

# Dimensioni superiori

Markus Ruppert e Hans-Georg Weigand

7 Giugno 2012

## 1. Alla ricerca della dimensione successiva

Il nostro mondo ha davvero più di tre dimensioni? Se è così, gli oggetti in una dimensione superiore hanno una relazione con il mondo intorno a noi? È possibile percepire questi oggetti o sono lontani da una qualunque rappresentazione? La Teoria della Relatività usa quattro dimensioni per spiegare il concetto di spazio-tempo, sei dimensioni sono necessarie per descrivere la curvatura dello spazio-tempo e diverse teorie delle stringhe usano persino rappresentazioni fino a 26 dimensioni (e.g. L. Botelho, R.Botelho, 1999).

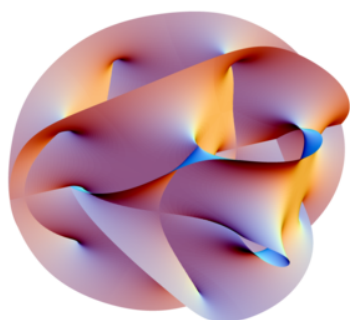


Illustrazione di una varietà di Calabi-Yau (Importante per la descrizione di modelli di dimensione più alta nella teoria delle superstringhe).

Un altro dominio attuale di applicazione per oggetti in dimensione superiore e per le loro rappresentazioni tridimensionali è lo studio delle strutture non-periodiche nella cristallografia moderna. All'interno del concetto dei quasicristalli si suppone che le proiezioni di insiemi di punti di dimensione superiore (come il lattice intero in dimensione 5) nello spazio tridimensionale siano buoni modelli per strutture cristalline non-periodiche (si veda, sotto, la sezione 5).

Questi esempi mostrano una delle caratteristiche principali del pensiero matematico: se è più semplice o utile descrivere i fenomeni reali in uno spazio di dimensione superiore, le tre dimensioni spaziali possono essere estese. Questo si può facilmente spiegare dal punto di vista formale. Così, equazioni lineari in tre variabili possono essere interpretate come un piano nello spazio, equazioni lineari in quattro variabili sono interpretate come un iperpiano tridimensionale in uno spazio a quattro dimensioni. Inoltre, equazioni lineari in  $n$ -variabili sono interpretate come un iperpiano  $(n - 1)$ -dimensionale in

uno spazio  $n$ -dimensionale. Usando più di tre variabili, il vantaggio di una tale espansione del concetto di dimensione beneficia di una descrizione più semplice e coerente delle relazioni matematiche. Per calcoli formali a livello algebrico e numerico non è necessario avere percezioni illustrative in un tale contesto a dimensione superiore. Nonostante ciò, da una parte questo porta al problema di come tradurre i risultati di tali considerazioni nel mondo reale. Dall'altro lato, vi è una necessità di descrivere almeno gli oggetti fondamentali di dimensione superiore nel nostro spazio tridimensionale.

Nel seguito, saranno discusse idee sullo sviluppo delle rappresentazioni di oggetti di dimensione superiore considerando per un oggetto a 4 dimensioni, il cubo quadri-dimensionale. Si mostrerà che l'approccio a cubi in 4 dimensioni o superiore può essere fatto in modi diversi. L'uso esteso di considerazioni analogiche serve come base per comprendere oggetti di dimensione superiore. In quanto segue, saranno mostrati e analizzati tre approcci diversi (una descrizione dettagliata di tali approcci si trova in Ruppert (2010)).

- (1) Proiezioni di oggetti di dimensione superiore su (iper)piani,
- (2) Intersezioni di (iper)cubi con un (iper)piano,
- (3) Un'estensione sistematica del concetto di coordinate.

## Proiezioni

In questa sezione, l'idea fondamentale di descrivere oggetti di dimensione superiore, per mezzo della proiezione, sarà generalizzata in dimensioni superiori. In particolare, si può facilmente generalizzare la proiezione ortogonale lungo un corpo diagonale di un ipercubo  $n$ -dimensionale in uno spazio  $(n-1)$ -dimensionale.

