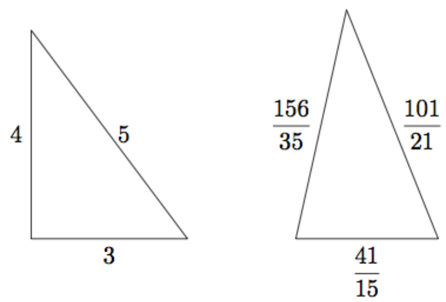
La storia di due triangoli: i triangoli di Erone e le curve ellittiche

William Mc Callum

1 febbraio 2012



Se due triangoli hanno la stessa area e lo stesso perimetro, sono necessariamente congruenti? La risposta si rivela negativa. Per esempio, il triangolo con lati $3, 4$ e 5 ha la stessa area e lo stesso perimetro del triangolo con lati $\frac{41}{15}$, $\frac{101}{21}$ e $\frac{156}{35}$.

Entrambi i triangoli hanno perimetro 12:

$$3+4+5=12 \quad \text{e} \quad \tfrac{41}{15}+\tfrac{101}{21}+\tfrac{156}{35}=\tfrac{287+505+468}{105}=\tfrac{1260}{105}=12.$$

Sorprendentemente, i due triangoli hanno anche la stessa area. Il triangolo rettangolo ha area $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$. Per trovare l'area dell'altro triangolo, usiamo la formula di Erone, che permette di esprimere l'area A di un triangolo con lati di lunghezza a, b e c come

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

dove $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ è il semiperimetro del triangolo. Un rapido calcolo, applicando questa formula, mostra che anche l'area del secondo triangolo è 6.

Lo spazio dei triangoli

Come possiamo individuare esempi di questo tipo? Il segreto è trovare il modo giusto di rappresentare lo spazio di tutti i triangoli. Ci sono molti modi possibili per farlo. Uno è quello di rappresentare un triangolo mediante la terna (a, b, c) che consiste nei suoi tre lati presi in ordine casuale. In questo modo rappresentiamo un triangolo mediante un punto dello spazio tridimensionale. Non tutti i punti corrispondono ad un triangolo; per esempio, tutte le componenti devono essere positive. Riesci a pensare ad altre restrizioni?

Esiste un altro modo di individuare le coordinate nello spazio dei triangoli usando gli angoli al posto delle lunghezze. In ogni triangolo si può inscrivere una circonferenza, il cui raggio r incorre in una semplice relazione con l'area A e il semiperimetro s, nello specifico

$$A = rs$$

Per provare la validità di questa relazione, conduci dal centro della circonferenza le perpendicolari ai lati del triangolo, come in Figura 1(a). Queste perpendicolari formano le altezze di 3 triangoli più piccoli aventi per base i lati del triangolo grande e come vertice il centro della circonferenza inscritta. Sommando le aree dei tre triangoli otteniamo $A = rs$.

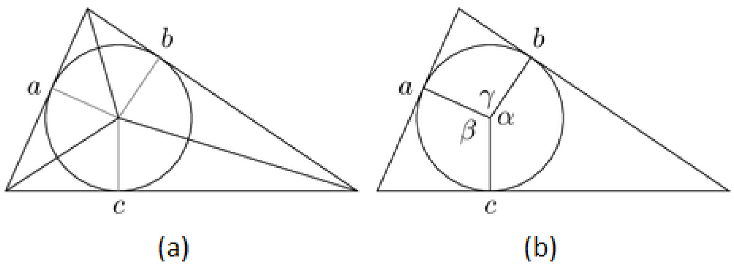


Figura 1: Parametrizzare lo spazio dei triangoli

Questa equazione ci dice che se due triangoli hanno la stessa area e lo stesso semiperimetro, allora i raggi delle circonferenze in essi inscritte sono congruenti. Quindi se stiamo cercando due triangoli di questo tipo li troveremo tra tutti i triangoli circoscritti ad una circonferenza fissata. Invece di usare le lunghezze per descrivere questi triangoli, useremo gli angoli formati dai tre raggi della circonferenza inscritta, come in Figura 1(b).

