Bruno de Finetti e il Calcolo delle Probabilità

Giornata in onore di Bruno de Finetti
Centro "Beniamino Segre" dell'Accademia dei Lincei
Roma 30 aprile 2015

Chi sono io di Bruno de Finetti (1981)

"Chi sono?", la prima cosa che mi sembra di dover dire come
unto di partenza è che di me stesso, come persona qualunque,
'importa assai di meno che di ciò che attiene al benessere
llettivo, all'equilibrio ecologico secondo la linea tenacemente
fesa da Aurelio Peccei, al progresso sociale e civile secondo la
nea ispirata a Lelio Basso (membro tra l'altro del tribunale
ussell); linea cui vorrei che tutti mirassero per aver diritto a
derne quanto a ciascuno può ragionevolmente spettare. Uno
r tutti e tutti per uno, senza eccessive differenze o rivalità tra
dividui o classi o nazioni: rivalità utili soltanto se mirano a
igliorare ovunque il benessere collettivo anziché curarsi soltanto
quello egoisticamente (e miopemente) individuale o settoriale o
assista.

◆ ◆ ◆ ◆ ◆ ◆

- *Quanto al mio modo di pensare, di prospettarmi i problemi ed esporre le mie tesi, dirò che cerco sempre di rendere quanto più possibile chiari e semplici e "naturali " e "intuitivi" - magari presentandoli in modi concreti e divertenti - i concetti e i ragionamenti in ogni campo e , ovviamente , soprattutto in quello della probabilità che particolarmente mi interessa, e che è, purtroppo, una delle nozioni più esposte al rischio di velleitari fraintendimenti e distorsioni e addirittura travisamenti di ogni peggior specie .*

Impossibile parlare di tutti i contributi

- Dato il tempo a disposizione, mi limiterò a parlare di:

- Probabilità, incertezza e informazione;
- Coerenza;
- Teorema di de Finetti;
- Critica all'additività completa.

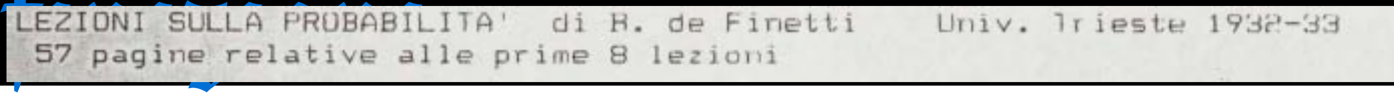
Trascurerò importanti questioni alle quali de Finetti ha dato rilevanti contributi

- Processi stocastici, legami con *distribuzioni indefinitamente scomponibili* e *stabili*.
- Modelli per problemi applicativi, tra cui i lavori sulla *Genetica di Popolazioni*. Lì , oltre a introdurre la rappresentazione grafica oggi chiamata, in tutto il mondo, "triangolo di de Finetti" , ha utilizzato, 50 anni prima degli altri, i modelli con *generazioni sovrapposte.*
- Distribuzioni in più dimensioni, correlazioni ammissibili (talune idee riprese in

Evento (da un suo libro… AMASES)

- Un evento, o la proposizione che lo esprime, è un’entità logica capace di assumere due modalità: vero e falso; corrisponde cioè ad una questione così formulata da ammettere due sole risposte, sí o no, o ancora, ad una divisione netta in due campi di tutte possibilità.
- Per esprimerli in modo intuitivo, e che risulterà strettamente in relazione

Che cos'è la probabilità: de


LEZIONI SULLA PROBABILITA' di B. de Finetti Univ. Trieste 1932-33
57 pagine relative alle prime 8 lezioni

- *Dice un'antica sentenza latina, "tot capita, tot sententiae";*
- *in nessun campo essa è tanto vera quanto nella teoria delle probabilità, e fin dai principi, fin da questa stessa domanda sul significato della probabilità.*
- *Tuttavia, fra un matematico che la definisca come rapporto tra il numero di casi favorevoli e possibili,*
- *uno statistico che la interpreti come un valore*

Definizioni vaghe e corrette o distorte

- E' un po' troppo vaga, è vero, ma è la sola che riallacci il concetto di probabilità a quelle che sono le sue radici profonde, intuitive, vive, da cui non possiamo pensarlo avulso senza cadere in quel ginepraio di dubbi difficoltà oscurità che fecero del calcolo delle probabilità il ramo più discusso di tutte le matematiche.
- E' un po' troppo vaga, ma si può analizzare e precisare il suo

Definizione rigorosa di probabilità

- Diremo dunque per definizione “probabilità di un evento E (per un dato individuo)” il numero $p = P(E)$ che rappresenta il valore che ha, per lui, il possesso di una lira subordinato al verificarsi di E; si può anche dire che p rappresenta la “quota di scommessa” sull’evento E.
- Fissata ad esempio la quota in p = 0,30, egli accetterà indifferentemente di promettere 10, 100, 1000 lire nel caso che si verifichi l’evento E a chi gliene versa 3, 30, 300, e

