XX Congresso U.M.I.
Siena, 7–12 settembre 2015

Approssimazione Lagrangiana discreta per leggi di conservazione

Marco Di Francesco
Università dell'Aquila

Sunto: Le leggi di conservazione non lineari (si veda ad esempio la monografia di Bressan [1] per una introduzione all'argomento) costituiscono un argomento classico in matematica applicata. Si tratta di una classe molto ampia di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari che descrivono tipicamente modelli in meccanica dei continui, quali la dinamica di un fluido comprimibile, o la dinamica di un mezzo visco-elastico, ma anche modelli in "real world applications", come ad esempio il traffico veicolare. Negli ultimi decenni, e con sempre maggior frequenza, esse figurano nelle aree di più recente applicazione della matematica, quali la biologia cellulare, la medicina, le scienze sociali (si vedano ad esempio le applicazioni al moto dei pedoni).

Se in meccanica dei continui una legge di conservazione non lineare deriva spesso da una riscrittura di un principio fisico ben stabilito in letteratura, nelle applicazioni più moderne della matematica spesso si cerca in una legge di conservazione un modello che possa predire l'evoluzione di un dato sistema in situazioni concrete, pur in assenza di principi primi che ne siano alla base. In particolare, la cosiddetta "ipotesi del continuo" - in base alla quale il sistema in esame è trattato alla stregua di un mezzo continuo, le cui variabili posseggano una "densità locale" - è spesso difficile da giustificare in alcuni contesti applicati, quali ad esempio il traffico veicolare o la moderna modellistica per il moto dei pedoni. Si tratta essenzialmente di stabilire se una coda di veicoli su un'autostrada o una folla di persone in uno stadio possano o meno essere trattati come "fluidi pensanti", la dinamica dei quali possa essere ben descritta da una variabile continua in una opportuna scala di spazio. Da un punto di vista computazionale, è ben noto che l'ipotesi del continuo semplifica di molto l'analisi di un modello matematico, in quanto permette di risolvere il sistema in esame mediante una singola equazione alle derivate parziali, anziché un sistema di equazioni ordinarie in numero pari al numero (molto grande) di agenti coinvolti nella dinamica (i singoli veicoli nel caso del traffico veicolare).

Un strumento con cui tipicamente i matematici applicati "certificano" la validità di un modello continuo è dimostrare un teorema di approssimazione della soluzione dello stesso mediante soluzioni "discrete" di un sistema di equazioni ordinarie per i singoli agenti (di più immediata giustificazione empirica) quando il numero di questi ultimi è molto grande. Un tale risultato è spesso chiamato "approssimazione di campo medio", o "approssimazione particellare". Così come in molti altri sistemi non lineari, anche per una legge di conservazione la difficoltà di un tale approccio sta nella necessità di produrre delle "stime" sulla soluzione approssimante che permettano il "passaggio al limite" verso la soluzione del modello continuo. Inoltre, la soluzione

"limite" deve soddisfare il cosiddetto "principio di entropia" di Kružkov [2], che permette di selezionare un'unica soluzione del problema di Cauchy associato.

In un risultato ottenuto recentemente in collaborazione con M. D. Rosini (Università di Varsavia), abbiamo mostrato che l'unica soluzione "entropica" di un dato problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare non lineare in una dimensione di spazio può essere espressa come approssimazione particellare mediante un sistema di equazioni differenziali denominato "Follow the leader". Quest'ultimo non è altro che una trasposizione discreta in variabili Lagrangiane della legge di conservazione considerata. Il nome del modello è evocativo soprattutto della sua applicazione nei modelli di traffico, in quanto esso descrive proprio il fenomeno di trasporto uni-direzionale dei veicoli su strada, secondo una legge che induce ogni veicolo a modulare la propria velocità a seconda della distanza dal veicolo che lo precede.

La topologia in cui è valido il teorema di approssimazione è quella indotta dalla 1-metrica di Wasserstein (una metrica nello spazio di misure di probabilità, derivante dalla teoria del trasporto ottimo, molto usata soprattutto in probabilità). Vi sono relazioni interessanti con altri concetti chiave nella teoria delle leggi di conservazione quali il principio del massimo, l'effetto regolarizzante L infinito - BV, e la stima di Oleinik [3]. Il risultato, contenuto in [4], è stato recentemente accettato per la pubblicazione dalla rivista Archive for Rational Mechanics and Analysis.

Bibliografia

[1] A. Bressan, Hyperbolic Systems of Conservation Laws. Oxford lecture series in mathematics and its applications. Ofxord University Press (2005).

[2] S. N. Kružkov, First order quasilinear equations with several independent variables. Mat. Sb. (N.S.) 81 (123), 228Ð255 (1970).

[3] O. A. Oleinik.: Discontinuous solutions of non-linear differential equations. Uspekhi Matematicheskikh Nauk 12(3), 3Ð73 (1957).

[4] M. Di Francesco, and M. D. Rosini, Rigorous derivation of nonlinear scalar conservation laws from follow-the-leader type models via many particle limit. Preprint 2014.

E–mail: `mdifrance@gmail.com`.

Sezione 0 conferenza breve: conferenza breve