Parametrizzare triangoli con area e perimetro costante

All'interno dello spazio dei triangoli possiamo trovare curve che corrispondono ad un'intera famiglia di triangoli con gli stessi valori di A e s. In primo luogo, esprimiamo s in termini di angoli α, β e γ e del raggio della circonferenza inscritta, come segue. I raggi e le rette condotte dai vertici all'incentro dividono il triangolo in sei triangoli rettangoli. Poiché le rette condotte dai vertici al centro dividono a metà gli angoli del triangolo grande, questi triangoli rettangoli risultano a due a due congruenti. Considerando una lunghezza di base per ogni coppia e addizionando, otteniamo

$$s = r\Big(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\Big).$$

Quest'equazione e $A = rs$ insieme ci dicono che se l'area A e il semiperimetro s sono costanti, allora lo è anche la somma delle tangenti:

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{A}. \tag{1}$$

In secondo luogo, traduciamo questa condizione in un'equazione che definisca una curva nel piano. Sia $x = \tan\frac{\alpha}{2}$, $y = \tan\frac{\beta}{2}$ e $z = \tan\frac{\gamma}{2}$. Dal momento che $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, si ha

$$\frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2},$$

quindi

$$z = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{x+y}{1-xy}.$$

Quindi, se k è la costante $\frac{s^2}{A}$, l'equazione (1) diventa per k fissato, l'equazione

$$x + y - \frac{x+y}{1-xy} = k, \tag{2}$$

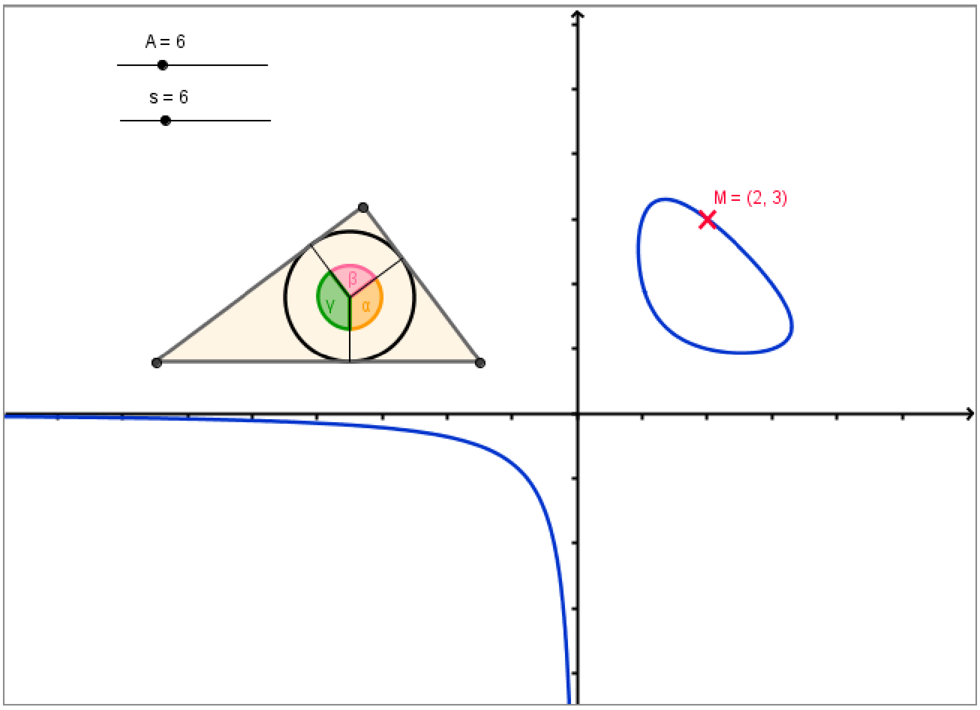
che riscriviamo come

$$x^2y + xy^2 = kxy - k \tag{3}$$

Ogni triangolo con area A e semiperimetro s determina un punto su questa curva e ogni punto sulla curva in una certa regione del piano corrisponde ad un triangolo. Tale regione corrisponde agli angoli che vanno effettivamente bene in Figura 1, nello specifico gli angoli che soddisfano $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ e

$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, che corrisponde alla regione di piano $x > 0$, $y > 0$ e $xy > 1$ (poiché $z > 0$).