Approccio pragmatico

- de Finetti, nel passare da un concetto vago a una precisazione matematica, si preoccupa di dare una definizione operativa e non puramente formalistica.
- Il meccanismo della scommessa (invertibile) è comprensibile a tutti. Si collega palesemente all'esperienza di de Finetti nel campo delle assicurazioni, che è anche il campo (a parte i giochi d'azzardo) in cui è più antica

Evoluzione

- Negli anni del Dopoguerra, de Finetti elaborò un ulteriore meccanismo per la valutazione delle probabilità: quello della “penalizzazione quadratica”. (E' possibile sia stato influenzato dai concetti di Wald, da lui citato, anche senza aderire alla sua visione delle “decisioni”).
- Questo meccanismo, ovviamente equivalente all'altro, tende a eliminare l'ipotesi di presenza di un “competitore” nella scommessa e dell'invertibilità della medesima. E' anche di più agevole implementazione operativa, tant'è che de Finetti lo sperimentò (personalmente, e con l'aiuto di “volontari”...) nel suo “concorso pronostici calcistici” degli anni Sessanta.
- A riprova dell'interesse definettiano alla costante

Esempio importante ricordato in Chi sono io?

- *..Col medesimo intento di imparare ad usare valutazioni di probabilità, di abituare le persone a pensare e ragionare (e conseguentemente, comportarsi) in base a valutazioni (ragionate, ma naturalmente soggettive) di probabilità, è stato ripetuto per diversi anni all'Università di Roma un esperimento di pronostici probabilistici con riferimento ai risultati delle partite del campionato di calcio…….*

- *….secondo il mio punto di vista l'esperienza era educativa perché non solo non era basata sul banale e antieducativo malvezzo del "tirare a indovinare" (come al Lotto e al Totocalcio), ma, al contrario, obbligava a indicare la probabilità (*dei possibili risultati) *numericamente* (p1, p2,

Originale da Pittsburgh (1961-1969)

Esperimento valutazioni probabilità

Sarà effettuato per le partite del girone di ritorno del campionato di calcio, Serie A, o comunque per le partite incluse nei primi 9 posti delle schede SISAL dal 5/2/61 alla fine del campionato (incluse eventuali giornate con partite internazionali o simili).

Potranno prendervi parte gli studenti del corso di Matematica attuariale, ed eventualmente altri, compatibilmente col volume del lavoro di spoglio-conteggio che sarà fatto con la calcolatrice 610 se ciò risulterà pratico (altrimenti a mano su dati arrotondati in base a una tabella).

I partecipanti potranno accordarsi per raccogliere una quota da ciascun partecipante, per formare dei premi da distribuire in base al punteggio finale alla chiusura dell'esperimento. Di tale eventuale parte finanziaria si occuperanno essi stessi. L'Istituto ha interesse esclusivamente all'esperimento del metodo di espressione delle opinioni riguardo alle probabilità, e fornirà il punteggio finale indicando come, in base ad esso, un eventuale fondo vada ripartito fra i migliori risultati (si può fare o in proporzione al punteggio finale, oppure - per avere distacchi più significativi - in proporzione alla eccedenza sul punteggio medio, per quelli soli che lo superano: ciò dovrà esser deciso dai partecipanti).

Modalità del "pronostico"

Non si tratta propriamente di pronostici ma di valutazioni di probabilità. Ogni partecipante riempirà ogni settimana una e una sola schedina (usando quelle del Totocalcio) indicando per ciascuna delle prime nove partite la probabilità che attribuisce ai tre risultati 1-X-2 (vittoria in casa - pareggio - vittoria esterna), espresse in % con numeri di due cifre (p.es. 46 33 21 significa prob.di "1",46%; di "X", 33%; di "2", 21%). Indicare i tre numeri nelle tre coppie di colonne a destra in ciascuna delle tre sezioni (Figlia, che sarà restituita per ricevuta; Spoglio che rimane al raccoglitore; Matrice che va al Centro elettronico per l'elaborazione).

La somma dei tre numeri deve dare 100 (eventuali istruzioni diverse saranno date in seguito se per l'elaborazione risultasse opportuno limitare le scelte o allargarle, p.es. ammettendo solo numeri terminanti in 0 o 5, come 45 35 20 anzichè 46 33 21, oppure anche numeri con somma 99 o 98 che andrebbero automaticamente interpretati come aumentati ciascuno di 1/3 o di 2/3).

Ogni partecipante avrà un suo numero progressivo, e lo indicherà su ogni sezione della scheda (nel posto libero delle partite 10-13).

Modalità del punteggio

Per ogni partita, da zero a 10.000 punti, in base alle probabilità attribuite ai due risultati non verificatisi: detti m ed n i due numeri esprimenti tali probabilità in % , il punteggio sarà:

$$10.000 - (m+n)^2 + mn \ .$$

(Geometricamente: è il quadrato della distanza fra la valutazione prescelta e il risultato effettivo).

