LA FIBRAZIONE DI HITCHIN COME SISTEMA COMPLETAMENTE INTEGRABILE ALGEBRICO: RECENTI PROGRESSI E PROBLEMI APERTI

LUCA MIGLIORINI

La fibrazione di Hitchin gioca un ruolo di grande importanza in vari ambiti matematici, dalla teoria delle rappresentazioni alla fisica matematica. Essa trae la sua origine dall'osservazione che la riduzione bidimensionale delle equazioni di Yang-Mills dà luogo a un sistema di equazioni alle derivate parziali nel piano che risultano conformalmente invarianti. Tali equazioni hanno perciò senso su una superficie di Riemann C, che assumiamo compatta, e le soluzioni danno origine alla nozione di fibrato di Higgs, un fibrato olomorfo E su C dotato di una forma olomorfa φ a valore negli endomorfismi di E. Lo spazio dei moduli M dei fibrati di Higgs ha una metrica naturale hyperkähleriana, che rende M un oggetto estremamente interessante dal punto di vista differenziale. In particolare M ha una struttura simplettica olomorfa. N. Hitchin dimostra inoltre che a ogni fibrato di Higgs (di grado 0) è associata una rappresentazione del gruppo fondamentale di C, cosicché M fornisce una parametrizzazione di tali rappresentazioni. Si ha così una generalizzazione del classico teorema di Narasimhan e Seshadri e il primo esempio della corrispondenza nota come "teoria di Hodge non-abeliana".

Associando al fibrato di Higgs i coefficienti del polinomio caratteristico di φ si ha la fibrazione di Hitchin: una applicazione dallo spazio dei moduli dei fibrati di Higgs in uno spazio affine, che si rivela essere un sistema algebrico completamente integrabile, le sue fibre generiche sono cioè varietà abeliane (tori complessi che ammettono una immersione olomorfa in uno spazio proiettivo), lagrangiane rispetto alla struttura simplettica. Le fibre singolari sono invece molto complicate e legate alla cosiddetta "fibra di Springer affine", introdotta da D. Kazhdan e G. Lusztig, da cui la straordinaria rilevanza della fibrazione di Hitchin in teoria delle rappresentazioni.

Negli ultimi anni la fibrazione di Hitchin è stata al centro di intense ricerche: la topologia dell'applicazione è stata compresa più profondamente a seguito del "Teorema del supporto" di B.C. Ngô, passo cruciale nella sua dimostrazione del "Lemma fondamentale", poi esteso da J.P. Chaoudouard-G. Laumon e recentissimamente da J. Heinloth. Numerosi lavori di area fisico-matematica, ad opera di E. Witten e altri collaboratori hanno dato importanti indicazioni euristiche sulle sue proprietà. Progressi importanti sono anche dovuti a T. Hausel, E. Letellier e F. Rodriguez-Villegas, che hanno investigato con metodi di origine aritmetica la topologia di una varietà strettamente collegata a M, la cosiddetta "Varietà dei Caratteri".

Nella conferenza verranno discusse le proprietà della fibrazione, il ruolo che essa gioca nella "teoria di Hodge non abeliana" delle superfici di Riemann e i due problemi a mio parere più importanti e misteriosi al momento sulla fibrazione di Hitchin: il programma, suggerito da considerazioni fisiche, di D. Gaiotto, G. Moore e A. Neitzke per la costruzione esplicita della metrica hyperkähleriana su M, e, soprattutto, la congettura "P=W". Quest'ultima è una uguaglianza che, in collaborazione con M. A. de Cataldo, e T. Hausel abbiamo riscontrato nel caso di fibrati di Higgs di rango 2, e congetturato valere in generale, tra due filtrazioni sui gruppi di coomologia di M. Queste filtrazioni hanno origini diversissime. Nonostante tale uguaglianza sia nota in vari esempi il motivo della sua validità è del tutto misterioso. I fisici W.Y. Chuang E. Diaconescu, G. Pan ne hanno proposto una interpretazione nell'ambito della teoria (congetturale) degli stati BPS. La congettura è stata recentemente estesa da V. Shende a un quadro molto generale, che include in modo sorprendente temi apparentemente lontani, quali la teoria degli invarianti di nodi legendriani e la teoria delle equazioni differenziali complesse con punti singolari irregolari.