La seguente figura mostra tale curva per $k = 6$, il valore che corrisponde al triangolo di lati $3, 4$ e 5. Ogni punto di questa curva che si trova nel quadrante positivo corrisponde ad un triangolo; le misure dei lati del triangolo sono $a = x + y, b = y + z$ e $c = z + x$. In particolare, i punti $(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3)$ e $(3, 1)$ corrispondono tutti al triangolo di lati $3, 4$ e 5, presi in ordine differente. Questa figura è interattiva: si veda cosa accade per qualche altro punto sulla curva o qualche altro valore dell'area e del perimetro!



Trovare punti sulla curva

Poiché la curva in Figura 2 è definita da un'equazione di grado 3, è possibile trovare punti su di essa usando il metodo delle tangenti e delle secanti. Due punti sulla curva determinano una secante che taglia la curva in un ulteriore punto; trovare questo punto significa risolvere un'equazione cubica in x, di cui due radici sono già note. Dal momento che abbiamo già 6 punti sulla curva, esistono molte possibilità di avere delle secanti e il generare più punti dà luogo a più possibilità. Infatti, la curva ha infiniti punti con coor-

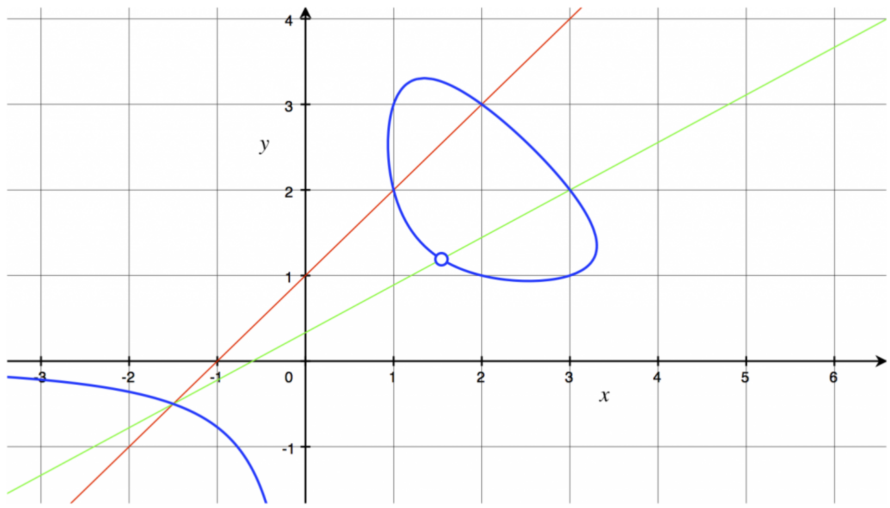


Figura 2: Curva che parametrizza i triangoli di perimetro 12 e area 6

dinate razionali. La procedura due-secanti illustrata in Figura 2 conduce al punto (che è stato cerchiato), che corrisponde al triangolo di lati $\frac{41}{15}$, $\frac{101}{21}$ e $\frac{156}{35}$.

La procedura della secante funzione per ogni curva cubica nel piano; tali curve sono dette curve ellittiche (non perché le curve siano delle ellissi, ma perché nascono dallo studio di una certa classe di funzioni complesse dette funzioni ellittiche). La procedura della secante ci permette di definire una struttura di gruppo sull'insieme dei punti razionali su una curva ellittica (ossia, punti le cui coordinate sono numeri razionali).

Lo studio delle curve ellittiche è un'importante area di ricerca nella teoria dei numeri, con applicazioni agli schemi crittografici che garantiscono la sicurezza delle transazioni finanziarie sul web. Le curve ellittiche giocano un ruolo centrale nella dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat.

La storia descritta in questo articolo mostra la notevole unità della matematica, a cominciare dalla scuola superiore per finire nella ricerca. Lungo la strada abbiamo incontrato un'idea fondamentale nella matematica moderna: l'idea di risolvere un problema riguardante un particolare tipo di oggetto (i triangoli con area 6 e perimetro 12, per esempio) situando l'oggetto in uno spazio più generale (lo spazio di tutti i triangoli) e trovando il modo più conveniente per parametrizzare tale spazio.