Roma, 2 febbraio 1961

B. de Finetti

B.de Finetti

CONCORSO 23

TOTOCALCIO CONI

COMITATO OLIMPICO NAZIONALE ITALIANO

Totoc [redacted]

"AL SERVIZIO [redacted]

PARTITE DEL 26-2-1961 FIGLIA

N.	Squadra 1ª	Squadra 2ª	Concorso 23 del 26-2-61							
1	Catania	Juventus			3	0	3	5	3	5
2	Fiorentina	Padova			8	5	1	0	0	5
3	Lanerossi	Inter			2	0	3	0	5	0
4	Lazio	Udinese			6	5	2	5	1	0
5	Lecco	Bari			5	5	3	0	1	5
6	Milan	Sampdor.			6	5	1	0	0	5
7	Napoli	Bologna			4	0	2	0	4	0
8	Spal	Roma			2	0	3	5	5	5
9	Torino	Atalanta			4	0	3	5	[illegible]	[illegible]
10	Catanz.	Simm.Mon.								
11	Venezia	Messina								
12	Livorno	Lucchese								
13	Marsala	Trapani								
Riserve 1	Sambenedett.	Como								
Riserve 2	Spezia	Mestrina								

B. de Finetti

CONSERVATE IL TAGLIANDO FIGLIA DELLA SCHEDA VINCENTE!

[redacted]
il risultato delle partite
segnato per il calcolo
del punteggio

Figura 2. Triangolo di de Finetti per i pronostici calcistici in forma geometrica

Rappresentazione geometrica (triangolo di de Finetti)

(probabilità naturali non percentuali)

(0,1,0)

penalizzazione

CA

. P

(1,0,0)

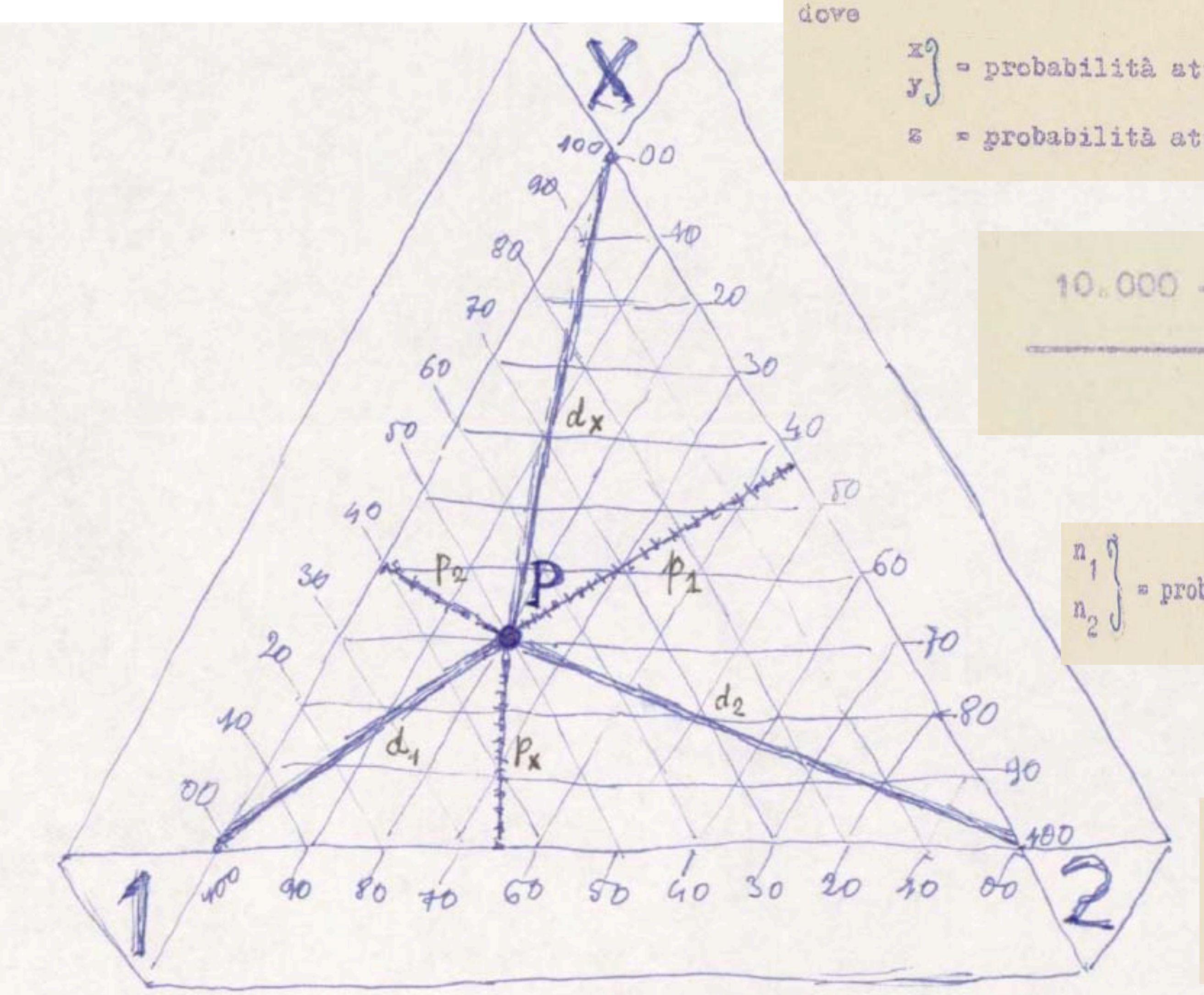
B

(0,0,1)

P(p_1, p_2, p_x)

Tenendo conto che nel pronostico le probabilità si esprimono, per comodità, in forma percentuale bisogna moltiplicare le coordinate baricentriche per 100 e la penalizzazione (quadrato di una distanza) si esprime come ha comunicato ufficialmente Bruno de Finetti considerando anche che la somma delle coordinate baricentriche in % vale 100.

