

## Teoria di Ramsey e combinatoria dei numeri con metodi nonstandard

*Mauro Di Nasso*  
Università di Pisa

Gli ultimi anni hanno visto un crescente interesse per la teoria di Ramsey e per i problemi di combinatoria dei numeri ad essa collegati. Un risultato fondamentale in questo ambito è il Teorema di Hindman:

"Per ogni colorazione (partizione) finita dei numeri naturali esiste una successione infinita con la proprietà che le somme di suoi elementi distinti appartengono tutte allo stesso colore". Un altro risultato molto profondo che ha attirato l'attenzione dei matematici è il celebre Teorema di Szemerédi, che ha stabilito che in ogni insieme di naturali avente densità asintotica positiva si trovano progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe. Entrambi i risultati citati sopra sono stati l'origine di ricerche molto interessanti, il cui sviluppo sembra ancora lontano dall'esaurirsi.

Un primo importante esempio di estensione del Teorema di Hindman è costituito dal cosiddetto "Gowers' Ramsey Theorem", una proprietà dimostrata da Timothy Gowers che ha permesso di risolvere un problema aperto nella teoria degli spazi di Banach. Gowers ha poi continuato le sue ricerche nell'ambito della combinatoria, dimostrando tra l'altro un importante "Regularity Lemma" per gli ipergrafi, in analogia col noto "Regularity Lemma" di Szemerédi per i grafi.

Un altro rilevante esempio che può essere visto come sviluppo del Teorema di Szemerédi è il noto Teorema di Peter Green e Terence Tao: "L'insieme dei numeri primi contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe". La validità o meno di questa proprietà per tutte le sequenze di naturali che, come i primi, hanno una serie di reciproci divergente, è probabilmente il più importante problema aperto del settore.

Un aspetto peculiare di questo ambito è la grande varietà dei metodi usati: agli strumenti della combinatoria elementare si sono aggiunti l'analisi discreta di Fourier, la teoria ergodica, l'algebra nello spazio degli ultrafiltri. Recentemente, si è aggiunto un ulteriore filone di ricerca, in cui i problemi della teoria di Ramsey e le proprietà combinatorie di insiemi di numeri interi vengono studiati con i metodi dell'analisi non standard e con gli strumenti della teoria dei modelli.

In questa conferenza cercherò di spiegare questi metodi originati dalla logica matematica, e presentare alcuni esempi di nuovi risultati che sono stati ottenuti grazie al loro uso.