*Problemi indecidibili in matematica ---
Cosa può dire al riguardo la teoria degli insiemi?*

Matteo Viale (Università di Torino)

ABSTRACT: Faremo una distinzione tra le congetture aperte ed i problemi matematici non decidibili. Questi ultimi sono problemi (spesso semplici da formulare) che ammettono almeno due soluzioni incompatibili rispetto ad un comune sistema assiomatico per la matematica.

Questo tipo di problemi ricorre in molti campi della matematica, tra i molti esempi: il problema del continuo (in teoria degli insiemi), il problema dell'esistenza di un gruppo di Whitehead non libero (in teoria dei gruppi), il problema dell'esistenza di automorfismi esterni nell'algebra di Calkin (in analisi funzionale).

Una analogia può essere fatta tra questo tipo di risultati di indecidibilità e le geometrie non-euclidee: l'indipendenza del quinto postulato di Euclide evidenzia che la topologia di una varietà non determina la sua struttura metrica. Nel contesto che prendiamo in esame, i risultati di indecidibilità evidenziano che l'informazione racchiusa in un certo sistema assiomatico per la matematica non è sufficiente a dare una risposta univoca a molte questioni.

Nella prima parte della conferenza daremo una rapidissima presentazione di come si possa dimostrare in modo rigoroso l'indecidibilità di un dato problema matematico utilizzando la tecnica del forcing. Nella seconda parte rovesceremo il punto di vista sul forcing e proveremo a mostrare che se arricchiamo la teoria degli insiemi con i cosiddetti assiomi di forcing (che possono essere formulati come rafforzamenti del teorema di categoria di Baire e dell'assioma di scelta), allora la gran parte dei problemi che risultano indecidibili rispetto ai metodi dimostrativi abituali diventano invece risolubili (almeno in linea di principio).

What set theory can say about undecidability in mathematics

Matteo Viale (University of Torino)

ABSTRACT: We shall first draw a distinction between an undecided mathematical problem versus an undecidable mathematical problem. The former is an open mathematical conjecture.

The latter is a problem which admits at least two incompatibile solutions with respect to the commonly accepted axiom systems for mathematics.

Undecidable problems occur in many fields: examples are the continuum problem in set theory, Whitehead problems on free groups in group theory, the existence of outer automorphisms for the Calkin algebra in operator algebra.

To a certain extent these undecidability results can be compared with non-euclidean geometries: the undecidability of Euclid's fifth postulate amounts to say that the topology of a manifold cannot decide its metric structure. In our context the undecidability results show that the information conveyed by certain axiom systems for mathematics is not sufficient to give a definite answer to many natural mathematical questions.

We shall first give a very brief sketch of the method of forcing, a powerful tool to tackle most of these undecidability questions. Finally we will briefly argue that if we enrich mathematics with new axioms which are "natural" strengthenings of the Baire's category theorem and of the axiom of choice (the so called forcing axioms), many problems which are undecidable on the basis of the basic axiom systems can now be solved appealing to these new axioms.