### Esempio 1: Proiezioni del quadrato e del cubo

Clicca sulla Figura 1 e sulla Figura 2 dell'articolo in inglese, per avere accesso alle pagine interattive.

Per  $1 \leq i \leq 4$  siano  $A_i$  i vertici del quadrato. La proiezione della Figura 1 è rappresentata dall'intersezione delle rette

$$g_i : \vec{X} = A_i + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (1 \leq i \leq 4)$$

con

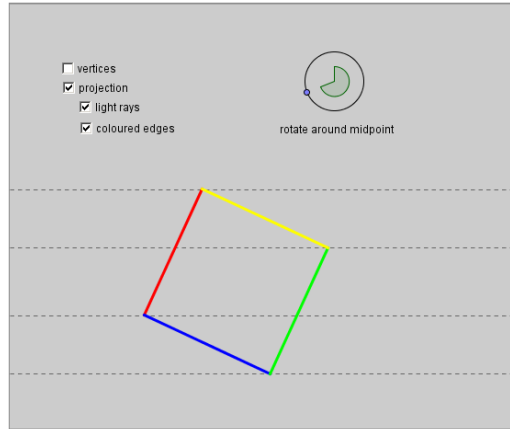


Figura 1: Proiezione di un quadrato. Autore: Sebastian Hammer, Università di Würzburg

$$h : x_1 + x_2 = 0.$$

Questa è una proiezione ortogonale. Analogamente, la proiezione ortogonale di un ipercubo  $n$ -dimensionale è pienamente descritta dalla proiezione delle coordinate dei vertici.

Troviamo i punti d'intersezione delle rette:

$$g_i : \vec{X} = A_i + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, (1 \leq i \leq 2^n)$$

e dell' iperpiano di dimensione  $(n - 1)$

$$R : x_1 + \dots + x_n = 0.$$

Il vettore  $(1, 1, \dots, 1)$  è ortogonale all'iperpiano  $R$ , le rette  $g_i$  sono ortogonali all'iperpiano  $R$  per i vertici  $A_i$ . Dopo aver considerato le analogie delle proiezioni suddette, come i vertici che hanno la stessa immagine sotto queste mappe speciali, otteniamo la Figura 3.2 come rappresentazione per la corrispondente proiezione ortogonale nello spazio tridimensionale di un ipercubo a quattro dimensioni.

Un'altra possibilità per descrivere le proiezioni ortogonali da uno spazio  $n$ -dimensionale ad uno  $k$ -dimensionale ( $k \leq n$ ) fa uso della linearità delle proiezioni ortogonali (come trasformazioni lineari). Questa proprietà può essere usata per creare e capire immagini bidimensionali di cubi in una qualunque dimensione.

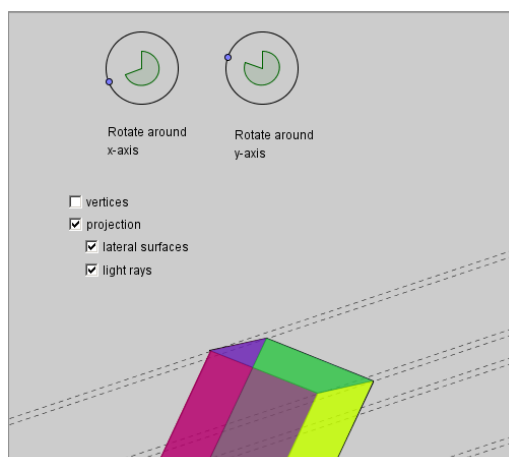


Figura 2: Proiezione di un cubo. Autore: Sebastian Hammer, Università di Würzburg



Figura 3: **Figura 3.1:** Proiezione di un ipercubo di dimensione 4. Otto degli spigoli proiettati indicano i vertici di un cubo tridimensionale. - **Figura 3.2:** Proiezione di un ipercubo quattro dimensionale; modello virtuale

### Esempio 2: Proiezione di un ipercubo

La Figura 2 mostra tre vettori generatori del cubo e delle loro immagini sotto la proiezione ortogonale lungo il loro corpo diagonale. Tutti i vertici del cubo sono combinazioni lineari di questi vettori con coefficienti 0 e 1. La linearità della proiezione implica la stessa proprietà per le immagini di tutti i vertici.

