48.

BIBLIOGRAFIA

- [B-B] BARONE V., BIANUCCI P. (2017). *L'infinita curiosità: Breve viaggio nella fisica contemporanea*, Edizioni Dedalo, Bari.
- [B-G-S] BRINKMANN G., GOETSCHALCKX P., SCHEIN S. (2017). *Comparing the constructions of Goldberg, Fuller, Caspar, Klug and Coxeter, and a general approach to local symmetry-preserving operations*, Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci. vol. 473, no. 2206.
- [Ba] BATTALIA L. (2019). *FANTASTICI POLIEDRI. 2. Poliedri semiregolari e loro duali*, http://www.batmath.it/corsi_uni/design_1819/SemiregolariBozza.pdf
- [BF] BUCKMINSTER FULLER R., (1975). *Synergetics - Explorations in the geometry of thinking*, Macmillan Publishing Co. Inc., London.
- [Br] BRUSOTTI L. (1955). *Poligoni e poliedri*. Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi, Volume II – Parte 1^a, Editore Ulrico Hoepli, Milano, pp. 255-322.
- [C-K] CASPAR D.L.D., KLUG A. (1962). *Physical principles in the construction of regular viruses*, in Cold Spring Harb Symp Quant Biol., vol. 27, Cold Spring Harbor Laboratory Press., pp. 1-24.
- [C-R] CUNDY M.H., ROLLETT A.P. (1961). *Mathematical models*, Oxford University Press.
- [C-TL] CARLINI A., TEDESCHINI LALLI L. (2019). *A metallic 1928 geodesic dome in Rome*, Proceedings 18th APLIMAT 2019, Curran Associates, Inc.
- [C-T-C] CONTI G., TROTTA A., CONTI F. (2018). *A Journey into the Polyhedrons World*, Science & Philosophy, vol. 6, n. 1, pp. 67-92.
- [C-P-T1] CONTI G., PAOLETTI R. TROTTA A. (2021). *La Geometria delle Cupole Geodetiche*, Periodico di Matematica, Anno XXXVI, vol. III (3-4), dicembre 2021, pp. 79-98.
- [C-P-T2] CONTI G., PAOLETTI R. TROTTA A. (2022). *L'Icosaedro e le Cupole Geodetiche*, Periodico di Matematica, Anno XXXVII, vol. IV (1), marzo 2022, pp. 127-146.
- [C-W] CRICK F.H., WATSON J.D. (1956). *Structure of small viruses*, Nature 177, pp. 473-475.
- [Co] COXETER H.S.M. (1971). *Virus macromolecules and geodesic domes*, In C. Butcher, editor, A spectrum of mathematics, Oxford University Press/Auckland University Press, pp. 98-107.
- [Cr] CROMWELL P.R. (1997). *Polyhedra*, Cambridge Univ. Press
- [Cu] CUNDY M.H. (1952). *Deltahedra*, Math. Gaz. 36, Dec., pp. 263-266.
- [DA] D'ARCY THOMPSON W. (2003), *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino.
- [Fr] FRAJESE A., (1951). *La matematica nel mondo antico*, Editrice Studium, Roma.
- [Ga1] GASPAR O. (2021). *Bauersfeld's concept for the subdivision of the first built geodesic dome structure*, in Proceedings of the IASS annual symposium 2020/21 and the 7th international conference on spatial structures, pp. 1-10.
- [Ga2] GASPAR O. (2022). *The optimization process leading to the tessellation of the first geodesic dome structure, the first Planetarium of Jena*, International Journal of space structures, vol. 37 (1), pp. 49-64.
- [Go1] GOLDBERG M. (1935). *The isoperimetric problem for polyhedra*, Tohoku Mathematical Journal, 40, pp. 226-256.
- [Go2] GOLDBERG M. (1937). *A class of multi-symmetric polyhedral*, Tohoku Mathematical Journal, 43, pp. 104-108.
- [H-N-G] HAGHNAZAR R., NOOSHIN H., GOLABCHI M. (2014). *Improving the regularity of geodesic domes using the concept of stepping projections*, International Journal of Space Structures, vol. 29 N. 2.
- [In] INGBER D.E. (1998). *The architecture of life*, Sci Am. 278(1), pp. 48-57.
- [Jo] JOHNSON N. (1966). *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of Mathematics, 18, pp. 169-200.
- [K-H-OB-C-S] KROTO H.W., HEATH J.R., O'BRIEN S.C., CURL R.F., SMALLEY R.E. (1985). *C60: Buckminsterfullerene*, Nature 318, pp. 162-163.
- [Ke] KENNER H. (1976). *Geodesic Math and how to use it*, University of California Press.
- [Ki] KITRICK C., (1990) *A Unified Approach to Class I, II and III Geodesic Domes*, International Journal of space structures, vol. 5 n. 3&4, pp. 223-246.
- [Mo1] MORGAN G.J., (2004). *Early Theories of Virus Structure*, in: Cheng H., Hammar L. (eds), *Conformational Proteomics of Macromolecular Architectures*, Singapore: World Scientific, pp. 3-40.
- [Mo2] MORGAN G.J., (2006). *Virus Design, 1955-1962: Science Meets Art*, Phytopathology, 96, pp. 1287-1291.
- [Mo3] MORGAN G.J., (2006) *Why there was a Useful Plausible Analogy between Geodesic Domes and Spherical Viruses*, Hist. Phil. Life Sci. 28, pp. 215-236.
- [Sp] SPARAVIGNA A.C. (2015). *Un dodecaedro romano come strumento per misurare distanze*, PHILICA Article number 460.
- [Tu] TURNER F., (1965) *R.Buckminster Fuller, a technocrat for the counterculture*, in New views on R. Buckminster Fuller, Stanford University Press, pp. 146-159.
- [Tw] TWAROCK R., (2004) *A tiling approach to virus capsid assembly explaining a structural puzzle in virology*, J. Theor. Biol., vol. 26, pp. 477-482.
- [Va] VASARI G. (1991). *Le vite dei più eccellenti pittori, scultori e architetti*, Newton Compton Editori, Roma.
- [We] WENNINGER J.M. (1979). *Spherical models*, Cambridge University Press.



Raffaella Paoletti

Ricercatrice confermata dell'Università di Firenze, da molti anni è docente di Geometria presso la scuola di Ingegneria e di Matematica per il Design presso la Scuola di Architettura. È membro del GNSAGA.



Giuseppe Conti

Giuseppe Conti è stato professore di Analisi Matematica I e II e di Geometria del Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, di Metodi e Modelli Matematici per l'Architettura e di Istituzioni di Matematiche del Corso di Laurea in Architettura dell'Università di Firenze. Attualmente insegna Matematica e Geometria per il Design del Corso di Laurea in Product, Interior, Communication and Eco-Social Design e Istituzioni di Matematiche del Corso di Laurea in Architettura dell'Università di Firenze. Si è interessato di Analisi Funzionale; attualmente i suoi studi riguardano principalmente le applicazioni della matematica all'arte e alla musica. È stato invitato a tenere varie conferenze presso Istituti superiori, Associazioni culturali e Università italiane e straniere dove ha esposto i risultati delle sue ricerche. Nel 2002 ha vinto il premio internazionale "Pirelliaward" per la divulgazione scientifica tramite internet, primo matematico al mondo a vincere questo premio.

Un approccio asintotico alla teoria dei gruppi finiti

ANDREA LUCCHINI

Università degli Studi di Padova

E-mail: lucchini@math.unipd.it

Sommario: Nella letteratura dedicata allo studio dei gruppi finiti appare sempre più frequentemente la denominazione “asymptotic group theory”. Questa denominazione, un po’ generica, si riferisce a tutte quelle situazioni in cui si considera un invariante numerico associato allo studio dei gruppi finiti e ci si chiede se, escluse le oscillazioni anche notevoli che si osservano nell’insieme dei valori assunti dall’invariante in questione se si considera solo una porzione molto limitata di gruppi finiti, emerge un andamento più regolare e in qualche modo descrivibile se si allarga l’orizzonte a famiglie sempre più grandi. In altri termini si studia l’andamento asintotico dell’invariante in questione. In questa esposizione ci proponiamo di analizzare una serie di situazioni di questo tipo, concentrandoci su esempi che possono essere introdotti e descritti usando solo le nozioni più elementari della teoria dei gruppi.

Abstract: In the literature dedicated to the study of finite groups, the term ‘asymptotic group theory’ appears increasingly frequently. This somewhat generic term refers to all those situations where a numerical invariant associated with the study of finite groups is considered, and one wonders if, excluding the sometimes significant fluctuations observed in the set of values assumed by the invariant when considering only a very limited portion of finite groups, a more regular and somewhat describable pattern emerges when the horizon is broadened to increasingly larger families. In other words, the asymptotic behavior of the invariant in question is studied. In this exposition, we aim to analyze a series of situations of this type, focusing on examples that can be introduced and described using only the most elementary notions of group theory.

1. – Introduzione

Negli ultimi anni si parla sempre più frequentemente di “teoria asintotica dei gruppi”. È una denominazione un po’ vaga, che include situazioni e problematiche anche abbastanza diverse. In questa esposizione presterò particolare attenzione all’approccio asintotico alla teoria dei gruppi finiti, che si presta, a mio parere, a essere illustrato senza bisogno di troppe nozioni tecniche. In particolare vorrei concentrarmi su esempi che possono essere raccontati usando soltanto le nozioni di teoria dei gruppi che vengono impartite ai nostri studenti nei primi anni della laurea triennale in matematica.

L’idea di base è considerare un qualche invariante numerico collegato allo studio dei gruppi finiti, ad esempio il numero di sottogruppi di un gruppo finito, il numero di gruppi finiti di ordine assegnato, l’ordine medio di un elemento nel gruppo simmetrico. Se si considera solo un gruppo particolare, o una famiglia di pochi gruppi finiti, il valore assunto da quell’invariante appare in genere caotico e privo di particolare significato. Ma se ci si colloca a una opportuna distanza, osservando una porzione più ampia di gruppi, molto spesso si scopre una certa regolarità nel comportamento di quel particolare invariante. Può succedere che l’invariante considerato cambi fortemente, senza nessuna evidente regolarità. Però in molti casi, un’indagine più accurata rivela l’esistenza di limitazioni inferiori e superiori asintoticamente ottimali e in diversi casi si

Accettato: 9 giugno 2025.

osserva una maggiore regolarità se si considerano opportune sottofamiglie della famiglia dei gruppi presi in considerazione.

L'attenzione a risultati di questo tipo non è nuova. Incontreremo nei diversi esempi che prenderemo in considerazioni contributi databili all'inizio del secolo scorso, ma indubbiamente la ricerca in questa direzione è stata fortemente stimolata dallo sviluppo della "teoria computazionale dei gruppi". Nell'ideazione e implementazione di algoritmi che permettano di studiare i gruppi finiti con l'ausilio dei computer è molto importante avere stime asintotiche per poter analizzare l'efficienza di tali algoritmi.

Anche se concentrerò la mia attenzione su questioni collegate ai gruppi finiti, vorrei menzionare che i metodi e risultati descritti si applicano anche allo studio di gruppi infiniti, ad esempio collegando le proprietà strutturali di un gruppo infinito al comportamento asintotico di invarianti calcolati nella famiglia dei gruppi finiti che ne compaiono come immagini epimorfe.

2. – L'enumerazione dei gruppi finiti

1. Dato un numero intero positivo n , indichiamo con $f(n)$ il numero di gruppi di ordine n (contati a meno di isomorfismo). È naturale chiedersi se ci sia un qualche tipo di regolarità nell'andamento della successione $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Un esercizio alla portata di uno studente dei primi anni di un corso di studi in matematica è determinare i primi 15 valori di questa successione: si ha $f(n) = 1$ se $n \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 15\}$, $f(n) = 2$ se $n \in \{4, 6, 9, 10, 14\}$, $f(n) = 5$ se $n \in \{8, 12\}$. Questi primi valori non permettono di fare grandi previsioni sull'andamento della successione, ma anche chi non ha alcuna familiarità con la teoria dei gruppi è portato a congetturare che $f(n)$ sia uguale ad 1 se n è un numero primo, come di fatto insegnano ai nostri studenti. Determinare invece $f(16)$ è un esercizio troppo difficile. Furono Otto Hölder [21] e Jacob Young [49], nel 1893, i primi a provare che $f(16) = 14$.

Negli ultimi anni si è notevolmente sviluppata la teoria computazionale dei gruppi, che permette di studiare proprietà dei gruppi finiti per mezzo di un computer. Tra i risultati di maggior rilievo ottenuti c'è la costruzione, dovuta a Hans Ulrich Besche,

Bettina Eick e Eamon O'Brien [2] della completa libreria dei gruppi di ordine minore o uguale a 2.000. Possiamo pertanto usare questa libreria per determinare i primi 2.000 valori nella nostra successione. Evidenziamo i fatti seguenti: ci sono quasi 50 miliardi di gruppi di ordine minore o uguale a 2.000 (esattamente 49.910.531.351). D'altra parte, se analizziamo i valori ottenuti da $f(n)$ per $n \leq 2.000$, scopriamo che in 1.490 casi otteniamo valori inferiori a 10, in 1.863 valori inferiori a 100, in 1.952 valori inferiori a 1.000, in 1.992 valori inferiori a 10.000. Solo in 6 casi risulta $f(n) \geq 1.000.000$. Chi sono questi 6 valori? Eccoli:

$$\begin{aligned} f(2^8 \cdot 7) &= 1.083.553, \\ f(2^8 \cdot 3) &= 1.090.235, \\ f(2^8 \cdot 5) &= 1.116.461, \\ f(2^9) &= 10.494.213, \\ f(2^9 \cdot 3) &= 408.641.062, \\ f(2^{10}) &= 49.487.367.289. \end{aligned}$$

Da tutti questi valori si ricava soprattutto la seguente impressionante osservazione: più del 99% dei gruppi di ordine minore o uguale di 2.000 ha ordine 2^{10} .

Cosa abbiamo imparato a questo punto sulla nostra successione? In realtà ancora abbastanza poco, ma ci siamo resi conto che il valore $f(n)$ è particolarmente elevato quando c'è un primo che divide n con molteplicità elevata. Ci viene voglia di studiare una successione diversa. Fissiamo un primo p e vediamo come cresce la successione $\{f(p^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Per $p = 2$ disponiamo dei seguenti primi valori:

$$\begin{aligned} f(2) &= 1, f(2^2) = 2, f(2^3) = 8, f(2^4) = 14, f(2^5) = 51, \\ f(2^6) &= 267, f(2^7) = 2.328, f(2^8) = 56.092, \\ f(2^9) &= 10.494.213, f(2^{10}) = 49.487.367.289. \end{aligned}$$

Per $p = 3$, i valori noti sono i seguenti:

$$\begin{aligned} f(3) &= 1, f(3^2) = 2, f(3^3) = 5, f(3^4) = 15, \\ f(3^5) &= 67, f(3^6) = 504, f(3^7) = 9.310. \end{aligned}$$

In base a questi dati, per quanto limitati, ci si può aspettare che, comunque si fissi il primo p , la successione $\{f(p^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ tenda all'infinito molto velocemente. Ma quanto velocemente?

Una prima risposta la diede Graham Higman [20] nel 1960, dimostrando che, per ogni primo p e ogni

intero positivo m risulta

$$(2.1) \quad f(p^m) \geq p^{\frac{2}{27}(m^3-6m^2)}.$$

Pochi anni dopo, nel 1965, Charles Sims [47] diede una limitazione superiore al valore di $f(p^m)$ dimostrando

$$(2.2) \quad p^{\frac{2}{27}(m^3+O(m^{\frac{8}{3}}))} \geq f(p^m).$$

Le due disuguaglianze (2.1) e (2.2) si possono conglobare in un unico enunciato, che fornisce una indicazione molto precisa sull'andamento asintotico della successione $\{f(p^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$:

$$(2.3) \quad f(p^m) = p^{\frac{2}{27}m^3(1+o(1))}.$$

La precedente formula stimola la domanda: perchè proprio $2/27$? Non è molto difficile scoprirlo. Un ruolo chiave nello studio dei p -gruppi finiti è svolto dal loro sottogruppo di Frattini. Il sottogruppo di Frattini di un gruppo finito G è l'intersezione dei sottogruppi massimali di G . Nella sua dimostrazione, Higman prova che, fissati due interi positivi a, b con $a + b = m$, il numero di gruppi di ordine p^m il cui sottogruppo di Frattini ha indice p^a e ordine p^b è all'incirca $p^{\frac{a^2b}{2}}$: la funzione $\frac{a^2b}{2}$, soggetta al vincolo $a + b = m$, assume il suo massimo per $a = \frac{2}{3}m$ e questo massimo è per l'appunto $\frac{2}{27}m^3$.

Abbiamo visto così che la successione $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha un andamento asintotico ben determinato quando viene ristretta ai numeri interi positivi che sono potenza di primo. Ma cosa succede per i rimanenti valori?

Per affrontare questa questione dobbiamo richiamare la teoria di Sylow. Supponiamo $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ con $p_1, \dots, p_k$ primi distinti. I teoremi di Sylow ci garantiscono che un gruppo G di ordine n contiene un sottogruppo P_i di ordine $p_i^{a_i}$ per ogni $1 \leq i \leq k$ e tale P_i è univocamente determinato a meno di isomorfismo.

Consideriamo allora $P_1, \dots, P_k$ di ordini, rispettivamente, $p_1^{a_1}, \dots, p_k^{a_k}$. Quanti sono i gruppi di ordine n che hanno i sottogruppi di Sylow isomorfi a $P_1, \dots, P_k$? La risposta è stata fornita da László Pyber [42] nel 1993.

