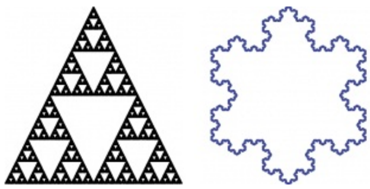
# La dimensione

Christiane Rousseau

15 febbraio 2012



Come si misura la grandezza di un oggetto geometrico? Per i sottoinsiemi del piano spesso ci serviamo del perimetro, della lunghezza, dell'area, del diametro, ecc. Questi elementi non sono sufficienti per descrivere i frattali. Gli oggetti frattali sono oggetti geometrici molto complessi e dobbiamo trovare un modo per quantificare la loro complessità.

A tal proposito, i matematici hanno introdotto il concetto di dimensione. La dimensione fornisce una misura della complessità di un frattale. La nozione di dimensione è una generalizzazione e formalizzazione della nostra intuitiva nozione di dimensione quando parliamo di 1D, 2D o 3D. Discuteremo alcuni modi di descrivere gli oggetti frattali lavorando su due esempi: il tappeto di Sierpinski e il fiocco di von Koch (si vedano le figure a lato).

### Qual è l'area del tappeto di Sierpinski?

Innanzi tutto dobbiamo comprendere la costruzione del tappeto di Sierpinski (si veda la Figura 1). Esso è costruita mediante un processo iterativo. Iniziamo con un triangolo e, ad ogni passo, rimuoviamo il triangolo centrale. Rimaniamo con tre triangoli. All'interno di ogni triangolo rimanente rimuoviamo il triangolo centrale, ecc.

Ora abbiamo a nostra disposizione tutti gli ingredienti per calcolare l'area del tappeto di Sierpinski. Supponiamo che l'area del triangolo iniziale (si veda la Figura 1(a)) sia $A$.

- Alla prima iterazione, rimuoviamo un'area di $\frac{A}{4}$ e rimaniamo con un'area $A_1 = \frac{3A}{4}$.

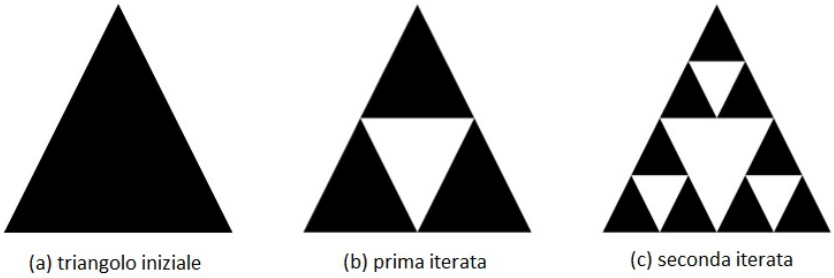



Figura 1: Il processo iterativo per costruire il tappeto di Sierpinski

- Alla seconda iterazione, rimuoviamo un quarto dell'area dei tre triangoli rimanenti, ossia un quarto di $A_1$. Quindi, l'area rimanente è $A_2 = \frac{3}{4}A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A$.
- Alla terza iterazione, rimuoviamo un quarto dell'area dei nove triangoli rimanenti, ossia un quarto di $A_2$. Quindi, l'area rimanente è $A_3 = \frac{3}{4}A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A$.
- ...
- All'$n$-esima iterazione, rimuoviamo un quarto dell'area dei $3^{n-1}$ triangoli rimanenti, ossia un quarto di $A_{n-1}$. Quindi, l'area rimanente è $A_n = \frac{3}{4}A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n A$.
- ...

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

possiamo concludere che l'area del tappeto di Sierpinski è zero!