Descrivendo il cubo  $n$ -dimensionale con opportune combinazioni lineari di  $n$  vettori generatori linearmente indipendenti, si può mostrare quanto segue: per il cubo  $n$ -dimensionale, esistono una proiezione ortogonale in  $\mathbb{R}^2$  e un piano di proiezione appropriato, tali che le immagini dei vettori generatori indicano i vertici di un poligono regolare con  $n$  lati. Secondo l'additività, infine, le immagini di tutti gli altri vertici risultano in corrispondenti combi-

nazioni lineari (per  $n = 3$  si vedano Figura 2 e l'Esempio 1, con il triangolo regolare come immagine dei vettori generatori).

Per capire come si ottiene la proiezione di un ipercubo  $n$ -dimensionale su un sottospazio  $k$ -dimensionale spieghiamo prima come si proietta un cubo su una linea nello spazio tridimensionale:

per ciascun vertice del cubo si prenda il piano, ortogonale alla retta data, che contiene questo vertice. Il punto di intersezione del piano e della linea è la proiezione ortogonale del vertice sulla linea.

Analogamente, proiettiamo l'ipercubo  $n$ -dimensionale su un piano  $k$ -dimensionale. Per ciascun vertice dell'ipercubo si prenda l'iperpiano  $(n - k)$ -dimensionale, ortogonale all'iperpiano  $k$ -dimensionale dato, che contiene questo vertice. Il punto di intersezione dei due iperpiani è la proiezione ortogonale del vertice sul sottospazio  $k$ -dimensionale.

Così, si può indicare una proiezione bidimensionale del cubo unitario a cinque dimensioni: sulla base delle immagini dei vettori generatori (che indicano i vertici di un pentagono regolare), le immagini di un qualunque vertice possono essere trovate in modo appropriato aggiungendo quei vettori (si veda la Figura 4.1).

Guardando la proiezione del cubo a cinque dimensioni, le immagini degli spigoli dei cubi comprendono i ben noti rombi di Penrose (si veda Senechal 1995). Un altro fenomeno di rilievo è mostrato in Figura 4.2. Sotto la proiezione dell' ipercubo a sei dimensioni lungo il suo corpo diagonale -il segmento di estremi  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ - esistono parecchi vertici con la stessa proiezione. In Figura 4.2 viene anche dato il numero delle controimmagini.



Figura 4: **Figura 4.1:** Una proiezione del cubo unitario a cinque dimensioni su un piano. - **Figura 4.2:** Una proiezione del cubo unitario a sei dimensioni su un piano.

### 3. Intersezioni di cubi

Una rappresentazione dinamica di un ipercubo a quattro dimensioni è data considerando le diverse forme ottenute dalla sua intersezione con un iperpiano tridimensionale. Inizialmente, considereremo un cubo (nello spazio tridimensionale) che interseca un piano. Si assuma che gli oggetti si muovono con velocità (relativa)  $v$ . È particolarmente facile descrivere la situazione, considerando il cubo (di spigolo di lunghezza  $a$ ) con gli spigoli fissati sugli assi di un sistema di coordinate. Il piano  $E(t) = x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{3} \cdot v \cdot t = 0$  si muove lungo un cubo diagonale attraversando questo cubo con velocità  $v$ . Poiché il cubo è di per sé un corpo convesso, è sufficiente determinare i punti di intersezione degli spigoli in un qualunque istante di tempo. Otteniamo la sezione trasversale come l'involuppo convesso di questi punti di intersezione. L'intersezione di uno spazio tridimensionale che si muove attraverso un iper-

