GRANDI DEVIAZIONI, REPULSIONE ENTROPICA E FORMA LIMITE PER ALCUNI MODELLI DI SUPERFICI ALEATORIE SUL RETICOLO

FABIO MARTINELLI

ABSTRACT. Considereremo il modello di una superficie cristallina discreta aleatoria η introdotto da Temperley (1952). A ogni vertice di un quadrato Λ di lato L in $\mathbb{Z}^2$ viene associata un'altezza aleatoria $\eta_x \in \mathbb{Z}$ e la probabilità di una data superficie $\eta = \{\eta_x\}_{x \in \Lambda}$ è proporzionale al fattore di Gibbs $\exp(-\beta \mathcal{H}(\eta))$, $\beta > 0$, dove $\mathcal{H}(\eta) = \sum_b |\nabla_b \eta|^p$, $p \geq 1$. Il termine $\nabla_b \eta$, con $b = (x, y)$ legame di $\mathbb{Z}^2$, rappresenta il gradiente discreto di η lungo b e le condizioni al bordo di Λ sono assunte essere nulle.

A bassa temperatura $\beta \gg 1$ e per $p = 1$ studieremo l'effetto della repulsione entropica prodotto dal vincolo $\eta_x \geq 0 \forall x \in \Lambda$ (superficie sopra un muro) nel limite $L \rightarrow +\infty$. Mostreremo in particolare che:

- a parte piccole fluttuazioni, la superficie si alza fino a un'altezza deterministica $H(L) = \lfloor (1/4\beta) \log L \rfloor$;
- a ogni altezza della forma $H(L) - n$, $n = 0, 1, \dots$, con alta probabilità corrisponde un'unica curva di livello macroscopica $\Gamma^{(n)}$;
- per ogni successione $L_k \rightarrow \infty$ tale che il limite per $k \rightarrow \infty$ della parte frazionaria di $(1/4\beta) \log L_k$ esiste ed è diverso da un valore critico esplicito, la curva riscalata $L_k^{-1} \Gamma^{(n)}$ converge a una curva limite $\gamma^{(n)}$ soluzione di un principio variazionale;
- le fluttuazioni della curva di livello piu' alta $\Gamma^{(0)}$ attorno alla parte piatta della sua forma limite sono di ordine $L_k^{1/3+o(1)}$.

Discuteremo poi il caso $p = 2$ (modello Gaussiano discreto). In questo caso faremo vedere che il massimo della superficie si concentra su due valori, $M, M+1$, con $M \sim \sqrt{(1/2\pi\beta)(\log L) \log \log L}$. La chiave per questo risultato è mostrare che le grandi deviazioni per l'altezza η_0 nell'origine sono dominate da "pinnacoli armonici", approssimazioni discrete di un problema variazionale armonico. Ne consegue che, in presenza di un muro, la superficie si alza fino a raggiungere l'altezza H o $H+1$, $H \sim M/\sqrt{2}$, risultato che corregge la congettura $H \sim \sqrt{\log L}$ di Bricmont-El Meloukki-Fröhlich ('86). I nostri metodi si estendono anche ai casi $p \in (1, 2) \cup (2, \infty]$ con connessioni all'analisi armonica e alla combinatoria (matrici con segni alterni).

F. MARTINELLI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA, UNIVERSITÀ ROMA TRE, LARGO S. MURIALDO 1, 00146 ROMA, ITALIA.

E-mail address: martin@mat.uniroma3.it