PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

17 novembre 2010

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ________________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Quanti lunedì possono esserci al massimo in 45 giorni consecutivi?
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 7, **(D)** 8, **(E)** 9.

2) Emilio prende al buio dei calzini da una cesta in cui ci sono: 6 calzini neri, 14 calzini blu e 8 calzini verdi. Per essere sicuro che tra i calzini che ha preso ce ne siano due dello stesso colore, il numero minimo di calzini che deve prendere è:
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 9, **(D)** 15, **(E)** 21.

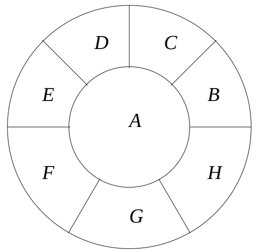
3) Quante cifre ha il quadrato di un numero naturale di 10 cifre?
(A) meno di 25, **(B)** 40, **(C)** 50, **(D)** 60, **(E)** almeno 100.

4) Quale fra queste serie di disuguaglianze è corretta?
(A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$, **(B)** $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$,
(C) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$, **(D)** $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$,
(E) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$.

5) Matilde vuole regalare una margherita di cartone alla sua mamma. Ritaglia un cerchio giallo e lo mette al centro. Poi ritaglia alcuni cerchi bianchi, dello stesso raggio del cerchio giallo, per fare i petali. Dispone i petali nel modo seguente: il primo tangente esternamente al cerchio giallo, il secondo tangente esternamente al cerchio giallo e al primo petalo, e così via fino a completare il giro con l'ultimo petalo che è tangente al penultimo e al primo petalo, e al cerchio giallo. Quanti petali ha la margherita?
(A) 3, **(B)** 4, **(C)** 5, **(D)** 6, **(E)** questa disposizione è impossibile: l'ultimo petalo si sovrappone necessariamente al primo.

6) a, b e c sono numeri reali tali che comunque se ne scelgano due la loro somma è maggiore o uguale a zero. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a \cdot b \cdot c \geq 0$, **(B)** almeno uno dei tre numeri è zero, **(C)** almeno uno dei tre numeri è strettamente minore di zero, **(D)** a, b e c sono tutti maggiori o uguali a zero, **(E)** $a + b + c \geq 0$.

7) Concetta immagina un mondo piatto e tondo, e lo divide in otto stati, uno centrale e sette intorno a questo, come indicato nella figura a fianco. Inoltre a ciascuno stato assegna come nome una lettera (vedi figura). Vuole colorare ciascuno stato di rosso, oppure di verde, oppure di giallo, in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore. In quanti modi diversi può farlo?
(A) Nessuno, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** 6.



8) Silvano, l'uomo più ricco di Nettuno, possiede un'autostrada con molte corsie. In un momento di prosperità decide di aumentare il numero di corsie del 60 %. Successivamente, a causa di un'antica legge del pianeta, deve ridurre il numero di corsie di una certa percentuale X. Dopo averlo fatto si ritrova con lo stesso numero di corsie che aveva all'inizio. Quanto vale X?
(A) 15%, **(B)** 21,5%, **(C)** 28%, **(D)** 37,5%, **(E)** 60%.

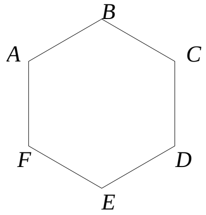
9) In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?
(A) $(5 + \sqrt{3})$ cm, **(B)** $(2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ cm, **(C)** $(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$ cm,
(D) $(5 + \sqrt{2})$ cm, **(E)** $(2 + 3\sqrt{3})$ cm.

10) Quanto vale la somma: $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \ldots + 35 + 35 + 36$?
(A) 990, **(B)** 1105, **(C)** 1295, **(D)** 1395, **(E)** 1505.

11) La squadra dei matematici partecipa ad un campionato in cui ogni vittoria vale 3 punti, ogni pareggio 1 punto e ogni sconfitta 0 punti. Dopo le prime 13 partite la squadra ha 29 punti e ha perso tante partite quante ne ha pareggiate. Quante partite ha vinto finora?
(A) 4, **(B)** 6, **(C)** 8, **(D)** 9, **(E)** 11.

12) Per quanti valori distinti del numero naturale n l'equazione $3x^2 + 2nx + 3 = 0$ ha due soluzioni reali distinte, e queste sono entrambe numeri interi?
(A) Nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 4, **(E)** più di 5.

13) $ABCDEF$ è un esagono regolare di lato 1 cm. G è il punto di intersezione tra le diagonali AC e BE. Quanto vale l'area del triangolo ABG?
(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{8}\,\mathrm{cm}^2$, **(C)** $\frac{9}{40}\,\mathrm{cm}^2$,
(D) $\frac{1+\sqrt{3}}{12}\,\mathrm{cm}^2$, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2$.

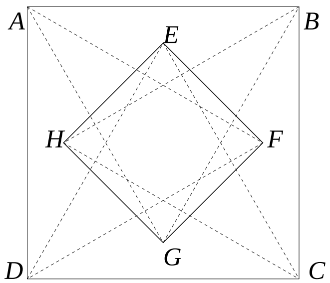


14) Quante cifre ha il numero $(111222333444555666777888999)/111$?
(A) 13, **(B)** 21, **(C)** 25, **(D)** 27, **(E)** 29.