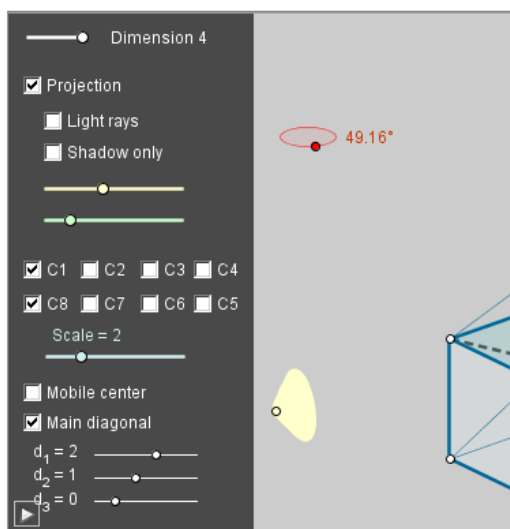


Figura 5:

cubo quadri-dimensionale verrà rappresentato, in modo analogo, come segue: Un ipercubo quadri-dimensionale con uno spigolo di lunghezza  $a$  sarà intersecato con uno spazio  $R(t)$ , che si muove lungo il corpo diagonale di un ipercubo con velocità  $v$ . Quindi, definiamo per analogia:

$$R(t) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2 \cdot v \cdot t = 0$$

Di nuovo, è sufficiente conoscere i punti di intersezione dell'ipercubo con  $R$ .

La seguente applicazione fornisce una simulazione interattiva di queste intersezioni da una a quattro dimensioni (Autore: Rafael Losada, Istituto di GeoGebra di Cantabria). Clicca sulla Figura 5 (dell'articolo in inglese) per avere accesso alla pagina interattiva.

#### 4. Geometria delle coordinate

Il segmento unitario e il quadrato unitario possono essere considerati rispettivamente l'analogo a una o a due dimensioni del cubo unitario. Guardando le coordinate dei vertici in un sistema di coordinate, otteniamo i vertici dei seguenti oggetti

Il segmento unitario:  $A_1 = (0)$      $A_2 = (1)$

Il quadrato unitario:  $A_1 = (0|0)$      $A_2 = (1|0)$      $A_3 = (0|1)$      $A_4 = (1|1)$

Il cubo unitario:  $A_1 = (0|0|0)$      $A_2 = (1|0|0)$      $A_3 = (0|1|0)$      $A_4 = (1|1|0)$   
 $A_5 = (0|0|1)$      $A_6 = (1|0|1)$      $A_7 = (0|1|1)$      $A_8 = (1|1|1)$

Aggiungendo successivamente coordinate con coefficienti 0 e 1, si ottengono le coordinate dei vertici e così il numero dei vertici di un ipercubo unitario in un sistema di coordinate a quattro o a cinque dimensioni. La transizione a ipercubi in dimensioni superiori può essere ottenuta esclusivamente a livello simbolico e può essere considerata come una continuazione del concetto di coordinate. Considerazioni di tipo combinatorio portano alla seguente relazione per il numero  $N(n; k)$  dei "cubi di frontiera" a  $k$  dimensioni di un cubo a  $n$  dimensioni (si veda i.e. Graumann, 2009):

$$N(n; k) = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

Questa formula può essere ottenuta con le seguenti osservazioni:

1. Ogni "cubo di frontiera" a  $k$  dimensioni è parallelo ad un iperpiano  $k$ -dimensionale individuato da  $k$  vettori generatori del cubo  $n$ -dimensionale (si veda anche la sezione 3). Come conseguenza, le coordinate dei vertici appartenenti ad uno stesso "cubo di frontiera"  $k$ -dimensionale differiscono per al più  $k$  coefficienti (e tali vertici appartengono tutti a questo cubo).
2. Esistono  $\binom{n}{k}$  possibilità di scegliere  $k$  coefficienti su  $n$ .
3. Esistono  $2^n$  possibilità di scegliere un "vertice di partenza".
4. Esistono  $2^k$  vertici di partenza che portano allo stesso cubo di frontiera.