Sia $\mu = \max_{1 \leq i \leq k} a_i$ e siano $P_1, \dots, P_k$ gruppi di ordine $p_1^{a_1}, \dots, p_k^{a_k}$. Il numero di gruppi di ordine $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ con sottogruppi di Sylow isomorfi a $P_1, \dots, P_k$ è al più $n^{75\mu+16}$. Combinando questo risultato, la cui dimostrazione è particolarmente profonda e coinvolge in diversi passaggi la classificazione dei gruppi semplici finiti, con i risultati di Higman e Sims, si ottiene infine una stima asintotica dell'andamento della successione $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$(2.4) \quad f(n) \leq n^{\left(\frac{2}{27}+o(1)\right)\mu^2} \text{ per } \mu \rightarrow \infty.$$

Nonostante questo risultato di Pyber sia molto preciso e significativo, restano aperte affascinanti questioni. Per esempio abbiamo osservato prima che più del 99% dei gruppi di ordine ≤ 2.000 ha ordine 2^{10} . Questo suggerisce la seguente domanda, che non ha ancora trovato risposta: possiamo dire che il numero di gruppi di ordine al più n è "dominato" da $f(2^m)$ essendo 2^m la più grande potenza di 2 minore o uguale ad n ?

2. Invece di enumerare tutti i gruppi di ordine n , si possono contare solo i gruppi di ordine n che soddisfano a qualche ulteriore proprietà. Un contributo significativo in questa direzione è dovuto a Derek Holt [22]. Ricordiamo che un gruppo G è detto perfetto se non contiene nessun sottogruppo normale proprio N tale che G/N sia abeliano. Holt ha fornito una stima asintotica per il numero $h_{\text{perf}}(n)$ dei gruppi perfetti di ordine minore o uguale ad n , dimostrando che

$$(2.5) \quad n^{\frac{(\log_2(n))^2}{108} - \frac{13 \log_2(n)}{36}} \leq h_{\text{perf}}(n) \leq n^{\frac{(\log_2(n))^2}{48} + \log_2(n)}.$$

Utilizzando i risultati di Higman e Sims per stimare $h(n) = \sum_{m \leq n} f(m)$, Holt prova anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{\text{perf}}(n)}{h(n)} = 0,$$

in altre parole, parafrasando la battuta in un celebre film, "quasi nessun gruppo finito è perfetto". Anche in questo caso, i recenti sviluppi della teoria dei gruppi computazionali ci permettono di disporre di verifiche sperimentali di questo risultato: ci sono soltanto 15.768 gruppi perfetti di ordine al più 2.000.0000 [23]. Vale anche la pena di osservare che

circa il 46% di questi gruppi perfetti ha ordine $1.966.080 = 2^{17} \cdot 3 \cdot 5$.

3. Un gruppo finito di ordine n può essere generato con $\lceil \log_2(n) \rceil$ elementi, ma molto spesso basta un numero decisamente più basso di elementi. Ad esempio 2.149 dei 2.328 gruppi di ordine 2^7 possono essere generati con 4 elementi. È quindi interessante, fissato $d \in \mathbb{N}$, considerare il numero $f(n, d)$ di gruppi di ordine n generabili con d elementi e studiare l'andamento asintotico della successione $\{f(n, d)\}_{n \in \mathbb{N}}$. In [40] si prova che, per ogni primo p ,

$$(2.6) \quad f(p^m, d) \leq p^{\frac{(d+1)m^2}{2} + O(m)}.$$

Nel 2001 Alex Lubotzky [34] ha generalizzato questo risultato, provando che esiste una costante c tale che

$$f(n, d) \leq n^{cd \log_2(n)}$$

per ogni $n, d \in \mathbb{N}$. Questa stima è del corretto ordine di grandezza. Infatti Avinoam Mann [38] ha provato che per ogni $d > 1$ esiste una costante positiva c_d tale che $f(p^m, d) \geq p^{c_d m^2}$ per ogni potenza di primo p^m .

3. – Sottogruppi e classi di coniugio

1. Denotiamo con $\sigma(G)$ il numero di sottogruppi di un assegnato gruppo G . Recentemente, rendendo più preciso un risultato contenuto in [3], Marco Fusari e Pablo Spiga [17] hanno dimostrato che, per ogni gruppo finito G , risulta

$$\sigma(G) \leq c|G|^{\frac{\log_2(|G|)}{4}}$$

essendo

$$c = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^i}} \left(-1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}} \right) \sim 7.37197.$$

Questa stima è asintoticamente ottimale. Infatti se indichiamo con P_n il prodotto diretto di n gruppi ciclici di ordine 2 allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(|P_n|)}{|P_n|^{\frac{\log_2(|P_n|)}{4}}} = c.$$

Cosa possiamo dire se, invece di considerare tutti i sottogruppi di un gruppo finito, consideriamo solo quelli massimali? Nel 1961 Tim Wall [48] congetturò

che il numero di sottogruppi massimali di un gruppo finito G fosse al più $|G| - 1$ (questa sarebbe una stima ottimale, perchè il prodotto diretto di n gruppi ciclici di ordine 2 ha ordine 2^n e contiene esattamente $2^n - 1$ sottogruppi massimali). Lo stesso Wall provò che la congettura è vera per ogni gruppo finito risolubile. Nel 2007 Liebeck, Pyber e Shalev [32] provarono un enunciato più debole (esiste una costante c tale che ogni gruppo finito G contiene al più $2c|G|^{\frac{3}{2}}$ sottogruppi massimali) ma nello stesso lavoro dimostrarono anche che i gruppi semplici finiti, tranne un numero finito di possibili eccezioni, soddisfano alla congettura di Wall. Un inaspettato colpo di scena si verificò nel 2012. Per renderne conto, devo qui essere un po' più tecnico che nel resto di questa esposizione. Il lettore che abbia meno familiarità con le nozioni che sto per usare non si spaventi. È una breve parentesi che mi permetto, con la giustificazione che quello che sto descrivendo è stato uno degli eventi più significativi tra gli approcci asintotici alla teoria dei gruppi degli ultimi anni. Successivamente tornerò a utilizzare solo nozioni assolutamente di base. Scommettendo che la congettura fosse vera per tutti i gruppi semplici, il caso critico che si prospettava era quello del prodotto semidiretto di uno spazio vettoriale V con un gruppo semplice G che agisce su V irriducibilmente e fedelmente. Il conto del numero di sottogruppi massimali di tale prodotto semidiretto richiede il calcolo della dimensione del primo gruppo di coomologia $H^1(G, V)$. Nel 1986 Bob Guralnick aveva congetturato che tale dimensione fosse limitata da una costante assoluta valida in tutti i casi. In realtà, ai fini della congettura di Wall, quello che basta, e che è in ogni caso necessario, è limitare la dimensione di $H^1(G, V)$ in funzione del rango di Lie di G nel caso in cui G sia un gruppo semplice di tipo Lie. Nel giugno del 2012 fu organizzato, presso l'American Institute of Mathematics (San Jose, California), un workshop intitolato "Cohomology bounds and growth rates", dedicato a recenti sviluppi che sembravano prospettare un'imminente dimostrazione della congettura di Guralnick. Il terzo giorno del workshop Leonard Scott, uno degli organizzatori, riferì di alcune evidenze computazionali ottenute da un suo studente, Tim Sprowl, che prospettavano l'esistenza di esempi in cui la dimensione di $H^1(G, V)$ assumesse valori non

contrari alla congettura di Guralnick ma comunque superiori alle aspettative. Uno dei partecipanti al workshop, Frank Luebeck, era un esperto di teoria dei gruppi computazionale, e riuscì a far girare durante la notte un programma da lui implementato per effettuare computazioni proibitive che nessuno finora era riuscito a completare. Tra gli esempi che Luebeck riuscì a testare, se ne presentarono alcuni che smentirono sia la congettura di Guralnick che la congettura di Wall. Nei giorni successivi questo approccio portò a concludere che non solo la congettura di Wall era falsa, ma che si potevano esibire infiniti controesempi. È curioso tuttavia osservare che in tutti i controesempi noti, il numero di sottogruppi massimali di G è comunque inferiore a $|G|^{1+a}$, con $a < 1/1000$. Quindi seppur falsa, la congettura predice un numero di sottogruppi massimali di pochissimo inferiore a quello che in realtà sembra potersi verificare.

2. Ricordo che due elementi g_1, g_2 di un gruppo G si dicono coniugati in G se esiste $x \in G$ tali che $g_2 = x^{-1}g_1x$. La relazione di coniugazione è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza vengono dette classi di coniugazione. Indichiamo con $\kappa(G)$ il numero di classi di coniugazione di un dato gruppo G . Chiaramente $\kappa(G) \leq |G|$, e vale l'uguaglianza se e solo se G è un gruppo abeliano. Ma quanto più piccolo può essere $\kappa(G)$ rispetto a $|G|$? Una prima rilevante osservazione relativamente a questa domanda la si può trovare in un lavoro di Edmund Landau [30] del 1903. Rispondendo a un quesito proposto da Frobenius, Landau dimostra che, per ogni intero positivo t , esiste solo un numero finito di gruppi finiti G con $k(G) = t$. Come osservato da Richard Brauer, l'argomento usato da Landau permette di dimostrare che, per ogni gruppo finito G , risulta

$$\kappa(G) \geq \log_2(\log_2(|G|)).$$

Val la pena di osservare che, contrariamente a quanto si può essere portati a congetturare in base a questo risultato, esistono gruppi infiniti in cui tutti gli elementi diversi dall'identità sono tra loro coniugati.

In una sua famosa raccolta di problemi aperti, Brauer [4] propose di cercare una stima inferiore sostanzialmente più fine. Segue da un classico

risultato di Philip Hall che $\kappa(G) \geq \log_2(|G|)$ per ogni gruppo G finito e nilpotente, mentre Mark Cartwright [6] dimostrò che esiste una costante positiva a tale che, per ogni gruppo finito risolubile G , si ha $\kappa(G) \geq a(\log_2 |G|)^b$, con $b \sim 0.00347$. D'altra parte László Kovács e Charles Leedham-Green [28] hanno provato che per ogni primo dispari p esiste un gruppo P di ordine p^p con $\kappa(P) = (p^3 - p^2 + p + 1)/2$. Quindi esistono gruppi con ordine n arbitrariamente grande, ma con meno di $(\log_2(n))^3$ classi di coniugazione.

La migliore risposta alla questione proposta da Brauer è al momento quella data da Thomas Keller [27] nel 2011: esiste una costante $\epsilon > 0$, esplicitamente computabile, tale che per ogni gruppo G di ordine $n \geq 4$, risulta

$$k(G) \geq \frac{\epsilon \log_2 n}{(\log_2 \log_2 n)^7}.$$

3. Concludiamo questa sezione con un'altra domanda piuttosto naturale e concreta. Quanto è lontano un gruppo finito dall'essere abeliano? Formalizziamo meglio la domanda. Ogni gruppo finito G contiene sottogruppi abeliani (ad esempio tutti i suoi sottogruppi ciclici). Si può dire che almeno uno di questi sottogruppi abeliani ha ordine "grande" in funzione dell'ordine del gruppo G ?

Lo studio di questa questione comincia con un contributo di Paul Erdős e Ernst Gabor Straus [9] che nel 1976 hanno dimostrato che ogni gruppo di ordine n contiene un sottogruppo abeliano di ordine approssimativamente uguale a $\log_2 n$. Questo risultato è stato perfezionato da Pyber [43], dimostrando che esiste $\epsilon > 0$ tale che ogni gruppo di ordine n contiene un sottogruppo abeliano di ordine almeno $2^{\epsilon \sqrt{\log_2 n}}$.

Merita di essere menzionato un altro risultato asintotico contenuto in [9]. Denotiamo con $\alpha_t(G)$ il numero di t -uple ordinate di elementi di G che commutano a due a due. Risulta che $\frac{\alpha_t(G)}{\alpha_{t-1}(G)}$ tende all'infinito con il crescere dell'ordine di $|G|$.

4. – Il gruppo simmetrico

Riconsideriamo adesso alcune delle questioni proposte nella sezione precedente nel caso particolare del

gruppo simmetrico $\text{Sym}(n)$, ossia il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1, \dots, n\}$.

1. È ben noto che il numero di classi di coniugazione $\kappa(\text{Sym}(n))$ del gruppo simmetrico di grado n coincide con il numero di partizioni di n , ossia con il numero $p(n)$ di modi di scrivere n come somma di interi positivi, senza tener conto dell'ordine degli addendi. Determinare l'andamento asintotico di $\kappa(\text{Sym}(n))$ al crescere di n si riduce quindi a un problema di teoria dei numeri (qual è l'andamento asintotico della funzione di partizione?), a cui hanno dato soluzione Ramanujan e Hardy nel 1918. Ricordiamo anche un risultato di Kovács e Robinson [29], in base al quale $\kappa(G) \leq 5^{n-1}$ per ogni $G \leq \text{Sym}(n)$.

Cosa succede invece se consideriamo il numero $\sigma(\text{Sym}(n))$ dei sottogruppi di $\text{Sym}(n)$? Utilizzando un computer possiamo ricavare alcuni dati sperimentali, per farci una vaga idea della rapidità con cui cresce $\sigma(\text{Sym}(n))$ all'aumentare del valore di n . Nella seconda colonna della tabella successiva sono indicati i valori di $\sigma(\text{Sym}(n))$ al variare di n tra 1 e 12. Molti di questi sottogruppi sono tra di loro isomorfi, così nella terza colonna viene riportato il numero di sottogruppi di $\text{Sym}(n)$, contati a meno di isomorfismo.

1	1	1
2	2	2
3	6	4
4	30	9
5	156	16
6	1455	29
7	11300	55
8	151221	137
9	1694723	241
10	25594446	453
11	404126228	894
12	10594925360	2065

Come in altre situazioni descritte prima, ci si rende conto che $\sigma(\text{Sym}(n))$ cresce molto rapidamente. Una descrizione alquanto precisa dell'andamento asintotico della successione $\{\sigma(\text{Sym}(n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ è stata ottenuta solo recentemente da Colva Roney-Dougall e Gareth Tracey [45], che hanno provato il seguente

risultato: esistono due costanti $\alpha > 0$ e β tali che, per ogni $n > 1$, risulta

$$(4.1) \quad 2^{\frac{n^2}{16} + \alpha n \log n} \leq \sigma(\text{Sym}(n)) \leq 2^{\frac{n^2}{16} + \beta n^2}.$$

In [26] invece si dimostra che il numero di sottogruppi di $\text{Sym}(n)$, contati a meno di isomorfismo, è almeno $2^{\frac{n^2}{36} - o(n^2)}$. Si può calcolare che circa il 42% dei sottogruppi di $\text{Sym}(12)$ ha ordine potenza di 2. Si congettura che questa proporzione si avvicini ad 1 al crescere di n , ma manca ancora la dimostrazione di un risultato di questo tipo.

2. Ci si può anche chiedere con quale probabilità un sottogruppo casuale di $\text{Sym}(n)$ soddisfi a determinate proprietà permutazionali. Ad esempio è interessante studiare il numero $f_{\text{trans}}(n)$ di sottogruppi di $\text{Sym}(n)$ che sono transitivi (ricordiamo che $G \leq \text{Sym}(n)$ è transitivo se, per ogni $1 \leq i \leq j \leq n$, esiste $g \in G$ tale che $g(i) = j$). In [35] si dimostra che esiste una costante positiva β tale che

$$(4.2) \quad f_{\text{trans}}(n) \leq 2^{\frac{\beta n^2}{\sqrt{\log n}}}.$$

Combinando (4.1) e (4.2), si deduce che la probabilità che un sottogruppo casuale di $\text{Sym}(n)$ sia transitivo tende a zero quando n va all'infinito. A questo risultato si può collegare anche il seguente: con il tendere di n all'infinito tende a 1 la probabilità che un arbitrario elemento g di $\text{Sym}(n)$ abbia la proprietà che gli unici sottogruppi transitivi di $\text{Sym}(n)$ che lo contengono siano $\text{Sym}(n)$ e il gruppo alterno $\text{Alt}(n)$ [37].

3. Tra i sottogruppi transitivi di $\text{Sym}(n)$, sono particolarmente importanti quelli primitivi. Ricordiamo che un sottogruppo transitivo G di $\text{Sym}(n)$ è detto primitivo se le uniche partizioni di $\{1, \dots, n\}$ invarianti per l'azione di G sono quella che consiste degli n blocchi $\{1\}, \dots, \{n\}$ e quella che consiste dell'unico blocco $\{1, \dots, n\}$. In tantissimi casi, la dimostrazione di un qualsiasi risultato riguardante i gruppi di permutazione transitivi si riduce al caso primitivo, quindi non sarebbe sbagliato affermare che i gruppi primitivi svolgono nell'ambito dello studio dei gruppi di permutazione un ruolo paragonabile a quello svolto dai gruppi semplici nello studio dei gruppi finiti. Per $n \geq 3$, $\text{Sym}(n)$ e $\text{Alt}(n)$ sono primitivi. Un altro esempio di gruppo primitivo lo si ottiene quando n è

una potenza di primo, e si considera il gruppo delle permutazioni sugli elementi di un campo $\mathbb{F}$ con n elementi che mandano $x \in \mathbb{F}$ in $ax + b$, dove a e b sono arbitrari elementi di $\mathbb{F}$, con $a \neq 0$. Un risultato molto importante di Peter Cameron, Peter Neumann e David Teague [5] afferma che l'insieme Λ dei numeri naturali n per i quali $\text{Sym}(n)$ e $\text{Alt}(n)$ sono gli unici sottogruppi primitivi di $\text{Sym}(n)$ ha densità 1 nell'insieme $\mathbb{N}$ (ma attenzione, quello che succede per valori piccoli di n potrebbe trarre in inganno: 34 è il più piccolo elemento di Λ). Più precisamente, denotato con $\lambda(n)$ il numero degli interi positivi $m \leq n$ per i quali $\text{Sym}(m)$ contiene sottogruppi primitivi diversi da $\text{Sym}(m)$ e $\text{Alt}(m)$, si ha $\lambda(n) \sim 2n / \log_2 n$. In ogni caso, i sottogruppi primitivi di $\text{Sym}(n)$ sono comunque “pochi”. Esiste infatti una costante assoluta c tale che $\text{Sym}(n)$ contiene al più $n^{c \log n}$ classi di coniugio di sottogruppi primitivi [44]. Se n è un primo, allora tutti i sottogruppi transitivi di $\text{Sym}(n)$ sono primitivi, ma utilizzando il risultato precedente si può dimostrare che, fissato un primo p , il rapporto tra sottogruppi primitivi e sottogruppi transitivi di $\text{Sym}(p^u)$ tende a 0 quando u tende all'infinito.