Rilanciato il pronostico nel 1980 rivolto ai giornalisti (triangolo disegnato da de Finetti)



dove

$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$ = probabilità attribuita ai segni non verificatesi

z = probabilità attribuita al segno verificatesi.

$$\frac{10.000 - \frac{x^2 + y^2 + (100-z)^2}{2}}{100}$$

$\left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\}$ = probabilità attribuite ai segni non verificatesi

$$\frac{10.000 - (n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2)}{100}$$

premi

16°) La quota di L.2.000 verrà ripartita settimanalmente nella misura di L.90 , per le venti settimane, che andranno a formare il monte premi settimanale; il rimanente andrà a formare un monte-premi speciale

a) monte premi settimanale: sarà ripartito in proporzione allo scarto del punteggio di ciascun partecipante, da un punteggio fisso di 540 (°) alla settimana. La liquidazione avverrà alla fine dell'anno;

b) monte premi speciale: sarà suddiviso alla fine del concorso, sulla classifica finale dei partecipanti, calcolando gli scarti dal livello di 11.000(°) -

(°) suscettibili di opportuni ritocchi, che saranno tempestivamente comunicati.

TUTTI I CALCOLI RELATIVI AL CONCORSO PRONOSTICI VENGONO EFFETTUATI CON LA MACCHINA CALCOLATRICE ELETTRONICA "610" I.B.M.

CONCORSO N. 18 DEL 10/12/61
1* GIORNATA

		N.	PUNTI	VINCITA L.
1	PALLOTTA	2	656.25	176
2	DI TORO	14	650.00	167
3	CORNELIO	5	639.00	151
4	ROSATI	19	628.50	134
5	TORTORICI	3	623.75	126
6	MASSARI	24	621.25	123
7	TIBERI	21	619.62	120
8	MANCINI	25	615.00	114
9	DE FINETTI	4	614.21	113
10	SIROTTI	22	613.00	111
10	DE RISIO	16	613.00	111
12	GASPARRI	12	610.54	106
13	CALI'	15	607.25	102
14	RAMBERTI	1	601.25	93
15	DIANA	27	600.97	91
15	FURST	26	600.97	91
17	D'ORAZIO	20	598.86	88
18	VARRONE	8	594.00	82
19	ROMAGNOLI	9	587.25	72
20	CARBONI	11	583.18	64
21	GAMBONI	10	582.00	64
22	RETTAROLI	23	577.50	56
23	PACI	6	574.00	52
24	BALDINI	28	570.25	46
25	DAQUANNO	18	565.50	38
26	DE FRANCESCO	17	550.25	15
27	GERMANI	13	535.75	
28	ROBERTO	7	535.28	

M = 598.83

Si parla anche di valutazione media

SCHEDINA MEDIA

ATALANTA	ROMA	39.48	35.52	24.99	X
FIORENTINA	LECCO	67.19	20.24	12.56	1
INTER	CATANIA	68.25	20.69	11.05	X
PALERMO	L.R.VICENZA	49.05	32.66	18.28	1
SAMPDORIA	BOLOGNA	37.41	33.75	28.83	2
SPAL	MANTOVA	43.95	34.32	21.72	1
TORINO	MILAN	35.02	34.58	30.38	X
UDINESE	JUVENTUS	25.26	34.22	40.51	1
VENEZIA	PADOVA	45.94	34.87	19.18	X

PUNTEGGIO DELLA SCHEDIA MEDIA 615.04

DALLA PROSSIMA SETTIMANA OGNI CONCORRENTE DOVRA' INDICARE SULLA PROPRIA SCHEDINA IL NUMERO D'ORDINE RIPORTATO NELLA TERZA COLONNA

Si introduce sia la media della scheda delle probabilità valutate, ma anche del punteggio ch
un numero aleatorio di cui è utile parlare e allarga il campo.
Il punteggio ottenuto da de Finetti è il secondo sotto quello della schedina media.