**Esempio 3: Il cubo tridimensionale ( $n = 3$ )**

Numero di vertici ( $k = 0$ ):  $N(3; 0) = \binom{3}{0} \cdot 2^{3-0} = 8$

Numero di spigoli ( $k = 1$ ):  $N(3; 1) = \binom{3}{1} \cdot 2^{3-1} = 12$

Numero di facce ( $k = 2$ ):  $N(3; 2) = \binom{3}{2} \cdot 2^{3-2} = 6$

Numero di cubi ( $k = 3$ ):  $N(3; 3) = \binom{3}{3} \cdot 2^{3-3} = 1$

Questo può essere illustrato nella tabella in Figura 6: (Autore: Markus Rupert, Università di Würzburg).

Clicca sulla figura per avere accesso alla pagina interattiva.

Prima di tutto, seguendo le frecce gialle, la tabella permette l'interpreta-

k-dimensional surfaces of the n-dimensional hypercube : $N(n; k) = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$										
n\k	0	1	2	3	4	5	...	k	...	n
0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	4	4	1	-	-	-	-	-	-	-
3	8	12	6	1	-	-	-	-	-	-
4	16	32	24	8	1	-	-	-	-	-
5	32	80	80	40	10	1	-	-	-	-
6	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-
7	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-
8	...	...	1792	1792	...	...	...	-	-	-
...								-	-	-
k								1	-	-
...								...	...	-
n	$2^n$	$n \cdot 2^{n-1}$	$\binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$	...	...	...	...	$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$	...	1

$N(n; n) = 1$         $N(n, 0) = 2^n$         $N(3t - 1; t - 1) = N(3t - 1; t)$   
  $N(n; n - 1) = 2n$         $n \cdot N(n - 1; 0) = N(n; 1)$

Figura 6:

zione di un singolo punto come un cubo di dimensione 0, quindi la formula suddetta è coerente anche per  $n = 0$ . Le sequenze di numeri evidenziati in colori diverse conducono a ulteriori congetture, che possono essere dimostrate usando la formula data per  $N(n; k)$ .

:

- $N(n; n - 1) = 2n$  (colore rosso)
- $n \cdot N(n - 1; 0) = N(n; 1)$  (colore verde)
- Per tutti i  $t \geq 1$ ,  $N(3t - 1; t - 1) = N(3t - 1; t)$  (colore blu)



Inoltre, è data una formula ricorsiva per calcolare i dati del cubo a  $n$  dimensioni dei corrispondenti numeri per il cubo a  $(n - 1)$  dimensioni

$$- N(n; k) = 2 \cdot N(n - 1; k) + N(n - 1; k - 1)$$

**Esempio 4: Dimostrazione della formula ricorsiva**

$$\begin{aligned} N(n; k) &= 2 \cdot N(n - 1; k) + N(n - 1; k - 1) = 2 \cdot \binom{n - 1}{k} \cdot 2^{n-1-k} + \binom{n - 1}{k - 1} \cdot 2^{n-1-(k-1)} \\ &= \left[ \binom{n - 1}{k} + \binom{n - 1}{k - 1} \right] \cdot 2^{n-k} \\ &= N(n; k) = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \\ &= N(n; k) \end{aligned} \tag{1}$$

Certamente, queste argomentazioni di tipo algebrico possono essere facilmente reinterpretate da un punto di vista geometrico e ritrasformate nella situazione geometrica.