Oltre che “pochi”, i sottogruppi primitivi di $\text{Sym}(n)$ sono anche “piccoli”. Quello di stimare l'ordine dei sottogruppi primitivi di $\text{Sym}(n)$ in funzione di n è stato uno dei problemi centrali della teoria dei gruppi nel diciannovesimo secolo, con contributi, tra gli altri, di Cauchy e Bertrand. Nel 1860 questo problema fu oggetto del Gran Premio dell'Accademia di Parigi. Il premio in quell'occasione non fu assegnato, sebbene tra i contendenti si annoveri anche Jordan. Utilizzando la classificazione dei gruppi semplici finiti, negli ultimi decenni sono stati dimostrati numerosi risultati significativi. Per esempio Cheryl Praeger e Jan Saxl [41] hanno dimostrato che un sottogruppo primitivo di $\text{Sym}(n)$, diverso da $\text{Alt}(n)$ e $\text{Sym}(n)$, ha ordine al più 4^n .

4. Un'altra domanda che ha stimolato diverse investigazioni è cosa si possa dire di un elemento casuale di $\text{Sym}(n)$. Questioni di questo tipo rientrano in quella che si suole chiamare “teoria statistica dei gruppi”. Ogni elemento del gruppo simmetrico si può scrivere come prodotto di cicli disgiunti e nel 1944 Goncharov [18] dimostrò che per quasi tutti i suoi elementi il numero di cicli coinvolti in questa decomposizione è all'incirca $\ln(n)$ (dove dicendo

“quasi tutti” si intende che le eccezioni sono al più $o(n!)$). Ma in questo contesto vanno menzionati soprattutto una serie di contributi dovuti a Paul Erdős e Pál Turán, apparsi tra il 1965 e 1973, e dedicati al comportamento asintotico dell'ordine di un elemento casuale di $\text{Sym}(n)$ [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. Ad esempio, in questi lavori è dimostrato che l'ordine $\text{ord}(x)$ di un elemento casuale x di $\text{Sym}(n)$ è all'incirca $e^{\frac{(\ln(n))^2}{2}}$, che tale ordine è divisibile per tutti i primi minori di $\ln(n) / \ln(\ln(n))$ e che il suo più grande fattore primo è approssimativamente $n / e^{\sqrt{\ln(n)}}$. Più precisamente, la distribuzione di $\ln(\text{ord}(x))$ è asintoticamente una distribuzione normale con mediana $\frac{1}{2} \ln^2 n$ e varianza $\frac{1}{3} \ln^2 n$. Questo contrasta fortemente con un classico risultato di Landau, in base al quale il massimo valore di $\ln(\text{ord}(x))$ è $(1 + o(1)) \sqrt{n \ln(n)}$.

5. – La congettura di Netto

1. Quello che discuteremo in questa sezione è un problema che origina dal paragrafo seguente, contenuto in un classico testo scritto da Eugen Netto [39] nel 1892: *If we arbitrarily select two or more substitutions of n elements, it is to be regarded as extremely probable that the group of lowest order which contains these is the symmetric group, or at least the alternating group. In the case of two substitutions the probability in favor of the symmetric group may be taken as about 3/4, and in favor of the alternating, but not symmetric, group as about 1/4.*

Formuliamo meglio quello che sta congetturando Netto. Partiamo dalla facile osservazione che se prendiamo a caso una coppia ordinata (x, y) di elementi in $\text{Sym}(n)$, con probabilità 1/4 entrambi questi elementi appartengono al sottogruppo $\text{Alt}(n)$, mentre con probabilità 3/4 almeno uno dei due elementi non vi appartiene. Secondo Netto, nel primo caso è molto probabile che il sottogruppo di $\text{Sym}(n)$ generato da x e y sia esattamente $\text{Alt}(n)$, mentre nel secondo caso molto probabilmente x e y generano l'intero gruppo simmetrico $\text{Sym}(n)$. Di conseguenza, quasi certamente il sottogruppo $\langle x, y \rangle$ generato da x e y coincide o con $\text{Alt}(n)$ o con $\text{Sym}(n)$. Definiamo dunque:

$$p_n := \frac{|\{(x, y) \in \text{Sym}(n) \times \text{Sym}(n) \mid \text{Alt}(n) \leq \langle x, y \rangle\}|}{|\text{Sym}(n)|^2}.$$

Anche in questo caso, possiamo usare un computer per determinare p_n quando n è piccolo. Nella tabella seguente vengono riportati i valori di p_n per $2 \leq n \leq 13$. I primissimi valori oscillano un po' e non rivelano ancora un preciso andamento, ma a partire da $n \geq 7$ la successione $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e già per $n \geq 12$ assume valori maggiori di 0.9.

2	0.750		8	0.795
3	0.722		9	0.859
4	0.542		10	0.875
5	0.633		11	0.894
6	0.588		12	0.903
7	0.794		13	0.913

Fu John Dixon [8] a confermare, nel 1969, la congettura di Netto, provando che $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$. Più precisamente $p_n \geq 1 - 2/(\ln(\ln(n)))^2$.

2. Voglio evidenziare una conseguenza poco evidente di questo risultato, legata a una questione concreta che emerge nell'ambito della teoria dei gruppi computazionale. Supponiamo di voler identificare computazionalmente, per un assegnato gruppo G e un intero positivo t “non troppo grande” un insieme $g_1, \dots, g_t$ di elementi di G tali che $G = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ testando t -uple in G^t scelte casualmente. Chiaramente t deve essere maggiore o uguale della cardinalità minima, che denoteremo con $d(G)$, di un insieme di generatori per G . Denotiamo con $P(G, t)$ la probabilità che una t -upla ordinata $(g_1, \dots, g_t) \in G^t$ generi G . Se $P(G, t)$ è troppo vicino a zero, la nostra ricerca di una t -upla di generatori fatta testando t -uple scelte casualmente ha scarse probabilità di avere successo. Quindi è importante scegliere t che sia sufficientemente grande per garantirci che $P(G, t)$ sia abbastanza elevato e nello stesso tempo il più piccolo possibile rispetto a $d(G)$. Fissato un numero reale positivo $\eta < 1$ la domanda che emerge è: *esiste una funzione $f_\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $P(G, f_\eta(d(G))) \geq \eta$ per ogni gruppo finito G ?* Il risultato di Dixon implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{Alt}(n), 2) = 1.$$

Inoltre è noto che per ogni $n \geq 5$,

$$P(\text{Alt}(n), 2) \geq P(\text{Alt}(6), 2) = 53/90.$$

Non è difficile dimostrare che, per $n \geq 5$, il prodotto diretto $(\text{Alt}(n))^u$ di u copie di $\text{Alt}(n)$ è generabile con 2 elementi se e solo se

$$u \leq \frac{P(\text{Alt}(n), 2) \cdot n!}{a_n}$$

con $a_n = 8$ se $n = 6$, $a_n = 4$ altrimenti. Ad esempio, essendo $P(\text{Alt}(5), 2) = \frac{19}{30}$, il prodotto diretto $(\text{Alt}(5))^{19}$ di 19 copie di $\text{Alt}(5)$ è generabile con 2 elementi. Ma si può anche dimostrare che la probabilità di generare con 2 elementi $(\text{Alt}(5))^{19}$ è molto bassa. Infatti segue ad esempio da [25 Proposition 9] che

$$P((\text{Alt}(5))^{19}, 2) = \frac{19!}{30^{19}} = \frac{2263261}{216243896484375000}.$$

Più in generale, da quanto detto sopra, segue che per $n \geq 7$ il gruppo $(\text{Alt}(n))^{\frac{n!}{s}}$ è 2-generato ma la probabilità che una coppia di elementi lo generi è pressoché nulla. Ma è molto peggio di così: Alex Lubotzky e Bill Kantor [25] hanno provato infatti il fatto seguente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((\text{Alt}(n))^{\frac{n!}{s}}, [\sqrt{n}]) = 0.$$

In particolare, fissato $k \in \mathbb{N}$, la probabilità che k elementi di $(\text{Alt}(n))^{\frac{n!}{s}}$ lo generino tende a zero al crescere di n . Questo dimostra che per nessun numero reale positivo η può esistere una funzione f_η con le proprietà prima auspiccate. Vale comunque un risultato più debole: per ogni $0 < \eta < 1$ esiste una costante c_η tale che, per ogni gruppo finito G , $P(G, d(G) + c_\eta \log_2 \log_2 |G|) \geq \eta$ [7].

3. Stime asintotiche sulla probabilità di generare un gruppo finito con un assegnato numero di elementi sono alla base di un algoritmo proposto in [36], per risolvere in tempo polinomiale il problema della generazione di un dato gruppo finito G , dove con “problema di generazione” si intende: determinare $d(G)$ e trovare un insieme di generatori di G di cardinalità $d(G)$. Più precisamente, chiamiamo “test di generazione” la verifica che un assegnato sottoinsieme di G lo generi. In [36] si dimostra che si può risolvere il problema di generazione per G effettuando al più $|G|^{13/5}$ test di generazione. Successivamente in [24] è stata presentata una variante stocastica dell'algoritmo proposto in [36] che permette di risolvere il problema di generazione per gruppi di permutazione di grado n con $O(n^2 \log n)$ test di generazione.

6. – Gruppi semplici

1. È ben noto che risale al 1984 il completamento della classificazione dei gruppi semplici finiti. Si tratta di un risultato chiave, si può dire il più rilevante, nell'ambito della teoria dei gruppi. D'altra parte la dimostrazione completa del teorema di classificazione è distribuita in circa 500 articoli, e riempie quasi 15.000 pagine a stampa. Sono in atto diversi progetti mirati a rivedere e migliorare la dimostrazione, ma finora nessuna sostanziale semplificazione è stata prodotta. Per questo, quando si dimostrano nuovi risultati in teoria dei gruppi, c'è sempre lo sforzo di usare con parsimonia (se possibile addirittura evitarla) la classificazione dei gruppi semplici. Ma è raro che si riescano a produrre risultati significativi senza far ricorso, in un modo o nell'altro, a proprietà dei gruppi semplici al momento dimostrabili solo usando la classificazione. Questo è ampiamente vero per la maggior parte dei risultati che ho esposto finora. Quasi tutti dipendono dalla classificazione, e alcuni di essi in maniera davvero pesante.

Sia come elemento base per dimostrare risultati più generali sia come argomento rilevante di per sé, il comportamento asintotico dei gruppi semplici finiti è stato ampiamente investigato.

2. Abbiamo visto nella sezione precedente che la probabilità di generare il gruppo alterno di grado n con due suoi elementi scelti a caso tende a 1 quando n tende all'infinito. Nel lavoro in cui lo dimostrò, Dixon congetturò che si trattasse del caso particolare di un risultato più generale. Una delle conseguenze della classificazione dei gruppi semplici è che ogni gruppo semplice può essere generato con 2 elementi. Quello che congetturò Dixon è che, facendo variare S nella famiglia dei gruppi semplici finiti, la probabilità che due elementi di S lo generino tende a 1 quando l'ordine di S va all'infinito. La congettura è vera e la dimostrazione viene dai risultati dimostrati in [25] e [33]. Val la pena di evidenziare un ingrediente fondamentale della dimostrazione. Se due elementi di S non lo generano, allora il sottogruppo che essi generano è contenuto in un sottogruppo massimale di S . Intuitivamente, più alto è il numero di sottogruppi massimali di S , più

bassa è la probabilità di generarlo con 2 elementi. Questo ha suggerito di introdurre una funzione zeta che codifica la crescita del numero di sottogruppi massimali di S in funzione del loro indice. Precisamente, considerato $\mathcal{M}$ l'insieme dei sottogruppi massimali di S , per ogni $t \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\zeta_S(t) = \sum_{M \in \mathcal{M}} |S : M|^{-t}.$$

In [31] è dimostrato che, fissato $t > 1$, $\zeta_S(t) \rightarrow 0$ per $|S| \rightarrow \infty$. La congettura di Dixon segue da questo risultato e dal fatto che $P(S, 2) \geq 1 - \zeta_S(2)$.

Non sorprende che l'abbondanza in un gruppo semplice S di coppie di elementi che lo generano abbia come conseguenza che per ogni $1 \neq x \in S$ esiste $y \in S$ tale che $S = \langle x, y \rangle$. Bob Guralnick e Bill Kantor [19] hanno provato che vale un risultato ancora più preciso: ogni gruppo semplice S contiene una classe di coniugazione C con la proprietà che, per ogni $1 \neq x \in S$, C contiene molti elementi (più di un decimo della cardinalità di C) tali che $S = \langle x, y \rangle$.

3. Siano G un arbitrario gruppo finito e X un suo sottoinsieme. Denotiamo con $\delta(G, X)$ il più piccolo intero d tale che ogni elemento di G si può scrivere come prodotto di al più d elementi di $X \cup X^{-1}$. Un facile argomento di conteggio mostra che $\delta(G, X) \geq \log_{2|X|}(|G|)$. In [1] si dimostra che esiste una costante assoluta γ tale che ogni gruppo semplice non abeliano S contiene un insieme di generatori X di cardinalità al più 7 e tale che $\delta(S, X) \leq \gamma \log_2 |S|$. È curioso osservare che non vale un risultato analogo per i gruppi abeliani. Infatti se $G = \langle X \rangle$ è un gruppo abeliano finito, allora
$$\delta(G, X) \geq \frac{1}{2} \left(|G|^{\frac{1}{|X|}} - 1 \right).$$

4. Tra i problemi ancora aperti nell'ambito dello studio dei gruppi semplici finiti c'è la conferma della seguente importante congettura di Thompson: ogni gruppo semplice finito non abeliano S contiene una classe di coniugio C tale che $S = C^2$, ossia ogni elemento di S può essere scritto come prodotto di due elementi di C . La congettura è stata verificata per diverse famiglie di gruppi semplici ma non ancora in generale. Nel 2007 Aner Shalev [46] dimostrò un risultato asintotico a supporto di tale congettura. Dato un numero reale positivo ϵ e un