GIORNATA N. 19 DEL 17/12/61

2* GIORNATA

		RISULTATI DELLA GIORNATA		CLASSIFICA GENERALE	VINCITA DI GIORNATA L.	VINCITA TOTALE
1	DI TORO	1*	771.50	1421.50	143	310
2	PALLOTTA	6*	718.25	1374.50	110	287
3	CORNELIO	2*	728.25	1367.25	116	267
4	DE FINETTI	3*	726.47	1340.68	115	228
5	TORTORICI	13*	707.00	1330.75	103	230
6	DE RISIO	9*	716.75	1329.75	109	220
7	VARRONE	4*	724.00	1318.00	113	195
8	DIANA	11*	711.00	1311.97	105	198
9	SIROTTI	16*	695.00	1308.00	96	207
10	RAMBERTI	14*	704.00	1305.25	101	194
11	GASPARRI	17*	689.00	1299.54	92	199
12	ROMAGNOLI	12*	709.75	1297.00	105	177
13	MANCINI	19*	678.91	1293.91	86	200
14	TIBERI	22*	673.88	1293.50	83	204
15	BALDINI	5*	723.00	1293.25	113	159
16	PACI	8*	717.50	1291.50	109	161
17	ROSATI	24*	659.25	1287.75	74	209
18	DAQUANNO	6*	718.25	1283.75	110	149
19	CARBONI	15*	701.21	1283.39	99	163
20	CALI'	21*	674.00	1281.25	83	185
21	D'ORAZIO	18*	679.80	1278.66	86	176
22	MASSARI	25*	647.25	1268.50	66	190
23	DE FRANCESCO	10*	712.75	1263.00	107	123
24	RETTAROLI	20*	675.00	1252.50	83	140
25	FURST	26*	601.97	1202.94	38	131
26	GERMANI	23*	662.75	1198.50	76	76
27	GAMBONI		601.97	1183.97	--	64
28	ROBERTO		601.97	1137.25	--	--

M = 697.17

SCHEDINA MEDIA

ATALANTA	FIORENTINA	28.73	37.96	33.29	X
BOLOGNA	UDINESE	64.46	24.00	11.53	1
JUVENTUS	VENEZIA	58.88	28.80	12.30	1
L.R.VICENZA	SAMPDORIA	38.15	34.42	27.42	X
LECCO	INTER	23.00	33.00	44.00	2
MANTOVA	CATANIA	44.96	35.73	19.30	X
MILAN	SPAL	64.19	24.34	11.46	1
PALERMO	TORINO	37.76	35.40	26.83	1
ROMA	PADOVA	62.69	25.19	12.11	1

PUNTEGGIO DELLA SCHEDINA MEDIA 708.82

LE VINCITE DELLA SCORSA SETTIMANA NON ERANO APPROSSIMATE IN MODO CORRETTO
IN QUESTA CLASSIFICA SONO RIPORTATI I RISULTATI CORRETTI

Elenco delle squadre partecipanti al Concorso valutazioni probabilità calcio 1967-68

	Bianchi Renzo	N. codice	11
ANCONA Collegio Einaudi	Garofoli Gioacchino	"	12
	Rocchetti M. Laura	"	13
	Soratte	"	14
	Belloni Valeriano	"	16
Ancona Ist. Olivetti	Ercolani Paolo	"	17
	Pettenati Paolo	"	18
	Ercolani Maurizio	"	19
	De Propris Giorgio	"	21
ROMA C. E. Alitalia	Mancini Luigi	"	22
	Mattei Mariano	"	23
	Pompei Tommaso	"	24
	Bellieri Augusto	"	26
FIRENZE	Biggeri Luigi	"	27
	Ricci Renzo	"	28
	Volpe Ernesto	"	29
	Muzio Giovanni	"	31
MILANO	Nicola Piercarlo	"	32
	Nicola Serenella	"	33
	Quadrio Alberto	"	34
	Fausto Domenicantonio	"	36
NAPOLI	Leccisotti Mario	"	37
	Pedone Antonio	"	38
	Pica Federico	"	39
	Beltrami Anna	"	41
ROMA Fac. Matematica	Brizio Luisa	"	42
	De Finetti Bruno	"	43
	Pala Gianfranco	"	44
	Acocella Nicola	"	46
ROMA Fac. Economia	Miconi Bruno	"	47
	Regoli Giorgio	"	48
	Retteroli Riccardo	"	49

Torino	Brosio Giorgio	N. codice	51
	Fornengo Graziella	"	52
	Penizza Roberto	"	53
	Vercelli Sandro	"	54
Trieste	Crisma Lucio	"	56
	Depollo Arrigo	"	57
	Strudthoff Mario	"	58
	Wedlin Attilio:	"	59

Gli ultimi anni mostrano i punteggi elaborati al Calcolatore IBM di Matematica e i nomi di molti miei amici. Gli ultimi elaborati scansionati da Princeton sono del 1969.

Dal concorso si imparano tante cose importanti sulle basi della probabilità

- la probabilità è *soggettiva* (ciò non toglie che una valutazione di probabilità possa essere anche ampiamente intersoggettiva); il soggetto che la valuta ha a disposizione alcune regole di *coerenza*, contravvenendo alle quali incorre in perdite certamente superiori al minimo possibile (*assiomi* di Kolmogorov eccetto completa additività);

- le nuove informazioni (sulle partite effettuate, sulle squadre) influiscono non solo tutte insieme (alla fine del campionato;, ovvero quando la ricerca è conclusa), ma ognuna influisce singolarmente e dinamicamente (qui si ritrovano le basi teoriche per l'induzione e l'approccio bayesiano alla statistica, mucchio o non mucchio);

Numeri aleatori o incogniti

LEZIONI SULLA PROBABILITA'   di B. de Finetti   Univ. Trieste 1932-33
57 pagine relative alle prime 8 lezioni

La funzione di penalizzazione permette di introdurre i numeri aleatori.
Si introduce anche la distribuzione di un numero aleatorio dato che si parla
di medie di giocate e di perdite.

LEZIONE VI.