**5. Quasicristalli - Proiezioni da dimensioni superiori**

Partendo dall'assunzione della cristallografia classica che la caratteristica delle strutture cristallografiche reali è la loro simmetria traslazionale (i.e. l'invarianza sotto tre traslazioni indipendenti), le rappresentazioni matematiche di queste strutture portano alla ben nota "restrizione cristallografica", che permette simmetrie rotazionali non banali solo di ordini 2, 3, 4 e 6. Finchè Shechtman et al. (1984) non hanno trovato una struttura non periodica di cristalli (senza simmetria traslazionale) all'interno di un legame Alluminio-Manganese, che ha una simmetria rotazionale a cinque facce, ciò corrispondeva solo su osservazioni fisiche. I cristallografi chiamano queste strutture quasicristalli. Per essere più precisi:

I quasicristalli sono forme strutturali ordinate ma non periodiche. Essi formano regolarità che riempiono tutto lo spazio sebbene non possiedano simmetrie traslazionali.

Tuttavia, questi quasicristalli possono essere molto complicati: la mancanza di simmetrie traslazionali porta ad una mancanza di regole per spiegare come la regolarità si sviluppa lontano dalla regione che stiamo osservando. Rappresenta una sfida per il matematico spiegare la regolarità. Si è verificata una svolta grazie all'osservazione che molti quasicristalli che sembrano

aperiodici sono semplicemente proiezioni su un sottospazio affine a dimensione inferiore di una griglia regolare in uno spazio di dimensione superiore. In effetti, vediamo un semplice esempio...

### Esempio 5: Quasicristalli unidimensionali

Per la retta  $g_1 : y = (\tau - 1) \cdot x$  in  $\mathbb{R}^2$  e per la sua retta ortogonale  $g_2 : y = \frac{1}{-\tau} \cdot x$  passante per l'origine con  $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ , consideriamo la proiezione ortogonale del quadrato unitario su  $g_2$  (segmento rosso). Inoltre, guardiamo tutti i punti di  $\mathbb{Z}^2$  con immagini sotto questa proiezione che giacciono sul segmento rosso. Questi punti sono ora proiettati ortogonalmente su  $g_1$  (punti verdi).

La lunghezza dei segmenti sulla retta di proiezione può assumere solo due

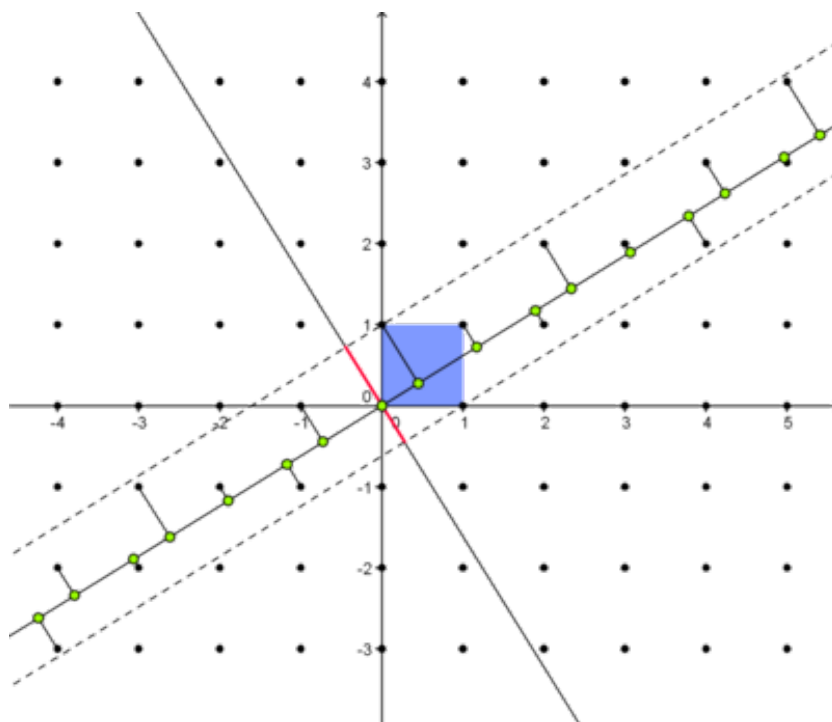


Figura 7:

valori (che corrispondono alla proiezione dei lati del quadrato unitario). Così parliamo di una "struttura ordinata". Muovendosi lungo le rette, la sequenza di questi valori appare più o meno caotica - non c'è alcuna simmetria traslazionale, ma se espandiamo l'universo a due dimensioni, allora ogni cosa diventa chiara: il nostro quasicristallo è proprio parte della proiezione di una griglia quadrata regolare. Espandendo la dimensione abbiamo potuto capire

la struttura nascosta del quasicristallo.