gruppo semplice finito non abeliano S , denotiamo con $\pi_\epsilon(S)$ la probabilità che un elemento x scelto casualmente in S sia tale che $|C_x^2|/|S| \geq 1 - \epsilon$, essendo C_x la classe di coniugazione che contiene x . Risulta che, per ogni ϵ , $\lim_{|S| \rightarrow \infty} \pi_\epsilon(S) = 1$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] L. BABAI, W. KANTOR, A. LUBOTZKY, *Small-diameter Cayley graphs for finite simple groups*, European J. Combin. 10 (1989), no. 6, 507-522.
- [2] H. U. BESCHE, B. EICK, E. O'BRIEN, *A millennium project: constructing small groups*, Internat. J. Algebra Comput. 12 (2002), no. 5, 623-644.
- [3] A. BOROVIK, L. PYBER, A. SHALEV, *Maximal subgroups in finite and profinite groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 9, 3745-3761.
- [4] R. BRAUER, *Representations of finite groups, Lectures on modern mathematics*, Vol. I (ed. T. L. Saaty; Wiley, New York, 1963).
- [5] P. J. CAMERON, P. M. NEUMANN, D. N. TEAGUE, *On the degrees of primitive permutation groups*, Math. Z. 180 (1982) 141-149.
- [6] M. CARTWRIGHT, *A bound on the number of conjugacy classes of a finite soluble group*, J. London Math. Soc. (2) 36 (1987) 229-244.
- [7] E. DETOMI, A. LUCCHINI, *Crowns and factorization of the probabilistic zeta function of a finite group*, J. Algebra 265 (2003), no. 2, 651-668.
- [8] J. DIXON, *The probability of generating the symmetric group*, Math. Z. 110 (1969), 199-205.
- [9] P. ERDŐS, E. G. STRAUS, *How abelian is a finite group?*, Linear and Multilinear Algebra 3 (1975/76), no. 4, 307-312.
- [10] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On some problems of a statistical group-theory. I*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 4 (1965), 175-186.
- [11] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On some problems of a statistical group-theory. II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967), 151-163.
- [12] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On some problems of a statistical group-theory. III*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967), 309-320.
- [13] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On some problems of a statistical group-theory. IV*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 19 (1968), 413-435.
- [14] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On some problems of a statistical group theory. V*, Period. Math. Hungar. 1 (1971), no. 1, 5-13.
- [15] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On some problems of a statistical group theory. VI*, J. Indian Math. Soc. 34 (1970), no. 3-4, 3, 175-192 (1971).
- [16] P. ERDŐS, P. TURÁN, *On some problems of a statistical group theory. VII*, Period. Math. Hungar. 2 (1972), 149-163.
- [17] M. FUSARI, P. SPIGA, *On the maximum number of subgroups of a finite group*, J. Algebra 635 (2023), 486-526.
- [18] V. GONCHAROV, *Du domaine de l'analyse combinatoire*, (Russian) Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR] 8 (1944), 3-48.
- [19] R. M. GURALNICK, W. M. KANTOR, *Probabilistic generation of finite simple groups*, J. Algebra 234 (2000), no. 2, 743-792.
- [20] G. HIGMAN, *Enumerating p -groups. I: Inequalities*, Proc. London Math. Soc. (3) 10 (1960) 24-30.
- [21] O. HÖLDER, *Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4* , Math. Ann. 43 (1893), 301-412.
- [22] D. F. HOLT, *Enumerating perfect groups*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 1, 67-78.
- [23] A. HULPKE, *The perfect groups of order up to two million*, Math. Comp. 91 (2022), no. 334, 1007-1017. Minimal sized generating sets of permutation groups
- [24] D. F. HOLT, G. TRACEY, *Minimal sized generating sets of permutation groups*, arXiv:2404.03952 (2024).
- [25] W. KANTOR, A. LUBOTZKY, *The probability of generating a finite classical group*, Geom. Dedicata 36 (1990), no. 1, 67-87.
- [26] M. KASSABOV, B. A. TYBURSKI, J. B. WILSON, *Subgroups of simple groups are as diverse as possible*, Bull. London Math. Soc. 54 (2022) 213-232.
- [27] T. M. KELLER, *Finite groups have even more conjugacy classes*, Israel J. Math. 181 (2011), 433-444.
- [28] L. G. KOVÁCS, C. R. LEEDHAM-GREEN, *Some normally monomial p -groups of maximal class and large derived length*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 37 (1986), no. 145, 49-54.
- [29] L. G. KOVÁCS, G. ROBINSON, *On the number of conjugacy classes of a finite group*, J. Algebra 160 (1993), no. 2, 441-460.
- [30] E. LANDAU, *Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Diskriminante*, Math. Ann. 56 (1903), 671-676.
- [31] M. LIEBECK, M. BENJAMIN, A. SHALEV, *On conjugacy classes of maximal subgroups of finite simple groups, and a related zeta function*, Duke Math. J. 128 (2005), no. 3, 541-557.
- [32] M. LIEBECK, L. PYBER, A. SHALEV, *On a conjecture of G. E. Wall*, J. Algebra 317 (2007), no. 1, 184-197.
- [33] M.W. LIEBECK, A. SHALEV, *The probability of generating a finite simple group*, Geom. Dedicata 56 (1995), 103-113.
- [34] A. LUBOTZKY, *Enumerating boundedly generated finite groups*, J. Algebra 238 (2001), no. 1, 194-199.
- [35] A. LUCCHINI, F. MENEGAZZO, M. MORIGI, *Asymptotic results for transitive permutation groups*, Bull. London Math. Soc. 32 (2000) 191-195.
- [36] A. LUCCHINI, D. THAKKAR, *The minimum generating set problem*, J. Algebra 640 (2024), 117-128.
- [37] T. LUCZAK, L. PYBER, *On random generation of the symmetric group*, Combin. Probab. Comput. 2 (1993), 505-512.
- [38] A. MANN, *Avinoam Enumerating finite groups and their defining relations*, J. Group Theory 1 (1998), no. 1, 59-64.
- [39] E. NETTO, *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra*, Teubner, Leipzig, 1882, English transl. 1892, second ed., Chelsea, New York, 1964.
- [40] P. M. NEUMANN, *An enumeration theorem for finite groups*, Quart. J. Math. Oxford (2), 20 (1969), 395-401.
- [41] C. PRAEGER, J. SAXL, *On the orders of primitive permutation groups*, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), no. 4, 303-307.
- [42] L. PYBER, *Enumerating finite groups of given order*, Ann. of Math. (2) 137 (1993), no. 1, 203-220.

- [43] L. PYBER, *How abelian is a finite group? The mathematics of Paul Erdős*, I, 372-384, Algorithms Combin., **13**, Springer, Berlin, 1997.
- [44] L. PYBER, A. SHALEV, *Asymptotic results for primitive permutation groups*, J. Algebra **188** (1997), no. **1**, 103-124.
- [45] C. M. RONEY-DOUGAL, G. TRACEY, *Subgroups of symmetric groups: enumeration and asymptotic properties*, arXiv:2503.05416 (2025).
- [46] A. SHALEV, *Mixing and generation in simple groups*, J. Algebra **319** (2008), no. **7**, 3075-3086.
- [47] C. SIMS, *Enumerating p -groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **15** (1965), 151-166.
- [48] G. E. WALL, *Some applications of the Eulerian functions of a finite group*, J. Aust. Math. Soc. **2** (1961) 35-59.
- [49] J. YOUNG, *On the determination of the groups whose order is a power of a prime*, Amer. J. Math. **15** (1893), 124-178.



Andrea Lucchini

Andrea Lucchini è professore ordinario di Algebra presso l'Università degli Studi di Padova. I suoi interessi scientifici riguardano la teoria dei gruppi, con particolare attenzione all'approccio probabilistico e a questioni di tipo combinatorio. Ha pubblicato circa duecento articoli su riviste internazionali ed è stato responsabile nazionale di diversi progetti PRIN.

Omaggio a Mario Curzio

PATRIZIA LONGOBARDI

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

E-mail: plongobardi@unisa.it

MERCEDE MAJ

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

E-mail: mmaj@unisa.it

Sommario: *Con questo articolo si desidera ricordare la figura scientifica ed umana di Mario Curzio, e rendere omaggio ad uno studioso che ha dato un così grande contributo allo sviluppo dell'Algebra in Italia.*

Abstract: *With this article, we wish to honor the scientific and human qualities of Mario Curzio, and pay tribute to a researcher who made such a significant contribution to the development of Algebra in Italy.*

Mario Curzio si è spento nel pomeriggio del 7 settembre 2015. Se n'è andato in silenzio, con discrezione, con l'eleganza e la signorilità che ne hanno contraddistinto l'intera vita. Noi eravamo a Siena, dove avevamo organizzato, nell'ambito del XX Congresso dell'Unione Matematica Italiana, la Sezione Speciale di Algebra, la disciplina che Mario aveva tanto amato e contribuito a sviluppare in Italia.

Con questo articolo desideriamo rendergli omaggio e ricordarlo, come studioso profondo e rigoroso, come ricercatore curioso e originale, ma soprattutto come vero gentiluomo, persona squisita e piacevolissima.



Mario Curzio
Bressanone, 11/7/1928 – Napoli, 7/9/2015

Accettato: 29 maggio 2025.

Lo studioso ed il Maestro

Mario Curzio era nato a Bressanone l'11 luglio del 1928. Il padre Giuseppe era un noto magistrato, ma anche un celebre poeta e scrittore, brillante ed ironico, autore di numerosi romanzi e libri di poesie. La sua famiglia era poi formata dalla madre Grazia e dalla sorella Clemia, e Mario era affezionatissimo ad entrambe.

Il padre viaggiava molto con la famiglia, per motivi di lavoro, e questo sicuramente contribuì a sviluppare la flessibilità di Mario, la sua apertura mentale, la sua assenza di pregiudizi, il suo interesse per le diverse culture. Mario frequentò il liceo classico nel Castello di Torremaggiore in Basilicata, poi intraprese gli studi di Matematica a Napoli.

Nel 1951 l'importante incontro con il suo primo Maestro, Renato Caccioppoli. Egli stesso descrive il loro incontro nella bella intervista resa a Romano Gatto per Lettera Pristem, nel 1993, ([19]): «Da studente avevo già incontrato Caccioppoli molte volte. Ma a decidere i nostri rapporti fu l'esame di Analisi



Mario giovanissimo

Superiore, nel 1951. Esso faceva seguito ad un corso che egli aveva dettato per due soli studenti uditori, Gaetano Caricato ed io. L'esame andò molto bene e Caccioppoli mi propose di prendere la tesi con lui.»



Donato Greco, Renato Caccioppoli e Mario Curzio a Napoli

«Era il periodo in cui Caccioppoli si occupava di teoria della Misura e in particolare di quella teoria delle superfici che avrebbe poi condotto ai risultati fondamentali sulle superfici minime di Ennio De Giorgi, Enrico Giusti, Carlo Miranda, Enrico Bombieri,... Alla sua base stanno alcuni insiemi, che in seguito furono chiamati insiemi di Caccioppoli, definiti mediante assiomi. Caccioppoli riteneva che la definizione contenesse qualche elemento sovrabbondante e mi propose di determinarlo. Lo feci e questa fu la mia tesi.»

Nel 1952 Mario Curzio conseguì la laurea in Matematica a Napoli. Dopo la laurea, iniziò la sua carriera come Assistente straordinario, il suo primo incarico furono le esercitazioni al corso tenuto

dal Professor Guido Zappa. Un po' per le condizioni di salute di Caccioppoli, ma sicuramente tanto per la passione e l'amore che gli procurò subito la materia, Mario Curzio cominciò a lavorare in Algebra, con Zappa. Rimase però legatissimo a Caccioppoli, per cui nutriva affetto e graditudine; come ricorda Mario nell'intervista a Gatto: «Caccioppoli seguiva la mia carriera, si interessava di quello che facevo anche se non si trattava più di Analisi. Lo vedevo spesso, almeno una volta al mese, al di fuori dell'Università, si andava a cena o qualche volta si andava a casa sua.»

La collaborazione tra Curzio e Zappa continuò anche quando, nel novembre 1953, Zappa fu trasferito a Firenze.



Mario Curzio e Guido Zappa a Napoli

Nel 1958 Mario conseguì la libera docenza in Algebra Superiore, l'ultima a numero chiuso.



Antonio Zitarosa, Guido Zappa e Mario Curzio a Napoli

Tra la fine del 1959 e l'inizio del 1960, Curzio partì per Parigi con una borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Nell'intervista su lettera Pristem, Mario ricorda: «A Parigi, sotto la supervisione teorica di P. Dubreil che era professore a Parigi, ma sotto quella effettiva di Michel Lazard che, professore a Poitiers, abitava a Parigi, imparai parecchie cose e scrissi anche qualche lavoro». Sicuramente il periodo trascorso in Francia fu importantissimo per la crescita scientifica del giovane Curzio, in particolare egli fu influenzato tantissimo dalla Scuola bourbakista, da cui apprese l'eleganza e il rigore che caratterizzarono poi i suoi articoli, le sue conferenze, le sue lezioni ed i suoi libri.

Nell'ottobre del 1962 vinse una delle tre cattedre di Algebra messe per la prima volta a concorso in Italia, insieme con Giovanni Zacher e Giorgio Trevisan, e fu nominato professore a Bari. L'anno dopo il Ministero assegnò a Napoli una cattedra nuova che fu destinata all'Algebra, e così Curzio poté rientrare a Napoli. Mario raccontava sempre, commosso, la telefonata con cui il professor Miranda, nella primavera del 1963, gli comunicò la notizia.

Iniziò così la lunga e brillante carriera di Curzio a Napoli.



Lucio Lombardo Radice, Mario Curzio e Vittorio Dalla Volta a Napoli

Curzio fu un docente estremamente efficace, capace di entusiasmare, ma anche di incuriosire e stimolare. Le sue lezioni del corso di Algebra non erano mai facili o banali, e avevano il grande pregio di spingere lo studente alla riflessione e al ragionamento autonomo. Ricordiamo poi con grandissimo piacere i suoi corsi monografici su aspetti speciali della Teoria dei gruppi, della Teoria dei numeri, dell'Algebra in generale, uno diverso ogni anno; abbiamo ritrovato i suoi appunti, rigorosamente scritti a mano, con la sua calligrafia chiara e ordinatissima.

Fu impegnato anche in cariche amministrative e gestionali, negli anni fu, tra l'altro, Segretario della Facoltà di Scienze, Direttore dell'Istituto di Matematica, membro della Giunta di Dipartimento, Socio dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche e dell'Accademia Pontaniana, membro del comitato editoriale della rivista Ricerche di Matematica.

Anche a livello nazionale lavorò tantissimo per lo sviluppo dell'Algebra, ricordiamo, tra l'altro, il suo impegno nella Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana dal 1976 al 1979, ed i corsi

avanzati di avviamento alla ricerca da lui tenuti, organizzati dall'INdAM, Istituto Nazionale di Alta Matematica Francesco "Severi".



Adriano Barlotti e Mario Curzio

Curzio fu un Maestro molto particolare, mai invadente o opprimente, ma sempre pronto a lodare e ad entusiasmarsi per ogni risultato dei suoi allievi. Tra di essi ricordiamo, oltre alle autrici di questo articolo: Anna Bruna D'Andrea, Bianca Della Corte, Clorinda De Vivo, Gabriele Giordano, Francesco de Giovanni, Anna Franchetta, Silvana Franciosi, Antonella Leone, Salvatore Rao, Fernando Tuccillo.



Mario con Francesco de Giovanni



Mario con Mercede Maj

Era un grandissimo piacere parlare con Mario di Matematica, era uno studioso molto colto, non solo nel suo campo, la Teoria dei Gruppi, ma anche in Geometria, Logica, Analisi Matematica. Egli stesso ricorda con orgoglio, in un articolo dedicato a Carlo Miranda, le discussioni con il professore sul problema di Minkowski, avute in occasione della preparazione di un seminario a Pisa da parte di Miranda.



Mario Curzio

Con Mario era però un piacere parlare di tutto, di storia, letteratura, filosofia, musica ... e di sport naturalmente. Mario era un appassionato di tennis, sport che seguiva e praticava, e, come ogni buon napoletano, tifosissimo della squadra di calcio del Napoli. Quando, nel 1989, il Napoli vinse lo scudetto per la seconda volta, ci suggerì di andare tutti in Dipartimento vestiti di azzurro, il colore del Napoli.

Mario era legatissimo all'amata moglie Mariella, con cui formava una coppia affiatata e piacevolissima.



Mariella e Mario Curzio, negli anni '70

Segue una foto particolarmente cara ad una delle autrici di questo articolo: Mario, testimone di nozze al suo matrimonio, nel 1984, con Mariella.



Quest'altra foto è del 1989: in occasione di una gita in costiera sorrentina, con Bernhard Amberg, Mario e Mariella si fermarono a Piano di Sorrento, in visita ai genitori di Patrizia.



Mario e Mariella Curzio



Nel 1998 venne nominato Professore fuori ruolo e nel 2003 collocato a riposo. Dal 2004 è stato Professore Emerito dell'Università degli Studi di Napoli Federico II. Ma Mario Curzio non smise di studiare, ricordiamo la sua conferenza dal titolo "Gruppo di Galois secondo Galois", tenuta a Napoli nell'ottobre 2011, in occasione del convegno "Aspetti dell'Algebra Moderna", organizzato per il bicentenario della nascita di Galois.



Mario Curzio, Napoli 2011



Nikolai Vavilov con Mario Curzio, Napoli 2011

La produzione scientifica

Nella sua carriera di matematico Mario Curzio ha scritto più di 50 articoli e 6 libri. I suoi articoli trattano svariati argomenti ancora oggi molto attuali, ed hanno come tema per lo più la Teoria reticolare dei gruppi, gruppi di automorfismi, problemi combinatori in Teoria dei gruppi, svariati aspetti della Teoria dei gruppi finiti o infiniti.

Gli articoli sulla Teoria reticolare dei gruppi

Il primo lavoro di Mario Curzio (cfr. [C1]) tratta di un problema in Teoria dei reticoli posto da G.

Birkhoff nel suo testo [2]: dato un intero positivo N , determinare il minimo intero positivo $\psi(N)$ tale che ogni reticolo di ordine $\nu \geq \psi(N)$ contenga almeno un sottoreticolo d'ordine N . Curzio risolve il problema per i reticoli modulari di lunghezza 3, dove un reticolo L viene detto *modulare* se, per ogni $x, y, z \in L$, vale la legge modulare, cioè da $x \leq z$ segue $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Curzio prova che, per reticoli modulari di lunghezza 3, tale intero positivo, che indica con il simbolo $\psi_{M_3}(N)$, è strettamente maggiore di $2n^2 - 2n + 4$ e minore di $2m^2 - 2m + 5$, dove $n - 1$ è il massimo intero della forma p^k (p primo, $k \geq 1$) per cui si abbia $4n - 2 < N$ ed m il minimo intero positivo per cui si abbia $N \leq 2m + 4$. In particolare, in [C1] sono descritti tutti i reticoli modulari di lunghezza 3, è provato inoltre che dato un qualunque intero $m > 2$, ogni reticolo modulare di lunghezza 3, avente ordine $\nu \geq 2m^2 - 2m + 4$, possiede almeno un sottoreticolo proprio d'ordine $2m + 4$, e, se $\nu > 2m^2 - 2m + 4$, il reticolo possiede anche sottoreticoli di tutti gli ordini minori di $2m + 4$. Lo studio del problema di Birkhoff viene poi esteso ai reticoli sopramodulari e sottomodulari nel lavoro [C6]. Un reticolo L vien detto *sopramodulare* (*sottomodulare*) se è a catene limitate finite e, con $a, b \in L$, $a \vee b$ copre b se a copre $a \wedge b$ (risp. se b copre $a \wedge b$ ogni volta che $a \vee b$ copre a). È provato in [C6] che, per ogni $n \geq 7$, esistono reticoli sopramodulari di lunghezza 3, non complementati e non modulari, aventi ordine n , che ammettono sottoreticoli di tutti gli ordini $m < n$. Per reticoli sopramodulari di lunghezza 3, non complementati, il numero $\psi(N)$ del problema di Birkhoff vale dunque $N + 1$. Un risultato analogo vale per reticoli sottomodulari di lunghezza 3, non complementati. Lo studio dei reticoli sopramodulari di lunghezza 3, relativamente complementati, o complementati è molto più complesso, Curzio prova in [C6] che lo studio dei reticoli complementati può esser ricondotto al caso complementato. Si ricorda che un reticolo L dotato di minimo 0 e di massimo I vien detto *complementato* se ogni $x \in L$ ha complemento in L , esiste cioè $y \in L$ tale che $x \vee y = I$, $x \wedge y = 0$; un reticolo è *relativamente complementato* se ogni suo intervallo è complementato.