20. Numeri aleatori.

Passiamo dunque a trattare dei "numeri aleatori": concetto assai fecondo, esplicitamente introdotto soltanto di recente, benchè implicitamente considerato da quando esiste il calcolo delle probabilità ().

()La denominazione più usata ma meno indovinata, è "variabile casuale"; preferiamo dire "numero aleatorio" (denominazione specialmente usata dai francesi), perchè vedremo che, piuttosto che di un numero variabile, si potrebbe caso mai parlare di un numero incognito.

L'utilità di questo concetto è grande, non perchè esso costituisca qualcosa di veramente, essenzialmente nuovo, ma in quanto molti importanti problemi che si potevano porre e risolvere anche senza conoscerlo vengono presentati e chiariti in modo suggestivo e intuitivo.

Distribuzioni

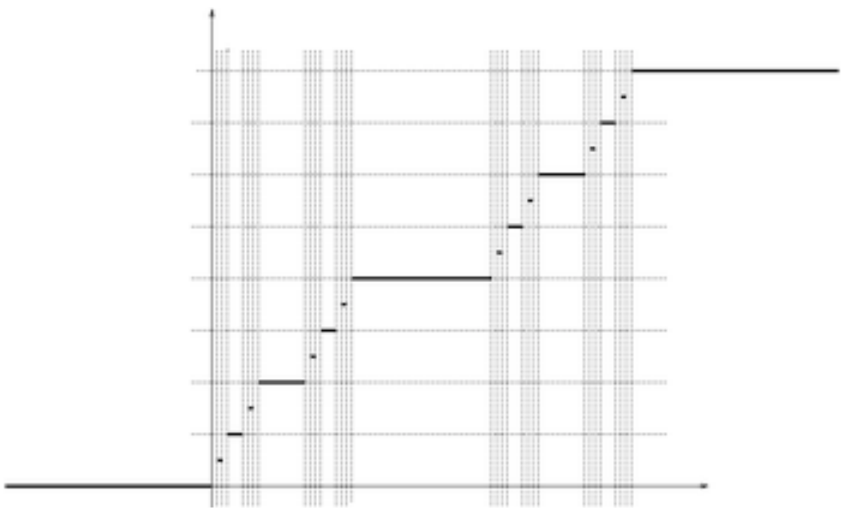
- Ci sono 3 tipi di distribuzioni sulla retta, facilmente generalizzabili:
- Il primo tipo è quello di una distribuzione totalmente discontinua (salti in numero finito, $d1 + d2 + \cdots + dn = 1$, oppure numerabile, $d1 + \cdots + dn + \cdots = 1$;). In particolare una distribuzione statistica (con N individui, N finito) è sempre discontinua (e i salti sono al più N, tutti uguali a $1/N$ o multipli).
- Il secondo tipo è quello di una distribuzione assolutamente continua: ciò significa che $F(x)$ (la quale, essendo monotona, è derivabile quasi ovunque) è l'integrale della propria derivata $f(x)$; la $f(x)$ si dice (nello stesso senso intuitivo della meccanica) densità della distribuzione in x. Col linguaggio degli infinitesimi, si direbbe che $f(x)dx$ rappresenta la massa contenuta tra x ed $x + dx$.

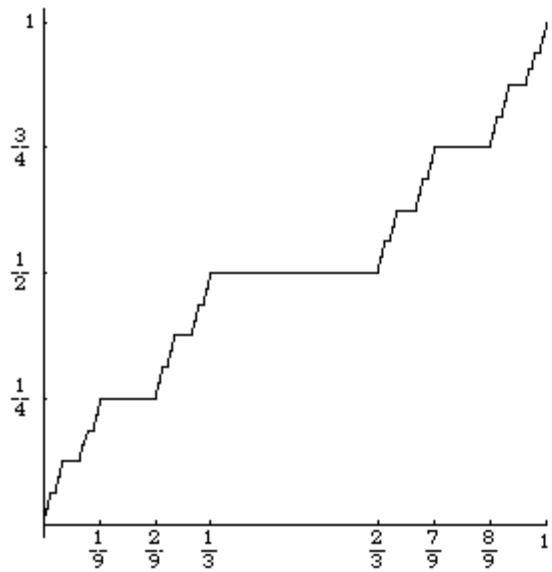
Teoria delle Probabilità del 1970

- In questo libro il terzo caso veniva esemplificato attraverso l’insieme di Cantor, che è uno dei più semplici oggetti frattali cui si possa far riferimento (anche Cantor era un precursore).
- Nonostante la sua semplicità, presenta le tipiche caratteristiche degli oggetti frattali. Esso è costruito partendo da un segmento di lunghezza unitaria cui sono iterativamente eliminati alcuni tratti .

Rappresentazione geometrica

Sotto sono riportatele funzioni di ripartizione ottenute in diversi casi di approssimazione. L'insieme ha misura nulla di Lebesgue sull'intervallo, ma possie un'infinità continua di punti con probabilità totale pari a 1.