**Qual è la lunghezza del fiocco di von Koch?**

Nuovamente, il fiocco di von Koch si ottiene per ricorsione. Ad ogni passo dell'iterazione, rimpiazziamo ogni segmento con un gruppo di 4 segmenti, ciascuno dei quali ha lunghezza uguale ad $\frac{1}{3}$ della lunghezza del segmento originale (si veda la Figura 2). Se $L$ è la lunghezza del triangolo originale in Figura 2(a), allora $\frac{4}{3}L$ è la lunghezza della stella in Figura 2(b), $\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$ è la lunghezza dell'oggetto in Figura 2(c), ecc. In particolare, ciò significa che, ad ogni passo, la lunghezza è moltiplicata per $\frac{4}{3}$. Poiché il numero di passi nella costruzione è infinito, allora la lunghezza del fiocco di von Kock è infinita!


Figura 2: Il fiocco di von Koch e il processo iterativo per costruirlo

### Dimensione di un oggetto frattale

Il tappeto di Sierpinski è un oggetto molto complicato. Tuttavia, la sua area è nulla e quindi ci dà poche informazioni sull'oggetto. Il fatto che la lunghezza del fiocco di von Koch sia infinita ci dice che l'oggetto è complicato, ma niente di più preciso. Per essere in grado di fornire maggiori informazioni sui frattali i matematici introducono il concetto di *dimensione*.

*Come viene data da un matematico la definizione di dimensione?*

Iniziamo con la nostra idea intuitiva di dimensione. Intuitivamente, le curve lisce hanno dimensione 1, le superfici lisce dimensione 2 e i volumi pieni dimensione 3. Quindi dovremmo dare una definizione matematica che valga 1 per le curve lisce, 2 per le superfici lisce e 3 per i volumi pieni. Nel contesto di questa "vignette" ci limiteremo alle dimensioni 1 e 2. Vogliamo ricoprire un oggetto geometrico nel piano con piccoli quadrati (Se volessimo definire la dimensione 3, useremmo dei piccoli cubi, ma avremmo potuto usare piccoli cubi per le curve e le superfici senza cambiare la dimensione!)

**Caso di una curva liscia.** (Figura 3)

- Se prendiamo dei quadrati aventi lato di mezza unità, approssimativamente abbiamo bisogno di un numero doppio di quadrati per ricoprire l'oggetto;
- se prendiamo dei quadrati aventi lato corrispondente ad un terzo dell'unità, approssimativamente abbiamo bisogno di un numero triplo di quadrati per ricoprire l'oggetto;

- ...
- se prendiamo dei quadrati aventi lato $n$ volte più piccolo, approssimativamente abbiamo bisogno di un numero di quadrati $n$ volte più grande per ricoprire l'oggetto.

(a) (b)

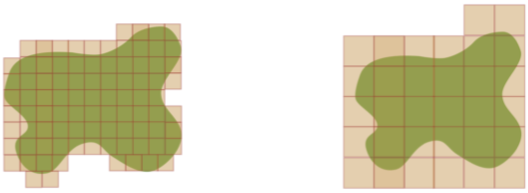
Figura 3: Calcolo della dimensione di una curva usando quadratini di differente grandezza

**Caso di una superficie.** (Figura 4)

- Se prendiamo dei quadrati aventi lato di mezza unità, approssimativamente abbiamo bisogno di un numero quadruplo di quadrati per ricoprire l'oggetto;
- se prendiamo dei quadrati aventi lato corrispondente ad un terzo dell'unità, approssimativamente abbiamo bisogno di un numero di quadrati nove volte più grande per ricoprire l'oggetto;
- ...
- se prendiamo dei quadrati aventi lato $n$ volte più piccolo, approssimativamente abbiamo bisogno di un numero di quadrati $n^2$ volte più grande per ricoprire l'oggetto.

Ora possiamo dare la definizione (intuitiva) di dimensione:

**Definizione.** Un oggetto nel piano ha dimensione $d$ se, quando usiamo dei quadrati di lato $n$ volte più piccolo per ricoprirlo, abbiamo bisogno di un numero di quadrati approssimativamente $n^d$ volte più grande per ricoprirlo.