Nel lavoro [C7] viene introdotto il concetto di elemento join-quasi distributivo (meet-quasi distributivo). Un reticolo L è *distributivo* se in esso

vale una (e quindi l'altra) delle due relazioni equivalenti

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$$

per ogni $a, b, c \in L$,

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$

per ogni $a, b, c \in L$. Un elemento a di un reticolo L è *neutro* in L se, per ogni $x, y \in L$, il sottoreticolo generato da a, x, y è distributivo. Un elemento a di un reticolo L è *join-distributivo* in L se, per ogni $x, y \in L$,

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y),$$

meet-distributivo in L se, per ogni $x, y \in L$,

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y).$$

L'elemento a vien detto *join-quasi distributivo* in L se, per ogni $x, y \in L$ tali che $a \vee x = a \vee y$, si ha

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y),$$

meet-quasi distributivo in L se, per ogni $x, y \in L$ tali che $a \wedge x = a \wedge y$, si ha

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y).$$

Un reticolo L vien detto *join-quasi distributivo* (*meet-quasi distributivo*) se ogni suo elemento è join-quasi distributivo (*meet-quasi distributivo*).

Nei lavori [C7] e [C8] si prova che un reticolo sopramodulare (risp. sottomodulare) e join-quasidistributivo è distributivo.

Nel lavoro [C8] si caratterizzano inoltre gli elementi join-quasi distributivi, meet-quasi distributivi, join-distributivi, meet-distributivi e neutri nei reticoli sottomodulari godenti della seguente ulteriore proprietà: se $x, y \in L$ coprono $x \wedge y$, allora esiste un ulteriore elemento z che copre x, y e tale che $x \vee y = x \vee z = y \vee z$.

Sia G un gruppo e si denoti con $\mathcal{L}(G)$ l'insieme dei sottogruppi di G . È ben noto che $\mathcal{L}(G)$, ordinato per inclusione, è un reticolo, dove, se H, K sono sottogruppi di G , l'intersezione reticolare, il “meet” $H \wedge K$, è l'intersezione di H e K , e l'unione reticolare, il “join” $H \vee K = \langle H, K \rangle$, è il sottogruppo generato da H e K . L'origine dello studio della Teoria dei reticoli dei sottogruppi di un gruppo risale al 1928, ad un lavoro di Ada Rottländer sulla corrispondenza di Galois tra un'estensione di campi ed il suo gruppo

di Galois. Molti importanti studiosi di Teoria dei gruppi si sono interessati all'argomento, per esempio R. Baer, L.E. Sadovskii, M. Suzuki, G. Zappa (cfr. il testo di R. Schmidt [60]). In particolare sono stati studiati i gruppi per cui il reticolo $\mathcal{L}(G)$ gode di proprietà speciali, per esempio è distributivo, o modulare, o complementato. O. Ore, nel 1936, in [45] ha provato che $\mathcal{L}(G)$ è distributivo se e solo se G è localmente ciclico, gruppi con $\mathcal{L}(G)$ modulare sono stati caratterizzati da K. Iwasawa in [29] ed in [30], e da R. Schmidt in [59], gruppi con $\mathcal{L}(G)$ complementato o relativamente complementato sono stati studiati da G. Zacher in [70] e [72].

Gli elementi join-distributivi, meet-distributivi e gli elementi neutri nel reticolo $\mathcal{L}(G)$ dei sottogruppi di G sono stati caratterizzati da Zappa e da Suzuki (cfr. [75] e [66]). Nei lavori [C7], [C12], [C27], Curzio studia gli elementi join-quasi distributivi e meet-quasi distributivi nel reticolo $\mathcal{L}(G)$. In [C7] prova che ogni sottogruppo di un gruppo finito G è join-quasi distributivo in $\mathcal{L}(G)$ se e solo se è meet-quasi distributivo e ciò accade se e solo se G è un gruppo ciclico. In [27] Mario prova un risultato analogo per un qualunque gruppo abeliano A , ogni sottogruppo di A è join-quasi distributivo in $\mathcal{L}(A)$ se e solo se è meet-quasi distributivo, e ciò accade se e solo se A è un gruppo localmente ciclico. Più in generale, in [C27], Curzio prova che un sottogruppo H di un gruppo finito (o di un gruppo abeliano) G è join-quasi distributivo in $\mathcal{L}(G)$ se e solo se l'applicazione: $X \in \mathcal{L}(G) \mapsto X \vee H \in \mathcal{L}(G)$ è un endomorfismo reticolare, cioè se e solo se H è join-distributivo. Tale risultato è stato poi esteso a gruppi qualsiasi da F. Napolitani in [42].

I sottogruppi normali di G costituiscono un sottoreticolo $\mathcal{N}(G)$ di $\mathcal{L}(G)$. Un altro importante sottoreticolo di $\mathcal{L}(G)$ è il reticolo $\mathcal{R}(G)$ dei sottogruppi di composizione di G . Un sottogruppo H di un gruppo G viene detto *subnormale* in G se esiste una serie

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G,$$

viene detto un sottogruppo di *composizione* di G se esiste una serie

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$$

in cui i fattori H_{i+1}/H_i sono gruppi semplici. È noto che i sottogruppi subnormali di G non costituiscono sempre un sottoreticolo di $\mathcal{L}(G)$, mentre ciò accade

per l'insieme $\mathcal{R}(G)$ dei sottogruppi di composizione di G . Ovviamente, se G è un gruppo finito, i sottogruppi subnormali sono esattamente i sottogruppi di composizione, pertanto $\mathcal{R}(G)$ coincide con l'insieme dei sottogruppi subnormali di G . Infine, l'insieme dei laterali sinistri (destri) di tutti i sottogruppi di G , con l'insieme vuoto, è un sottoreticolo del reticolo dei sottoinsiemi di G , ordinato per inclusione; esso vien detto il reticolo $\mathcal{S}(G)$ dei laterali di G .

I lavori di Curzio [C2], [C4], [C7], [C9]-[C12], [C14]-[C16], [C18], [C21], [C22], [C24], [C26]-[C31], [C35], [C59] sono relativi allo studio della struttura di gruppi in cui tali reticoli hanno speciali proprietà, e di fino a che punto un gruppo è individuato da tali reticoli.

Nel lavoro [C28], vengono caratterizzati i gruppi per cui il reticolo $\mathcal{N}(G)$ è decomponibile nel prodotto diretto di due reticoli non banali. Viene provato il seguente notevole risultato. Sia G un gruppo, $\mathcal{N}(G)$ è decomponibile se e solo se esistono due sottogruppi caratteristici non banali H, K di G tali che $G = H \times K$ e fattori centrali non-banali X/Y di H e S/T di K sono periodici con ordini coprimi (dove un fattore X/Y di H è detto centrale se Y, X sono normali in H , $Y \leq X \leq H$ e $X/Y \leq Z(H/Y)$).

Il reticolo $\mathcal{N}(G)$ dei sottogruppi normali di G è ovviamente sempre modulare, nei lavori [C7] e [C12] vengono studiati i gruppi per cui $\mathcal{N}(G)$ è distributivo o complementato.

Nel lavoro [C7] è provato che $\mathcal{N}(G)$ è complementato se e solo se G è prodotto diretto di gruppi semplici. Viene provato inoltre che se G è un gruppo finito non avente sottogruppi normali di ugual ordine, allora $\mathcal{N}(G)$ è distributivo. Vale anche il viceversa se G è un T -gruppo risolubile finito (un T -gruppo G è un gruppo in cui la relazione di normalità è transitiva, tale cioè che se H, K sono sottogruppi di G , da H normale in K e K normale in G segue H normale in G). Ancora oggi non è nota una descrizione completa dei gruppi con $\mathcal{N}(G)$ distributivo, ulteriori successivi risultati parziali sono dovuti a Pazderski in [49], allo stesso Mario Curzio e Rodolfo Permutti in [C29], e alle autrici di questo articolo in [33].

Il reticolo $\mathcal{R}(G)$ dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito è stato studiato da molti autori. G. Zappa ha caratterizzato in [77] i gruppi finiti con $\mathcal{R}(G)$ modulare, ed in [75] i gruppi finiti risolubili

con $\mathcal{R}(G)$ distributivo. In particolare se G è un gruppo risolubile finito, $\mathcal{R}(G)$ è distributivo se e solo se G è a sottogruppi di Sylow ciclici. Più in generale, G. Zacher in [71] ha caratterizzato i gruppi finiti con $\mathcal{R}(G)$ distributivo. Curzio, in [C14], prova che, se G è un gruppo finito, $\mathcal{R}(G)$ è complementato se e solo ogni sottogruppo normale minimale di G è fattore diretto di G , e ciò accade se e solo se G è prodotto diretto di gruppi semplici, e se e solo se $\mathcal{R}(G)$ è relativamente complementato. Se G è risolubile, $\mathcal{R}(G)$ è riducibile se e solo se G è prodotto diretto di gruppi di ordini coprimi. Nel lavoro [C9] sono studiati i gruppi risolubili finiti per cui $\mathcal{R}(G)$ è una catena e viene provato che ciò accade se e solo se G è ciclico di ordine potenza di primo, oppure $|G| = p^\alpha q^\beta$, p, q numeri primi, $p > q$, i sottogruppi di Sylow di G sono ciclici e $C_G(P) = P$, dove P è l'unico p -sottogruppo di Sylow di G .

Gli elementi neutri nel reticolo $\mathcal{R}(G)$, dove G è un gruppo risolubile finito, sono studiati da Curzio in [C14]. Se A è neutro nel reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile finito, allora A è un sottogruppo caratteristico di G , e, se B è un sottogruppo subnormale di G e se $A \wedge B$ è normale in $A \vee B$, allora gli indici $|A : A \wedge B|$ e $|B : A \wedge B|$ sono primi tra di loro. Se G in più è un $\mathcal{T}$ -gruppo, tale proprietà caratterizza gli elementi neutri nel reticolo $\mathcal{R}(G)$.

Una bella survey sui risultati precedenti è contenuta nel lavoro [C26].

Il reticolo $\mathcal{S}(G)$ dei laterali di G viene studiato da Mario Curzio nei lavori [C3], [C4] e [C16]. Curzio prova in [C16] che $\mathcal{S}(G)$ è modulare se e solo se $|G| = 1$ oppure $|G|$ è un numero primo; è distributivo se e solo se $|G| \leq 2$; è riducibile se e solo se $|G| = 2$. Molto interessante è lo studio di quando $\mathcal{S}(G)$ è complementato. Curzio prova infatti che se G è finito o ciclico, allora $\mathcal{S}(G)$ è complementato, più in generale $\mathcal{S}(G)$ è complementato se ogni sottogruppo proprio di G è incluso in un sottogruppo massimale. Inoltre, se G è un gruppo finito, $\mathcal{S}(G)$ è relativamente complementato se e solo se lo è il reticolo $\mathcal{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G .

Un *isomorfismo* tra due reticoli è un'applicazione biettiva che conserva la relazione d'ordine, una *dualità* è un'applicazione biettiva che inverte la relazione d'ordine. Se G e $\bar{G}$ sono gruppi, un isomorfismo di $\mathcal{L}(G)$ in $\mathcal{L}(\bar{G})$ viene detto una *proiettività*.

Un interessante problema è lo studio di proprietà gruppali che sono invarianti per proiettività, tali cioè che se G e $\bar{G}$ sono gruppi, G gode di una proprietà e φ è un isomorfismo tra il reticolo $\mathcal{L}(G)$ e il reticolo $\mathcal{L}(\bar{G})$, allora anche $\bar{G}$ gode di tale proprietà. Per esempio la proprietà di essere ciclico o la proprietà di essere finito sono invarianti per proiettività. Molti studiosi hanno investigato questa problematica, per esempio Zappa e, indipendentemente M. Suzuki, hanno provato che la proprietà di essere un gruppo risolubile finito è invariante per proiettività. Nei lavori [C9], [C11], [C24], [C30] e [C31], Curzio affronta un problema analogo per i reticoli $\mathcal{N}(G)$ e $\mathcal{R}(G)$. In [C9] si prova che se G è un p -gruppo finito non ciclico, G_1 un gruppo risolubile ed esiste un isomorfismo di $\mathcal{R}(G)$ in $\mathcal{R}(G_1)$, allora G e G_1 hanno lo stesso ordine ed hanno isomorfo il reticolo dei sottogruppi. In [C11] viene esteso tale risultato ai gruppi nilpotenti, è provato infatti che se G è un gruppo nilpotente finito, $S_1, S_2, \dots, S_n$ i suoi sottogruppi di Sylow, ϕ un isomorfismo di $\mathcal{R}(G)$ in $\mathcal{R}(G_1)$, risulta $G_1 = \phi(S_1) \times \phi(S_2) \times \dots \times \phi(S_n)$, con $\mathcal{R}(S_i) \simeq \mathcal{R}(\phi(S_i))$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. In [C9] viene provato poi che se G è un gruppo supersolubile finito a sottogruppi di Sylow non ciclici ed esiste una dualità di $\mathcal{R}(G)$ in sé stesso, allora G è nilpotente.

Nei lavori [C21], [C24], [C30] e [C31], Curzio studia isomorfismi tra reticoli di sottogruppi normali. In [C21] e [C24] si prova che se G è un gruppo finito nilpotente a sottogruppi di Sylow non ciclici, G_1 un gruppo supersolubile e $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora anche G_1 è nilpotente e $|G| = |G_1|$; se poi G è abeliano e G_1 un qualunque gruppo finito tale che $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora $G \simeq G_1$. Analoghi risultati valgono se si assume che esiste una dualità tra $\mathcal{N}(G)$ e $\mathcal{N}(G_1)$. Nel lavoro [C30], uno dei più belli della produzione di Mario Curzio, i risultati precedenti vengono estesi a gruppi abeliani non necessariamente finiti. Viene provato infatti che se G è un gruppo abeliano periodico privo di componenti primarie localmente cicliche, G_1 un gruppo qualsiasi e $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora $G \simeq G_1$. Se poi G è un gruppo abeliano misto e G_1 è risolubile, e $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora $G \simeq G_1$. Infine se G è abeliano aperiodico dotato di due elementi indipendenti e G_1 è un gruppo risolubile, allora $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$ comporta $G \simeq G_1$.

Nel lavoro [C3] sono studiati isomorfismi tra i reticoli dei laterali $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$, dove G e G_1 sono

gruppi finiti. In particolare, rispondendo ad un problema posto da G. Birkhoff in [2], viene costruito un esempio di gruppi finiti non isomorfi, aventi isomorfi i reticoli dei laterali. È provato inoltre che se ω è un isomorfismo di $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$, esso non porta il reticolo dei sottogruppi di G nel reticolo dei sottogruppi di G_1 ; da ω è però deducibile un isomorfismo tra $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$ che porta il reticolo $\mathcal{L}(G)$ nel reticolo $\mathcal{L}(G_1)$. Vengono studiati infine gli isomorfismi ω tra i reticoli dei laterali $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$ che mandano $\mathcal{N}(G)$ in $\mathcal{N}(G_1)$, è dimostrato tra l'altro che i centri di G e G_1 si corrispondono in ω e sono isomorfi, e che ω trasforma i centralizzanti dei sottogruppi di G nei centralizzanti dei sottogruppi di G_1 .

Condizioni reticolari che assicurano la finitezza di un gruppo G vengono poi studiate nel lavoro [C18]. Un gruppo risolubile a condizione minimale o massimale sui sottogruppi e con $\mathcal{L}(G)$ complementato è finito. Una conclusione analoga vale per i gruppi risolubili per cui esista una dualità di $\mathcal{L}(G)$ in sé stesso, e per gruppi localmente finiti a condizione minimale, con $\mathcal{L}(G)$ relativamente complementato. Altri risultati sull'argomento sono contenuti in [C18] e nel lavoro [C35], che è un'interessante survey relativa a problemi di complementazione nel reticolo $\mathcal{L}(G)$, presentata da Curzio in una conferenza tenuta all'Istituto Nazionale di Alta Matematica il 13 dicembre 1967.

Articoli sugli automorfismi di gruppi

Negli articoli [C20], [C42], [C43], [C44], [C54] e [C55] viene affrontata una tematica ancora oggi molto attuale, lo studio degli automorfismi di un gruppo.

Un automorfismo ϕ del gruppo G vien detto *uniforme* se ogni elemento di G può essere scritto nella forma $[g, \phi] = g^{-1}g^\phi$, per un opportuno $g \in G$. Se G è finito, ovviamente un automorfismo è uniforme se e solo se non ha punti fissi, cioè se e solo se non esistono elementi $x \in G \setminus \{1\}$ tali che $x^\phi = x$. Un celebre teorema di Thompson (cfr. [67]) assicura che se un gruppo finito G possiede un automorfismo senza punti fissi di ordine primo p , allora G è nilpotente, di classe limitata in funzione di p (cfr. [21]). Il risultato non vale nel caso infinito, Zappa in [78] ha fornito un esempio di gruppo infinito risolubile

bile e non nilpotente, possedente un automorfismo di ordine primo senza punti fissi. Più in generale ogni gruppo libero possiede un automorfismo di ordine 2 senza punti fissi. Sempre in [78] però Zappa ha provato che un gruppo risolubile a condizione massimale è nilpotente, se possiede un automorfismo uniforme di ordine primo. Ciò suggerisce di considerare automorfismi uniformi invece che automorfismi senza punti fissi, allo scopo di estendere il teorema di Thompson ai gruppi infiniti. Nel lavoro [C20], in tale ordine di idee, Curzio mostra che un gruppo G a condizione minimale sui sottogruppi è nilpotente di classe limitata in funzione di p , se possiede un automorfismo uniforme di ordine primo p e se G soddisfa alcune condizioni aggiuntive, per esempio se G ha classi di coniugio finite. Mostra inoltre che un gruppo risolubile periodico che possiede un automorfismo di ordine primo senza punti fissi è nilpotente. La problematica è stata ripresa da molti autori, anche in tempi recenti, si vedano per esempio [23], [31], [32] e [50].