Distribuzioni come misture in generale

- la più generale distribuzione $F(x)$ si ottiene come combinazione di distribuzioni $F1$, $F2$, $F3$ dei tre tipi indicati: $F(x) = a1F1(x) + a2F2(x) + a3F3(x)$ con $ai \geq 0$, $a1 + a2 + a3 = 1$.
- In genere, date delle distribuzioni definite in un medesimo spazio, una loro combinazione lineare (con coefficienti non negativi di somma = 1) dà ancora una distribuzione (che diremo senz'altro

Verso il teorema di de Finetti

(Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio.
In: *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, (IV), fasc. V (1930), p.86-133.)

- Quelli che abbiamo definito col nome di «fenomeni aleatori» sono i fenomeni le cui prove sarebbero, nell'ordinaria terminologia, *indipendenti e con probabilità costante ma incognita*.
- Ora, il parlar di *probabilità incognite è*, secondo la concezione soggettiva della probabilità, cosa priva di senso, e in ogni caso oscura e capziosa.
- Parlare di prove *indipendenti*, nel caso

Proprietà di scambiabilità

Ad ogni modo, dall‘uso che si fa ordinariamente della nozione, non certo troppo chiara e felice, di

fenomeno «a prove indipendenti e con probabilità costante ma incognita» risulta che da essa si ritiene di poter dedurre che, se sappiamo che sono state fatte n prove e m di esse sono risultate favorevoli, tutti i modi possibili in cui le prove favorevoli e sfavorevoli si possono

La prima formulazione data da de Finetti al suo teorema (1928-30)

- Inversamente, il Teor. I che enunceremo nel prossimo §, o, meglio, la [20] del § 10, mostrano che, ammesso *che* la solita concezione abbia senso, un fenomeno aleatorio è per l'appunto un fenomeno «a prove indipendenti con probabilità costante ma incognita *p*», ove la Φ si interpreti come « legge di probabilità (funzione di ripartizione) della probabilità incognita.
- Ciò che costituisce la giustificazione

Teorema (versione del 1930)

[20] $$\omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} \int_0^1 \xi^h (1 - \xi)^{n-h} \, d\Phi$$

Teorema di "rappresentazione" di de Finetti (in forma più usuale)

Se X1, X2, ... Xk ... formano una sequenza *infinita* di numeri aleatori scambiabili a valori 0-1 ("eventi"), allora esiste una distribuzione Q tale che la distribuzione congiunta P di n qualsiasi di essi si rappresenta come:

$$p\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = \int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^{n} \theta^{X_i} \left(1-\theta\right)^{1-X_i} \right\} dQ\left(\theta\right)$$

Hewitt e Savage hanno generalizzato il teorema nel 1955

Se X1, X2, ... Xk ... formano una sequenza *infinita* di numeri aleatori scambiabili, allora esiste una distribuzione *Q* sullo spazio $\mathcal{F}$ delle distribuzioni su *Rn*
ale che la distribuzione congiunta *P* di n qualsiasi di essi si rappresenta come:

$$p\,(X_1, X_2, ..., X_n) = \int_{\mathcal{F}} \prod_{i=1}^{n} F(X_i)\; dQ\,(F)$$

Molti hanno dimostrato estensioni del teorema in varie direzioni

- Diaconis e Freedman e poi Accardi e Lu hanno esteso il teorema al caso delle sequenze scambiabili finite.
- Kerns e Szekely l'hanno esteso alle sequenze scambiabili markoviane.
- Aldous e Hoover hanno date estensioni al caso si scambiabilità parziale, attraverso le nozioni di scambiabilità separata e congiunta.

Diaconis P and Freedman D (1980a). "Finite exchangeable sequences." *Annals of Probability* 8(4), 745-764.
Diaconis P and Freedman D (1980b). "De Finetti's theorem for Markov chains." *Annals of Probability*, 8(1), 115-130.
Haag J (1924). "Sur un probleme general de probabilities et ses diverses applications." *Proc. Internat. Congress Math. Toronto*, 659-674.
Szekely G and Kerns J (2006). "De Finetti's theorem for abstract finite exchangeable sequences." *Journal of Theoretical Probability*, 19(3), 589-608.

Bibliografia parziale

- E. Hewitt, L.F. Savage, "Symmetric measures on Cartesian products" *Trans. Amer. Math. Soc.* , 80 (1955) pp. 470–501
- D.A. Freedman, "Invariance under mixing which generalize De Finetti's theorem: continuous time parameter" *Ann. Math. Stat.* , 33 (1962) pp. 916–923
- D.A. Freedman, "Invariance under mixing which generalize De Finetti's theorem: continuous time parameter" *Ann. Math.*

… segue Bibliografia parziale

- E. Hewitt, L.F. Savage, "Symmetric measures on Cartesian products" *Trans. Amer. Math. Soc.* , 80 (1955) pp. 470–501
- D.A. Freedman, "Invariance under mixing which generalize De Finetti's theorem: continuous time parameter" *Ann. Math. Stat.* , 33 (1962) pp. 916–923
- D.A. Freedman, "Invariance under mixing which generalize De Finetti's theorem: continuous time parameter" *Ann. Math.*

L'inferenza statistica come conseguenza del teorema
(da "Teoria delle probabilità", 1970)