(a) (b)

Figura 4: Calcolo della dimensione di una superficie usando quadratini di differente grandezza

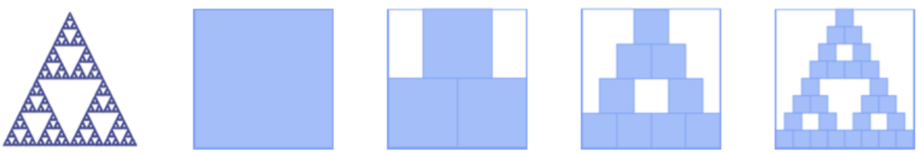
**Alcune osservazioni sulla nostra definizione.**

1. Naturalmente i quadrati utilizzati per ricoprire l'oggetto avrebbero potuto essere inclinati diversamente. Inoltre, essi potrebbero sovrapporsi.

2. Invece dei quadrati, avremmo potuto usare dei rettangoli aventi tutti le stesse dimensioni, fissando un rapporto $r > 1$ della lunghezza sulla larghezza. Avremmo ottenuto gli stessi risultati per la dimensione 1 e 2 e così anche per il caso generale di dimensione $n$. Per calcolare la dimensione del fiocco di von Koch risulta più semplice utilizzare i rettangoli invece dei quadrati.

La definizione può essere generalizzata agli oggetti geometrici che sono sottoinsiemi di $R^m$ e il risultato è indipendente dall'$m$ che consideriamo!

**Definizione.** Un sottoinsieme di $R^m$ ha dimensione $d$ se, quando usiamo ipercubi $m$-dimensionali con spigolo $n$ volte più piccolo per ricoprirlo, abbiamo bisogno di un numero di ipercubi approssimativamente $n^d$ volte maggiore per ricoprirlo.



(a) triangolo di Sierpinski (b) 1 (c) 3 (d) 9 (e) 27

Figura 5: Numero di quadrati per ricoprire il tappeto di Sierpinski che appare in (a)

Non tutti gli oggetti hanno una dimensione. Tuttavia, gli oggetti auto-simili hanno una dimensione che, il più delle volte, non è intera. Calcoliamo ora la dimensione del tappeto di Sierpinski (si veda la Figura 5).

- Prendiamo un quadrato con lato uguale alla lunghezza della base. Esso ricopre il tappeto di Sierpinski in Figura 5(b).

- Se prendiamo dei quadrati aventi lato corrispondente a metà della base, allora abbiamo bisogno di tre quadrati per ricoprirlo. Si osservi che $3 = 2^{\frac{ln3}{ln2}}$ (Figura 5(c)).

- Se prendiamo dei quadrati aventi lato corrispondente ad un quarto della base, allora abbiamo bisogno di nove quadrati per ricoprirlo. Si osservi che $9 = 4^{\frac{ln3}{ln2}}$ (Figura 5(d)).

- Se prendiamo dei quadrati aventi lato corrispondente ad un ottavo della base, allora abbiamo bisogno di 27 quadrati per ricoprirlo. Si osservi che $27 = 8^{\frac{ln3}{ln2}}$ (Figura 5(e)).

Quindi, è semplice concludere che la dimensione del triangolo di Sierpinski in Figura 5(a) è $\frac{ln3}{ln2} \approx 1.585$.

Affermiamo ora che la dimensione del fiocco di von Koch in Figura 3(b) è $\frac{ln4}{ln3} \approx 1.26$. Perché? Se proviamo a ricoprirlo con quadrati aventi per lato quello di un'iterata, una difficoltà viene dal fatto che alcuni quadrati ricoprono un lato ed altri possono coprirne due quando tali lati formano una punta. Quindi, usiamo il trucco illustrato nella nostra seconda osservazione e prendiamo dei rettangoli la cui lunghezza sia 3 volte la larghezza. Forniamo i passi principali del ragionamento e lasciamo i dettagli al lettore. Ad ogni iterata, usiamo tanti rettangoli quanti sono i lati dell'iterata, in modo che la lunghezza di ogni rettagolo sia uguale alla lunghezza di un lato dell'iterata. Se posizioniamo i rettangoli lungo il perimetro esterno del fiocco di von Koch, allora essi ricopriranno le nuove punte che verranno aggiunte nelle iterazioni successive. È semplice controllare che abbiamo bisogno di tanti rettangoli quanti sono i lati. Nel triangolo iniziale abbiamo 3 lati e, da un'iterata all'altra, moltiplichiamo il numero di lati per 4, quindi moltiplichiamo il numero di rettangoli per 4. Allo stesso tempo, usiamo rettangoli aventi lati 3 volte più piccoli. Dal momento che $4 = 3^{\frac{ln4}{ln3}}$, concludiamo che la dimensione del fiocco di von Koch è $\frac{ln4}{ln3}$.