L'insieme di tutti gli automorfismi di un gruppo G , con la composizione di applicazioni, costituisce un gruppo, l'automorfo di G , denotato con $Aut(G)$. Molti autori hanno studiato la struttura di tale gruppo ed i suoi legami con la struttura di G . Per esempio, nel 1955, R. Baer ha provato che se G è un gruppo periodico e $Aut(G)$ è finito, allora G è finito; altri interessanti risultati sono dovuti a J.L. Alperin, V.T. Nagrebeckii, D.J.S. (Derek) Robinson, si vedano i lavori [C42] e [C44] di Mario Curzio per informazioni complete sull'argomento. Nel lavoro [C43], Curzio studia i gruppi G per cui ogni sottogruppo ha l'automorfo finito. Tra i vari interessanti risultati, egli prova che $Aut(H)$ è finito per ogni sottogruppo H di G se e solo se G è finito oppure G è estensione centrale finita di un sottogruppo dei razionali con i tipi tutti finiti. Inoltre $Aut(H)$ è finito per ogni sottogruppo proprio di G , ma $Aut(G)$ è infinito se e solo se G è isomorfo al gruppo di Prüfer $Z(p^\infty)$ per qualche primo p , oppure G è finitamente generato e non ha sottogruppi di indice finito; i cosiddetti *mostri di Tarski* mostrano che tale situazione si può presentare. I mostri di Tarski sono gruppi semplici infiniti a sottogruppi propri non banali di ordine un fissato primo p , tali gruppi esistono se il primo p è grande abbastanza ($p > 10^{75}$), come mostrato da Alexander Yu. Olshanskii (cfr. [44]).

Un automorfismo potenza di un gruppo G è un automorfismo che fissa ogni sottogruppo di G , e che dunque manda ogni elemento di G in una sua potenza. Gli automorfismi potenza di un gruppo G costituiscono un sottogruppo normale abeliano $PAut(G)$ di $Aut(G)$, che è stato molto studiato, per esempio da C.D.H. Cooper in [10]. Nel lavoro [C55], scritto con S. Franciosi e F. de Giovanni, vengono studiati gli I -automorfismi di un gruppo G , cioè gli automorfismi che fissano ogni sottogruppo infinito di G . L'insieme degli I -automorfismi di G viene denotato con $IAut(G)$; sono esaminati i gruppi G in cui $PAut(G) = IAut(G)$, o più in generale $IAut(G)$ è abeliano. Viene provato tra l'altro che $IAut(G) = PAut(G)$ se G è localmente risolubile non artiniano, e che $IAut(G)$ è abeliano se G non è un gruppo periodico, o se G è localmente finito non artiniano e non contiene un gruppo semplice infinito. Si noti che ogni automorfismo di un gruppo di Tarski è un I -automorfismo, ovviamente in tal caso $IAut(G)$ non è abeliano. Nel lavoro sono utilizzati interessanti metodi di natura coomologica. Omologia e coomologia di estensioni di gruppi vengono usate anche nel lavoro [C54], in cui sono studiati il gruppo $Aut_C(G)$ degli automorfismi centrali di un gruppo G , automorfismi cioè che inducono l'identità su $G/Z(G)$, ed il gruppo $PAut_C(G)$, gruppo degli automorfismi centrali di G che fissano i sottogruppi di $Z(G)$. È provato per esempio che se G è un gruppo nilpotente, sono equivalenti le condizioni seguenti: a) G ha esponente finito, b) $PAut_C(G)$ ha esponente finito, c) $PAut(G)$ è periodico.

Il lavoro citato in precedenza è scritto in collaborazione con Derek Robinson, Howard Smith e James Wiegold. Curzio è tra i primi studiosi italiani di Algebra ad aprirsi a collaborazioni internazionali. Negli anni '80 e '90 visitano il Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli, soprattutto in qualità di Professori Visitatori dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, molti tra i più brillanti ricercatori di Teoria dei gruppi provenienti da tutto il mondo, e Curzio collabora con molti di loro. Tra essi, oltre a quelli precedentemente ricordati, Kanta Gupta, con cui Mario scrive il lavoro [C58], Bernhard Amberg, Narain Gupta, Marcel Herzog, Avinoam Mann, John Wilson, Akbar Rhemtulla. Particolarmente produttiva la collaborazione con Derek Robinson e Akbar Rhemtulla, con cui Curzio scrive

alcuni dei suoi articoli più belli, su problematiche di tipo combinatorio nei gruppi infiniti.



Mario Curzio con Derek Robinson

Articoli su problemi combinatori in Teoria dei gruppi

Se n è un intero maggiore di 1, si dice che un gruppo G è totalmente n -riscrivibile (o G appartiene alla classe P_n) se, per ogni n -pla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di elementi di G , esiste una permutazione σ non banale di $\{1, 2, \dots, n\}$, tale che $x_1 x_2 \dots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$. Ovviamente un gruppo finito di ordine n appartiene alla classe P_{n+1} . Si ha $P_n \subseteq P_{n+1}$, per ogni n . Si denoti con P l'unione delle classi P_n . La proprietà P_n è stata introdotta e brevemente studiata da Kaplanski in [23]. Suggerita da considerazioni di carattere informatico, è stata poi studiata nei semigruppri da A. Restivo e C. Reutenauer. Essi hanno provato, in [51], che, se G è un semigruppri periodico e finitamente generabile e gode di P_n , per qualche intero positivo n , allora G è finito. In più, se G è un gruppo finitamente generabile nella classe P , Curzio ha provato, con le autrici di questo articolo, in [C48], che G è abeliano-per-finito, esiste cioè un sottogruppo normale abeliano A di G con il quoziente G/A finito. In [C51], il suo lavoro più citato, Curzio, con D.J.S. Robinson e con le autrici di questo articolo, ha provato che un gruppo G appartiene alla classe P se e solo se è finito-per-abeliano-per-finito, possiede cioè un sottogruppo normale di indice finito N con il derivato N' finito. Ovviamente un gruppo G appartiene alla classe P_2 se e solo se è abeliano, nel lavoro [C48] sono caratterizzati i gruppi in P_3 , viene provato infatti che G appartiene alla classe P_3 se e solo

se il derivato G' ha ordine al più 2. Si può dimostrare che un gruppo in P_4 ha sempre il derivato abeliano, i gruppi di ordine dispari in P_4 sono stati descritti da G. Higman, più in generale una completa classificazione dei gruppi finiti in P_4 è stata ottenuta da S.E. Stonehewer e dalle autrici di questo articolo in [35] e [40]. J. Alperin nel 1984, durante un seminario in Oxford (cfr. [6]), pose il problema di quale fosse il minimo intero n per cui esista un gruppo non risolubile in P_n . La risposta a tale problema è dovuta a R.D. Blyth e D.J.S. Robinson, in [7] e [8] infatti essi provano che ogni gruppo in P_7 è risolubile, mentre il gruppo alterno A_5 è un gruppo semplice in P_8 .

Negli ultimi quaranta anni, molte generalizzazioni della proprietà P sono state studiate, da molti autori. Per esempio, in [4] ed in [5], R.D. Blyth ha introdotto, per ogni n , la classe dei gruppi n -riscrivibili, denotata con il simbolo Q_n . Un gruppo G appartiene a Q_n se, per ogni n -pla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di elementi di G , esistono distinte permutazioni σ e τ di $\{1, 2, \dots, n\}$, tali che $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \dots x_{\tau(n)}$. Si denota con Q l'unione delle classi Q_n . Ovviamente $P_n \subseteq Q_n$, l'inclusione è stretta, infatti il gruppo simmetrico S_n su n oggetti, $n \geq 3$, soddisfa Q_n ma non soddisfa P_n . In [4] Blyth ha mostrato però che $G \in Q$ se e solo se G è finito-per-abeliano-per-finito, sicché $P = Q$. Risultati quantitativi sulle classi P_n e Q_n sono stati recentemente ottenuti da M.I. Elashitri e D.S. Passman e da D.S. Passman in [16] e in [48].

Un altro esempio di generalizzazione della proprietà P è negli articoli [52], [36] e [37], dove, fissato un intero n , vengono studiati gruppi in cui, per ogni n -pla $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ di sottogruppi di G , esiste una permutazione σ non banale di $\{1, 2, \dots, n\}$, tale che $H_1 H_2 \dots H_n = H_{\sigma(1)} H_{\sigma(2)} \dots H_{\sigma(n)}$.

Un altro problema di tipo combinatorio studiato da Curzio è collegato ad una questione posta da Paul Erdős: qual è la struttura dei gruppi in cui ogni sottoinsieme infinito contiene due elementi distinti che sono tra loro permutabili? B.H. Neumann ha provato in [43] che un gruppo G ha tale proprietà se e solo se G è centrale-per-finito, cioè $G/Z(G)$ è finito. Nel lavoro [C56] vengono studiati gruppi, detti PH -gruppi, in cui ogni insieme infinito di sottogruppi contiene una coppia di sottogruppi distinti che permutano tra loro, e gruppi, detti PH^* -gruppi, in cui ogni insieme infinito di sottogruppi ciclici contie-

ne due elementi distinti che permutano tra loro. Viene provato in [C56] che un gruppo risolubile finitamente generabile è un PH^* -gruppo se e solo se è un PH -gruppo, e se e solo se G è centrale-perfinito; un gruppo aperiodico è un PH^* -gruppo se e solo se è un PH -gruppo, e se e solo se G è abeliano.

In relazione a tale problematica, Curzio, nel lavoro [C57], studia gruppi con una proprietà che generalizza la n -riscrivibilità, precisamente gruppi G in cui, per ogni sottoinsieme infinito X di G , esistono n elementi $x_1, \dots, x_n$ in X tali che $x_1 x_2 \dots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$, per un' opportuna permutazione σ . Viene provato che un gruppo G soddisfa tale proprietà se e solo se esiste un sottogruppo normale H di G di indice finito, con $H/Z(H)$ di esponente finito e con H a classi di coniugio finite.

Articoli su vari aspetti della Teoria dei gruppi finiti e infiniti

In altri suoi lavori Curzio affronta svariati aspetti della Teoria dei gruppi finiti o infiniti. È interessante notare che molte delle problematiche studiate sono state poi riprese dopo molti anni anche da famosissimi studiosi di Teoria dei gruppi.

Nel lavoro [C13], presentato da R. Caccioppoli all'Accademia dei Lincei, nella seduta del 13 dicembre 1958, Curzio studia un'interessante classe di gruppi, che chiama $\mathcal{N}$ -gruppi: gruppi in cui ogni sottogruppo normale è unico nella sua cardinalità tra i sottogruppi di G . Egli prova che un gruppo risolubile finito è un $\mathcal{N}$ -gruppo se e solo se valgono le condizioni seguenti: (i) i sottogruppi di Sylow di G sono ciclici, o abeliani elementari, o isomorfi al gruppo dei quaternioni, (ii) se G possiede un sottogruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni, allora G è privo di sottogruppi normali di ordine $4d$, con d dispari, (iii) in ogni serie principale di G vi sono fattori di ordini uguali agli ordini di ciascun sottogruppo di Sylow di G abeliano elementare non ciclico. Inoltre un gruppo finito è un $\mathcal{N}$ -gruppo supersolubile se e solo se i suoi sottogruppi di Sylow sono ciclici. Un gruppo vien detto *supersolubile* se possiede una serie normale a fattori ciclici. Generalizzazioni della classe $\mathcal{N}$ sono state studiate negli anni successivi da J. Zhang [80], da M. Costantini e E. Jabara [11], e da F. de Giovanni e A. Russo. In particolare questi due autori, in [20], nel 2016, hanno

studiato la classe dei gruppi infiniti in cui ogni sottogruppo normale proprio è unico nella sua cardinalità tra i sottogruppi di G .

Una classe molto studiata negli anni '70 è la classe dei $\mathcal{T}$ -gruppi, gruppi in cui la relazione di normalità è transitiva, tali cioè che ogni sottogruppo subnormale è normale. Nei lavori [C36] e [C41] Curzio esamina i gruppi in cui ogni sottogruppo subnormale è caratteristico; ovviamente un gruppo con tale proprietà è un $\mathcal{T}$ -gruppo. I $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili finiti sono stati descritti da G. Zacher in [70] e da W. Gaschütz in [18]. Se G è un gruppo risolubile finito ed è un $\mathcal{T}$ -gruppo, allora G è prodotto semidiretto di un gruppo abeliano L di ordine dispari e di un gruppo H a sottogruppi tutti normali, di ordine primo con $|L|$, e ogni elemento di H agisce su L come un automorfismo potenza. Curzio trova in [C36] delle condizioni necessarie e sufficienti su L e H affinché un $\mathcal{T}$ -gruppo finito risolubile sia in più a sottogruppi subnormali caratteristici. Prova ad esempio che, con le notazioni precedenti, G è a sottogruppi subnormali caratteristici se e solo se L è ciclico, e, se $H^\alpha = H$ per qualche automorfismo α di G , si ha $S^\alpha = S$ per ogni sottogruppo S di H . Un altro interessante risultato relativo a tale classe di gruppi viene provato da Curzio in [C15]: un gruppo finito con il reticolo dei sottogruppi relativamente complementato è un $\mathcal{T}$ -gruppo risolubile a sottogruppi di Sylow abeliani elementari. I $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili infiniti sono stati studiati da D.J.S. Robinson in [53]. Robinson ha provato che un $\mathcal{T}$ -gruppo risolubile aperiodico è abeliano e studia i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili ripartendoli in quattro classi: a) i gruppi abeliani, b) i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili non abeliani tali che $C_G(G')$ possiede un elemento aperiodico, c) i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili non abeliani e non periodici tali che $C_G(G')$ è periodico, d) i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili non abeliani e periodici. Nel lavoro [C41], partendo da tali risultati di Robinson, Curzio studia i gruppi risolubili a sottogruppi subnormali caratteristici. Per esempio prova che un gruppo abeliano periodico con tale proprietà è localmente ciclico, che non esistono gruppi abeliani misti, o gruppi nella classe b) a sottogruppi subnormali caratteristici, e descrive completamente i gruppi a sottogruppi subnormali caratteristici nella classe c) e che coincidono con la chiusura normale di un elemento, o nella classe d) nell'ipotesi che sia finito

l'insieme dei primi che dividono gli ordini degli elementi di G . I $\mathcal{T}$ -gruppi sono ancora oggi molto studiati, si vedano per esempio gli articoli [17] e [56].

Un'interessante sottoclasse della classe dei $\mathcal{T}$ -gruppi è la classe degli IM -gruppi. Un gruppo G vien detto un IM -gruppo se ogni sottogruppo proprio di G è intersezione di una famiglia di sottogruppi massimali di G . F. Menegazzo in [39] ha provato che ogni IM -gruppo è un T -gruppo, ed ha ottenuto una caratterizzazione degli IM -gruppi risolubili. Curzio e S. Rao in [C45] studiano gli IM -gruppi in generale. In particolare, dopo aver osservato che un sottogruppo normale di un IM -gruppo è ancora un IM -gruppo, studiano la struttura del sottogruppo S generato dai sottogruppi normali minimali di un IM -gruppo G . Essi mostrano che se G è un IM -gruppo allora S è semplice, oppure è prodotto diretto di IM -gruppi semplici periodici tali che fattori non isomorfi hanno ordini coprimi e soddisfano opportune ulteriori proprietà. In particolare, se S è localmente finito, G possiede al più un sottogruppo normale minimale non abeliano. Successivamente, L. Di Martino e C. Tamburini in [15], utilizzando la classificazione dei gruppi semplici finiti, hanno provato che un IM -gruppo finito non è mai semplice, risultato già congetturato da Menegazzo e da Curzio e Rao. Si noti però che esistono IM -gruppi infiniti semplici, i mostri di Tarski godono infatti di tale proprietà. Anche lo studio degli IM -gruppi è stato poi ripreso negli anni successivi, ad esempio da U. Dardano nei lavori [13] e [14].

Nei lavori [C38], [C40] e [C48], Curzio affronta un altro problema molto studiato in Teoria dei gruppi finiti e infiniti. Sia $\mathcal{X}$ una classe di gruppi, si dice che un gruppo G è *minimale-non- $\mathcal{X}$* , o che $G \in \mathcal{X}_1$, se G non appartiene alla classe $\mathcal{X}$, ma vi appartiene ogni sottogruppo proprio di G . Più in generale, se n è un intero non negativo, si definisce la classe $\mathcal{X}_n$ ponendo $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ e, con $i \geq 0$, $G \in \mathcal{X}_{i+1}$ se $G \notin \mathcal{X}_0 \cup \dots \cup \mathcal{X}_i$, ma $U \in \mathcal{X}_0 \cup \dots \cup \mathcal{X}_i$, per ogni sottogruppo proprio U di G . Ovviamente la conoscenza dei gruppi nella classe $\mathcal{X}_1$ fornisce informazioni sui gruppi nella classe $\mathcal{X}$, più in generale lo studio dei gruppi in $\mathcal{X}_i$ fornisce informazioni sui gruppi appartenenti alle classi $\mathcal{X}_j$, $j < i$. Se $\mathcal{P} = \mathcal{A}$ è la classe dei gruppi abeliani, i gruppi minimali-non-abeliani sono stati studiati da G.A. Miller e H.C. Moreno in [41], la

classe $\mathcal{N}_1$, dove $\mathcal{N}$ è la classe dei gruppi nilpotenti, è stata studiata da O. Schmidt in [57] e, più recentemente, da A. Ballester-Bolínches, R. Esteban-Romero e D.J.S. Robinson in [1], la classe $\mathcal{N}_1^p$, dove $\mathcal{N}^p$ è la classe dei gruppi p -nilpotenti (p un primo) è stata studiata da N. Itô in [26]. Nell'articolo [C38], Curzio studia le classi $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_2^p$; tra i vari risultati ottenuti, Mario prova che il gruppo alterno $\mathcal{A}_5$ su 5 elementi è l'unico gruppo semplice nella classe $\mathcal{N}_2$, e che l'ordine di un qualsiasi $\mathcal{N}_2$ -gruppo finito è divisibile per al più tre primi distinti. Inoltre ogni $\mathcal{A}_2$ -gruppo finito è semplice (e dunque isomorfo ad $\mathcal{A}_5$), oppure è risolubile. Analogo risultato vale per i gruppi finiti nella classe $\mathcal{N}_1^p$, se $p > 5$. Nell'articolo [C48] Curzio studia poi i gruppi finiti minimali non metaciclici. Qui un gruppo G vien detto *metaciclico*, se G possiede un sottogruppo normale ciclico H con quoziente G/H ciclico. I p -gruppi finiti (p primo) minimali non metaciclici erano stati descritti da N. Blackburn in [3]; Curzio esamina il caso generale. Se G è un gruppo supersolubile minimale non metaciclico, egli prova che $|G|$ è divisibile per al più tre primi, e ottiene una completa descrizione della struttura di tali gruppi. Se G non è supersolubile, prova che G è minimale non metaciclico se e solo se vale una delle seguenti condizioni: (i) G è minimale nonabeliano di ordine p^2q^n ($p \neq q$ primi, il p -sottogruppo di Sylow G_p di G è normale in G); (ii) $G = Q_8 \rtimes \langle x \rangle$, dove $|x| = 3^n$ e x induce su Q_8 un automorfismo di ordine 3.

