

Una rivisitazione delle condizioni di Routh

*Andrea Giacobbe*¹

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania

Un sistema dinamico dipendente da parametri è soggetto a biforcazioni. Le biforcazioni modificano qualitativamente il complesso delle soluzioni e, in particolare, possono modificare la stabilità degli equilibri o delle soluzioni periodiche.

Uno dei criteri più utilizzati per studiare la stabilità di un equilibrio è quello attribuito a Routh-Hurwitz, secondo il quale un equilibrio è stabile se sono positive alcune espressioni. In questa presentazione rielaboriamo i risultati di Routh concentrandoci non tanto sul dominio aperto in cui si ha stabilità, quanto sulle ipersuperfici marginali, nelle quali ben definiti tipi di biforcazioni hanno luogo. Tali ipersuperfici marginali si possono definire come sottovarietà algebriche e semialgebriche nello spazio degli invarianti, e posseggono una struttura stratificata dovuta all'esistenza di biforcazioni di codimensione crescente.

Grazie al teorema di Grobman–Hartman, ogni equilibrio che sia strutturalmente stabile può essere associato a un simbolo del tipo $f_\beta^\alpha n_\delta^\gamma$, dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono quattro numeri naturali caratteristici (con una condizione sulla loro somma). Una biforcazione determina una variazione di tali numeri caratteristici, ed è dovuta a tre possibili eventi sugli autovalori della linearizzazione all'equilibrio:

- un autovalore nullo;
- due autovalori complessi coniugati puramente immaginari;
- un autovalore doppio non nullo sull'asse reale.

Un'analisi del polinomio caratteristico permette di caratterizzare questi eventi attraverso opportune varietà, che separano lo spazio dei parametri in domini connessi nei quali l'equilibrio si trova in una condizione di stabilità strutturale. Una di queste componenti connesse è quella individuata dalle condizioni di Routh.

Questa idea può essere estesa al caso Hamiltoniano, nel quale il simbolo diventa $ff_\alpha s_\beta c_\gamma$, dove α, β, γ sono tre numeri naturali caratteristici (con una condizione sulla loro somma), e alla teoria di Floquet. I numeri naturali caratteristici si possono calcolare attraverso l'uso opportuno dell'integrazione con il metodo dei residui e della successione di Sturm.

¹Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2017YBKNCE e del progetto PIA.CE.RI. della Università di Catania

E-mail: andrea.giacobbe@unict.it.

martedì 5 settembre, ore 14.30, Aula Magna Polo Carmignani