

Sulla classificazione degli spazi separabili metrici completi a meno di isometria

Luca Motto Ros (Università di Freiburg)

Sunto: Consideriamo il problema di determinare se sia possibile assegnare invarianti agli spazi separabili metrici completi (brevemente: spazi Polacchi) in maniera tale che due spazi siano isometrici se e solo se gli viene assegnato lo stesso invariante. Perché una tale classificazione abbia senso, si richiede ovviamente che sia gli invarianti che la mappa che li associa agli spazi Polacchi siano il più semplici e concreti possibile. Nel caso degli spazi metrici compatti, M. Gromov ha mostrato che una tale classificazione "semplice" è possibile, ovvero, usando la terminologia moderna, che il problema di classificazione corrispondente è "liscio". Tuttavia, come osservato da A. M. Vershik: "La classificazione degli spazi Polacchi arbitrari a meno di isometria è un compito estremamente arduo. Più precisamente, tale classificazione non è liscia." È quindi naturale chiedersi se sia possibile quantificare quanto sia complicato un tale problema di classificazione.

La teoria della Borel-riducibilità tra relazioni di equivalenza analitiche sviluppata alla fine del XX secolo si è rivelata uno strumento molto efficace nel rispondere a questo tipo di domande e nel determinare l'esatta complessità della maggior parte dei problemi di classificazione che compaiono in maniera naturale in varie parti della matematica. In questo intervento passeremo in rassegna alcuni risultati sulla complessità in termini di Borel-riducibilità del problema di classificazione per la collezione di tutti gli spazi Polacchi e per diverse sue sottoclassi naturali (localmente compatti, zero-dimensionali, Heine-Borel, ultrametrici, e così via), tra cui alcuni interessanti teoremi di anti-classificazione. Presenteremo inoltre un nostro recente risultato in cui si determina la complessità esatta del problema di classificazione per spazi Polacchi ultrametrici localmente compatti, risolvendo così un problema posto da Gao e Kechris nel 2000.

On the classification of separable complete metric spaces up to isometry

Luca Motto Ros (University of Freiburg)

Abstract: We consider the problem of determining whether it is possible to assign invariants to separable complete metric spaces (briefly: Polish spaces) so that two such spaces are isometric if and only if they are assigned the same invariant. For this to be of interest, both the assignment map and the kind of invariants involved must of course be as simple and concrete as possible. In the case of compact metric spaces, M. Gromov showed that such a "simple" classification is possible, i.e. that, in the modern terminology, the corresponding classification problem is smooth. However, as pointed out by A.M. Vershik: "The classification of all Polish spaces up to isometry is an enormous task. More precisely, this classification is not smooth." It is thus natural to ask: can we quantify how much complicated is such a problem?

The theory of Borel reducibility between analytic equivalence relations developed at the end of the XXth century is a remarkably effective tool to answer this kind of questions and to exactly determine the complexity of most of the various classification problems naturally arising in mathematics. In this talk we survey some results concerning the complexity in terms of Borel reducibility of the classification problems for arbitrary Polish spaces and for various of their natural subclasses (locally compact, zero-dimensional, Heine-Borel, ultrametric, and so on), including some interesting anti-classification theorems. We also present our recent result which determines the exact complexity of the classification problem for locally compact ultrametric Polish spaces, solving in this way a problem posed by Gao and Kechris in 2000.