La dimensione dà una "misura" della complessità o densità di un frattale. Infatti, noi percepiamo che il tappeto di Sierpinski è più denso del fiocco di von Koch, il quale assomiglia di più ad una curva ispessita. Ciò è dovuto al fatto che $\frac{ln3}{ln2} > \frac{ln4}{ln3}$.

**Applicazioni.**

**La rete capillare nelle vicinanze di un tumore** non è la stessa che troviamo in qualsiasi altro punto del corpo. La ricerca medica si concentra sullo studio di tale rete ed in particolare sulla sua dimensione frattale, al fine di migliorare la diagnosi a partire dalla produzione di immagini raccolte nel corso degli esami medici.

**La struttura dell'albero bronchiale.** Gli atleti di alto livello sono più soggetti a soffrire di asma rispetto al resto della popolazione. Perché? Nell'articolo [1] è stato studiato il polmone "ottimale". Esistono 17 livelli di tubi bronchiali prima di arrivare ai bronchioli terminali, seguiti dagli alveoli coinvolti nello scambio d'ossigeno. Se i tubi bronchiali sono troppo stretti, allora la pressione aumenta quando l'aria penetra nel livello successivo di tubi bronchiali. Tuttavia se essi sono troppo dilatati, così da mantenere la stessa pressione ad ogni livello, allora il volume aumenta troppo. (Diventerebbe infinito se avessimo un numero infinito di livelli). Perciò, il polmone "ottimale" dovrebbe avere il minimo volume senza che aumenti la pressione. Tuttavia, all'interno del polmone ottimale, una piccola diminuzione del diametro dei tubi bronchiali porta ad un aumento di pressione maggiore rispetto alla stessa diminuzione in tubi bronchiali più larghi. (Ciò deriva dalla non linearità della funzione che rappresenta la pressione.) I polmoni umani presentano tubi bronchiali più larghi ed un volume più alto rispetto al teorico polmone ottimale. Questo cuscinetto fornisce una protezione nel caso di broncocostrizione, una patologia che fa diminuire il diametro dei tubi bronchiali, che potrebbe essere causata dall'asma. Gli atleti presentano polmoni generalmente più chiusi rispetto al teorico polmone ottimale e quindi risultano più vulnerabili.

**L'intestino tenue.** La superficie esterna dell'intestino tenue ha un'area approssimativamente di 0.5 $m^2$, mentre la superficie interna ha un'area approssimativamente di 300 $m^2$. Abbiamo visto con il fiocco di von Koch che una curva frattale può avere lunghezza infinita, anche se essa occupa una superficie finita. Allo stesso modo, potremmo immaginare facilmente che una superficie frattale che occupa un volume finito possa avere un'area infinita. Questo è uno stratagemma usato dalla natura: l'area della superficie interna dell'intestino tenue deve essere molto grange per rendere massimo l'assorbimento intestinale. La natura frattale di questa superficie permette di raggiungere tale scopo. Lo stesso vale per la superficie degli alveoli che si trovano alle terminazioni dei bronchioli nei polmoni. Dal momento che l'albero bronchiale possiede una natura frattale, la superficie degli alveoli è estremamente grande, in modo da massimizzare lo scambio di ossigeno.

## Riferimenti bibliografici

[1] Mauroy, B., Filoche, M., Weibel, E. R., Sapoval, B., *An optimal bronchial tree may be dangerous*, Nature, 427 (2004), 633-636.