Questo processo è piuttosto generale. Senechal (1995), per esempio, illustra regolarità e assunzioni per metodi di proiezione e metodi di multigriglia che portano a insiemi di punti quasicristallini. Per esempio, proiettando parti di una griglia cubica a cinque dimensioni ( $\mathbb{Z}^5$ ) su un certo piano si ottiene un insieme di punti, nel senso suddetto, che può essere visto come un quasicristallo bidimensionale. L'insieme di punti mostra tutti i vertici della tassellazione di Penrose del piano (mediante i due rombi caratteristici, si confrontino la sezione 2 e la Figura 4.1).

## Conclusione

Abbiamo scoperto un modo in cui lavorano i matematici che è spesso riassunto dalla frase seguente

**“La matematica rende visibile l’invisibile”**

Quando non comprendi qualcosa, prova a cambiare il tuo punto di vista. Può accadere che il nuovo punto di vista fornisca una spiegazione della struttura nascosta. Questo è già quello che fai quando provi a comprendere una conica: scegli un sistema di coordinate appropriato in cui l'equazione sia semplice e riveli le caratteristiche della conica.

I vantaggi che gli studenti otterranno dal lavoro con oggetti in dimensioni superiori sono molteplici. In particolare, essi:

- otterranno una prima intuizione del significato di dimensioni superiori in scienze;
- conosceranno diverse possibilità per accedere agli oggetti in dimensioni superiori;
- useranno analogie per estendere la loro conoscenza del ben noto mondo tridimensionale;
- useranno le proprietà degli oggetti in questo mondo come un concetto astratto di un mondo mentale fittizio;
- rinfrescheranno e ripeteranno la loro conoscenza sulle proiezioni di oggetti tridimensionali su un piano.

## Riferimenti bibliografici

- [1] BOTELHO, L.; BOTELHO, R.: *Quantum Geometry of bosonic strings-Revisited*. Notas de Física, Centro Brasileira de Pesquisas Físicas (1999).
- [2] CAYLEY, A.: *On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev.*; and on quaternions. Philosophical Magazine. (1845) Nr. 26, S. 208-211.
- [3] DELONE B.N., *Geometry of positive quadratic forms*, Usp. Mat. Nauk 3 (1937), S. 16-62, und Usp. Mat. Nauk 4 (1938), S. 102-164. (Russisch)
- [4] GRAUMANN, G.: *Spate in drei und mehr Dimensionen*. MU 55/1 (2009), S. 16-25
- [5] HAMILTON, W. R.: *On quaternions, or an new system of imagineries in algebra*. Philosophical Magazine. (1844) Bd. 25(3), S. 489-495.
- [6] LAGARIAS, J.: *Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets*. Community of Mathematical Physics 179 (1996), S. 365-376.
- [7] MEYER, Y.: *Algebraic numbers and harmonic analysis*. North Holland (1972)
- [8] RIEMANN, B.: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Habil.). Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 13 (1868)
- [9] RUPPERT, M.: *Würfelbetrachtungen. Drei Wege zu höheren Dimensionen*. MU 56/1 (2010), S. 34-53.
- [10] SCHLÄFLI, L.: *Theorie der vielfachen Kontinuität* (1852). Denkschrift der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Bd. 38, 1., Hrsg. Graf, J. H. (1901), S. 1-237.
- [11] SENECHAL, M.: *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press (1995)

Lo sviluppo del concetto della geometria di dimensione superiore ha avuto inizio con i lavori scientifici di Hamilton (1844), di Cayley (1845), di Schläfli e di Riemann.