- Dobbiamo fare inferenza sulla base di osservazioni X1, X2,…, Xn scambiabili; (che, prima d'essere conosciute, sono *numeri aleatori scambiabili*);
- Abbiamo delle "ipotesi" relative al meccanismo di generazione delle osservazioni; denotiamo ciascuna di esse con il generico elemento θ ("parametro") appartenente ad uno spazio Θ;
- Subordinatamente ad ogni ipotesi θ, le Xh

Distribuzione “a posteriori” per le ipotesi

Nel caso di scambiabilità, e quindi di validità del teorema di de Finetti, si può ricavare (teorema di Bayes) che la distribuzione “a posteriori” per il parametro, e cioè per le ipotesi, è data dalla formula:

$$g(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\, p(\theta)$$

Non è ancora pienamente soddisfacente, perché ipotizza una distribuzione di probabilità su di un *oggetto* (il parametro), che in generale *non è osservabile*. Questo non è accettabile in ambito soggettivo.

Distribuzione predittiva di future osservazioni

E' molto più interessante ed operativo, nella concezione di de Finetti, calcolare la *distribuzione predittiva* di una nuova osservazione Y della stessa natura delle X, che si scrive:

$$h(y \mid x_1, x_2, \dots, x_n) \propto \int_{\Theta} f(y \mid \theta) g(\theta \mid x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta$$

Questo contesto predittivo definettiano è la base dello sviluppo del “prequential probability approach”, che si basa sull’idea che *we can judge the quality of an inference method by converting it into a forecasting system and assessing the empirical success of the sequence of one-step-ahead forecasts that it implies* (Dawid e Vovk, 1999), come si vede si parla di previsione nello stile di de Finetti.

Critica alla additività completa (Teoria delle Probabilità, 1970)

- Di una valutazione di probabilità soggettiva… possiamo solo giudicare se è o non è *coerente*….
- Tale condizione di coerenza dovrà pertanto essere *la più debole*, volendo che sia la più forte in quanto ad assoluta validità.
- Essa infatti deve escludere soltanto le valutazioni assolutamente inammissibili, quelle cioè che non possiamo non

- Ciò che le concezioni oggettivistiche … generalmente postulano, è invece che valga l’additività completa ..e che il campo in cui la probabilità viene definita sia un’intera algebra di Boole.
- Dal punto di vista soggettivistico ciò è troppo e troppo poco: …. ci si può limitare a molto meno od anche andare oltre.
- Si potranno attribuire probabilità (semplicemente ma non completamente

….Può un evento possibile avere probabilità nulla?….

- … e, se SI, una riunione di eventi a probabilità nulla può avere probabilità positiva (in particolare essere l'evento certo) ?
- …pensare e dire che eventi possibili di probabilità nulla possono aversi *se fanno parte di partizioni infinite (!)* … è ***cosa mostruosa*** :
- se E ha probabilità=p (in particolare =0), seguiterà ad averla sia considerandolo a

….Se in una partizione infinita si possa attribuire probabilità nulla a tutti gli eventi ….

- … le diverse concezioni, che ammettono diversi tipi di additività per le probabilità di eventi, …danno risposte diverse alla domanda.

- Per memoria:
- - *additività semplice:* postulata solo per somme di un numero finito di addendi *(concezione di de Finetti e pochi altri)*.
- - *additività perfetta:* postulata per qualsiasi

Le risposte sono 3: prima e seconda

- Additività semplice: affermativa
- *La probabilità è semplicemente additiva. La riunione di un'infinità di eventi incompatibili di probabilità nulla può sempre avere probabilità positiva, ed anche essere l'evento certo.*
- Additività perfetta: negativa
- *La probabilità è perfettamente additiva. In ogni partizione c'è un numero finito o*

La terza risposta

- Additività numerabile: condizionata
- *Dipende. La risposta è NO se si tratta di una partizione numerabile, perché la probabilità è completamente additiva; la somma di un'infinità numerabile di zeri è zero.*
- *La risposta è SI se si tratta di un'infinità non numerabile, perché la probabilità non è perfettamente additiva: la somma di un'infinità non numerabile di zeri può essere positiva*

Conclusione da Teoria delle Probabilità, 1970

- E’ possibile, giunti alla fine, tentare di trarre qualche conclusione?
- ….
- Perché mai, si chiederà qualcuno, non rimanere …nel “giusto mezzo” secondo l’attuale consuetudine, consistente nello spingersi fin dove l’additività completa fa funzionare tutto a meraviglia e nel fermarsi dove il miracolo cessa?

…

- Perché –rispondo- a mio avviso si tratta non di “giusto mezzo” bensì di “doppia stortura”.
- A mio avviso, tutto ciò che in quella impostazione si afferma, al di là di ciò per cui basta il livello Jordan-Peano-Riemann, è irrilevante agli effetti pratici e ingiustificabile sul piano teorico e concettuale.

◆ ◆ ◆ ◆

- I due tipi, apparentemente contrastanti, di considerazioni sono intesi a provare, convergendo da direzioni opposte, questa stessa tesi: *di complicazioni si può fare a meno* (forse è la cosa più saggia), ma, se si vuol farne, *bisogna farle sul serio, in modo costruttivo anche se scomodo.*
- Forse ho torto. Ma le critiche non saranno state inutili se per confutarle qualcuno spiegherà e giustificherà in modo sensato