Gli articoli [C17], [C19] e [C33] trattano un problema duale, lo studio dei gruppi in cui ogni quoziente appartiene ad una classe $\mathcal{X}$. In particolare, in [C33], si studiano i gruppi a quozienti abeliani, in [C17] e [C19] i gruppi a quozienti supersolubili. Anche questa problematica è stata poi ripresa da molti celebri autori, per esempio da D.J.S. Robinson e J. Wilson in [55], e da L.A. Kurdachenko, J. Otal e I. Subbotin in [24].

Gli articoli [C5], [C32] e [C34] sono di Geometria algebrica.

Negli articoli [C23], [C25], [C32], [C39], [C50], [C52] e [C53] sono contenuti i risultati di alcune delle bellissime conferenze tenute da Mario, in tutta Italia ed in Francia. I primi due sono relativi a conferenze tenute da Mario durante il "Séminaire d'Algèbre", presso l'Istituto H. Poincaré di Parigi. Gli altri si riferiscono a conferenze tenute presso le Università

di Bari, di Milano, di Siena, di Palermo, dell'Aquila. Desideriamo solo citare la nota [C39], in cui sono illustrati risultati sui λ -moduli per i quali ogni sottomodulo proprio è contenuto in un sottomodulo massimale. Vengono presentate interessanti caratterizzazioni se λ è un anello principale. Come applicazione dei risultati ottenuti, nella nota [C37], viene ottenuta una caratterizzazione dei gruppi risolubili in cui ogni sottogruppo normale è incluso in un sottogruppo normale massimale.

Curzio ha poi scritto alcuni libri e monografie.

I testi [LC1] e [LC5] hanno uno scopo essenzialmente didattico. Il testo [LC1], "Complementi ed esercizi di Geometria descrittiva", scritto da Mario con Rodolfo Permutti, è una raccolta di esercizi e complementi al Corso di Geometria descrittiva tenuto dal Prof. Alfredo Franchetta. Il testo [LC5], "Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove d'esame svolte", scritto con le autrici di questo articolo, è una collezione di prove d'esame di Algebra svolte, raccolte negli anni.

Il testo [LC6], "Topics in Infinite Groups", curato in collaborazione con Francesco de Giovanni, è una collezione di articoli di autori vari, su svariati aspetti della Teoria dei gruppi infiniti.

Il testo [LC3], "Some Problems of Sylow Type in Locally Finite Groups", raccoglie le lezioni di un corso tenuto da Mario presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi" (INdAM), a Roma, nel semestre invernale 1975/76. Una prima edizione del testo venne pubblicata dall'Academic Press, nel 1979, ed è attualmente esaurita. Recentemente una nuova edizione è stata pubblicata dall'AGTA (Advances in Group Theory and Applications) nell'ambito della raccolta AGTA Lost Monographs. In esso vengono discussi alcuni argomenti della teoria dei gruppi localmente finiti. In particolare si studia il coniugio dei p -sottogruppi di Sylow in tale classe di gruppi, riportando risultati di A.O. Asar, B. Hartley, V.P. Šunkov, B.A.F. Wehrfritz. Si studiano inoltre, in tale classe di gruppi, teoremi di spezzamento tipo Schur-Zassenhaus, riportando risultati di J.D. Dixon e controesempi di L.G. Kovács, B.H. Neumann, H. de Vries.

Il testo [LC2] "Lezioni di algebra" deriva da corsi di Algebra tenuti dall'Autore presso l'Università di Napoli. Ma in realtà è molto di più di un testo di riferimento, è un vero e proprio manuale di Algebra,

completo e rigoroso, riferimento per studenti e ricercatori di Matematica. Tratta di Teoria degli insiemi, gruppi e anelli, moduli e spazi vettoriali, reticoli, campi e Teoria di Galois. Curzio ha chiesto la collaborazione delle autrici di questo articolo, e di questo gli saremo sempre infinitamente grate, per una nuova versione, [LC4], nella quale vengono aggiunti, oltre a numerosi esercizi, anche capitoli su Elementi di aritmetica, sulle Rappresentazioni dei gruppi finiti e due Appendici su Categorie e funtori e su Matrici e sistemi lineari.

Il testo "Lezioni di algebra" è ancora oggi utilizzato come testo di riferimento in corsi di Laurea Triennale e Magistrale in Matematica.

Conclusioni

La figura e l'attività di Mario Curzio sono state ricordate in un Convegno che si è tenuto a Napoli, il 25 gennaio 2016, cui hanno partecipato amici e colleghi da tutta Italia, studenti e vecchi allievi.

UNA GIORNATA DI ALGEBRA
nell'ambito delle attività del dottorato di ricerca in Scienze Matematiche

25 GENNAIO 2016
Monte S. Angelo
Sala Azzurra, Napoli UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

CONFERENZE www.gamc.unina.it

ALDO DE LUCA
(Università degli Studi di Napoli Federico II)

LINO DI MARTINO
(Università degli Studi di Milano-Bicocca)

FEDERICO MENEGAZZO
(Università degli Studi di Padova)

COMITATO SCIENTIFICO

FRANCESCO DE GIOVANNI
(Università di Napoli Federico II)

PATRIZIA LONGOBARDI
(Università di Salerno)

MERCEDE MAJ
(Università di Salerno)

INTERVENTI

V. Ancona, M. Bianchi, V. Bonanzinga, A. Caranti, L. Carbone, L. Centrone, C. Ciliberto, F. Dalla Volta, U. Dardano, G. Falcone, R. Gatto, F. Mazzocca, N. Melone, G. Moscarillo, G. Patrizio, G. Pirillo, C. Procesi, S. Rao, G. Restuccia, S. Rionero, A. Russo, C. Sbordone, C.M. Scoppola, E. Strickland, C. Toffalori, G. Trombetti, G. Vincenzi, T. Weigel

 **RICORDANDO MARIO CURZIO**

Una giornata di Algebra

La giornata si è svolta in un'atmosfera nostalgica, ma serena, a volte giocosa, come gli sarebbe piaciuta. Oltre alle tre interessanti conferenze di natura scientifica, molti sono stati gli interventi con ricordi ed aneddoti: si aveva proprio l'impressione che Mario fosse lì, presente con noi, sorridente a arguto come sempre.

In precedenza, l'8 e il 9 ottobre 1998, si erano tenute a Napoli "Due Giornate Dedicate a Mario Curzio", organizzate da noi suoi allievi, per festeggiare il suo 70° compleanno. In un'atmosfera gioiosa

e stimolante, dopo gli interventi delle autorità accademiche, si erano susseguite interessanti conferenze, tenute, tra l'altro, da alcuni dei più prestigiosi gruppisti del momento, quali Guido Zappa, Stewart Stonehewer, Bernhard Amberg, Herman Heineken, Cesarina Tibiletti, Roland Schmidt e da famosi matematici italiani, quali Daniele Mundici, Luigi Salce, Aldo de Luca. Il convegno aveva visto anche l'intervento di giovani promettenti gruppisti italiani e la partecipazione di più di novanta studiosi italiani e stranieri.

<i>Due Giornate Dedicate a Mario Curzio</i>		Venerdì 9 Ottobre 1998	
Complesso Universitario Monte S. Angelo - Centri Comuni		Chairman Federico Menegazzo	
Giovedì 8 Ottobre 1998		9.30 H. Heineken Groups generated by two mutually Engel periodic elements	
9.00 Registrazione		10.30 C. Tibiletti Gruppi S-semplfici rispetto alla permutabilità	
10.00 Inizio dei lavori Saluto ai partecipanti. Interventi di Ovidio Bucci, Carlo Ciliberto, Domenico Olanda, Guido Trombetti, Francesca Visentin.		11.20 Coffee Break	
11.00 Coffee Break		11.40 R. Schmidt Certain properties of lattices of normal subgroups, composition subgroups, and cosets	
Chairman Giovanni Zacher		12.40 F. Dalla Volta Gruppi con rango di presentazione positivo	
11.20 G. Zappa Sul reticolo dei centralizzanti dei sottogruppi di un gruppo: risultati e problemi		13.10 Buffet	
12.10 S.E. Stonehewer Permutation properties of groups		Chairman Martin Newell	
13.00 Buffet		15.00 L. Salce Gruppi abeliani, semigrupp di Clifford e domini di valutazione	
Chairman Lino Di Martino		16.00 O. Puglisi Immagini e rappresentazioni di gruppi finitari	
15.00 A. Leone Sottogruppi quasnormali nei gruppi infiniti		16.40 A. De Luca Parole e fattori speciali	
15.40 B. Amberg Radical rings		17.30 Termine dei lavori	
16.40 D. Mundici Approximating lattice-groups by free abelian groups with product ordering		Il Convegno è realizzato con il contributo finanziario di: Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università di Napoli Federico II Dipartimento di Matematica della Seconda Università di Napoli Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Salerno Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università di Salerno Università di Napoli	

Due Giornate Dedicate a Mario Curzio

L'Accademia Pontaniana ha bandito, nel 2019, un premio nazionale "Mario Curzio" per l'Algebra, riservato a studiosi di Teoria dei gruppi con meno di 33 anni, e non professori universitari. I vincitori ex-aequo sono risultati due "pronipoti" di Mario: Eugenio Gian-

nelli, allievo di Carlo Casolo, un allievo di Zappa, e Marco Trombetti, allievo di Francesco de Giovanni.

Molto libri della biblioteca privata di Mario sono conservati nella sede del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Salerno.



Dipartimento di Matematica,
Università degli Studi di Salerno

Nell'ambito del progetto INdAM-DMA, "I Luoghi di Caccioppoli", ad opera soprattutto dei Professori Luciano Carbone ed Ulderico Dardano, sono recentemente stati restaurati i locali dell'Istituto di Analisi Superiore, al IV piano di Via Mezzocannone 8, ed in essi è stata conservata la scrivania di Mario, utilizzata quindi ancora da allievi dei suoi allievi.

Il ricordo di Mario Curzio è ancora oggi perfettamente presente, non solo nella mente e nel cuore di chi, come noi, conserva nei suoi riguardi graditudine ed affetto. Attraverso i suoi scritti, i suoi allievi e gli allievi dei suoi allievi, Mario Curzio continua ad influenzare profondamente la formazione dei giovani matematici, e ad insegnare l'amore per l'Algebra ed il piacere di studiarla ed insegnarla.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BALLESTER-BOLINCHES, R. ESTEBAN-ROMERO, D.J.S. ROBINSON, On finite minimal non-nilpotent groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (12) 133 (2005), 3455-3462.
- [2] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, third edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.
- [3] N. BLACKBURN, Generalizations of certain elementary theorems on p -groups, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 11 (1961), 1-22.
- [4] R.D. BLYTH, Rewriting products of group elements, I, *J. Algebra*, 116 (1988), 506-521.
- [5] R.D. BLYTH, Rewriting products of group elements, II, *J. Algebra*, 118 (1988), 246-259.
- [6] R.D. BLYTH, D.J.S. ROBINSON, Recent progress on rewritability in groups, *Proceedings of the 1987 Singapore Group Theory Conference*, Walter de Gruyter and co., Berlin, 1989, 77-86.
- [7] R.D. BLYTH, D.J.S. ROBINSON, Solution of the solubility problem for rewritable groups, *J. London Math. Soc.*, 41 (1990), 438-444.
- [8] R.D. BLYTH, D.J.S. ROBINSON, Insoluble groups with the rewriting property P_8 , *J. Pure Appl. Algebra*, 72 (1991), 251-263.
- [9] W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.
- [10] C.D.H. COOPER, Power automorphisms of a group, *Math. Z.*, 107 (1968), 335-356.
- [11] M. COSTANTINI, E. JABARA, On Finite Groups in Which Cyclic Subgroups of the Same Order are Conjugate, *Comm. Algebra*, 37 (2009), 3966-3990.
- [12] M. CURZIO, Guido Zappa e la teoria dei gruppi, Atti del Convegno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di Guido Zappa, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., serie II*, 19 (1988), 19-34.
- [13] U. DARDANO, On groups with many maximal subgroups, *Ricerche Mat.*, (2) 38 (1989), 261-271.
- [14] U. DARDANO, Groups whose nonnormal subgroups are intersection of maximal subgroups, *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, (3) 6 (1992), 365-377.
- [15] L. DI MARTINO, M.C. TAMBURINI BELLANI, On the solvability of finite IM -groups, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 115 (1981), 235-242.
- [16] M.I. ELASHIRI, D.S. PASSMAN, Rewritable groups, *J. Algebra*, 345 (2011), 190-201.
- [17] R. ESTEBAN-ROMERO, G. VINCENZI, Characterizations of groups in which normality is a transitive relation by means of subgroup embedding properties, *Int. J. Group Theory*, (2) 7 (2018), 9-16.
- [18] W. GASCHÜTZ, Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist, *J. Reine Angew. Math.*, 198, 1957, 87-92.
- [19] R. GATTO, Ricordi e riflessioni di un matematico: Mario Curzio, *Lettera Pristem*, 9 (1994), 4-8.
- [20] F. DE GIOVANNI, A. RUSSO, A note on groups with few isomorphism classes of subgroups, *Colloquium Math.*, (2) 144 (2016), 265-271.
- [21] G. HIGMAN, Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, *J. London Math. Soc.*, 32 (1957), 321-334.
- [22] I. KAPLANSKY, Groups with representations of bounded degree, *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 105-112.
- [23] L.G. KOVACS, Groups with uniform automorphisms, Atti del Convegno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di