15) Un atleta percorre 5 km in 16 minuti e 40 secondi. Durante il percorso aumenta progressivamente la sua velocità, in modo che ogni chilometro viene coperto in 5 secondi in meno del precedente. Quanto tempo impiega per percorrere l'ultimo chilometro?
(A) 2 minuti e 55 secondi, **(B)** 3 minuti, **(C)** 3 minuti e 5 secondi,
(D) 3 minuti e 10 secondi, **(E)** 3 minuti e 15 secondi.

16) Quante terne distinte (x, y, z), formate da numeri interi compresi tra 0 e 100 (estremi inclusi), soddisfano $(x-y)^2+(y+z)^2=(x+y)^2+(y-z)^2$?
(A) $101 \cdot 201$, **(B)** 10^6, **(C)** 101^2, **(D)** 10^4, **(E)** $51 \cdot 301$.

17) Nella figura a fianco, il quadrato $ABCD$ ha lato 1 m e i triangoli: ABG, BCH, CDE e DAF sono equilateri. Quanto vale l'area di $EFGH$?
(A) $\frac{1}{6}\,\mathrm{m}^2$, **(B)** $\frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2$, **(C)** $(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2$,
(D) $(3\sqrt{3}-5)\,\mathrm{m}^2$, **(E)** $\frac{1}{3}\,\mathrm{m}^2$.



18) Quanti sono i quadrati perfetti di almeno tre cifre, minori o uguali di $2010 \cdot 2011$?
(A) 1890, **(B)** 1910, **(C)** 2001, **(D)** 2011, **(E)** 2110.

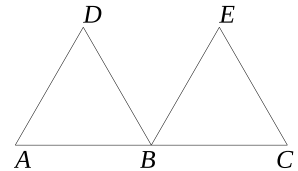
19) Il maggiore Tom è atterrato su un pianeta popolato da gatti viola, che dicono sempre la verità, e da gatti neri, che mentono sempre. Nel buio più completo incontra 5 gatti, che si rivolgono a lui nel modo seguente. Primo gatto: "Sono viola"; secondo gatto: "Almeno 3 di noi sono viola", terzo gatto: "Il primo gatto è nero", quarto gatto: "Almeno 3 di noi sono neri", quinto gatto: "Siamo tutti neri". Quanti dei 5 gatti sono viola?
(A) nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

20) Valeria deve scegliere la combinazione della sua cassaforte, che deve essere un numero di cinque cifre, tutte diverse da zero, divisibile per tre, e tale che delle prime quattro cifre (da sinistra) due siano pari e due dispari. Quante possibilità ha?
(A) $2^5 \cdot 5^2$, **(B)** $2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2$, **(C)** $2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^2$, **(D)** $5^2 \cdot 3^4$, **(E)** $2^{10} \cdot 5 \cdot 3$.

21) All'Università delle Favole, dove gli studenti sono infiniti e gli sbadigli molto contagiosi, ogni volta che uno studente sbadiglia altri 2 studenti sbadigliano dopo 5 secondi (chi ha già sbadigliato non lo fa più). Ieri la Bella Addormentata (una studentessa) era lì e, essendo molto stanca, ha sbadigliato per prima! In quanti (inclusa la Bella Addormentata) avevano sbadigliato dopo 57 secondi?
(A) 2047, **(B)** 3024, **(C)** 3625, **(D)** 4095, **(E)** 8192.

22) Mago Merlino ha 7 palline bianche e 7 nere, e può fare due tipi di incantesimi: il primo fa sparire 3 palline nere e ne fa comparire 2 bianche (Merlino lo può fare solo se ci sono almeno 3 palline nere); il secondo fa sparire 4 palline bianche e ne fa comparire 9 nere (Merlino lo può fare solo se ci sono almeno 4 palline bianche). Dopo aver lanciato varie volte questi incantesimi è possibile che si trovi con...
(A) 2 palline bianche e 15 nere, **(B)** 4 palline bianche e 14 nere, **(C)** 3 palline bianche e 11 nere, **(D)** 7 palline bianche e 13 nere, **(E)** 10 palline bianche e 10 nere.

23) Nella figura a fianco, AC misura 2 cm, B è il punto medio di AC e i triangoli ABD e BCE sono equilateri. Se P e Q sono i centri di ABD e BCE rispettivamente, quanto misura il raggio della circonferenza passante per P, Q e B?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ cm, **(B)** $\frac{1}{2}$ cm, **(C)** 1 cm, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm,
(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.



24) Un cono circolare retto ha volume $1\,\mathrm{m}^3$. Si taglia il cono parallelamente alla base, a una distanza dal vertice pari a un quarto dell'altezza del cono. Si ottiene così un nuovo cono; qual è il suo volume?
(A) $\frac{1}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(B)** $\frac{3}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(C)** $\frac{27}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(D)** $\frac{48}{64}\,\mathrm{m}^3$, **(E)** $\frac{63}{64}\,\mathrm{m}^3$.

25) In una squadra ci sono 11 giocatori e 11 maglie numerate da 1 a 11. I giocatori entrano nello spogliatoio uno alla volta, in ordine casuale. Ciascuno, appena arriva, sceglie una maglia a caso, tranne Danilo che preferisce la maglia numero 8 e, se è disponibile, sceglie quella. Qual è la probabilità che Danilo riesca ad ottenere il suo numero di maglia preferito?
(A) $\frac{4}{9}$, **(B)** $\frac{5}{11}$, **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** $\frac{6}{11}$, **(E)** $\frac{5}{9}$.