- Guido Zappa, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, serie II, **19** (1988), 125-133.
- [24] L. KURDACHENKO, J. OTAL, I. SUBBOTIN, *Groups with Prescribed Quotient Groups and Associated Module Theory*, Series in Algebra, Vol. 8, World Scientific, 2002.
- [25] A.G. KUROSH, *The theory of groups*, 2nd edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1953.
- [26] N. ITÔ, Note on (LM) -groups of finite order, Technical report, *Kodai Math. Seminar Report*, 1951.
- [27] S.G. IVANOV, Standard and dually standard elements of the subgroup lattice of a group, *Algebra i Logika*, **8** (1969), 440-446.
- [28] S.G. IVANOV, L -homomorphisms of locally soluble torsion-free groups, *Mat. Zametki*, (5) **37** (1985), 627-635.
- [29] K. IWASAWA, Über die Endliche Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sect. I*, **4** (1941), 171-199.
- [30] K. IWASAWA, On the structure of infinite M -groups, *Jap. J. Math.* **18** (1943), 709-728.
- [31] E. JABARA, Gruppi Policiclici Dotati di un Automorfismo Uniforme di Ordine pq , *Rend. Circ. Mat. Palermo*, (3) **54** (2005), 367-380.
- [32] E. JABARA, Sugli automorfismi uniformi e privi di coincidenze dei gruppi infiniti, *Boll. Un. Mat. Ital. B*, (2) **10** (2007), 501-510.
- [33] P. LONGOBARDI, M. MAJ, Finite groups with nilpotent derived subgroup, having a distributive lattice of normal subgroups, *J. Algebra* (1) **101**, (1986), 251-261.
- [34] P. LONGOBARDI, M. MAJ, On groups in which every product of four elements can be reordered, *Arch. Math* **49** (1987), 15-19.
- [35] P. LONGOBARDI, S.E. STONEHEWER, Finite 2-groups of class 2 in which every product of four elements can be reordered, *Arch. Math* **35** (1991), 198-209.
- [36] P. LONGOBARDI, M. MAJ, A.H. RHEMTULLA, Periodic groups with permutable subgroup products, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* (3) **106** (1989), 431-437.
- [37] P. LONGOBARDI, M. MAJ, A.H. RHEMTULLA, Residually solvable PSP-groups, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) **7** (1993), 253-261.
- [38] M. MAJ, S.E. STONEHEWER, Nilpotent groups in which every product of four elements can be reordered, *Canad. J. Math.* (4) **2** (1990), 1053-1066.
- [39] F. MENEGAZZO, Gruppi nei quali ogni sottogruppo è intersezione di sottogruppi massimali, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. Nat.*, (8) **48** (1970), 559-562.
- [40] F. MIGLIORINI, L. SERENA, Ricordo di Guido Zappa, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli*, **LXXXIII** (2016), 1-13.
- [41] G.A. MILLER, H.C. MORENO, Nonabelian groups in which every subgroup is abelian, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **4** (1903), 398-404.
- [42] F. NAPOLITANI, Elementi $\cup$ -quasi distributivi nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo, *Ricerche Math.*, **14** (1965), 93-101.
- [43] B.H. NEUMANN, A problem of P. Erdős on groups, *J. Austral. Math. Soc.*, **21** (1976), 4589-463.
- [44] A. YU. OL'SHANSKII, An infinite group with subgroups of prime orders, *Math. USSR Izv.*, **16** (1981), 279-289; translation of *Izvestia Akad. Nauk SSR Ser. Matem.* **44** (1980), 309-321.
- [45] O. ORE, Structures and group theory I, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 149-173.
- [46] O. ORE, Structures and group theory II, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 247-269.
- [47] O. ORE, Contribution to the theory of groups of finite order, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 431-460.
- [48] D.S. PASSMAN, Permutational and rewritable groups, *Proc. AMS*, **147** (2019), 2539-2555.
- [49] G. PAZDERSKI, Über Gruppen mit isomorphen Subnormalteilerverbände, *Publ. Math. Debrecen*, **19** (1972), 1-19.
- [50] C.E. PRAEGER, C. SCHNEIDER, Group factorisations, uniform automorphisms and permutation groups of simple diagonal type, *Israel J. Math.*, **228** (2018), 1001-1023.
- [51] A. RESTIVO, C. REUTENAUER, On the Burnside problem for semigroups, *J. Algebra*, **89** (1984), 102-104.
- [52] A.H. RHEMTULLA, A.R. WEISS, Groups with permutable subgroup products, *Proceedings of the 1987 Singapore Group Theory Conference*, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1989, 485-495.
- [53] D.J.S. ROBINSON, Groups in which normality is a transitive relation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 21-38.
- [54] D.J.S. ROBINSON, *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Parts 1-2, Springer, 1972.
- [55] D.J.S. ROBINSON, J. WILSON, Soluble groups with many polycyclic quotients, *Proc. London Math. Soc.* **48** (1984), 193-229.
- [56] A. RUSSO, Groups in which normality is a transitive relation, *Comm. Algebra*, **40** (2012), 3950-3954.
- [57] O.J. SCHMIDT, Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind, *Mat. Sbornik*, **31** (1924), 366-372.
- [58] O.Ju. SCHMIDT, *Abstract Theory of Groups*, W.H. Freeman and Co., 1966 (Translation by F. Holling and J.B. Roberts of the 1916 Russian edition).
- [59] R. SCHMIDT, *Gruppen mit modularer Untergruppenverband*, *Archiv Math*, **46** (1986), 118-124.
- [60] R. SCHMIDT, *Subgroup Lattices of Groups*, de Gruyter Exp. Math., **14**, de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [61] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Dual-standard subgroups of finite and locally finite groups, *Manuscripta Math.*, **70** (1991), 115-132.
- [62] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Lattice homomorphisms of non-periodic groups, *J. Algebra*, **138** (1991), 48-90.
- [63] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Lattice homomorphisms of groups and dual standard subgroups, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **23** (1990), 289-297.
- [64] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Dual standard subgroups in non-periodic locally soluble groups, *Accad. Naz. Lincei*, **9** (1990), 101-104.
- [65] M. SUZUKI, On the lattice of subgroups of finite groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 345-71.
- [66] M. SUZUKI, On the L -homomorphisms of finite groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 372-386.
- [67] J.G. THOMPSON, Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 578-581.
- [68] U. TIBERIO, Sottogruppi duali standard nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo localmente finito e numerabile, *Matematiche (Catania)*, **24** (1969), 416-428.
- [69] G. ZACHER, Conoscenze attuali relative ad alcuni aspetti del reticolo dei sottogruppi di un gruppo, *Atti del Conve-*

gno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di Guido Zappa, *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, serie II, **19** (1988), 39-60.

- [70] G. ZACHER, Determinazione dei gruppi di ordine finito relativamente complementati, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, (4) **19** (1952), 200-206.
- [71] G. ZACHER, Caratterizzazione dei t -gruppi risolubili finiti, *Ricerche Math.*, **1** (1952), 287-292.
- [72] G. ZACHER, Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **22** (1952), 113-122.
- [73] G. ZACHER, Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **27** (1957), 75-79.
- [74] G. ZACHER, Sui gruppi risolubili finiti col reticolo dei sottogruppi di composizione dotato di duale, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **32** (1962), 325-327.
- [75] G. ZAPPA, Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, (4) **18** (1951), 22-28.
- [76] G. ZAPPA, Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 8*, **11** (1956), 150-157.
- [77] G. ZAPPA, Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare, *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 8*, **11** (1956), 315-318.
- [78] G. ZAPPA, Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch, *Ricerche Mat.*, **7** (1958), 1-13.
- [79] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Bd.1, **21**, Hamburg. Math. Einzelschriften, B.G. Teubner, 1937.
- [80] J. ZHANG, Structure of finite ISO-groups, *Comm. Algebra*, **23** (1995), 1605-1612.

ARTICOLI DI MARIO CURZIO

- [C1] M. CURZIO, Alcune limitazioni sul minimo ordine dei reticoli modulari di lunghezza 3 contenenti sottoreticoli d'ordine dato, *Ricerche Mat.* **2** (1953), 140-147.
- [C2] M. CURZIO, Su di un particolare isomorfismo di struttura, *Ricerche Mat.* **2** (1953), 288-300.
- [C3] M. CURZIO, I gruppi finiti che sono somma di tre o quattro laterali di sottogruppi propri, *Boll. Un. Mat. Ital.* **10** (1955), 228-232.
- [C4] M. CURZIO, Gli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi d'un gruppo, *Ricerche Mat.* **4** (1955), 3-14.
- [C5] M. CURZIO, Una osservazione sui piani grafici h - l transitivi, *Boll. Un. Mat. Ital. III. Ser.* **11** (1956), 238-241.
- [C6] M. CURZIO, Su di una questione proposta da G. Birkhoff, *Ricerche Mat.* **6** (1957), 27-33.
- [C7] M. CURZIO, Alcune osservazioni sul reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito, *Ricerche Mat.* **6** (1957), 96-110.
- [C8] M. CURZIO, Sui reticoli U -quasi distributivi, *Ricerche Mat.* **6** (1957), 237-240.
- [C9] M. CURZIO, Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti, *Boll. Un. Mat. Ital. III Ser.* **12** (1957), 284-289.
- [C10] M. CURZIO, Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è autoduale, *Matematiche (Catania)* **12** (1957), 74-79.

- [C11] M. CURZIO, Sui gruppi φ -isomorfi ad un gruppo speciale finito, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., IV Ser., Napoli* **24** (1957), 70-75.
- [C12] M. CURZIO, Sugli elementi $\cap$ e $\cup$ -quasi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito, *Convegno internaz. Reticoli Geom. proiettive, Palermo-Messina 1957* (1958), 79-80.
- [C13] M. CURZIO, Sugli N -gruppi risolubili, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **25** (1958), 447-452.
- [C14] M. CURZIO, Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti, *Ricerche Mat.* **7** (1958), 265-280.
- [C15] M. CURZIO, Su alcuni gruppi complementati, *Ricerche Mat.* **8** (1959), 172-179.
- [C16] M. CURZIO, Proprietà di struttura delle classi laterali relative ad un gruppo, *Matematiche* **12** (1957), 51-57 (1959).
- [C17] M. CURZIO, Sui gruppi risolubili a fattoriali supersolubili, *Ricerche Mat.* **9** (1960), 82-90.
- [C18] M. CURZIO, Alcuni criteri di finitezza per i gruppi a condizione massimale o minimale, *Ricerche Mat.* **9** (1960), 248-254.
- [C19] M. CURZIO, Una osservazione sui gruppi finiti a fattoriali supersolubili, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., IV Ser., Napoli* **27** (1960), 59-62.
- [C20] M. CURZIO, Sugli automorfismi uniformi nei gruppi a condizione minimale, *Riv. Mat. Univ. Parma, II Ser.* **1** (1960), 107-122.
- [C21] M. CURZIO, Sui sottogruppi normali dei gruppi speciali, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., IV Ser., Napoli* **28** (1961), 395-402.
- [C22] M. CURZIO, Alcune congruenze del reticolo dei sottogruppi di composizione, *Conf. Semin. Mat. Univ. Bari* **77** (1962), 24 pp.
- [C23] M. CURZIO, Sui trasportatori nei gruppi e nelle algebre di Lie, *Ricerche Mat.* **11** (1962), 3-23.
- [C24] M. CURZIO, Certains critères de nilpotence pour les groupes finis, *Bull. Sci. Math., II Ser* **86** (1962), 74-80.
- [C25] M. CURZIO, Les transporteurs d'un groupe fini dans les sous-groupes de Fitting et Frattini, *Algèbre et Théorie des Nombres, Sémin. P. Dubreil. M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot* **15** no.1, exp. no. 1 (1961/62), (1963), 1-11.
- [C26] M. CURZIO, Treillis des sous-groupes de composition, *Algèbre et Théorie des Nombres, Sémin. P. Dubreil. M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot* **14** no.1, exp. no. 9 (1961/62), (1963), 1-12.
- [C27] M. CURZIO, Elementi $\cup$ quasi-distributivi in alcuni reticoli di gruppi, *Ricerche Mat.* **13** (1964), 70-79.
- [C28] M. CURZIO, Sui gruppi per cui sono riducibili alcuni reticoli di sottogruppi notevoli, *Matematiche (Catania)* **19** (1964), 1-10.
- [C29] M. CURZIO, R. PERMUTTI, Distributività nel reticolo dei sottogruppi normali di un T -gruppo *Matematiche (Catania)* **20** (1965), 46-63.
- [C30] M. CURZIO, Una caratterizzazione reticolare dei gruppi abeliani, *Rend. Mat. Appl., V Ser.* **24** (1965), 1-10.
- [C31] M. CURZIO, M. GIORDANO, Una proprietà reticolare di alcuni p -gruppi localmente finiti, *Matematiche (Catania)* **21** (1966), 18-22.
- [C32] M. CURZIO, Corpi semiordinati e funzioni d'ordine di uno spazio sopra un corpo, *Confer. Sem. Mat. Univ. Bari* **105-106** (1966), 24 pp.
- [C33] M. CURZIO, Sui gruppi di torsione a fattoriali abeliani, *Ricerche Mat.* **16** (1967), 154-161.

- [C34] M. CURZIO, Una generalizzazione degli spazi di Sperner, *Ricerche Mat.* **16** (1967), 145-153.
- [C35] M. CURZIO, Problemi di complementazione in teoria dei gruppi, *Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68)*, Vol 1, Academic Press, London, 1969, 195-208.
- [C36] M. CURZIO, Gruppi risolubili finiti a sottogruppi subnormali caratteristici *Ricerche Mat.* **18** (1969), 75-82.
- [C37] M. CURZIO, Gruppi risolubili verificanti una condizione di massimo, *Ricerche Mat.* **18** (1969), 120-127.
- [C38] M. CURZIO, Su un problema di minimalità per gruppi finiti, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **4** (1972), 78-84.
- [C39] M. CURZIO, Un problema di massimo in teoria dei moduli, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **42** (1972), 111-118.
- [C40] M. CURZIO, Problemi di minimalità in teoria dei gruppi, *Boll. Un. Mat. Ital.*, IV Ser. **7**, Suppl. al Fasc. 1 (1973), 1-9.
- [C41] M. CURZIO, Gruppi risolubili a sottogruppi subnormali caratteristici, Academic Press, London-New York, 1976, 283-300.
- [C42] M. CURZIO, On groups with finite automorphism group, *Sistemi binari e loro applicazioni, Conv. Taormina/Messina* 1978 (1978), 193-217.
- [C43] M. CURZIO, The groups for which each proper subgroup has a finite automorphism group, *Ricerche Mat.* **28** (1979), 203-210.
- [C44] M. CURZIO, Groups with finite automorphism group, *Quad. Ric. Sci.* **109** (1981), 71-90.
- [C45] M. CURZIO, S. RAO, Chief factors of IM-groups, *Ricerche Mat.* **30** (1981), 279-295; Errata: Chief factors of IM-groups, *Ricerche Mat.* **31** (1982), 220.
- [C46] M. CURZIO, Recent results on minimal and maximal conditions for the subnormal subgroups of a group, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **52** (1982), 331-340.
- [C47] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **74** (1983), 136-142.
- [C48] M. CURZIO, Classification of finite minimal nonmetacyclic groups, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **47** (1984), 289-295.
- [C49] M. CURZIO, Some supersolvability criteria for finite groups, *Stochastica* **8** (1984), 147-156.
- [C50] M. CURZIO, Sul problema di Burnside, *Seminario di Geometrie Combinatorie, Università degli Studi dell'Aquila*, **8** (1985).
- [C51] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, D.J.S. ROBINSON, A permutational property of groups, *Arch. Math. (Basel)* **44** (1985), 385-389.
- [C52] M. CURZIO, Guido Zappa e la teoria dei gruppi, *Atti del Convegno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di Guido Zappa, Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser.* **19**, Suppl.(1988), 19-34.
- [C53] M. CURZIO, Round table on the theme "Logic in mathematics". Introductory intervention, Mathematical foundations, Proc. Meet., Siena/Italy 1987, Atti Incontri Logica Math **4** (1988), 29-33.
- [C54] M. CURZIO, D.J.S. ROBINSON, H. SMITH, J. WIEGOLD, Some remarks on central automorphisms of hypercentral groups, *Arch. Math. (Basel)* **53**, no.4 (1989), 327-331.
- [C55] M. CURZIO, S. FRANCIOSI, F. DE GIOVANNI, On automorphisms fixing infinite subgroups of groups, *Arch. Math. (Basel)* **54**, no.1 (1990), 4-13.
- [C56] M. CURZIO, J. LENNOX, A. RHEMTULLA, J. WIEGOLD, Groups with many permutable subgroups, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **48**, no.3 (1990), 397-401.
- [C57] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, A. RHEMTULLA, Groups with many rewritable products, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115**, no.4 (1992), 931-934.
- [C58] M. CURZIO, C.K. GUPTA, Second Fox subgroups of arbitrary groups, *Canad. Math. Bull.* **38**, no.2 (1995), 177-181.
- [C59] M. CURZIO, Some congruences of subnormal subgroups, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **65** (1995), 53-62.

TESTI E MONOGRAFIE DI MARIO CURZIO

- [LC1] M. CURZIO, R. PERMUTTI, *Complementi ed esercizi di geometria descrittiva*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 1958.
- [LC2] M. CURZIO, *Lezioni di algebra*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 1970.
- [LC3] M. CURZIO, *Some problems of Sylow type in locally finite groups*, Institutiones Mathematicae, Vol. V, Roma, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Academic Press, 1979, 69 p.; AGTA Lost Monographs, 2024.
- [LC4] M. CURZIO, F. DE GIOVANNI, *Topics in Infinite Groups*, Quaderni di Matematica **8**, Roma, Aracne, 2001, 333 p.
- [LC5] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, *Esercizi di algebra. Una raccolta di prove d'esame svolte*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 2011.
- [LC6] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, *Lezioni di algebra*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 2014.



Patrizia
Longobardi

Patrizia Longobardi è attualmente professoressa a contratto dell'Università degli Studi di Salerno dove ha prestato servizio fino al 2024 come professoressa ordinaria di Algebra. Ha pubblicato oltre cento articoli su riviste internazionali e tre testi didattici. Organizza dal 2004, ogni due anni, il Convegno Internazionale "Ischia Group Theory" ed è editor dei relativi proceedings. È editor della rivista "International Journal of Group Theory".



Mercedes Maj

Mercedes Maj è stata professoressa ordinaria di Algebra presso l'Università degli Studi di Salerno dal 1996 al 2024, di cui è stata anche Presidente della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Ha pubblicato oltre cento articoli su riviste internazionali e tre testi didattici. Attualmente è professoressa a contratto della stessa Università. Organizza dal 2004, ogni due anni, il Convegno Internazionale "Ischia Group Theory" ed è editor dei relativi proceedings.

Nota per Autori

Gli Autori sono pregati di inviare proposte e articoli per posta elettronica agli indirizzi:

- Redazione: rivista.umi@gmail.com
- Coordinatori scientifici: silvia.benvenuti5@unibo.it, celletti@mat.uniroma2.it, alberto.cogliati@unipd.it, carlo.toffalori@unicam.it

Le proposte (corredate di un breve sunto) saranno vagliate dai coordinatori scientifici, ogni articolo sarà infatti sottoposto a recensione di esperti.

Per gli articoli da pubblicarsi è previsto un giro di bozze.

Riguardo alle illustrazioni, la Redazione si è curata della relativa autorizzazione degli aventi diritto. Nel caso questi siano irreperibili, si resta comunque a disposizione per regolare eventuali spettanze.

L'abbonamento per un anno della versione digitale di "Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana" è fissato a 60 euro.

Al contrario, l'abbonamento per un anno alla versione cartacea è fissato a 80 euro (per la spedizione a un recapito in Italia) e a 100 euro (per la spedizione a un recapito all'estero).

Non soggetto I.V.A. ai sensi del quinto comma lettera a) art. 4 del D.P.R. 633 del 26.10.1972 e successive modificazioni. PUBBLICITÀ INFERIORE AL 45%

Autorizzazione N.7825 del Tribunale di Bologna in data 7 febbraio 2008
«nuova MONOGRAF snc». Via Collamarini 5 - 40138 Bologna (Italia)
agosto 2025

Associata all'Unione
Stampa Periodica Italiana





SOCI
PREMI
STORIA
SCUOLA
RICERCA

OLIMPIADI
RECIPROCIÀ
PUBBLICAZIONI
COMUNICAZIONE
PARI OPPORTUNITÀ